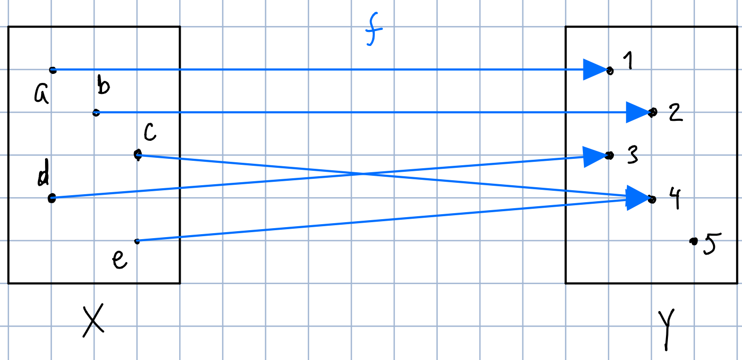
Funciones

Definición. Una **función** es una regla de asignación entre elementos de un conjunto X, llamado **dominio**, y otro conjunto Y, llamado **contradominio**, en la que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del contradominio. En símbolos:

$$f : X \to Y, X \text{ es el dominio \& } Y \text{ es el contradominio}$$

El **rango** es un subconjunto del contradominio. De hecho, es el conjunto de todos los elementos y del contradominio que son asignados a algún elemento del dominio, es decir, $y = f(x)$ con $x \in X$.

Ejemplo 1. Considere la representación por diagrama de flechas de una función f.



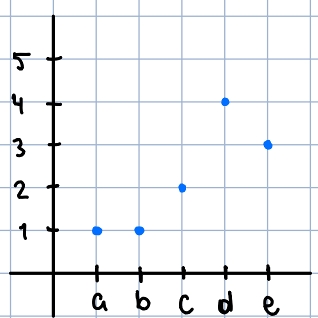
El dominio de f es el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$, el contradominio $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y el rango de la función $f(X) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Evidentemente, $f(X) \subseteq Y$.

⚠️ Como podemos ver, una función no es necesariamente una «*fórmula*».

Representación de funciones

Podemos representar una función de varias formas: gráfica, diagrama de flechas, fórmulas cerradas, tablas, fórmulas de dos líneas (*two-line notation*) y forma recursiva, entre otras.



Forma gráfica

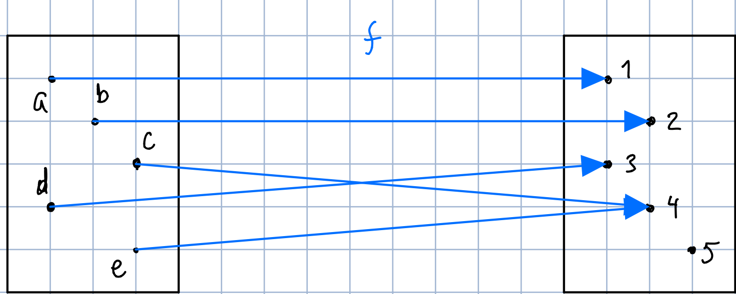


Diagrama de flechas

Fórmula cerrada: $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{Z}, g(n) = 2n + 1$

el **ámbito** o ***scope*** de una función nos indica dominio y contradominio de la misma

la **regla de asignación** nos indica cómo se realiza la asignación entre los elementos

x	a	e	i	o	u
$f(x)$	2	4	6	8	10

Forma tabular

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Fórmula de dos líneas

Funciones definidas de forma recursiva

Para una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, una **definición recursiva** consiste en una *condición inicial* junto con una *relación de recurrencia*. La condición inicial es el valor explícito de $f(0)$ o $f(1)$ y la relación de recurrencia es una fórmula para determinar $f(n+1)$ [*término siguiente*] en términos de $f(n)$ [*término actual*].

Ejemplo 2. El factorial de un número, puede definirse como una función recursiva.

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(0) = 1, f(n+1) = f(n)\cdot(n+1)$$

Evaluemos $f(1)$, $f(2)$ & $f(4)$.

$f(1) = f(0+1) = f(0)\cdot(0+1) = 1\cdot 1 = 1$
$f(2) = f(1+1) = f(1)\cdot(1+1) = 1\cdot 2 = 2$
$f(4) = f(3+1) = f(3)\cdot(3+1) = f(2+1)\cdot 4 = f(2)\cdot(2+1)\cdot 4 = 2\cdot 3\cdot 4 = 24$

El operador módulo

Se define la función mod: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y escribimos x mod y, como la función que devuelve el residuo cuando x se divide por y.

