Tres primeras letras del primer apellido: | | | |

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Prueba Global

Fecha: 16-01-2023. **Duración de esta prueba: 3 horas.**

A rellenar por los profesores

Test	A y S	Cues. 1	Cues. 2	Cues. 3	Cues. 4	Cues. 5	Cues. 6	Cues. 7	Nota

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Puede utilizarse una hoja en blanco para realizar cuentas. Solamente una.
- Si en algún ejercicio no hay suficiente espacio, se solicitará que se añada una hoja adicional al enunciado.
- Las notas de este examen estarán publicadas el martes 31 de enero; se comunicará el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta $= +1$, errónea $= -0.5$, en blanco $= 0$.

Indicar el valor de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+1)}$:

a) 0 b) $\dfrac{2}{3}$ c) 1

B

Indicar el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x}\, dx$ en términos de la función Gamma:

a) $\dfrac{\Gamma(3)}{8}$ b) $\dfrac{\Gamma(3)}{4}$ c) $\dfrac{\Gamma(2)}{2}$

A

La sucesión $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)(n^2+1)}{\sqrt{2n^6+n^4}}$:

a) Converge a cero.
b) Es divergente sin límite.
c) No es monótona ni convergente.

A

Dada la serie $\sum \sqrt[3]{n}$ y su suma parcial n-ésima $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{k}$. Se verifica que:

a) $S_n \sim \sqrt[3]{n}$
b) $S_n \sim \sqrt[3]{n^2}$
c) $S_n \sim \sqrt[3]{n^4}$

C

Si $\lim \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = 0$ entonces:

a) $a_n \in \Theta(b_n)$. b) $a_n \in \Omega(b_n)$. c) $a_n \in O(b_n)$.

C

Dada la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\text{sen}(n)}{\ln(n)\, n^3}$, se puede asegurar que la serie:

a) converge por el criterio de Leibniz pero no es absolutamente convergente.

b) converge porque es absolutamente convergente.

c) converge por el criterio de Leibniz y, además, es absolutamente convergente.

B

La curva de nivel de la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$ que pasa por el punto $(4,7)$ es:

a) $y = x^2 - 9$ b) $y = x^2 - 3$ c) $y = x - 3$

A

Indicar cuál es la expresión explícita de la sucesión definida de forma recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{2}{n-1} \cdot a_{n-1} \quad \text{si } n > 1 \end{cases}$$

a) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ b) $a_n = \dfrac{2^n}{(n-1)!}$ c) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

B

La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n x^n}{n!}$ tiene radio de convergencia:

a) $R = 0$ b) $R = \dfrac{1}{5}$ c) $R = \infty$

C

Sea f una función integrable en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$, entonces:

a) $\int_a^b x f(x)\,dx = \dfrac{b^2 - a^2}{4}$

b) $\int_a^b (x + f(x))\,dx = \dfrac{b^2 - a^2 + 1}{2}$

c) $\int_a^b (x + f(x))\,dx = \dfrac{(b-a)^2 + 1}{2}$

B

Análisis y síntesis (10%)

a) *(5 puntos)* Indica razonadamente qué relaciones de implicación hay entre los conceptos de sucesión monótona decreciente, sucesión acotada superiormente y sucesión acotada. Da contraejemplos para dos implicaciones que no se verifiquen.

b) *(5 puntos)* Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^p+1}$, analiza su convergencia en función de los valores de $p \in \mathbb{R}$. Justifica adecuadamente los resultados indicando los criterios utilizados para llegar a ellos.

Solución:

a) Consideramos una sucesión a_n definida para $n \geq 0$. Entre los conceptos mencionados son ciertas las siguientes implicaciones:

- Si a_n es monótona decreciente entonces a_n está acotada superiormente. De hecho, el primer elemento de la sucesión, a_0, es una cota superior ya que, al ser a_n decreciente, se verifica que $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$, es decir $a_n \leq a_0 \, \forall n \in \mathbb{N}$ (acotada superiormente).
- Si a_n está acotada entonces a_n está acotada superiormente, ya que la definición de acotada implica que la sucesión lo está superior e inferiormente.

