CONCEPTUALIZACIÓN UNIDAD 1- CONJUNTOS NUMÉRICOS - ARITMÉTICA

Esta guía es complementaria de la clase sincrónica dada en el horario establecido por el Programa de Ingeniería de Sistemas y Computación, a través de la aplicación Cisco Webex, en ella se definen conceptos y se dan nuevos ejemplos.

CONJUNTOS NUMÉRICOS: Los **conjuntos numéricos** son agrupaciones de números que guardan una serie de propiedades estructurales.

En su forma más genérica se refiere a los grandes conjuntos de números como: *números naturales* **N,** *números enteros* ***Z,*** *números racionales* **Q,** *números reales* ***R*** (incluyen a los *irracionales* ***I***) y *números complejos* ***C*****.**

En esta clasificación, cada tipo de número es subconjunto de otro mayor, empezando por los *números naturales* como grupo de números más simples hasta llegar a la clasificación de *números complejos.*

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales.

Números Naturales: Se representa con la letra **N**, son todos los números mayores de cero (algunos autores incluyen también el 0) que sirven para contar. No pueden tener parte decimal, fraccionaria, ni imaginaria.

N = [1, 2, 3, 4, 5...]

Números Enteros*:* Se representa con la letra **Z**, incluye al conjunto de los *números naturales*, al cero y a sus opuestos aditivos (los números negativos). Es decir:

Z = [...-2, -1, 0, 1, 2...]

Números Racionales*:* Se representa con la letra **Q**, son aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros $a, b \in Z$ de la forma $\frac{a}{b}$ donde $b \neq 0$. Por ejemplo:

Q = [5/4, -3/-6, 8/1...]

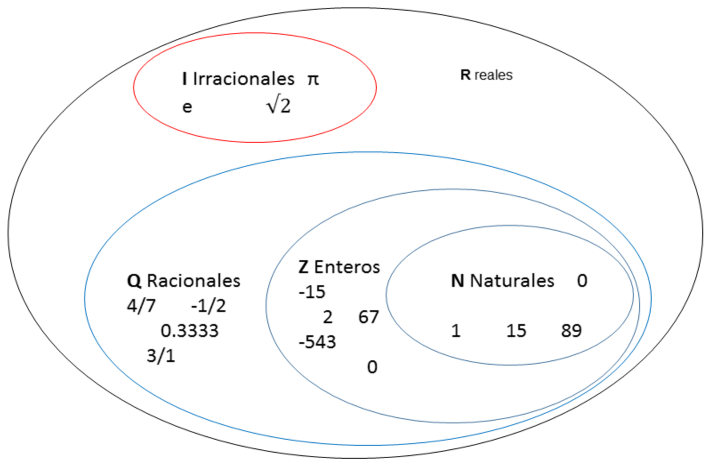
Números Irracionales*:* Se representa con la letra **I,** son los números que su representación decimal es no periódica, es decir, son infinitos.

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} = 1.414213562..., & \pi = 3.141592654... \\ \ell = 2.7182812..., & \sqrt{3} = 1.732050808... \end{bmatrix}$$

Números Imaginarios*:* Se representa con la letra ***i***. Surgen por la necesidad de obtener las raíces de índice par de cantidades negativas. La unidad de los número imaginarios es la raíz cuadrada de – 1, así que: $i = \sqrt{-1}$***.***

Números Complejos: Se representa con la letra C es la unión de los números reales con los imaginarios da origen a los números complejos.

Números Reales: Se representa con la letra **R**, los números reales son el conjunto que incluye los números naturales, enteros, racionales e irracionales**.**



<u>Propiedades de los números reales</u>

Si a, b, c son números reales, se verifican las siguientes propiedades:

Propiedades Conmutativas: El orden al sumar o multiplicar números reales no afecta el resultado.

$a+b=b+a$	**Ejemplos:** $7+3=3+7=10$	$5+(-2)=(-2)+5=3$
$a.b=b.a$	**Ejemplos:** $(4)\,(5)=(5)\,(4)=20$	$(8)\,(-3)=(-3)\,(8)=-24$

Propiedades Asociativas: Puedes hacer diferentes asociaciones al sumar o multiplicar reales y no se afecta el resultado.

