

Tres primeras letras del primer apellido: 

--	--	--

Apellidos y nombre: \_\_\_\_\_

## Análisis Matemático: Examen extraordinario

Fecha: 24-06-2024.

Duración de esta prueba: 3 horas.

A rellenar por los profesores

Test	A y S	Cues. 1	Cues. 2	Cues. 3	Cues. 4	Cues. 5	Cues. 6	Cues. 7	Nota

### Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Puede utilizarse **una** hoja en blanco para realizar cuentas.
- Si en algún ejercicio no hay suficiente espacio, se solicitará que se añada una hoja adicional al enunciado.
- Las notas de este examen estarán publicadas el 10 de julio; se comunicará el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

### Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.

Calificación: correcta = +1, errónea = -0.5, en blanco = 0.

El  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$  es

a)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b)  $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

c) 3

A

La integral impropia  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  converge si:

a)  $p = 1$

b)  $p > 1$

c)  $p < 1$

B

Si para todo  $n \geq 1$  se tiene que  $\frac{n^4}{(n^3+1)(3n+1)} \leq a_n \leq \frac{n^4+2}{n^2(3n^2+2)}$ , entonces

a)  $\lim a_n = 1$ ;

b)  $\lim a_n = \frac{1}{3}$ ;

c) No hay suficiente información para saber si existe  $\lim a_n$ .

B

El intervalo de convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  es:

a)  $(-1, 1)$

b)  $(-1, 1]$

c)  $[-1, 1)$

C

---

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones reales de variable real que cumplen respectivamente que  $\int_0^1 f(x) dx = 1$  y  $\int_0^1 g(x) dx = 0$ . Se cumple que:

- a)  $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = 0$ ;  
b)  $\int_0^1 (1 - f(x) - 2g(x)) dx = 0$ ;  
c)  $1 - \int_0^1 |f(x)| dx - 2 \int_0^1 |g(x)| dx = 0$ .

B

---

Sea  $a_n$  una sucesión monótona creciente. Se puede asegurar que

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ;  
b)  $a_n$  está acotada y existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ;  
c) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  entonces  $a_n \leq L$  para todo  $n$ .

C

---

Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  la suma parcial  $n$ -ésima de una serie divergente y se verifica que  $S_n \sim \sqrt{n}$ . Entonces la serie  $\sum a_n$  puede ser

- a)  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$                       b)  $\sum \sqrt{n}$                       c)  $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

A

---

La función  $y(x) = e^{3x}(x - 1)$  es solución del siguiente problema de valores iniciales:

- a)  $y' - 3y = e^{3x}$ ,  $y(0) = 1$ ;  
b)  $\frac{y'}{y} = \frac{3x - 2}{x - 1}$ ,  $y(0) = -1$ ;  
c)  $y' - 3y = 0$ ,  $y(0) = -1$ .

B

---

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(-3)^{2n}}$  verifica que:

- a) es divergente;  
b) es convergente y su suma es  $\frac{1}{2}$ ;  
c) es convergente y su suma es  $\frac{5}{4}$ .

C

---

Dada la función de dos variables  $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$ , selecciona la respuesta correcta:

- a) La curva de nivel  $f(x, y) = 0$  pasa por el punto  $(1, 0)$ ;  
b) La curva de nivel  $f(x, y) = 0$  pasa por el punto  $(1, 1)$ ;  
c) La curva de nivel  $f(x, y) = 0$  pasa por el punto  $(0, 1)$ .

A

---

## Análisis y síntesis (10%)

a) (2 puntos) Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series de términos positivos tales que  $a_n \in O(b_n)$ . Enuncia propiedades respecto de la convergencia/divergencia de cada una de dichas series que permitan asegurar la convergencia o divergencia de la otra.

b) (8 puntos) Sea  $b_n = \frac{n!}{(n+p)!}$  una sucesión donde el parámetro  $p$  es un número natural.

1. Analiza la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  en función de los valores de  $p \in \mathbb{N}$ .

2. Se considera  $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ . Da un valor de  $p$  de modo que  $a_n \in O(b_n)$  y otro de modo que  $b_n \in O(a_n)$ . Estudia si alguno de ellos permite concluir algo sobre la convergencia de la serie  $\sum a_n$ .

