



Práctica 3

Sistema de Colonias de Hormigas

Autores: David Díaz Jiménez 77356084T Andrés Rojas Ortega 77382127F

Metaheurísticas

Informe de prácticas

David Díaz Jiménez, Andrés Rojas Ortega

Contents

1	Def	inición y análisis del problema	3
	1.1	Representación de la solución	3
	1.2	Función objetivo	3
	1.3	Operadores comunes	3
2	Cla	ses auxiliares	3
	2.1	Archivo	3
	2.2	Configurador	4
	2.3	Greedy	4
	2.4	Hormiga	4
	2.5	GestorLog	4
	2.6	Metaheuristicas	4
	2.7	Pair	4
	2.8	RandomP	4
	2.9	Timer	4
3	Pse	udocódigo	5
	3.1	algoritmo principal	5
	3.2	Inicialización de la matriz de feronoma	6
	3.3	Inicialización de la colonia de hormigas	7
	3.4	Generación de la Lista Restringida de Candidatos	7
	3.5	Aplicacion de la regla de transición	9
	3.6	Actualización de la feromona local	13
	3.7	Tareas demonio	14
	3.8	Obtener la mejor hormiga de la colonia	14
	3.9	Actualización de la feromona global	15
4	Exp	perimentos y análisis de resultados	16
	4.1	Procedimiento de desarrollo de la práctica	16
		4.1.1 Equipo de pruebas	16
		4.1.2 Manual de usuario	16

4.2	Parámetros de los algoritmos	17
	4.2.1 Sistema de Colonias de Hormigas	17
	4.2.2 Semillas	17
4.3		17
	4.3.1 SCH con $\alpha = 1$, $\beta = 1$	17
	4.3.2 SCH con $\alpha = 2$, $\beta = 1$	19
		20
4.4	Evolución de los resultados durante la experimentación	21
4.5	$\alpha = 1, \beta = 1 \text{ vs } \alpha = 1, \beta = 2 \text{ vs } \alpha = 2, \beta = 1 \dots \dots \dots$	33
	4.5.1 Causas del mejor resultados	39
4.6	Mejoras detectadas	40
	4.6.1 Actualización de la feromona local	40
	4.6.2 Lista Restringida de Candidatos	44
4.7	Búsqueda local vs búsqueda tabú vs algoritmo genético con op-	
	erador de cruce MPX elitismo 3 vs S.C.H. $\alpha=2$ $\beta=1$	44
	4.7.1 Resultados de la búsqueda local	44
	4.7.2 Resultados de la búsqueda tabú	45
	4.7.3 Resultados del algoritmo genético con elitismo $=3$	46
	4.7.4 Comparación de resultados	47
	4.7.5 Conclusiones	50

1 Definición y análisis del problema

Dado un conjunto N de tamaño n, se pide encontrar un subconjunto M de tamaño m, que maximice la función:

$$C(M) = \sum_{s_i, s_j \in M} d_{ij}$$

donde d_{ij} es la diversidad del elemento s_i respecto al elemento s_j

1.1 Representación de la solución

Para representar la solución se ha optado por el uso de un vector de enteros, en el que el elemento contenido en cada posición se corresponde con un integrante de la solución. La solución vendrá dada por las siguientes restricciones:

- La solución no puede contener elementos repetidos.
- \bullet Debe tener exactamente m elementos.
- El orden de los elementos es irrelevante.

1.2 Función objetivo

$$C(M) = \sum_{s_i, s_j \in M} d_{ij}$$

1.3 Operadores comunes

El operador de intercambio es el 1-opt, se seleccionara un elemento de la solución actual en base a un criterio y se sustituirá por un elemento que no pertenece a la solución.

2 Clases auxiliares

A continuación se enumeran las diferentes clases auxiliares utilizadas en el programa acompañadas de una breve descripción de las mismas.

nota: Para obtener información detallada se deben consultar los comentarios insertados en el código de cada una de las clases.

2.1 Archivo

Esta clase se encarga de almacenar toda la información que se encuentra dentro de cada archivo que contiene cada uno de los problemas.

2.2 Configurador

Utilizamos esta clase para leer y almacenar los parámetros del programa que se encuentran dentro del archivo de configuración.

2.3 Greedy

Esta clase implementa la funcionalidad del algoritmo Greedy, se utiliza para calcular el coste Greedy de cada problema. Este coste es necesario como parámetro para el Sistema de Colonias de Hormigas.

2.4 Hormiga

Esta clase almacena toda la información necesaria de cada hormiga de la colonia.

2.5 GestorLog

La función principal de esta clase es la administración de los archivos Log del programa y el almacenamiento de información para debug en los mismos.

2.6 Metaheuristicas

Esta clase se utiliza para lanzar la ejecución de los algoritmos para cada problema facilitado como parámetro.

2.7 Pair

Representa un par formado por un candidato y un coste asociado a este.

2.8 RandomP

Clase para generar números aleatorios.

2.9 Timer

Clase para gestionar los tiempos de ejecución del algoritmo.

3 Pseudocódigo

3.1 algoritmo principal

```
Algorithm 1 Sistema Colonia Hormigas
  matrizFeromonas \leftarrow InicializarFeromona()
  while iteracionesRealizadas<= limiteIteraciones \( \tau \) tiempoEjecucion <= lim-
  iteTiempoEjecucion do
    colonia \leftarrow InicializarColonia()
    for i=1; i<tamñoHormiga; i++ do
       for hormiga \in colonia do
         lrc \leftarrow GenerarLRC(hormiga)
         AplicarReglaTransicion(lrc, hormiga)
       end for
       ActualizarFeromonaLocal()
    end for
    TareasDemonio()
    \emptyset \leftarrow colonia
    iteracionesRealizadas \leftarrow iteracionesRealizadas + 1
  end while
```

Lo primero que realiza el algoritmo es inicializar la matriz de feromonas con el valor inicial. Esta tarea la realiza la función "InicializarFeromona()", la matriz de feromonas se almacena en la variable "matrizFeromonas". El valor inicial de feromona se pasa como parámetro del programa.

A continuación, entramos en un bucle while cuyas condiciones de parada son: las iteraciones realizadas y el tiempo de ejecución del algoritmo. En el caso de las iteraciones realizadas, almacenadas en la variable "iteracionesRealizadas", deben ser inferiores al límite almacenado en la variable "limiteIteraciones". El valor de "limiteIteraciones" se pasa como parámetro del programa. En el caso del tiempo de ejecución, que se almacena en la variable "tiempoEjecucion", debe de ser inferior al valor almacenado en la variable "limiteTiempoEjecucion". El valor de "limiteTiempoEjecucion" se pasa como parámetro del programa.

Cada vez que empieza una nueva iteración del bucle, lo primero que se realiza es inicializar la colonia de hormigas. La colonia se almacena en la variable "colonia" y la función encargada de inicializarla es "InicializarColonia()".

Una vez inicializada la colonia, iniciamos dos bucles for. El primero se ejecutará hasta que el valor de "i" alcance el número de elementos que debe contener cualquier solución (parámetro del programa, almacenado en la variable "tamañoHormiga"). El segundo bucle for recorrerá cada una de las hormigas pertenecientes a la variable "colonia".

Lo primero que realizamos es almacenar en la variable "lrc" la lista de candidatos restringida de la hormiga, calculada por la función "GenerarLRC(hormiga)".

Una vez almacenada la lista restringida, seleccionamos uno de los candidatos que contiene aplicando la regla de la transición y lo añadimos como parte de la solución de la hormiga. La función que realiza dicha tarea es "AplicarReglaTransicion(lrc,hormiga)".

Se finaliza el bucle for interior y la función "ActualizarFeromonaLocal()" se encarga de actualizar la feromona local de todas las hormigas después de haber añadido un nuevo elemento.

Una vez finalice el bucle for tendremos todas las hormigas completas, por lo que pasamos a seleccionar la mejor hormiga de la colonia y realizar la actualización de la feromona global. La función encargada de dichas tareas es "TareasDemonio()".

Para finalizar el bucle while, vaciamos la variable "colonia" y actualizamos el valor de la variable "iteracionesRealizadas".

3.2 Inicialización de la matriz de feronoma

Salida Devuelve la matriz de feromonas inicializada.

El funcionamiento de esta función es trivial: se inicializan todos los elementos de la matriz de feromonas con el valor de "feromonaInicial" (parámetro del programa).

3.3 Inicialización de la colonia de hormigas

Salida Devuelve la colonia de hormigas inicializada.

return colonia

El funcionamiento de esta función es trivial: se inicializan todas las hormigas con un elemento generado aleatoriamente con la función "GenerarEnteroAleatorio()". Cuando se tengan "tamañoColonia" (parámetro del programa) hormigas inicializadas, se devuelve la colonia como resultado.

3.4 Generación de la Lista Restringida de Candidatos

Entrada La hormiga para la que se quiere obtener su Lista Restringida de Candidatos.

Salida Devuelve la Lista Restringida de Candidatos "lrc".

