Proyecto optimización

Carlos Andrés Riascos Pareja, Luis Fernando Quintero Castaño, Hector Fabio Ocampo Arbelaez
Ingeniería de Sistemas, Universidad del valle
Tuluá, Colombia
carlos.a.riascos@correounivalle.edu.co
luis.fernando.quintero@correounivalle.edu.co
hector.ocampo@correounivalle.edu.co

PALABRAS CLAVE: Modelo, Simplex, Minimizar, Distancia.

I. INTRODUCCIÓN

En el curso de optimización se estudió la manera en la que se debe modelar un problema y para dar solución a esto, según sea el objetivo (maximizar o minimizar) se aplican diferentes técnicas tales como: Método Simplex, método de la Gran M, método de las Dos Fases o Branch and Bound. En este documento se pretende dar solución a un problema de minimización donde se busca reducir la distancia de un colegio (Hogwarts de Magia y Hechicería) a varias ciudades midiendo la distancia entre ellas mediante la distancia Manhattan.
Para solucionar el problema de la ubicación del colegio, se planteó una solución a partir de la teoría de optimización. En la cual el modelo diseñado sirve para ubicar el colegio en el valle del cauca y servirá para ubicar la futura sede que piensa abrir. Dicho problema se resolverá mediante el método simplex.

II. PROBLEMA

El Colegio Hogwarts de Magia y Hechicería ha decidido ubicar una sus sedes en el Valle del Cauca. Como es natural, cada ciudad está presionando para que el colegio quede lo más cerca posible de ellos. El consejo directivo del colegio ha decidido medir la distancia entre dos ciudades como la distancia Manhattan, que es la distancia en el eje X más en el eje Y. Nuestro departamento, para efectos de simplificación, se representa como un cuadrado perfecto de N km por N km. La región se representa como el plano donde X y Y son positivas, la esquina inferior izquierda marca la posición (0,0). En este sistema las ciudades están situadas sobre las intersecciones, es decir siempre tienen posiciones enteras.

III. MODELO.

Dada una entrada, La cual consiste en un tablero NxN y K ciudades cada una con su posición en el tablero (X_k, Y_k). Para hallar la distancia del colegio con posición (H_x, H_y), a cada ciudad será la diferencia de las X más las diferencias de las Y, La función objetivo a minimizar primeramente será :

$$F.o. = (X_0 - H_x) + (X_1 - H_x) + .. + (X_k - H_x) + (Y_0 - H_y) + (Y_1 - H_y) + .. + (Y_k - H_y)$$

Pero esta función tiene un problema. En algunos casos la distancia puede ser negativa, ya que el orden de las restas puede no ser el correcto, por lo tanto se debe aplicar una técnica para asegurar que los valores siempre serán positivos en cada diferencia.

1. Por cada diferencia en la función objetivo se creará dos variables nuevas
   T_{2k} y T_{2k+1}
2. Se crean dos restricciones nuevas de la siguiente forma:
   $$T_{2k} - T_{2k+1} \geq (X_n - H_x)$$
   $$T_{2k} - T_{2k+1} \geq (H_x - X_n).$$
   Ya sea el caso de Y, se hace equivalentemente.
3. En la función objetivo cada desigualdad es cambiada por su equivalente de las que fueron agregadas a las restricciones:
   $$F.o. = T_0 - T_1 + T_3 - T_4 + ... + T_{4k-3} - T_{4k-2} + T_{4nk-1} - T_{4k}$$

El modelo será el siguiente:

Función objetivo:

$$Minimizar: \; z = T_0 - T_1 + T_3 - T_4 + ... + T_{4k-3} - T_{4k-2} + T_{4nk-1} - T_{4k}$$

Sujeto a:

$$T_0 - T_1 \geq (X_0 - H_x)$$
$$T_0 - T_1 \geq (H_x - X_0)$$
$$T_2 - T_3 \geq (Y_0 - H_y)$$
$$T_2 - T_3 \geq (H_y - Y_0)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$T_{4k-3} - T_{4k-2} \geq (X_k - H_x)$$
$$T_{4k-3} - T_{4k-2} \geq (H_x - X_k)$$

$$T_{4k-1} - T_{4k} \geq (Y_k - H_y)$$
$$T_{4k-1} - T_{4k} \geq (H_y - Y_0)$$
$$H_x \geq 0$$
$$H_y \geq 0$$
$$H_x \leq N$$
$$H_y \leq N$$

IV. EJEMPLO DEL MODELO.

Sea la entrada:

12
5
Palmira 2 3
Cali 10 2
Buga 11 0
Tuluá 0 3
RioFrío 1 2

El Modelo sería el siguiente:

Número de variables adicionales creadas: 5*4 = 20

$$Minimizar: \quad z = T_0 - T_1 + T_2 - T_3 + T_4 - T_5 + T_6 - T_7 + T_8 - T_9 + T_{10} - T_{11} + T_{12} - T_{13} + T_{14} - T_{15} + T_{16} - T_{17} + T_{18} - T_{19}.$$

Sujeto a:

$$T_0 - T_1 \geq (X_0 - H_x)$$
$$T_0 - T_1 \geq (H_x - X_0)$$
$$T_2 - T_3 \geq (Y_0 - H_y)$$
$$T_2 - T_3 \geq (H_y - Y_0)$$
$$T_4 - T_5 \geq (X_1 - H_x)$$
$$T_4 - T_5 \geq (H_x - X_1)$$
$$T_6 - T_7 \geq (Y_1 - H_y)$$
$$T_6 - T_7 \geq (H_y - Y_1)$$
$$T_8 - T_9 \geq (X_2 - H_x)$$
$$T_8 - T_9 \geq (H_x - X_2)$$
$$T_{10} - T_{11} \geq (Y_2 - H_y)$$
$$T_{10} - T_{11} \geq (H_y - Y_2)$$
$$T_{12} - T_{13} \geq (X_3 - H_x)$$
$$T_{12} - T_{13} \geq (H_x - X_3)$$
$$T_{14} - T_{15} \geq (Y_3 - H_y)$$
$$T_{14} - T_{15} \geq (H_y - Y_3)$$
$$T_{16} - T_{17} \geq (X_4 - H_x)$$
$$T_{16} - T_{17} \geq (H_x - X_4)$$
$$T_{18} - T_{19} \geq (Y_4 - H_y)$$
$$T_{18} - T_{19} \geq (H_y - Y_4)$$
$$H_x \geq 0$$
$$H_y \geq 0$$
$$H_x \leq 12$$
$$H_y \leq 12$$

IV. IMPLEMENTACIÓN.

La implementación consta de tres clases, principal, lector de archivos y solución modelo.
A. Principal: Esta clase es la encargada de manejar todos los elementos gráficos y las acciones correspondientes a cada botón.
B. Lector de archivos: Esta clase permite la entrada de datos por medio de archivos de texto, donde se lee cada línea para posteriormente pasar a solucionar el problema.
C. Solución del modelo: Esta clase se encarga de crear el modelo, recibe los datos procesados previamente por la clase lector de archivos y crea por cada ciudad 4 variables y 4 restricciones, también crea las 2 restricciones obvias y las 2 que limitan el tamaño del departamento. Después pasa a construir la función objetivo y por medio de la librería LpSolve para java da solución al problema, devolviendo los X y Y óptimos como también el valor mínimo de la función objetivo.

V. ANÁLISIS DE PRUEBAS REALIZADAS

A. Puntos Repartidos: Al tener los puntos repartidos por todo la matriz, se puede observar que el resultado óptimo tiende a ser el promedio de la suma de las coordenadas X y Y, donde el resultado obtenido por medio del modelo es igual a $x = 1$ y $y = 1$, y el promedio de la suma de coordenadas es de $x = 1$ y $y = 1$.**(Ver figura 1)**
B. Aglomeración de ciudades: Al tener una gran cantidad de ciudades cercanas en un mismo sector, el punto óptimo siempre tendrá a acercarse al sector donde se encuentra la aglomeración de ciudades**.(Ver figura 2)**
C. Solución en el mismo punto que una ciudad: En algunas ocasiones una ciudad de entrada puede llegar a ser un punto óptimo, debido a que en la suma de la distancias entre ciudades, la distancia entre esta ciudad y el punto óptimo será 0, minimizando así la función objetivo. Pero esto sucede cuando este punto se encuentra o muy lejos del resto de ciudades o muy cerca de las mismas y

no se encuentra aglomeración de ciudades en cualquier sector. **(Ver figura 3)**

VI. PRUEBAS

Las pruebas se basaron principalmente por ejemplo, en hallar el punto óptimo haciendo uso de una matriz 2x2 y 3 ciudades ubicadas en el punto (0,0), (1,1) y (1,2). Las suma de las distancias halladas de cada punto de la matriz fueron:
(0,0) = 6 ; (0,1) = 5 ; (0,2) = 6 ; (1,0) = 5 ; (1,1) = 4 ; (1,2) = 5 ; (2,0) = 6 ; (2,1) = 5 ; (2,2) = 6.
Resultando como punto óptimo (1,1) con un valor de 4 siendo el menor. Al realizar el ejemplo anterior en LpSolve observamos que nos devuelve el mismo resultado (**Ver figura 1**).
Este tipo de pruebas fueron realizadas para diferentes ciudades y tamaños, y al verificar el modelo y comparar los resultados, todos fueron iguales.

