Tres primeras letras del primer apellido: | | |

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: P. Global/Examen Final Extraordinario

Fecha: 01-07-2022 Duración de esta prueba: 3 horas.

A rellenar por los profesores

Test	Teoría	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Prob. 4	Prob. 5	Prob. 6	Prob. 7	Nota

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen estarán publicadas el 15 de julio y la revisión será el 19 de julio. Se confirmará la publicación de las notas, y el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta $= +1$, errónea $= -0.5$, en blanco $= 0$.

Dada una función $f(x)$ que verifica que $f'(c) = 0$ en un punto $x = c$ de su dominio, se puede asegurar que:

a) $x = c$ es un extremo relativo.

b) la función $f(x)$ puede no ser continua en $x = c$.

c) la función $f(x)$ tiene tangente horizontal en $x = c$.

El gradiente de la función $f(x, y) = e^x \sin(xy)$ en el punto $(0, \pi)$ es:

a) $(\pi, 0)$. b) $(0, \pi)$. c) $(0, 0)$.

Dada una función $f(x)$ integrable en el intervalo $[a, b]$, tal que $\int_a^b f(x)dx > 0$, se puede asegurar que:

a) $\int_a^b \big(f(x) + 1\big)\, dx > 1$.

b) $\int_a^b \big(f(x) + 1\big)\, dx > b - a$.

c) $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$.

La integral impropia $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$:

a) Es convergente y vale 1.

b) Es divergente.

c) Es convergente y vale 0.

Sea a_n una sucesión monótona tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Se puede asegurar que:

a) todos los términos de a_n tienen el mismo signo.

b) a_n puede ser oscilante.

c) a_n sólo tiene términos positivos.

Dada la sucesión a_n definida de forma recursiva por $\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_n = \dfrac{n+1}{3} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$, su orden de magnitud es:

a) $a_n \sim \dfrac{n!}{3^{n+1}}$ b) $a_n \sim \dfrac{(n+1)!}{3^n}$ c) $a_n \sim (n+1)!$

Dada una serie convergente $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, con $a_n > 0$ si $n \geq n_0$, y siendo $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Se cumple que:

a) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$.

b) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n \neq \sum\limits_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$.

c) La serie $\sum\limits_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$ puede ser divergente.

La serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-4)^n}{5^{n+1}}$:

a) Es divergente.

b) Es convergente y su suma es 1.

c) Es convergente y su suma es $\dfrac{1}{9}$.

La igualdad $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ es cierta si y sólo si x pertenece:

a) Al campo de validez del desarrollo de f en serie de potencias centrada en x_0.

b) Al intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

c) Al dominio de definición de la función f.

La igualdad $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ si $x \in (-\infty, \infty)$ es el desarrollo en serie de potencias de la función:

a) $f(x) = \cos(x)$ b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ c) $f(x) = e^{-x^2}$

Teoría (10%)

a) *(5 puntos)* Haz un esquema que recoja relaciones entre los conceptos de función continua, función derivable, función acotada y función creciente en un intervalo. Para alguna de las relaciones habrá que distinguir si el intervalo es abierto o cerrado.

b) *(5 puntos)* Escribe la definición de $\Gamma(p)$ para $p > 0$ y enunciar dos de sus propiedades.

Problema 1 (10 %)

Encontrar y clasificar los extremos locales y/o puntos de silla de la función

$$f(x,y) = 2x^4 - 3xy + 4y^2.$$

Problema 2 (6 %)

Se considera la ecuación diferencial $y' - x^4 y = 0$. Se pide:

a) *(5 puntos)* Obtener su solución general.

b) *(2 puntos)* Obtener la solución particular que verifica $y(0) = 2$.

c) *(3 puntos)* Verificar que la solución particular obtenida en el apartado anterior (o cualquier solución de la e. diferencial) es solución de la ecuación diferencial $y'' - (4x^3 + x^8)y = 0$

Problema 3 (12 %)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, se define $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

a) *(3 puntos)* Estudiar la derivabilidad de $F(x)$. Hallar $F'(x)$ donde exista.

b) *(2 puntos)* Estudiar el crecimiento de $F(x)$.

c) *(5 puntos)* Hallar $F(1)$ y la expresión explícita de $F(x)$.

(Continuación del problema 3)

Problema 4 (14 %)

Dadas las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{3^n(4n^3 + 2n)}{\log(n^6) + n}\,, \qquad b_n = \frac{(n+2)!}{n^3 + \cos(n)}\,, \qquad S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

se pide responder a los siguientes apartados **justificando los resultados obtenidos**:

a) *(6 puntos)* Hallar el orden de magnitud de las tres sucesiones.

b) *(2 puntos)* Ordenarlas según dicho orden.

c) *(2 puntos)* Justificar cuáles de ellas están en $O(3^n)$ y cuáles en $\Omega(3^n)$.

