Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Departamento de Electrónica y Automatización

ACTIVIDADES FUNDAMENTALES

NOMBRE DE LA UA: CONTROL ÓPTIMO

Nombre de Actividad Fundamental: Producto Integrador de Aprendizaje

Caso de Estudio: Sistema electrónico de OpAmp con configuración de doble filtro pasa-baja

Fecha: 21/05/2024

Nombre	*Matricula*
Berenice Yazbeth Martínez Hernández	2077730
Jorge Murguía Valencia	2077855
Luis Adrián Navarro Reyes	1952565
Javier Antonio Graciano Rocha	1950936
Andrés San Martín Morín	2077415
Víctor Hugo Mejía Salazar	1815804
Edmundo Abinadí Vázquez Reyes	1733884

Carrera: Ingeniería en Electrónica y Automatización

Grupo: 001
Aula: 7207
Horario: N1-N3
Docente: Dr. Juan Ángel Rodríguez Liñán

Cd. Universitaria, San Nicolás de los Garza, N.L.

Redacción de las instrucciones

1. Portada con nombre de la unidad de aprendizaje, NÚMERO de la actividad y leyenda que diga "Producto Integrador de Aprendizaje: Caso de estudio", nombre y número de matrícula de estudiante, hora de clase, nombre de profesor, fecha de entrega (utilice la portada proporcionada por el profesor).

2. Redacción de las instrucciones de lo que se pide realizar en el PIA.

3. Planteamiento del problema, sistema o proceso a controlar(10pts).

4. Procedimiento para obtención de un modelo en espacio de estado (10pts).

5. Análisis de controlabilidad, observabilidad y estabilidad del sistema; así como determinar especificaciones del objetivo de control (10pts).

6. Propuesta de un funcional de costo, con base en las especificaciones (10pts).

7. Desarrollo de cálculos de la técnica de sintonía de ganancias por control óptimo (10pts).

8. Primera aproximación basada en resultados numéricos y simulaciones, y comparación de las capacidades vs especificaciones del sistema (10pts).

9. Ajustes a la propuesta y simulaciones para tener nuevos resultados numéricos que ya cumplan con el objetivo de control (10pts).

10. Implementación del control con la planta en prototipo o simulaciones animadas (10pts).

11. Los prototipos o simulaciones animadas funcionan cumpliendo completamente con las especificaciones propuestas (20pts).

12. Conclusiones y recomendaciones (obligatoria).

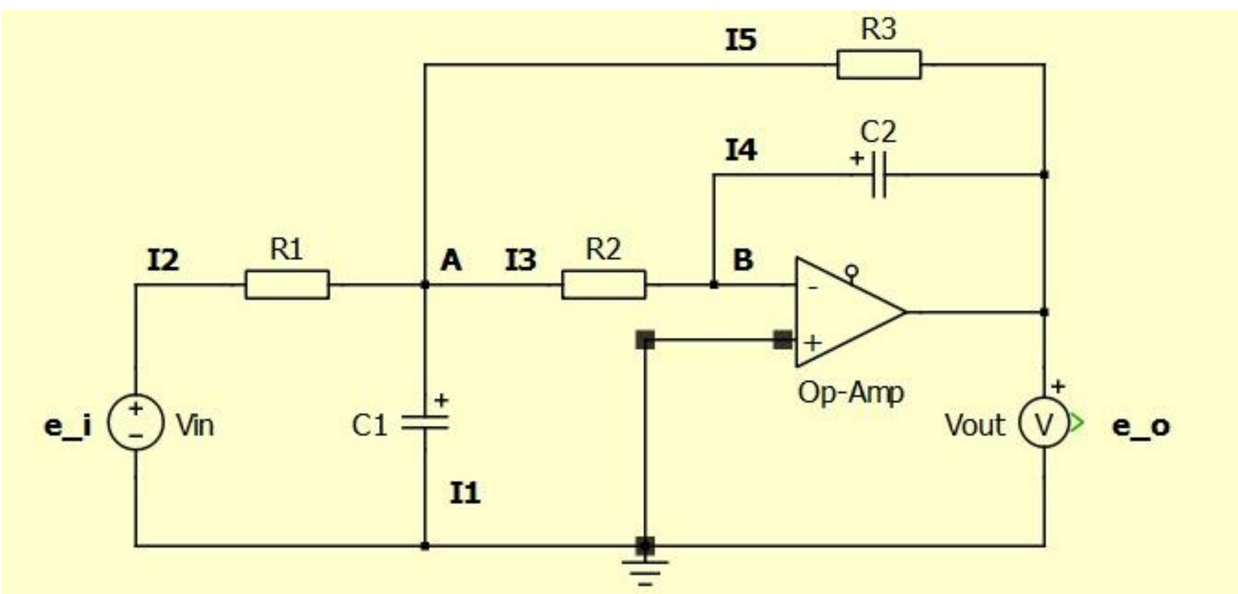
Planteamiento

Basándonos en los conocimientos adquiridos en el curso de control óptimo, nuestro objetivo es diseñar un controlador para un sistema electrónico que integra un OpAmp (amplificador operacional).
La meta es que este sistema pueda seguir automáticamente una referencia establecida, minimizando el error a través de la optimización de un funcional de costo específico.

Para lograr esto llegamos a la conclusión de que el uso de un Controlador Lineal Cuadrático (LQR) sería beneficioso por varias razones. En primer lugar, el LQR ofrece robustez, lo que significa que es capaz de manejar perturbaciones y variaciones en el sistema de manera efectiva. Además, su diseño relativamente simple lo hace más fácil de entender e implementar debido a su poco costo computacional, lo cual es crucial para la eficiencia y la practicidad en la aplicación del control.

Lo que se desea es que el sistema siga una referencia y para esto diseñaremos un controlador de seguimiento de tiempo finito. Los detalles del objetivo de control se darán a conocer en el punto 5.

Diagrama esquemático



Los parámetros de los elementos pasivos son los siguientes:

$$R_1 = 50k\Omega$$
$$R_2 = 10k\Omega$$
$$R_3 = 100k\Omega$$
$$C_1 = 10\mu F$$
$$C_2 = 50nF$$

Procedimiento para obtención de un modelo en espacio de estado

Modelado matemático

Ley de nodos:

$$I_2 = I_1 + I_3 + I_5 \tag{1}$$

$$I_3 = I_4 \tag{2}$$

Como $e_o = k\left(V_{-OpAmp} - V_{+OpAmp}\right)$ $y\ V_{+OpAmp} \to 0, sabiendo\ que\ k \gg 1\ entonces\ e_o = k\left(V_{-OpAmp}\right).$ Para mantener esta relación es necesario que $V_{-OpAmp} = V_B \to 0.$

$$I_1 = C_1 \frac{dVA}{dt}$$
$$I_2 = \frac{e_i - V_A}{R_1}$$
$$I_3 = \frac{V_A - 0}{R_2}$$
$$I_4 = -C_2 \frac{de_o}{dt}$$
$$I_5 = \frac{V_A - e_o}{R_3}$$

Sustituimos estos valores de las Corrientes en las ecuaciones de Kirchoff (1) y (2):

$$\frac{e_i - V_A}{R_1} = C_1 \frac{dV_A}{dt} + \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A - e_o}{R_3}$$
$$V_{A=} - R_2 C_2 \frac{de_o}{dt}$$

Produciendo:

$$\ddot{e}_o = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_1}\dot{e}_o - \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} e_o - \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} e_i \tag{3}$$

Espacio de estados

Declarando nuestras variables de estado:

$$x_1 = e_o$$
$$x_2 = \dot{e_o}$$
$$u = e_i$$

Se obtiene:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_1}x_2 \frac{1}{R_2R_3C_1C_2}x_1 - \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}u$$

Con:

$$y = x_1$$

Por lo que nuestro sistema en representación de variables de estado resulta de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_2R_3C_1C_2} & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}\end{bmatrix}u$$
$$y = [1\ 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Análisis de controlabilidad, observabilidad y estabilidad del sistema; así como determinar especificaciones del objetivo de control

Controlabilidad

Un sistema en espacio de estados es controlable si:

$$CO = [B \quad AB]$$

La matriz AB resulta en:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_2R_3C_1C_2} & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}\end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1R_2C_1C_2} \\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{R_1R_2C_1^2C_2}\end{bmatrix}$$

Por lo que la matriz de controlabilidad es:

$$CO = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_1R_2C_1C_2} \\ -\frac{1}{R_1R_2C_1C_2} & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{R_1R_2C_1^2C_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4000 \\ -4000 & 52000\end{bmatrix}$$

Con determinante:

$$det(CO) = -\left(\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}\right)^2 = -16 * 10^6 \neq 0$$

Como el rango de la matriz de controlabilidad es $n = 2$ y su determinante es diferente de cero se concluye que el sistema es completamente controlable.

Observabilidad

Un sistema en espacio de estados resulta ser completamente observable si:

$$CO = [C^* \quad A^*C^*]$$

$$A^*C^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_2R_3C_1C_2} \\ 1 & -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Donde nuestra matriz observable resulta en:

$$OB = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\det(OB) = 1 \neq 0$$

Vemos que todos sus vectores son L.I. por lo que el sistema es completamente observable.

