Álgebra matricial
y
método de Gauss
Tema 2

Gregoria Blanco

Dep. de Matemática Aplicada a las TIC
ETSISI (U. Politécnica de Madrid)

Álgebra matricial y método de Gauss

¡¡Bienvenidos al ÁLGEBRA LINEAL!!

Álgebra matricial y método de Gauss

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=1\\ 4x+3y&=-1 \end{aligned}\right\}(S)$$

Objetivo:

Resolver sistemas de ecuaciones lineales
(Generalmente con gran número de ecs. y de incógnitas)

¿Dónde?

En un cuerpo $\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$ (con p primo), ...

(Ahí habitan los datos del problema:
conocidos y desconocidos)

¿Por qué?

Porque modelizan una enorme cantidad de problemas interesantes en

- ingeniería,
- economía,
- animación gráfica,
- informática,
- matemáticas,
- . . .

Álgebra matricial y método de Gauss

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=1\\ 4x+3y&=-1 \end{aligned}\right\}(S)$$

¿Cómo?

Con un método eficiente. (¡El método de Gauss!)

Estrategia:

Transformar el sistema (S) en otro sistema (S') equivalente (con las mismas soluciones) donde sea más fácil despejar las incógnitas.

$$\left.\begin{aligned} 2x+y &= 1\\ 4x+3y &= -1 \end{aligned}\right\}(S) \underset{\text{Ec.2 }+(-2)\cdot\text{Ec.1}}{\equiv} \left.\begin{aligned} 2x+y &= 1\\ y &= -3 \end{aligned}\right\}(S') \underset{\text{Ec.1 }+(-1)\cdot\text{Ec.2}}{\equiv}$$

$$\equiv \left.\begin{aligned} 2x &= 4\\ y &= -3 \end{aligned}\right\}(S'') \underset{(2^{-1})\cdot\text{Ec.1}}{\equiv} \left.\begin{aligned} x &= 2\\ y &= -3 \end{aligned}\right\}(S''')$$

Álgebra matricial y método de Gauss

Operaciones elementales con ecuaciones lineales

Aquellas que permiten transformar un sistema en otro equivalente.

1. Sumar a una ecuación otra ecuación multiplicada por α.
2. Permutar dos ecuaciones.
3. Multiplicar por $\alpha \neq 0$ a una ecuación.

$$\left.\begin{aligned} 2x+y &= 1\\ 4x+3y &= -1 \end{aligned}\right\}(S) \underset{\text{Ec.2 }+(-2)\cdot\text{Ec.1}}{\equiv} \left.\begin{aligned} 2x+y &= 1\\ y &= -3 \end{aligned}\right\}(S') \underset{\text{Ec.1 }+(-1)\cdot\text{Ec.2}}{\equiv}$$

$$\equiv \left.\begin{aligned} 2x &= 4\\ y &= -3 \end{aligned}\right\}(S'') \underset{(2^{-1})\cdot\text{Ec.1}}{\equiv} \left.\begin{aligned} x &= 2\\ y &= -3 \end{aligned}\right\}(S''')$$

Álgebra matricial y método de Gauss

Representación matricial de un sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x+y &= 1\\ 4x+3y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1\\ 4 & 3 \end{matrix}}_{\text{Matriz de coefs.}} & \begin{matrix} 1\\ -1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{\text{Matriz del sistema}}$$

Ejemplo

En general:

Un sistema lineal de n ecuaciones y N incógnitas:

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots\cdots + a_{1N}\cdot x_N &=& b_1\\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots\cdots + a_{2N}\cdot x_N &=& b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \cdots\cdots + a_{nN}\cdot x_N &=& b_n \end{array}\right\}$$

puede representarse matricialmente así:

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1N}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2N}\\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nN} \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_n \end{matrix}}_{B} \end{array}\right)$$

$A =$ matriz de coeficientes (de las incógnitas); $B =$ matriz de términos independientes
A la matriz conjunta $(A|B)$ se le denomina matriz del sistema o matriz ampliada.