### SOLUCIÓN:

a) Si  $\sum b_n$  converge entonces  $\sum a_n$  converge. O lo que es lo mismo, si  $\sum a_n$  diverge entonces  $\sum b_n$  diverge.

b) Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}(n+p)! &= (n+p)(n+p-1)! \\ &= (n+p)(n+p-1)(n+p-2) \cdots (n+p-(p-1))(n+p-p)! \\ &= \underbrace{(n+p)(n+p-1)(n+p-2) \cdots (n+1)}_{p \text{ factores}} \cdot n! \sim n^p \cdot n!\end{aligned}$$

$$\text{la sucesión } b_n = \frac{1}{(n+p)(n+p-1)(n+p-2) \cdots (n+1)} \sim \frac{1}{n^p}$$

1. La serie de términos positivos  $\sum b_n$ , por el criterio de comparación, converge si y solo si  $\sum \frac{1}{n^p}$  converge. Como  $\sum \frac{1}{n^p}$  es una serie armónica, se sabe que converge si y solo si  $p > 1$ ; en este caso, como  $p$  es un número natural, debe verificar  $p \geq 2$ . En  $p = 0$  y  $p = 1$  la serie es divergente.

2. Si  $p = 1$ ,  $a_n = \frac{1}{n \ln(n)} \ll \frac{1}{n} \sim b_n$ , luego  $a_n \in O(b_n)$

Si  $p = 2$ , como  $\ln(n) \ll n$  entonces  $b_n \sim \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n \ln(n)} = a_n$  y por tanto  $b_n \in O(a_n)$ .

En ambos casos, estas relaciones asintóticas entre  $a_n$  y  $b_n$  no permiten concluir nada sobre la convergencia o divergencia de la serie  $\sum a_n$  porque en el caso  $p = 1$ ,  $a_n$  está mayorada por el término general de una serie divergente y en el caso  $p = 2$ ,  $a_n$  está minorada por el término general de una serie convergente. Es decir, no cae en ninguno de los supuestos del apartado a) que nos permite concluir el carácter de la serie  $\sum a_n$ .

## Cuestión 1 (8 %)

Un desarrollador de videojuegos independiente está trabajando en la creación de dos tipos de juegos: uno de estrategia y otro de aventuras. Los ingresos del desarrollador pueden medirse en términos del número de meses dedicados al desarrollo de cada tipo de videojuego, siendo  $x$  los meses de trabajo en el juego de estrategia e  $y$  los meses de trabajo en el de aventuras. De esta forma, los ingresos del desarrollador están dados por  $I(x, y) = 8 \ln(xy) - 6x - 4y$ , en miles de euros.

Sin embargo, el tiempo y los recursos del desarrollador son limitados: la función de gastos está dada por  $C(x, y) = y^2 - 5x - 4y$  en miles de euros, que incluye el coste de las herramientas de desarrollo, espacio en el servidor, publicidad y otros gastos generales.

Para poder continuar con su pasión y hacerla sostenible, el desarrollador necesita optimizar el número de meses de desarrollo dedicados a cada tipo de juego para maximizar su beneficio.

- a) (8 puntos) Calcula cuántos meses debe dedicar al desarrollo de cada tipo de videojuego para obtener un beneficio máximo.
- b) (2 puntos) Se han publicado unas becas para promover el emprendimiento en el sector de los videojuegos, dirigidas a desarrolladores consolidados. Uno de los requisitos es obtener beneficios de al menos 1000 euros. En las condiciones del apartado anterior, ¿podría el desarrollador optar a estas becas?

SOLUCIÓN:

- a) La función beneficio a considerar es:

$$B(x, y) = I(x, y) - C(x, y) = 8 \ln(xy) - 6x - y^2 + 5x$$

Buscamos los puntos críticos de esta función: aquellos que anulan el gradiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{8y}{xy} - 6 + 5 = \frac{8}{x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8 \\ \frac{\partial B}{\partial y} &= \frac{8x}{xy} - 2y = \frac{8}{y} - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 2\end{aligned}$$

Luego hay dos puntos críticos:  $(8, 2)$  y  $(8, -2)$ , de los cuales se puede descartar el segundo por el contexto del problema (número negativo de meses).

La matriz hessiana es:

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 B}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{y^2} - 2 \end{pmatrix}$$

El hessiano en el punto  $(8, 2)$  queda  $AC - B^2 = \left(-\frac{8}{8^2}\right) \left(-\frac{8}{2^2} - 2\right) = \frac{1}{2} > 0$ , luego es un extremo relativo y como  $A = -\frac{1}{8} < 0$ , este punto crítico es un máximo.