VII. JUSTIFICACIÓN DE NO NECESITAR BRANCH AND BOUND

Esta estrategia para solución de problemas enteros, no fue necesaria la implementación ya que el modelo propuesto siempre encuentra valores óptimos con valores enteros. Esto se debe a que las restricciones que limitan el dominio de las variables, siempre tienen pendiente igual a 1, por lo tanto las intersecciones, que son los puntos óptimos siempre serán valores enteros.

Por otra parte, dado que las ciudades también se encuentran en valores enteros del tablero, y la técnica de medida de las distancias es Manhattan, ayuda a que las distancias sean enteras y los resultados óptimos también sean enteros.

Para el ejemplo de las ciudades en los puntos (0,0), (1,1) y (2,2), al graficar las restricciones generadas para resolver este modelo, podemos observar que se generan rectas con una pendiente igual a 1:
(Ver figura 4,5,6,7)

Con lo anterior podemos evidenciar que todos los puntos de corte entre las rectas van a resultar en números enteros, ya que no se generan rectas con pendientes no enteras. Por tanto el método simplex lo que hace es seleccionar los puntos de corte y como todos se encuentran en coordenadas enteras, siempre su resultado va a ser números enteros.

VII. CONCLUSIONES

Tanto la función objetivo como sus restricciones son dependendientes para dar la respuesta correcta al problema de minimización o maximización. En este caso, la linealización del valor absoluto de la función objetivo, llevó a la creación de nuevas restricciones y variables que permitieron crear la función lineal sin que se perdiera la dependencia de la función y las restricciones, acotando tanto por derecha, como por izquierda y ofreciendo como respuesta la solución óptima.

Se pudo evidenciar que la respuesta óptima del problema, siempre trata de acercarse donde se encuentre más aglomeración de ciudades, minimizando así la distancia entre ellas, en otros casos, donde la mayoría de puntos quedan repartidos y no se encuentra aglomeración en algún sector, se evidencia que la solución trata de acercarse al promedio de la suma de coordenadas y en ocasiones da como resultado el mismo lugar donde se encuentra una ciudad.

La solución a este tipo de problemas es muy útil para empresas que desean abrir una sucursal en algún territorio y requieran minimizar los costos de reparto hacia algunas ciudades aledañas, así se podrá asesorar en qué lugar resulta más beneficioso ubicarse para minimizar la distancia entre ciudades y así mismo ahorrar en gastos de transporte y tiempo en viajes.