Estabilidad

Determinamos el polinomio característico de la matriz $A - BK$:

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{R_2R_3C_1C_2} & -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_1}\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{R_2R_3C_1C_2} & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_1}\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{1}{R_2R_3C_1C_2} & \lambda + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_1}\end{bmatrix}\right| = 0$$

Resolviendo la determinante:

$$\lambda\left(\lambda + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_1}\right) - (-1)\left(\frac{1}{R_2R_3C_1C_2}\right) = 0$$

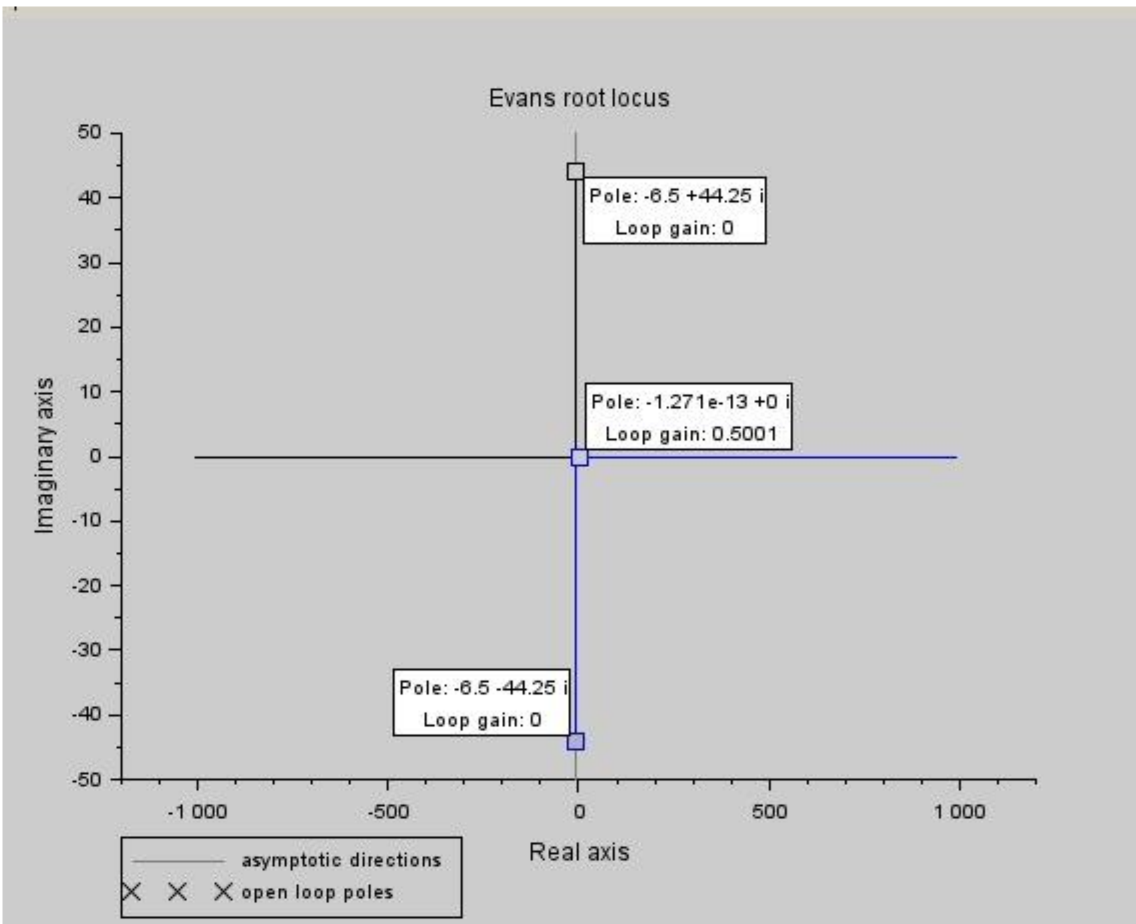
$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_1}\lambda + \frac{1}{R_2R_3C_1C_2} = 0$$

$$\lambda^2 + 13\lambda + 2000 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4(1)(2000)}}{2(1)} = \frac{-13 \pm \sqrt{7831}j}{2}$$

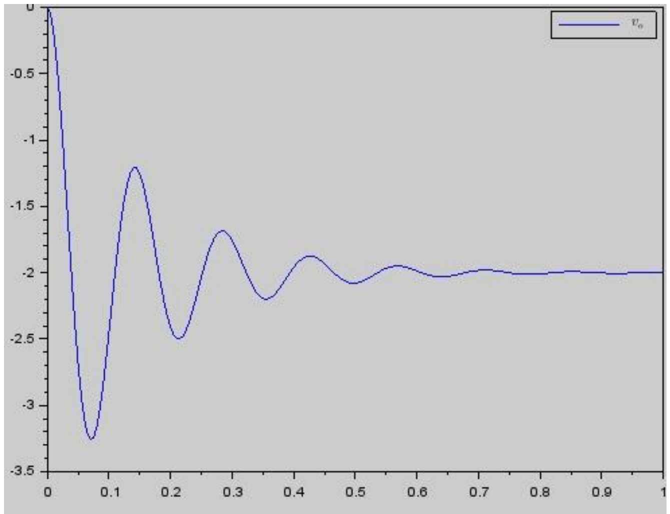
$$\lambda_{1,2} = -6.5 \pm 44.24j$$

Los polos tienen parte real negativa, por lo que el sistema es estable.



Especificaciones del objetivo de control.

El sistema en lazo abierto presenta el siguiente comportamiento en estado estacionario:



Con una ganancia de $K = -2.04$.

Se desea que el sistema llegue a un punto de consigna deseado de $r = +10v$ en estado estacionario. Además de eso que el tiempo de asentamiento sea reducido.

Propuesta de un funcional de costo, con base en las especificaciones

Como primer funcional de costo se propone el siguiente:

$$J(x^*, y^*) = \int_{t_0}^{t_f} \{0.02(x_1(t) - r_1)^2 + 0.01u^2\}\, dt$$

Con una señal de referencia de $r_1 = 10$. Por lo que nuestra función de costo es la siguiente:

$$J(x^*, y^*) = \int_{t_0}^{t_f} \{0.02(x_1(t) - 10)^2 + 0.01u^2\}\, dt$$

Desarrollo de cálculos de la técnica de sintonía de ganancias por control óptimo.

Nuestro espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{R_2R_3C_1C_2} & -\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right)\dfrac{1}{C_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2} \end{bmatrix} u$$
$$y = [1\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Con el funcional de costo propuesto:

$$J(x^*, y^*) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \{0.04(x_1(t) - 10)^2 + 0.02u^2\}\, dt$$

Produce las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2000 & -13 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4000 \end{bmatrix};\ H = \ [0];\ Q = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ R = \frac{1}{50};\ \ r(t) = \begin{bmatrix} 10 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

Calculando las ganancias de la ecuación de Riccati de nuestro controlador lqr:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2000 & -13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2000 \\ 1 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -4000 \end{bmatrix}[50][0 \quad -4000]\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000k_{12} & -k_{11} + 13k_{12} \\ 2000k_{22} & -k_{21} + 13k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2000k_{21} & -2000k_{22} \\ k_{11} - 13k_{21} & -k_{12} - 13k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -4000k_{12} \\ -4000k_{22} \end{bmatrix}[0 \quad -200000]\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000k_{12} + 2000k_{21} - 0.04 & -k_{11} + 13k_{12} + 2000k_{22} \\ 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} & -k_{21} + 13k_{22} - k_{12} + 13k_{22} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 800 * 10^6 k_{12} \\ 0 & 800 * 10^6 k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000k_{12} + 2000k_{21} - 0.04 & -k_{11} + 13k_{12} + 2000k_{22} \\ 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} & -k_{21} + 13k_{22} - k_{12} + 13k_{22} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 800 * 10^6 k_{12}k_{21} & 800 * 10^6 k_{12}k_{23} \\ 800 * 10^6 k_{22}k_{21} & 800 * 10^6 k_{22}k_{21} \end{bmatrix}$$

Considerando que $k_{21} = k_{12}$, ya que se trata de una matriz simétrica produce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{k}_{11} = 4000k_{21} - 0.04 + 800 * 10^6 {k_{21}}^2$$
$$\dot{k}_{21} = 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} + 800 * 10^6 k_{22}k_{21}$$
$$\dot{k}_{22} = -2k_{21} + 26k_{22} + 800 * 10^6 {k_{22}}^2$$

Calculando las ganancias S de la ecuación de referencia:

$$\dot{S} = -A^T(t)S(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) + Q(t)r(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\\dot{s}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}0 & 2000\\-1 & 13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-4000\end{bmatrix}[50][0 \quad -4000]\right]\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.04 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\r_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\\dot{s}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}0 & 2000\\-1 & 13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4000k_{12}\\-4000k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-4000\end{bmatrix}[0 \quad -200{,}000]\right]\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.4\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\\dot{s}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}0 & 2000\\-1 & 13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 800*10^6k_{12}\\0 & 800*10^6k_{22}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.4\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\\dot{s}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}0 & 2000+800*10^6k_{12}\\-1 & 13+800*10^6k_{22}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2000+800*10^6k_{12})s_2+0.4\\-s_1+(13+800*10^6k_{22})s_2\end{bmatrix}$$

Produce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= 2000s_2+800*10^6k_{12}s_2+0.4\\\dot{s}_2 &= -s_1+13s_2+800*10^6k_{22}s_2\end{aligned}$$

Tomando la ley de control óptimo general:

$$U^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t)-R^{-1}(t)B^T(t)S(t)$$

$$U^*(t)=[-50][0 \quad -4000]\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+[-50][0 \quad -4000]\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}$$

$$U^*(t)=[0 \quad 200{,}000]\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+[0 \quad 200{,}000]\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}$$

$$U^*(t)=[200*10^3k_{21} \quad 200*10^3k_{22}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+[200*10^3s_2]$$

Produce la siguiente ley de control óptimo para nuestro sistema:

$$U^*(t)=200*10^3(k_{21}x_1+k_{22}x_2+s_2)$$

Dado que el sistema es completamente controlable, las matrices son constantes, H=0 y la referencia es constante, se calculan las ganancias óptimas para el caso de $t_f\to\infty$ en horizonte infinito.

