

Tres primeras letras del primer apellido:

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Examen Parcial 1 (Temas 1, 2 y 3)

Fecha: 14-11-2022 Duración de esta prueba: 120 minutos.

A rellenar por los profesores

Test	Análisis y Síntesis	Cuestión 1	Cuestión 2	Cuestión 3	Cuestión 4	Cuestión 5	Nota Total

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen se publicarán antes del miércoles 30 de noviembre; se confirmará la fecha, así como lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (25%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.

Calificación: correcta = +1, errónea = -0.5, en blanco = 0.

La curva de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + y^2}$ que pasa por el punto $(1, -1)$ es:

- a) $3x^2 + y^2 = 4$.
- b) $3x^2 + y^2 = 2$.
- c) $3x^2 + y^2 = 1$.

A

Indica de qué PVI es solución la función $y(x) = 3e^{x/3}$:

- a) $y' - y/3 = 0$, $y(0) = 1/3$
- b) $y' - y/3 = 0$, $y(0) = 3$
- c) $y' - 3y = 0$, $y(0) = 3$

B

Sea una sucesión monótona creciente. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- a) Está acotada inferiormente y es convergente.
- b) Si no está acotada, diverge a $-\infty$.
- c) Si está acotada superiormente, es convergente.

C

La expresión $\Gamma(1.5) + \Gamma(4)$ es igual a:

- a) $4! + \sqrt{\pi}$.
- b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 3$.
- c) $6 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

C

El valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - x}$ es

- a) 0
- b) 3
- c) ∞

B

Indica cuál de las siguientes integrales impropias es convergente:

- a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$
- b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5} dx$
- c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

B

Indica cuál de las siguientes sucesiones es convergente:

- a) $\text{sen}(n!)$
- b) $\frac{4 \text{sen}(n!)}{\sqrt{n}}$
- c) $\frac{n \text{sen}(n!)}{2n + 3}$

B

El gradiente de la función $f(x, y) = 2y + \cos(x) - e^{xy}$ en el punto $(0, 1)$ es:

- a) $(-1, 2)$.
- b) $(-1, 1)$.
- c) $(2, 1)$.

A

La sucesión $a_n = r^n$ es convergente si y solo si

- a) $r \in (-1, 1]$
- b) $r \in [-1, 1]$
- c) $r \in [0, 1]$

A

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en $[a, b]$, entonces:

- a) Si $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ entonces $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.
- b) Si $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ entonces $f(x)$ es positiva para todo $x \in [a, b]$.
- c) $\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)dx \geq 0$.

C

Tres primeras letras del primer apellido:

Apellidos y nombre: _____

Análisis Matemático: Examen Parcial 1 (Temas 1, 2 y 3)

Fecha: 14-11-2022 Duración de esta prueba: 120 minutos.

A rellenar por los profesores

Test	Análisis y Síntesis	Cuestión 1	Cuestión 2	Cuestión 3	Cuestión 4	Cuestión 5	Nota Total

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen se publicarán antes del miércoles 30 de noviembre; se confirmará la fecha, así como lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (25%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.

Calificación: correcta = +1, errónea = -0.5, en blanco = 0.

Sea una sucesión monótona creciente. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- a) Está acotada inferiormente y es convergente.
b) Si no está acotada, diverge a $-\infty$.
c) Si está acotada superiormente, es convergente.

C

La expresión $\Gamma(1.5) + \Gamma(4)$ es igual a:

- a) $4! + \sqrt{\pi}$.
b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 3$.
c) $6 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

C

El valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - x}$ es

- a) 0
b) 3
c) ∞

B

Indica cuál de las siguientes integrales impropias es convergente:

- a) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$
b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^5} dx$
c) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$

B

Indica cuál de las siguientes sucesiones es convergente:

- a) $\text{sen}(n!)$
- b) $\frac{4 \text{sen}(n!)}{\sqrt{n}}$
- c) $\frac{n \text{sen}(n!)}{2n+3}$

B

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en $[a, b]$, entonces:

- a) Si $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ entonces $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.
- b) Si $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ entonces $f(x)$ es positiva para todo $x \in [a, b]$.
- c) $\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)dx \geq 0$.

C

El gradiente de la función $f(x, y) = 2y + \cos(x) - e^{xy}$ en el punto $(0, 1)$ es:

- a) $(-1, 2)$.
- b) $(-1, 1)$.
- c) $(2, 1)$.

