

Tres primeras letras del primer apellido:

Apellidos y nombre:

## Análisis Matemático: Examen Parcial 1 (Temas 1, 2 y 3)

Fecha: 13-11-2023 Duración de esta prueba: 120 minutos.

A llenar por los profesores

Test	Análisis y Síntesis	Cuestión 1	Cuestión 2	Cuestión 3	Cuestión 4	Cuestión 5	Nota Total

### Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen se publicarán antes del miércoles 30 de noviembre; se confirmará la fecha, así como lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

### Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.

Calificación: correcta = +1, errónea = -0.5, en blanco = 0.

El valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - \sqrt{x^4 + x})$  es

- a)  $\infty$   
b) 8  
c) 0

**A**

¿Cuál de las siguientes sucesiones es divergente?

- a)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-n}$   
b)  $-\left(\frac{1}{5}\right)^n$   
c)  $\left(\frac{1}{5}\right)^n$

**A**

Sea  $f(x)$  una función impar ( $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$ ), integrable en  $\mathbb{R}$  y  $\int_0^1 f(x)dx = 1$ . Con estas condiciones debe cumplirse que:

- a)  $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2$   
b)  $\int_{-1}^1 |f(x)|dx = 0$   
c)  $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$

**C**

La integral impropia  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x} dx$

- a) Converge a cero.  
b) Converge a 1.  
c) Diverge.

**C**

Una empresa alimentaria ha lanzado dos nuevos artículos. El beneficio obtenido es una función  $B(x, y)$  donde  $x$  e  $y$  representan los kilos de los artículos A y B producidos respectivamente. Si se sabe que el gradiente de la función cuando se han producido 1000 kilos de A y 300 kilos de B es el vector  $(-5, 4)$ , en ese instante, ¿interesa aumentar la producción de A o de B para mejorar el beneficio?

- a) De A.
- b) De B.
- c) Es indiferente.

**B**

---

La función  $y(x) = 2e^{3x}x$  es solución del siguiente problema de valores iniciales:

- a)  $xy' - 3y = 2e^{3x}$ ,  $y(0) = 3$ .
- b)  $xy' = (3x + 1)y$ ,  $y(0) = 0$ .
- c)  $xy' - 3y = 0$ ,  $y(0) = 0$ .

**B**

---

Si  $\lim a_n = 3$  entonces

- a)  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $a_n < \pi$  a partir de un término  $n_0$ .
- c)  $a_n < e$  a partir de un término  $n_0$ .

**B**

---

La integral impropia  $\int_0^\infty t^5 e^{-t} dt$  es

- a)  $\Gamma(5)$  y vale 5!
- b)  $\Gamma(6)$  y vale 5!
- c)  $\Gamma(5)$  y vale 4!

**B**

---

La función cuyas curvas de nivel son rectas es

- a)  $f(x, y) = (x + y)^2$
- b)  $f(x, y) = x^2 + 2y$
- c)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

**A**

---

Toda sucesión monótona decreciente:

- a) Está acotada.
- b) Está acotada superiormente y diverge a  $-\infty$ .
- c) Está acotada sólo si converge.

**C**

## Análisis y síntesis (15%)

Se considera la función  $f(x, y) = p \cdot x^2 + y^3 - 4xy$  donde el parámetro  $p \in \mathbb{R}$ .

a) (4 puntos) Obtén sus puntos críticos.

b) (6 puntos) Clasifica los puntos críticos en función del valor del parámetro  $p$ .

SOLUCIÓN:

a) Dado que la función es polinómica en las dos variables, es diferenciable en todo punto y los únicos puntos críticos son aquellos que anulan su gradiente:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2px - 4y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 4x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{px}{2} \\ 3y^2 - 4x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{px}{2} \\ 3 \cdot \left(\frac{px}{2}\right)^2 - 4x = \frac{3p^2x^2 - 16x}{4} = 0 \end{array} \right\}$$

La ecuación  $3p^2x^2 - 16x = 0$  tiene las soluciones  $x = 0$  y  $x = \frac{16}{3p^2}$ , esta última solo tiene sentido cuando  $p \neq 0$ . Por tanto, sustituyendo cada uno de estos dos valores en  $y = \frac{px}{2}$  se obtiene que las soluciones del sistema son:  $(0, \frac{p \cdot 0}{2}) = (0, 0)$  y  $\left(\frac{16}{3p^2}, \frac{p \cdot 16}{3 \cdot p^2 \cdot 2}\right) = \left(\frac{16}{3p^2}, \frac{8}{3p}\right)$  cuando  $p \neq 0$ .

