Tres primeras letras del primer apellido: | | | |

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: P. Global/Examen Final Extraordinario

Fecha: 01-07-2022 Duración de esta prueba: 3 horas.

A rellenar por los profesores

Test	Teoría	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Prob. 4	Prob. 5	Prob. 6	Prob. 7	Nota

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen estarán publicadas el 15 de julio y la revisión será el 19 de julio. Se confirmará la publicación de las notas, y el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta $= +1$, errónea $= -0.5$, en blanco $= 0$.

Dada una función $f(x)$ que verifica que $f'(c) = 0$ en un punto $x = c$ de su dominio, se puede asegurar que:

a) $x = c$ es un extremo relativo.

b) la función $f(x)$ puede no ser continua en $x = c$.

c) la función $f(x)$ tiene tangente horizontal en $x = c$.

C

El gradiente de la función $f(x, y) = e^x \sin(xy)$ en el punto $(0, \pi)$ es:

a) $(\pi, 0)$. b) $(0, \pi)$. c) $(0, 0)$.

A

Dada una función $f(x)$ integrable en el intervalo $[a, b]$, tal que $\int_a^b f(x)dx > 0$, se puede asegurar que:

a) $\int_a^b \big(f(x) + 1\big)\, dx > 1$.

b) $\int_a^b \big(f(x) + 1\big)\, dx > b - a$.

c) $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$.

B

La integral impropia $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$:

a) Es convergente y vale 1.

b) Es divergente.

c) Es convergente y vale 0.

A

Sea a_n una sucesión monótona tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Se puede asegurar que:

a) todos los términos de a_n tienen el mismo signo.

b) a_n puede ser oscilante.

c) a_n sólo tiene términos positivos.

A

Dada la sucesión a_n definida de forma recursiva por $\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_n = \dfrac{n+1}{3} a_{n-1}, & n \geq 1 \end{cases}$, su orden de magnitud es:

a) $a_n \sim \dfrac{n!}{3^{n+1}}$ b) $a_n \sim \dfrac{(n+1)!}{3^n}$ c) $a_n \sim (n+1)!$

B

Dada una serie convergente $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, con $a_n > 0$ si $n \geq n_0$, y siendo $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Se cumple que:

a) $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$.

b) $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \neq \sum_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$.

c) La serie $\sum_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$ puede ser divergente.

B

La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-4)^n}{5^{n+1}}$:

a) Es divergente.

b) Es convergente y su suma es 1.

c) Es convergente y su suma es $\dfrac{1}{9}$.

C

La igualdad $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ es cierta si y sólo si x pertenece:

a) Al campo de validez del desarrollo de f en serie de potencias centrada en x_0.

b) Al intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.

c) Al dominio de definición de la función f.

A

La igualdad $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ si $x \in (-\infty, \infty)$ es el desarrollo en serie de potencias de la función:

a) $f(x) = \cos(x)$ b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ c) $f(x) = e^{-x^2}$

C

Teoría (10%)

a) *(5 puntos)* Haz un esquema que recoja relaciones entre los conceptos de función continua, función derivable, función acotada y función creciente en un intervalo. Para alguna de las relaciones habrá que distinguir si el intervalo es abierto o cerrado.

SOLUCIÓN:
Derivabilidad y continuidad:

- $f(x)$ derivable en $x = c \quad \Rightarrow \quad f(x)$ continua en $x = c$.
- también válido que si $f(x)$ es derivable para todo $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es continua en para todo $x \in (a, b)$.
- sin embargo, $f(x)$ continua en $x = c \quad \not\Rightarrow \quad f(x)$ derivable en $x = c$; por ejemplo: $|x|$ es continua en $x = 0$ pero no es derivable en $x = 0$ pues tiene un "pico".

Derivada y crecimiento:

- $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es creciente en (a, b).
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es decreciente en (a, b).