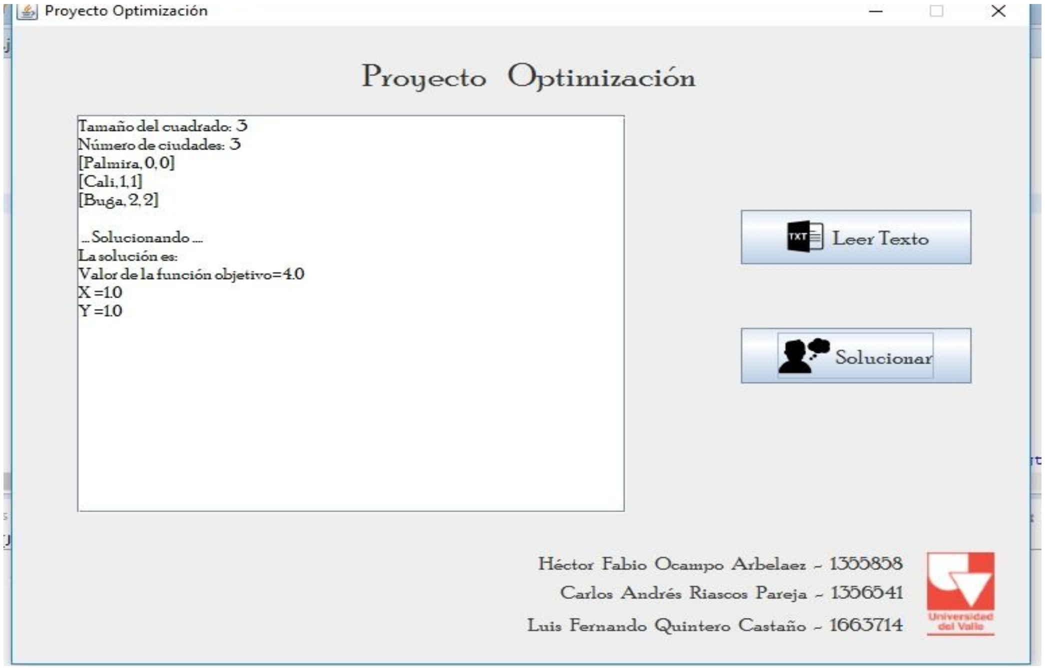

Fig1. Ejemplos de aplicación, Puntos repartidos

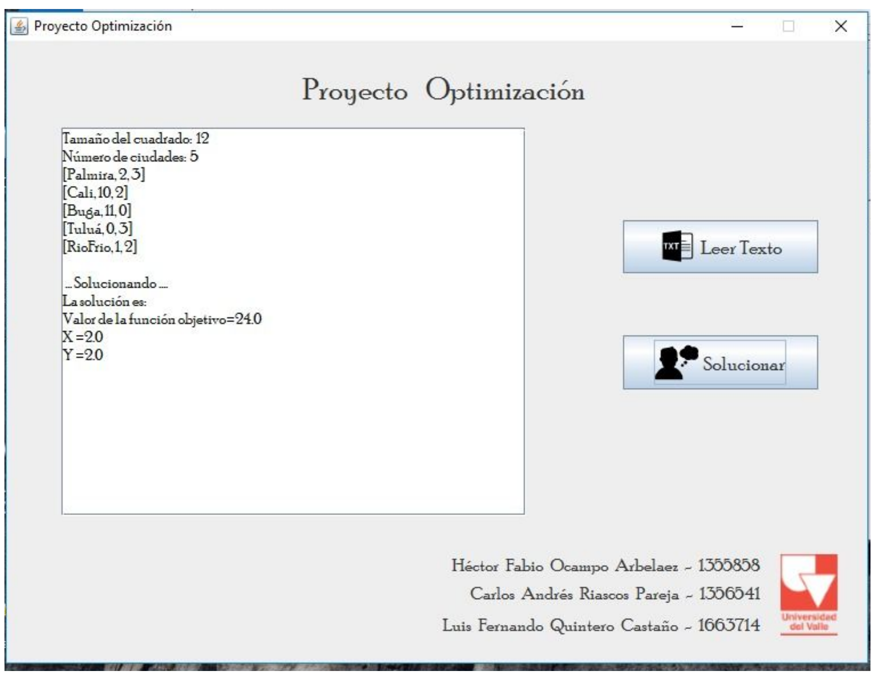

Fig 2. Ejemplos de aplicación, Aglomeración de ciudades.