Algorithm 4 GenerarLRC(hormiga)

```
lrc \leftarrow \emptyset
noSeleccionados \leftarrow \emptyset
\min \leftarrow +\infty
max \leftarrow -\infty
for i=0;i<tamañoMatriz;i++ do
  if i \notin hormiga then
     aporte \leftarrow 0
     for elemento \in hormiga do
        aporte \leftarrow aporte + MatrizCostes[elemento][i]
     end for
     if \min == +\infty then
        max \leftarrow aporte
        min \leftarrow aporte
     end if
     if aporte>max then
        max \leftarrow aporte
     else if aporte<min then
        min \leftarrow aporte
     end if
     noSeleccionados \leftarrow noSeleccionados \cup \{i, aporte\}
  end if
end for
valorCorte \leftarrow min + delta*(max - min)
for elemento \in noSeleccionados do
  if elemento.aporte>=valorCorte then
     lrc \leftarrow lrc \cup \{elemento\}
  end if
end for
return lrc
```

Lo primero que se realiza es inicializar los valores de las variables "lrc", "noSeleccionados", "min" y "max". "lrc" almacena la Lista Restringida de Candidatos, "noSeleccionados" almacena todos los elementos del problema que no forman parte de la hormiga, "min" y "max" almacena el mínimo y máximo aporte encontrado hasta el momento.

Se recorren todos los elementos del problema y se comprueba que no se encuentren ya en la hormiga.

En el caso de que no se encuentren en la hormiga, se actualiza el valor de la variable "aporte" a cero y se calcula el coste que aportaría a la hormiga si lo incluyéramos en ella. Este coste se almacena en la variable "aporte".

A continuación, se comprueba que aporte no sea mayor que "max" o menor que "min". En el caso de que se cumpla una de estas dos condiciones, se actualiza el valor de "max" o de "min" dependiendo del caso.

Para finalizar, se añade el elemento junto su aporte a la variable "noSeleccionados".

Se realiza lo anterior hasta que se haya recorrido todos los elementos del problema.

Lo siguiente que se realiza es el cálculo de "valorCorte" aplicando la siguiente fórmula, siendo "delta" un parámetro del programa:

$$valorCorte = min + delta * (max - min)$$

Para cada elemento de "noSeleccionados", se comprueba que su aporte sea mayor que "valorCorte". Si se da este caso, se añade el elemento a la Lista Restringida de Candidatos. Cuando se haya hecho la comprobación de todos los elementos "lrc" habrá sido generada.

Una vez se haya realizado esto último, se devuelve la Lista Restringida de Candidatos generada como resultado de la ejecución de la función.

3.5 Aplicacion de la regla de transición

Entradas La Lista Restringida de Candidatos "lrc", y la hormiga a la que queremos aplicar la regla de la transición.

Algorithm 5 AplicarReglaTransicion(lrc, hormiga)

```
probabilidadesTransicion \leftarrow \emptyset
sumatoria \leftarrow 0
q \leftarrow GenerarFloatAleatorio()
if q0 \le q then
      elemento \leftarrow 0
      mayorValor \leftarrow -\infty
      for elementoLrc \in lrc do
           sumatoria \leftarrow 0
           for elementoHormiga \in hormiga do
                  sumatoria \leftarrow sumatoria + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoLrc]^{alfa} * (matrizFeromonas[elementoHormiga]) + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoLrc]^{alfa} * (matrizFeromonas[elementoHormiga]) + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoLrc]^{alfa} * (matrizFeromonas[elementoHormiga]) + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga]) + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga]) + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga]) + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga]) + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga]) + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga]) + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga] + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga] + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga] + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga] + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga] + (matrizFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga] + (matrixFeromonas[elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHormiga][elementoHor
                 matrizCostes[elementoHormiga][elementoLrc]^{beta}
           end for
           if mayorValor<=sumatoria then
                  mayorValor \leftarrow sumatoria
                  elemento \leftarrow elementoLrc
           end if
      end for
      hormiga \leftarrow hormiga \cup \{elemento\}
      for elementoLrc \in lrc do
           valorSuperior \leftarrow 0
           for elementoHormiga \in hormiga do
                 valor Superior
                                                                                                                                           valor Superior
                  (matriz Feromonas [elemento Hormiga] [elemento Lrc]^{alfa}
                 matrizCostes[elementoHormiga][elementoLrc]^{beta})
           end for
           sumatoria \leftarrow sumatoria + valorSuperior
           probabilidades Transicion
                                                                                                                      probabilidades Transicion \\
           \{valorSuperior\}
      end for
      indice \leftarrow 0
      for valor \in probabilidadesTransicion do
           probabilidad \leftarrow (valor/sumatoria)
           probabilidadesTransicion[indice] \leftarrow probabilidad
           indice \leftarrow indice + 1
      end for
      uniforme \leftarrow GenerarFloatAleatorio()
      indice \leftarrow 0
      probabilidadAcumulada \leftarrow 0
      for probabilidad \in probabilidadesTransicion do
           probabilidadAcumulada \leftarrow probabilidadAcumulada + probabilidad
           if uniforme<= probabilidadAcumulada then
                  hormiga \leftarrow hormiga \cup \{lrc[indice]\}
           end if
           indice \leftarrow indice + 1
      end for
      lrc \leftarrow \emptyset
                                                                                            10
end if
```

Esta función selecciona uno de los candidatos de la Lista Restringida de Candidatos y la añade a la hormiga aplicando la siguiente regla:

$$p_k(r,s) = \begin{cases} \sin q0 \le q & \arg \max_{u \in J_k(r)} \{ (feromona_{ru})^{alfa} * (heuristica_{ru})^{beta} \} \\ \text{en otro caso} & p'_k(r,s) \end{cases}$$
(1)

$$p_k'(r,s) = \begin{cases} \text{si } s \in J_k(r) & \frac{(feromona_{rs})^{alfa} * (heuristica_{rs})^{beta}}{\sum_{u \in J_k(r)} (feromona_{ru})^{alfa} * (heuristica_{ru})^{beta}} \\ \text{en otro caso} & 0 \end{cases}$$
 (2)

Lo primero que se realiza en la función es inicializar las variables "probabilidadesTransicion", "sumatoria" y "q". "probabilidadesTransicion" almacenará la distribución de probabilidades de todos los candidatos y su valor inicial será el conjunto vacío. "sumatoria" almacenará la suma de las dos ecuaciones anteriores y su valor inicial será 0. "q" almacenará un aleatorio generado por la función "GeneraFloatAleatorio()".

Después de esto se comprueba si "q0" es menor o igual que "q". Si se da este caso se realiza lo siguiente.

Se inicializa "elemento" a 0 y "mayorValor" a menos infinito. "elemento" se encargará de almacenar el elemento de "lrc" seleccionado. "mayorValor" almacenará el mayo resultado calculado hasta el momento.

Para cada elemento perteneciente a la Lista Restringida de Candidatos se calcula la fórmula de la transición respecto a cada elemento almacenado en la hormiga, y se adiciona cada resultado a la variable "sumatoria".

Una vez obtenido el valor de "sumatoria", se comprueba si mejora "mayor-Valor". Si se da este caso, se actualiza "mayor-Valoe" con "sumatoria" y se guarda el elemento de "lrc" en la variable "elemento".

Cuando se haya recorrido toda la Lista Restringida de Candidatos se añade a la hormiga el mejor elemento de "lrc", almacenado en "elemento".

En el caso de que "q" sea menor que "q0" se realiza los pasos que se describen a continuación.

Se inicia un bucle for que recorrerá todos los elementos de la Lista Restringida de Candidatos.

Dentro de este bucle se inicializa la variable "valor Superior" a 0, esta variable almacenará el numerador de la fórmula. A continuación se recorren todos los elementos de la hormiga y se realiza el cálculo de la fórmula del numerador y se adiciona a "valorSuperior".

Una vez se hayan hecho todos los cálculos con todos los elementos de la hormiga, se adiciona a "sumatoria" la variable "valorSuperior" y se añade a "probabilidadesTransicion" esta última.

Una vez terminado el bucle for, se inicializa la variable "indice" a 0, que hará las funciones de iterador.

Se inicia un nuevo bucle for que recorrerá todos los valores almacenado en la variable "probabilidadesTransición".

Dentro de este bucle, se calcula la probabilidad de cada elemento de "lrc" con los valores almacenados en "probabilidadesTransicion" y "sumatoria", y se almacenan en "probabilidadesTransicion". Una vez realizado esto, "probabilidadesTransicion" habrá pasado de almacenar los numeradores de la formula de transición de cada elemento de "lrc" a almacenar las probabilidades calculadas para cada elemento de "lrc".

Al terminar de recorrer todos los elementos de "probabilidades Transicion", se genera aleatoriamente un número decimal entre 0 y 1 y se almacena en la variable "uniforme". Se inicializan las variables "indice" y "probabilidad Acumulada" a 0. "indice" sigue desempeñando la misma función y "probabilidad Acumulada" almacena la sumatoria de todos los valores de "probabilidades Transicion" que se hayan recorrido hasta el momento.

Para terminar se inicializa un último bucle for en el que se comprobará a qué elemento de la Lista Restringida de Candidatos corresponde el valor de "uniforme" generado haciendo uso de la distribución de probabilidades almacenada en "probabilidades Transicion". Cuando sepamos el elemento, se añade a la hormiga como parte de la solución y se termina la ejecución de la función.