Continuidad y acotación:

- $f(x)$ continua en $[a, b] \quad \Rightarrow \quad f(x)$ está acotada en $[a, b]$.
- sin embargo, $f(x)$ acotada en $[a, b] \quad \not\Rightarrow \quad f(x)$ es continua en $[a, b]$; por ejemplo: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$ está acotada en $[0, 2]$ pero no es continua en dicho intervalo, ya que no lo es en $x = 1$.

b) *(5 puntos)* Escribe la definición de $\Gamma(p)$ para $p > 0$ y enunciar dos de sus propiedades.

SOLUCIÓN: $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$ para $p > 0$.
Algunas de sus propiedades son:

- $\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$ si $p > 0$.
- $\Gamma(n + 1) = n!$ si $n \ge 0$ (o bien que $\Gamma(n) = (n - 1)!$ si $n \ge 1$).
- $\Gamma(1) = 0$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Problema 1 (10 %)

Encontrar y clasificar los extremos locales y/o puntos de silla de la función

$$f(x, y) = 2x^4 - 3xy + 4y^2.$$

Solución: Se usa el método general para obtener y clasificar extremos locales de funciones de dos variables:

- Se obtienen las derivadas parciales de f: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 3y, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8y$

- Se calculan los puntos críticos resolviendo el sistema $\begin{cases} 8x^3 - 3y = 0 \\ -3x + 8y = 0 \end{cases}$, en este caso se usa el método de sustitución:

  $$y = \frac{3}{8}x \qquad \text{luego} \qquad 8x^3 - 3 \cdot \frac{3}{8}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(64x^2 - 9) = 0$$

  De aquí se obtienen 3 soluciones para x: $x = 0, \quad x = \frac{3}{8}, \quad x = -\frac{3}{8}$, que dan lugar a tres puntos críticos

  $$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{64}\right), \quad P_3 = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{9}{64}\right)$$

- Para clasificar los puntos críticos se hallan las derivadas de segundo orden y se estudian la matriz hessiana y el hessiano en cada uno de ellos.

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8 \quad \Rightarrow \quad H(x, y) = \begin{pmatrix} 24x^2 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

  $H(P_1) = H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ y $\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = -9 < 0$ luego en el punto P_1 hay un punto de silla.

  $H(P_2) = H\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{64}\right) = \begin{pmatrix} \frac{27}{8} & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ y $\det \begin{pmatrix} \frac{27}{8} & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = 27 - 9 = 18 > 0$, con $A = \frac{27}{8} > 0$ luego en el punto P_2 hay un mínimo local.

  $H(P_3) = H\left(-\frac{3}{8}, -\frac{9}{64}\right) = \begin{pmatrix} \frac{27}{8} & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ e igual que en el caso anterior, en el punto P_3 hay un mínimo local.

Problema 2 (6 %)

Se considera la ecuación diferencial $y' - x^4 y = 0$. Se pide:

a) *(5 puntos)* Obtener su solución general.

b) *(2 puntos)* Obtener la solución particular que verifica $y(0) = 2$.

c) *(3 puntos)* Verificar que la solución particular obtenida en el apartado anterior (o cualquier solución de la e. diferencial) es solución de la ecuación diferencial $y'' - (4x^3 + x^8)y = 0$

Solución:

a) Es una ecuación de variables separables (suponiendo que $y \neq 0$): $\dfrac{y'}{y} = x^4$ así que integrando en ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x^4 \, dx$$

Se tiene que $\ln |y| = \frac{x^5}{5} + C$.