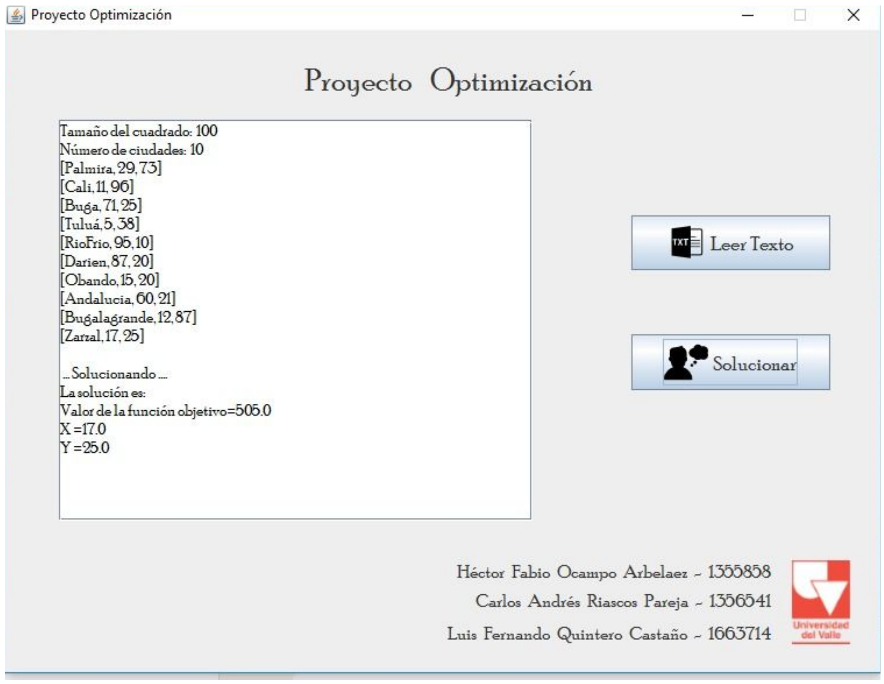

Fig 3.Ejemplos de aplicación,Solución que da en una misma ciudad

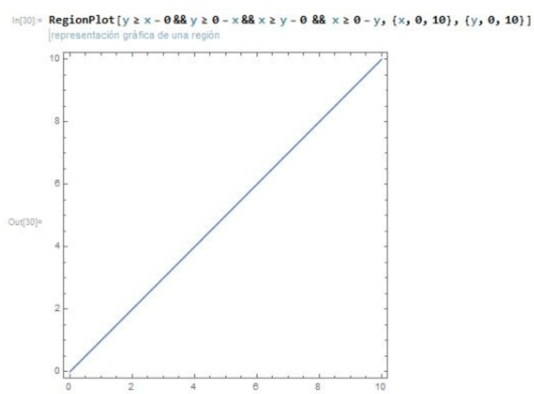

Fig. 4 Región de solución de las restricciones de la ciudad (0,0)

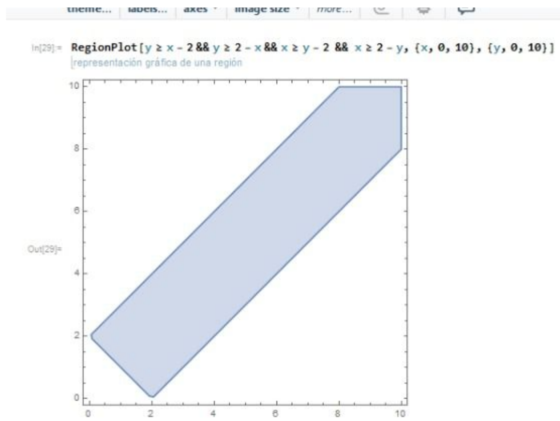

Fig. 5 Región de solución de las restricciones de la ciudad (2,2)

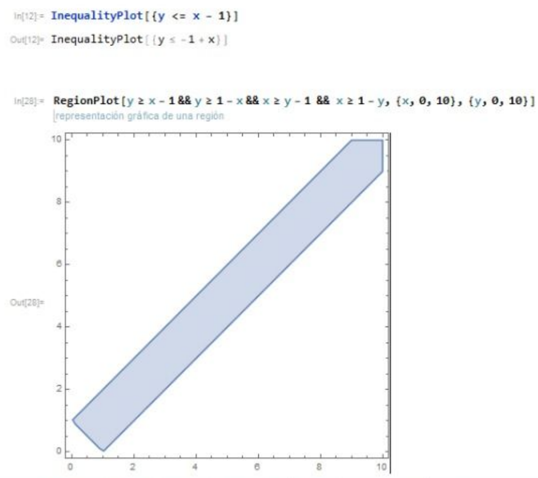

Fig. 6 Región de solución de las restricciones de la ciudad (1,1)

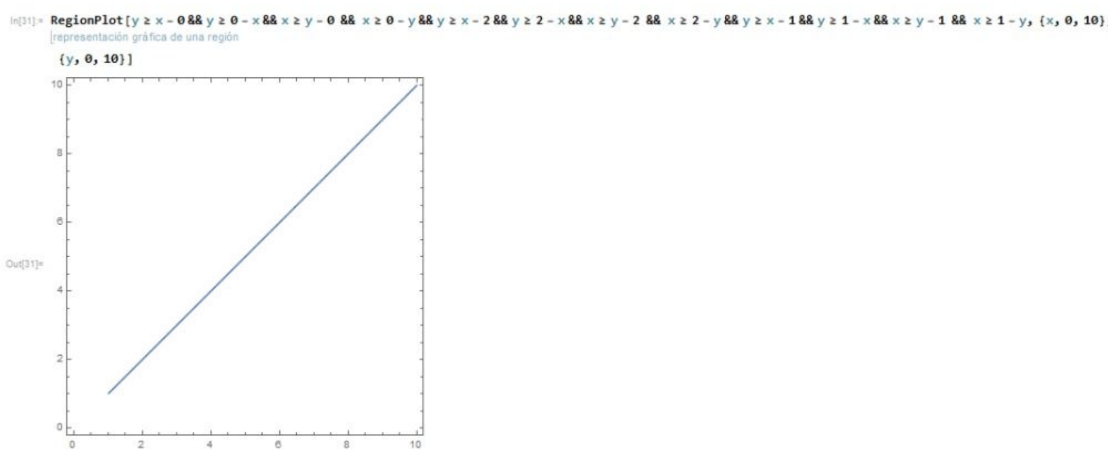

Fig. 7 Intersección de todas las regiones, dominio de la solución