El resto de implicaciones no son ciertas y damos un contrajemplo para cada caso:

- a_n está acotada superiormente $\nRightarrow$ a_n es monótona decreciente. Por ejemplo, $a_n = (-1)^n$, está acotada superiormente ($a_n \leq 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$) pero no es monótona (es oscilante).
- a_n está acotada $\nRightarrow$ a_n es monótona decreciente. Por ejemplo, si $a_n = (-1)^n$, está acotada ($-1 \leq a_n \leq 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$) pero no es monótona.
- a_n monótona decreciente $\nRightarrow$ a_n está acotada, pues puede no estarlo inferiormente. Por ejemplo, si $a_n = -n$, se verfica que es monótona decreciente pero no está acotada inferiormente ($\lim a_n = -\infty$) por lo que no está acotada.
- a_n acotada superiormente $\nRightarrow$ a_n está acotada, pues puede no estarlo inferiormente. Por ejemplo, si $a_n = -n$, se verfica que está acotada superiormente por 0 pero no está acotada inferiormente ($\lim a_n = -\infty$), por lo que no está acotada.

b) Es una serie de términos positivos, tal que su término general $\frac{n}{3n^p+1} \sim \frac{1}{n^{p-1}}$. Por tanto, por el criterio de comparación, su convergencia se puede determinar estudiando la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}$.

Sabemos que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}$ es convergente si $p-1 > 1$ y es divergente si $p-1 \leq 1$. Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^p+1}$:

- es convergente si $p > 2$.
- es divergente si $p \leq 2$.

Cuestión 1 (8 %)

Una empresa de catering gestiona la cafetería de una universidad. Sus ingresos anuales dependen del número de comidas (x) y desayunos (y) que sirve al año, los cuales vienen dados por la función $I(x,y) = 6x + 4y$, con x e y expresados en miles. Sabiendo que los costes de la cafetería están definidos por la función $C(x,y) = \sqrt{x^3} + 2y^2$, determina cuántas comidas y cuántos desayunos tiene que servir la empresa al año para maximizar su beneficio anual.

Solución: Si llamamos $\mathcal{B}(x,y)$ al beneficio anual de la cafetería en función del número de comidas y desayunos se tiene que

$$\mathcal{B}(x,y) = I(x,y) - C(x,y) = 6x + 4y - \sqrt{x^3} - 2y^2$$

Buscamos los posibles extremos locales en los puntos críticos de esta función: allí donde se anule o no exista el gradiente de $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}(x,y) &= 6 - \tfrac{3}{2}\sqrt{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 16 \\
\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y}(x,y) &= 4 - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1
\end{aligned}$$

Como puede observarse, $\nabla \mathcal{B}(x,y) = \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y}(x,y) \right)$ existe para todo (x,y) con $x, y > 0$ (que es donde tiene más sentido el problema), así que el único punto crítico es el punto $(16,1)$.

Para clasificar este punto se hallan las derivadas de orden dos y se estudia el hessiano.

$$\begin{aligned}
A = \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{3}{4\sqrt{x}} \qquad B = \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \\
C = \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial y^2}(x,y) &= -4
\end{aligned}$$

Por tanto, el hessiano en el punto $(16,1)$ es

$$|H(16,1)| = AC - B^2 = \left(-\frac{3}{4\sqrt{16}} \right) \cdot (-4) - 0 = \frac{3}{4} > 0$$

y como $A = \frac{-3}{16} < 0$, se tiene que $(16,1)$ es un máximo.

La empresa debe servir 16.000 comidas y 1000 desayunos anuales para maximizar su beneficio*.

