Pràctica 2 ICC

Interpolació polinomial

Andrés Río Nogués
NiUB : 20722984

20 - 12 - 2023

Grupo Lab A : Arturo Vieiro

Part 1 : Diferències dividides de newton

Objectiu : Comparar la gràfica d'una funció inicial amb la del polinomi interpolador per a diferents valors de n (grau del polinomi interpolador)

Funcions a probar :

$$f(x) = \exp(x)\ , \quad x \in [0, 1]$$
$$f(x) = \sin(x)\ , \quad x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$f(x) = \tfrac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Important : el nom del fitxer d'inputs per al main s'anomena :

inputsMain1.dat

Aquest fitxer consta de 4 valors

n , Chebyshev , a , b

** n el grau del polinomi interpolador*

** si Chebyshev = 1 es farà amb abscisses de Chebyshev*
*si no es farà amb abscisses equidistants **

Les funcions venen donades per 3 arxius.c diferents (cal montar el programa amb la funció desitjada).

Els resultats es guarden a 'resultados.txt'

Main Interpfun

Funcions utilitzades :

difdiv :

El primer bucle serveix per indicar la fila del procés
El segon bucle fa l'operació amb els valors utilitzant les dades del primer bucle per saber el divisor a usar, actualitzant f per usar en la següent iteració del primer bucle.

Per a la iteració i, la posició i del vector f serà el coeficient i (al acabar f tindrà tots els coeficients)

horner Newton :

Modificació de horner per restar el valor de xi i poder avaluar el polinomi

func :

Per seleccionar la funció a testejar al muntar el programa

Main interpfun.c :

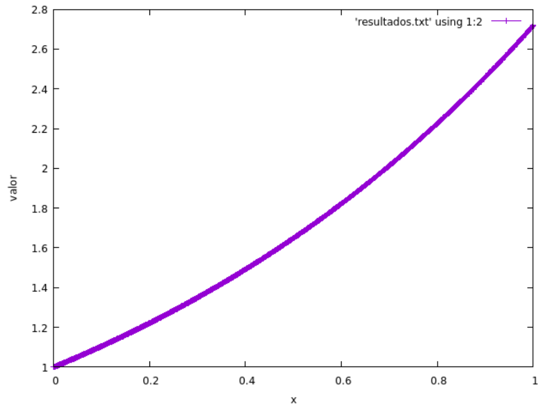
Lloc on calculem el valor de les abscisses i on apliquem els 1000 equidistants a horner .

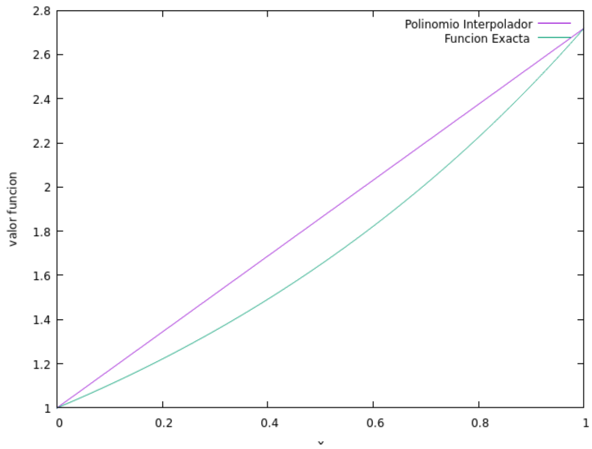
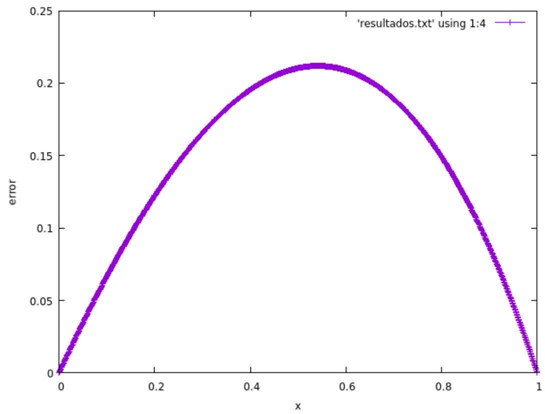
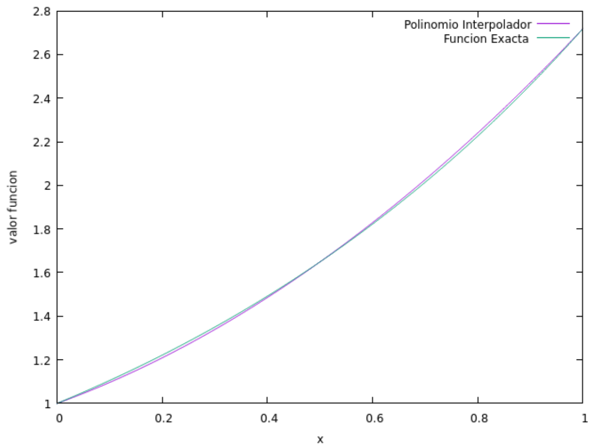
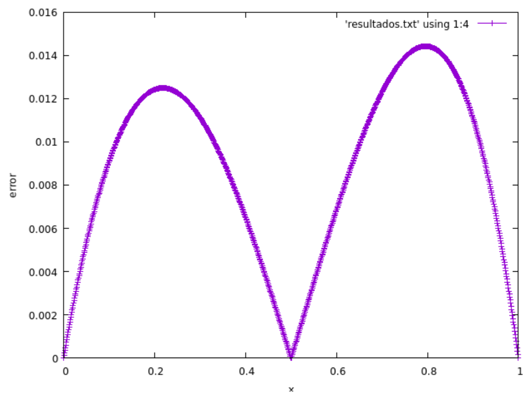
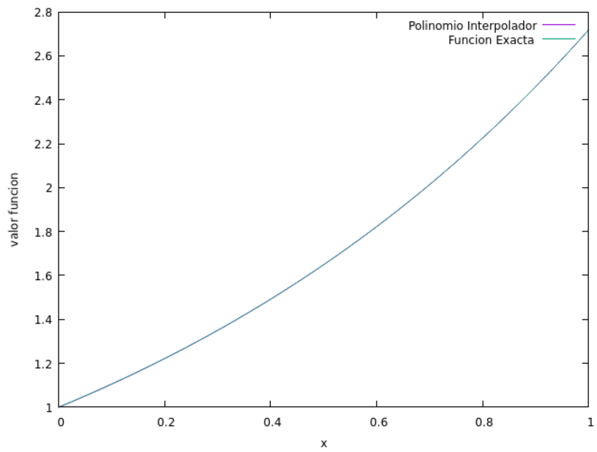
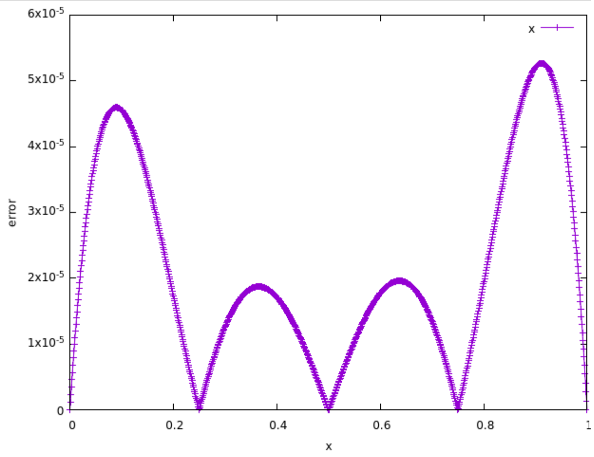
Resultats funció exp