3.6 Actualización de la feromona local

Algorithm 6 ActualizarFeromonaLocal()

```
 \begin{array}{l} \textbf{for } hormiga \in colonia \ \textbf{do} \\ elementoB \leftarrow hormiga.UltimoElmento() \\ \textbf{for } i=0; i <= hormiga.tama\~no()-1; i++ \ \textbf{do} \\ elementoA \leftarrow hormiga[i] \\ valorAnterior \leftarrow matrizFeromonas[elementoA][elementoB] \\ matrizFeromonas[elementoA][elementoB] \leftarrow (1-rho) * \\ valorAnterior + rho*(costeGreedy) \\ matrizFeromonas[elementoB][elementoA] \\ matrizFeromonas[elementoB][elementoB] \\ \textbf{end for} \\ \end{array}
```

Se recorren todas las hormigas de la colonia y se realizan las operaciones que se describen a continuación.

Se guarda en la variable "elementoB" el último elemento introducido en la hormiga.

A continuación, se inicia un nuevo bucle for que recorre todos los elementos pertenecientes a la hormiga.

Dentro de este bucle, se guarda en la variable "elementoA" el elemento 'i' de la hormiga y el valor de la feromona del arco "elementoA"-"elementoB" en la variable "valorAnterior".

Se actualiza el valor de la feromona del arco "elementoA"-"elementoB", almacenada en "matrizFeromonas" con el resultado de la siguiente función:

 $Feromona(elementoA, elementoB) = (1 - \phi) * valorAnterior + \phi * costeGreedy$

Una vez se haya actualizado la feromona de todos los arcos nuevos de todas las hormigas, se tendrá "matrizFeromonas" actualizada localmente como resultado de la ejecución de la función.

3.7 Tareas demonio

Algorithm 7 TareasDemonio()

```
mejorHormiga \leftarrow EvaluarMejorHormiga()
ActualizarFeromonaGlobal(mejorHormiga())
```

El funcionamiento de esta función es trivial: se obtiene la mejor hormiga haciendo uso de la función "EvaluarMejorHormiga()" y se actualiza la feromona global.

3.8 Obtener la mejor hormiga de la colonia

Salida Se devuelve la mejor hormiga de la colonia.

Algorithm 8 EvaluarMejorHormiga()

```
mejorHormiga \leftarrow 0
valorMejor \leftarrow 0
for\ hormiga \in colonia\ do
coste \leftarrow CalcularCoste(hormiga)
if\ coste>= valorMejor\ then
mejorHormiga \leftarrow hormiga
valorMejor \leftarrow coste
end\ if
end\ for
return\ mejorHormiga
```

Se inicializan las variables "mejor Hormiga" y "valor Mejor" a 0. "mejor Hormiga" almacenará la hormiga con mejor coste de la colonia. "valor Mejor" almacenará el coste de la mejor hormiga encontrada.

Se recorren todas las hormigas pertenecientes a la colonia, se calcula el coste de cada hormiga con "CalcularCoste(hormiga)" y, si se mejora "valorMejor", se guarda la hormiga y su coste en las variables destinadas a tal efecto.

Para finalizar, cuando se haya ejecutado el bucle for, se devuelve "mejorHormiga" como resultado de la ejecución.

3.9 Actualización de la feromona global

Entrada La mejor hormiga de la colonia.

Algorithm 9 ActualizarFeromonaGlobal(mejorHormiga)

```
for i=0;i<tamañoMatriz;i++ do

for j=0;j<tamañoMatriz;j++ do

valorAnterior \leftarrow matrizFeromonas[i][j]

matrizFeromonas[i][j] \leftarrow (1-phi)*valorAnterior

matrizFeromonas[j][i] \leftarrow matrizFeromonas[i][j]

end for

end for

coste \leftarrow CalcularCoste(mejorHormiga)

for i=0;i<mejorHormiga.Tamaño()-1;i++ do

for j=i+1;j<mejorHormiga.Tamaño();j++ do

matrizFeromonas[i][j] \leftarrow matrizFeromonas[i][j] + phi*coste

matrizFeromonas[j][i] \leftarrow matrizFeromonas[i][j]

end for

end for
```

En los dos primeros bucles for se recorre toda la matriz de feromonas evaporando el valor que contenía cada celda por el resultante de la siguiente función:

```
EvaporacionFeromona(i, j) = (1 - \rho) * valorAnterior
```

Una vez evaporada toda la matriz de feromonas, se procede a adicionar feromona a todos los arcos pertenecientes a la mejor hormiga de la colonia.

Para este propósito se almacena el coste de la hormiga, haciendo uso de "CalcularCoste(mejorHormiga)", en la variable "coste".

A continuación, haciendo uso de un doble bucle for, recorremos todos los arcos de la hormiga en la matriz de feromonas y añadimos la feromona resultante de la siguiente función:

$$AdicionFeromona = \rho * coste$$

Cuando se hayan ejecutado los dos bucles for, tendremos la matriz de feromonas actualziada.

4 Experimentos y análisis de resultados

4.1 Procedimiento de desarrollo de la práctica

Para realizar la práctica, se ha optado por implementar las heurísticas propuestas en el lenguaje de programación JAVA. El ejecutable que se entrega junto a este documento ha sido compilado bajo APACHE NETBEANSIDE 12.0.

4.1.1 Equipo de pruebas

Los resultados de las heurísticas han sido obtenidos en el siguiente equipo:

- Host:
- S.O:
- Kernel:
- CPU:
- GPU:
- GPU:
- Memoria RAM :

4.1.2 Manual de usuario

Para ejecutar el software asegúrese de que el archivo .jar proporcionado se ubica en el mismo directorio que la carpeta *archivos*.

Cuando se muestre la GUI, podrá seleccionar la heurística que desee mediante el botón correspondiente. Una vez empiece la ejecución de una heurística no sera posible seleccionar otra hasta que finalice su ejecución. Los resultados finales se mostrarán en el cuadro de texto, a su vez, se generan los log correspondientes a cada archivo y semilla en la carpeta Log.

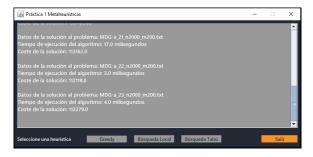


Figure 1: GUI

4.2 Parámetros de los algoritmos

4.2.1 Sistema de Colonias de Hormigas

Para regular el comportamiento del Sistema de Colonias de Hormigas, se han definido los siguientes parámetros en el archivo de configuración:

- Iteraciones: Número máximo de iteraciones realizadas por el algoritmo principal, valor por defecto: 10.000.
- Número de hormigas: Número de hormigas pertenecientes a cada colonia generada en cada iteración, valor por defecto: 10.
- Q0: Probabilidad de no elegir directamente el candidato que mayor coste aporta a la hormiga en la regla de la transición, valor por defecto: 0,95.
- Beta: Exponente aplicado al coste de los arcos en las fórmulas de la regla de la transición, valores por defecto: 1 y 2.
- Alfa: Exponente aplicado a la feromona de los arcos en las fórmulas de la regla de la transición, valores por defecto: 1 y 2.
- Rho: Constante aplicada en la fórmula de la evaporación global de feromona, valor por defecto: 0,1.
- Phi: Constante aplicada en la fórmula de la evaporación local de feromona, valor por defecto: 0,1.
- Delta: Porcentaje de restricción aplicado sobre la lista de candidatos total de una hormiga, valor por defecto: 0,75.

4.2.2 Semillas

Para la generación de números pseudoaleatorios se utiliza una semilla previamente definida en el archivo de configuración, en este caso es 77356084. Esta semilla se va rotando en las 5 iteraciones de cada archivo.

 $77356084 \to 73560847 \to 35608477 \dots$

4.3 Análisis de los resultados

4.3.1 SCH con $\alpha = 1, \beta = 1$

De la experimentación realizada, obtenemos las siguientes tablas, correspondientes al S.C.H. con $\alpha=1$ y $\beta=1$:

SCH $\alpha = 1, \beta = 1$									
	$GKD-c_{-}1_{-}$	n500_m50	GKD-c ₋ 2 ₋	n500_m50	$GKD-c_3_n500_m50$				
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo			
1	19447,05	86283	19677,01	85025	19525,05	85636			
2	19460,39	85767	19674,26	85178	19523,76	85188			
3	19462,50	87097	19670,57	85011	19519,77	85287			
4	19458,63	86364	19661,08	85106	19523,81	85303			
5	19462,67	86277	19674,56	85214	19531,01	85232			
Media	-0,14%	86357,60	-0,15%	85106,80	-0,12%	85329,20			
Devs. típica	0,03%	476,35	0,03%	90,04	0,02%	177,47			

Table 1: Resultados GKD

SCH $\alpha = 1, \beta = 1$										
	SOM-b_	11_n300_m90	SOM-b_	12_n300_m120	SOM-b_	13_n400_m40				
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo				
1	20662	167862	35800	263791	4630	53726				
2	20658	167622	35793	264292	4626	53753				
3	20645	167410	35780	263622	4646	53726				
4	20623	167560	35828	263551	4631	53832				
5	20634	167525	35776	263251	4629	54074				
Media	-0,48%	167595,80	-0,24%	263701,40	-0,55%	604,40				
Devs. típica	0,08%	167,70	0,06%	383,61	0,17%	7,44				

Table 2: Resultados SOM $\,$

SCH $\alpha = 1, \beta = 1$									
	MDG-a_21	n2000_m200	MDG-a_22.	_n2000_m200	MDG-a_23_n2000_m200				
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo			
1	113383,00	600256,00	113153,00	600090,00	113132,00	600032,00			
2	113539,00	$600065,\!00$	113180,00	600185,00	113110,00	600298,00			
3	113368,00	600107,00	113439,00	600184,00	113088,00	600292,00			
4	113483,00	600283,00	113232,00	600161,00	113064,00	600116,00			
5	113307,00	600149,00	113258,00	600124,00	113085,00	600223,00			
Media	-0,74%	600172,00	-0,94%	600178,80	-0,90%	6000192,20			
Devs. típica	0,08%	94,31	0,10%	41,14	0,02%	115,73			

Table 3: Resultados MDG

Como puede observarse en los resultados, el algoritmo exhibe un comportamiento robusto, manteniendo las desviación típica de los resultados por debajo

del 0,10% en casi todos los archivos estudiados, a excepción de dos. En todo caso la mayor desviación típica alcanzada no sobrepasa el 0,20%. Si evaluamos la calidad de las soluciones obtenidas respecto a costes, el algoritmo es incapaz de encontrar los óptimos globales con los parámetros anteriormente descritos.