A

La sucesión $a_n = r^n$ es convergente si y solo si

- a) $r \in (-1, 1]$
- b) $r \in [-1, 1]$
- c) $r \in [0, 1]$

A

Indica de qué PVI es solución la función $y(x) = 3e^{x/3}$:

- a) $y' - y/3 = 0, y(0) = 1/3$
- b) $y' - y/3 = 0, y(0) = 3$
- c) $y' - 3y = 0, y(0) = 3$

B

La curva de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + y^2}$ que pasa por el punto $(1, -1)$ es:

- a) $3x^2 + y^2 = 4$.
- b) $3x^2 + y^2 = 2$.
- c) $3x^2 + y^2 = 1$.

A

Tres primeras letras del primer apellido:

--	--	--

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Examen Parcial 1 (Temas 1, 2 y 3)

Fecha: 14-11-2022 Duración de esta prueba: 120 minutos.

A rellenar por los profesores

Test	Análisis y Síntesis	Cuestión 1	Cuestión 2	Cuestión 3	Cuestión 4	Cuestión 5	Nota Total

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen se publicarán antes del miércoles 30 de noviembre; se confirmará la fecha, así como lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (25%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.

Calificación: correcta = +1, errónea = -0.5, en blanco = 0.

Indica de qué PVI es solución la función $y(x) = 3e^{x/3}$:

- a) $y' - y/3 = 0$, $y(0) = 1/3$
- b) $y' - y/3 = 0$, $y(0) = 3$
- c) $y' - 3y = 0$, $y(0) = 3$

B

La curva de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + y^2}$ que pasa por el punto $(1, -1)$ es:

- a) $3x^2 + y^2 = 4$.
- b) $3x^2 + y^2 = 2$.
- c) $3x^2 + y^2 = 1$.

A

El valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - x}$ es

- a) 0
- b) 3
- c) ∞

B

La expresión $\Gamma(1.5) + \Gamma(4)$ es igual a:

- a) $4! + \sqrt{\pi}$.
- b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 3$.
- c) $6 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

C

Sea una sucesión monótona creciente. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- a) Está acotada inferiormente y es convergente.
- b) Si no está acotada, diverge a $-\infty$.
- c) Si está acotada superiormente, es convergente.

C

Indica cuál de las siguientes integrales impropias es convergente:

- a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$
- b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5} dx$
- c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

B

Indica cuál de las siguientes sucesiones es convergente:

- a) $\text{sen}(n!)$
- b) $\frac{4 \text{sen}(n!)}{\sqrt{n}}$
- c) $\frac{n \text{sen}(n!)}{2n+3}$

B

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en $[a, b]$, entonces:

- a) Si $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ entonces $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.
- b) Si $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ entonces $f(x)$ es positiva para todo $x \in [a, b]$.
- c) $\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)dx \geq 0$.

C

El gradiente de la función $f(x, y) = 2y + \cos(x) - e^{xy}$ en el punto $(0, 1)$ es:

- a) $(-1, 2)$.
- b) $(-1, 1)$.
- c) $(2, 1)$.

A

La sucesión $a_n = r^n$ es convergente si y solo si

- a) $r \in (-1, 1]$
- b) $r \in [-1, 1]$
- c) $r \in [0, 1]$

A

Tres primeras letras del primer apellido:

--	--	--

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Examen Parcial 1 (Temas 1, 2 y 3)

Fecha: 14-11-2022 Duración de esta prueba: 120 minutos.

A rellenar por los profesores

Test	Análisis y Síntesis	Cuestión 1	Cuestión 2	Cuestión 3	Cuestión 4	Cuestión 5	Nota Total

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen se publicarán antes del miércoles 30 de noviembre; se confirmará la fecha, así como lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (25%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.

Calificación: correcta = +1, errónea = -0.5, en blanco = 0.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en $[a, b]$, entonces:

- a) Si $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ entonces $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.
- b) Si $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ entonces $f(x)$ es positiva para todo $x \in [a, b]$.
- c) $\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)dx \geq 0$.

C

Indica cuál de las siguientes sucesiones es convergente:

- a) $\text{sen}(n!)$
- b) $\frac{4 \text{sen}(n!)}{\sqrt{n}}$
- c) $\frac{n \text{sen}(n!)}{2n + 3}$

B

El gradiente de la función $f(x, y) = 2y + \cos(x) - e^{xy}$ en el punto $(0, 1)$ es:

- a) $(-1, 2)$.
- b) $(-1, 1)$.
- c) $(2, 1)$.

