Código de la mesa: [ ] Tres primeras letras del primer apellido: [ ][ ][ ]

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Examen Parcial 1 (Temas 1, 2 y 3)

Fecha: 11-11-2021 Duración de esta prueba: 120 minutos.

A rellenar por los profesores

Test	Teoría	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Nota Total

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen se publicarán antes del viernes 26 de noviembre; se confirmará la fecha, así como lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (25%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta = +1, errónea = −0.5, en blanco = 0.

La integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$ vale:

a) $(\ln(2))^2$.

b) $\dfrac{1}{2}$.

c) $\dfrac{1}{24}$.

B

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

a) Vale 0.

b) Vale $+\infty$.

c) No existe.

A

El gradiente de la función $f(x,y) = ye^{xy}$ es

a) $\nabla f(x,y) = (y^2e^{xy},\, e^{xy}(1+xy))$.

b) $\nabla f(x,y) = (y^2e^{xy},\, e^{xy}xy)$.

c) $\nabla f(x,y) = (e^{x},\, e^{y}(1+y))$.

A

Dada la sucesión $a_n = \begin{cases} n^2\log(n), & \text{si } n \text{ es par} \\ n^2, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$, se cumple que:

a) $a_n \in \Theta(n^2)$.

b) $a_n \in \Omega(n^2)$ pero $a_n \notin O(n^2)$.

c) $a_n \in O(n^2)$ pero $a_n \notin \Omega(n^2)$.

B

La sucesión $a_n = \dfrac{(3n^2+2)\sin(n!)}{\sqrt{n^4+2n^3}}$ verifica que:

a) es acotada pero no es convergente.

b) no es monótona pero es convergente a cero.

c) es monótona y divergente.

A

Sea $f(x)$ una función integrable en el intervalo $[1,3]$ entonces:

a) Si $f(x) \leq 5$ en $[1,3]$ se cumple que $\int_1^3 f(x)dx \leq 10$.

b) Si $f(x) \geq 2$ en $[1,3]$ se cumple que $\int_1^3 f(x)dx \geq 6$.

c) Si $2 \leq f(x) \leq 5$ en $[1,3]$ se cumple que $4 \leq \int_1^3 f(x)dx \leq 8$.

A

Las curvas de nivel de la función $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+1}$ son una familia de

a) Rectas.

b) Circunferencias.

c) Parábolas.

C

La solución del PVI $y' = \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 5$ es:

a) $y = x + 4$.

b) $y = \dfrac{5}{x}$.

c) $y = 5x$.

C

El beneficio de una empresa láctea depende de la venta de sus dos productos estrella: el yogur y la cuajada. Si x es el número de miles de litros de yogur e y el número de miles de litros de cuajada que vende, el beneficio viene dado por la función $B(x,y) = x^2 + y^3$. Si en el momento en que se venden 10 mil litros de yogur y 3 mil litros de cuajada, la empresa quiere aumentar el beneficio a base de incrementar la venta de uno solo de sus productos ¿qué producto interesa promocionar?

a) El yogur.

b) La cuajada.

c) Cualquiera de ellos por igual.

B

Dada una sucesión a_n tal que $0 \leq a_n \leq \dfrac{n^2}{r^n}$, se puede asegurar que $\lim a_n = 0$ cuando:

a) $r = \dfrac{1}{2}$.

b) $r = 1$.

c) $r = 2$.

C

Teoría (10%)

a) *(6 puntos)* Dados los conceptos de sucesión acotada, monótona y convergente, determinar en qué casos uno o dos de ellos implican el tercero.

b) *(4 puntos)* Si alguno de los conceptos no se puede deducir a partir de alguno/s de los otros, justificarlo con algún contraejemplo.

Solución:

a) Se determinan las posibles relaciones que impliquen cada caso:

- si una sucesión a_n es convergente, entonces es acotada.
- si una sucesión a_n es acotada y a la vez monótona, entonces es convergente.
- no existe ninguna relación entre acotación y convergencia que implique monotonía.

b) La monotonía no se puede deducir a partir de la convergencia, ni de la acotación ni de ambas a la vez.

$a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n}$ es convergente y acotada, pero no es monótona.

Problema 1 (10 %)

Encontrar los extremos locales y/o puntos de silla de $f(x,y) = x^2 + y^3 - 4xy$.

