Tres primeras letras del primer apellido: | | | |

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Examen Parcial 2 (Temas 3, 4 y 5)

Fecha: 16-01-2023. **Duración de esta prueba: 120 minutos.**

A rellenar por los profesores

Test	A y S	Cuest. 1	Cuest. 2	Cuest. 3	Cuest. 4	Cuest. 5	Nota Total

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Puede utilizarse una hoja en blanco para realizar cuentas. Solamente una.
- Si en algún ejercicio no hay suficiente espacio, se solicitará que se añada una hoja adicional al enunciado.
- Las notas de este examen estarán publicadas el martes 31 de enero; se comunicará el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta $= +1$, errónea $= -0.5$, en blanco $= 0$.

La sucesión $a_n = 2^{n+3} + (n-1)!$ tiene el mismo orden de magnitud que:

a) $n!$ b) $(n-1)!$ c) 2^n

B

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

a) es divergente.

b) es convergente y su suma vale $\dfrac{3}{2}$.

c) es convergente y su suma vale 1.

C

La sucesión $a_n = \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ verifica que está acotada y por tanto:

a) $a_n \in \Omega(1)$. b) $a_n \in O(1)$. c) $a_n \sim 1$.

B

Se considera la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a-2)^n$. Se puede asegurar que:

a) la serie converge solo cuando $a = 2$.

b) si $a > 2$ la serie converge.

c) si $a < 1$ la serie diverge.

C

El polinomio de Taylor de la función $\cos(x)$, centrado en $x_0 = 0$ y de orden 3, es:

a) $1 - \dfrac{x^2}{2}$ b) $x - \dfrac{x^3}{3!}$ c) $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!}$

A

Sea $\sum a_n$ una serie y S_n su suma parcial n-ésima. Se puede asegurar que la serie es convergente si:

a) $\lim a_n = L \in \mathbb{R} - \{0\}$.

b) $\lim S_n = L \in \mathbb{R} - \{0\}$.

c) $\lim a_n = 0$.

B

Indica la afirmación correcta:

a) Si $\lim \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = 0$ entonces $a_n \ll b_n$.

b) Si $\lim \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = 30$ entonces $a_n \gg b_n$.

c) Si $\lim \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = \infty$ entonces $b_n \gg a_n$.

A

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de las que se sabe que $\sum a_n$ es convergente. Se puede asegurar que:

a) si $\sum(a_n + b_n)$ es convergente, entonces $\sum b_n$ es convergente.

b) aunque $\sum(a_n + b_n)$ sea convergente, $\sum b_n$ puede ser divergente.

c) si $\sum b_n$ es divergente, no se puede saber nada sobre $\sum(a_n + b_n)$.

A

La serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}$ tiene radio de convergencia:

a) $R = 0$ b) $R = \dfrac{1}{5}$ c) $R = \infty$

C

Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{\ln(n)\, n^3}$, se puede asegurar que la serie:

a) converge por el criterio de Leibniz pero no es absolutamente convergente.

b) converge porque es absolutamente convergente.

c) converge por el criterio de Leibniz y, además, es absolutamente convergente.

B

Análisis y síntesis (10%)

Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^p+1}$,

a) *(6 puntos)* Analiza su convergencia en función de los valores de $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$.

b) *(4 puntos)* Determina el orden de magnitud de la sucesión de sus sumas parciales cuando es divergente.

Justifica adecuadamente los resultados indicando los criterios utilizados para llegar a ellos.

SOLUCIÓN: Es una serie de términos positivos, tal que su término general $\dfrac{n}{3n^p+1} \sim \dfrac{1}{n^{p-1}}$. Por tanto, por el criterio de comparación, su convergencia y orden de magnitud se pueden determinar estudiando la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}$.

a) Sabemos que la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}$ es convergente si $p-1>1$ y es divergente si $p-1 \leq 1$. Por tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^p+1}$:

- es convergente si $p > 2$.
- es divergente si $1 < p \leq 2$ (ya que nos piden estudiar los casos con $p > 1$).

b) Tenemos que estudiar el orden de magnitud de la sucesión de sus sumas parciales cuando es divergente, es decir, cuando $1 < p \leq 2$. Para esos valores de p se tiene que $\dfrac{1}{n^{p-1}}$ es decreciente (pues el exponente de n es positivo), por lo que el criterio integral asegura que el orden de magnitud de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p-1}}$ coincide con el de $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^{p-1}}\,dx$. Distinguiremos dos casos:

- Si $p = 2$, se tiene que $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln(n)$.
- Si $1 < p < 2$, se tiene que

$$\int_1^n \frac{1}{x^{p-1}}\,dx = \int_1^n x^{1-p}\,dx = \left[\frac{x^{2-p}}{2-p}\right]_1^n = \frac{1}{2-p}\left(n^{2-p}-1\right) \sim n^{2-p}.$$

Por tanto, como se ha comentado al principio, el criterio de comparación nos asegura que la sucesión de sumas parciales $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3k^p+1}$ verifica que:

- $S_n \sim \ln(n)$ si $p = 2$.
- $S_n \sim n^{2-p}$ si $1 < p < 2$.

Cuestión 1 (20 %)

Dadas las siguientes 3 sucesiones:

$$a_n = \frac{2^{n+3} + \ln(6n^2+2)}{n^3} \qquad b_n = \frac{(n+5)!\ \ln(n^3+2n-5)}{(n^2+2)\ \ln(n)} \qquad c_n = n^3 + \frac{2^n}{(n-1)!}$$

Se pide responder a los siguientes apartados **justificando** los resultados obtenidos:

a) *(6 puntos)* Determinar su orden de magnitud.

SOLUCIÓN:

- Como $2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 \sim 2^n$, $\ln(6n^2+2) \sim \ln(n)$ y, por jerarquía de infinitos, $\ln(n) \ll 2^n$, se tiene que $2^{n+3} \gg \ln(6n^2+2)$. Luego

$$a_n = \frac{2^{n+3} + \ln(6n^2+2)}{n^3} \sim \frac{2^{n+3}}{n^3} \sim \frac{2^n}{n^3}$$

- Usando de nuevo que $\ln(n^3+2n-5) \sim \ln(n)$ y que los polinomios de grado dos son del orden de n^2 se tiene:

$$b_n = \frac{(n+5)!\ \ln(n^3+2n-5)}{(n^2+2)\ \ln(n)} \sim \frac{(n+5)!}{n^2+2} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{n^2+2} \sim \frac{n^2(n+3)!}{n^2} = (n+3)!$$

- $\lim \dfrac{2^n}{(n-1)!} = \lim \dfrac{2 \cdot 2^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{=\!=\!=}_{2^m \ll m!} 0$ y $\lim n^3 = \infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2^n}{(n-1)!} \ll n^3.$

  En consecuencia,

$$c_n = n^3 + \frac{2^n}{(n-1)!} \sim n^3$$

b) *(2 puntos)* Ordenar de menor a mayor orden de magnitud.

SOLUCIÓN:

- Obviamente $\dfrac{2^n}{n^3} \ll 2^n$ y por jerarquía de infinitos: $2^n \ll n!$ Además, $(n+3)! = (n+3)(n+2)(n+1)n!$, luego $n! \ll (n+3)!$ En definitiva: $\dfrac{2^n}{n^3} \ll (n+3)!$

- Como $\lim \dfrac{\frac{2^n}{n^3}}{n^3} = \lim \dfrac{2^n}{n^6} \underbrace{=}_{n^6 \ll 2^n} \infty$, se tiene que $n^3 \ll \dfrac{2^n}{n^3}$.

- Resumiendo, $$n^3 \ll \frac{2^n}{n^3} \ll (n+3)!$$

  Y por tanto: $$\boxed{c_n \ll a_n \ll b_n}$$

c) *(2 puntos)* Determinar para qué valores de p se verifica que las tres sucesiones están en $\Omega(n^p)$.

SOLUCIÓN: Es fácil ver que las tres sucesiones están en $\Omega(n^3)$, ya que

$$c_n \sim n^3 \quad \Rightarrow \quad c_n \in \Theta(n^3) \quad \Rightarrow \quad c_n \in \Omega(n^3) \quad \text{y} \quad n^3 \ll a_n, b_n \quad \Rightarrow \quad a_n, b_n \in \Omega(n^3)$$

Además, como $n^p \ll n^3$ para todo $p < 3$, se tiene que $n^3 \in \Omega(n^p)$ y por la propiedad transitiva de Ω, las tres sucesiones están en $\Omega(n^p)$ para todo $\boxed{p \leq 3}$.
(Nótese que si $p > 3$ entonces $c_n \ll n^p$ y por tanto $c_n \notin \Omega(n^p)$)