Luego $y = Ke^{x^5/5}$ es la solución general con $K \in \mathbb{R}$.

b) $y(0) = Ke^0 = K = 2$. Luego la función que satisface la EDO original y este dato inicial es $y(x) = 2e^{x^5/5}$.

c) Basta derivar la EDO original respecto de x:

$$(y' - x^4 y)' = 0 \Leftrightarrow y'' - (x^4 y)' = 0 \Leftrightarrow y'' - (4x^3 y + x^4 y') = 0 \Leftrightarrow y'' - (4x^3 y + x^4 y') = 0$$

Y usando que $y' = x^4 y$ se tiene que

$$y'' - (4x^3 y + x^4 \cdot x^4 y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' - (4x^3 + x^8)y = 0$$

Otra forma de hacerlo sería derivando dos veces la solución general obtenida en **a)** y a continuación verificar que se cumple la ecuación diferencial propuesta:

$$y = Ke^{x^5/5} \quad \Rightarrow \quad y' = Kx^4 e^{x^5/5} \quad \Rightarrow \quad y'' = K4x^3 e^{x^5/5} + Kx^4 x^4 e^{x^5/5} = K(4x^3 + x^8)e^{x^5/5}$$

Y teniendo en cuenta quién era y:

$$y'' = (4x^3 + x^8)y$$

O lo que es lo mismo:

$$y'' - (4x^3 + x^8)y = 0$$

Problema 3 (12 %)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} xe^{x-1} & \text{si } x\leq 1\\ \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$, se define $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

a) *(3 puntos)* Estudiar la derivabilidad de $F(x)$. Hallar $F'(x)$ donde exista.

SOLUCIÓN:
Estudiamos la derivabilidad de $F(x)$ a partir de las propiedades de $f(x)$, ya que el Teorema Fundamental del Cálculo nos asegura que $F(x)$ es derivable en los puntos en donde $f(x)$ sea continua. Por tanto, estudiamos la continuidad de $f(x)$:

- $f(x)$ es continua en $(-\infty,1)$, por ser producto de funciones continuas (una función polinómica y una exponencial).
- $f(x)$ es continua en $(1,+\infty)$, por ser cociente de funciones continuas sin que el denominador se haga 0 para los valores de dicho intervalo.
- $f(x)$ no es continua en $x=1$ ya que los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} xe^{x-1}=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{-2}{x^2}=-2$$

Al ser $f(x)$ continua en $\mathbb{R}-\{1\}$, el Teorema Fundamental de Cálculo nos asegura que $\boxed{F(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R}-\{1\} \text{ y que en dichos puntos } F'(x)=f(x)}$. En $x=1$ no es derivable ya que $F'(1^-)=1\neq -2=F'(1^+)$.

b) *(2 puntos)* Estudiar el crecimiento de $F(x)$.

SOLUCIÓN: Se puede estudiar el crecimiento de una función estudiando el signo de su derivada. Para ello estudiamos primero sus puntos críticos:

- Puntos en donde la derivada no existe: hemos visto en a) que en $x=1$ la función $F(x)$ no es derivable, por lo que $x=1$ es punto crítico.
- Puntos en donde la derivada se anula. Como $F'(x)=f(x)$ si $x\neq 1$, se tiene que:
  - si $x<1$, $F'(x)=f(x)=xe^{x-1}=0 \Leftrightarrow x=0$, por lo que $x=0$ es un punto crítico.
  - si $x>1$, $F'(x)=f(x)=\dfrac{-2}{x^2}=0$ no tiene solución, por lo que no hay puntos críticos en el intervalo $(1,+\infty)$.

Ahora estudiamos el signo de $F'(x)$ en los intervalos que determinan los puntos críticos:

- si $x\in(-\infty,0)$, $F'(x)=f(x)=xe^{x-1}<0$ ya que $x<0$ y la exponencial siempre es positiva; por tanto, $F(x)$ es decreciente en $(-\infty,0)$.
- si $x\in(0,1)$, $F'(x)=f(x)=xe^{x-1}>0$ ya que $x>0$ y la exponencial siempre es positiva; por tanto, $F(x)$ es creciente en $(0,1)$.
- si $x\in(1,+\infty)$, $F'(x)=f(x)=\dfrac{-2}{x^2}<0$ ya que es cociente de una cantidad negativa entre una positiva; por tanto, $F(x)$ es decreciente en $(1,+\infty)$.