SOLUCIÓN:

Los puntos que nos piden son puntos críticos de f: puntos donde f no es derivable o su gradiente es nulo. Como f es derivable en todo punto de $\mathbb{R}^2$, buscamos los que anulan el gradiente: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (0,0)$ si y solo si

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 2x - 4y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 3y^2 - 4x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & 2y \\ 3y^2 - 4(2y) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & 2y \\ y(3y-8) & = & 0 \end{array}\right\}$$

Luego y ha de valer 0 o $\frac{8}{3}$ y, en consecuencia, x valdrá 0 o $\frac{16}{3}$ respectivamente.

En definitiva, f tiene dos puntos críticos: $(0,0)$ y $(\frac{16}{3}, \frac{8}{3})$.

Para determinar qué tipo de puntos críticos son, hallamos el hessiano en esos puntos.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

- $|H(0,0)| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \Rightarrow (0,0)$ es un **punto de silla**.
- $|H\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} = 32 - 16 = 16 > 0$ y $A = 2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$ es un **mínimo**.

Problema 2 (20 %)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{1-x^3} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{4}{(x+1)^3} & \text{si } x > 1, \end{cases}$ se define $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ para $x \in \mathbb{R}$.

a) *(2 puntos)* Estudiar la continuidad de $f(x)$.

SOLUCIÓN:
La función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 1)$, por ser producto de funciones continuas, y es continua en $(1, +\infty)$, pues es cociente de funciones continuas con denominador no nulo. Sin embargo, $f(x)$ no es continua en $x = 1$ ya que los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 e^{1-x^3} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{4}{(x+1)^3} = \frac{1}{2}$$

b) *(2 puntos)* Estudiar la continuidad y derivabilidad de $F(x)$. Hallar $F'(x)$ donde exista.

SOLUCIÓN:
Estudiamos las propiedades de $F(x)$ a partir de las propiedades de $f(x)$.
$f(x)$ es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ ya que está acotada y es continua salvo en un número finito de puntos. Por tanto se tiene que $F(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
Además, al ser $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, el Teorema Fundamental de Cálculo nos asegura que $F(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ y que en dichos puntos $F'(x) = f(x)$.

c) *(2 puntos)* Estudiar el crecimiento de $F(x)$.

SOLUCIÓN:
Primero se buscan los puntos críticos de $F(x)$. Los puntos críticos de $F(x)$ son aquellos en donde no existe $F'(x)$ o donde $F'(x) = 0$.
En el apartado (b) se ha visto que $F(x)$ no es derivable en $x = 1$ por lo que $x = 1$ es punto crítico.También se ha visto que $F'(x) = f(x)$ (donde existe), por lo que $F'(x) = 0$ es equivalente a $f(x) = 0$. En este caso, se tiene que

- $x^2 e^{1-x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\dfrac{4}{(x+1)^3} = 0$ es imposible

Por tanto, los puntos críticos de la función $F(x)$ son $x = 0$ y $x = 1$.
Estudiamos el crecimiento de $F(x)$ estudiando el signo de $F'(x)$ (es decir, el signo de $f(x)$) en los intervalos determinados por dichos puntos:

- $(-\infty, 0)$: $\quad f(x) = x^2 e^{1-x^3} > 0 \Rightarrow F(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.
- $(0, 1)$: $\quad f(x) = x^2 e^{1-x^3} > 0 \Rightarrow F(x)$ es creciente en $(0, 1)$.
- $(1, +\infty)$: $\quad f(x) = \dfrac{4}{(x+1)^3} > 0 \Rightarrow F(x)$ es creciente en $(1, +\infty)$.

Como $F(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ se puede asegurar que $F(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

(Continuación problema 2)

d) *(4 puntos)* Hallar $F(1)$ y $F(2)$.

SOLUCIÓN:

- $F(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 t^2 e^{1-t^3}\,dt = \left[-\frac{1}{3}e^{1-t^3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left(e^0 - e^1\right) = \frac{e}{3} - \frac{1}{3}$

- $F(2) = \displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 t^2 e^{1-t^3}\,dt + \int_1^2 \frac{4}{(t+1)^3}\,dt = F(1) + 4\int_1^2 (t+1)^{-3}\,dt =$ $\displaystyle\left(\frac{e}{3} - \frac{1}{3}\right) + 4\left[\frac{(t+1)^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \frac{e}{3} - \frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e}{3} - \frac{1}{18}$

Problema 3 (15 %)

La función $T(x)$ representa la temperatura de un determinado cuerpo en el instante x. Según la ley de Newton, la velocidad de cambio de la temperatura de un cuerpo en un entorno con temperatura constante T_0 es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura $T(x)$ del cuerpo y la temperatura T_0 de dicho entorno. Es decir: $T'(x) = K(T(x) - T_0)$.