A

La sucesión $a_n = r^n$ es convergente si y solo si

- a) $r \in (-1, 1]$
- b) $r \in [-1, 1]$
- c) $r \in [0, 1]$

A

La curva de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + y^2}$ que pasa por el punto $(1, -1)$ es:

- a) $3x^2 + y^2 = 4.$
- b) $3x^2 + y^2 = 2.$
- c) $3x^2 + y^2 = 1.$

A

Indica de qué PVI es solución la función $y(x) = 3e^{x/3}$:

- a) $y' - y/3 = 0, y(0) = 1/3$
- b) $y' - y/3 = 0, y(0) = 3$
- c) $y' - 3y = 0, y(0) = 3$

B

Sea una sucesión monótona creciente. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- a) Está acotada inferiormente y es convergente.
- b) Si no está acotada, diverge a $-\infty$.
- c) Si está acotada superiormente, es convergente.

C

La expresión $\Gamma(1.5) + \Gamma(4)$ es igual a:

- a) $4! + \sqrt{\pi}.$
- b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 3.$
- c) $6 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

C

El valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - x}$ es

- a) 0
- b) 3
- c) ∞

B

Indica cuál de las siguientes integrales impropias es convergente:

- a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$
- b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5} dx$
- c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

B

Análisis y síntesis (10%)

- a) (5 puntos) Halla la primitiva $\int x e^{px} dx$ en función de los valores de $p \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN: Para obtener una primitiva se usa el método de integración por partes:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{px} dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{p} e^{px} \quad \text{Si } p \neq 0 \end{cases}$$

Si $p \neq 0$ la integral se transforma en:

$$\int x e^{px} dx = x \cdot \frac{1}{p} \cdot e^{px} - \int \frac{1}{p} e^{px} dx = x \cdot \frac{1}{p} \cdot e^{px} - \frac{1}{p^2} \cdot e^{px} + C = \frac{e^{px}}{p} \left(x - \frac{1}{p} \right) + C$$

Y si $p = 0$ la integral es $\int x e^{0x} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

- b) (5 puntos) Analiza la convergencia de la integral $\int_0^\infty x e^{px} dx$ en función de los valores de $p \leq 0$.

SOLUCIÓN:

Si $p = 0$ se tiene que

$$\int_0^\infty x dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^K = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{K^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K^2}{2} = \infty$$

Por lo tanto la integral es divergente.

Si $p < 0$ se tiene que

$$\int_0^\infty x e^{px} dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K x e^{px} dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{px}}{p} \left(x - \frac{1}{p} \right) \right]_0^K = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{e^{pK}}{p} \left(K - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p^2}$$

En el límite anterior sólo la expresión $e^{pK} \left(K - \frac{1}{p} \right)$ depende de K y como $p < 0$ se verifica que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} e^{pK} \left(K - \frac{1}{p} \right) = 0 \cdot \infty$$

Esta indeterminación se puede resolver usando la regla de L'Hôpital considerando K como una variable real y reescribiendo la expresión:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} e^{pK} \left(K - \frac{1}{p} \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K - \frac{1}{p}}{e^{-pK}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(-p)e^{-pK}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{e^{pK}}{p} \left(K - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p^2} = 0 + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}$$

y para $p < 0$ la integral converge.

Cuestión 1 (15 %)

Encuentra y clasifica razonadamente los puntos críticos de $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy$.

SOLUCIÓN: Dado que la función es polinómica en las dos variables, es diferenciable en todo punto y los únicos puntos críticos son aquellos que anulan su gradiente:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{3}{2}y \\ y^2 - x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{3}{2}y \\ y^2 - \frac{3}{2}y = y\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0 \end{array} \right\}$$

La ecuación $y\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0$ se satisface si y solo si $y = 0$ o $y = \frac{3}{2}$. Por tanto, el sistema tiene

dos soluciones: cuando $y = 0$, $x = \frac{3}{2} \cdot 0 = 0$ y cuando $y = \frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$.