$$f(x) = \exp(x)\ ,\quad x \in [0,1]$$

Amb abscisses equidistants

Funció exacta — >



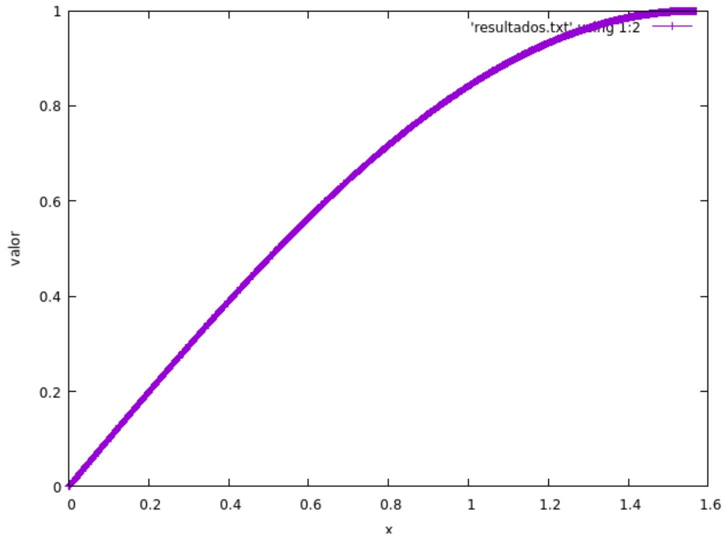
Grau	Polinomi interpolador - funció exacte	error
n = 1		
n = 2		
n = 4		

Resultats funció sinus

$$f(x) = \sin(x)\ , \quad x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

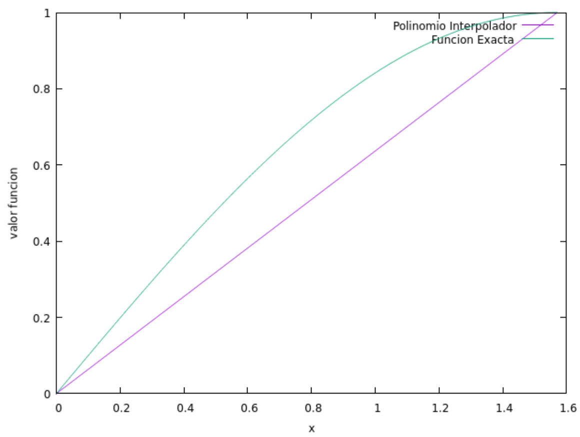
Amb abscisses equidistants

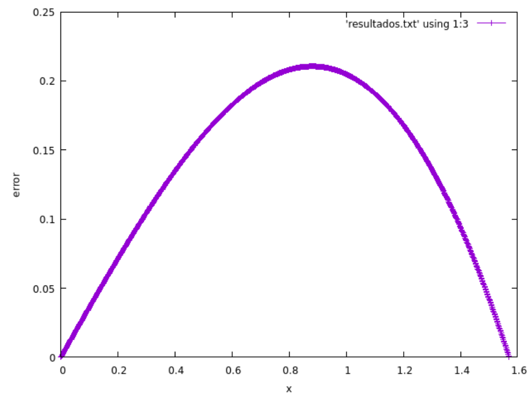
Funció exacta — >



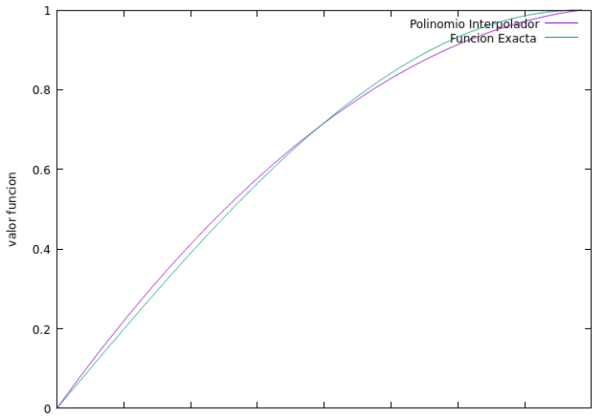
Grau | Polinomi interpolador - funció exacte | error