Se plantea la siguiente situación: Un congelador está a una temperatura constante de -10^oC y se sabe que, en ese contexto, la constante de proporcionalidad es $K = -1$. Se mete en dicho congelador una cubitera de hielos con agua a 20^oC. Si $T(x)$ es la temperatura del agua de la cubitera en el instante x (en horas), se pide:

a) *(5 puntos)* Plantear la EDO que verifica en esa situación la función $T(x)$ y hallar su solución general.

b) *(2 puntos)* Hallar la solución particular que verifica las condiciones iniciales dadas.

c) *(1.5 puntos)* Hallar la temperatura del agua de la cubitera al cabo de 30 minutos.

d) *(1.5 puntos)* ¿En cuánto tiempo tendremos ya cubitos de hielo en la cubitera? (El agua se hiela a 0^oC.)

Nota: Para interpretar mejor los resultados numéricos, se dan algunos valores aproximados:

$$e^{-1} \approx 0.4; \quad e^{-1/2} \approx 0.6; \quad e^{-1/3} \approx 0.7; \quad \ln(2) = -\ln(1/2) \approx 0.7; \quad \ln(3) = -\ln(1/3) \approx 1.1.$$

SOLUCIÓN:

a) En la situación explicada y siendo $T(x)$ la temperatura del agua de la cubitera en el instante x (en horas) se verifica:

- velocidad de cambio de la temperatura es $T'(x)$.
- velocidad de cambio es proporcional a la diferencia entre la temperatura $T(x)$ del cuerpo y la temperatura T_0 de dicho entorno:

$$T'(x) = K(T(x) - T_0)$$

- Como en este caso la temperatura T_0 de dicho entorno es $T_0 = -10$ y la constante de proporcionalidad es $K = -1$, se tiene:

$$T'(x) = -(T(x) - (-10)) \to T'(x) = -(T(x) + 10).$$

Si denotamos $y = T(x)$, resolvemos la EDO $y' = -(y+10)$ mediante el método de variables separadas:

- Separamos variables: $\dfrac{1}{y+10} \cdot y' = -1$.
- Integramos: $\displaystyle\int \frac{1}{y+10} dy = \int -1 dx \Rightarrow \ln(y+10) = -x + C$.
- Despejamos y (tomando exponenciales a ambos lados):

$$y + 10 = e^{-x+C} \Rightarrow y = e^{-x} \cdot e^C - 10.$$

Si denotamos $e^C = k$ (constante), se tiene que la solución general de la EDO es:

$$y = ke^{-x} - 10.$$

(Continuación problema 3)

b) La condición inicial es que el agua de la cubitera está a 20^oC cuando se mete en el congelador, es decir $y(0) = 20$.

Si $y = ke^{-x} - 10$, se tiene que $y(0) = ke^0 - 10 \Rightarrow y(0) = k - 10$.

Para que se verifique la condición inicial: $k - 10 = 20 \Rightarrow k = 30$. Por tanto, la solución particular es $y = 30e^{-x} - 10$.

Conclusión: La temperatura del agua de la cubitera en el instante x (en horas) viene dada por $T(x) = 30e^{-x} - 10$.

c) Como x viene especificado en horas, 30 minutos es $x = \frac{1}{2}$, por lo que "la temperatura del agua de la cubitera al cabo de 30 minutos" viene dada por

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = 30e^{-1/2} - 10 \approx 30 \cdot 0.6 - 10 = 8^oC.$$

d) Los cubitos de hielo se forman cuando el agua alcanza la temperatura de 0^oC, por lo que resolveremos la ecuación $T(x) = 0$:

$$30e^{-x} - 10 = 0 \Leftrightarrow 30e^{-x} = 10 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -x = \ln(1/3) \Leftrightarrow x = -\ln(1/3) \approx 1.1$$

Por tanto, al cabo de algo más de una hora (una hora y unos 6 minutos aproximadamente) ya se tendrán los cubitos de hielo.