$(a+b)+c=a+(b+c)$	**Ejemplo:** $(2+5)+3=2+(5+3)$ $7+3=2+8$ $10=10$
$(a.b).c=a.(b.c)$	**Ejemplo:** $((3)\,(5)).\,(2)=(3)\,.\,((5)\,(2))$ $(15)(2)=(3)(10)$ $30=30$

Propiedades Distributivas: Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados. El factor se distribuye a cada sumando

$a.(b+c)=a.b+a.c$	**Ejemplo:** $2(3+4)=2.(3)+2.(4)$ $2.(7)=6+8$ $14=14$
$(b+c).a=a.b+a.c$	**Ejemplo:** $(-3+2).4=4.(-3)+4.(2)$ $(-1).4=-12+8$ $-4=-4$

Propiedades Elemento neutro o Identidad: El cero es el elemento neutro de la suma; el 0 es la identidad aditiva.

El uno es el elemento neutro de la multiplicación; el 1 es la identidad multiplicativa.

$a+0=0+a$ **identidad aditiva**	**Ejemplo:** $2/5+0=0+2/5$ $2/5=2/5$
$a.(1)=(1).a$ **identidad multiplicativa**	**Ejemplo:** $-1/3.(1)=(1).-1/3$ $-1/3=-1/3$

Propiedades Inverso u opuesto: Dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado el elemento neutro de la suma, en este caso, es el cero.

Dos números son opuestos si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento neutro de la multiplicación, en este caso, es el uno.

$a+(-a)=0$ **identidad aditiva**	**Ejemplo:** $7+(-7)=7-7=0$
$a.\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{a}=1$ **identidad multiplicativa**	**Ejemplo:** $3\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{3}=1$

<u>OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS</u>: Para definir **la suma de números enteros** se necesita conocer el valor absoluto de un número entero x, que se representa por |x|.

El valor absoluto de un número positivo es el mismo número positivo, por ejemplo:

|+8| = | 8| = 8

El valor absoluto de un número negativo es su opuesto (número positivo), por ejemplo:

| – 3 | = –(– 3) = 3

y el valor absoluto de cero es cero.

Suma de números enteros: Para sumar dos números enteros si los sumandos son del mismo signo, se suman los valores absolutos y al resultado se le pone el signo que tengan en común todos los números.

Ejemplos: Se pueden expresar la suma de las siguientes formas:

1. $(+5)+(+3)=5+3=8$
2. $20+4+5+2=31$
3. $(-2)+(-4)+(-7)+(-1)=-2-4-7-1=-14$
4. $-8-2-5-6=-21$

Para sumar dos números enteros de signos contrarios, se restan sus valores absolutos (al número mayor le restamos el número menor) y al resultado se le deja el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplos:

1. $(+13)+(-3)=13-3=10$
2. $(+2)+(-7)=2-7=-5$
3. $(-2)+(+8)=-2+8=6$

Multiplicación de números enteros: se multiplican sus valores absolutos, aplicando la multiplicación de los números naturales, y se aplica la ley de signos:

(+) (+) = (+) El resultado de multiplicar dos números positivos es un número positivo.
(+) (–) = (–) El resultado de multiplicar un número positivo por otro negativo es un número negativo.
(–) (+) = (–) El resultado de multiplicar un número negativo por otro positivo es un número negativo.
(–) (–) = (+) El resultado de multiplicar dos números negativos es un número positivo.

Esto quiere decir, cuando multiplico **números de igual signo** da **positivo** y cuando multiplico **número de signo contrari**o da **negativo.**

Ejemplos:

1. $(13)(3)=39$
2. $(-5)(-7)=35$
3. $(-4)(+8)=-32$
4. $(12)(-6)=-72$

División de números enteros: Para hacer la división de números enteros, se divide el valor absoluto del dividendo entre el valor absoluto del divisor, y al cociente se le añade el signo según la regla de los signos para la división. Es decir, hacemos la división sin tener en cuenta los signos, como una división de números naturales, y luego le ponemos al cociente el signo que le corresponda.