En lo referente a tiempos, el algoritmo consigue ejecutar las iteraciones objetivo antes de los 600 segundos para las instancias pequeñas y medianas. No es el caso de las instancias de datos más grandes, dónde el algoritmo finaliza su ejecución en torno las 2000 iteraciones, sin sobrepasar las 3.000 iteraciones en ningún caso, para los archivos MDG.

4.3.2 SCH con $\alpha = 2, \beta = 1$

De la experimentación realizada, obtenemos las siguientes tablas, correspondientes al S.C.H. con $\alpha=2$ y $\beta=1$:

SCH $\alpha = 2, \beta = 1$									
	$GKD-c_1$	n500_m50	$GKD-c_2$	n500_m50	GKD-c_3_n500_m50				
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo			
1	19474,14	75409,00	19690,75	74542,00	19531,98	74963,00			
2	19467,52	74773,00	19684,14	74459,00	19530,92	75088,00			
3	19470,50	75609,00	19676,87	74610,00	19531,78	75081,00			
4	$19470,\!51$	74761,00	19684,42	74624,00	$19528,\!11$	74778,00			
5	19470,31	74776,00	19685,35	74741,00	$19535,\!05$	74920,00			
Media	-0,07%	75065,60	-0,09%	74595,20	-0,08%	74966,00			
Devs. típica	0,01%	410,94	0,03%	104,51	0,01%	128,04			

Table 4: Resultados GKD

SCH $\alpha = 2, \beta = 1$									
	SOM-b_11	_n300_m90	SOM-b_12	2_n300_m120	SOM-b_13_n400_m40				
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo			
1	20659,00	137093,00	35850,00	208580,00	4624,00	45791,00			
2	20680,00	136936,00	35841,00	208674,00	4649,00	45878,00			
3	20676,00	136880,00	35854,00	208779,00	4656,00	45488,00			
4	20685,00	137012,00	35855,00	209401,00	4658,00	44994,00			
5	20670,00	136576,00	35853,00	208708,00	4658,00	45268,00			
Media	-0,33%	136899,40	-0,08%	208828,40	-0,19%	45483,80			
Devs. típica	0,05%	197,78	0,02%	328,01	0,31%	366,15			

Table 5: Resultados SOM

SCH $\alpha = 2, \beta = 1$									
	MDG-a_21.	.n2000_m200	MDG-a_22.	_n2000_m200	MDG-a_23_n2000_m200				
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo			
1	113803,00	600034,00	113790,00	600104,00	113361,00	600223,00			
2	113662,00	600153,00	113463,00	600130,00	113594,00	600144,00			
3	113831,00	600100,00	113649,00	600142,00	113516,00	600155,00			
4	113906,00	600218,00	113653,00	600086,00	113369,00	600057,00			
5	113879,00	600192,00	113646,00	600054,00	113505,00	600036,00			
Media	-0,39%	600139,40	-0,60%	600103,20	-0,57%	600123,00			
Devs. típica	0,08%	73,81	0,10%	35,15	0,09%	76,47			

Table 6: Resultados MDG

Como puede observarse en los resultados, el algoritmo exhibe un comportamiento robusto, manteniendo las desviación típica de los resultados por debajo del 0,10% en casi todos los archivos estudiados, a excepción de dos. En todo caso la mayor desviación típica alcanzada es de un 0,31%. Si evaluamos la calidad de las soluciones obtenidas respecto a costes, el algoritmo solo es capaz de encontrar el óptimo global para el archivo SOM-b_12_n300_m120 con los parámetros anteriormente descritos.

En lo referente a tiempos, el algoritmo consigue ejecutar las iteraciones objetivo antes de los 600 segundos para las instancias pequeñas y medianas. No es el caso de las instancias de datos más grandes, dónde el algoritmo finaliza su ejecución en torno las 2.000 iteraciones, sin sobrepasar las 3.000 iteraciones en ningún caso, para los archivos MDG.

4.3.3 SCH con $\alpha = 1, \beta = 2$

De la experimentación realizada, obtenemos las siguientes tablas, correspondientes al S.C.H. con $\alpha=1$ y $\beta=2$:

SCH $\alpha = 1, \beta = 1$									
	$GKD-c_{-}1_{-}$	$n500_{-}m50$	$GKD-c_2$.n500_m50	GKD-c_3_n500_m50				
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo			
1	19458,15	77625,00	19671,65	74997,00	19524,13	75122,00			
2	19464,52	75155,00	19674,24	75196,00	19517,79	75309,00			
3	19461,56	75467,00	19672,58	75163,00	19512,71	75040,00			
4	19453,08	76501,00	19663,09	75141,00	19519,27	75298,00			
5	19455,44	75050,00	19671,50	75515,00	19513,44	75086,00			
Media	-0,14%	75959,60	-0,16%	75202,40	-0,15%	75171,00			
Devs. típica	0,02%	1093,63	0,02%	190,57	0,02%	124,46			

Table 7: Resultados GKD

SCH $\alpha = 1, \beta = 1$									
	SOM-b_11	_n300_m90	SOM-b_12	2_n300_m120	SOM-b_13_n400_m40				
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo			
1	20622,00	139098,00	35778,00	213206,00	4623,00	47794,00			
2	20642,00	138657,00	35788,00	213358,00	4625,00	47931,00			
3	20626,00	139174,00	35801,00	213563,00	4645,00	47870,00			
4	20630,00	139116,00	35798,00	213505,00	4628,00	48003,00			
5	20659,00	139407,00	35777,00	213245,00	4630,00	48161,00			
Media	-0,52%	139090,40	-0,26%	213375,40	-0,60%	47951,80			
Devs. típica	0,07%	271,93	0,03%	156,52	0,19%	140,01			

Table 8: Resultados SOM

SCH $\alpha = 1, \beta = 1$									
	MDG-a_21_	n2000_m200	MDG-a_22	_n2000_m200	MDG-a_23_	MDG-a_23_n2000_m200			
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo			
1	113382,00	600068,00	113280,00	600167,00	113246,00	600160,00			
2	113460,00	600100,00	113189,00	600228,00	113009,00	600159,00			
3	113257,00	600161,00	113464,00	600081,00	113136,00	600202,00			
4	113281,00	600139,00	113209,00	600100,00	113153,00	600118,00			
5	113376,00	600014,00	113202,00	600126,00	113109,00	600223,00			
Media	-0,79%	600096,40	-0,93%	600140,40	-0,87%	6000174,40			
Devs. típica	0,07%	58,30	0,10%	58,63	0,07%	44,22			

Table 9: Resultados MDG

Como puede observarse en los resultados, el algoritmo exhibe un comportamiento robusto, manteniendo las desviación típica de los resultados por debajo del 0,10% en casi todos los archivos estudiados, a excepción de dos. En todo caso la mayor desviación típica alcanzada no sobrepasa el 0,20%. Si evaluamos la calidad de las soluciones obtenidas respecto a costes, el algoritmo es incapaz de encontrar los óptimos globales con los parámetros anteriormente descritos.

En lo referente a tiempos, el algoritmo consigue ejecutar las iteraciones objetivo antes de los 600 segundos para las instancias pequeñas y medianas. No es el caso de las instancias de datos más grandes, dónde el algoritmo finaliza su ejecución en torno las 2.000 iteraciones, sin sobrepasar las 3.000 iteraciones en ningún caso, para los archivos MDG.

4.4 Evolución de los resultados durante la experimentación

En las siguientes gráficas se muestra la evolución del coste de la mejor hormiga encontrada hasta el momento en la ejecución de cada uno de los algoritmos

conforme aumenta el número de iteraciones realizadas para cada uno de los valores de α y β del S.C.H. La semilla utilizada para las ejecuciones ha sido 35608477.

Hemos decidido que la unidad de tiempo sea las iteraciones realizadas por el algoritmo en vez del tiempo de ejecución ya que este valor es sobre el que se comprueba la condición de parada y, además, puede arrojar información relevante a la hora de la modificación de dicho parámetro para obtener mejoras de tiempos o en el valor de las soluciones obtenidas.

Otro de los motivos por los que no se ha escogido el tiempo transcurrido como unidad de tiempo para las gráficas de convergencia de los costes es porque en un principio la única condición de parada era el número de iteraciones realizadas. No obstante, el escoger las iteraciones nos permite comparar resultados obtenidos en otros equipos de experimentación, en los que pueden variar sus tiempos de ejecución debido a su configuración de hardware.