(*) Hasta aquí lo que esperábamos que se hiciera en este examen. Sin embargo, para resolver bien y completamente este problema habría que darse cuenta de que se busca el máximo absoluto y por tanto no solo hay que localizar los máximos locales (ya lo tenemos: $(16,1)$) sino que hay que examinar la función en la frontera del dominio. En nuestro caso, el dominio de la función $\mathcal{B}$ es $D(\mathcal{B}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0\}$. En la frontera, $\mathcal{B}(0,y) = 4y - 2y^2 = 2y(2-y)$, su gráfica es una parábola con ramas hacia abajo y por tanto tiene un máximo local en el vértice de esta parábola: el punto $(0,1)$ (que es el punto medio de los dos puntos de corte de la parábola con el eje: $y = 0$ e $y = 2$).
Entonces, comparando el valor que toma la función $\mathcal{B}$ en estos dos candidatos a ser el máximo absoluto se tiene que: $\mathcal{B}(0,1) = 2 < \mathcal{B}(16,1) = 66$ y por tanto el máximo absoluto se alcanza en el punto $(16,1)$.

Cuestión 2 (6 %)

Obtén la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' - 3y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

a) Primero se resuelve la EDO mediante el método de variables separables:

$$y' - 3y = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = 1 + 3y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+3y}y' = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+3y}\,dy = \int dx$$

Integrando en cada miembro de la igualdad se tiene:

$$\frac{\ln(1+3y)}{3} = x + C$$

Y despejando y en esa igualdad:

$$1 + 3y = e^{3x+3C} \underbrace{=}_{e^{3C} = A} Ae^{3x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{Ae^{3x} - 1}{3}$$

Luego la solución general de la EDO es

$$y(x) = \frac{Ae^{3x} - 1}{3}$$

b) Para determinar el valor de A se utiliza el valor inicial $y(0) = 0$.

$$y(0) = \frac{Ae^{0} - 1}{3} = \frac{A-1}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 1$$

La solución del PVI es

$$\boxed{y(x) = \frac{e^{3x} - 1}{3}}$$

Cuestión 3 (14 %)

Se consideran las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 0 \\ x\,\mathrm{sen}(x) & \text{si } x>0 \end{cases} \quad \text{y} \quad F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

Se pide:

a) *(1 punto)* Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para analizar la continuidad y derivabilidad de $F(x)$ a partir de las propiedades de $f(x)$.

b) *(3 puntos)* Obtener los valores de $F(0)$ y $F(\pi)$.

c) *(3 puntos)* Estudiar la monotonía de $F(x)$ en el intervalo $[-1,\pi]$ y determinar los extremos absolutos de $F(x)$ en dicho intervalo.

d) *(3 puntos)* Hallar la expresión explícita de $F(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

a) La función f es continua en $(-\infty,0)$ y en $(0,\infty)$ porque es producto de funciones continuas en $\mathbb{R}$. En el punto $x=0$ se tiene que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{sen}(x)=0\cdot\mathrm{sen}(0)=f(0)$$

Luego f también es continua en 0 y por tanto es continua en $\mathbb{R}$. Por el teorema Fundamental del Cálculo, si f es continua en $\mathbb{R}$, F es derivable en $\mathbb{R}$, y en consecuencia, también es continua en $\mathbb{R}$.

b) $F(0)=\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{-1}^{0} t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

$F(\pi)=\displaystyle\int_{-1}^{\pi} f(t)\,dt=\int_{-1}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{\pi} f(t)\,dt=F(0)+\int_{0}^{\pi} t\,\mathrm{sen}(t)\,dt$

Hallamos una primitiva de $t\,\mathrm{sen}(t)$ integrando por partes tomando:

$$\begin{array}{ll} u=t & du=dt \\ dv=\mathrm{sen}(t)dt & v=-\cos(t) \end{array}$$

$$\int t\,\mathrm{sen}(t)\,dt=t\cdot(-\cos(t))-\int -\cos(t)\,dt=-t\cos(t)+\int\cos(t)\,dt=-t\cos(t)+\mathrm{sen}(t)$$

Aplicando de nuevo Barrow para hallar la integral definida:

$$\int_0^{\pi} t\,\mathrm{sen}(t)\,dt=\big[-t\cos(t)+\mathrm{sen}(t)\big]_0^{\pi}=-\pi\cos(\pi)+\mathrm{sen}(\pi)+0\cos(0)-\mathrm{sen}(0)=\pi$$

Así que finalmente:

$F(\pi)=F(0)+\pi=-\frac{1}{2}+\pi$

c) Primero localizamos los posibles extremos locales y luego compararemos el valor que toma F en esos puntos con el que toma en los extremos del intervalo.