La regla de los signos para la división de números enteros dice que si los signos del dividendo y del divisor son iguales el signo del cociente será positivo y si los signos del dividendo y del divisor son distintos, el signo del cociente será negativo:

$(+)\div(+)$ = (+) El resultado de dividir dos números positivos es un número positivo.
$(+)\div(-)$ = (–) El resultado de dividir un número positivo entre otro número negativo es un número negativo.
$(-)\div(+)$ = (–) El resultado de dividir un número negativo entre otro número positivo es un número negativo.
$(-)\div(-)$ = (+) El resultado de dividir dos números negativos es un número positivo.

Esto quiere decir, cuando divido **números de igual signo** da **positivo** y cuando divido **número de signo contrari**o da **negativo.**

Ejemplos:

1. $(20)\div(5)=4$
2. $(-15)\div(-3)=5$
3. $(-100)\div(4)=-25$
4. $(12)\div(-2)=-6$

OPERACIONES CON NÚMEROS FRACCIONARIOS

A la hora de realizar una suma de fracciones nos podemos encontrar dos casos diferentes:

- Fracciones que tienen distinto denominador (heterogéneos).
- Fracciones que tienen el mismo denominador (homogéneos).

Suma de fraccionarios heterogéneos: Cuando dos o más fracciones tienen diferentes denominadores se dicen fracciones heterogéneas. Para sumar se aplica la siguiente regla:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{bd}, \quad b\neq 0 \;\; y \;\; d\neq 0$$

Ejemplos:

1. $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=\frac{(4)(3)+(5)(2)}{(5)(3)}=\frac{12+10}{15}=\frac{22}{15}$
2. $-\frac{5}{3}+\frac{4}{7}=\frac{(-5)(7)+(3)(4)}{(3)(7)}=\frac{-35+12}{21}=\frac{-23}{21}$
3. $-\frac{1}{8}-\frac{8}{6}=\frac{(-1)(6)+(8)(-8)}{(8)(6)}=\frac{-6-64}{48}=-\frac{70}{48}=-\frac{35}{24}$

Cuando se van a sumar dos o más fraccionarios heterogéneos se puede resolver por diferentes formas así:

Primera Forma: Agrupando de a dos fracciones en cualquier orden así:

Ejemplo: $\frac{5}{6}+\frac{1}{10}-\frac{6}{4}=$

Se pueden sumar los dos primeros términos:

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{10}=\frac{(5)\,(10)+(6)\,(1)}{(6)\,(10)}=\frac{50+6}{60}=\frac{56}{60}=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$$

y al resultado se le resta el tercer término

$$\frac{14}{15}-\frac{6}{4}=\frac{(14)\,(4)-(15)\,(6)}{(15)\,(4)}=\frac{56-90}{60}=-\frac{34}{60}=-\frac{17}{30}$$

Segunda Forma: Calculando el mínimo común múltiplo **m.c.m** se deben realizar los siguientes pasos:

Ejemplo: $\frac{5}{6}+\frac{1}{10}-\frac{6}{4}=$

1. Se halla el mínimo común múltiplo **(m.c.m)** de los dos denominadores. Para hallar el m.c.m se descomponen en factores primos los denominadores

Mínimo Común Múltiplo: Para hallar el m.c.m se toman ***todos*** los factores con mayor exponente.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$2.3 \qquad 2.5 \qquad 2^2$

El *m.c.m* es = $(2^2)\,(3)\,(5)=60$

2. Se divide el mínimo común múltiplo entre cada denominador y el resultado se multiplica por el numerador respectivo.

$$\frac{60}{6}=10$$

$$\frac{60}{10}=6$$

$$\frac{60}{4}=15$$

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{10}-\frac{6}{4}=\frac{(10)\,(5)+(6)\,(1)-(15)\,(4)}{60}=\frac{50+6-90}{60}=$$

3. Se suman los numeradores (dado que las fracciones modificadas tienen el mismo denominador).

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{10}-\frac{6}{4}=\frac{(10)(5)+(6)(1)-(15)(4)}{60}=\frac{50+6-90}{60}=-\frac{34}{60}=-\frac{17}{30}$$

Tercera Forma: Reducción de fracciones a común denominador por el **método de los productos cruzados**. Consiste en multiplicar cada numerador de la fracción por los demás denominadores.