Cuestión 2 (8 %)

Halla la expresión explícita de la siguiente sucesión definida de forma recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{2}{n-1} \cdot a_{n-1} \quad \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Solución: Dos opciones para resolver esta cuestión:

$\boxed{\text{Primera}}$ Por tanteo:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= \frac{2}{1} \cdot 2 \\
a_3 &= \frac{2}{2} \cdot a_2 = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot 2 \\
a_4 &= \frac{2}{3} \cdot a_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot 2 = \frac{2^4}{3!} \\
a_5 &= \frac{2}{4} \cdot a_4 = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot 2 = \frac{2^5}{4!} \\
&\dots \\
a_n &= \frac{2}{n-1} \cdot a_{n-1} = \frac{2}{n-1} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot 2 = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \cdot 2 = \frac{2^n}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Segunda}}$ Aplicando la fórmula para las ecuaciones en diferencias del tipo

$$a_n = c(n) \cdot a_{n-1}$$

que es $a_n = a_{n_0} \prod\limits_{k=n_0+1}^{n} c(k)$ y que en este caso queda:

$$a_n = a_1 \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{2}{k-1} = a_1 \cdot \frac{\prod\limits_{k=2}^{n} 2}{\prod\limits_{k=2}^{n} (k-1)} = a_1 \cdot \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = 2 \cdot \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{2^n}{(n-1)!}$$

Cuestión 3 (10 %)

Se quiere comparar el gasto de una gran ciudad en iluminación y en sistemas de climatización a partir del año 2000, que es el primero en que se tienen datos.

a) *(4 puntos)* Respecto a la iluminación, el gasto en electricidad ha sido el siguiente: el primer año se gastaron 3 millones de euros y después, cada año, el gasto fue un 10 por ciento más que el año anterior. Si $B(n)$ representa el total del gasto al cabo de n años, da una expresión explícita de $B(n)$ y su orden de magnitud.

b) *(4 puntos)* Respecto a los sistemas de climatización, se sabe que el gasto anual ha sido aproximadamente $c(n) = 5 + \sqrt[3]{n}$ millones de euros donde n es el año n-ésimo contado a partir del 2000. Si $C(n)$ representa el gasto total al cabo de n años, halla su orden de magnitud.

c) *(2 puntos)* Suponiendo que las estimaciones que se tienen sobre estos dos gastos se mantengan a lo largo de mucho tiempo, analiza cuál de ellos va a suponer un desembolso mayor para dicha ciudad.

SOLUCIÓN:

a) Como el año 2000 es el primer año en que se tienen datos, se considera que es el año 0 y entonces se tiene que el gasto del año inicial es $B(0) = 3$.

A partir de este año, cada año el gasto es un 10 por ciento más que el año anterior, es decir, el gasto de cada año es el 110 por ciento del gasto del año anterior, de modo que, si $b(n)$ es el gasto del año n-ésimo, se tiene que $b(n) = 1'1 \cdot b_{n-1}$.

De aquí se deduce que $b(n) = (1'1)^n \cdot b(0) = 3 \cdot (1'1)^n$ y por tanto el gasto total al cabo de n años es

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} 3 \cdot (1'1)^n$$

Esta sucesión $B(n)$ es la suma de una progresión geométrica de razón $1'1$ y se sabe que dicha suma es

$$B(n) = 3 \cdot \sum_{k=0}^{n} (1'1)^n = 3 \cdot \frac{1 - (1'1)^{n+1}}{1 - 1'1} = 3 \cdot \frac{(1'1)^{n+1} - 1}{0'1} = 30 \cdot ((1'1)^{n+1} - 1)$$

y su orden de magnitud es $B(n) \sim (1'1)^n$ ya que $(1'1)^n \gg 1$.

b) Razonando como en el apartado anterior, se tiene que $C(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} (5 + \sqrt[3]{k})$, es decir es una suma parcial de una serie cuyo término general es $c(k) \geq 0$ y $c(k) \sim \sqrt[3]{k}$.