Para buscar los extremos locales, usaremos la derivada de F. Por el TFC, $F'(x) = f(x)$ para todo x.

Para $x \in [-1, 0]$: $F'(x) = x \leq 0$, luego F decrece en $[-1, 0]$.

Para $x \in (0, \pi]$: $F'(x) = x \operatorname{sen}(x) \geq 0$, ya que $x > 0$ y $\operatorname{sen}(x) \geq 0$ en ese intervalo, luego F crece en $(0, \pi]$.

Como F es continua en 0 y pasa de ser decreciente a creciente, F tiene un mínimo local en $x = 0$ y no hay más extremos locales en el intervalo $[-1, \pi]$.

Ahora, comparando:

$$\left.\begin{array}{l} F(-1) = 0 \\ F(0) = -\frac{1}{2} \\ F(\pi) = \pi - \frac{1}{2} > 3'14 - 0'5 \; > \; 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(\pi) > F(-1) > F(0)$$

Luego F tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ y tiene un máximo absoluto en $x = \pi$.

d) Para $x \leq 0$: $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\, dt = \int_{-1}^{x} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

Para $x > 0$:
$$\begin{aligned} F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt &= \int_{-1}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{x} f(t)\, dt \\ &= F(0) + \int_{0}^{x} t \operatorname{sen}(t)\, dt \\ &= -\tfrac{1}{2} + \big[- t\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\big]_0^x \\ &= -\tfrac{1}{2} + (-x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + 0\cos(0) - \operatorname{sen}(0)) \\ &= -\tfrac{1}{2} - x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{2} - x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Cuestión 4 (14 %)

Dadas las siguientes 3 sucesiones:

$$a_n = \frac{2^{n+3} + \ln(6n^2+2)}{n^3} \qquad b_n = \frac{(n+5)!\ \ln(n^3+2n-5)}{(n^2+2)\ \ln(n)} \qquad c_n = n^3 + \frac{2^n}{(n-1)!}$$

Se pide responder a los siguientes apartados **justificando** los resultados obtenidos:

a) *(6 puntos)* Determinar su orden de magnitud.

SOLUCIÓN:

- Como $2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \sim 2^n$, $\ln(6n^2+2) \sim \ln(n)$ y, por jerarquía de infinitos, $\ln(n) \ll 2^n$, se tiene que $2^{n+3} \gg \ln(6n^2+2)$. Luego

$$a_n = \frac{2^{n+3} + \ln(6n^2+2)}{n^3} \sim \frac{2^{n+3}}{n^3} \sim \frac{2^n}{n^3}$$

- Usando de nuevo que $\ln(n^3+2n-5) \sim \ln(n)$ y que los polinomios de grado dos son del orden de n^2 se tiene que:

$$b_n = \frac{(n+5)!\ \ln(n^3+2n-5)}{(n^2+2)\ \ln(n)} \sim \frac{(n+5)!}{n^2+2} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{n^2+2} \sim \frac{n^2(n+3)!}{n^2} = (n+3)!$$

- $\lim \dfrac{2^n}{(n-1)!} = \lim \dfrac{2 \cdot 2^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{=\!=\!=}_{2^m \ll m!} 0$ y $\lim n^3 = \infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2^n}{(n-1)!} \ll n^3.$

  En consecuencia,

$$c_n = n^3 + \frac{2^n}{(n-1)!} \sim n^3$$

b) *(2 puntos)* Ordenar de menor a mayor orden de magnitud.

