## Sustitución hacia Atrás

Sea la matriz $A$, la matriz de Coeficientes $n \times n$. Con forma de diagonal Superior luego de haber aplicado la reducción Gaussiana; y $\overline{b}$ el Vector Solución del Sistema $A\vec{x} = \overline{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} a_{11} & a & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Podemos Considerar la Matriz $M \in$ Matrices $(n \times (n+1))$

$$M = (A \mid b) \Rightarrow M = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \phantom{b_1} \end{matrix} \\ \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \end{array}$$

Para la $n$-ésima Fila, Podemos Ver que $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$,

Ahora, si subimos a la fila $n-1$, tomando en cuenta el Valor de $x_n$, obtenemos que $x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,n}\, x_n}{a_{n-1,n-1}}$

Para $x_i$, podemos Ver que se obtiene al restar cada $x_{ij}$ (Variable de cada columna de la fila $i$) a $b_i$ y dividirlo entre el Coeficiente que acompaña a $x_i$, de la Siguiente forma:

Para la fila $i$:

$$a_{ij}$$

$$(0, \dots a_{ii} \; a_{i,i+1} \dots a_{i,n} \mid b_i)$$

$$x_1, \dots, x_i, \; x_{i+1}, \dots x_n$$

$$x_j$$

$$x_i = \frac{b_i - x_{i+1} a_{i,i+1} - \dots - x_j a_{i,j} - \dots - x_n a_{i,n}}{a_{ii}}$$ → Podemos factorizar el signo negativo

$$x_i = \frac{b_i - (x_{i+1} a_{i,i+1} + \dots + x_j a_{i,j} + \dots + x_n a_{i,n})}{a_{ii}}$$ → Sumatoria

Podemos ver que $j$ comienza desde $i+1$ y va hasta $n$.

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{ii}}}$$

→ Sustitución hacia atrás.

→ Siempre y cuando $a_{ii} \neq 0$

5) Para la Sustitución hacia adelante, Consideremos la Matriz triangular inferior $A$, el Vector Solución $\bar{b}$ y el Vector de Variables $\vec{X}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$A \in M_{n \times n}$

Podemos Considerar la matriz expandida $M \in M(n \times (n+1))$ donde $M = (A|b) \rightarrow$ Representando el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 & b_n \end{array}\right)$$
$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$

$\rightarrow$ Para Resolver el sistema Usamos la Sustitución hacia adelante.

Veamos que para $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$ $\rightarrow$ Tenemos en Cuenta estos Valores para Sustituir en los $X_i$ posteriores.

Para $x_2$, en la Segunda fila:

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21} x_2}{a_{22}}$$

$\rightarrow$ Entonces, Para el $X_i$ de la i-ésima fila:

Para la i-ésima fila:

$$\begin{array}{ccccccccc} (a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ii} & 0 \ldots & 0 & | \, b_i) \\ x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_j & \ldots & x_i & \underbrace{\ldots}_{\text{no nos interesan}} & x_n & \end{array}$$

Entonces, para obtener $X_i$:

$$x_i = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - a_{i3}x_3 - \ldots - a_{ij}x_j - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1}}{a_{ii}}$$

Podemos Factorizar el signo negativo y escribirlo en términos de Suma

- Vemos que $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}}}$$

→ Sustitución hacia adelante

→ Siempre que $a_{ii} \neq 0$