Tres primeras letras del primer apellido: | | |

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Prueba Global

Fecha: 8-01-2024. **Duración de esta prueba: 3 horas.**

A rellenar por los profesores

Test	A y S	Cues. 1	Cues. 2	Cues. 3	Cues. 4	Cues. 5	Cues. 6	Cues. 7	Nota

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Puede utilizarse una hoja en blanco para realizar cuentas. Solamente una.
- Si en algún ejercicio no hay suficiente espacio, se solicitará que se añada una hoja adicional al enunciado.
- Las notas de este examen estarán publicadas el martes 31 de enero; se comunicará el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta = +1, errónea = −0.5, en blanco = 0.

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos de la que se sabe que $a_n \gg \dfrac{1}{n^2}$. Con esta información:

a) no se puede garantizar nada sobre la convergencia de la serie $\sum a_n$.

b) el criterio de comparación asegura que la serie $\sum a_n$ es convergente porque $\sum \dfrac{1}{n^2}$ es convergente.

c) el criterio de comparación asegura que la serie $\sum a_n$ es divergente.

A

¿Cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

a) $(n+1)! \sim n!$ b) $3^{n+1} \sim 3^n$ c) $e^{2n} \sim e^n$

B

La sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ es del orden de:

a) $\sqrt{n^3}$ b) $\sqrt{n}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

A

El límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)-x}{\operatorname{sen}(x)}$ es

a) 0 b) 1 c) ∞

A

La solución del siguiente PVI: $y'(x^2+2) = xy, \;\; y(0) = \sqrt{2}$ es

a) $y(x) = \sqrt{x^2+2}$

b) $y(x) = \sqrt{x+2}$

c) $y(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2}$

A

Dada la función $f(x, y) = 2x^2 + xy$, la curva de nivel que corresponde al punto $(1, 0)$ es:

a) $y = 2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

b) $y = \dfrac{1}{x} - 2x$

c) $y = 2\left(\dfrac{1}{x} - x\right)$

C

Indica cuál de las siguientes series es divergente:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^e}{n^4}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e \cdot n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^e}$

C

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$, tal que $\int_a^b f = 1$, entonces siempre se cumple que:

a) $\int_a^b |f(x)|\, dx = 1$

b) $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| = 1$

c) $\int_a^b \big(f(x) - 1\big)\, dx = 0$

B

El polinomio de Taylor de la función $\operatorname{sen}(x)$ centrado en $x_0 = 0$ y de orden 4 es:

a) $x + \dfrac{x^3}{3!}$

b) $x - \dfrac{x^3}{3!}$

c) $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

B

El valor de la integral impropia $\int_0^\infty \sqrt{t^3} e^{-8t}\, dt$ es:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{8^3}} \cdot \Gamma(3/2)$

b) $\dfrac{1}{8} \cdot \Gamma(3/2)$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{8^5}} \cdot \Gamma(5/2)$

C

Análisis y síntesis (8%)

a) *(2 puntos)* Define cuándo dos sucesiones, a_n y b_n verifican que $a_n \ll b_n$ y también cuándo verifican que $a_n \in O(b_n)$.

b) *(2 puntos)* Si $a_n \ll b_n$, ¿qué implicaciones supone este hecho sobre la relación "ser o grande de" $(\in O(\cdot))$ entre estas dos sucesiones?

c) *(3 puntos)* Da una sucesión concreta c_n que satisfaga la siguiente relación:

$$\ln(n) \ll c_n \ll \sqrt{n}$$

y justifica tu respuesta.

d) *(3 puntos)* Determina razonadamente para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ se verifican simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\ln(n) \in O(n^p) \quad \text{y} \quad n^p \in O(\sqrt{n})$$

SOLUCIÓN:

a) $a_n \ll b_n$ si y solo si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

$a_n \in O(b_n)$ si y solo si existen $M > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que se verifica que $|a_n| \leq M|b_n|$ para todo $n \geq n_0$.

