1. Problemas de optimización

Modelo general

$$t_n = \phi(x_n)^T w + \eta_n \qquad \eta_n \sim N(0, \sigma_n^2)$$

donde $\phi : R^p \rightarrow R^a$

1. Mínimos cuadrados (OLS)

Problema de optimización

$$\min_w \sum_{n=1}^{N} t_n - \phi(x_n)^T w]^2$$

solución

$$w^* = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T t$$

$\phi \in R^{N \times a}$ es la matriz de diseño $\phi_{n,:} = \phi(x_n)^T$ y

$t = [t_1, \ldots, t_N]^T$

2. Mínimos cuadrados regularizados

$$\min_w \sum_{n=1}^{N} t_n - \phi(x_n)^T w)^2 + \lambda \|w\|^2$$

solución cerrada

$$w^* = (\phi^T \phi + \lambda I)^{-1} \phi^T t$$

3. Maxima verosimilitud (ML)

Dado el modelo probabilístico con ruido blanco

$$P(t_n|x_n, W) = N(t_n|\phi(x_n)^T W, \sigma_n^2)$$

log-verosimilitud

$$\log p(t|W) = -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{n=1}^{N} (t_n - \phi(x_n)^T W)^2 + cte$$

Maximizar esta expresión equivale a mínimos cuadrados ordinarios

---

4. Máximo a posteriori (MAP)

incluimos un prior gaussiano sobre $W \sim N(0, \alpha^{-1} I)$

$$\log p(W|t) \propto \log p(t|W) + \log p(W)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum (t_n - \phi(x_n)^T W)^2 - \frac{\alpha}{2} \|W\|^2$$

Equivalente a mínimos cuadrados regularizados

---

5. Regresión Bayesiana

se calcula la distribución posterior sobre W; No solo su valor MAP

$$P(W|t) = N(W|W_N, S_N)$$

con:

- $S_N^{-1} = \alpha I + \beta \phi^T \phi$
- $W_N = \beta S_N \phi^T \phi$
- $\beta = 1/\sigma_n^2$

La predicción para un nuevo X:

$$P(t_*|X_*, D) = N(\phi(X_*)^T W_N, \phi(X_*)^T S_N \phi(X_*) + \sigma_n^2)$$

6. Regresión con Kernel

En lugar de trabajar con $\phi(X)$, usamos el Kernel trick.

$$K_{ij} = K(X_i, X_j)$$

La solución tiene la forma dual

$$\alpha = (K + \lambda I)^{-1} t$$

Predicción

$$t_* = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n K(X_n, X_*)$$

7. Procesos Gaussianos

Modelado completamente probabilístico sobre funciones

$$f(X) \sim GP(0, K(X, X'))$$

dado el ruido σ_n^2 la predicción es:

$$P(t_*|X_*, D) = N(\mu_*, \sigma_*^2)$$

con:

$$\mu_* = K_*^T (K + \sigma_n^2 I)^{-1} t$$

$$\sigma_* = K(X_*, X_*) - K_*^T (K + \sigma_n^2 I)^{-1} K_*$$