Ejemplo: $\frac{5}{6}+\frac{1}{10}-\frac{6}{4}=$

1. Se multiplican los denominadores entre sí y ese valor es el resultado del denominador.

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{10}-\frac{6}{4}=\frac{\quad}{(6)(10)(4)}=\frac{\quad}{240}$$

2. Se multiplica el primer numerador por los demás denominadores menos por el del el mismo y este resultado es el primer término del numerador.

$$\frac{5}{6}=\frac{(5)(10)(4)}{240}=\frac{200}{240}\quad\Rightarrow\quad\frac{5}{6}+\frac{1}{10}-\frac{6}{4}=\frac{200+}{(6)(10)(4)}=\frac{\quad}{240}$$

Se multiplica el segundo numerador por los demás denominadores menos por el del el mismo y este resultado es el segundo término del numerador.

$$\frac{1}{10}=\frac{(1)(6)(4)}{240}=\frac{24}{240}\quad\Rightarrow\quad\frac{5}{6}+\frac{1}{10}-\frac{6}{4}=\frac{200+24}{(6)(10)(4)}=\frac{\quad}{240}$$

Se multiplica el tercer numerador por los demás denominadores menos por el del el mismo y este resultado es el tercer término del numerador.

$$\frac{6}{4}=\frac{(6)(6)(10)}{240}=\frac{360}{240}\quad\Rightarrow\quad\frac{5}{6}+\frac{1}{10}-\frac{6}{4}=\frac{200+24-360}{(6)(10)(4)}=-\frac{136}{240}=-\frac{68}{120}=-\frac{34}{60}=-\frac{17}{30}$$

Suma fraccionarios homogéneos: Cuando dos o más fracciones tienen el mismo denominador, se suman los numeradores y se deja el denominador común.

Ejemplos:

1. $\frac{4}{3}+\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{4+7-2}{3}=\frac{9}{3}=3$

2. $-\frac{4}{7}+\frac{5}{7}-\frac{8}{7}+\frac{1}{7}=\frac{-4+5-8+1}{7}=-\frac{6}{7}$

Multiplicación de números fraccionarios: Para multiplicar dos o más fracciones se multiplican los numeradores entre si y los denominadores entre sí.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d} \quad b\neq 0 \;\; y \;\; d\neq 0$$

Ejemplos:

1. $\frac{5}{4}.\ \frac{7}{6}=\frac{(5)(7)}{(4)(6)}=\frac{35}{24}$

2. $\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{(-3)(5)(-1)}{(2)(3)(5)}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$

3. $\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{(3)(2)}{(7)(7)}=\frac{6}{49}$

Cuando vamos a multiplicar fraccionarios para que resulte más fácil multiplicar primero debemos simplificar antes si es posible. Por lo tanto, para simplificar lo que haremos será descomponer cada número en factores primos.

Ejemplo: $\left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{15}{9}\right)=$

Primero debemos simplificar descomponiendo cada número en factores primos para que resulte más fácil multiplicar después.

4	2	8	2	15	3	9	3
2	2	4	2	5	5	3	3
1		2	2	1		1	
		1					

Y sustituimos cada número de las fracciones por sus factores primos.

$$\left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{15}{9}\right)=\frac{2\times 2}{2\times 2\times 2}\times\frac{3\times 5}{3\times 3}$$

Ahora simplificamos, tachando los numeradores y denominadores que sean iguales. Y nos queda que el resultado de la multiplicación es 5/6.

$$\left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{15}{9}\right)=\frac{\cancel{2}\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2}\times\frac{\cancel{3}\times 5}{\cancel{3}\times 3}=\frac{5}{6}$$

División de números fraccionarios: Se multiplica de "forma cruzada" las fracciones, es decir, multiplicar numerador por denominador, y denominador por numerador.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c} \qquad b \neq 0 \;\; y \;\; c \neq 0$$

Ejemplos: **1.** $\frac{1}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{(1)(3)}{(5)(3)} = \frac{3}{15}$

2. $\left(-\frac{5}{2}\right) \div \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{(-5)(2)}{(2)(7)} = -\frac{10}{14} = -\frac{5}{7}$ La división también se puede expresar así: $\dfrac{-\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{(-5)(2)}{(2)(7)} = -\frac{10}{14} = -\frac{5}{7}$

Otra forma para dividir una fracción $\frac{a}{b}$ por otra fracción $\frac{c}{d}$, se multiplica la fracción $\frac{a}{b}$ por la fracción inversa de $\frac{c}{d}$ $\left[\frac{c}{d} \; la \;\; inversa \;\; es \;\; \frac{d}{c}\right]$.