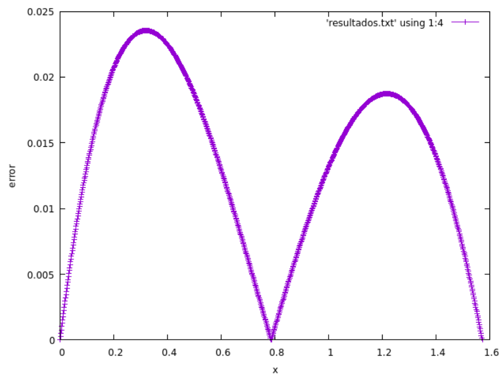
n = 1



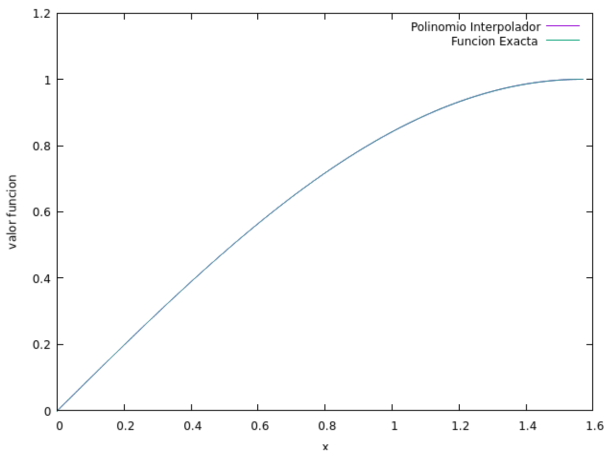


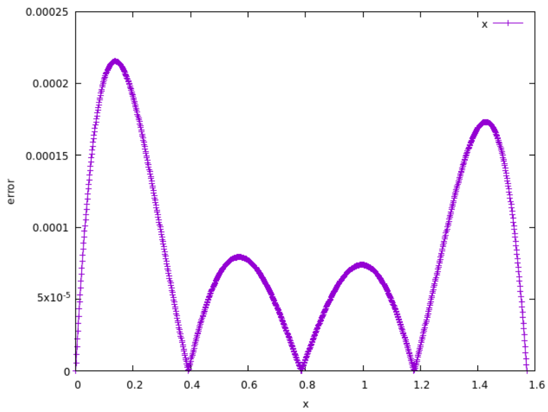
n = 2





n = 4



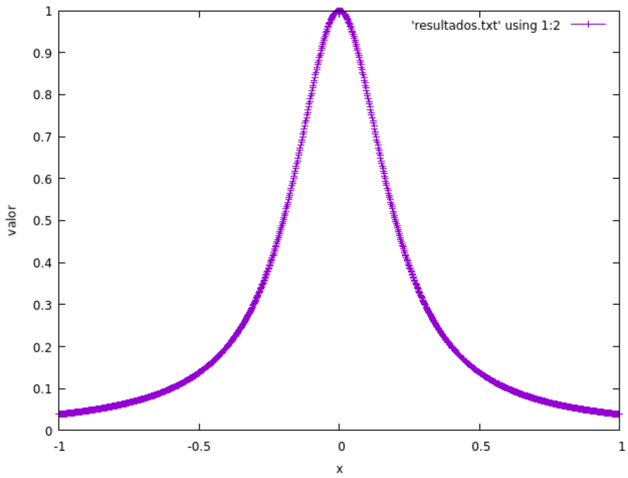


Resultats funció 3

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

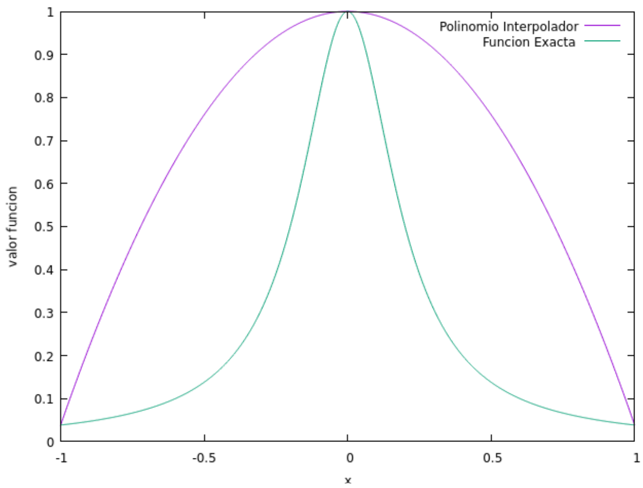
Amb abscisses equidistants

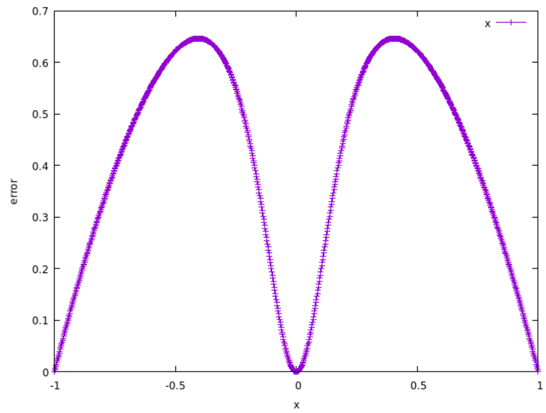
Funció exacta — >



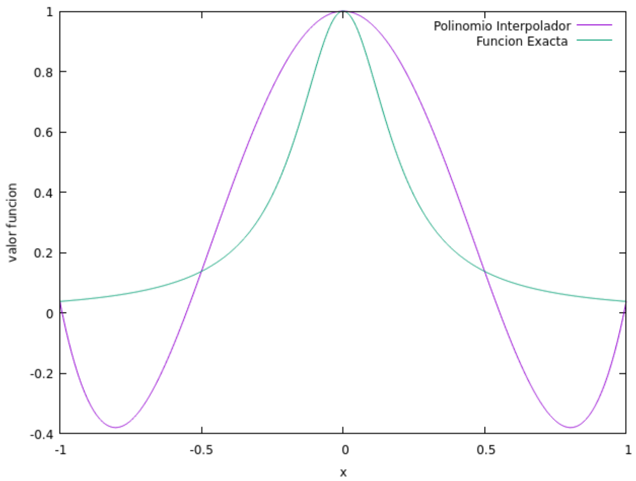
Grau | Polinomi interpolador - funció exacte | error