Como consecuencia del criterio integral, se sabe que para la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{1/3}$, sus sumas parciales verifican que $S_n \sim n^{1/3+1} = n^{4/3}$, por lo tanto, el criterio de comparación permite asegurar que $C(n) \sim n^{4/3}$.

c) Para decidir cual de los dos gastos será mayor a largo plazo, basta comparar los órdenes de magnitud de $B(n)$ y de $C(n)$

Se vio en el apartado anterior que $B(n) \sim (1'1)^n$, y se tiene que $C(n) \sim n^{4/3}$. Usando la jerarquía de infinitos se sabe que $n^{4/3} \ll (1'1)^n$, por lo tanto se puede concluir que el gasto en iluminación será mayor que el gasto en sistemas de climatización.

Cuestión 4 (20 %)

Estudia la convergencia de cada una de estas series detallando el proceso e indicando los criterios utilizados.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}\ln n + n}{n^3 - 2n + 5} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+1}$$

SOLUCIÓN:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}\ln n + n}{n^3 - 2n + 5}$ es una serie de términos positivos, cuyo término general es del orden de magnitud de $\dfrac{1}{n^2}$:

  NUMERADOR: $3^{-n}\ln n = \dfrac{\ln n}{3^n} \to 0$, por la jerarquía de infinitos, por lo que el numerador es del orden de n (sumando de mayor orden).

  DENOMINADOR: $n^3 - 2n + 5 \sim n^3$

  Quedando: $\dfrac{3^{-n}\ln n + n}{n^3 - 2n + 5} \sim \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$

  Por el criterio de comparación, la serie dada tiene el mismo carácter que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y como ésta es una armónica convergente $(p = 2 > 1)$, la serie dada es convergente.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}$ es una serie de términos positivos, y como en el término general aparece un factorial, empleamos el criterio del cociente (D'Alembert):

  $\displaystyle\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{3^{n+1}(n+2)}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n(n+1)}{n!}} = \lim \frac{3^n\,3\,(n+2)\,n!}{3^n(n+1)(n+1)n!} = 3\lim \frac{(n+2)}{(n+1)^2} = 0$ (pues el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador).

  Por tanto, $\displaystyle\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ y, por el criterio del cociente, la serie es convergente.

- Como $\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} = (-1)^n$, la serie a estudiar es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

  Se trata de una serie alternada, cuyo término general $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ tiende a cero y en valor absoluto: $\left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1}$ es claramente decreciente pues $\dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{n+2}$ para todo n. Luego, la serie converge por el criterio de Leibniz.

Cuestión 5 (12 %)

Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} x^n$, se pide:

a) *(6 puntos)* Hallar los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que esta serie converge, es decir, su intervalo de convergencia IC.

b) Sabiendo que el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \ln(1+2x)$ es

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} x^n \quad \text{para todo } x \in IC$$

1. *(2 puntos)* Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden 3 centrado en $x_0 = 0$.

2. *(2 puntos)* Usar el polinomio de Taylor hallado en el apartado anterior para dar una aproximación de $f(\frac{1}{2})$.

SOLUCIÓN:

a) Esta serie es de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ siendo la sucesión de coeficientes $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}2^n}{n}$ y $x_0 = 0$. Por tanto, el intervalo de convergencia (IC) estará centrado en 0 y tendrá radio $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Como $\quad \displaystyle\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\right|} = \lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2,$

$R = \dfrac{1}{2}$ y el intervalo de convergencia está delimitado por los puntos $x_0 \pm R$: $\quad -\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1}{2}$.
Veamos qué pasa en los extremos de este intervalo:

- Para $x = -\frac{1}{2}$ la serie queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  que diverge porque es el opuesto de la serie armónica con $p = 1$. Luego $-\frac{1}{2} \notin IC$.

- Para $x = \frac{1}{2}$ la serie queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

  que converge por el criterio de Leibniz (alternada, $\frac{1}{n}$ decrece y tiene límite 0). Luego $\frac{1}{2} \in IC$.

En definitiva, el intervalo de convergencia de esta serie de potencias es $\boxed{IC = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$

b) El polinomio de Taylor de orden 3 se obtiene truncando la serie de Taylor hasta tener un polinomio de grado menor o igual a 3, en este caso:

$$T_3(x) = \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} x^n = 2x - \frac{2^2}{2}x^2 + \frac{2^3}{3}x^3 = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$$

c) $f(\frac{1}{2}) \approx T_3(\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2} - 2(\frac{1}{2})^2 + \frac{8}{3}(\frac{1}{2})^3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 - 0'5 + 0'\hat{3} = 0'8\hat{3} \approx 0'833333.$
Luego el valor de $f(\frac{1}{2}) = \ln 2$ es aproximadamente $0'833333$.