En este apartado, se hará referencia a las diferentes configuraciones de α y β haciendo uso de la siguiente codificación:

- $\alpha = 1 \ \beta = 1$: **A1B1**
- $\alpha = 1 \ \beta = 2$: **A1B2**
- $\alpha = 2 \ \beta = 1$: **A2B1**

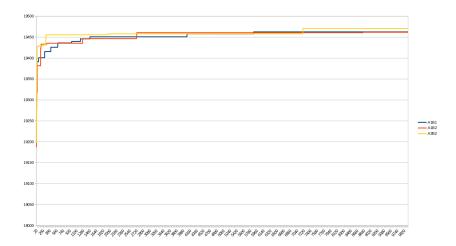


Figure 2: Evolución del mejor coste en la ejecución de todos los algoritmos respecto al número de evaluaciones para el problema GKD-c1, semilla 35608477

Para el problema GKD-c1 todas las configuraciones empiezan a encontrar soluciones aceptables desde la primera iteración realizada. Hemos considerado una solución aceptable aquella solución que difiere como máximo un 10% respecto al óptimo global. En este problema las soluciones aceptables son todas aquellas cuyo coste es superior a 17.536,669.

En la ejecución de la configuración A1B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 19.462,505859375 a partir de las 5.844 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 10 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A1B2, el mejor coste obtenido se estabiliza en 19.461,5625 a partir de las 8.791 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 3 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A2B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 19.470,498046875 a partir de las 7.166 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 7 iteraciones.

En la configuración A1B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0011% aproximadamente, siendo este último 19.485,188.

En la configuración A1B2 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0012% aproximadamente.

En la configuración A2B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0007% aproximadamente.

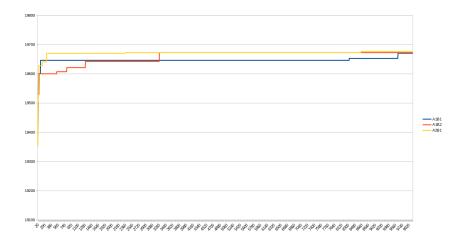


Figure 3: Evolución del mejor coste en la ejecución de todos los algoritmos respecto al número de evaluaciones para el problema GKD-c2, semilla 35608477

Para el problema GKD-c2 todas las configuraciones empiezan a encontrar soluciones aceptables desde la primera iteración realizada. Hemos considerado una solución aceptable aquella solución que difiere como máximo un 10% respecto al óptimo global. En este problema las soluciones aceptables son todas aquellas cuyo coste es superior a 17.731,3833.

En la ejecución de la configuración A1B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 19.670,576171875 a partir de las 9.609 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 11 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A1B2, el mejor coste obtenido se estabiliza en 19.672,58203125 a partir de las 3.243 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 11 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A2B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 19.676,869140625 a partir de las 8.619 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 8 iteraciones.

En la configuración A1B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0015% aproximadamente, siendo este último 19.701,537.

En la configuración A1B2 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0014% aproximadamente.

En la configuración A2B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0012% aproximadamente.

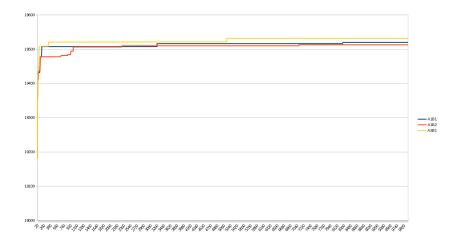


Figure 4: Evolución del mejor coste en la ejecución de todos los algoritmos respecto al número de evaluaciones para el problema GKD-c3, semilla 35608477

Para el problema GKD-c3 todas las configuraciones empiezan a encontrar soluciones aceptables desde la primera iteración realizada. Hemos considerado una solución aceptable aquella solución que difiere como máximo un 10% respecto al óptimo global. En este problema las soluciones aceptables son todas aquellas cuyo coste es superior a 17.592,4863.

En la ejecución de la configuración A1B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 19.519,779296875 a partir de las 8.244 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 2 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A1B2, el mejor coste obtenido se estabiliza en 19.512,7109375 a partir de las 7.058 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 9 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A2B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 19.531,783203125 a partir de las 5.114 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de

encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 5 iteraciones.

En la configuración A1B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0014% aproximadamente, siendo este último 19.547,207.

En la configuración A1B2 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0017% aproximadamente.

En la configuración A2B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0007% aproximadamente.



Figure 5: Evolución del mejor coste en la ejecución de todos los algoritmos respecto al número de evaluaciones para el problema SOM-b11, semilla 35608477

Para el problema SOM-b11 todas las configuraciones empiezan a encontrar soluciones aceptables desde la primera iteración realizada. Hemos considerado una solución aceptable aquella solución que difiere como máximo un 10% respecto al óptimo global. En este problema las soluciones aceptables son todas aquellas cuyo coste es superior a 18.668,7.

En la ejecución de la configuración A1B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 20.645 a partir de las 8.174 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 84 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A1B2, el mejor coste obtenido se estabiliza en 20.626 a partir de las 7.351 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 82 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A2B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 20.676 a partir de las 7.260 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 31 iteraciones.

En la configuración A1B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0047% aproximadamente, siendo este último 20.743.

En la configuración A1B2 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0056% aproximadamente.

En la configuración A2B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0032% aproximadamente.

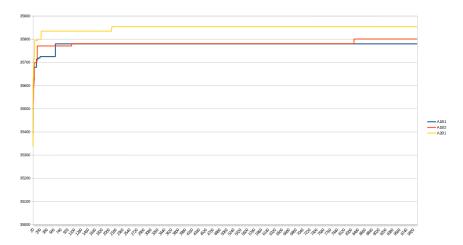


Figure 6: Evolución del mejor coste en la ejecución de todos los algoritmos respecto al número de evaluaciones para el problema SOM-b12, semilla 35608477

Para el problema SOM-b12 todas las configuraciones empiezan a encontrar soluciones aceptables desde la primera iteración realizada. Hemos considerado una solución aceptable aquella solución que difiere como máximo un 10% respecto al óptimo global. En este problema las soluciones aceptables son todas aquellas cuyo coste es superior a 32.292,9.

En la ejecución de la configuración A1B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 35.780 a partir de las 582 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 6 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A1B2, el mejor coste obtenido se estabiliza en 35.801 a partir de las 8.356 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 7 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A2B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 35.854 a partir de las 2.051 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 4 iteraciones.

En la configuración A1B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0028% aproximadamente, siendo este último 35.881.

En la configuración A1B2 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0022% aproximadamente.

En la configuración A2B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0007% aproximadamente.

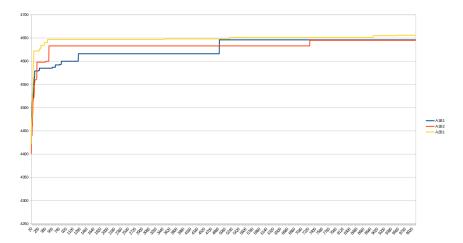


Figure 7: Evolución del mejor coste en la ejecución de todos los algoritmos respecto al número de evaluaciones para el problema SOM-b13, semilla 35608477

Para el problema SOM-b13 todas las configuraciones empiezan a encontrar soluciones aceptables desde la primera iteración realizada. Hemos considerado una solución aceptable aquella solución que difiere como máximo un 10% respecto al óptimo global. En este problema las soluciones aceptables son todas aquellas cuyo coste es superior a 4.192,2.

En la ejecución de la configuración A1B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 4.646 a partir de las 4.891 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 1.225 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A1B2, el mejor coste obtenido se estabiliza en 4.645 a partir de las 7.245 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 460 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A2B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 4.656 a partir de las 9.525 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta finalizar las 10.000 iteraciones objetivo. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 67 iteraciones.

En la configuración A1B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0025% aproximadamente, siendo este último 4.658.

En la configuración A1B2 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0027% aproximadamente.

En la configuración A2B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0004% aproximadamente.

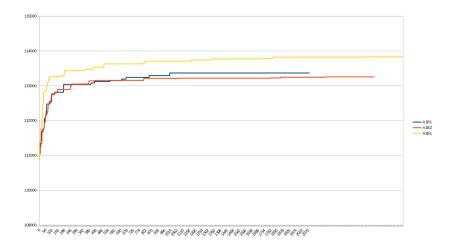


Figure 8: Evolución del mejor coste en la ejecución de todos los algoritmos respecto al número de evaluaciones para el problema MDG-a21, semilla 35608477

Para el problema MDG-a21 todas las configuraciones empiezan a encontrar soluciones aceptables desde la primera iteración realizada. Hemos considerado una solución aceptable aquella solución que difiere como máximo un 10% respecto al óptimo global. En este problema las soluciones aceptables son todas aquellas cuyo coste es superior a 102.833,1.

En la ejecución de la configuración A1B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 113.368 a partir de las 1.003 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta realizar 2.076 iteraciones, donde se termina la ejecución al haber alcanzado los 600 segundos límites de tiempo de ejecución. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 425 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A1B2, el mejor coste obtenido se estabiliza en 113.257 a partir de las 2.196 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta realizar 2.575 iteraciones, donde se termina la ejecución al haber alcanzado los 600 segundos límites de tiempo de ejecución. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 382 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A2B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 113.831 a partir de las 2.511 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta realizar 2.793 iteraciones, donde se termina la ejecución al haber alcanzado los 600 segundos límites de tiempo de ejecución. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 74 iteraciones.