b) $a_n \ll b_n$ implica que $a_n \in O(b_n)$ y que $b_n \notin O(a_n)$.

c) Por ejemplo, $c_n = \sqrt[3]{n}$ ya que por jerarquía de infinitos $\ln(n) \ll n^p$ para todo $p > 0$ y $n^p \ll n^q$ para todo $p < q$. Como $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\ln(n) \ll n^{\frac{1}{3}} \ll n^{\frac{1}{2}}$$

d) Como $\ln(n) \ll n^p \ll n^{\frac{1}{2}}$ si y solo si $0 < p < \frac{1}{2}$, aplicando el resultado del apartado **b)**, se tiene que $\ln(n) \in O(n^p)$ y $n^p \in O(\sqrt{n})$.

Luego las dos condiciones se verifican para todo $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Además, si $p = \frac{1}{2}$ también se tiene que $n^{\frac{1}{2}} \in O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$. Luego también es válido para este valor.

Resumiendo, las dos condiciones se verifican $\boxed{\text{para todo } p \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right]}$ y fuera de ese intervalo no se verifica alguna de ellas. Esto se deriva de la segunda implicación del apartado **b)**:

- si $p \leq 0$ entonces $n^p \ll \ln(n)$, y en consecuencia $\ln(n) \notin O(n^p)$.
- si $p > \frac{1}{2}$ entonces $n^{\frac{1}{2}} \ll n^p$, y en consecuencia $n^p \notin O(n^{\frac{1}{2}})$.

Cuestión 1 (8 %)

En España, la cantidad de energía renovable generada cada año (en TWh) viene dada por la función $G(x,y) = 3x + \frac{4}{3}y$, donde x son las unidades de potencia eólica instalada e y, las unidades de potencia solar instalada. Por otra parte, la cantidad de energía renovable consumida en España cada año viene dada por la función $C(x,y) = x^2 + y^{\frac{4}{3}} + \frac{7}{12}$. El exceso sobrante entre la energía generada y la consumida se puede exportar obteniendo un cierto beneficio económico.

a) *(8 puntos)* Si se quiere maximizar dicho exceso sobrante de energía, ¿cuántas unidades de potencia eólica y solar habría que instalar?

b) *(2 puntos)* Si el precio de venta de la energía sobrante es de 50 €/TWh, ¿cuál será el ingreso anual para el resultado obtenido en el apartado anterior?

SOLUCIÓN:

a) La cantidad de energía excedente es aquella generada y no consumida. Viene dada por la función:

$$E(x,y) = G(x,y) - C(x,y) = 3x + \frac{4}{3}y - \left(x^2 + y^{\frac{4}{3}} + \frac{7}{12}\right);$$

$$E(x,y) = 3x - x^2 + \frac{4}{3}y - y^{\frac{4}{3}} - \frac{7}{12}$$

Buscamos los posibles extremos locales en los puntos críticos de esta función: allí donde se anule o no exista el gradiente de $E(x,y)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x}(x,y) &= 3 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \\ \frac{\partial E}{\partial y}(x,y) &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3}y^{\frac{1}{3}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 \end{aligned}$$

Como puede observarse, $\nabla E(x,y) = \left(\frac{\partial E}{\partial x}(x,y), \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)\right)$ existe para todo (x,y) con $x, y > 0$ (que es donde tiene más sentido el problema), así que el único punto crítico es el punto $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

Para clasificar este punto se hallan las derivadas de orden dos y se estudia el hessiano.

$$\begin{aligned} A = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x,y) &= -2 \qquad B = \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \\ C = \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{4}{9}y^{\frac{-2}{3}} \end{aligned}$$

Por tanto, el hessiano en el punto $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ es

$$\left|H\left(\frac{3}{2}, 1\right)\right| = AC - B^2 = (-2)\left(-\frac{4}{9}\right) - 0 = \frac{8}{9} > 0$$

y como $A = -2 < 0$, se tiene que $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ es un máximo.