Por tanto, la función $F(x)$ es decreciente en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(1,+\infty)$, y es creciente en el intervalo $(0,1)$.

c) *(5 puntos)* Hallar $F(1)$ y la expresión explícita de $F(x)$.

SOLUCIÓN: Por la definición de $F(x)$ se tiene que $F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 te^{t-1}\,dt$.

Utilizamos el método de integración por partes para hallar la primitiva $\int xe^{x-1}\,dx$, considerando $u = x$, $dv = e^{x-1}dx$ y por tanto $du = 1dx, v = e^{x-1}$. Se tiene:

$$\int xe^{x-1}\,dx = xe^{x-1} - \int e^{x-1}\,dx = xe^{x-1} - e^{x-1} = (x-1)e^{x-1}$$

Por la regla de Barrow:

$$F(1) = \int_0^1 te^{t-1}\,dt = \left[(t-1)e^{t-1}\right]_0^1 = 0e^0 - (-1)e^{-1} = e^{-1}$$

Para hallar la forma explícita de $F(x)$, hay que distinguir dos casos:

- Si $x \leq 1$ es

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x te^{t-1}\,dt = \left[(t-1)e^{t-1}\right]_0^x = (x-1)e^{x-1} - (-1)e^{-1} = (x-1)e^{x-1} + e^{-1}$$

- Si $x > 1$ es

$$F(x) = \int_0^x te^{t-1}\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x \frac{-2}{t^2}\,dt$$

Por tanto
$$\begin{aligned} F(x) &= F(1) + \int_1^x \frac{-2}{t^2}\,dt = e^{-1} + \left[\frac{2}{t}\right]_1^x \\ &= e^{-1} + \left(\frac{2}{x} - 2\right) = \frac{2}{x} + e^{-1} - 2. \end{aligned}$$

Así pues queda:

$$F(x) = \begin{cases} (x-1)e^{x-1} + e^{-1} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} + e^{-1} - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Problema 4 (14 %)

Dadas las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{3^n(4n^3+2n)}{\log(n^6)+n}\,, \qquad b_n = \frac{(n+2)!}{n^3+\cos(n)}\,, \qquad S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

se pide responder a los siguientes apartados **justificando los resultados obtenidos**:

a) *(6 puntos)* Hallar el orden de magnitud de las tres sucesiones.

SOLUCIÓN:

- $a_n = \dfrac{3^n(4n^3+2n)}{\log(n^6)+n} \sim \dfrac{3^n n^3}{n} = 3^n n^2$, ya que

  $4n^3+2n \sim n^3$ (por jerarquía de infinitos y la propiedad de la suma).

  $\log(n^6)+n \sim n$ (pues $\log(n^6) \sim \log(n) \ll n$ y la propiedad de la suma).

  Por tanto, $\boxed{a_n \sim 3^n n^2}$

- $b_n = \dfrac{(n+2)!}{n^3+\cos(n)} \sim \dfrac{(n+2)!}{n^3} = \dfrac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{n^3} \sim (n-1)!$ ya que por un lado, $n^3+\cos(n) \sim n^3$, pues $\cos(n) \ll n^3$ ya que $\lim \dfrac{\cos(n)}{n^3} = 0$ (producto de acotada por convergente a 0); y por otro lado, $(n+2)(n+1)n \sim n^3$.

  Por tanto, $\boxed{b_n \sim (n-1)!}$

- La sucesión S_n es una suma parcial n-ésima cuyo término general es una sucesión de términos positivos. Por tanto, para estudiar su orden de magnitud se estudia primero el orden de dicha sucesión. En este caso, el orden de $\dfrac{\ln(k)}{k}$ no se puede simplificar más, por lo que estudiamos si se puede aplicar el criterio integral.

