Analisis Numérico - Metodos Numericos - Punto Fijo y Bisección

Luis Ayala , Javier Flechas, Manuel Rios ,Andres Otalora

Agosto 2021

1. Introducción

A lo largo del semestre hemos estado trabajando en los distintos métodos que existen para hallar raíces de una función de la forma f(x) = 0, el primer método que aprendimos fue el de bisección, este método trabaja dividiendo el intervalo de la función en la mitad y seleccionando un sub intervalo que tiene la raíz.

Después de esto se nos dio un método al azar para investigarlo y trabajar en el, a nosotros nos tocó el método del punto fijo, que consiste en transformar una función y repetir este proceso hasta que se compruebe el error permitido, gráficamente esto se ve así.

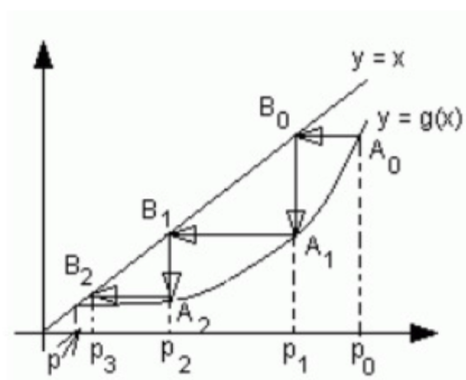

Figura 1: Grafica 1

2. Repositorios

Luis Ayala : https://github.com/LuisAyala7324/Analisis-2130.git

Javier Flechas : https://github.com/Esteban-Flechas/Analisis-2021-3
Manuel Rios : https://github.com/ManuelRiosRomero/Analisis-2130
Andres Otalora :https://github.com/AndresOtt2/Analisis-2130

3. Preguntas

3.1.

¿Cuales son condiciones para aplicar el método?. El método del punto fijo tiene varias condiciones que son indispensables para que este funcione correctamente, una de ellas es que se parta de una función f(x) continua que se encuentre en un intervalo [a, b], de la misma manera el método necesita que, de dicha función igualada a cero, f(x) = 0, se pueda hallar una función de la forma x = g(x) tal que g(a) ¡a y g(b) ¡b, lo que garantiza la existencia del punto fijo.También en este proceso se debe asegurar que al evaluar todos los valores comprendidos en el intervalo (a, b) en g'(x) el resultado siempre sea estrictamente menor a 1.

Respecto a señalar donde está implementadas en nuestra codificación la ecuación x = g(x) sugiere convertirla en una fórmula iterativa xi+1 = g(xi), i = 0, 1, 2, 3, . . . Siendo x0 el valor inicial, elegido con algún criterio. En la fórmula se usa un índice para numerar los valores calculados.

La fórmula iterativa producirá una sucesión de valores x: xi+1 = g(xi), i = 0, 1, 2, 3, ... Y se espera que tienda a un punto fijo de la ecuación x = g(x) lo cual implica que este resultado también satisface a la ecuación f(x) = 0, el algoritmo hace esto mismo.

3.2.

Proporcione una explicación geométrica del algoritmo.

Como se dijo anteriormente este método consiste en reescribir la ecuación f(x) = 0, la forma de rescribir la ecuación es x = g(x), ahora bien, está nueva ecuación debe satisfacerse con la misma raíz que la ecuación origina, esto nos lleva a entender que la existencia del punto fijo r en la ecuación x = g(x) es equivalente a encontrar una raíz real de la ecuación f(x) = 0: r = g(r) $\Leftrightarrow$ f(r) = 0, así:

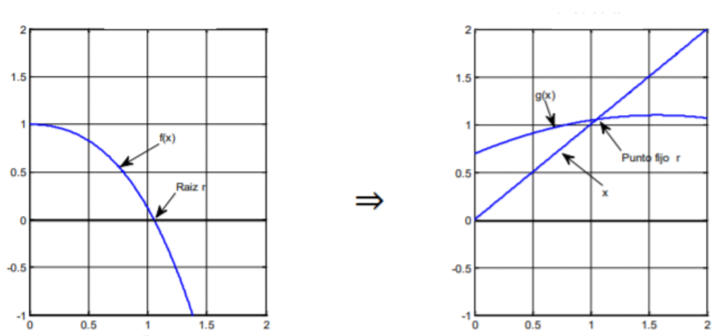

Figura 2: Grafica 2

3.3.

Diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo

En el siguiente diagrama busca dar a conocer el funcionamiento operativo de nuestro programa, es decir como e comporta el algoritmo en determinadas ocasiones con determinadas variables y con diversos valores, este diagrama no busca explicar el funcionamiento del algoritmo como tal, esta explicación ya está dada en otras preguntas, lo que queremos mostrar realmente con este diagrama es el funcionamiento de nuestro programa y como se comporta ”si”pasa tal cosa, que necesita para ”funcionar”que ”pasos”sigue e.t.c

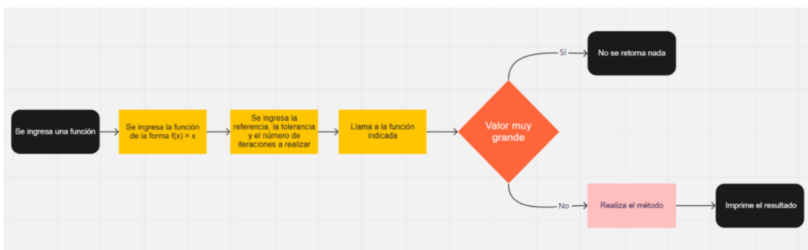

Figura 3: Diagram 1

3.4.