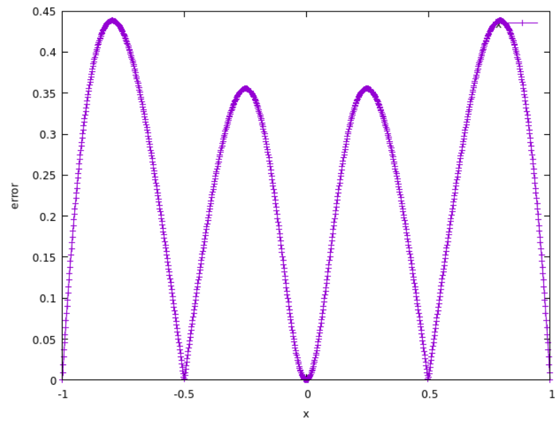
n = 2



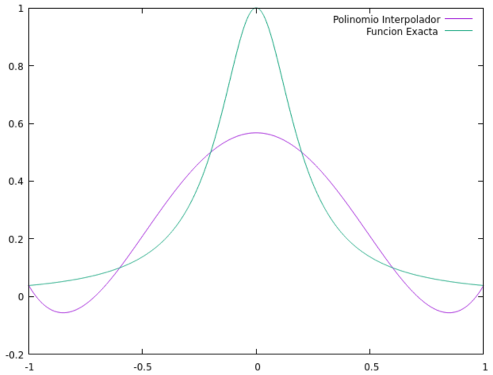


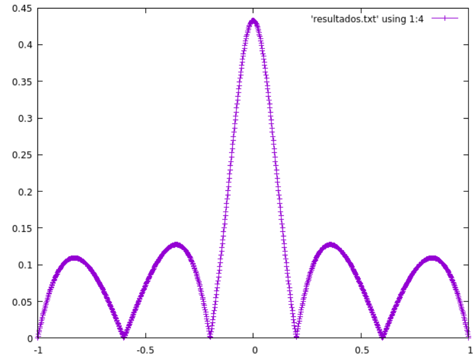
n = 4



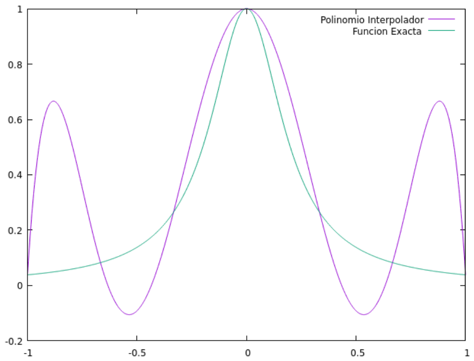


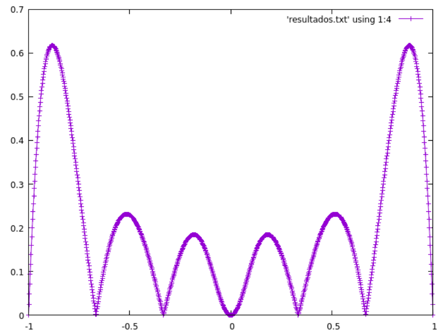
n = 5



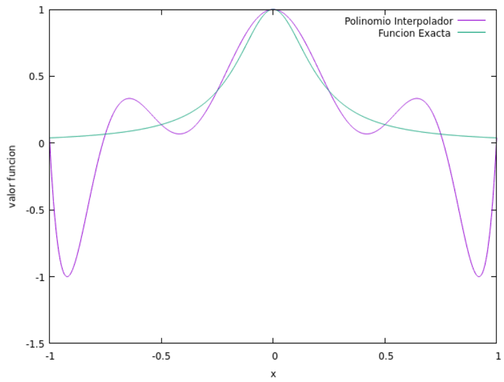


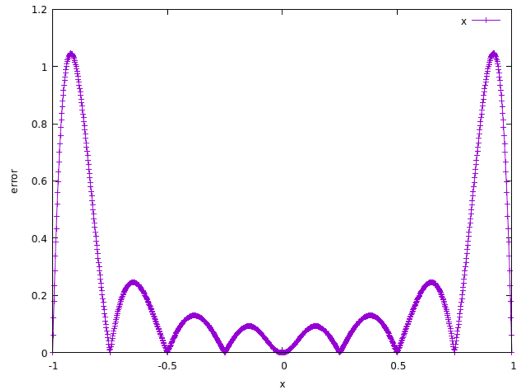
n = 6



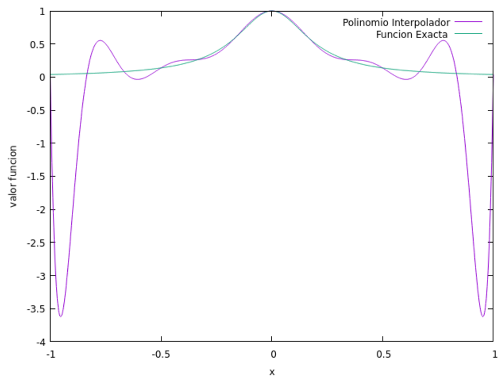


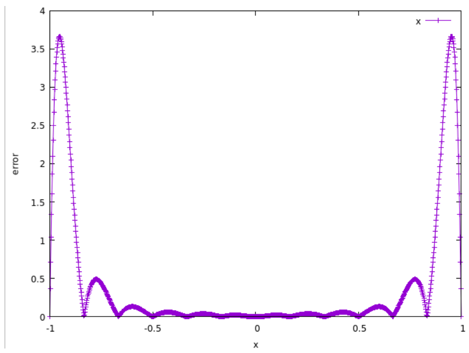
n = 8



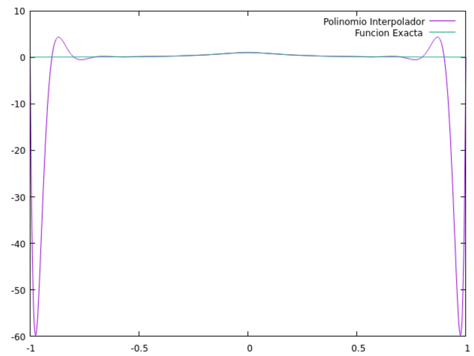


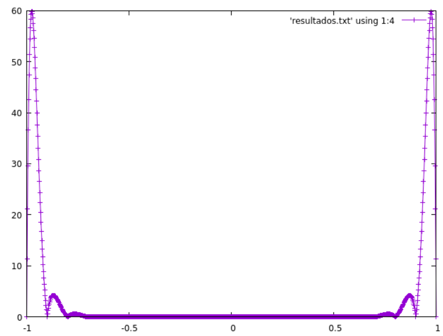
n = 12





n = 20



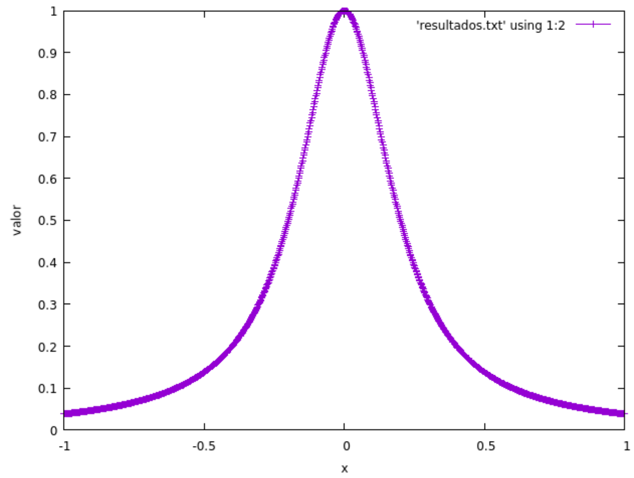


Resultats funció 3

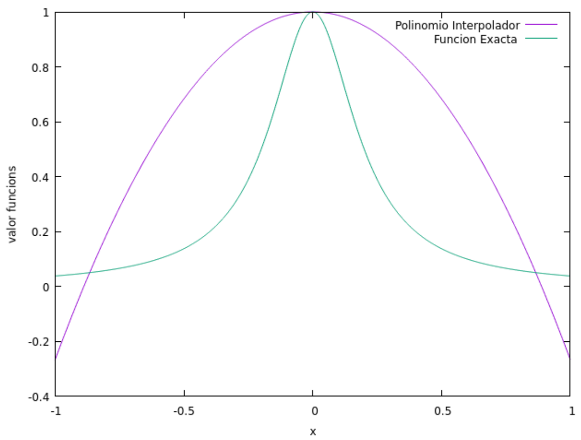
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