  Se tiene que $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \geq 0$, continua y decreciente en el intervalo $[3,+\infty)$, ya que $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} > 0$ a partir de $x > e$. El criterio integral nos asegura que:

  $$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \sim \int_3^n \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_3^n = \frac{(\ln(n))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2} \sim (\ln(n))^2$$

  puesto que:

  - haciendo el cambio de variable $t = \ln(x)$, $dt = \dfrac{1}{x}dx$ se tiene que

    $$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln(x))^2}{2},$$

  - se tiene que $(\ln(n))^2 \gg \ln(n) \gg 1$ y el orden de magnitud de una suma es del orden de la sucesión de mayor grado.

  Por tanto, $\boxed{S_n \sim (\ln(n))^2}$

b) *(2 puntos)* Ordenarlas según dicho orden.

SOLUCIÓN:

- Se verifica que $S_n \ll a_n$ ya que $(\ln(n))^2 \ll n^2 \ll 3^n n^2$.
- Se verifica que $a_n \ll b_n$ ya que

$$\lim \frac{3^n n^2}{(n-1)!} = \lim \frac{3^n n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)!} = \lim \left(\frac{3^n}{(n-3)!}\right)\left(\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\right) = 0{\cdot}1 = 0$$

pues la jerarquía de infinitos asegura que $3^n \ll (n-3)!$

Por tanto, $\boxed{S_n \ll a_n \ll b_n}$

c) *(2 puntos)* Justificar cuáles de ellas están en $O(3^n)$ y cuáles en $\Omega(3^n)$.

SOLUCIÓN:

Utilizamos los siguientes resultados:

- $x_n \ll 3^n \Rightarrow x_n \in O(3^n)$.
- $x_n \gg 3^n \Rightarrow x_n \in \Omega(3^n)$.

Por tanto, estudiaremos la relación de orden de las anteriores sucesiones con 3^n.

- Como $S_n \sim (\ln(n))^2 \ll n^2 \ll 3^n$ (por jerarquía de infinitos), se tiene que $S_n \in O(3^n)$.
- Como $b_n \gg a_n \sim 3^n n^2 \gg 3^n$ (pues $n^2 \gg 1$), se tiene que $a_n, b_n \in \Omega(3^n)$.

Problema 5 (8 %)

Un algoritmo emplea una instrucción para resolver un problema cuando hay un solo dato de entrada. Si el número de datos es $n \geq 2$, usa $n+2$ instrucciones para reducir el problema a un problema de $n-1$ datos y ejecuta sobre él el mismo algoritmo. Si a_n representa el número total de instrucciones para resolver un problema n datos de entrada con dicho algoritmo, se pide:

a) *(3 puntos)* Obtener la expresión recursiva de a_n.

SOLUCIÓN:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ n + 2 + a_{n-1} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

b) *(5 puntos)* Resolver la ecuación en diferencias para hallar la expresión explícita de a_n.

SOLUCIÓN: Si tanteamos un poco hasta descubrir la pauta general:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 2+2+a_1 &&= 2+2+1 \\
a_3 &= 3+2+a_2 &&= 3+2+2+2+1 \\
a_4 &= 4+2+a_3 &&= \mathbf{4}+2+\mathbf{3}+2+\mathbf{2}+2+\mathbf{1} \\
& &&= (\mathbf{4}+\mathbf{3}+\mathbf{2}+\mathbf{1})+(2+2+2) = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{4}} \mathbf{k} + 2\cdot 3 \\
a_5 &= 5+2+a_4 &&= \mathbf{5}+2+(\mathbf{4}+\mathbf{3}+\mathbf{2}+\mathbf{1})+(2+2+2) \\
& &&= (\mathbf{5}+\mathbf{4}+\mathbf{3}+\mathbf{2}+\mathbf{1})+(2+2+2+2) = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{5}} \mathbf{k} + 2\cdot 4
\end{aligned}$$

$\ldots$

$$a_n = n+2+a_{n-1} = \underbrace{(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1)}_{\sum_{k=1}^{n} k} + \underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{n-1 \text{ sumandos}}$$

Luego

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k + 2(n-1) = \frac{(n+1)n}{2} + 2(n-1) = \frac{n^2+5n-4}{2}$$