Aplicar el método y determinar la solución incluyendo la validación del resultado.

Esto se puede apreciar en nuestro programa, este está incluido tanto en nuestro repositorio con el nombre de ”main.py.º támbien se puede rectificar, modificar y/o añadir comentarios o sugerencias en el siguiente enlace :https://replit.com/join/irskwcckwx-andresott24 .

3.5.

Evaluar la relación numero de iteraciones versus tolerancia deseada; perdida de significancia versus número de iteraciones en cada caso.

A medida que se aumenta la tolerancia el numero de iteraciones se regula, a su vez pierde significancia dada la gran cantidad de iteraciones, Las iteraciones pueden aumentar drásticamente a medida que se aumenta la tolerancia y en algún punto normalizarse y quedarse en un número fijo de iteraciones.

3.6.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos (ejercicios) que se presente el problema.

Un estimado de la cantidad de iteraciones requeridas para calcular la raíz con error absoluto ε se lo puede obtener de:

$E_{i+1} = g'(z)\, E_i \ \leq m^i\, E_0 \ \leq \varepsilon$

i $log\,(m) \ \geq \ log\left(\frac{\varepsilon}{E_0}\right)$

i$\geq \frac{log\left(\frac{1}{E_0}\right)}{log(m)}$

3.7.

¿Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces?.

La respuesta corta a la pregunta es que no es posible realizar el método cuando existen más de dos raíces.

La explicación a esta respuesta tiene que ver con el funcionamiento del algoritmo.

$$g'(c) = \frac{g(p) - g(q)}{p - q} = 1$$

Figura 4: Demostración 1

Veamos : Sea r un punto fijo de x = g(x), Si g'(x) existe en el intervalo [a,b] y ∀x∈[a,b]($|g'(x)| < 1$), entonces el punto fijo r es unico.

Esto se puede demostrar de la siguiente manera:

Sean r,p puntos fijos de x = g(x) con r ≠ p, es decir, r = g(r), p = g(p) en [a,b] tal que ∀x∈[a,b]($|g'(x)| < 1$).

Por el Teorema del Valor medio : $\exists z \in [r, p]$ tal que $g'(z) = \frac{g(p)-g(r)}{p-r} \Rightarrow g'(z)\,(p-r) = g(p) - g(r) \Rightarrow |g'(z)|\,|(p-r)| = |p-r| \Rightarrow |g'(z)| = 1$, pues r ≠ p.

Pero r,p son puntos fijos y r,p ∈ [a,b] lo cual significa que $\forall x \in [p, r]\, |g'(x)| < 1$ lo cual implica una contradicción, esta contradicción implica que p debe ser igual a r.

3.8.

¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

Estas caracteristicas sí influyen.

1. Función Par: Existen dos raíces iguales, una positiva y la otra negativa.
2. Función Impar: Las raíces pueden ser distintas
3. Función Periódica: Las raíces poseen decimales infinitos.

3.9.

Realice una gráfica que muestre cómo se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones

Aqui se muestra la comparación entre la tolerancia y el número de iteraciones utilizados para obtenerla en cada caso del método.