Luego los puntos críticos son:  $(0, 0)$  y  $\left(\frac{16}{3p^2}, \frac{8}{3p}\right)$  cuando  $p \neq 0$ .

b) Para clasificar los puntos críticos se utiliza criterio basado en el hessiano:

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2p \\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4 \\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \end{array} \right\} \Rightarrow H(x, y) = \begin{pmatrix} 2p & -4 \\ -4 & 6y \end{pmatrix}$$

•  $|H(0, 0)| = \left| \begin{pmatrix} 2p & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot p \cdot 0 - (-4)^2 = -16 < 0 \Rightarrow (0, 0)$  es un punto de silla. (Independientemente del valor de  $p$ ).

• Si  $p \neq 0$ ,  $\left| H\left(\frac{16}{3p^2}, \frac{8}{3p}\right) \right| = \left| \begin{pmatrix} 2p & -4 \\ -4 & 6 \cdot \frac{8}{3p} \end{pmatrix} \right| = 2p \cdot 6 \cdot \frac{8}{3p} - (-4)^2 = 32 - 16 = 16 > 0$ , por tanto puede ser máximo o mínimo local.

Si  $A = 2p > 0$ , es decir, si  $p > 0$ , se tiene que el punto  $\left(\frac{16}{3p^2}, \frac{8}{3p}\right)$  es un mínimo local, si  $A = 2p < 0$ , esto es si  $p < 0$ , se tiene un máximo local.

Resumiendo, si  $p = 0$ , solo hay un punto crítico:  $(0, 0)$  que es punto de silla; si  $p > 0$  hay dos puntos críticos que son un punto de silla en  $(0, 0)$  y un mínimo local en  $(\frac{16}{3p^2}, \frac{8}{3p})$ ; y por último, si  $p < 0$  hay dos puntos críticos: el punto de silla  $(0, 0)$  y el máximo local  $(\frac{16}{3p^2}, \frac{8}{3p})$ .

## Cuestión 1 (10 %)

La velocidad angular de un tornado en un punto  $(x, y)$  depende de su distancia al centro de la columna de aire, que está situado en el  $(0, 0)$ , y viene dada por la expresión:

$$V(x, y) = 100 - \ln(x^2 + y^2)$$

- a) (4 puntos) ¿En qué curva de nivel se encuentran todos los puntos con una velocidad de 200 unidades? ¿Qué curva de nivel le corresponde a la coordenada  $(0, 1)$ ?
- b) (4 puntos) ¿Cuál es el vector gradiente en la coordenada  $(0, 1)$ ? Representa gráficamente este vector junto con la curva de nivel en ese punto.
- c) (2 puntos) ¿En qué dirección y sentido debe correr una persona situada en las coordenadas  $(0, 1)$  para que la velocidad del aire disminuya lo más rápido posible? Razona la respuesta.

**SOLUCIÓN:**

- a) Será la curva formada por los puntos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / V(x, y) = 200\} \equiv 100 - \ln(x^2 + y^2) = 200 \equiv \ln(x^2 + y^2) = -100 \equiv x^2 + y^2 = e^{-100}$$

Luego es la circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio  $e^{-50}$ .