Esta función se conoce como el **operador módulo**.

Ejemplo 3. Función de dispersión (hashing)

Suponga que se tienen celdas en la memoria de una computadora indexadas de 0 a 10 y que deseamos guardar y recuperar enteros no negativos arbitrarios en estas celdas.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Uno de los enfoques es usar una **función de dispersión $H(n)$**. Una función de dispersión toma un dato que debe guardarse (o recobrarse) y calcula la posición para la ubicación del dato. Para nuestro ejemplo, si se desea guardar (o recuperar) el entero n, la función de dispersión sería:

$$H(n) = n \bmod 11$$

De esta manera, si queremos almacenar los números 15, 558, 32, 132, 102 y 5, las celdas de memoria de la computadora se podrían representar así:

Ahora supongamos que queremos guardar el número 257. Como $H(257) = 4$, el número 257 debe guardarse en la casilla 4; sin embargo, esta posición está ocupada. En este caso se dice que ocurre una **colisión**. En general, una colisión ocurre $H(x) = H(y)$, pero $x \neq y$.

Para manejar colisiones se requiere de una **política para solución de colisiones**; una política sencilla podría ser, por ejemplo, encontrar la celda superior inmediata disponible para contener ese dato.

👨‍🏫 Suponemos que 0 sigue a 10, en este ejemplo.

Si usamos esta política, entonces el número 257 se almacena en la celda de memoria 6.

132			102	15	5	257		558		32
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Si se quiere localizar un valor guardado n, calculamos $m = H(n)$ y se busca en la casilla m. Si n no está en esa posición, se busca en la siguiente posición más alta (recordemos que 0 sigue a 10); si n no está en esa posición, se prosigue a la siguiente posición y así sucesivamente.

Si se encuentra una celda vacía o se regresa a la posición original, se concluye que n no está presente; caso contrario obtenemos la posición de n.

⚠️ Si las colisiones son poco frecuentes y si cuando ocurre una se resuelve con rapidez, entonces la función de dispersión proporciona un método muy rápido para almacenar y recuperar datos. Como ejemplo, en las empresas los datos personales se almacenan y recuperan mediante una función de dispersión sobre los números de identificación de los empleados.

Ejemplo 4. Números pseudoaleatorios

Las computadoras se usan para simular el comportamiento aleatorio. Un programa para un juego tal vez puede simular el lanzamiento de dados, un programa para el servicio de clientes puede simular la llegada de los clientes a un banco, etc.

Este tipo de programas generan números que *parecen* aleatorios y se llaman **números pseudoaleatorios**. Por ejemplo, el programa que lanza dados necesita pares de números pseudoaleatorios, cada uno entre 1 y 6, para simular el resultado de los dados.

⚠️ Los números pseudoaleatorios no son verdaderamente aleatorios; si se conoce el programa que genera los números, es posible predecir qué números se obtendrán.

El método que en general se usa para generar números pseudoaleatorios se llama **método congruencia lineal**. Este método requiere cuatro enteros: el módulo m, el multiplicador a, el incremento c y una semilla s que satisfacen:

$$2 \leq a \leq m, \qquad 0 \leq c \leq m, \qquad 0 \leq s \leq m$$

Para este ejemplo usemos $m = 11$, $a = 7$, $c = 5$ & $s = 3$.

Después se hace $x_0 = s$ y se genera una secuencia pseudoaleatoria definida recursivamente por la función:

$$x_n = (ax_{n-1} + c) \bmod m, \text{ para } n \geq 1$$

Esta secuencia produce los siguientes números:

$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 5, x_4 = 7, x_5 = 10, x_6 = 9, x_7 = 2, x_8 = 8, x_9 = 6, x_{10} = 3, \ldots$$

Sin embargo, como $s = 3$, la secuencia de números comienza a repetirse a partir de x_{11}.

👨‍🏫 Se ha invertido gran esfuerzo en encontrar "buenos valores" para el método congruencia lineal. En la práctica, se usan valores grandes para m y a.

Propiedades de las funciones

Una función es **inyectiva** (uno a uno) si cada elemento del rango es la imagen de máximo 1 elemento del dominio; en términos sencillos «*no ocurre repetición en la asignación*».

Una función es **sobreyectiva** (sobre) si cada elemento del contradominio es la imagen de al menos un elemento del dominio; en términos sencillos «*ningún elemento del contradominio se queda sin ser asignado*».