Donde:

$$\begin{aligned}\dot{K}(t)&=0\\\dot{S}(t)&=0\end{aligned}$$

Lo que resulta:

$$\begin{aligned}0 &= 4000k_{21}-0.04+800*10^6{k_{21}}^2\\0 &= 2000k_{22}-k_{11}+13k_{21}+800*10^6k_{22}k_{21}\\0 &= -2k_{21}+26k_{22}+800*10^6{k_{22}}^2\\0 &= 2000s_2+800*10^6k_{12}s_2+0.4\\0 &= -s_1+13s_2+800*10^6k_{22}s_2\end{aligned}$$

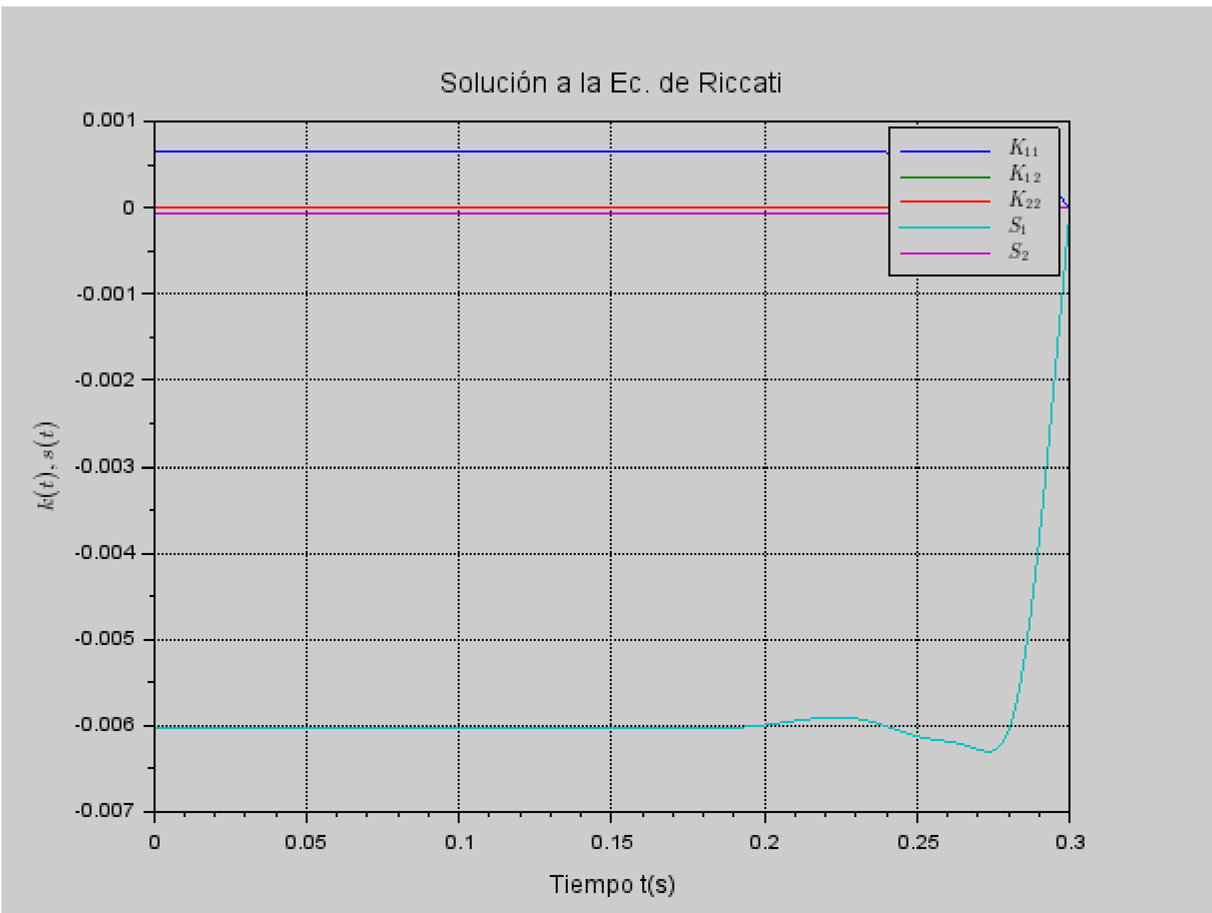
Resolviendo este sistema de ecuaciones algebraico produce las siguientes ganancias:

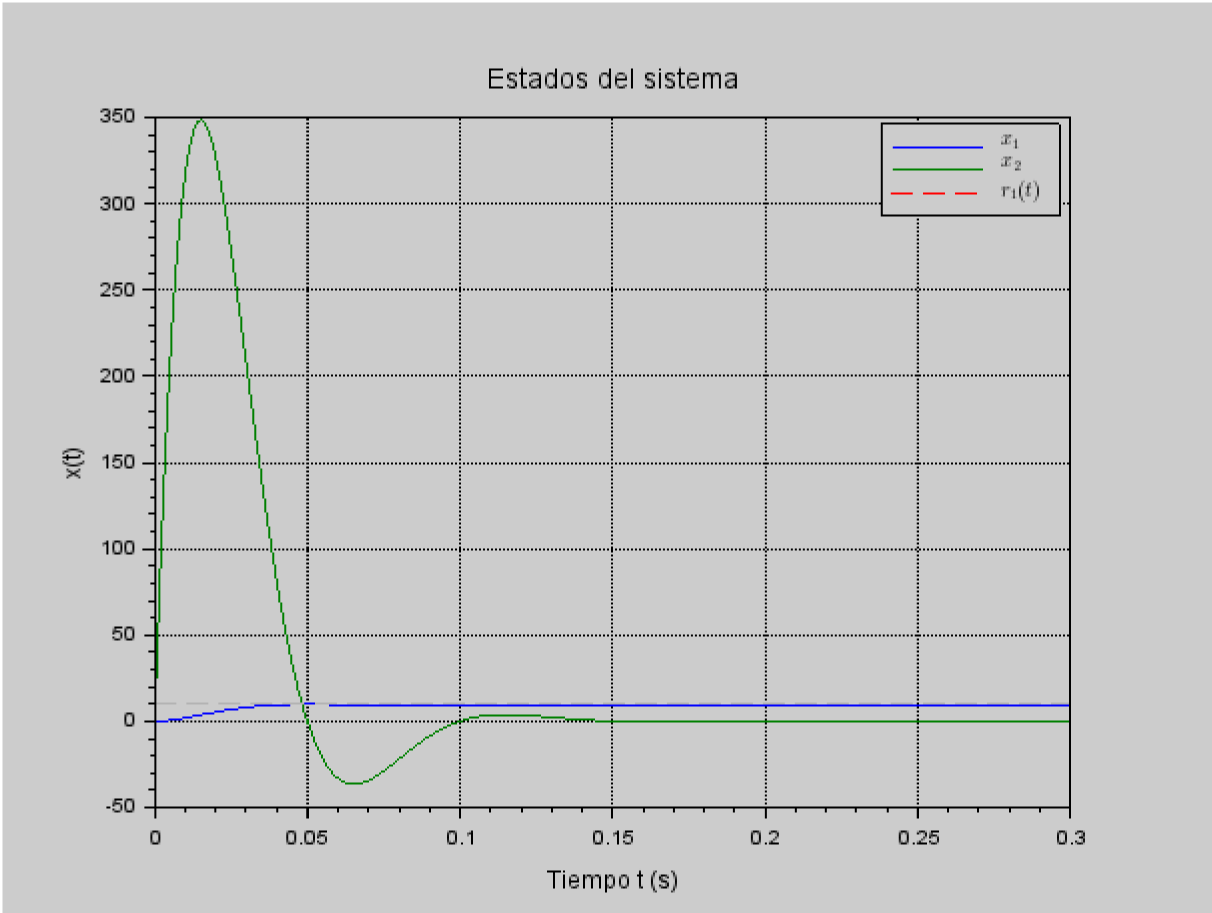
$$k_{11} = 6.454 * 10^{-4}$$
$$k_{12} = 5.000 * 10^{-6}$$
$$k_{22} = 9.673 * 10^{-8}$$
$$s_1 = -6.025 * 10^{-3}$$
$$s_2 = -6.666 * 10^{-5}$$

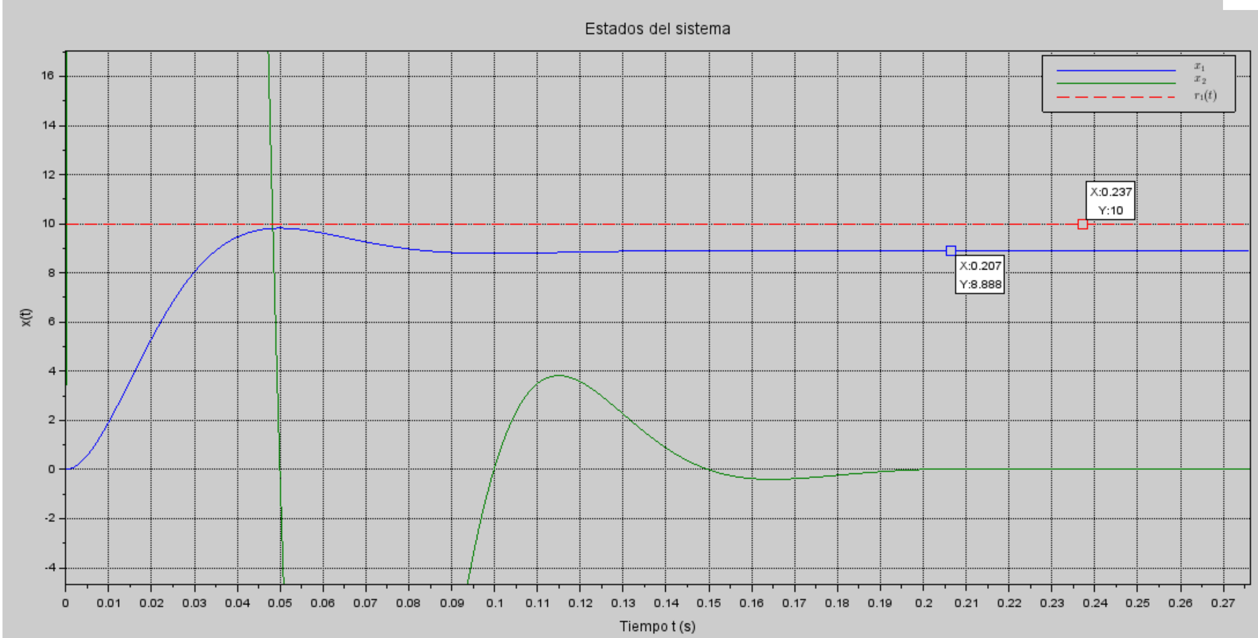
Con la ley de control óptima:

$$U^*(t) = x_1 + 0.019x_2 - 13.332$$

Primera aproximación basada en resultados numéricos y simulaciones, y comparación de las capacidades vs especificaciones del sistema