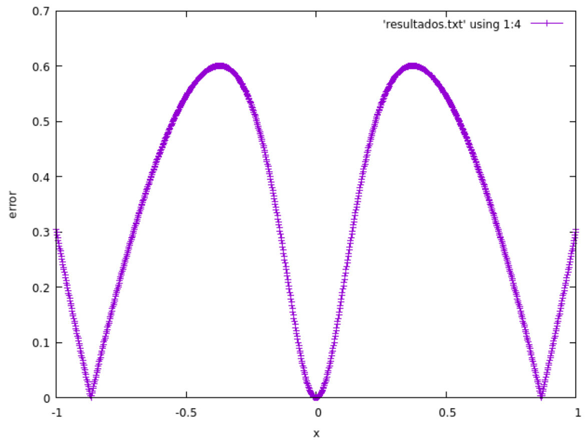
Amb *abscisses* de Chebyshev

Funció exacta — >

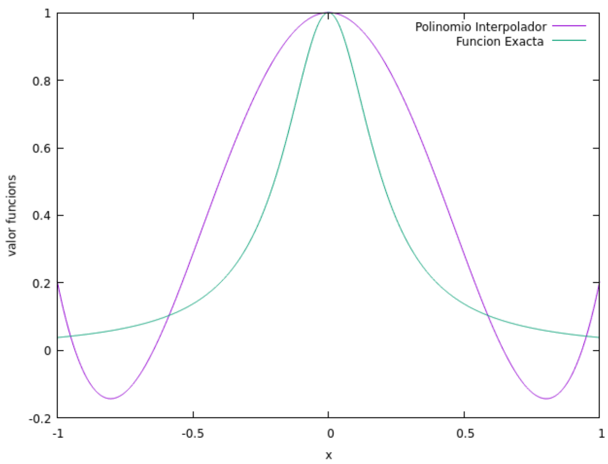


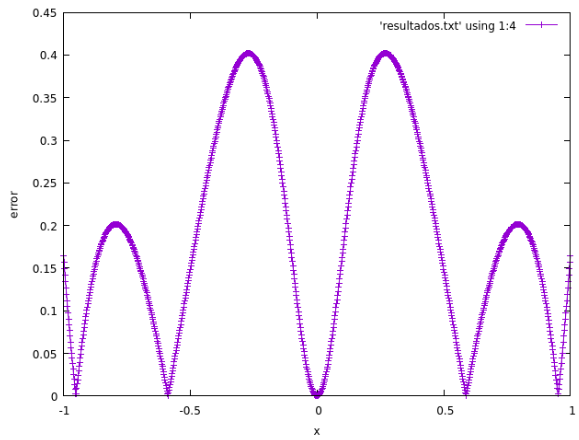
n = 2



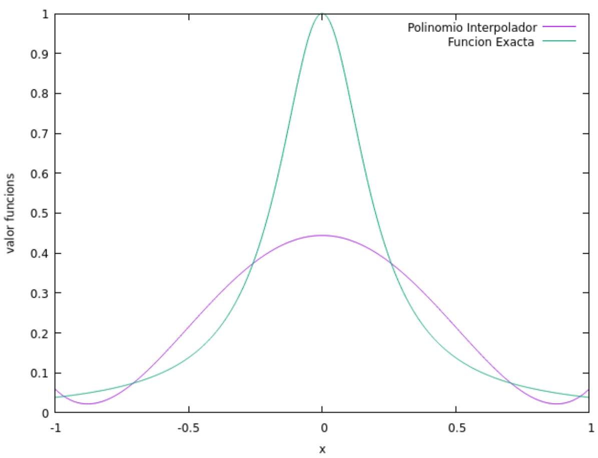


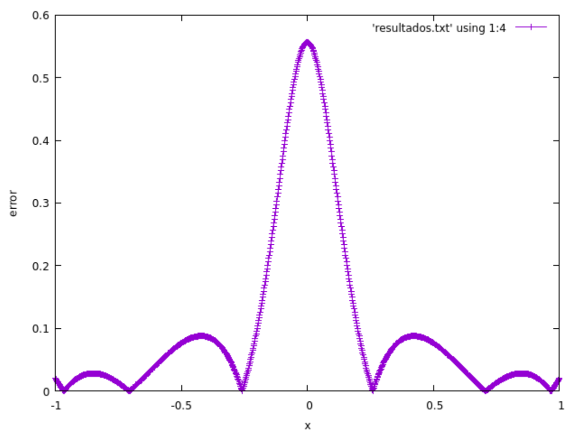
n = 4



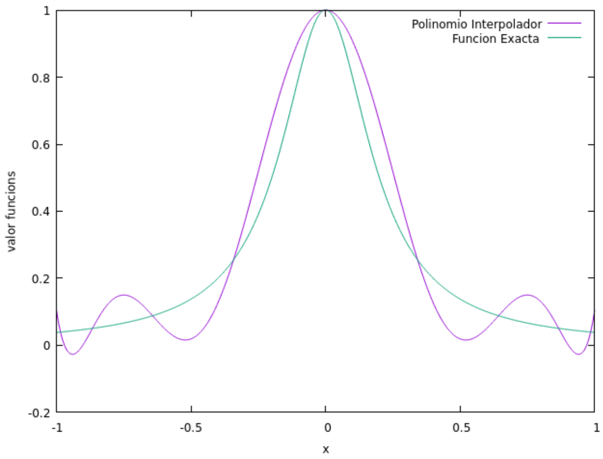


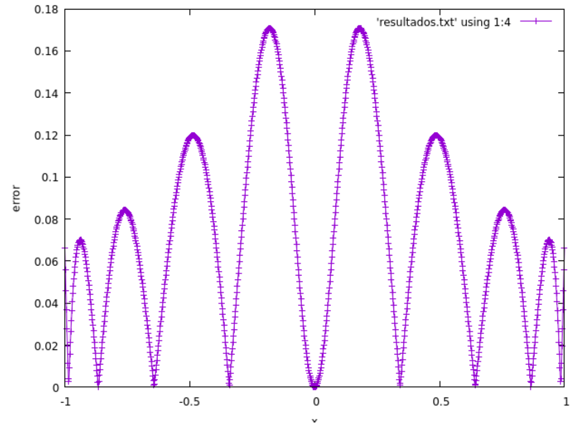
n = 5



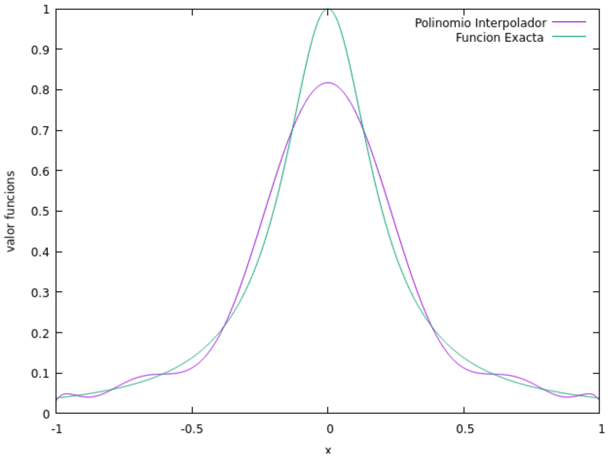


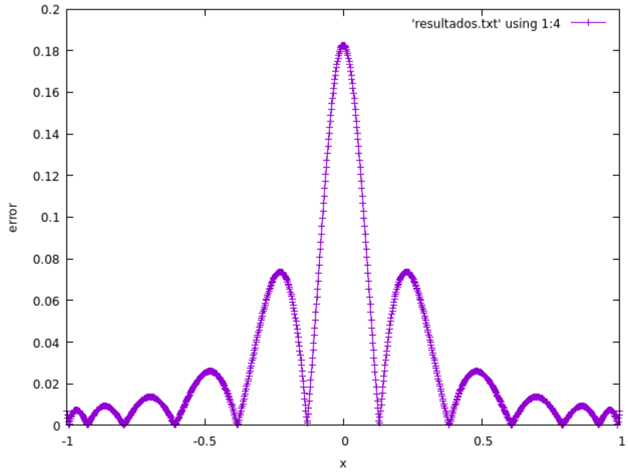
n = 8



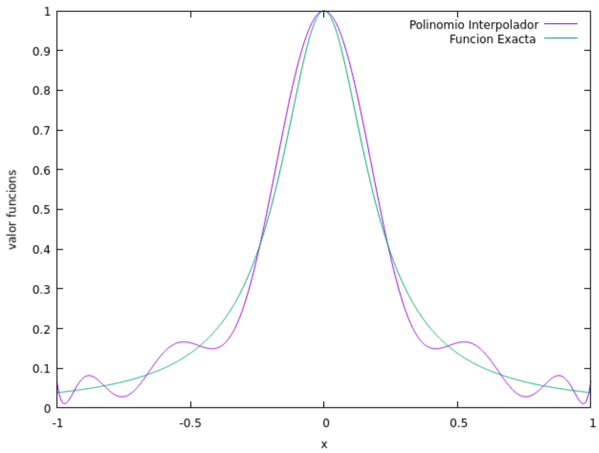


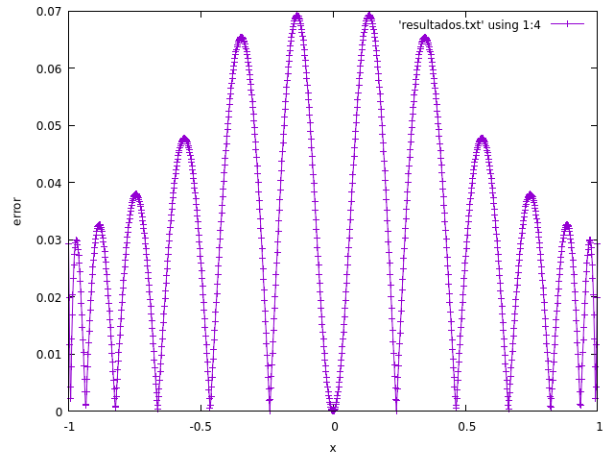
n = 11