Álgebra matricial y método de Gauss

Representación matricial de un sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=\ \ 1 \\ 4x+3y=-1 \end{array}\right\} \underset{\text{Ec.2 }+(-2)\cdot\text{Ec.1}}{\equiv} \left.\begin{array}{r} 2x+y=\ \ 1 \\ y=-3 \end{array}\right\} \underset{\text{Ec.1 }+(-1)\cdot\text{Ec.2}}{\equiv} \left.\begin{array}{r} 2x=\ \ 4 \\ y=-3 \end{array}\right\} \underset{(2^{-1})\cdot\text{Ec.1}}{\equiv} \left.\begin{array}{r} x=\ \ 2 \\ y=-3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right) \underset{F_2+(-2)\cdot F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{F_1+(-1)\cdot F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{(2^{-1})\cdot F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Operaciones elementales por filas en una matriz

1 Sumar a una fila otra fila multiplicada por α. ❶ $F_i := F_i + \alpha F_j$

2 Permutar dos filas. ❷ $F_i \leftrightarrow F_j$

3 Multiplicar por $\alpha \neq 0$ a una fila. ❸ $F_i := \alpha F_i, \quad \alpha \neq 0$

Álgebra matricial y método de Gauss

Observemos bien las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrices escalonadas y escalonadas reducidas

★ Una matriz A se dice que es ESCALONADA si

❶ Las filas de ceros, si hay, están al final de A.

❷ El primer elemento no nulo de cada fila está a la derecha del primer elemento de la fila anterior (si hay).

★ Una matriz A se dice que es ESCALONADA REDUCIDA si

❶ Es escalonada.

❷ El primer elemento no nulo de cada fila es 1 y por encima de él solo hay ceros.

Ej.: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ✔ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✖ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✔✔ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✖

Álgebra matricial y método de Gauss

Teorema

➤ Toda matriz A se puede transformar en una matriz escalonada realizando solo las operaciones elementales por filas 1 y 2.

➤ Toda matriz A se puede transformar en una matriz escalonada reducida realizando solo las operaciones elementales por filas 1, 2 y 3.

Obs.: Una matriz admite varias escalonadas pero solo una escalonada reducida.

Notación: Con $\mathbf{Esc}(A)$ se nota cualquier escalonada equivalente a A.
Con $\mathbf{EscR}(A)$ se nota la escalonada reducida de A.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}} \sim \underset{\text{una } \mathbf{Esc}(A)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}} \sim \underset{\text{otra } \mathbf{Esc}(A)}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}} \sim \underset{\mathbf{EscR}(A)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$$

Álgebra matricial y método de Gauss

Método de Gauss

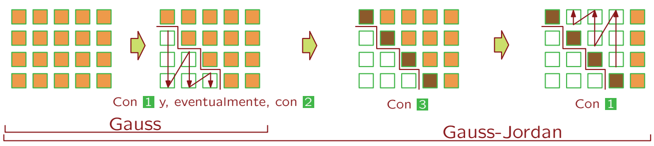
Consiste en aplicar a una matriz A las operaciones elementales 1 y 2 siguiendo un determinado orden de modo que se garantiza que al final se obtiene una $\mathbf{Esc}(A)$.

Método de Gauss-Jordan

Básicamente consiste en

1) Aplicar el método de Gauss a A para escalonar la matriz (1 y 2).

2) Usar 1, 2 y 3 siguiendo un determinado orden para obtener $\mathbf{EscR}(A)$.



Álgebra matricial y método de Gauss

Descripción del algoritmo de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ & & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

I Si $a_{11} \neq 0$ pasamos a II.

usando 2 Si $a_{11} = 0$ permutamos la 1ª fila con alguna fila i tal que $a_{i1} \neq 0$ (queremos que la posición $[1,1]$ esté ocupada por un elemento no nulo).
Si esto no es posible (porque la 1ª col. es toda de ceros), pasamos a la 2ª columna.

II Se hacen cero todos los elementos de la 1ª columna por debajo de la posición $[1,1]$, de modo que obtenemos algo así:

usando 1

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots\cdots & a'_{1m} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2m} \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nm} \end{pmatrix}$$

III Se repite el algoritmo con la submatriz

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \cdots\cdots & a'_{2m} \\ & & \cdots\cdots & \\ a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots\cdots & a'_{nm} \end{pmatrix}$$

Álgebra matricial y método de Gauss

Rango de una matriz

⋆ El rango de una matriz M es el número de filas no nulas de su matriz escalonada reducida.

$$\text{rg}(M) = \text{rg}\big(\mathbf{EscR}(M)\big)$$

Ej.: En $\mathbb{R}$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2 := F_2 + (-2)F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 := F_3 + (-1)F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 := F_3 + F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1 := (\frac{1}{2})F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{rg}(M) = 2}$$

Obs.:

❶ $\mathbf{EscR}(M)$ tiene el mismo nº de filas no nulas que $\mathbf{Esc}(M)$.
Luego $\quad \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(\mathbf{Esc}(M))$

➨ Para hallar $\mathrm{rg}(M)$ basta con escalonar M, no hace falta reducirla.