Problema 4 (20 %)

Dadas las siguientes sucesiones:

$$a_n = n3^n + 3^{2n}\,, \qquad b_n = \frac{n^2 + 10^n}{\sqrt{n^2+6}}\,, \qquad c_n = \frac{\operatorname{sen}(n) + (n+1)!}{n^2 + \ln(n^6+n)}\,,$$

se pide responder a los siguientes apartados justificando los resultados obtenidos:

a) *(6 puntos)* Hallar el orden de magnitud de las tres sucesiones.

b) *(2.5 puntos)* Ordenarlas según dicho orden.

c) *(1.5 puntos)* Justificar cuáles de ellas están en $O(10^n)$ y cuáles en $\Omega(10^n)$.

SOLUCIÓN:

a)

- Se verifica que $a_n \sim 9^n$ ya que $3^{2n} = 9^n$ y $n3^n \ll 3^{2n}$ porque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 3^n}{3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0 \quad \text{por jerarquía de infinitos} \quad \text{(J.I.)}$$

- Se verifica que $b_n = \dfrac{n^2+10^n}{\sqrt{n^2+6}} \sim \dfrac{10^n}{n}$ porque
  $n^2 + 10^n \sim 10^n$ ya que $n^2 \ll 10^n$ (J.I.) y
  $\sqrt{n^2+6} \sim n$ porque $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+6}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+6}{n^2}} = \sqrt{1} \neq 0.$

- Se verifica que $c_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n) + (n+1)!}{n^2 + \ln(n^6+n)} \sim (n-1)!$ ya que

  ❑ $\operatorname{sen}(n) + (n+1)! \sim (n+1)!$ porque $\operatorname{sen}(n) \ll (n+1)!$ pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n) \frac{1}{(n+1)!} = 0$$

  por ser producto de una sucesión acotada por otra que tiende a cero.

  ❑ $n^2 + \ln(n^6+n) \sim n^2$ porque $\ln(n^6+n) \sim \ln(n)$ y $\ln(n) \ll n^2$ por J.I.
  También se puede probar directamente que $\ln(n^6+n) \ll n^2$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^6+x)}{x^2} \underset{\text{L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{(6x^5+1)/(x^6+x)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^5+1}{2x^7+x^2} = 0$$

  Reuniendo lo anterior resulta

$$c_n = \frac{\operatorname{sen}(n) + (n+1)!}{n^2 + \ln(n^6+n)} \sim \frac{(n+1)!}{n^2} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{n^2} = \frac{(n+1)n}{n^2}(n-1)! \sim (n-1)!$$

b) Se propone la ordenación $a_n \ll b_n \ll c_n$ que corresponde a probar que

$$9^n \ll \frac{10^n}{n} \ll (n-1)!$$

Para ello basta ver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{10^n/n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{10^n/n}{(n-1)!} = 0$$

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{10^n/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n9^n}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(10/9)^n} = 0$ por (J.I.) y $\displaystyle\frac{10}{9} > 1$.
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{10^n/n}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} = 0$ por (J.I.).

c) Si se prueba que

$$9^n \ll \frac{10^n}{n} \ll \mathbf{10^n} \ll (n-1)!$$

las relaciones entre órdenes de magnitud y acotaciones asintóticas permiten asegurar que las únicas acotaciones son

$$a_n \in O(\mathbf{10^n}),\ b_n \in O(\mathbf{10^n}) \ \text{ y } \ c_n \in \Omega(\mathbf{10^n})$$

Teniendo en cuenta la ordenación previa, para probar las relaciones anteriores basta justificar que $\displaystyle\frac{10^n}{n} \ll \mathbf{10^n} \ll (n-1)!$. Esto se puede justificar usando la jerarquía de infinitos o haciendo los límites correspondientes:

- $\displaystyle\frac{10^n}{n} \ll \mathbf{10^n}$ porque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n/n}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ o bien porque } \quad \frac{1}{n} \ll 1 \Rightarrow 10^n \cdot \frac{1}{n} \ll 10^n \cdot 1$$

- $\mathbf{10^n} \ll (n-1)!$ porque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} 10 \frac{10^{n-1}}{(n-1)!} = 10 \cdot 0 = 0 \,(\text{J.I.})$$

$$\text{o bien } 10^n = 10 \cdot 10^{n-1} \sim 10^{n-1} \ll (n-1)! \,(\text{J.I.})$$

o bien, directamente por jerarquía de infinitos (Proposición 3.4.13).