SOLUCIÓN:

- Obviamente $\dfrac{2^n}{n^3} \ll 2^n$ y por jerarquía de infinitos: $2^n \ll n!$ Además, $(n+3)! = (n+3)(n+2)(n+1)n!$, luego $n! \ll (n+3)!$ En definitiva: $\dfrac{2^n}{n^3} \ll (n+3)!$

- Como $\lim \dfrac{\frac{2^n}{n^3}}{n^3} = \lim \dfrac{2^n}{n^6} \underbrace{=}_{n^6 \ll 2^n} \infty$, se tiene que $n^3 \ll \dfrac{2^n}{n^3}$.

- Resumiendo, $$n^3 \ll \frac{2^n}{n^3} \ll (n+3)!$$

  Y por tanto: $$\boxed{c_n \ll a_n \ll b_n}$$

c) *(2 puntos)* Determinar para qué valores de p se verifica que las tres sucesiones están en $\Omega(n^p)$.

SOLUCIÓN: Es fácil ver que las tres sucesiones están en $\Omega(n^3)$, ya que

$$c_n \sim n^3 \quad \Rightarrow \quad c_n \in \Theta(n^3) \quad \Rightarrow \quad c_n \in \Omega(n^3) \quad \text{y} \quad n^3 \ll a_n, b_n \quad \Rightarrow a_n, b_n \in \Omega(n^3)$$

Además, como $n^p \ll n^3$ para todo $p < 3$, se tiene que $n^3 \in \Omega(n^p)$ y por la propiedad transitiva de Ω, las tres sucesiones están en $\Omega(n^p)$ para todo $\boxed{p \leq 3}$.
(Nótese que si $p > 3$ entonces $c_n \ll n^p$ y por tanto $c_n \notin \Omega(n^p)$)

Cuestión 5 (6 %)

Se quiere comparar el gasto de una gran ciudad en iluminación y en sistemas de climatización a partir del año 2000, que es el primero en que se tienen datos.

a) *(7 puntos)* Respecto a la iluminación, el gasto en electricidad ha sido el siguiente: el primer año se gastaron 3 millones de euros y después, cada año, el gasto fue un 10 por ciento más que el año anterior. Si $B(n)$ representa el total del gasto al cabo de n años, da una expresión explícita de $B(n)$.

b) *(3 puntos)* Respecto a los sistemas de climatización, el gasto total al cabo de n años es $C(n)$ y se sabe que verifica que $C(n) \sim \sqrt[3]{n^4}$. Suponiendo que las estimaciones que se tienen sobre estos dos gastos se mantengan a lo largo de mucho tiempo, analiza cuál de ellos va a suponer un desembolso mayor para dicha ciudad.

SOLUCIÓN:

a) Como el año 2000 es el primer año en que se tienen datos, se considera que es el año 0 y entonces se tiene que el gasto del año inicial es $B(0) = 3$.

A partir de este año, cada año el gasto es un 10 por ciento más que el año anterior, es decir, el gasto de cada año es el 110 por ciento del gasto del año anterior, de modo que, si $b(n)$ es el gasto del año n-ésimo, se tiene que $b(n) = 1'1 \cdot b_{n-1}$.

De aquí se deduce que $b(n) = 1'1^n \cdot b(0) = 3 \cdot 1'1^n$ y por tanto el gasto total al cabo de n años es

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 1'1^n$$

Esta sucesión $B(n)$ es la suma de una progresión geométrica de razón $1'1$ y se sabe que dicha suma es

$$B(n) = 3 \cdot \sum_{k=0}^{n} 1'1^n = 3 \cdot \frac{1 - 1'1^{n+1}}{1 - 1'1} = 3 \cdot \frac{1'1^{n+1} - 1}{0'1} = 30 \cdot (1'1^{n+1} - 1)$$

b) Para decidir cuál de los dos gastos será mayor a largo plazo, basta comparar los órdenes de magnitud de $B(n)$ y de $C(n)$.

Se tiene $B(n) = 30(1'1^{n+1} - 1) \sim 1'1^n$ y $C(n) \sim \sqrt[3]{n^4}$. Usando la jerarquía de infinitos, se sabe que $n^{4/3} \ll 1'1^n$, por lo tanto se puede concluir que el gasto en iluminación será mayor que el gasto en sistemas de climatización.