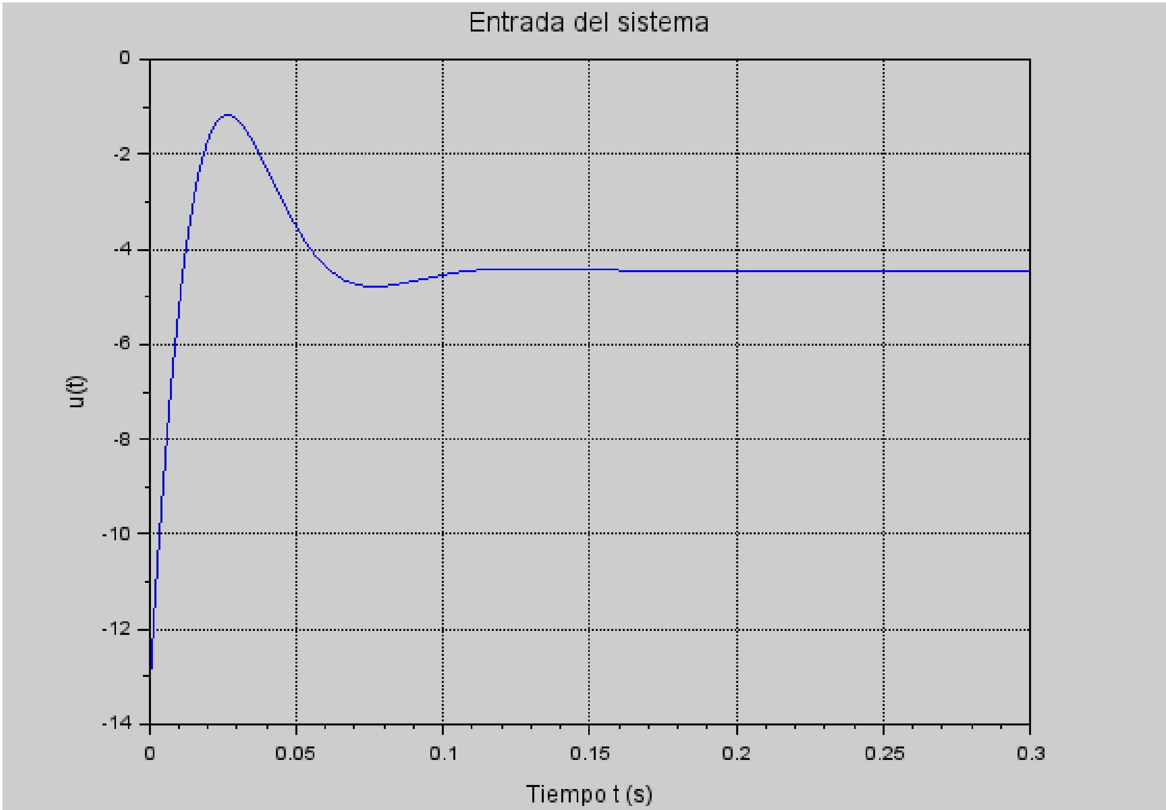


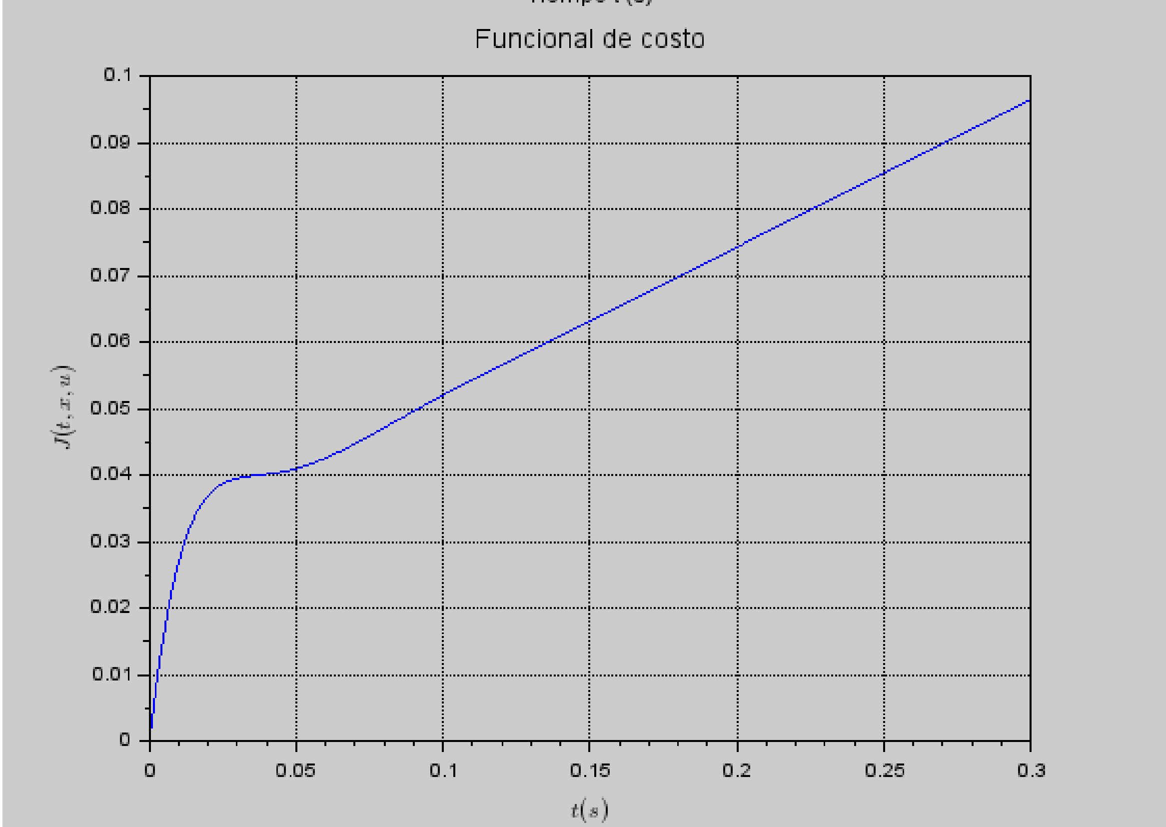




La señal no llega a la referencia $r_1 = 10v$ se queda en $8.88v$. Es necesario reajustar la funcional de costo.

Se planea agregar una referencia $r_2 = 0$ para x_2 de esta manera se reducirá el sobrepaso y además de eso se planea penalizar más x_1.


Entrada del sistema
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
u(t)
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
Tiempo t (s)


Funcional de costo
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
$J(t, x, u)$
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
$t(s)$

Ajustes a la propuesta y simulaciones para tener nuevos resultados numéricos que ya cumplan con el objetivo de control

Primer ajuste: Recomendaciones de diseño para el funcional de costo

Principalmente se realizaron ajustes en el funcional de costo, mediante la propuesta de nuevos valores, los cuales se obtuvieron de la siguiente forma:

Valor para Q del estado 1:

$$Q_{(1,1)} = \frac{1}{[x_{1_{max}}]^2} = \frac{1}{[0.1]^2} = \frac{1}{0.01} = 100$$

Valor para R:

$$R = \frac{1}{[U_{max}]^2} = \frac{1}{[20]^2} = \frac{1}{400} = 0.0025$$

Por lo que el funcional de costo quedaría expresado como:

$$J(x^*, y^*) = \int_{t_0}^{t_f} \{100(x_1(t) - 10)^2 + 0.0025u^2\}\, dt$$

El procedimiento para obtener las ganancias del controlador lqr sería entonces:

Nuestras matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2000 & -13 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4000 \end{bmatrix};\ H = [0];\ Q = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ R = \frac{1}{200};\ \ r(t) = \begin{bmatrix} 10 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones diferenciales de Riccati quedarían como:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2000 & -13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2000 \\ 1 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4000 \end{bmatrix} [200][0 \quad -4000] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000k_{12} & -k_{11} + 13k_{12} \\ 2000k_{22} & -k_{21} + 13k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2000k_{21} & -2000k_{22} \\ k_{11} - 13k_{21} & -k_{12} - 13k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4000k_{12} \\ -4000k_{22} \end{bmatrix} [0 \quad -800000] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000k_{12} + 2000k_{21} - 200 & -k_{11} + 13k_{12} + 2000k_{22} \\ 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} & -k_{21} + 13k_{22} - k_{12} + 13k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 32 * 10^8 k_{12} \\ 0 & 32 * 10^8 k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000k_{12} + 2000k_{21} - 200 & -k_{11} + 13k_{12} + 2000k_{22} \\ 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} & -k_{21} + 13k_{22} - k_{12} + 13k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 32 * 10^8 k_{12}k_{21} & 32 * 10^8 k_{12}k_{23} \\ 32 * 10^8 k_{22}k_{21} & 32 * 10^8 k_{22}k_{21} \end{bmatrix}$$

Considerando que $k_{21} = k_{12}$, ya que se trata de una matriz simétrica nos da las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{k}_{11} = 4000k_{21} - 200 + 32 * 10^8 {k_{21}}^2$$
$$\dot{k}_{21} = 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} + 32 * 10^8 k_{22}k_{21}$$
$$\dot{k}_{22} = -2k_{21} + 26k_{22} + 32 * 10^8 {k_{22}}^2$$

Calculando las ganancias S de la ecuación de referencia:

$$\dot{S} = -A^T(t)S(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) + Q(t)r(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 2000 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4000 \end{bmatrix} [200] [0 \quad -4000] \right] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 2000 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4000k_{12} \\ -4000k_{22} \end{bmatrix} [0 \quad -800000] \right] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 2000 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 32 * 10^8 k_{12} \\ 0 & 32 * 10^8 k_{22} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 2000 + 32 * 10^8 k_{12} \\ -1 & 13 + 32 * 10^8 k_{22} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2000 + 32 * 10^8 k_{12})s_2 + 2000 \\ -S_1 + (13 + 32 * 10^8 k_{22})s_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{s}_1 = 2000s_2 + 32 * 10^8 k_{12}s_2 + 2000$$
$$\dot{s}_2 = -s_1 + 13s_2 + 32 * 10^8 k_{22}s_2$$

La ley de control se expresaría como:

$$U^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) - R^{-1}(t)B^T(t)S(t)$$

$$U^*(t) = [-200][0 \quad -4000] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [-200][0 \quad -4000] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$U^*(t) = [0 \quad 800000] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \quad 800000] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$U^*(t) = [800x10^3 k_{21} \quad 800x10^3 k_{22}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [800x10^3 s_2]$$

$$U^*(t) = 800 * 10^3 (k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + s_2)$$

Dado que el sistema es completamente controlable, las matrices son constantes, H=0 y la referencia es constante, se calculan las ganancias óptimas para el caso de $t_f \to \infty$ en horizonte infinito.