Luego para obtener un beneficio máximo se debe dedicar 8 meses al juego de estrategia y 2 al de aventuras.

- b) El beneficio máximo obtenido será de

$$B(8, 2) = 8 \ln(16) - 48 - 4 + 40 = 8 \ln(16) - 12 = 16 \ln(4) - 12 \text{ miles de euros.}$$

Como  $e < 4$  y  $\ln(x)$  es creciente,  $\ln(4) > \ln(e) = 1$  y por tanto  $B(8, 2) > 16 - 12 = 4$  mil euros. Luego sí podrá optar a estas becas.

## Cuestión 2 (6 %)

Estudia la convergencia de la integral impropia y, en caso de convergencia, da su valor numérico:

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

SOLUCIÓN: Podemos relacionar esta integral impropia con la función Gamma de Euler mediante el cambio de variable  $u = t^2$ .

Para efectuarlo, tenemos en cuenta que:  $dt = \frac{1}{2t} du = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$ , y los cambios en los límites de integración:  $t = 0 \rightarrow u = 0^2 = 0$ ,  $t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$ . Luego

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} u e^{-u} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du \underset{(Def)}{=} \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) \underset{(1)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \underset{(2)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

donde se han utilizado la definición y las siguientes propiedades de la función Gamma:

$$(Def) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$$

$$(1) \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$(2) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

### Cuestión 3 (14 %)

$$\text{Sean } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ (x+1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt.$$

- a) (2 puntos) Estudia la continuidad de  $f$ .
- b) (3 puntos) Usa el Teorema Fundamental del Cálculo para determinar dónde existe  $F'(x)$  y obtenerla. Halla, si existe,  $F'(1)$  y  $F'(0)$ .
- c) (5 puntos) Determina la expresión explícita de  $F$ .

#### SOLUCIÓN:

- a) En  $(-\infty, 0)$   $f$  es continua porque es cociente y composición de funciones continuas: en ese intervalo el numerador está definido y el denominador no se anula. En  $(0, \infty)$  la función es polinómica y por tanto continua. Y en  $x = 0$  la función  $f$  tiene una discontinuidad de salto finito porque

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = 0 = f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^2 = 1$$

Luego  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

- b) Según el TFC,  $F$  es derivable en todo punto donde  $f$  es continua siendo  $F'(x) = f(x)$ . En concreto, será derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , y en particular  $F'(1) = f(1) = (1+1)^2 = 4$ .

El teorema no permite decir nada sobre  $F'(0)$ , sin embargo, se puede asegurar que no existe porque ya se ha visto que

$$F'(0^-) = f(0^-) = 0 \neq 1 = f(0^+) = F'(0^+)$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \bullet \text{ Si } x \leq 0: \quad F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt = - \int_{-1}^x \ln(1-t) \cdot \frac{-1}{1-t} dt \\ &= - \left. \frac{(\ln(1-t))^2}{2} \right|_{-1}^x = \frac{(\ln(2))^2 - (\ln(1-x))^2}{2} \\ \bullet \text{ Si } x > 0: \quad F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = F(0) + \int_0^x (t+1)^2 dt \\ &= \frac{(\ln(2))^2}{2} + \left. \frac{(t+1)^3}{3} \right|_0^x = \frac{(\ln(2))^2}{2} + \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(\ln(2))^2 - (\ln(1-x))^2}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{(\ln(2))^2}{2} + \frac{(x+1)^3 - 1}{3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

## Cuestión 4 (14 %)

a) (6 puntos) Determina el orden de magnitud de las siguientes sucesiones:

$$a_n = 3^n \operatorname{sen}(n) + 5^n \quad b_n = \frac{3^{-n} + n!}{(n+2)!} \quad c_n = \frac{\log(n^n)}{n^3 + 1}$$

b) (2 puntos) Ordena las siguientes sucesiones según su orden de magnitud:

$$x_n = \frac{3^{2n}}{4^n} \quad y_n = \frac{3^n}{4^n} \quad z_n = \frac{3^n}{n!}$$

c) (2 puntos) Determina qué sucesiones del apartado b) son  $\mathcal{O}(2^n)$ ,  $\Omega(2^n)$  y/o  $\Theta(2^n)$ .