La velocidad en el punto  $(0, 1)$  es  $V(0, 1) = 100 - \ln(0^2 + 1^2) = 100$  y de manera análoga al caso anterior, la curva de nivel para todos los puntos que tienen la misma velocidad que  $(0, 1)$  será

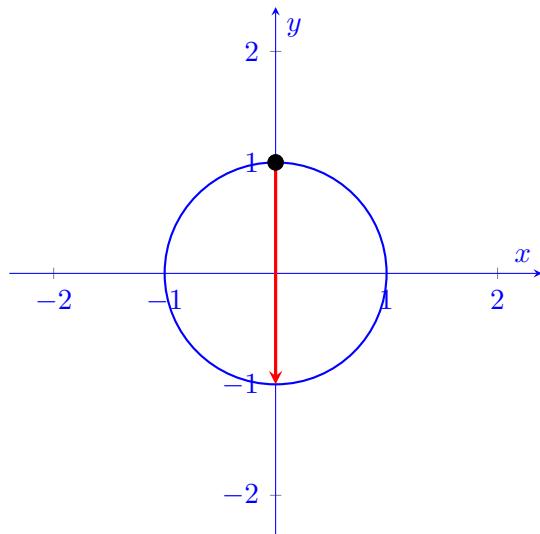
$$x^2 + y^2 = e^0 = 1$$

(la circunferencia unidad centrada en el origen)

- b) El vector gradiente de esta función es

$$\nabla V(x, y) = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \left( \frac{-2x}{x^2 + y^2}, \frac{-2y}{x^2 + y^2} \right)$$

Particularizando en el punto dado:  $\nabla V(0, 1) = (0, -2)$  (de color rojo en la figura).



- c) El gradiente en el punto  $(0, 1)$  apunta en la dirección en la que habría que moverse para aumentar más rápidamente la velocidad desde ese punto, luego para disminuirla lo más rápidamente será en dirección opuesta:  $-\nabla V(0, 1) = (0, 2)$ .

## Cuestión 2 (10 %)

Resuelve el siguiente problema de valores iniciales.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} \cdot y' - y^2 = 1 \\ y(0) = 0 \end{array} \right\}$$

SOLUCIÓN:

- Resolvemos la EDO aprovechando que puede escribirse como una ecuación de variables separables:

$$\sqrt{x}y' - y^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}y' = y^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Integrando cada miembro de la igualdad:

$$\arctan(y) = 2\sqrt{x} + C$$

Y despejando  $y$  se tiene la solución general de la EDO:

$$y = \tan(2\sqrt{x} + C)$$

- Imponemos el dato inicial para determinar el valor de  $C$ :

$$y(0) = \tan(0 + C) = 0 \Leftrightarrow C = 0 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Basta tomar  $C = 0$  para tener una solución del PVI propuesto, quedando la función:

$$y(x) = \tan(2\sqrt{x})$$

## Cuestión 3 (10 %)

Halla el valor de la siguiente integral impropia relacionándola con la función  $\Gamma$  (Gamma de Euler):

$$\int_0^\infty x^2 e^{-4x^2} dx$$

SOLUCIÓN: Haciendo el cambio de variable:

$$\left. \begin{array}{l} t = 4x^2 \\ dt = 8x dx \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad x = \sqrt{\frac{t}{4}} \quad (\text{la raíz positiva porque } x \in [0, \infty))$$

la integral queda:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 e^{-4x^2} dx &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{4}\right) e^{-t} \frac{dt}{8\sqrt{\frac{t}{4}}} = \int_0^\infty \frac{t}{4} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{4 \cdot t^{1/2}} dt = \frac{1}{16} \int_0^\infty t^{1/2} \cdot e^{-t} dt = \\ &= \frac{1}{16} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{32} \end{aligned}$$

## Cuestión 4 (15 %)

Halla razonadamente el límite de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = (9n - 1)^{\frac{1}{n+1}}$

b)  $b_n = \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 1}} + \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 2}} + \dots + \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + n}}$

SOLUCIÓN:

a) Se trata de una indeterminación del tipo  $\infty^0$ , así que procedemos del siguiente modo:

$$\lim(9n - 1)^{\frac{1}{n+1}} = \lim e^{\ln((9n-1)^{\frac{1}{n+1}})} = \lim e^{\frac{\ln(9n-1)}{n+1}} = e^{\lim \frac{\ln(9n-1)}{n+1}}$$

Como el límite de la función de variable real:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(9x-1)}{x+1} \stackrel{\infty}{\underset{L'H}{\equiv}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{9x-1}}{1} = 0$$

cambiando la variable real por natural también es 0, y por tanto:

$$\lim(9n - 1)^{\frac{1}{n+1}} = e^0 = 1$$

b) La sucesión  $b_n$  es una suma de  $n$  sumandos de los cuales el menor es  $\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + n}}$  y el mayor es  $\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 1}}$  ya que, a igual numerador tienen respectivamente el mayor y el menor denominador.