Donde:

$$\dot{K}(t) = 0$$

Lo que resulta:

$$\begin{aligned}
0 &= 4000k_{21} - 200 + 32 * 10^8 {k_{21}}^2 \\
0 &= 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} + 32 * 10^8 k_{22}k_{21} \\
0 &= -2k_{21} + 26k_{22} + 32 * 10^8 {k_{22}}^2 \\
0 &= 2000s_2 + 32 * 10^8 k_{12}s_2 + 2000 \\
0 &= \ -s_1 + 13s_2 + 32 * 10^8 k_{22}s_2
\end{aligned}$$

Lo que produce las siguientes ganancias:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 0.3156 \\
k_{12} &= 2.493 * 10^{-4} \\
k_{22} &= 3.906 * 10^{-7} \\
s_1 &= -3.1582 \\
s_2 &= -2.500 * 10^{-3}
\end{aligned}$$

Con ley de control:

$$U^*(t) = 800 * 10^3(k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + s_2)$$

$$U^*(t) = 199.44x_1 + 0.3125x_2 - 2000$$

Al realizar las pruebas de simulación con los valores propuestos nos percatamos de que existían algunas inconsistencias con la entrada del sistema, por lo que se propusieron nuevos valores de Q y R que nos brindarán una respuesta más apegada a la realidad, estos valores los obtuvimos a modo de prueba y error.

Segundo ajuste: prueba y error

Para el segundo ajuste siplemente se fue experimentando con distintos valores y se obtuvo las siguientes penalizaciones:

Valor para Q del estado 1:

$$Q_{(1,1)} = 1.9$$

Valor para R:

$$R = 0.1$$

Por lo que el funcional de costo quedaría expresado como:

$$J(x^*, y^*) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \{1.9(x_1(t) - 10)^2 + 0.1u^2\}\, dt$$

El procedimiento para obtener las ganancias del controlador lqr sería entonces:

Con nuestras matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2000 & -13 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4000 \end{bmatrix};\ H = [0];\ Q = \begin{bmatrix} 1.9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ R = \frac{1}{10};\ r(t) = \begin{bmatrix} 10 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones diferenciales de Riccati quedarían como:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2000 & -13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2000 \\ 1 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -4000 \end{bmatrix}[10][0 \quad -4000]\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000k_{12} & -k_{11} + 13k_{12} \\ 2000k_{22} & -k_{21} + 13k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2000k_{21} & -2000k_{22} \\ k_{11} - 13k_{21} & -k_{12} - 13k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -4000k_{12} \\ -4000k_{22} \end{bmatrix}[0 \quad -40000]\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000k_{12} + 2000k_{21} - 1.9 & -k_{11} + 13k_{12} + 2000k_{22} \\ 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} & -k_{21} + 13k_{22} - k_{12} + 13k_{22} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 160 * 10^6 k_{12} \\ 0 & 160 * 10^6 k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{21} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000k_{12} + 2000k_{21} - 1.9 & -k_{11} + 13k_{12} + 2000k_{22} \\ 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} & -k_{21} + 13k_{22} - k_{12} + 13k_{22} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 160 * 10^6 k_{12}k_{21} & 160 * 10^6 k_{12}k_{23} \\ 160 * 10^6 k_{22}k_{21} & 160 * 10^6 k_{22}k_{21} \end{bmatrix}$$

Considerando que $k_{21} = k_{12}$, ya que se trata de una matriz simétrica nos da las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{k}_{11} = 4000k_{21} - 1.9 + 160 * 10^6 {k_{21}}^2$$
$$\dot{k}_{21} = 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} + 160 * 10^6 k_{22}k_{21}$$
$$\dot{k}_{22} = -2k_{21} + 26k_{22} + 160 * 10^6 {k_{22}}^2$$

Calculando las ganancias S de la ecuación de referencia:

$$\dot{S} = -A^T(t)S(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) + Q(t)r(t)$$
$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 2000 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -4000 \end{bmatrix}[10][0 \quad -4000]\right]\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}0 & 2000\\ -1 & 13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4000k_{12}\\ -4000k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -40000\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}19\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}0 & 2000\\ -1 & 13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 160*10^6k_{12}\\ 0 & 160*10^6k_{22}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}19\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}0 & 2000+160*10^6k_{12}\\ -1 & 13+160*10^6k_{22}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}19\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2000+160*10^6k_{12})s_2+19\\ -s_1+(13+160*10^6k_{22})s_2\end{bmatrix}$$

$$\dot{s}_1 = 200s_2 + 160*10^6k_{12}s_2 + 19$$
$$\dot{s}_2 = -s_1 + 13s_2 + 160*10^6k_{22}s_2$$

La ley de control se expresaría como:

$$U^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) - R^{-1}(t)B^T(t)S(t)$$

$$U^*(t) = [-10]\begin{bmatrix}0 & -4000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[-10]\begin{bmatrix}0 & -4000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\end{bmatrix}$$
$$U^*(t) = \begin{bmatrix}0 & 40000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 40000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\end{bmatrix}$$
$$U^*(t) = \begin{bmatrix}40*10^3K_{21} & 40*10^3K_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}40*10^3S_2\end{bmatrix}$$

$$U^*(t) = 40*10^3(k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + s_2)$$

Dado que el sistema es completamente controlable, las matrices son constantes, H=0 y la referencia es constante, se calculan las ganancias óptimas para el caso de $t_f \to \infty$ en horizonte infinito.

Donde:

$$\dot{K}(t) = 0$$

Lo que resulta:

$$0 = 4000k_{21} - 1.9 + 160*10^6{k_{21}}^2$$
$$0 = 2000k_{22} - k_{11} + 13k_{21} + 160*10^6k_{22}k_{21}$$
$$0 = -2k_{21} + 26k_{22} + 160*10^6{k_{22}}^2$$
$$0 = 2000s_2 + 160*10^6k_{12}s_2 + 19$$
$$0 = -s_1 + 13s_2 + 160*10^6k_{22}s_2$$

Lo que produce las siguientes ganancias:

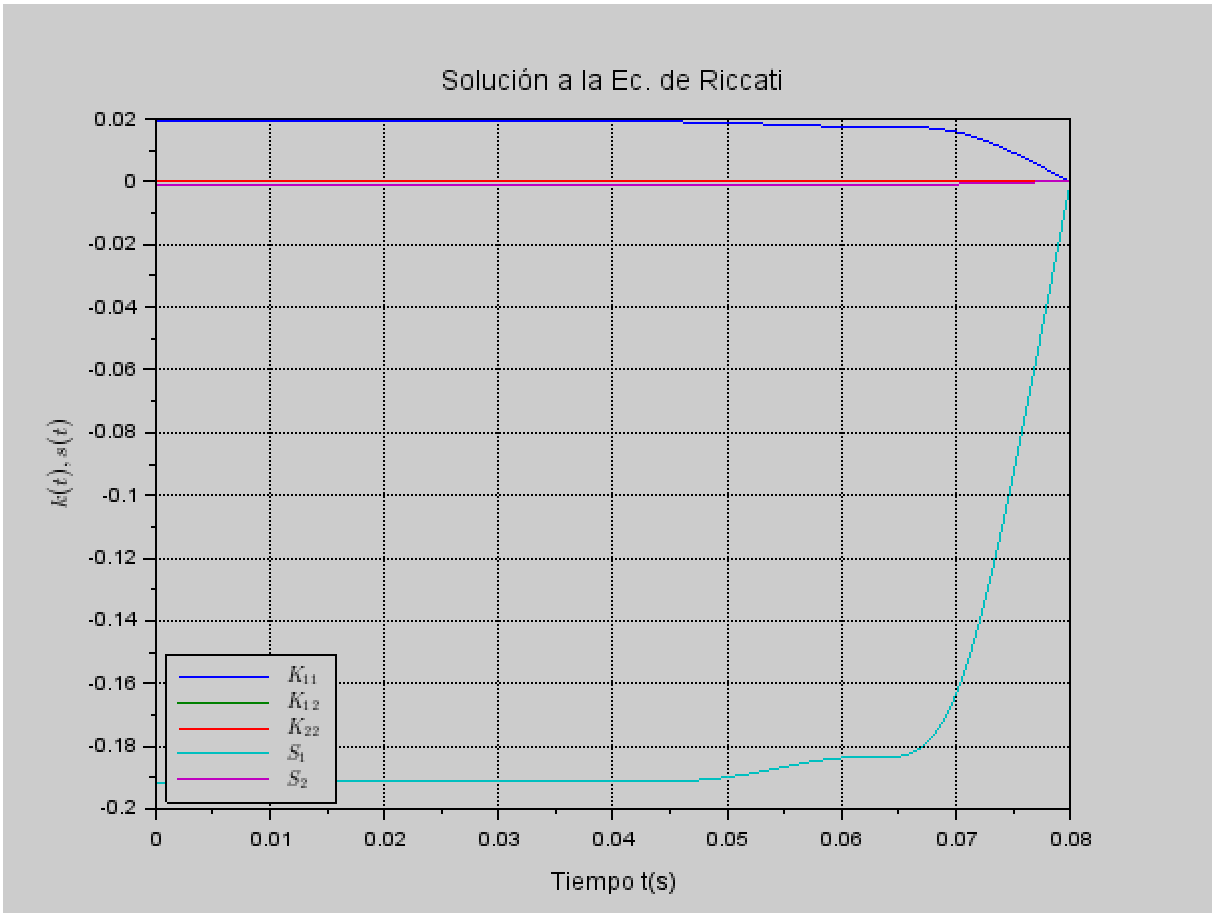
$$k_{11} = 0.01923$$
$$k_{12} = 9.718*10^{-5}$$
$$k_{22} = 1.024*10^{-6}$$
$$s_1 = -0.191$$
$$s_2 = -1.083*10^{-3}$$

