Código de la mesa: | | Tres primeras letras del primer apellido: | | | |

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Examen Parcial 2 (Temas 3, 4 y 5)

Fecha: 24-01-2022 Duración de esta prueba: 120 minutos.

A rellenar por los profesores

Test	Teoría	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Nota Total

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen estarán publicadas el martes 8 de febrero; se comunicará el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (25%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta = +1, errónea = −0.5, en blanco = 0.

Dada una serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, con $\lim a_n = 0$:

a) se puede asegurar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

b) se puede asegurar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.

c) no se puede asegurar nada sobre la convergencia o divergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} (1+a_n)$.

Si las sucesiones (a_n) y (b_n) verifican $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 800$, entonces:

a) $a_n \sim b_n$.

b) $a_n \ll b_n$.

c) $a_n \in \Theta(b_n)$ pero $a_n \not\sim b_n$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{3^{2n}}$ es convergente y su suma vale:

a) $\frac{9}{13}$. b) $-\frac{4}{13}$. c) $\frac{3}{5}$.

La igualdad $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ si $x \in (-\infty, \infty)$ es el desarrollo en serie de potencias de la función:

a) $f(x) = e^x$ b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ c) $f(x) = \cos(x)$

Dada la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$, se puede asegurar que:

a) S_n es divergente.

b) S_n converge a 0.

c) S_n converge a un número mayor que 0.

El polinomio de Taylor de orden 3 de una función $f(x)$ centrado en $x_0 = 0$ viene dada por

a) $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$.

b) $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3}x^3$.

c) $f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2 + f'''(0)x^3$.

La expresión explícita (término general) de la sucesión $\begin{cases} a_0 = 8 \\ a_n = 5(n+1)a_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$ es:

a) $5^{n+1}(n+1)! \cdot 8$.

b) $5^{n+1}n! \cdot 8$.

c) $5^n(n+1)! \cdot 8$.

Dada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, su derivada viene dada por

a) $S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

b) $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

c) $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n^3+n^2}$.

La sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ es del mismo orden que:

a) $\ln n$

b) $\ln(\ln n)$

c) $\frac{1}{n \ln n}$

El intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ es

a) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

b) $[-3, 3)$.

c) $[-3, 3]$.

Teoría (10%)

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

a) *(3 puntos)* Dar la definición de serie convergente.

b) *(3 puntos)* Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente entonces $\lim a_n = 0$.

c) *(4 puntos)* Demostrar que el recíproco del resultado del apartado (b) no es cierto dando un contraejemplo y justificando la no convergencia de la serie.

Problema 1 (18 %)

Se pide responder a los siguientes apartados **justificando** los resultados obtenidos:

a) *(2 puntos)* Hallar el orden de magnitud de la sucesión $a_n = \dfrac{2^n + (-3)^n}{3n^3}$.

b) *(4 puntos)* Hallar el orden de magnitud de la sucesión $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + \log(k^4 + 4k^2)}{\sqrt{k^5 + 2k^3 + 7}}$.

c) *(2 puntos)* Ordenarlas según dicho orden de magnitud.

d) *(2 puntos)* Justificar cuáles de ellas están en $O(2^n)$ y cuáles en $\Omega(2^n)$.

Problema 2 (9 %)

El *método de inserción* es un algoritmo recursivo que se utiliza para ordenar una lista de elementos. Si la lista tiene un solo elemento, obviamente ya es un conjunto ordenado. Cuando hay n elementos, en el paso recursivo se realizan una serie de comparaciones para insertar en la lista ya ordenada de los $n-1$ primeros elementos el elemento n-ésimo. Se quiere estimar el número de comparaciones que requiere dicho algoritmo para ordenar n elementos.

a) (3 puntos) El "mejor caso" se da cuando en cada paso recursivo solamente hay que realizar una comparación para realizar la inserción. Si M_n es el número de comparaciones que realiza el *método de inserción* al tratar este caso, dicha sucesión verifica la relación recursiva $M_n = M_{n-1} + 1$. Hallar el término general de M_n y su orden de magnitud.

b) (5 puntos) El "peor caso" se da cuando en cada paso recursivo hay que realizar $n-1$ comparaciones para insertar el elemento n-ésimo. Dar una expresión recursiva para P_n: número de comparaciones que realiza el *método de inserción* en este peor caso. A partir de ella, hallar su término general y su orden de magnitud.

c) (2 puntos) Si G_n mide el número de comparaciones que realiza este algoritmo en un caso general describir su comportamiento asintótico en términos de la notación O grande y Ω.

Problema 3 (20 %)

Estudiar la convergencia de cada una de estas tres series justificando adecuadamente los criterios utilizados para cada caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}$$

Problema 4 (18 %)

Sabiendo que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si y solo si $x \in (-1,1)$ se pide:

a) *(1.5 puntos)* Probar que el desarrollo en serie de potencias de la función $\dfrac{1}{1+x^2}$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ especificando su campo de validez.

b) *(5 puntos)* Probar que $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ para todo $x \in [-1,1]$.

c) *(1.5 puntos)* Estudiar razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\arctan(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
- $\arctan(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}$

d) *(2 puntos)* Dar el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $\arctan(x)$ centrado en $x_0 = 0$ y utilizar dicho polinomio para dar una aproximación de $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$.