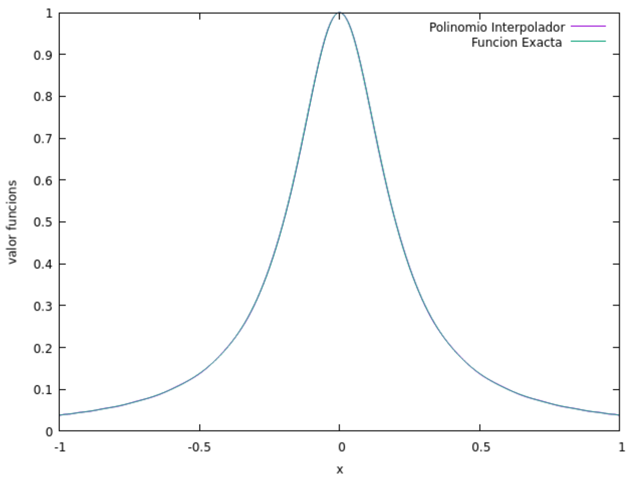


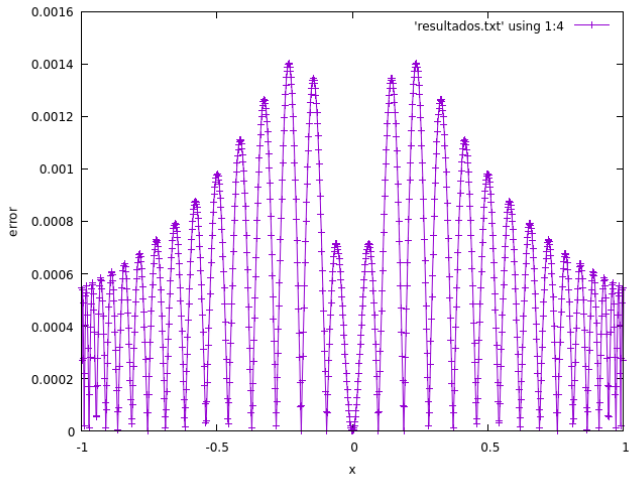
n = 12





n = 32





Conclusions :

Es pot observar com a mesura que augmentem el grau del polinomi interpolador l'error obtingut es va reduint considerablement fins a tenir un error mínim, a excepció de la funció 3 on es pot veure clarament el fenomen de Runge que a prop del 0 no hi ha problema però als extrems a mesura que augmentem n l'error augmenta considerablement, donant resultats sense cap digit correcte. Si apliquem abscisses de Chebyshev podem evitar aquest fenomen.