Por lo tanto, las unidades de potencia eólica y solar que habría que instalar para maximizar el exceso sobrante de energía sería de $\frac{3}{2}$ y 1 respectivamente.

b) El ingreso anual por la venta de energía sobrante vendrá dado por la cantidad de energía sobrante, producida por las unidades de potencia eólica y solar obtenidas en el apartado anterior, y multiplicada por el precio de venta de esa energía:

Cantidad de energía sobrante anual: $E\left(\frac{3}{2},1\right) = 3\cdot\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\cdot 1 - 1^{\frac{4}{3}} - \frac{7}{12} = 2\,TWh$

El ingreso anual será: $2\,(TWh)\cdot 50\,(€/\text{TWh}) = 100\,€$

Cuestión 2 (6 %)

Estudia la convergencia de la siguiente integral impropia:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx$$

Solución:

En primer lugar, se obtiene una primitiva utilizando el método de integración por partes:

$u = \ln x \quad \to \quad du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = x^{-3}\,dx \quad \to \quad v = -\frac{x^{-2}}{2}$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\ln(x)\,dx \underset{u\cdot v - \int v\cdot du}{=\!=\!=} -\frac{x^{-2}}{2}\ln x - \int -\frac{x^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right] =$$

Una vez que se tiene la primitiva, se estudia la convergencia de la integral aplicando la regla de Barrow y tomando límite:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right]_1^b =$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\ln b}{b^2} + \frac{1}{2b^2} - \left(\frac{\ln 1}{1^2} + \frac{1}{2\cdot 1^2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left[0 + 0 - \left(0 + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}$$

Por tanto la integral impropia es convergente y su valor es $\frac{1}{4}$.

Cuestión 3 (14 %)

Dada la función $\quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ xe^{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}\quad$ se define $\quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$

Justifica adecuadamente las respuestas a las siguientes cuestiones:

a) *(1 punto)* Estudia la continuidad de $f(x)$.

b) *(3 puntos)* Estudia el crecimiento de la función $F(x)$ basándote en el Teorema Fundamental del Cálculo.

c) *(3 puntos)* Halla $F(1)$ y $F(2)$.

d) *(3 puntos)* Halla la expresión explícita de $F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución:

a) Si $x < 1$ entonces $f(x) = -1$, que es continua en todo $\mathbb{R}$.

Si $x > 1$ entonces $f(x) = xe^{x^2}$, que también es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser producto y composición de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Si $x = 1$ hay que estudiar los límites laterales de $f(x)$ en ese punto:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} xe^{x^2} = 1e^{1^2} = e$$

.

Puesto que los límites laterales no coinciden en $x = 1$, la función $f(x)$ será continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Conociendo el signo de $F'(x)$ sabemos el crecimiento de $F(x)$. Según el Teorema Fundamental del Cálculo, si la función f es continua en un punto x, entonces F es derivable en ese punto y $F'(x) = f(x)$. Se tiene pues, que:

$$F'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ xe^{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}. \text{ Se observa que: } \quad F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{si } x < 1 \\ > 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Así pues, F será decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$.

c) $F(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 -1\,dt = -t\Big]_0^1 = (-1) - (-0) = -1.$

$$F(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 -1\,dt + \int_1^2 te^{t^2}\,dt = -1 + \int_1^2 te^{t^2}\,dt.$$

La integral $\displaystyle\int te^{t^2}\,dt$ es inmediata (o puede resolverse por cambio de variable $u = t^2$) resultando:

$$\int_1^2 te^{t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{t^2}\right]_1^2 = \frac{e}{2}\left(e^3 - 1\right).$$

Así pues, $F(2) = -1 + \dfrac{e}{2}\left(e^3 - 1\right)$

d) Para $x \leq 1 \to F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x -1\,dt = -t\Big]_0^x = (-x) - (-0) = -x$.