❷ Al escalonar una matriz, surge una fila de ceros cuando esa fila se puede expresar como combinación lineal de otras filas.

➨ Si M es la matriz de un sistema, una fila de ceros al escalonar corresponde a una ecuación redundante con las otras.

Luego las filas no nulas de $\mathbf{Esc}(M)$ son aquellas que no son combinación lineal de otras, es decir, son linealmente independientes.

En consecuencia:

$$\boxed{\mathrm{rg}(M) = \text{nº de filas linealmente independientes de } M}$$

Discusión de sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo: Sea $(A|B)$ la matriz de un sistema de ecuaciones lineales. Supongamos que:

❶ $\mathbf{EscR}(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sist. con $\mathbf{4}$ ecs. y $\mathbf{3}$ incógnitas
Con sol. única: $\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\}$
Comp. determinado

❷ $\mathbf{EscR}(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Sist. con $\mathbf{3}$ ecs. y $\mathbf{3}$ incógnitas
Sin solución: ¡¡$0 = 1$!!
Incompatible

❸ $\mathbf{EscR}(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Con varias sols.: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$
Comp. indet.

❸ $\mathbf{EscR}(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Con varias sols.: $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\mu + \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{array}\right\}_{\lambda, \mu \in \mathbb{K}}$
Comp. indet.

Teorema de Rouché-Fröbenius

Sea $(A|B)$ la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales con N incógnitas. Entonces:

- $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A|B) \Rightarrow$ el sistema es incompatible (sin solución).
- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) \Rightarrow$ el sistema es compatible (hay solución) y,
  - $\mathrm{rg}(A) = N \Rightarrow$ el sist. es comp. determinado (la sol. es única).
  - $\mathrm{rg}(A) < N \Rightarrow$ el sist. es comp. indeterminado (hay varias sols. dependientes de $N - \mathrm{rg}(A)$ parámetros.)

Cálculo de inversas

✯ Una matriz A cuadrada de orden n se dice que es INVERTIBLE si existe otra matriz B cuadrada de orden n tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n.

En tal caso se dice que B es la inversa de A y se notará A^{-1}.

Propiedades

❶ La inversa de una matriz es única y $(A^{-1})^{-1} = A$.

❷ $A \cdot B = I_n \quad \Rightarrow \quad B \cdot A = I_n$.

En general el producto de matrices no es conmutativo.

Ejemplo: Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, ¿es invertible?

Lo será $\Leftrightarrow$ existe una matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+c=1 \\ 4a+3c=0 \\ 2b+d=0 \\ 4b+3d=1 \end{array}\right\}(S) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+c=1 \\ 4a+3c=0 \end{array}\right\}(S_1) \text{ y } \left.\begin{array}{r} 2b+d=0 \\ 4b+3d=1 \end{array}\right\}(S_2)$$

Luego $\exists \ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = I_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+c=1 \\ 4a+3c=0 \end{array}\right\}(S_1) \text{ y } \left.\begin{array}{r} 2b+d=0 \\ 4b+3d=1 \end{array}\right\}(S_2) \text{ tienen solución.}$$

$$(S_1): \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 := F_2 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{F_1 := F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{F_1 := \frac{1}{2}F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} a = \frac{3}{2} \\ c = -2 \end{array}\right\}$$

$$(S_2): \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 := F_2 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 := F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 := \frac{1}{2}F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} b = -\frac{1}{2} \\ d = 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto, A es invertible y A^{-1} es $\boxed{B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$

Obs.: Los sistemas (S_1) y (S_2) tienen la misma matriz de coefs.
Por eso se resuelven aplicando las mismas ops. elementales.
Pueden resolverse simultáneamente.

Álgebra matricial y método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 := F_2 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 := F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 := \frac{1}{2}F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Además

$$\Big(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}}_{A} \Big| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2}\Big) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \Big(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2} \Big| \underbrace{\begin{matrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{matrix}}_{B}\Big)$$

Teorema

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

A es invertible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{EscR}(A|I_n) = (I_n|B)$, siendo entonces $A^{-1} = B$.

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = n$.