**Justifica** cada una de las afirmaciones realizadas en los apartados anteriores.

SOLUCIÓN:

a)  $a_n \sim 5^n$  porque  $3^n \operatorname{sen}(n) \ll 5^n$  ya que  $\lim \frac{3^n \operatorname{sen}(n)}{5^n} = \lim \operatorname{sen}(n) \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$  (acotada por convergente a cero).

$$b_n \sim \frac{1}{n^2} \text{ porque}$$

- $3^{-n} = \frac{1}{3^n} \ll n! \Rightarrow 3^{-n} + n! \sim n! \text{ y}$
- $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

$$c_n \sim \frac{\log(n)}{n^2} \text{ porque } c_n = \frac{n \log(n)}{n^3 + 1} \sim \frac{n \log(n)}{n^3} = \frac{\log(n)}{n^2}.$$

b) De la jerarquía de infinitos se tiene que:  $3^n \ll 4^n \ll 9^n \ll n!$  ya que  $3 < 4 < 9$ .

De  $3^n \ll 9^n$  se concluye que  $\frac{3^n}{4^n} \ll \frac{3^{2n}}{4^n}$  y de  $4^n \ll n!$  se concluye que  $\frac{3^n}{n!} \ll \frac{3^n}{4^n}$ .

Con lo que la ordenación queda:

$$\frac{3^n}{n!} \ll \frac{3^n}{4^n} \ll \frac{3^{2n}}{4^n} \quad (z_n \ll y_n \ll x_n)$$

c) Si encajamos en la ordenación anterior la sucesión  $2^n$  se tiene que

$$\frac{3^n}{n!} \ll \frac{3^n}{4^n} \ll 2^n \ll \frac{3^{2n}}{4^n}$$

La razón es que las dos primeras sucesiones ( $z_n$  e  $y_n$ ) tienen límite 0 y por tanto son mucho menores que  $2^n$ , que tiende a infinito, y que  $\frac{3^{2n}}{4^n} = \left(\frac{9}{4}\right)^n$  es una progresión geométrica con razón  $9/4$  mayor que 2.

De la ordenación  $z_n \ll y_n \ll 2^n \ll x_n$  se deduce que

- $z_n, y_n \in \mathcal{O}(2^n)$  y  $z_n, y_n \notin \Omega(2^n)$ ,
- $x_n \in \Omega(2^n)$  y  $x_n \notin \mathcal{O}(2^n)$ .
- En consecuencia  $x_n, y_n, z_n \notin \Theta(2^n)$ .

## Cuestión 5 (6 %)

Se deja caer una pelota desde una altura de 6 metros y empieza a botar de manera que cada vez que sube alcanza una altura que es  $5/7$  de la altura alcanzada en el bote anterior y sigue así indefinidamente. ¿Cuál es la distancia vertical total recorrida por la pelota?

Se tiene otra pelota de un material diferente tal que cada vez que bota alcanza una altura que es  $7/11$  de la altura alcanzada en el bote anterior. ¿Desde qué altura debe dejarse caer para que la distancia vertical total recorrida por esta segunda pelota se exactamente la misma que con la pelota anterior?

SOLUCIÓN: La distancia vertical total recorrida será la suma

$$h_0 + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \dots$$

donde  $h_0$  es la altura inicial desde la que se deja caer la pelota y  $h_i$  con  $i \geq 1$  es la altura alcanzada en el bote  $i$ -ésimo que se recorre dos veces: una al subir y otra al bajar.

En el primer caso, la expresión recursiva para la altura será:  $h_i = \frac{5}{7}h_{i-1}$ , con  $h_0 = 6$ , una progresión geométrica de razón  $\frac{5}{7}$  cuya expresión explícita es  $h_i = 6 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^i$ .

Luego la suma de distancias verticales recorridas para este caso es:

$$6+2\left(6\left(\frac{5}{7}\right)+6\left(\frac{5}{7}\right)^2+6\left(\frac{5}{7}\right)^3+6\left(\frac{5}{7}\right)^4+\dots\right)=6+12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n \stackrel{(*)}{=} 6+12\cdot\frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}}=6+12\cdot\frac{5}{2}$$

En total, 36 metros.