(Continuación del problema 4)

Problema 5 (8 %)

Un algoritmo emplea una instrucción para resolver un problema cuando hay un solo dato de entrada. Si el número de datos es $n \geq 2$, usa $n+2$ instrucciones para reducir el problema a un problema de $n-1$ datos y ejecuta sobre él el mismo algoritmo. Si a_n representa el número total de instrucciones para resolver un problema n datos de entrada con dicho algoritmo, se pide:

a) *(3 puntos)* Obtener la expresión recursiva de a_n.

b) *(5 puntos)* Resolver la ecuación en diferencias para hallar la expresión explícita de a_n.

c) *(2 puntos)* Otro algoritmo resuelve el mismo problema empleando $3 \cdot 2^{n-1} - 2$ instrucciones para resolver el problema con n datos. Justificar cuál de los dos algoritmos es más eficiente para resolver el problema para grandes cantidades de datos.

Problema 6 (10 %)

Estudiar la convergencia de cada una de estas tres series justificando adecuadamente los criterios utilizados para cada caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n-1)!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-3} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2+\ln n}$$

Problema 7 (10 %)

Se considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{3^n n}$

a) *(5 puntos)* Hallar el intervalo de convergencia I de la serie de potencias anterior.

b) Sea $S : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la función suma de la serie de potencias anterior definida sobre su intervalo de convergencia I.

1. *(3 puntos)* Hallar una función primitiva de $S(x)$, $T(x) = \displaystyle\int S(x)\,dx$, y su intervalo de convergencia.
2. *(2 puntos)* Sabiendo que $S(x) = \ln(1 + \frac{x}{3})$ para todo $x \in I$, hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de S centrado en $x_0 = 0$ y usarlo para aproximar el valor de $\ln(4/3)$.

Tres primeras letras del primer apellido: | | |

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: P. Global/Examen Final Extraordinario

Fecha: 01-07-2022 Duración de esta prueba: 3 horas.

A rellenar por los profesores

Test	Teoría	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Prob. 4	Prob. 5	Prob. 6	Prob. 7	Nota

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen estarán publicadas el 15 de julio y la revisión será el 19 de julio. Se confirmará la publicación de las notas, y el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta = +1, errónea = −0.5, en blanco = 0.

Dada una función $f(x)$ integrable en el intervalo $[a,b]$, tal que $\int_a^b f(x)dx > 0$, se puede asegurar que:

a) $\int_a^b (f(x)+1)\,dx > 1$.

b) $\int_a^b (f(x)+1)\,dx > b-a$.

c) $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Dada una función $f(x)$ que verifica que $f'(c) = 0$ en un punto $x = c$ de su dominio, se puede asegurar que:

a) $x = c$ es un extremo relativo.

b) la función $f(x)$ puede no ser continua en $x = c$.

c) la función $f(x)$ tiene tangente horizontal en $x = c$.

La integral impropia $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$:

a) Es convergente y vale 1.

b) Es divergente.

c) Es convergente y vale 0.

El gradiente de la función $f(x,y) = e^x \sin(xy)$ en el punto $(0,\pi)$ es:

a) $(\pi, 0)$. b) $(0,\pi)$. c) $(0,0)$.

Dada la sucesión a_n definida de forma recursiva por $\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_n = \dfrac{n+1}{3} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$, su orden de magnitud es:

a) $a_n \sim \dfrac{n!}{3^{n+1}}$ b) $a_n \sim \dfrac{(n+1)!}{3^n}$ c) $a_n \sim (n+1)!$

Sea a_n una sucesión monótona tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Se puede asegurar que:

a) todos los términos de a_n tienen el mismo signo.

b) a_n puede ser oscilante.

c) a_n sólo tiene términos positivos.

La serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-4)^n}{5^{n+1}}$:

a) Es divergente.

b) Es convergente y su suma es 1.

c) Es convergente y su suma es $\dfrac{1}{9}$.

Dada una serie convergente $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, con $a_n > 0$ si $n \geq n_0$, y siendo $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Se cumple que:

a) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$.

b) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n \neq \sum\limits_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$.

c) La serie $\sum\limits_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$ puede ser divergente.

La igualdad $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ si $x \in (-\infty, \infty)$ es el desarrollo en serie de potencias de la función:

a) $f(x) = \cos(x)$ b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ c) $f(x) = e^{-x^2}$

La igualdad $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ es cierta si y sólo si x pertenece:

a) Al campo de validez del desarrollo de f en serie de potencias centrada en x_0.

b) Al intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.

c) Al dominio de definición de la función f.