Luego los puntos críticos son: $(0, 0)$ y $\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

Para discriminar qué tipo de puntos críticos son, utilizamos el hessiano:

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \end{array} \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3 \right\} \Rightarrow H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

- $|H(0, 0)| = AC - B^2 = 2 \cdot 6 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0 \Rightarrow (0, 0)$ es un punto de silla.
- $\left|H\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)\right| = AC - B^2 = 2 \cdot 6 \cdot \frac{3}{2} - (-3)^2 = 18 - 9 = 9 > 0$ y $A = 2 > 0 \Rightarrow$ el punto $\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)$ es un mínimo local.

Cuestión 2 (10 %)

La potencia (P) de cierto generador fotovoltaico en cada instante depende de dos variables: la irradiancia solar (G) y la temperatura del generador (T) de acuerdo a la siguiente expresión:

$$P = G \cdot (1.3 - 0.003 \cdot T)$$

Si en un determinado momento de un día soleado los valores de irradiancia y temperatura son $G = 800 \text{ W/m}^2$ y $T = 50 \text{ }^\circ\text{C}$, indica

- a) (7 puntos) Qué variable tiene que aumentar si queremos que aumente P .
- b) (3 puntos)Cuál de las dos variables (G o T) tiene mayor incidencia en la variación de la potencia (P) en ese instante.

Justifica adecuadamente la respuesta.

SOLUCIÓN:

- a) Puesto que la función potencia $P(G, T)$ es una función de dos variables, si se calcula el gradiente $\nabla(P(G_0, T_0))$ en un punto (G_0, T_0) obtendremos la dirección y sentido de máximo crecimiento de la función en ese punto, deduciendo de sus coordenadas respecto a qué variable aumenta más P al aumentar dicha variable. El gradiente de la función $P(G, T)$ en un punto (G_0, T_0) se define como:

$$\nabla(P(G_0, T_0)) = \left(\frac{\delta P}{\delta G}(G_0, T_0), \frac{\delta P}{\delta T}(G_0, T_0) \right)$$

Se calculan las derivadas parciales de $P(G, T)$:

$$\frac{\delta P}{\delta G} = 1.3 - 0.003 \cdot T$$

$$\frac{\delta P}{\delta T} = -0.003 \cdot G$$

En el punto $(G_0, T_0) = (800, 50)$, tenemos:

$$\frac{\delta P}{\delta G}(800, 50) = 1.3 - 0.003 \cdot 50 = 1.15$$

$$\frac{\delta P}{\delta T}(800, 50) = -0.003 \cdot 800 = -2.4$$

El vector gradiente en $(800, 50)$ será $\nabla(P(800, 50)) = (1.15, -2.4)$. Puesto que la derivada parcial de P respecto de G es positiva y respecto de T es negativa, sabemos que en ese punto la función crece cuando aumenta G y decrece cuando aumenta T . Luego, para que aumente P tiene que aumentar G .

- b) El vector gradiente de P en el punto $(800, 50)$ muestra que, en valor absoluto, P varía en mayor proporción respecto a la variable T que respecto a la variable G ,

$$|1.15| < |-2.4|$$

lo que indica que los cambios de temperatura tienen mayor incidencia en la potencia que los cambios de irradiancia.

Cuestión 3 (10 %)

Resuelve el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y' - x^4y + 3x^4 = 0 \\ y(0) = 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

a) Primero se resuelve la EDO mediante el método de variables separables:

$$y' - x^4y + 3x^4 = y' + x^4(-y + 3) = 0 \rightarrow y' = x^4(y - 3) \rightarrow \frac{y'}{y - 3} = x^4$$

$$\int \frac{y'}{y - 3} = \int x^4 \rightarrow \ln(y - 3) = \frac{x^5}{5} + C \rightarrow y - 3 = e^{\frac{x^5}{5} + C} = Ke^{\frac{x^5}{5}}$$

$$y = Ke^{\frac{x^5}{5}} + 3;$$

b) Para determinar el valor de K se utiliza el valor inicial $y(0) = 7$.

$$y(0) = Ke^0 + 3 = K + 3 \rightarrow K + 3 = 7 \rightarrow K = 4$$

La solución del PVI será:

$$y = 4e^{\frac{x^5}{5}} + 3$$

Cuestión 4 (10 %)

Halla razonadamente el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^4 + 1}}{4n^3 + 1} + \frac{\sqrt{9n^4 + 2}}{4n^3 + 1} + \frac{\sqrt{9n^4 + 3}}{4n^3 + 1} + \cdots + \frac{\sqrt{9n^4 + n}}{4n^3 + 1}$$

