Simpson 1/3:

Sea la integral $I = \int_a^b f(x)dx$

Con el Conjunto Cardinal $\Omega = \{(a, f(a)), (x_m, f(x_m)), (b, f(b))\}$

donde $x_m = \frac{a+b}{2}$, entonces podemos aproximar $f(x)$ a un polinomio de grado 2:

$$P_2(x) = \frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} f(x_m)$$
$$+ \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)} f(b) \approx f(x)$$

Con esto, $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx$

Hagamos unos arreglos:

Cada punto está equiespaciado uno del otro, entonces:

$-a+b = 2h$, $b - x_m = h$, $x_m - a = h$

$$P_2(x) = \frac{(x-b)(x-x_m)}{2h^2} f(a) - \frac{(x-a)(x-b)}{h^2} f(x_m) + \frac{(x-a)(x-x_m)}{2h^2} f(b)$$

A su vez, podemos decir que cada punto entre Ω se puede escribir como: $x = a + th$ con $t \in [0,2]$, $t \in \mathbb{N}$

$$P_2(x) = \frac{(-2h+th)(-h+th)}{2h^2} f(a) - \frac{th(-2h+th)}{h^2} f(x_m)$$
$$+ \frac{th(-h+th)}{2h^2} f(b)$$

Si Simplificamos:

$$P_2(t) = \frac{(t-2)(t-1)}{2} f(a) - \frac{t(t-2)}{1} f(x_m) + \frac{t(t-1)}{2} f(b)$$

Para integrar, hagamos $dx = h\,dt$, y de $x = a + ht$

Sabemos que Cuando $x = a \rightarrow t = 0$ y Cuando $x = b \rightarrow t = 2$

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = \underbrace{\int_0^2 P_2(t)\,dt}_{A} \rightarrow$$ Simplifiquemos y vemos que:

$$\int_0^2 P_2(t)\,dt = \frac{h f(a)}{2} \int_0^2 t^2 - 3t + 2\,dt - h f(x_m) \underbrace{\int_0^2 t^2 - 2t\,dt}_{B}$$

$$+ \frac{h f(b)}{2} \underbrace{\int_0^2 t^2 - t\,dt}_{C}$$

$$A: \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 2t\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 6 + 4 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$B: \left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = \frac{8}{3} - \frac{12}{3} = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

$$C: \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{6}{2} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Remplazando

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h f(a)}{3} + \frac{4 h f(x_m)}{3} + \frac{h f(b)}{3}$$

$$\boxed{\approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right)}$$