Álgebra matricial y método de Gauss

Cálculo de determinantes

☆ Se quiere asignar un número a cada matriz cuadrada de orden n

$$\begin{array}{rccc} \det: & \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$

$\boxed{n=1}$ $\det\left(a_{11} \right) = a_{11}$

Regla de Sarrus

$\boxed{n=2}$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

$\boxed{n=3}$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$
$-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23})$

Álgebra matricial y método de Gauss

$\boxed{n=4}$ ~~Regla de Sarrus~~

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + a_{31}\det(A_{31}) - a_{41}\det(A_{41})$$

$A_{i1} =$ submatriz resultante al eliminar en A la fila i y la columna 1.

➥ A_{i1} tiene orden una unidad menos que A.

Es una definición recursiva.

Álgebra matricial y método de Gauss

☆ El DETERMINANTE de una matriz cuadrada de orden n se define recursivamente (sobre n) del siguiente modo:

$$\det(A) = \overbrace{\begin{cases} a_{11} & \text{si } n = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \cdot \det(A_{k1}) & \text{si } n > 1 \end{cases}}$$

$$a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{21} \cdot \det(A_{21}) + a_{31} \cdot \det(A_{31}) - \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} \cdot \det(A_{n1})$$

donde A_{k1} es la submatriz de A que se obtiene al eliminar la k-ésima fila y la 1ª columna.

Coste de hallarlo por la definición:

Número de operaciones: $\left.\begin{array}{l} C(n) = 2n + n \cdot C(n-1) \\ C(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow C(n) \geq n!$

Álgebra matricial y método de Gauss

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underbrace{- 0 \cdot |A_{21}| + 0 \cdot |A_{31}| - 0 \cdot |A_{41}|}_{0}$$

$$= 2 \cdot \left(4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \underbrace{- 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{0} \right)$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot (3 \cdot | -2 | \underbrace{- 0 \cdot | 1 |}_{0})$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-2)$$

Luego,

Si A es escalonada, $\det(A) =$ producto de los elem. de su diagonal ppal.

¿Y si A no es escalonada?

Álgebra matricial y método de Gauss

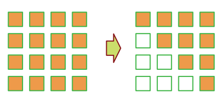
Propiedades

- ❑ Sumar a una fila otra fila multiplicada por α no altera el valor del determinante.
- ❑ Permutar dos filas supone un cambio de signo en el valor del determinante.
- ❑ Multiplicar a una fila por $\alpha \neq 0$ altera en un factor α el valor del determinante.
- ❑ Consecuencia: $\boxed{\det(A) = (-1)^r \cdot \det\left(\mathrm{Esc}(A)\right)}$,

donde $r =$ nº de permutaciones de filas realizadas al escalonar A.

Coste de hallarlo por el método de Gauss:

Número de operaciones:



En el peor de los casos hay que hacer $\frac{n^2-n}{2} \sim n^2$ ceros.

Hacer un cero cuesta $2n$ operaciones.

Total: $2n \cdot \frac{(n^2-n)}{2} \sim n^3$ $\boxed{n^3 \ll n!}$

Más propiedades

- $\mathbf{det}(I_n) = \mathbf{1}$.
- $\mathbf{det}(A \cdot B) = \mathbf{det}(A) \cdot \mathbf{det}(B)$.
- A invertible $\Leftrightarrow$ $\mathbf{det}(A) \neq \mathbf{0}$ y en tal caso, $\mathbf{det}(A^{-1}) = \Big(\mathbf{det}(A)\Big)^{-1}$.

Y otras pocas más

- El determinante se definió "desarrollando por la 1ª columna" pero también es válido desarrollarlo por cualquier otra columna. Por ejemplo, para la j-ésima columna sería:

$$\mathbf{det}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \mathbf{det}(A_{kj})$$

- $\mathbf{det}(A) = \mathbf{det}(A')$, donde A' es la traspuesta de A.
- Consecuencia: Todo lo dicho sobre determinantes para filas es cierto para columnas.

Álgebra matricial y método de Gauss

Resumiendo

Hemos aprendido/recordado

- Los métodos de Gauss y Gauss-Jordan para hallar $\mathbf{Esc}(A)$ y $\mathbf{EscR}(A)$.
- Resolver sistemas de ecs. lineales hallando e interpretanto $\mathbf{EscR}(A|B)$.
- Hallar rg(A) a partir de $\mathbf{Esc}(A)$ o de $\mathbf{EscR}(A)$.
- Determinar si A es invertible y hallar su inversa con $\mathbf{EscR}(A|I_n)$.
- Hallar de forma eficiente $\mathbf{det}(A)$.

Esto será

Una herramienta fundamental en el desarrollo de los siguientes temas.