Código de la mesa: Tres primeras letras del primer apellido:

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Prueba Global/Examen Final

Fecha: 24-01-2022 Duración de esta prueba: 3 horas.

A rellenar por los profesores

Test	Teoría	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Prob. 4	Prob. 5	Prob. 6	Prob. 7	Nota

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen estarán publicadas el martes 8 de febrero; se comunicará el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta $= +1$, errónea $= -0.5$, en blanco $= 0$.

Dada la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$, se puede asegurar que:

a) S_n es divergente.
b) S_n converge a 0.
c) S_n converge a un número mayor que 0.

Dada una función $f(x)$ que tiene un máximo relativo en el punto $x = c$, se puede asegurar que:

a) $f'(c) = 0$.
b) la función $f(x)$ es continua en $x = c$.
c) $f'(c) = 0$ o no existe $f'(c)$.

Dada la sucesión a_n definida de forma recursiva $\begin{cases} a_0 = 8 \\ a_n = 5(n+1)a_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$, su orden de magnitud es:

a) $a_n \sim 5^n n!$
b) $a_n \sim 5^n (n+1)!$
c) $a_n \sim (n+1)!$

Dada la función $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-2}$, se puede asegurar que $f(x)$ es integrable en:

a) $[0,1]$. b) $[1,2]$. c) $[3,4]$.

El polinomio de Taylor de orden 3 de una función $f(x)$ centrado en $x_0 = 0$ viene dada por

a) $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$.

b) $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3}x^3$.

c) $f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2 + f'''(0)x^3$.

La solución del problema de valor inicial (PVI) $y' = xy, y(0) = 3$ es:

a) $y = 3e^{x^2/2}$.

b) $y = \frac{e^{x^2}}{2} + \frac{5}{2}$.

c) $y = xe^x$.

Sea a_n una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$. Se puede asegurar que:

a) a_n está acotada.

b) a_n es monótona.

c) a_n sólo tiene términos positivos.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{3^{2n}}$ es convergente y su suma vale:

a) $\frac{9}{13}$. b) $-\frac{4}{13}$. c) $\frac{3}{5}$.

La solución general de la ecuación diferencial $y' - 4y = 0$ es:

a) $y = e^{-4x+K}$, con $K \in \mathbb{R}$.

b) $y = Ke^{4x}$, con $K \in \mathbb{R}$.

c) $y = e^{4x} + K$, con $K \in \mathbb{R}$.

El intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ es

a) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. b) $[-3, 3)$. c) $[-3, 3]$.

Teoría (10%)

a) *(4 puntos)* Demostrar que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ es divergente si $p < 1$.

b) *(3 puntos)* Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p < 1$, justificar que se verifican las condiciones para aplicar el criterio integral para estudiar su convergencia y utilizar el resultado del apartado **a)** para determinar la misma.

c) *(3 puntos)* Escribir con precisión las definiciones de $a_n \ll b_n$ y $a_n \in O(b_n)$ y dar un ejemplo de sucesión a_n tal que $a_n \in O(n^2)$ pero no verifique que $a_n \ll n^2$.

Problema 1 (7 %)

Calcular el gradiente de la función $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$ en los puntos $(1, 0)$ y $(0, -2)$. Representar gráficamente los gradientes junto con las curvas de nivel de f correspondientes a dichos puntos. ¿Qué relación hay entre gradiente y curva de nivel?

Problema 2 (7 %)

Una industria química emplea dos tipos de sustancias para fabricar un producto. El coste de producción viene dado por $P(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8(1 - x - y)$, siendo x la cantidad empleada de una de las sustancias e y la cantidad empleada de la otra. El coste ambiental asociado al ciclo de vida del producto fabricado también depende de las cantidades empleadas de cada sustancia y su cuantificación viene dada por la función $M(x, y) = 2xy + x(1 - x - y)$. Considerando que las funciones P y M miden el coste en las mismas unidades, se pide determinar qué cantidades de cada sustancia habría que emplear para que el coste total sea mínimo. Explicar el proceso seguido para hallarlas y justificar adecuadamente que con esas cantidades se alcanza el valor mínimo.

Problema 3 (14 %)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x\,\mathrm{sen}(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, se define $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$.

a) *(2.5 puntos)* Estudiar la continuidad de $f(x)$.

b) *(2.5 puntos)* Estudiar la continuidad y derivabilidad de $F(x)$. Hallar $F'(x)$ donde exista.

c) *(5 puntos)* Hallar $F(0)$ y la expresión explícita de $F(x)$.

Problema 4 (14 %)

Dadas las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{2^n + (-3)^n}{3n^3}, \qquad b_n = \frac{2^n (n+2)!}{2^{n+2} + n!}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + \log(k^4 + 4k^2)}{\sqrt{k^5}},$$

se pide responder a los siguientes apartados **justificando los resultados obtenidos**:

a) *(7 puntos)* Hallar el orden de magnitud de las tres sucesiones.

b) *(2 puntos)* Ordenarlas según dicho orden.

c) *(1 puntos)* Justificar cuáles de ellas están en $O(2^n)$ y cuáles en $\Omega(2^n)$.

Problema 5 (6 %)

El *método de inserción* es un algoritmo recursivo que se utiliza para ordenar una lista de elementos. Si la lista tiene un solo elemento, obviamente ya es un conjunto ordenado. Cuando hay n elementos, en el paso recursivo se realizan una serie de comparaciones para insertar en la lista ya ordenada de los $n-1$ primeros elementos el elemento n-ésimo. Se quiere estimar el número de comparaciones que requiere dicho algoritmo para ordenar n elementos.

a) (3 puntos) El "mejor caso" se da cuando en cada paso recursivo solamente hay que realizar una comparación para realizar la inserción. Si M_n es el número de comparaciones que realiza el *método de inserción* al tratar este caso, dicha sucesión verifica la relación recursiva $M_n = M_{n-1} + 1$. Hallar el término general de M_n y su orden de magnitud.

b) (5 puntos) El "peor caso" se da cuando en cada paso recursivo hay que realizar $n-1$ comparaciones para insertar el elemento n-ésimo. Dar una expresión recursiva para P_n: número de comparaciones que realiza el *método de inserción* en este peor caso. A partir de ella, hallar su término general y su orden de magnitud.

c) (2 puntos) Si G_n mide el número de comparaciones que realiza este algoritmo en un caso general describir su comportamiento asintótico en términos de la notación O grande y Ω.

Problema 6 (12 %)

Estudiar la convergencia de cada una de estas tres series justificando adecuadamente los criterios utilizados para cada caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2}{(n+1)!}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^4}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}$

Problema 7 (10 %)

Sabiendo que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si y solo si $x \in (-1,1)$ se pide:

a) *(2 puntos)* Probar que el desarrollo en serie de potencias de la función $\dfrac{1}{1+x^2}$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ especificando su campo de validez.

b) *(6 puntos)* Probar que $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ para todo $x \in [-1,1]$.

c) *(2 puntos)* Estudiar razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\arctan(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
- $\arctan(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}$