Para $x > 1 \to F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 -1\,dt + \int_1^x te^{t^2}\,dt = -1 + \left[\frac{1}{2}e^{t^2}\right]_1^x = -1 + \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - e\right)$

Así pues, la expresión explícita de $F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ será:

$$F(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{2}\left(e^{x^2} - e\right) - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Cuestión 4 (14 %)

a) *(6 puntos)* Determina razonadamente el orden de magnitud de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{(-3)^n \log_3(3^n)}{3^{2n}} \qquad b_n = \frac{n^n + \cos(n)}{\sqrt{n^3} - \sqrt{n^4+1}} \qquad c_n = \frac{\dfrac{(n+1)!}{3^n+n}}{\dfrac{(n-1)!}{3^{-n}+n}}$$

b) *(2 puntos)* Ordena razonadamente las siguientes sucesiones según su orden de magnitud:

$$x_n = \frac{n^2}{e^n} \qquad y_n = \frac{e^n}{n^2} \qquad z_n = \log(n)e^{-n}$$

c) *(2 puntos)* Halla el límite de la sucesión

$$d_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+3}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

y determina qué sucesiones del apartado **b)** son $\Omega(d_n)$.

SOLUCIÓN:

a) $a_n = \dfrac{(-3)^n \cdot \log_3(3^n)}{3^{2n}} = \dfrac{(-1)^n \cdot 3^n \cdot n}{3^{2n}} = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{3^n} \sim \dfrac{n}{3^n}$

$$b_n = \frac{n^n + \cos(n)}{\sqrt{n^3} - \sqrt{n^4+1}} \underset{(1)}{\sim} \frac{n^n}{\sqrt{n^3} - \sqrt{n^4+1}} \underset{(2)}{\sim} \frac{n^n}{n^2} = n^{n-2}$$

(1) $\cos(n) \ll n^n$ porque $\lim \dfrac{\cos(n)}{n^n} = 0$ ya que es producto de una sucesión acotada ($\cos(n)$) y una convergente a cero ($1/n^n$). Por tanto $\cos(n) + n^n \sim n^n$.

(2) $-\sqrt{n^4+1} \sim \sqrt{n^4+1} \sim n^2 \gg n^{\frac{3}{2}}$ luego $\sqrt{n^3} - \sqrt{n^4+1} \sim n^2$.

$$c_n = \frac{(n+1)! \cdot (3^{-n}+n)}{(n-1)! \cdot (3^n+n)} = \frac{(n+1)\cdot n \cdot (n-1)! \cdot (3^{-n}+n)}{(n-1)! \cdot (3^n+n)} \sim \frac{n^2 \cdot (3^{-n}+n)}{3^n+n} \underset{(3)}{\sim} \frac{n^3}{3^n}$$

(3) $\dfrac{1}{3^n} \ll n$ luego $3^{-n} + n \sim n$. De igual forma $n \ll 3^n$ implica que $3^n + n \sim 3^n$.

b) Por jerarquía de infinitos se tiene que $\log(n) \ll n^2$. Luego

$$\frac{\log(n)}{e^n} \ll \frac{n^2}{e^n}$$

Así que $z_n \ll x_n$.

Por otro lado, tanto x_n como z_n tienden a 0 ($n^2 \ll e^n$ y $\log(n) \ll e^n$ por jerarquía de infinitos), mientras que $\lim y_n = \infty$. Luego finalmente la ordenación queda así:

$$z_n \ll x_n \ll y_n$$

c) El término d_n es una suma de n sumandos, de los cuales, el mayor es $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ porque a igual numerador, el mayor cociente es el que tiene denominador menor; asimismo el menor de los sumandos es el que tiene denominador mayor: $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$.

Luego si se sustituyen todos los sumandos por el mayor se obtiene una sucesión mayor que d_n y si todos se sustituyen por el menor, se obtiene una menor que d_n:

$$n \cdot \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq d_n \leq n \cdot \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \qquad \text{para todo } n.$$

Como los límites

$$\lim n \cdot \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} = \lim \sqrt{\frac{n^4}{n^4+n}} = 1 \quad \text{y} \quad \lim n \cdot \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} = \lim \sqrt{\frac{n^4}{n^4+1}} = 1$$

coinciden, por la regla del sándwich se concluye que $\lim d_n = 1$.

