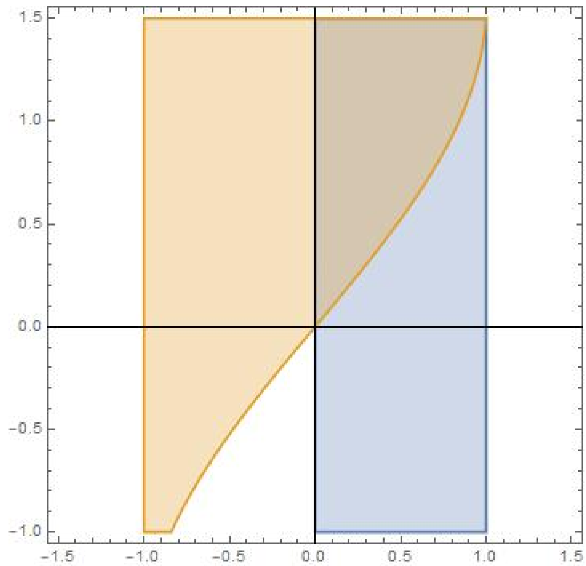
1. (30 PUNTOS) Calcule el valor de la siguiente integral

$$\int_0^1 \int_{\arcsin(x)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2(y)}dydx$$

Desarrollo:
Se puede ver que la función $f(x,y)=\sqrt{1+\cos^2(y)}$, no posee primitiva mediante funciones elementales con respecto a la variable y, y como$f$ es continua en su dominio de integración, es posible usar el teorema de Fubini para hacer el cambio en el orden de integración.



luego, se puede ver que la región de integración está dada por

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, \arcsin(x)\le y\le \frac{\pi}{2}\}.$$

Dejando y como la variable independiente, podemos expresar Ω como:

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le \sin(y), 0\le y\le \frac{\pi}{2}\right\}$$

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\arcsin(x)}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 y}dydx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin(y)} \sqrt{1+\cos^2(y)}dxdy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\sqrt{1+\cos^2(y)}dxdy \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sinh^{-1}(1).\right)\end{aligned}$$

2. (35 PUNTOS) Sea m una constante positiva tal que $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$. Demuestre que el volumen limitado por la superficie $z = \cos(mx - y)$ y el plano $z = 0$ en la región $[0, \pi] \times [0, \pi]$ no depende de m.

   Desarrollo: Notar que $\cos(mx - y) \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leq mx - y \leq \frac{\pi}{2}$. La región de integración queda determinada por estas 2 rectas:

$$mx - y = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad mx - y = \frac{\pi}{2}.$$

   La integral de volumen es:

$$V = -\int_0^{\frac{\pi}{2m}} \int_{mx-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(mx-y)dydx + \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \int_0^{mx+\frac{\pi}{2}} \cos(mx-y)dydx + \int_{\frac{\pi}{2m}}^{\pi} \int_{mx-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(mx-y)dydx$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2m}}^{\pi} \int_0^{mx-\frac{\pi}{2}} \cos(mx-y)dydx = 2\pi.$$

   de donde

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi - 2}{2m} + \frac{2 + \pi}{2m} + \frac{2\pi m - 2\cos(\pi m) - \pi}{2m} + \frac{2\pi m + 2\cos(\pi m) - \pi}{2m} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

   el cual no depende de m.

3. (35 PUNTOS) Calcular la integral

$$I = \iint_D 16x^3y^3(x^4+y^4)e^{(x^4-y^4+2x^2y^2-1)}dA$$

donde D es la región ubicada en el primer cuadrante limitada por las curvas

$$x^4-y^4=1, \quad x^4-y^4=2, \quad x^2y^2=1, \quad x^2y^2=2.$$

Desarrollo:
Haciendo en cambio de variable: $u=x^4-y^4,\ v=x^2y^2$, cuyas funciones son de clase C^1, con Jacobiano:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 4x^3 & -4y^3 \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{vmatrix} = 8xy(x^4+y^4) \neq 0, \quad \forall (x,y)\in D,$$

teniendo así que la transformación es inyectiva y puesto que la función es integrable, entonces es posible ocupar el teorema de cambio de variable obteniéndose:

$$I = \iint_{D^*} ve^{(u+2v-1)}dudv, \quad \text{donde} \quad D^* = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq u\leq 2,\ 1\leq v\leq 2\}.$$

Es decir,

$$I = 2\int_1^2\int_1^2 ve^{(u+2v-1)}dudv = 2\left(\int_1^2 ve^{2v-1}dv\right)\left(\int_1^2 e^u du\right) = 2e^{-1}\left(\int_1^2 ve^{2v}dv\right)\left(\int_1^2 e^u du\right).$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{e^2}{2}(3e^3-3e^2-e+1).$$