Cuestión 6 (14 %)

Estudia la convergencia de cada una de estas series detallando el proceso e indicando los criterios utilizados.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}\ln n + n}{n^3 - 2n + 5} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+1}$$

SOLUCIÓN:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}\ln n + n}{n^3 - 2n + 5}$ es una serie de términos positivos, cuyo término general es del orden de magnitud de $\frac{1}{n^2}$:

  NUMERADOR: $3^{-n}\ln n = \frac{\ln n}{3^n} \to 0$, por la jerarquía de infinitos, por lo que el numerador es del orden de n (sumando de mayor orden).

  DENOMINADOR: $n^3 - 2n + 5 \sim n^3$

  Quedando: $\frac{3^{-n}\ln n + n}{n^3 - 2n + 5} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

  Por el criterio de comparación, la serie dada tiene el mismo carácter que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y como ésta es una armónica convergente ($p = 2 > 1$), la serie dada es convergente.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}$ es una serie de términos positivos, y como en el término general aparece un factorial, empleamos el criterio del cociente (D'Alembert):

  $$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{3^{n+1}(n+2)}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n(n+1)}{n!}} = \lim \frac{3^n\,3\,(n+2)\,n!}{3^n(n+1)(n+1)n!} = 3\lim \frac{(n+2)}{(n+1)^2} = 0$$ (pues el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador).

  Por tanto, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ y, por el criterio del cociente, la serie es convergente.

- Como $\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} = (-1)^n$, la serie a estudiar es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

  Se trata de una serie alternada, cuyo término general $\frac{(-1)^n}{n+1}$ tiende a cero y en valor absoluto: $\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$ es claramente decreciente pues $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}$ para todo n. Luego la serie converge por el criterio de Leibniz.

Cuestión 7 (8 %)

Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} x^n$, se pide:

a) *(6 puntos)* Hallar los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que esta serie converge, es decir, su intervalo de convergencia IC.

b) Sabiendo que el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \ln(1+2x)$ es

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} x^n \quad \text{para todo } x \in IC$$

1. *(2 puntos)* Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden 3 centrado en $x_0 = 0$.

2. *(2 puntos)* Usar el polinomio de Taylor hallado en el apartado anterior para dar una aproximación de $f(\frac{1}{2})$.

SOLUCIÓN:

a) Esta serie es de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ siendo la sucesión de coeficientes $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}2^n}{n}$ y $x_0 = 0$. Por tanto, el intervalo de convergencia (IC) estará centrado en 0 y tendrá radio $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Como $\quad \displaystyle \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\right|} = \lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2,$

$R = \dfrac{1}{2}$ y el intervalo de convergencia está delimitado por los puntos $x_0 \pm R: \quad -\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1}{2}$.

Veamos qué pasa en los extremos de este intervalo:

- Para $x = -\frac{1}{2}$ la serie queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  que diverge porque es el opuesto de la serie armónica con $p = 1$. Luego $-\frac{1}{2} \notin IC$.

- Para $x = \frac{1}{2}$ la serie queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

  que converge por el criterio de Leibniz (alternada, $\frac{1}{n}$ decrece y tiene límite 0). Luego $\frac{1}{2} \in IC$.

En definitiva el intervalo de convergencia de esta serie de potencias es $\boxed{IC = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$

b) El polinomio de Taylor de orden 3 se obtiene truncando la serie de Taylor hasta tener un polinomio de grado menor o igual a 3, en este caso:

$$T_3(x) = \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} x^n = 2x - \frac{2^2}{2}x^2 + \frac{2^3}{3}x^3 = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$$

c) $f(\frac{1}{2}) \approx T_3(\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2} - 2(\frac{1}{2})^2 + \frac{8}{3}(\frac{1}{2})^3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 - 0'5 + 0'\hat{3} = 0'8\hat{3} \approx 0'833333.$
Luego el valor de $f(\frac{1}{2}) = \ln 2$ es aproximadamente $0'833333$.