Como d_n converge a un número no nulo, $d_n \sim 1$, y quedaría que:

$$z_n \ll x_n \ll d_n \ll y_n$$

En consecuencia, la sucesión minorada por d_n únicamente es y_n, luego $y_n \in \Omega(d_n)$ y $x_n, z_n \notin \Omega(d_n)$.

Cuestión 5 (6 %)

Una región rica en bosques de pinares y encinas ha hecho un estudio sobre la gestión de estos recursos y ha observado lo siguiente: cada año la cantidad de madera que se recoge en la tala y limpieza de bosques es el 110% de lo que se recogía el año anterior y la cantidad de madera nueva que se genera cada año con la repoblación es el 80% de la que se generaba el año anterior.

Si en el año actual se recogen 3 toneladas de madera y se plantan árboles por el equivalente a 5 toneladas de madera, analiza rigurosamente las siguientes cuestiones:

a) *(4 puntos)* Da una expresión que represente el volumen total de la madera recogida al cabo de n años y su orden de magnitud.

b) *(4 puntos)* Da una expresión que represente el volumen total de la madera generada al cabo de n años y su orden de magnitud.

c) *(2 puntos)* Analiza el futuro de los bosques de esa región si la tendencia observada hasta el año actual se mantiene indefinidamente.

Indicación: Se recuerda que $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{(n+1)n}{2}$ y $\sum\limits_{k=0}^{n} r^k = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

SOLUCIÓN:

a) Se denomina a_n a la cantidad de madera recogida en el año n-ésimo y el año actual se etiqueta con $n=0$, de modo que la sucesión a_n se puede definir de forma recursiva por

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ 1'1 \cdot a_{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

y de forma explícita por $a_n = 3 \cdot 1'1^n$. Se trata de una progresión geométrica de razón $r = 1'1$.

El volumen de madera recogida al cabo de n años es la suma de lo recogido desde el año inicial hasta el año n. Si este volumen se representa por $R(n)$, se tiene que:

$$R(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 3\cdot(1'1)^k = 3\cdot\sum_{k=0}^{n}(1'1)^k = 3\cdot\frac{1-1'1^{n+1}}{1-1'1} = 3\cdot\frac{1-1'1^{n+1}}{-0'1} = 30\cdot(1'1^{n+1}-1)$$

Se verifica que $R(n) \sim 1'1^n$ ya que $\lim \dfrac{R(n)}{1'1^n} = 30\cdot 1'1 \neq 0$.

b) Análogamente, si se denomina b_n a la cantidad de madera generada en el año n-ésimo y el año actual se etiqueta con $n=0$, también es una progresión geométrica esta vez de razón $r = 0'8$ y su forma explícita es $b_n = 5\cdot 0'8^n$.

Como antes, el volumen de madera generada al cabo de n años es la suma de lo generado desde el año inicial hasta el año n. Si este volumen se representa por $G(n)$, se tiene que:

$$G(n) = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} 5\cdot 0'8^k = \frac{5-5\cdot(0'8)^{n+1}}{1-0'8} = \frac{5-5\cdot(0'8)^{n+1}}{0'2} = 25 - 25\cdot(0'8)^{n+1}$$

Como esta sucesión tiene límite $25 \neq 0$, se verifica que $G(n) \sim 1$.

c) Si la tendencia se mantiene, como la cantidad de madera generada es una expresión que tiene límite finito y la recogida tiende a infinito, en algún momento el bosque se extinguirá y no será posible seguir explotándolo.

Cuestión 6 (14 %)

Estudia la convergencia de cada una de estas series detallando el proceso e indicando los criterios utilizados.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{4^n}\pi^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n!}\right)}{(4n-3)(4n-1)}$$

SOLUCIÓN:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ es una serie de términos positivos convergente ya que $\displaystyle\lim \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1$ y por el criterio de la raíz se concluye su convergencia.