SOLUCIÓN: El término general de la sucesión (a_n) consiste en la suma de n sumandos de igual denominador y, en consecuencia, el sumando mayor es el que tiene mayor numerador: $\frac{\sqrt{9n^4 + n}}{4n^3 + 1}$, y el menor es el que tiene menor numerador: $\frac{\sqrt{9n^4 + 1}}{4n^3 + 1}$. Por tanto, para todo n se tiene:

$$n \cdot \frac{\sqrt{9n^4 + 1}}{4n^3 + 1} \leq a_n \leq n \cdot \frac{\sqrt{9n^4 + n}}{4n^3 + 1}$$

El límite de las sucesiones de los extremos coinciden:

$$\lim n \cdot \frac{\sqrt{9n^4 + 1}}{4n^3 + 1} = \lim n \cdot \frac{\sqrt{9n^4(1 + \frac{1}{9n^4})}}{4n^3 + 1} = \lim n \cdot \frac{3n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{9n^4}}}{4n^3 + 1} = \lim \frac{3n^3}{4n^3 + 1} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9n^4}} = \frac{3}{4}$$

$$\lim n \cdot \frac{\sqrt{9n^4 + n}}{4n^3 + 1} = \lim n \cdot \frac{\sqrt{9n^4(1 + \frac{1}{9n^3})}}{4n^3 + 1} = \lim n \cdot \frac{3n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{9n^3}}}{4n^3 + 1} = \lim \frac{3n^3}{4n^3 + 1} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9n^3}} = \frac{3}{4}$$

luego por la regla del Sandwich, $\boxed{\lim a_n = \frac{3}{4}}$.

Cuestión 5 (20 %)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{(\ln(x))^2}{x} & \text{si } x > 1, \end{cases}$ se define $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ para $x \in \mathbb{R}$.

- a) (2 puntos) Estudia la continuidad de $f(x)$.

SOLUCIÓN:

La función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 1)$, por ser una función polinómica, y es continua en $(1, +\infty)$, pues es cociente de funciones continuas con denominador no nulo en dicho intervalo. Comprobamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$. Para ello calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$$

Como los límites laterales coinciden y son iguales a $f(1)$, la función es continua en $x = 1$. En resumen, la función $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

- b) (3 puntos) Estudia la continuidad y derivabilidad de $F(x)$ (si procede, utiliza el TFC). Halla $F'(x)$ donde exista.

SOLUCIÓN:

Estudiamos las propiedades de $F(x)$ a partir de las propiedades de $f(x)$.

$f(x)$ es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ ya que $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} . Por tanto, se tiene que $F(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que, al ser $f(x)$ continua en \mathbb{R} , $F(x)$ es derivable en todo \mathbb{R} y $F'(x) = f(x)$.

- c) (2 puntos) Estudia el crecimiento de $F(x)$.

SOLUCIÓN:

Primero se buscan los puntos críticos de $F(x)$. Los puntos críticos de $F(x)$ son aquellos en donde no existe $F'(x)$ o donde $F'(x) = 0$.

En el apartado (b) se ha visto que $F(x)$ es derivable en todo \mathbb{R} . También se ha visto que $F'(x) = f(x)$, por lo que $F'(x) = 0$ es equivalente a $f(x) = 0$. En este caso, se tiene que:

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\frac{(\ln(x))^2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Por tanto, el punto crítico de la función $F(x)$ es $x = 1$. Estudiamos el crecimiento de $F(x)$ estudiando el signo de $F'(x)$ (es decir, el signo de $f(x)$) en los intervalos determinados por dicho punto:

- $(-\infty, 1) :$ $f(x) = x - 1 < 0 \Rightarrow F(x)$ es decreciente en $(-\infty, 1)$.
- $(1, +\infty) :$ $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x} > 0 \Rightarrow F(x)$ es creciente en $(1, +\infty)$.

- d) (3 puntos) Halla $F(1)$ y $F(2)$.

SOLUCIÓN:

$$\bullet F(1) = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (t-1) dt = \left[\frac{(t-1)^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet F(2) = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 (t-1) dt + \int_1^2 \frac{(\ln(t))^2}{t} dt = -\frac{1}{2} + \left[\frac{(\ln(t))^3}{3} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + \frac{(\ln(2))^3}{3}$$