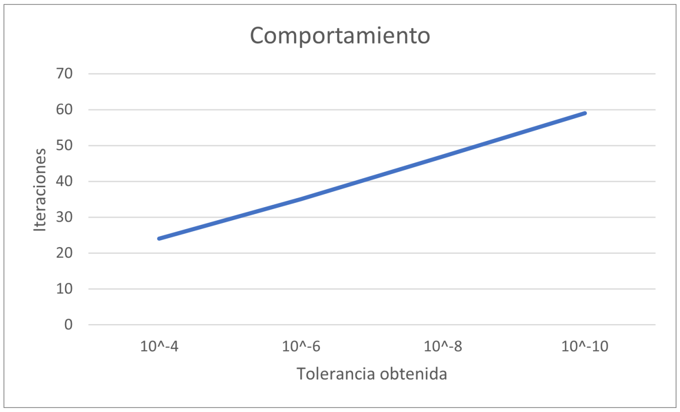

Figura 5: Función G

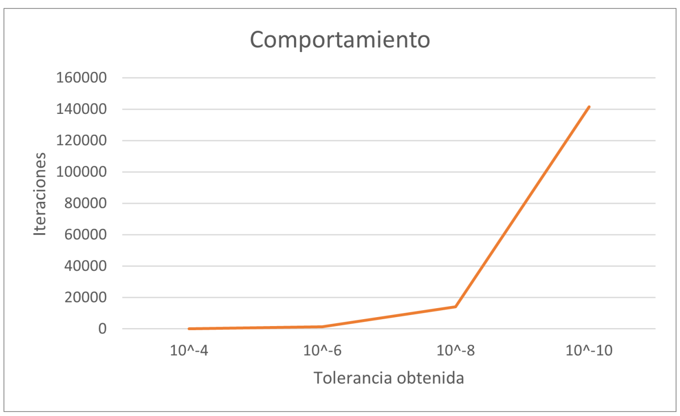

Figura 6: Función H

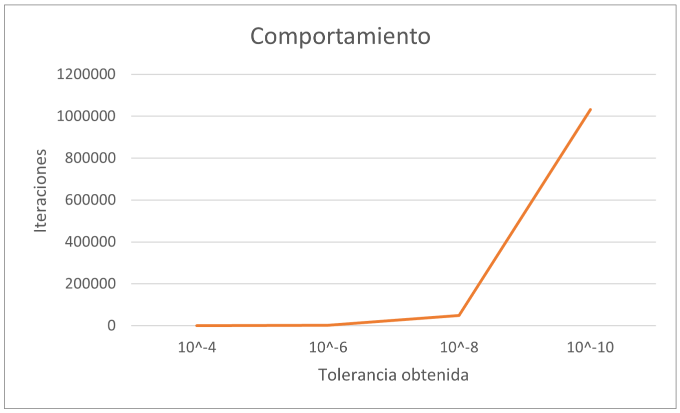

Figura 7: Función I

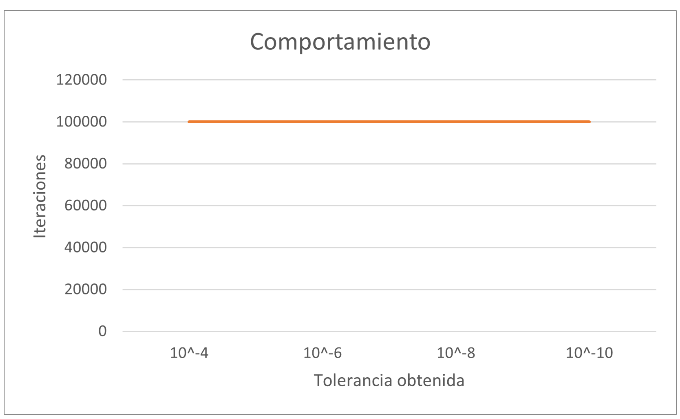

Figura 8: Función K

3.10.

Cada ejercicio debe ser comparado con el método de bisección.

Aqui se muestra a traves de imagenes los resultados obtenidos tanto por el metodo de bisección como por el metodo de punto fijo.

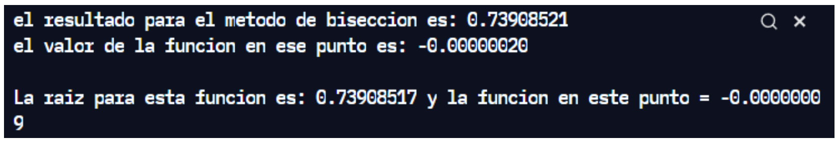

Figura 9: Función G

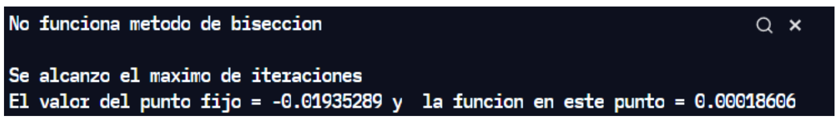

Figura 10: Función H

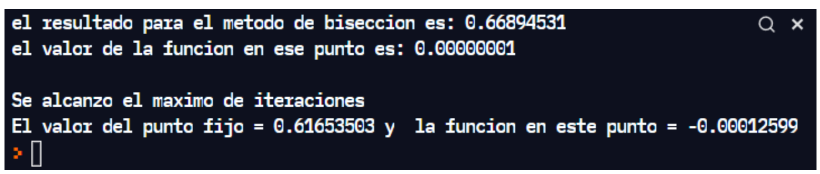

Figura 11: Función I

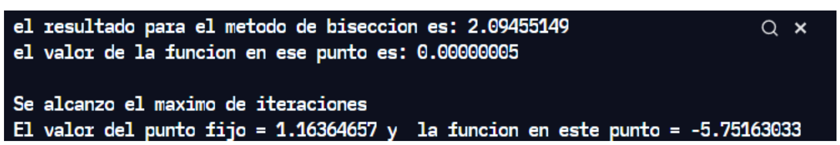

Figura 12: Función K

4. Conclusion

Comparando el método del punto fijo con el método de bisección, pudimos evidenciar la utilidad que estos tienen utilizando distintas funciones, verificando que dependiendo de la función puede llegar a ser mejor utilizar una u otra. Ademas de ver como en estos métodos el numero de iteraciones afecta directamente la proximidad del resultado a su valor real.

[1]

Referencias

[1] Luis R. *Analisis Numerico Básico*. Escuela Superior Politecnica de Litoral, 2014.