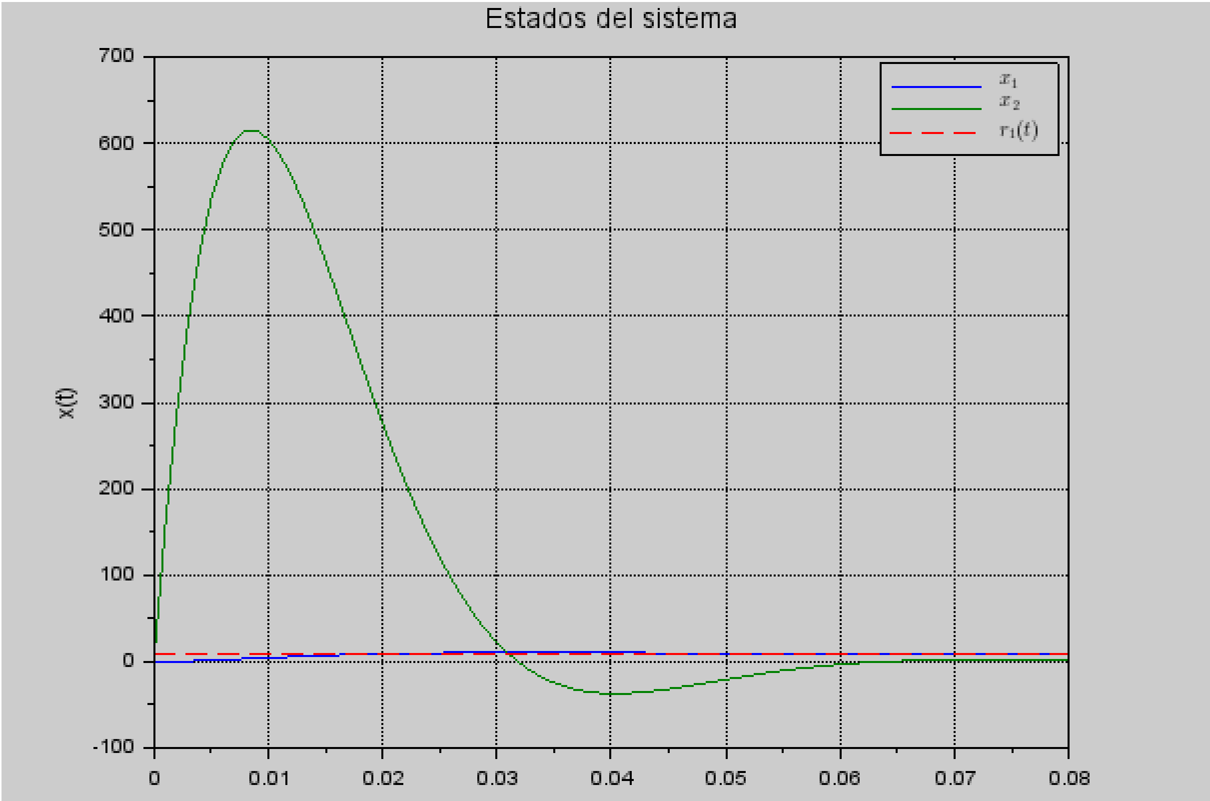
Con ley de control:

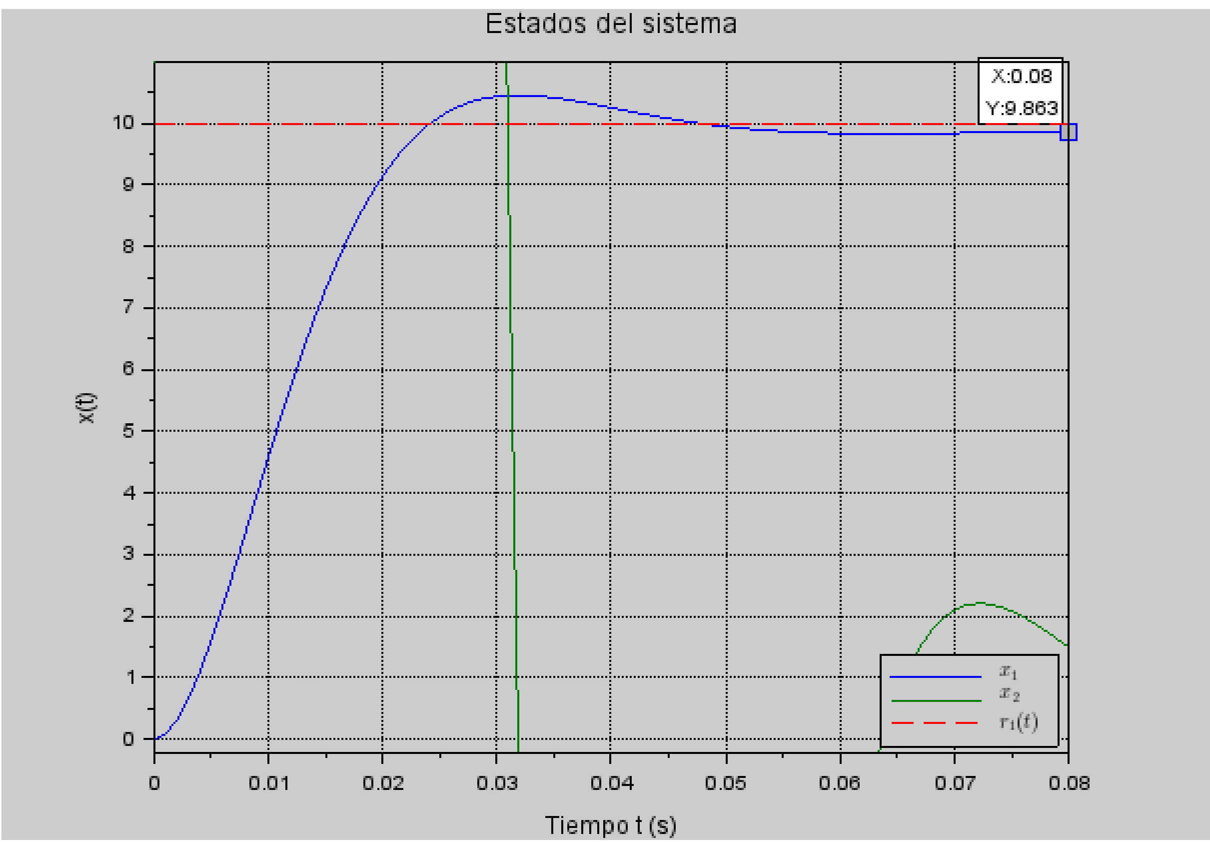
$$U^*(t) = 40x10^3(k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + s_2)$$

$$U^*(t) = 3.8872x_1 + 0.041x_2 - 43.32$$

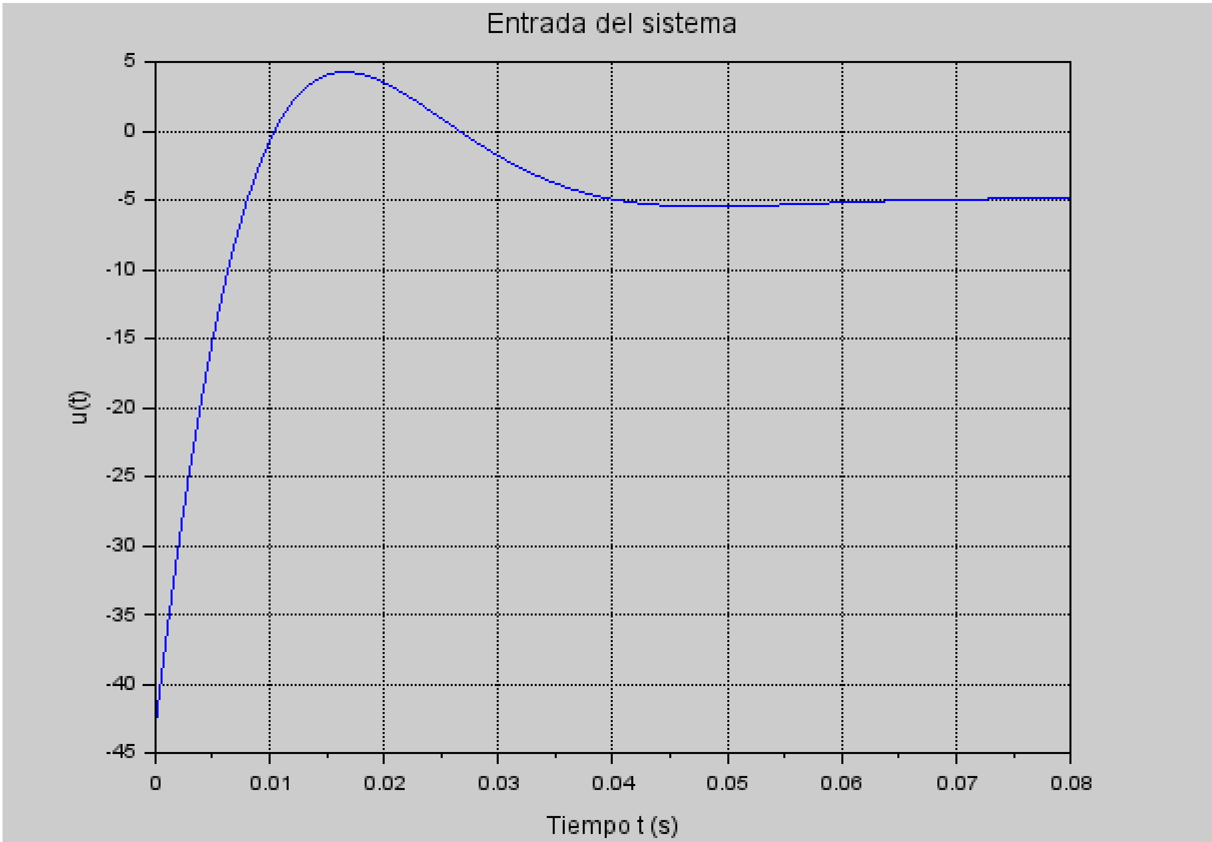
Este controlador da los siguientes resultados:

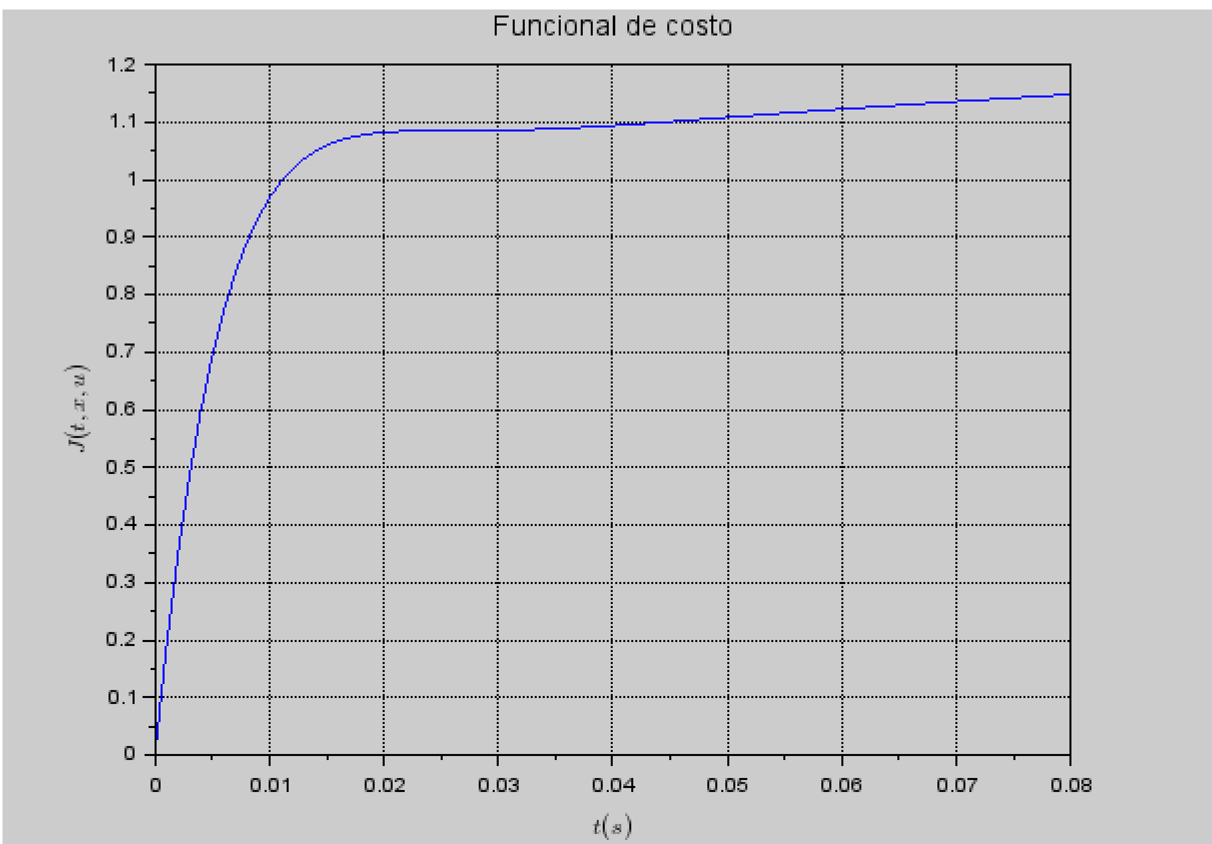






El valor se mantiene en 9.86 que cumple con el criterio del 2%.


Entrada del sistema
u(t)
Tiempo t (s)


Funcional de costo
$J(t,x,u)$
$t(s)$

Implementación del control con la planta en prototipo o simulaciones animadas

Para simular el sistema se usó Simulink de Matlab ya que cuenta con OpAmps.

Para diseñar la ley de control óptima de nuestra planta se optó por utilizar otro arreglo de Amplificadores operacionales en vez de un microcontrolador.

La ley de control que se plantea analogar con OpAmps es:

$$U^*(t) = 3.8872x_1(t) + 0.041x_2(t) - 43.32$$

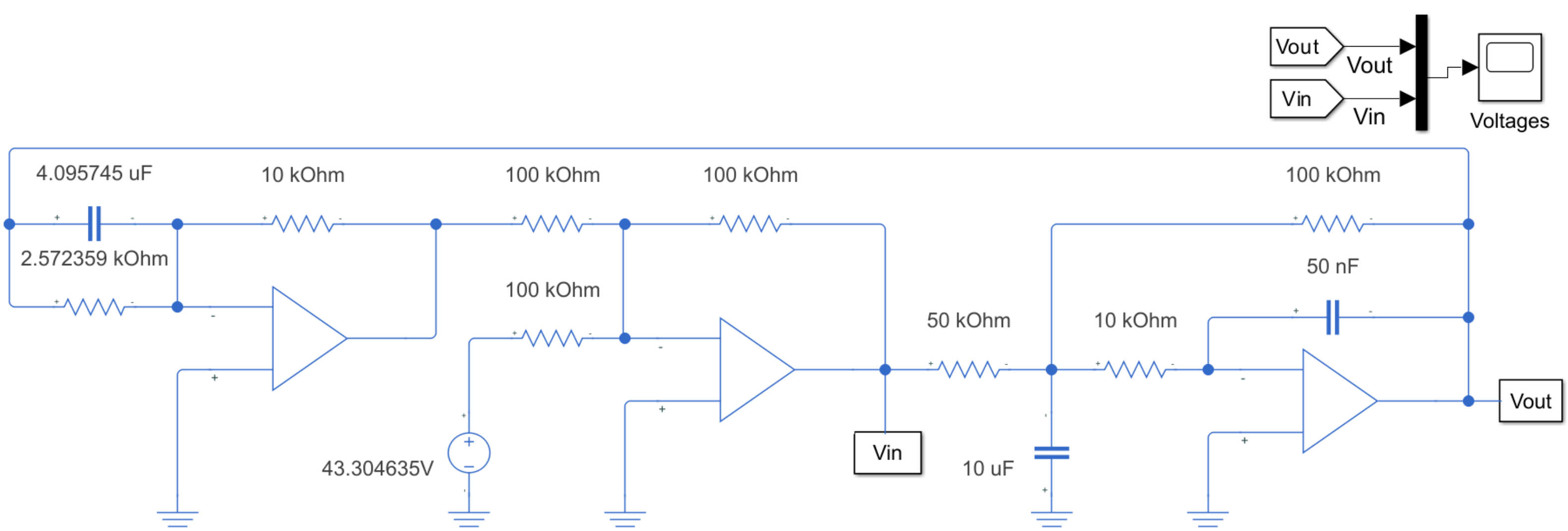
Donde:

$$x_1(t) = v_o(t)$$
$$x_2(t) = \frac{d}{dt}v_o(t)$$

- Por lo que para x_1 se requiere que el OpAmp tenga una configuración lineal.
- Para x_2 se toma la señal de referencia y se configura el OpAmp en modo derivativo.
- Para el valor restante simplemente se resta el voltaje proveniente de una fuente constante.

Simulaciones

Nuestro modelo con la ley de control propuesta queda de la siguiente forma:



Principio de funcionamiento

El primer Opamp de la izquierda está en una configuración sumador inversor:

$$V_{Op1} = -R_{f1}\left(\frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_2}{Z_2}\right)$$

Pero vemos que:

$$Z_1 = R$$
$$\frac{V_2}{Z_2} = I_2 = C\frac{d}{dt}V_2$$
$$V_1 = V_2 = v_o(t)$$

Entonces:

$$V_{op1}(t) = -R_{f1}\left(\frac{v_o(t)}{R} + C\frac{d}{dt}v_o(t)\right)$$

El siguiente amplificador está sumando esta señal negativa con el voltaje positivo de la fuente constante y después invierte la señal. Quedando:

$$V_{Op2}(t) = -R_{f2}\left(\frac{V_{op1}(t)}{R_{f2}} + \frac{V_3}{R_{f2}}\right)$$
$$V_{op2}(t) = -\left(-R_{f1}\left(\frac{v_o(t)}{R} + C\frac{d}{dt}v_o(t)\right) + V_3\right)$$
$$V_{op2}(t) = \frac{R_{f1}}{R}v_o(t) + +R_{f1}C\frac{d}{dt}v_o(t) - V_3$$

Sustituyendo con valores de $X(t)$ y sabiendo que $V_{op2}(t) = U^*(t)$:

$$U^*(t) = \frac{R_{f1}}{R}x_1(t) + +R_{f1}Cx_2(t) - V_3$$

Entonces para cumplir con las siguientes restricciones que exige nuestra ley de control:

$$\frac{R_{f1}}{R} = 3.88$$
$$R_{f1}C = 0.041$$
$$V = 43.32$$
$$\frac{R_{f2}}{R_{f2}} = 1$$