En el segundo caso la altura alcanzada en cada bote será  $h_i = \frac{7}{11}h_{i-1}$ , con una altura inicial  $h_0 = a$  que habrá que determinar para que la distancia vertical total recorrida por esta segunda pelota sea también de 36 metros. Del mismo modo que antes, se tiene que  $h_i = a \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^i$ . Imponiendo que

$$\begin{aligned} a+2\left(a\left(\frac{7}{11}\right)+a\left(\frac{7}{11}\right)^2+a\left(\frac{7}{11}\right)^3+a\left(\frac{7}{11}\right)^4+\dots\right) &= a+2a\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{11}\right)^n \stackrel{(*)}{=} a+2a\cdot\frac{\frac{7}{11}}{1-\frac{7}{11}} = \\ &= a+2a\cdot\frac{7}{4} = a\cdot\frac{9}{2} = 36 \end{aligned}$$

se tiene que  $a = \frac{36}{9/2} = 8$  metros.

(\*) Nótese que en ambos casos, las series geométricas que aparecen son convergentes porque sus respectivas razones:  $5/7$  y  $7/11$  son menores que 1.

## Cuestión 6 (14 %)

Estudia la convergencia de cada una de estas series detallando el proceso e indicando los criterios utilizados.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \cdot (n^6 + 10)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2 + 4} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} \ln(n) + n^3}{\sqrt{n^9 + n^2 + 1}}$$

SOLUCIÓN:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \cdot (n^6 + 10)}$  diverge porque el término general no tiende a cero:

$$\lim a_n = \lim \frac{3^n}{2^n \cdot (n^6 + 10)} = \lim \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^6 + 10} \stackrel{J.I.}{=} \infty \neq 0$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2 + 4}$  converge porque converge absolutamente:

La serie  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge porque es armónica con  $p = 2 > 1$  y se tiene que para todo  $n$

$$0 \leq \left| \frac{\sin(n)}{n^2 + 4} \right| \leq \frac{1}{n^2 + 4} \leq \frac{1}{n^2}$$

luego por el criterio de comparación,  $\sum \left| \frac{\sin(n)}{n^2 + 4} \right|$  converge.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} \ln(n) + n^3}{\sqrt{n^9 + n^2 + 1}}$  converge porque es una serie de términos positivos cuyo término general

$$c_n = \frac{\frac{\ln(n)}{2^n} + n^3}{\sqrt{n^9 + n^2 + 1}} \stackrel{(1)}{\sim} \frac{n^3}{\sqrt{n^9 + n^2 + 1}} \sim \frac{n^3}{\sqrt{n^9}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

y como  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  converge (armónica con  $p = 3/2 > 1$ ), por el criterio de comparación, la serie  $\sum c_n$  converge.

$$(1) \lim \frac{\ln(n)}{2^n} \stackrel{J.I.}{=} 0 \text{ y } \lim n^3 = \infty \Rightarrow \frac{\ln(n)}{2^n} \ll n^3$$

## Cuestión 7 (8 %)

a) Sea  $f(x) = e^{-2x}$

1. (3 puntos) Halla el polinomio de Taylor de  $f$  de orden 3 centrado en  $x_0 = 0$  y aproxima con ese polinomio el valor de  $e^{-1}$ .
2. (3 puntos) Halla la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $x_0 = 0$ .

b) (4 puntos) Halla los valores  $x \in \mathbb{R}$  para los que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n} x^n$  converge, es decir, su intervalo de convergencia IC.

SOLUCIÓN:

a) 1. El polinomio de Taylor de orden 3 centrado en 0 es:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-2x} &\longrightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = -2e^{-2x} &\longrightarrow f'(0) = -2 \\ f''(x) = (-2)^2 e^{-2x} &\longrightarrow f''(0) = (-2)^2 = 4 \\ f'''(x) = (-2)^3 e^{-2x} &\longrightarrow f'''(0) = (-2)^3 = -8 \end{aligned}$$

De modo que queda:

$$T_3(x) = 1 - 2x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{-8}{3!}x^3 = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3$$

$$\text{El valor } e^{-1} = f\left(\frac{1}{2}\right) \approx T_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.333333$$

2. Teniendo en cuenta que la derivada  $n$ -ésima de  $f$  es  $f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}$ , la serie de Taylor es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$$

b) El intervalo de convergencia de esta serie centrada en 0 es un intervalo también centrado en 0 y radio de convergencia:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n 5^n}{n} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{5} = \frac{1}{5}$$

En los extremos del intervalo:

- $x = -\frac{1}{5}$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n} \frac{(-1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergente (armónica con  $p = 1$ ).
- $x = \frac{1}{5}$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  convergente (por el criterio de Leibniz).

Luego el intervalo de convergencia es  $IC = (-1/5, 1/5]$ .