Parte 2 : Interpolació d’Hermite (simple)

Objectiu : Volem trobar un polinomi p ∈ P2n+1(x) que verifiqui les condicions: p(xi) = fi , p0 (xi) = gi , ∀ i = 0, 1, . . . , n .

Important : el nom del fitxer d’inputs per al main s’anomena :

inputsMain2.dat

Aquest fitxer té la següent estructura

n

temps distància velocitat
temps 2 distància 2 velocitat 2
…
temps n+1 distancia n+1 velocitat n+1

Els resultats es guarden a ‘resultadoMain2.txt’

Main Hermite

Funcions utilitzades :

dif div hermite :

Fem una petita variació a la primera iteració per utilitzar el valor de la derivada quan dos valors de x siguin iguals.

La resta és igual al dif div original.

horner 2 :

Apliquem l'algoritme per calcular els dos valors i retornar-lo dins d'un vector

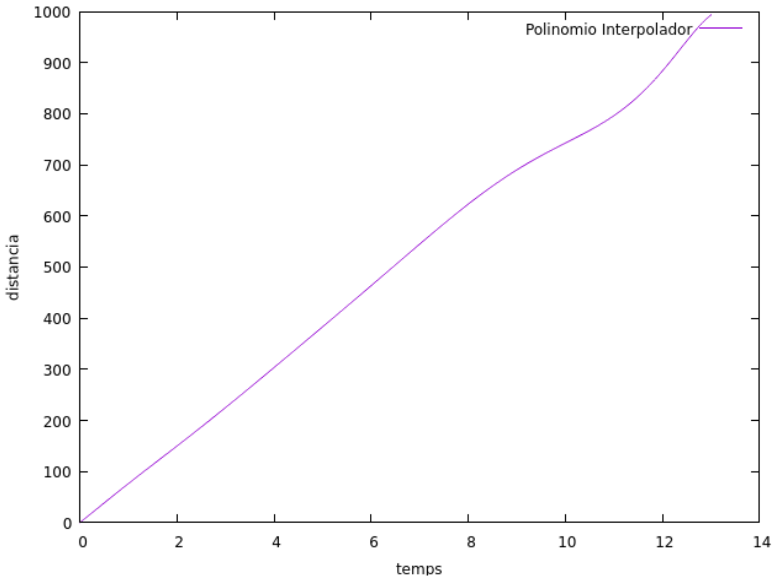
Main :

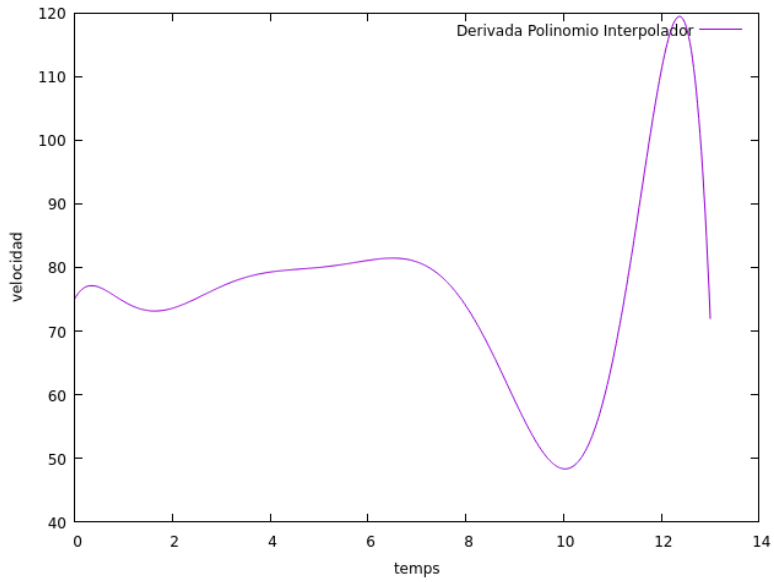
Lloc on avaluem el polinomi interpolador i la seva derivada als 501 punts

Resultats

Provem a calcular l’exemple de la pràctica :

temps (h)	0	3	5	8	13
distància (km)	0	225	383	623	993
velocitat (km/h)	75	77	80	74	72





Valor a t = 10

temps	distància	velocitat
1.0088000e+01	7.4676009e+02	4.8412669e+01

Es pot veure com encara que la distancia recorreguda en un temps determinat és regular , la velocitat no ho és.
S’observa que el valor de la velocitat ha superat valors de velocitat majors a 120 km/h i ha t=10 anava a una velocitat inferior de 50 km/h.

Parte 2 (II): Integració numérica

Objectiu: Volem aproximar integrals definides usant la regla dels trapezis i el mètode de Romberg.

Usarem una mateixa funció :

$$I = \int_0^1 \exp(x)dx$$

Per comparar els dos mètodes de Trapezi i de Romberg :

Important : el nom del fitxer d'inputs per als 2 mains s'anomena :

inputsMain3.txt

Aquest fitxer consta de 4 valors

a , b , precisió , maxit

Main Trapezi

Funcions utilitzades :

Trap.c :

Implementada per rebre els punts a , b i n.

Aquesta funció només calcula els punts no avaluats anteriorment i els retorna ja multiplicats per el pas actual.

Per aconseguir això el bucle comença a i = 1 (evitar agafar xi = a + 0) i avança de 2 en 2 per evitar els punts avaluats anteriorment fins a arribar a ser <= n - 1

MainTrapezi.c :

Per fer el càlcul de cada operació s'ha dividit la formula en 3 parts

$$h\left(\frac{1}{2}f(a)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{1}{2}f(b)\right)$$

Part "constant" : (variable 'valor1')

com la h = (b - a) / n i la n sempre assoleix múltiples de 2 el que fem és agafar h com b - a i per cada iteració anar dividint tot el conjunt entre 2
(la primera iteració tindrà n = 1, h = b-a)

$$h\left(\frac{1}{2}f(a)+\ \frac{1}{2}f(b)\right)$$

Part Trap Actual : (funció trap)

Seria les noves avaluacions de f(x) de cada iteració valor donat a través de la funció

Part Trap Anterior : (variable 'valorTrapAnterior')

Seria el valor del trap de la iteració anterior dividit entre 2, igual que hem fet amb la variable 'valor1'.

$$h\left(\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right)$$

Resultats Main Trapezi

Resultats obtinguts de la funció —> amb diferents inputs $I = \int_0^1 \exp(x)dx \; = \; e-1$