  (También puede aplicarse el criterio de comparación, por ejemplo con $\sum \frac{1}{n^2}$, o el criterio integral con la función $f(x) = xe^{-x}$)

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{4^n}\pi^n$ es una serie de términos con signo arbitrario que converge absolutamente por el criterio de comparación:

$$\left|\frac{\cos(n)}{4^n}\pi^n\right| \leq \frac{\pi^n}{4^n} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \qquad \text{para todo } n$$

  y $\displaystyle\sum \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ converge porque es geométrica de razón $r = \dfrac{\pi}{4}$, con $|r| < 1$.

  Luego $\displaystyle\sum \left|\frac{\cos(n)}{4^n}\pi^n\right|$ converge y por tanto la serie original también.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n!}\right)}{(4n-3)(4n-1)}$ es una serie de términos positivos cuyo término general verifica:

$$c_n = \frac{n\left(1+\frac{1}{n!}\right)}{(4n-3)(4n-1)} \sim \frac{n \cdot 1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

  Como la serie armónica con $p = 1$ diverge, por el criterio de comparación, la serie $\sum c_n$ también diverge.

Cuestión 7 (10 %)

Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n$, se pide lo siguiente:

a) *(6 puntos)* Halla los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que esta serie converge, es decir, su intervalo de convergencia IC.

b) Sabiendo que el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \dfrac{4}{(2-x)^2}$ es

$$\frac{4}{(2-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n \quad \text{para todo } x \in IC$$

1. *(2 puntos)* Halla el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden 3 centrado en $x_0 = 0$.
2. *(0.5 puntos)* Halla el valor del polinomio de Taylor hallado anteriormente para $x = 1$.
3. *(1.5 puntos)* ¿Qué valor de $f(x)$ se está aproximando con el polinomio de Taylor anterior cuando $x = 1$, y con qué error? ¿Mejoraría la aproximación de $f(1)$ si se usara un polinomio de Taylor de grado mayor, por qué?

Solución:

a) La serie de potencias está centrada en $x_0 = 0$ y su sucesión de coeficientes es $a_n = \dfrac{n+1}{2^n}$.

Por tanto, el intervalo de convergencia (IC) tendrá centro 0 y radio $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Como $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{2^n}} = \lim \dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{2} = \dfrac{1}{2}$, $R = 2$ y el intervalo de convergencia está delimitado por los puntos: -2 y 2.

Veamos qué pasa en los extremos de este intervalo:

- Para $x = -2$ la serie queda: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n$

  que diverge porque el término general no tiene límite cero ya que no existe el límite.
- Para $x = 2$ la serie queda: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)$

  que diverge porque de nuevo el término general no tiene límite cero: $\lim(n+1) = \infty$.

En definitiva, el intervalo de convergencia de esta serie de potencias es $\boxed{IC = (-2, 2)}$.

b) El polinomio de Taylor de orden 3 se obtiene truncando la serie de Taylor hasta tener un polinomio de grado menor o igual a 3, en este caso:

$$T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{n+1}{2^n} x^n = 1 + \frac{2}{2} x + \frac{3}{2^2} x^2 + \frac{4}{2^3} x^3 = 1 + x + \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{2} x^3$$

c) $T_3(1) = 1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 3'25$.

d) El polinomio de Taylor en $x = 1$ aproxima a la función f en el mismo punto, luego se está aproximando $f(1) = \dfrac{4}{2-1} = 4$. El error cometido en esta aproximación es la diferencia entre ambos valores: $|f(1) - T_3(1)| = 0'75$.

La aproximación sí mejoraría al aumentar el orden del polinomio de Taylor porque 1 está en el intervalo $(-2, 2)$ que es el campo de validez del desarrollo en serie de potencias de la función según nos dicen en el apartado **b)**.