Otra forma de agrupar sumandos:

$$a_n = (n+2)+(n-1+2)+(n-2+2)+\cdots+(3+2)+(2+2)+1$$

$$= \underbrace{(n+2)+(n+1)+n+\cdots+5+4}_{\text{suma de progresión aritmética}} + 1 = \frac{(n+2+4)(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2+5n-4}{2}$$

c) *(2 puntos)* Otro algoritmo resuelve el mismo problema empleando $3 \cdot 2^{n-1} - 2$ instrucciones para resolver el problema con n datos. Justificar cuál de los dos algoritmos es más eficiente para resolver el problema para grandes cantidades de datos.

SOLUCIÓN: Si comparamos asintóticamente $a_n \sim n^2$ y $b_n = 3\cdot 2^{n-1} - 2 \sim 2^n$, obviamente $a_n \ll b_n$, por jerarquía de infinitos. Por tanto es mejor el primer algoritmo ya que para valores grandes de n requiere menor número de instrucciones.

Problema 6 (10 %)

Estudiar la convergencia de cada una de estas tres series justificando adecuadamente los criterios utilizados para cada caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n-1)!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-3} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2+\ln n}$$

SOLUCIÓN:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n-1)!}$ converge por el criterio del cociente ya que es una serie de términos positivos y $\displaystyle\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{5^{n+1}}{n!}}{\frac{5^n}{(n-1)!}} = \lim \frac{5^{n+1}(n-1)!}{5^n n!} = \lim \frac{5}{n} = 0 < 1.$

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-3}$ converge por el criterio de comparación ya que es una serie de términos positivos, su término general $\displaystyle\frac{\sqrt{n}}{n^2-3} \sim \frac{n^{1/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ y $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge por ser armónica con $p = 3/2 > 1$.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2+\ln n}$ diverge porque su término general no tiende a cero. En efecto, si tendiera a cero, su valor absoluto también pero $\displaystyle\lim \left|\frac{(-3)^n}{2+\ln n}\right| = \lim \frac{3^n}{2+\ln(n)} = \infty$ puesto que $3^n \gg \ln(n) \sim 2+\ln(n)$.

Problema 7 (10 %)

Se considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{3^n n}$

a) *(5 puntos)* Hallar el intervalo de convergencia I de la serie de potencias anterior.

SOLUCIÓN: Esta serie de potencias está centrada en $x_0 = 0$ y tiene sucesión de coeficientes $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n n}$. Hallamos el radio de convergencia con la fórmula: $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Como $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{3^n n}} = \lim \dfrac{1}{3\sqrt[n]{n}} = \dfrac{1}{3}$, el radio es $R = 3$.

En consecuencia, el intervalo de convergencia está centrado en $x_0 = 0$ y tiene radio 3. Analicemos qué pasa en los extremos del intervalo:

- Si $x = -3$: la serie queda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-3)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que diverge por ser armónica (con $p = 1$).

- Si $x = 3$: la serie queda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que es una serie alternada que converge por el criterio de Leibniz.

Así pues, el intervalo de convergencia de la serie es $I = (-3, 3]$.

b) Sea $S : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la función suma de la serie de potencias anterior definida sobre su intervalo de convergencia I.

1. *(3 puntos)* Hallar una función primitiva de $S(x)$, $T(x) = \displaystyle\int S(x)\,dx$, y su intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN: Por el teorema de integración de series de potencias, la primitiva se obtiene integrando la serie término a término y se hereda, al menos, el intervalo abierto de convergencia:

$$T(x) = \int \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{3^n n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int(-1)^{n+1}\frac{x^n}{3^n n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{3^n n(n+1)}$$

En los extremos del intervalo:

- Si $x = -3$: la serie queda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-3)^{n+1}}{3^n n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ que es una serie convergente por el criterio de comparación ya que su término general $\dfrac{1}{n(n+1)}$ es positivo y es del orden del término general de la serie armónica $\sum \dfrac{1}{n^2}$ convergente ($p = 2 > 1$).