Una función es **biyectiva** si es tanto inyectiva como sobreyectiva; en términos sencillos «*la función no repite y's & ninguna y se queda sin ser asignada*».

Ejemplo 5. Para cada función $f: X \to Y$, diga si esta es solo inyectiva, solo sobreyectiva, biyectiva o ninguna. Asuma que $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

f no es inyectiva ya que se repiten imágenes; f no es sobreyectiva ya que, por ejemplo, no existe $x \in X$ tal que $2 = f(x)$.

b) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

f sí es inyectiva; f sí es sobreyectiva; f es biyectiva

👨‍🏫 Una función en la forma *two-line* que es biyectiva se conoce como **permutación**

c) $f(x) = 6 - x$

f sí es inyectiva; f sí es sobreyectiva; f es biyectiva

d) $f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{si } x \text{ es par} \\ (x+1)/2, & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

f no es inyectiva ya que se repiten imágenes; f no es sobreyectiva

Cardinalidad de un conjunto

Definición. La *cardinalidad* de un conjunto es una medida de la "cantidad" de elementos en un conjunto.

<u>Notación</u>: La cardinalidad de un conjunto A usualmente se denota como $|A|$.

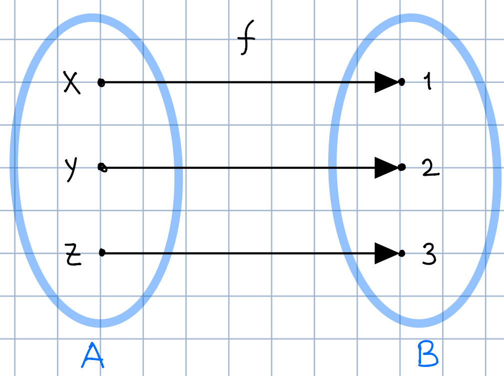
¿Cuándo son dos conjuntos A y B del *mismo tamaño*?

> *R*: Cuando tienen la misma "cantidad" de elementos. Pero, ¿qué significa "cantidad" cuando los conjuntos *tienen* infinitos elementos?

Para «evitar» la posible ambigüedad que causa la noción de "cantidad" cuando un conjunto tiene infinitos elementos, usaremos un procedimiento bien definido que nos permite entender cuándo dos conjuntos tienen el *mismo tamaño*.

Definición. Sean A y B conjuntos. Decimos que A y B tienen el *mismo tamaño o cardinalidad* si existe una función biyectiva $f: A \to B$. En ese caso escribimos $|A| = |B|$.

Ejemplo 6. Los conjuntos $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ tienen la misma cardinalidad, ya que:



Definimos la función $f: A \to B$.

f es inyectiva, pues no hay dos elementos en A con la misma imagen.

f es sobreyectiva, pues todo elemento en B es la imagen de algún elemento de A.

$\therefore f$ es biyectiva y $|A| = |B|$

Ejercicio 7. Sea $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Consideremos la función $f: P(A) \to \mathbb{N}, f(B) = |B|, B \in P(A)$. En palabras, f toma un subconjunto de A y le asigna su cardinalidad.

a) ¿Es f una función inyectiva? → No. Por ejemplo, $|\{1\}| = |\{5\}|$, pero $\{1\} \neq \{5\}$.

b) ¿Es f una función sobreyectiva? No. Por ejemplo, no existe $X \in P(A)$ tal que $|X| = 11$.

Definición. Sean A e $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\} \subset \mathbb{N}$ conjuntos. Decimos que A es un **conjunto finito** si existe una función biyectiva $f: A \to I_n$. En ese caso decimos que A tienen cardinalidad n y escribimos $|A| = n$.

Definición. Un conjunto A que no es finito, se dice que es un **conjunto infinito**. Además, decimos que un conjunto es **infinito enumerable** (o **contable**) si existe una función biyectiva $f\colon A \to \mathbb{N}$.

Resumen:
- A es un conjunto finito, si y solo si, $f\colon A \to I_n$ es una biyección.
- A es un conjunto infinito, si y solo si, A no es finito.
- A es un conjunto infinito enumerable, si y solo si, $f\colon A \to \mathbb{N}$ es una biyección.
- Se dice que un conjunto es *enumerable* o *contable*, si este es finito o infinito enumerable.

⚠️ A los conjuntos enumerables se les conoce también como **conjuntos discretos**; y son estos los que vamos a estudiar a partir de ahora.