En la configuración A1B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0077% aproximadamente, siendo este último 114.259.

En la configuración A1B2 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0087% aproximadamente.

En la configuración A2B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0037% aproximadamente.

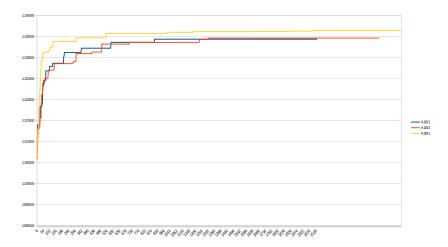


Figure 9: Evolución del mejor coste en la ejecución de todos los algoritmos respecto al número de evaluaciones para el problema MDG-a22, semilla 35608477

Para el problema MDG-a22 todas las configuraciones empiezan a encontrar soluciones aceptables desde la primera iteración realizada. Hemos considerado una solución aceptable aquella solución que difiere como máximo un 10% respecto al óptimo global. En este problema las soluciones aceptables son todas aquellas cuyo coste es superior a 102.894,3.

En la ejecución de la configuración A1B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 113.439 a partir de las 890 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta realizar 2.121 iteraciones, donde se termina la ejecución al haber alcanzado los 600 segundos límites de tiempo de ejecución. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 337 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A1B2, el mejor coste obtenido se estabiliza en 113.464 a partir de las 1.295 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta realizar 2.592 iteraciones, donde se termina la ejecución al haber alcanzado los

600 segundos límites de tiempo de ejecución. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 491 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A2B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 113.649 a partir de las 2.085 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta realizar 2.758 iteraciones, donde se termina la ejecución al haber alcanzado los 600 segundos límites de tiempo de ejecución. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 100 iteraciones.

En la configuración A1B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0077% aproximadamente, siendo este último 114.327.

En la configuración A1B2 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0075% aproximadamente.

En la configuración A2B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0059% aproximadamente.

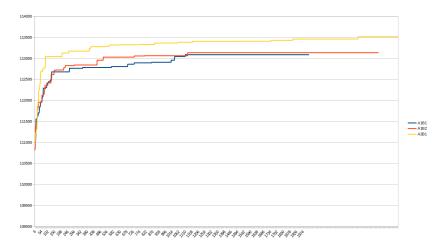


Figure 10: Evolución del mejor coste en la ejecución de todos los algoritmos respecto al número de evaluaciones para el problema MDG-a23, semilla 35608477

Para el problema MDG-a23 todas las configuraciones empiezan a encontrar soluciones aceptables desde la primera iteración realizada. Hemos considerado una solución aceptable aquella solución que difiere como máximo un 10% respecto al óptimo global. En este problema las soluciones aceptables son todas aquellas cuyo coste es superior a 102.710,7.

En la ejecución de la configuración A1B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 113.088 a partir de las 1.105 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta realizar 2.012 iteraciones, donde se termina la ejecución al haber alcanzado los 600 segundos límites de tiempo de ejecución. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 1.027 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A1B2, el mejor coste obtenido se estabiliza en 113.136 a partir de las 1.122 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta realizar 2.521 iteraciones, donde se termina la ejecución al haber alcanzado los 600 segundos límites de tiempo de ejecución. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 503 iteraciones.

En la ejecución de la configuración A2B1, el mejor coste obtenido se estabiliza en 113.516 a partir de las 2.372 iteraciones, permaneciendo inalterable hasta realizar 2.665 iteraciones, donde se termina la ejecución al haber alcanzado los 600 segundos límites de tiempo de ejecución. Esta configuración es capaz de encontrar costes con una diferencia inferior a un 1% respecto al óptimo global a partir de las 79 iteraciones.

En la configuración A1B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0090% aproximadamente, siendo este último 114.123.

En la configuración A1B2 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0086% aproximadamente.

En la configuración A2B1 obtenemos una diferencia entre el coste de la solución obtenida y el óptimo global de un 0.0053% aproximadamente.

4.5
$$\alpha = 1$$
, $\beta = 1$ vs $\alpha = 1$, $\beta = 2$ vs $\alpha = 2$, $\beta = 1$

A continuación, se muestran los gráficos de cajas y bigotes para cada problema de la serie GKD (Figura 11, 12 y 13). En ellos se pueden comparar a simple vista tanto los resultados obtenidos como la agrupación de los mismos.

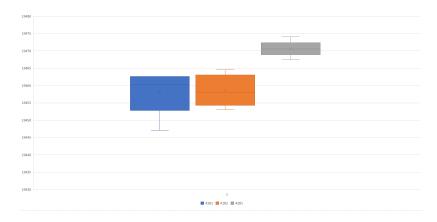


Figure 11: Gráfica de cajas y bigotes para el problema GKD-c1

Para el problema GKD-c1, los resultados obtenidos para las configuraciones A1B1 y A1B2 son muy similares, obteniendo ligeramente un mayor agrupamiento el algoritmo con la configuración A1B2. Se puede observar como la configuración A2B1 obtiene mejores resultados y agrupamiento de los mismos.

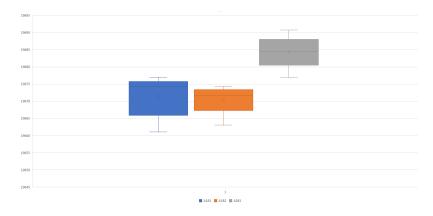


Figure 12: Gráfica de cajas y bigotes para el problema GKD-c2



Figure 13: Gráfica de cajas y bigotes para el problema GKD-c3

Para los problemas GKD-c2 y GKD-c3, la configuración que obtiene un mejor agrupamiento de los resultados obtenidos es A1B2, seguida de A2B1, siendo A1B1 la que obtiene un peor agrupamiento. En cuanto a resultados obtenidos, las configuraciones A1B1 y A1B2 obtienen unas soluciones bastante similares, siendo la configuración A2B1 la mejor de todas.

Ahora, se analizarán los gráficos de cajas y bigotes correspondientes con las serie de datos SOM (Figura 14, 15 y 16).

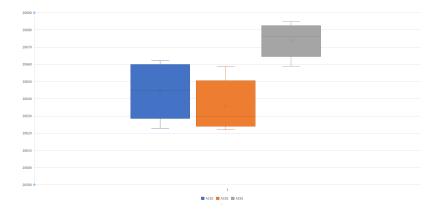


Figure 14: Gráfica de cajas y bigotes para el problema SOM-b11

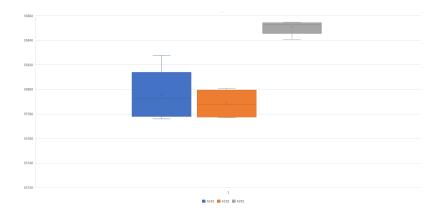


Figure 15: Gráfica de cajas y bigotes para el problema SOM-b12

Para los problemas SOM-b11 y SOM-b12, en cuanto a agrupamiento de los resultados, la configuración A2B1 es la mejor, seguida de A1B2 y A1B1. En cuanto a mejores resultados obtenidos, la configuración A2B1 es también la mejor, seguida de A1B2 y A1B1. En el problema SOM-b12, cabe destacar la robustez de la configuración A2B1.

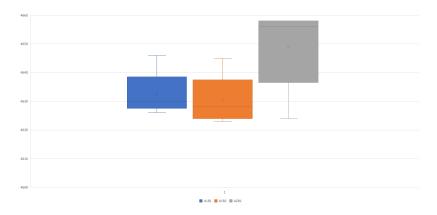


Figure 16: Gráfica de cajas y bigotes para el problema SOM-b13

En el problema SOM-b13, a diferencia de los anteriores casos, la configuración A2B1 obtiene el peor agrupamiento de resultados, siendo la mejor configuración A1B1, seguida de A1B2. En cuanto a calidad de soluciones, la configuración A2B1 es la mejor, seguida de A1B1 y de A1B2 en último lugar.

Los tres últimos gráficos de cajas y bigotes se corresponden con las serie de datos MDG (Figura 17, 18 y 19). A continuación, pasamos a analizarlas.

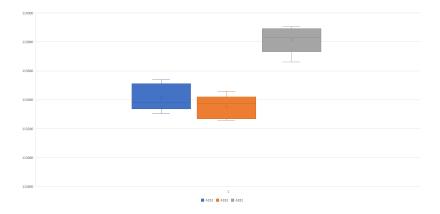


Figure 17: Gráfica de cajas y bigotes para el problema MDG-a21

En el problema MDG-a21 las agrupaciones de los resultados de las tres configuraciones del S.C.H. son prácticamente similares. No obstante, en cuanto a resultados, la configuración A2B1 es la que mejor rendimiento obtiene, seguida de A1B1 y A1B2 en último lugar.