Se proponen los siguientes valores:

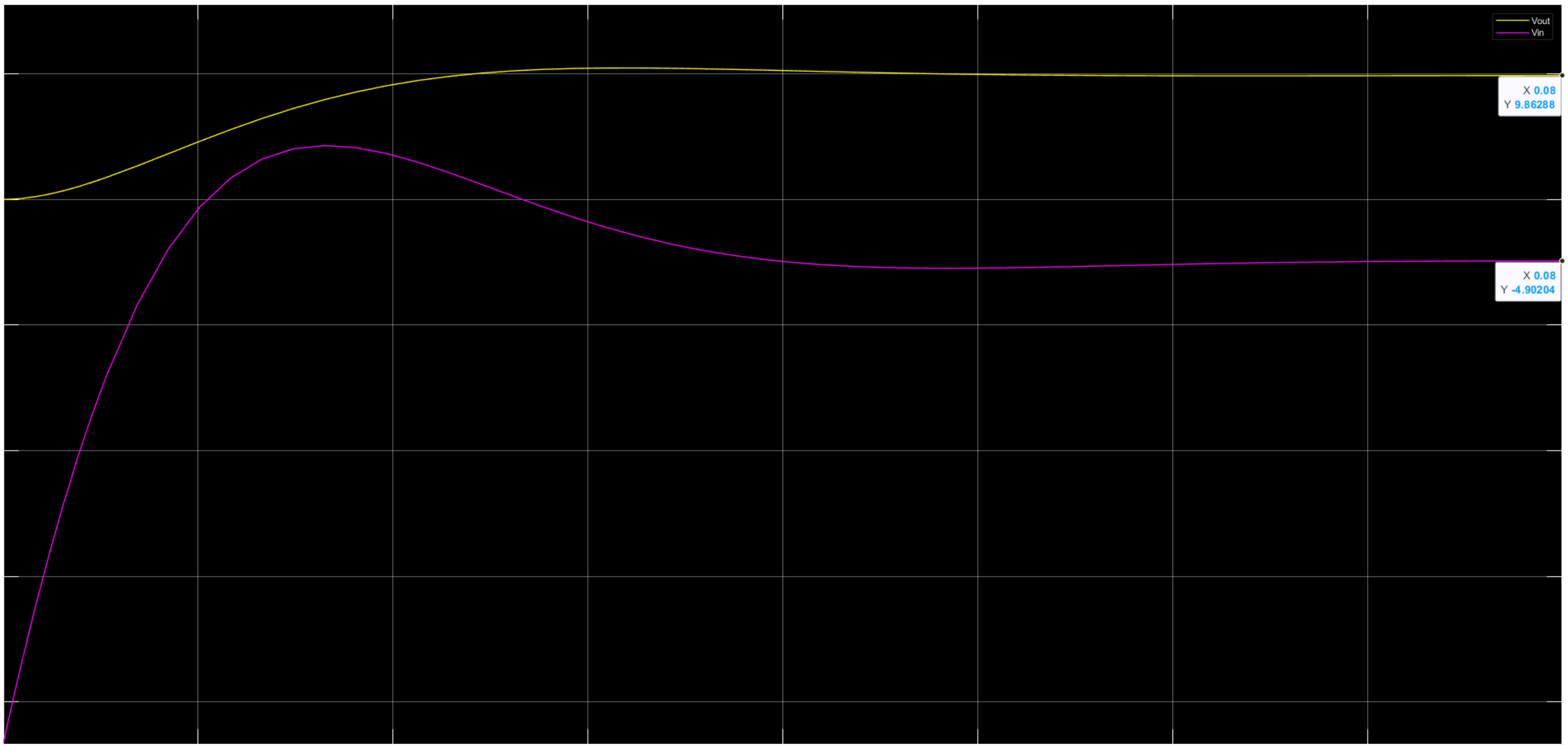
$$R_{f1} = 10k\Omega$$
$$R_{f2} = 100k\Omega$$
$$R = 2.57k\Omega$$
$$C = 4.1uF$$
$$V = 43.31v$$

Dando como resultado el modelo electrónico anterior.

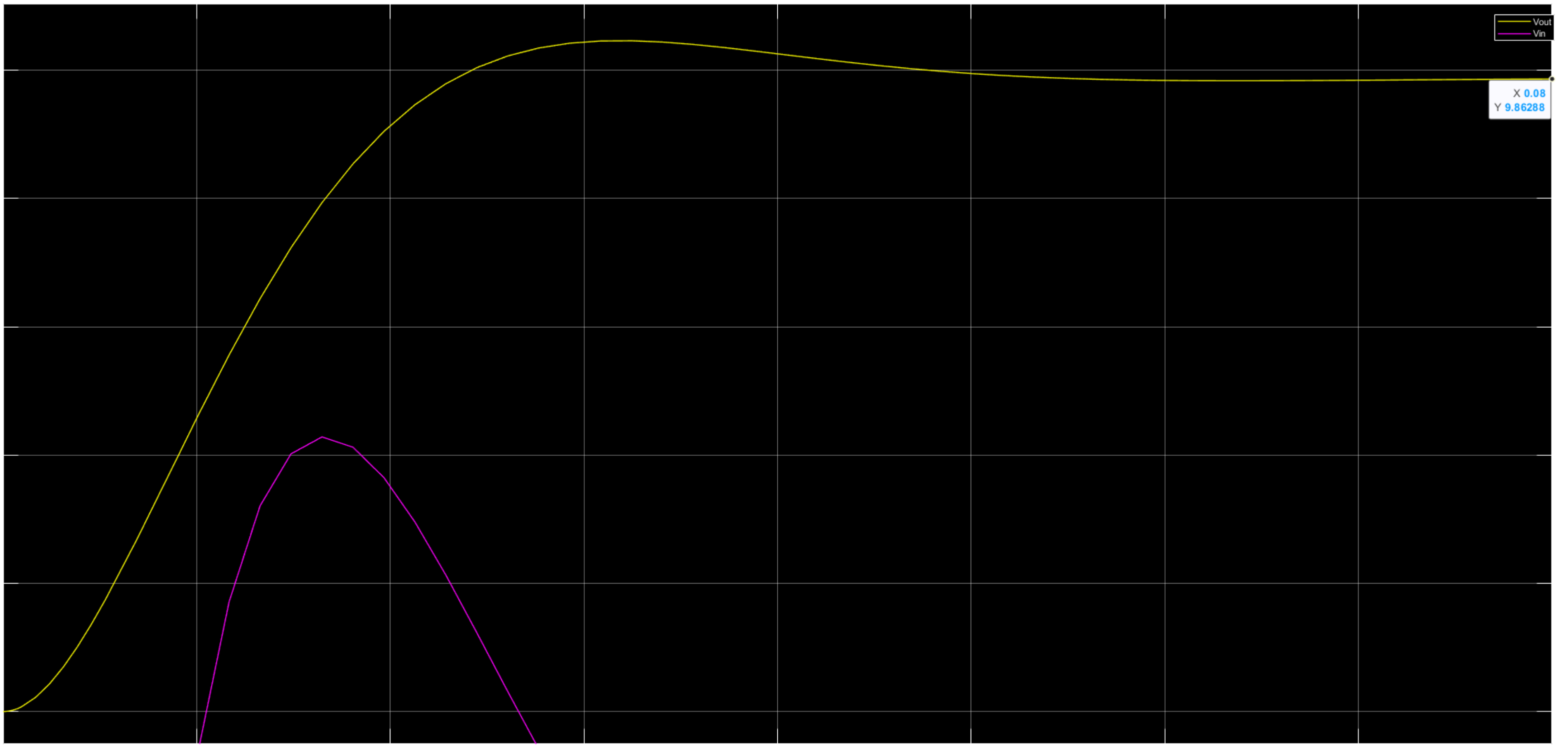
Los prototipos o simulaciones animadas funcionan cumpliendo completamente con las especificaciones propuestas

En la simulación la etiqueta V_{in} representa la entrada al sistema o la ley de control óptima $U^*(t)$ y V_{out} la salida de este mismo o $x_1(t)$.

Las gráficas de estas dos señales producidas por la simulación son:



Enfocandonos en la salida del sistema:



La dinámica de nuestro sistema es la misma que la predicha en los cálculos numéricos, además de los valores en estado estacionario para el voltaje de salida $v_{o_{ss}}(t_f) = 9.863v$.

Conclusiones y recomendaciones

La ley de control optima calculada en métodos numéricos y la implementada en simulación son iguales, por lo que se reafirma que las técnicas del diseño de un controlador lqr son legítimas.

Pero cabe mencionar que la señal de referencia deseada es de 10v y el sistema se queda en 9.86v. Lo que se quiso hacer en un principio para aproximar este error en estado estacionario a la referencia fue incrementar la penalización para la primera variable de estado. Pero esto causaba que el sistema tomara sobrepasos exagerados para la entrada del sistema sin nunca llegar al punto de consigna.

Después se volvió a analizar el criterio de desempeño y nos percatamos que no consideramos las condiciones de frontera:

$$K(t_f) = H$$
$$s(t_f) = -Hr(t_f)$$

Estas nuevas restricciones al lqr harán que el sistema integre el error haciendo que la ley de control siga modificándose hasta que alcance el punto de consigna. Con esto se teoriza que entonces se puede volver a modificar las matrices Q y R para que los valores de la entrada sean valores razonables para un sistema físico.

Para los siguientes pasos se sugiere rehacer la ley de control con estas nuevas condiciones de frontera y ejecutar la implementación en físico.

Referencias

Liñán, J. Á. (2024). *APUNTES DE CONTROL ÓPTIMO.*

Morín, A. S. (19 de mayo de 2024). *OpAmp-Optimal-Control.* Obtenido de GitHub: https://github.com/AndresSM415/OpAmp-Control-Optimo.git

Ogata, K. (1970). *Ingeniería de control moderna.* Madrid: Pearson.