Luego, para todo  $n$ , se verifica la siguiente desigualdad:

$$n \cdot \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + n}} \leq b_n \leq n \cdot \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

Como

$$\lim \left( n \cdot \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + n}} \right) = \lim \frac{5\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3 + n}} = 5 \cdot \lim \sqrt{\frac{n^3}{n^3 + n}} = 5 \cdot 1 = 5$$

y análogamente

$$\lim \left( n \cdot \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 1}} \right) = \lim \frac{5\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3 + 1}} = 5 \cdot \lim \sqrt{\frac{n^3}{n^3 + 1}} = 5 \cdot 1 = 5$$

Se tiene que los límites de las sucesiones de los extremos coinciden, así que por la regla del sándwich, el límite de  $b_n$  también. Luego  $\lim b_n = 5$ .

## Cuestión 5 (20 %)

Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \leq \pi \\ \frac{2x}{\pi} & \text{si } x > \pi, \end{cases}$  se define  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) (2 puntos) Estudia la continuidad de  $f(x)$ .
- b) (2 puntos) Estudia la continuidad y la derivabilidad de  $F(x)$  utilizando el teorema fundamental del Cálculo (TFC). Halla  $F'(x)$  donde haya garantía de que exista.
- c) (2 puntos) Halla  $F(\pi)$ .
- d) (4 puntos) Halla la expresión explícita de  $F(x)$ .

SOLUCIÓN:

- a)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{\pi\}$  porque en ese conjunto es producto de funciones continuas en todo  $\mathbb{R}$ :  $x, \operatorname{sen}(x)$  y  $\frac{2}{\pi}$ . En el punto  $x = \pi$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} x \operatorname{sen}(x) = \pi \cdot \operatorname{sen}(\pi) = 0 = f(\pi)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2x}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

Luego  $f$  no es continua en  $\pi$  porque los límites laterales no coinciden y tiene una discontinuidad de salto finito.

- b) Como  $f$  es continua en todo punto menos en uno y tiene discontinuidad de salto finito, es integrable en cualquier intervalo  $[a, b]$ , por tanto  $F$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ . Además, en virtud del teorema fundamental del Cálculo,  $F$  es derivable en todos los puntos donde  $f$  sea continua, luego  $F$  derivable en  $\mathbb{R} - \{\pi\}$  y  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \neq \pi$ .
- c)  $F(\pi) = \int_0^\pi f(t) dt = \int_0^\pi t \operatorname{sen}(t) dt$ . Para calcularlo, primero hallamos una primitiva de la función integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= t & du &= dt \\ dv &= \operatorname{sen}(t) dt & v &= -\cos(t) \end{aligned}$$

$$\int t \operatorname{sen}(t) dt = -t \cos(t) + \int \cos(t) dt = -t \cos(t) + \operatorname{sen}(t)$$

Y finalmente aplicando la regla de Barrow se tiene:

$$F(\pi) = \int_0^\pi t \operatorname{sen}(t) dt = -t \cos(t) + \operatorname{sen}(t)|_0^\pi = -\pi \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) - (-0 \cos(0) + \operatorname{sen}(0)) = \pi$$

d) Si  $x \leq \pi$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t \operatorname{sen}(t) dt = -t \cos(t) + \operatorname{sen}(t)|_0^x = -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) - (-0 \cos(0) + \operatorname{sen}(0)) = -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$

$$\begin{aligned} \text{Si } x > \pi, \quad F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^\pi f(t) dt + \int_\pi^x f(t) dt = F(\pi) + \int_\pi^x \frac{2t}{\pi} dt = \pi + \left. \frac{t^2}{\pi} \right|_\pi^x = \pi + \frac{x^2 - \pi^2}{\pi} = \frac{x^2}{\pi} \end{aligned}$$

Luego

$$F(x) = \begin{cases} -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \leq \pi \\ \frac{x^2}{\pi} & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