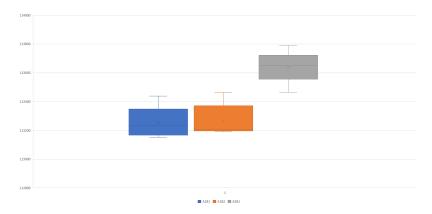


Figure 18: Gráfica de cajas y bigotes para el problema MDG-a22

En el problema MDG-a22, al igual que en MDG-a21, el agrupamiento de las soluciones obtenidas para las tres configuraciones son similares. En cuanto a resultados obtenidos, la mejor configuración es A2B1, seguida de A1B2 y A1B1.

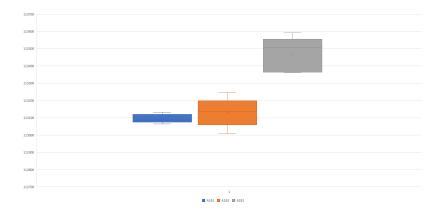


Figure 19: Gráfica de cajas y bigotes para el problema MDG-a23

En el problema MDG-a23, la configuración A1B1 obtiene muy buen resultado en cuanto a robustez de las soluciones obtenidas, seguida de A1B2 y A2B1, que obtiene la peor agrupación de resultados de las tres. En cuanto a resultados, la configuración A2B1 vuelve a ser la mejor, seguida de A1B2 y A1B1.

Si bien la configuración del Sistema de Colonia de Hormigas con $\alpha=2$ y $\beta=1$ en varios de los archivos de datos no consigue obtener la mejor robustez en las soluciones obtenidas, creemos que la calidad que consigue obtener respecto a estas es motivo suficiente como para considerarla la mejor configuración de las tres.

Si atendemos a las gráficas de convergencia del epígrafe 4.4 observamos que para las series GKD esta configuración converge ligeramente más rápido que las otras dos. Para las series SOM se evidencia aún más esta rapidez de convergencia, siendo en las series más grandes de datos, MDG, donde se observa claramente cómo la configuración elegida como ganadora obtiene una clara ventaja respecto a sus competidoras en rapidez de convergencia hacia el óptimo global.

Además, como tónica general, se puede apreciar en el mismo epígrafe cómo en todas las series de datos la misma configuración es capaz de empezar a encontrar soluciones con menos de 1% de diferencia respecto al óptimo global notablemente antes que las otras dos configuraciones contrincantes.

De este modo, teniendo en cuenta todas las evidencias detectadas y anteriormente expuestas elegimos como configuración ganadora el Sistema de Colonias de Hormigas con $\alpha=2$ y $\beta=1$.

4.5.1 Causas del mejor resultados

Hemos querido explicar desde un marco teórico el porqué la configuración resultante como vencedora es capaz de obtener mejores resultados, para complementar los datos experimentales del estudio.

Como hemos visto en clase, los Sistemas de Colonias de Hormigas tienen un alto componente exploratorio, aunque se apliquen las mejoras introducidas respecto a los sistemas de hormigas:

- El equilibrio entre exploración y explotación aplicado en la regla de la transición.
- La actualización de la feromona solo de la mejor hormiga de la colonia y evaporación del resto de arcos del dominio del problema.
- Actualización local de la feromona online.

Dentro de estas mejoras, la modificación de los valores de α y β afecta directamente a la forma en la que distribuimos la probabilidad de transición de entre todos los arcos posibles:

$$p_k(r,s) = \begin{cases} \sin q0 \le q & \arg \max_{u \in J_k(r)} \{ (\tau_{ru})^{\alpha} * (\eta_{ru})^{\beta} \} \\ \text{en otro caso} & p'_k(r,s) \end{cases}$$
(3)

$$p_k'(r,s) = \begin{cases} \text{si } s \in J_k(r) & \frac{(\tau_{rs})^{\alpha} * (\eta_{rs})^{\beta}}{\sum_{u \in J_k(r)} (\tau_{ru})^{\alpha} * (\eta_{ru})^{\beta}} \\ \text{en otro caso} & 0 \end{cases}$$
(4)

Un mayor valor de β ocasiona que los arcos con mejor coste de aporte a la solución actual reciban un mayor reparto de probabilidad, esto genera que las hormigas tiendan a guiarse por el coste de los arcos pudiendo llegar a estancarse en zonas de óptimos globales.

Sin embargo, un mayor valor de α favorece la distribución de la feromona a aquellos arcos que más feromona posean, es decir, favorece que las hormigas se desplacen a arcos que puede que no obtengan mejor aporte de solución pero que sean los más prometedores.

Aquí entran en juego las dos mejoras: la actualización de la feromona solo de la mejor hormiga y la actualización de la feromona local. Como conclusión, las hormigas tienden a desplazarse a arcos por los que no han pasado hormigas y en entornos cercanos a los transitados por la mejor hormiga, obteniendo un gran equilibrio entre exploración y explotación.

4.6 Mejoras detectadas

4.6.1 Actualización de la feromona local

En la realización de las pruebas

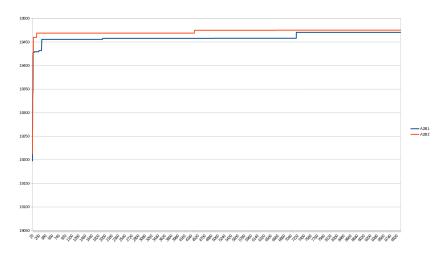


Figure 20: Evolución del mejor coste en la ejecución de la modificación para el problema GKD-c1, semilla 35608477

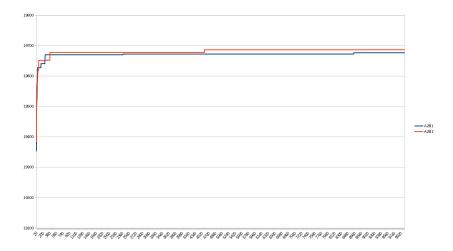


Figure 21: Evolución del mejor coste en la ejecución de la modificación para el problema GKD-c2, semilla 35608477



Figure 22: Evolución del mejor coste en la ejecución de la modificación para el problema GKD-c3, semilla 35608477

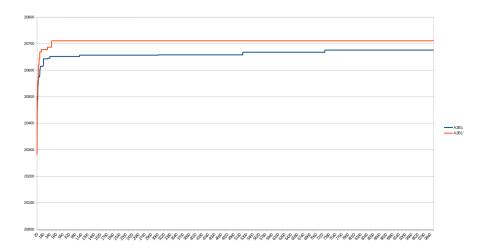


Figure 23: Evolución del mejor coste en la ejecución de la modificación para el problema SOM-b11, semilla 35608477

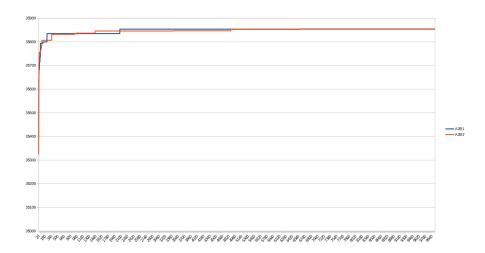


Figure 24: Evolución del mejor coste en la ejecución de la modificación para el problema SOM-b12, semilla 35608477

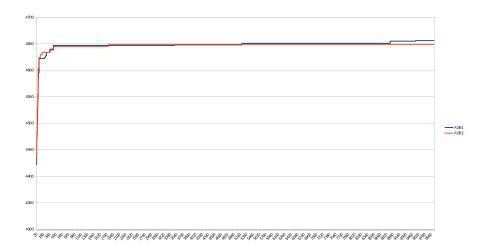


Figure 25: Evolución del mejor coste en la ejecución de la modificación para el problema SOM-b13, semilla 35608477

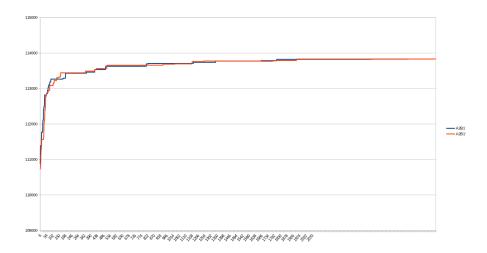


Figure 26: Evolución del mejor coste en la ejecución de la modificación para el problema MDG-a21, semilla 35608477

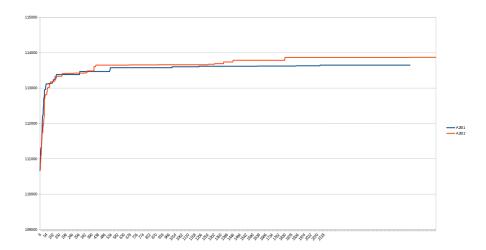


Figure 27: Evolución del mejor coste en la ejecución de la modificación para el problema MDG-a22, semilla 35608477

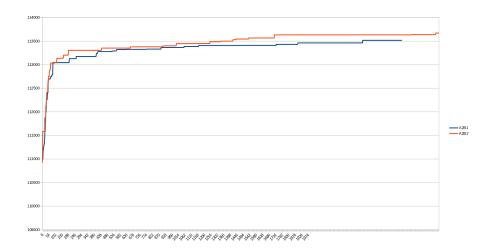


Figure 28: Evolución del mejor coste en la ejecución de la modificación para el problema MDG-a23, semilla 35608477

4.6.2 Lista Restringida de Candidatos

Se propone definir una LRC dinámica, aumentando el valor de δ conforme más elementos se añadan a la solución, potenciando la explotación en los últimos elementos a incorporar y favoreciendo la exploración en las primeras etapas.