- Si $x = 3$: la serie queda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{n+1}}{3^n n(n+1)} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ que es una serie alternada que converge por el criterio de Leibniz (también converge absolutamente).

Así pues, el intervalo de convergencia de T es $[-3, 3]$.

2. *(2 puntos)* Sabiendo que $S(x) = \ln(1 + \frac{x}{3})$ para todo $x \in I$, hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de S centrado en $x_0 = 0$ y usarlo para aproximar el valor de $\ln(4/3)$.

SOLUCIÓN: Ya que $\ln(1 + \frac{x}{3}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{3^n n}$ para todo $x \in (-3, 3]$, hallamos el polinomio de Taylor de orden 2 truncando la serie hasta obtener un polinomio de grado ≤ 2:

$$P_2(x) = \sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{3^n n} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{3^2 2} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18}$$

Aprovechando que $S(x) \approx P_2(x)$ para $x \in I$,

$$\ln(4/3) = \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) = S\left(1\right) \approx P_2\left(1\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18} \approx 0.2778$$

Tres primeras letras del primer apellido: | | | |

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: P. Global/Examen Final Extraordinario

Fecha: 01-07-2022 Duración de esta prueba: 3 horas.

A rellenar por los profesores

Test	Teoría	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Prob. 4	Prob. 5	Prob. 6	Prob. 7	Nota

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen estarán publicadas el 15 de julio y la revisión será el 19 de julio. Se confirmará la publicación de las notas, y el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta $= +1$, errónea $= -0.5$, en blanco $= 0$.

Dada una función $f(x)$ integrable en el intervalo $[a, b]$, tal que $\int_a^b f(x)dx > 0$, se puede asegurar que:

a) $\int_a^b (f(x) + 1)\, dx > 1$.

b) $\int_a^b (f(x) + 1)\, dx > b - a$.

c) $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$.

B

Dada una función $f(x)$ que verifica que $f'(c) = 0$ en un punto $x = c$ de su dominio, se puede asegurar que:

a) $x = c$ es un extremo relativo.

b) la función $f(x)$ puede no ser continua en $x = c$.

c) la función $f(x)$ tiene tangente horizontal en $x = c$.

C

La integral impropia $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$:

a) Es convergente y vale 1.

b) Es divergente.

c) Es convergente y vale 0.

A

El gradiente de la función $f(x, y) = e^x \sin(xy)$ en el punto $(0, \pi)$ es:

a) $(\pi, 0)$. b) $(0, \pi)$. c) $(0, 0)$.

A

Dada la sucesión a_n definida de forma recursiva por $\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_n = \dfrac{n+1}{3} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$, su orden de magnitud es:

a) $a_n \sim \dfrac{n!}{3^{n+1}}$ b) $a_n \sim \dfrac{(n+1)!}{3^n}$ c) $a_n \sim (n+1)!$

B

Sea a_n una sucesión monótona tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Se puede asegurar que:

a) todos los términos de a_n tienen el mismo signo.

b) a_n puede ser oscilante.

c) a_n sólo tiene términos positivos.

A

La serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-4)^n}{5^{n+1}}$:

a) Es divergente.

b) Es convergente y su suma es 1.

c) Es convergente y su suma es $\dfrac{1}{9}$.

C

Dada una serie convergente $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, con $a_n > 0$ si $n \geq n_0$, y siendo $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Se cumple que:

a) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$.

b) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n \neq \sum\limits_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$.

c) La serie $\sum\limits_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$ puede ser divergente.

B

La igualdad $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ si $x \in (-\infty, \infty)$ es el desarrollo en serie de potencias de la función:

a) $f(x) = \cos(x)$ b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ c) $f(x) = e^{-x^2}$

C

La igualdad $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ es cierta si y sólo si x pertenece:

a) Al campo de validez del desarrollo de f en serie de potencias centrada en x_0.

b) Al intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

c) Al dominio de definición de la función f.

A