Ejemplos: **1.** $\frac{6}{5} \div \frac{1}{4} = \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{4}{1}\right) = \frac{24}{5}$

2. $\left(-\frac{3}{2}\right) \div \left(\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$

JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES ENTRE NÚMEROS REALES

Si en una expresión algebraica encontramos más de un tipo de operación siempre se comienza desde la parte más interna hasta para parte más externa, siguiendo el siguiente orden:

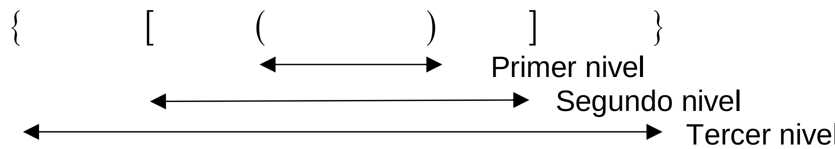
Para realizar correctamente operaciones combinadas tenemos que tener en cuenta dos cosas:

Signos de agrupación: Los signos de agrupación, son elementos que definen el orden en el que se realizará cualquier operación matemática, se utilizan para separar expresiones, siendo necesario eliminarlos para poder resolver o simplificar la expresión.

Los signos de agrupación más usados son los siguientes:

Paréntesis ( )	Corchetes [ ]
Llaves { }	Barras (absoluto) | |

La convención de uso de los signos de agrupación indica que, de adentro hacia afuera de una expresión algebraica o numérica, se utilizan primero los paréntesis, luego los corchetes y al final las llaves. Las barras se usan solo para indicar cuando algún número o expresión será usado solo con su valor absoluto (sin el signo negativo, si lo tuviera).



Jerarquía de las operaciones: Se deben resolver de izquierda a derecha**.**

1. Primero se realizan las operaciones que están entre **signos de agrupación**.
2. Segundo las **potencias y raíces**.
3. Tercero las **multiplicaciones y divisiones**.
4. Cuarto las **sumas y restas**.

Ejemplos:

1. $5+150-17+23=$

Aquí no hay prioridad, se resuelve como se presenta las sumas y restas.

$5+150-17+23=$

$155-17+23=$

$138+23=161$

2. $4+3(45)-1+10=$

Aquí debes iniciar por la multiplicación según la jerarquía de operaciones.

$4+3(45)-1+10=$

$4+135-1+10=$

Se resuelve como se presenta las sumas y restas

$4+135-1+10=148$

3. $-7+2(23)-8+15\div 3=$

Aquí debes iniciar por la multiplicación y división según la jerarquía de operaciones.

$-7+2(23)-8+15\div 3=$

$-2+46-8+5=$

Se resuelve como se presenta las sumas y restas

$-2+46-8+5=41$

4. $7+3\left(1+9\,(3)^2\right)-4+36\div 6=$

Se resuelve primero la potencia según la jerarquía de operaciones.

$7+3\left(1+9\,(9)\right)-4+36\div 6=$

Continua con la multiplicación dentro del paréntesis

$7+3\,(1+81)-4+36\div 6=$

Y resolvemos dentro del paréntesis para quitarlo.

$7+3\,(82)-4+36\div 6=$

Hacemos las divisiones y multiplicaciones.

$7+246-4+6=$

Y resolvemos sumas y restas.

$7+246-4+6=255$

5. $7+5\left[1+5(3)^3\right]-\left[2+\left(\sqrt{100}\right)\right]+12/4=$

Inicias con las operaciones que están dentro de los paréntesis y corchetes hasta eliminarlos.

$7+5\left[1+5(27)\right]-\left[2+(10)\right]+12/4=$

$7+5\left[1+135\right]-\left[12\right]+12/4=$

$7+5\left[136\right]-\left[12\right]+12/4=$

Resuelves multiplicaciones y divisiones y finaliza con las sumas y las restas.

$7+680-12+3=678$

6. $-5-\left(\sqrt{49}-7(2)-9\right)=$

Inicias con las operaciones que están dentro de los paréntesis (potenciación y multiplicación)

$-5-\left(7-7(2)-9\right)=$

$-5-\left(7-14-9\right)=$

$-5-(-16)=-5+16=11$