4.7 Búsqueda local vs búsqueda tabú vs algoritmo genético con operador de cruce MPX elitismo 3 vs S.C.H. α =2 β =1

4.7.1 Resultados de la búsqueda local

Búsqueda Local										
	GKD-c_1_n	500_m50	GKD-c_2_n	1500_m50	GKD-c_3_n500_m50					
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo				
1	19485,188	75	19701,521	50	19542,49	54				
2	19485,19	46	19701,523	44	19539,79	41				
3	19485,188	42	19699,041	49	19542,49	53				
4	19485,188	47	19699,848	49	19542,49	46				
5	19485,188	37	19700,873	44	19542,49	50				
Media	0,00%		0,00%		-0,03%					
Desviación Típica	0,00%		0,01%		0,01%					

Table 10: Resultados GKD

Búsqueda Local								
	SOM-b_	11_n300_m90	SOM-b_	12_n300_m120	SOM-b_13_n400_m40			
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo		
1	20720	33	35856	34	4482	15		
2	20622	29	35771	41	4542	19		
3	20594	32	35758	43	4553	20		
4	20652	35	35740	39	4545	20		
5	20612	152	35767	41	4506	16		
Media	-0,50%		-0,29%		-2,84%			
Desviación Típica	0,24%		0,13%		0,65%			

Table 11: Resultados SOM

Búsqueda Local								
	MDG-a_2	21_n2000_m200	MDG-a_	22_n2000_m200	MDG-a	MDG-a_23_n2000_m200		
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo		
1	112638	895	112923	1472	113333	1125		
2	112829	847	113382	1127	112874	1630		
3	112945	943	112724	1293	112952	1015		
4	113286	2224	113162	1123	113147	1709		
5	113141	2731	112973	1055	113131	1047		
Media	-1,13 %		-1,13%		-0,91%			
Desviación Típica	0,22%		0,22%		0,16%			

Table 12: Resultados MDG

4.7.2 Resultados de la búsqueda tabú

Búsqueda Tabú									
	GKD-c_1_r	1500_m50	GKD-c_2_n	1500_m50	GKD-c_3_n500_m50				
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo			
1	19485,184	1900	19701,521	1723	19547,215	1699			
2	19485,184	1790	19701,521	1717	19547,215	1968			
3	19485,188	1734	19701,521	1715	19547,215	1717			
4	19485,19	1710	19701,523	1786	19547,215	1705			
5	19485,184	1700	19701,521	2041	19547,215	1693			
Media	0,00%		0,00%		0,00%				
Desviación Típica	0,00%		0,00%		0,00%				

Table 13: Resultados GKD

Búsqueda Tabú								
	SOM-b_	11_n300_m90	SOM-b	_12_n300_m120	SOM-b_13_n400_m40			
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo		
1	20705	5362	35881	11727	4654	1069		
2	20732	6174	35881	11616	4658	1072		
3	20731	5345	35881	11665	4644	1075		
4	20725	5278	35881	11676	4627	1066		
5	20735	5718	35881	11611	4634	1109		
Media	-0,08%		0,00%		-0,31%			
Desviación Típica	0,06%		0,00%		0,28%			

Table 14: Resultados SOM

Búsqueda Tabú								
	MDG-a_2	21_n2000_m200	MDG-a_	22_n2000_m200	MDG-a	MDG-a_23_n2000_m200		
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo		
1	113613	51002	113697	51713	113429	51636		
2	113199	51021	113306	51397	113517	51131		
3	113831	51184	113329	51482	113540	51819		
4	113565	50643	113414	51179	113385	51073		
5	113647	51279	113396	51037	113693	51224		
Media	-0,60 %		-0,79%		-0,53%			
Desviación Típica	0,20%		0,14%		0,10%			

Table 15: Resultados MDG

4.7.3 Resultados del algoritmo genético con elitismo =3

Genético MPX elite 3								
	$GKD-c_1$	n500_m50	$GKD-c_2$	n500_m50	GKD-c_3_n500_m50			
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo		
1	19481,69	642	19701,52	361	19547,22	348		
2	$19482,\!37$	388	$19701,\!52$	367	19547,22	357		
3	19485,19	366	$19701,\!52$	356	19547,22	362		
4	19485,19	374	19699,48	351	19547,22	356		
5	19485,19	366	$19701,\!52$	358	19543,48	358		
Media	0,00%	1173,40	0,00%	1118,60	0,00%	979,80		
Desviación Típica	0,01%	8,02	0,00%	5,96	0,01%	209,24		

Table 16: Resultados GKD

Genético MPX elite 3								
	SOM-b_	11_n300_m90	SOM-b_	12_n300_m120	SOM-b_13_n400_m40			
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo		
1	20648	848	35870	1533	4590	262		
2	20731	845	35866	1466	4625	266		
3	20650	819	35834	1525	4584	261		
4	20672	842	35879	1482	4553	265		
5	20647	840	35825	2266	4578	262		
Media	-0,35%	2217,20	-0,07%	4598,80	-1,55%	730,40		
Desviación Típica	0,17%	52,17	0,07%	625,28	0,56%	273,21		

Table 17: Resultados SOM

Genético MPX elite 3								
	MDG-a_	21_n2000_m200	MDG-a_	22_n2000_m200	MDG-a	.23_n2000_m200		
Ejecución	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo	Coste	Tiempo		
1	112931	8904	113173	8865	112978	8823		
2	113375	9597	113335	8566	113350	8614		
3	113193	9058	113402	8898	113212	8660		
4	113074	8956	112677	8093	113274	8448		
5	113445	8814	113470	9081	112600	8476		
Media	-0,92%	27880,20	-0,98%	26612,60	-0,91%	26442,80		
Desviación Típica	0,19%	1015,33	0,28%	1181,95	0,27%	492,12		

Table 18: Resultados MDG

4.7.4 Comparación de resultados

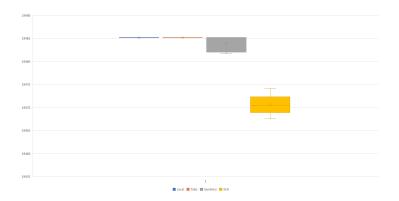


Figure 29: Gráfica de cajas y bigotes comparativas GKD-c1

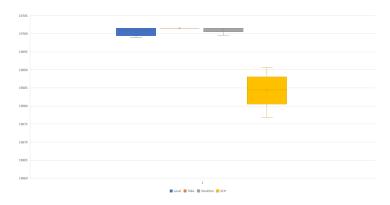


Figure 30: Gráfica de cajas y bigotes comparativas GKD-c2

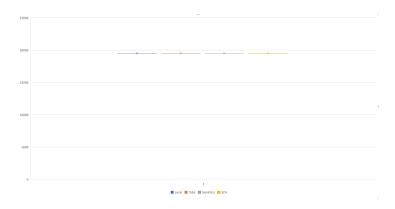


Figure 31: Gráfica de cajas y bigotes comparativas GKD-c3

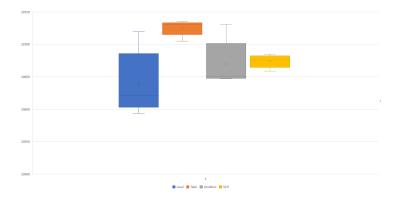


Figure 32: Gráfica de cajas y bigotes comparativas SOM-b11

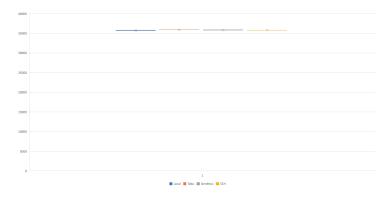


Figure 33: Gráfica de cajas y bigotes comparativas SOM-b12

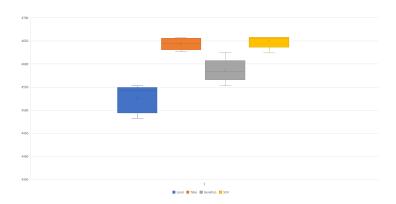


Figure 34: Gráfica de cajas y bigotes comparativas SOM-b13

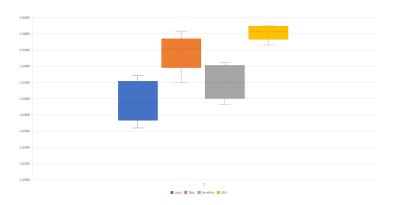


Figure 35: Gráfica de cajas y bigotes comparativas MDG-a21



Figure 36: Gráfica de cajas y bigotes comparativas MDG-a22

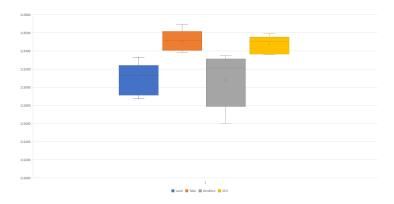


Figure 37: Gráfica de cajas y bigotes comparativas MDG-a23

4.7.5 Conclusiones

References

- [1] Umbarkar, Dr. Anantkumar & Sheth, P.. (2015). CROSSOVER OPERATORS IN GENETIC ALGORITHMS: A REVIEW. ICTACT Journal on Soft Computing (Volume: 6, Issue: 1). 6. 10.21917/ijsc.2015.0150.
- [2] https://sci2s.ugr.es/graduateCourses/Metaheuristicas
- [3] https://sci2s.ugr.es/graduateCourses/Algoritmica