Tenint en compte el valor exacte de la integral: e-1 = **1.7182818284590452**

```
Valor precisio:    1.0000000e-04
Valor maxit: 9


 INICIO DEL BUCLE.
Iterat [1] Valor integral : 1.859140914229523e+00
Iterat [2] Valor integral : 1.753931092464825e+00
Iterat [3] Valor integral : 1.727221904557517e+00
Iterat [4] Valor integral : 1.720518592164302e+00
Iterat [5] Valor integral : 1.718841128579994e+00
Iterat [6] Valor integral : 1.718421660316327e+00
Iterat [7] Valor integral : 1.718316786850093e+00
Iterat [8] Valor integral : 1.718290568083478e+00

 FIN DEL BUCLE.
Valor integral : 1.718290568083478e+00
Iteracions fetes : 8
```

```
Valor precisio:    1.0000000e-08
Valor maxit: 18


 INICIO DEL BUCLE.
Iterat [1] Valor integral : 1.859140914229523e+00
Iterat [2] Valor integral : 1.753931092464825e+00
Iterat [3] Valor integral : 1.727221904557517e+00
Iterat [4] Valor integral : 1.720518592164302e+00
Iterat [5] Valor integral : 1.718841128579994e+00
Iterat [6] Valor integral : 1.718421660316327e+00
Iterat [7] Valor integral : 1.718316786850093e+00
Iterat [8] Valor integral : 1.718290568083478e+00
Iterat [9] Valor integral : 1.718284013366820e+00
Iterat [10] Valor integral : 1.718282374686093e+00
Iterat [11] Valor integral : 1.718281965015814e+00
Iterat [12] Valor integral : 1.718281862598238e+00
Iterat [13] Valor integral : 1.718281836993844e+00
Iterat [14] Valor integral : 1.718281830592746e+00

 FIN DEL BUCLE.
Valor integral : 1.718281830592746e+00
Iteracions fetes : 14
```

```
Valor precisio:    1.0000000e-12
Valor maxit: 40

       ...

 FIN DEL BUCLE.
Valor integral : 1.718281828459186e+00
Iteracions fetes : 21
```

```
Valor precisio:    1.0000000e-16
Valor maxit: 40

       ...

 FIN DEL BUCLE.
Valor integral :            -nan
Iteracions fetes : 33
```

Main Romberg

Funcions utilitzades :

Trap.c :

Cap canvi realitzat

Romberg.c :

En aquest cas volem guardar els valors calculats en una matriu per no tenir que avaluar la funció 3 cops en cada iteració.

$$T_j(h) = \frac{4^j T_{j-1}(\frac{h}{2}) - T_{j-1}(h)}{4^j - 1} \ \forall j \geq 1 \ .$$

La matriu utilitzada serà triangular sense la part superior amb forma de :

$$\begin{pmatrix} T_0(h) & & \\ T_0(h/2) & T_1(h) & \\ T_0(h/2^2) & T_1(h/2) & T_2(h) \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

En la formula :

T_{j-1} (h/2) seria la columna anterior i la fila actual
T_{j-1} (h) seria la columna anterior i la fila anterior

on la primera columna són els valors de la fórmula del trapezi (vista anteriorment)

$$h\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right)$$

Resultats Main Romberg

Resultats obtinguts de la funció —> amb diferents inputs

$$I = \int_0^1 \exp(x)dx \quad = \quad e - 1$$

Tenint en compte el valor exacte de la integral: e-1 = **1.7182818284590452**

```
Valor precisio:    1.0000000e-04
Valor numextrap: 9

Iteracion [0] Valor Integral  :  1.859140914229523e+00
Iteracion [1] Valor Integral  :  1.718861151876593e+00
Iteracion [2] Valor Integral  :  1.718282687924758e+00

 FIN DEL BUCLE.
Valor integral : 1.7182826879247577e+00
Iteracions fetes : 3
```

```
Valor precisio:    1.0000000e-08
Valor numextrap: 18

Iteracion [0] Valor Integral  :  1.859140914229523e+00
Iteracion [1] Valor Integral  :  1.718861151876593e+00
Iteracion [2] Valor Integral  :  1.718282687924758e+00
Iteracion [3] Valor Integral  :  1.718281828794531e+00
Iteracion [4] Valor Integral  :  1.718281828459078e+00

 FIN DEL BUCLE.
Valor integral : 1.7182818284590782e+00
Iteracions fetes : 5
```

```
Valor precisio:    1.0000000e-12
Valor numextrap: 40

Iteracion [0] Valor Integral  :  1.859140914229523e+00
Iteracion [1] Valor Integral  :  1.718861151876593e+00
Iteracion [2] Valor Integral  :  1.718282687924758e+00
Iteracion [3] Valor Integral  :  1.718281828794531e+00
Iteracion [4] Valor Integral  :  1.718281828459078e+00
Iteracion [5] Valor Integral  :  1.718281828459045e+00

 FIN DEL BUCLE.
Valor integral : 1.71828182845904531284e+00
Iteracions fetes : 6
```

```
Valor precisio:    1.0000000e-16
Valor numextrap: 40

Iteracion [0] Valor Integral  :  1.859140914229523e+00
Iteracion [1] Valor Integral  :  1.718861151876593e+00
Iteracion [2] Valor Integral  :  1.718282687924758e+00
Iteracion [3] Valor Integral  :  1.718281828794531e+00
Iteracion [4] Valor Integral  :  1.718281828459078e+00
Iteracion [5] Valor Integral  :  1.718281828459045e+00

 FIN DEL BUCLE.
Valor integral : 1.71828182845904531284e+00
Iteracions fetes : 6
```

Comparació entre Trapezi i Romberg

Clarament es pot observar com la regla dels trapezi convergeix amb més iteracions que el mètode de romberg

Per calcular 4 decimals :
- trapezi : 8 iteracions
- romberg : 3 iteracions

Per calcular 8 decimals :
- trapezi : 14 iteracions
- romberg : 5 iteracions

Per calcular 12 decimals :
- trapezi : 21 iteracions
- romberg : 6 iteracions

Per calcular 16 decimals :
- No s'arriba a aquest valor

Es pot observar com la convergencia es de aproximadament 0,5 decimals per iteració a trapezi i de aproximadament 2 decimals per iteració a romberg veient clarament com romberg millora considerablement la convergencia utilitzant menys iteracions.

També és observable com a partir de valors massa petits la diferència és tan minúscula que no podem seguir calculant decimals tenint un límit de valor exacte de 16 digits.