Tres primeras letras del primer apellido: | | |

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Examen Parcial 2 (Temas 3, 4 y 5)

Fecha: 8-01-2024. **Duración de esta prueba: 120 minutos.**

A rellenar por los profesores

Test	A y S	Cuest. 1	Cuest. 2	Cuest. 3	Cuest. 4	Nota Total

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Puede utilizarse una hoja en blanco para realizar cuentas. Solamente una.
- Si en algún ejercicio no hay suficiente espacio, se solicitará que se añada una hoja adicional al enunciado.
- Las notas de este examen estarán publicadas el martes 31 de enero; se comunicará el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta = +1, errónea = −0.5, en blanco = 0.

Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos estrictamente positivos y sea S_n su suma parcial n-ésima. Se puede asegurar que:

a) $\lim a_n = 0$ y $\lim S_n > 0$.

b) $\lim a_n = 0$ y $\lim S_n = 0$.

c) $\lim S_n = 0$ y $\lim a_n > 0$.

A

Si para todo $n \geq 1$ se tiene que $\dfrac{n^4}{n+1} \leq a_n \leq \dfrac{n^4+2}{n}$, entonces

a) $a_n \sim n^3$.

b) $a_n \sim n^4$.

c) $\lim a_n = \infty$ pero no hay suficiente información para saber su orden de magnitud.

A

El polinomio de Taylor de la función $\operatorname{sen}(x)$ centrado en $x_0 = 0$ y de orden 4 es:

a) $x + \dfrac{x^3}{3!}$

b) $x - \dfrac{x^3}{3!}$

c) $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

B

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos de la que se sabe que $a_n \gg \frac{1}{n^2}$. Con esta información:

a) no se puede garantizar nada sobre la convergencia de la serie $\sum a_n$.

b) el criterio de comparación asegura que la serie $\sum a_n$ es convergente porque $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente.

c) el criterio de comparación asegura que la serie $\sum a_n$ es divergente.

A

La sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ es del orden de:

a) $\sqrt{n}$

b) $\frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $\sqrt{n^3}$

C

¿Cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

a) $(n+1)! \sim n!$ b) $3^{n+1} \sim 3^n$ c) $e^{2n} \sim e^n$

B

Indica cuál de las siguientes series es divergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^e}{n^4}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e \cdot n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^e}$

C

Sea a_n una sucesión tal que $n^3 \ll a_n \ll 3^n$. Entonces, se puede asegurar que

a) $a_n \in \Omega\left(4^n\right)$ b) $a_n \in \Omega\left(n\right)$ c) $a_n \in \Omega\left(2^n\right)$

B

Si el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n$ es $\frac{1}{3}$, entonces:

a) $|k| = 3$.

b) $|k| = \frac{1}{3}$.

c) No se puede conocer $|k|$ sólo con esta información.

A

Dada la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$, se puede asegurar que la serie:

a) converge por el criterio de Leibniz pero no es absolutamente convergente.

b) converge porque es absolutamente convergente pero no por el criterio de Leibniz.

c) converge por el criterio de Leibniz y, además, es absolutamente convergente.

C

Análisis y síntesis (10%)

a) *(2 puntos)* Define cuándo dos sucesiones, a_n y b_n verifican que $a_n \ll b_n$ y también cuándo verifican que $a_n \in O(b_n)$.

b) *(2 puntos)* Si $a_n \ll b_n$, ¿qué implicaciones supone este hecho sobre la relación "ser o grande de" ($\in O(\cdot)$) entre estas dos sucesiones?

c) *(3 puntos)* Da una sucesión concreta c_n que satisfaga la siguiente relación:

$$\ln(n) \ll c_n \ll \sqrt{n}$$

y justifica tu respuesta.

d) *(3 puntos)* Determina razonadamente para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ se verifican simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\ln(n) \in O(n^p) \quad \text{y} \quad n^p \in O(\sqrt{n})$$

SOLUCIÓN:

a) $a_n \ll b_n$ si y solo si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

$a_n \in O(b_n)$ si y solo si existen $M > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que se verifica que $|a_n| \leq M|b_n|$ para todo $n \geq n_0$.

b) $a_n \ll b_n$ implica que $a_n \in O(b_n)$ y que $b_n \notin O(a_n)$.

c) Por ejemplo, $c_n = \sqrt[3]{n}$ ya que por jerarquía de infinitos $\ln(n) \ll n^p$ para todo $p > 0$ y $n^p \ll n^q$ para todo $p < q$. Como $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\ln(n) \ll n^{\frac{1}{3}} \ll n^{\frac{1}{2}}$$

d) Como $\ln(n) \ll n^p \ll n^{\frac{1}{2}}$ si y solo si $0 < p < \frac{1}{2}$, aplicando el resultado del apartado **b)**, se tiene que $\ln(n) \in O(n^p)$ y $n^p \in O(\sqrt{n})$.

Luego las dos condiciones se verifican para todo $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Además, si $p = \frac{1}{2}$ también se tiene que $n^{\frac{1}{2}} \in O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$. Luego también es válido para este valor.

Resumiendo, las dos condiciones se verifican $\boxed{\text{para todo } p \in \left(0, \frac{1}{2}\right]}$ y fuera de ese intervalo no se verifica alguna de ellas. Esto se deriva de la segunda implicación del apartado **b)**:

- si $p \leq 0$ entonces $n^p \ll \ln(n)$, y en consecuencia $\ln(n) \notin O(n^p)$.
- si $p > \frac{1}{2}$ entonces $n^{\frac{1}{2}} \ll n^p$, y en consecuencia $n^p \notin O(n^{\frac{1}{2}})$.

Cuestión 1 (23 %)

a) *(8 puntos)* Determina razonadamente el orden de magnitud de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{(-3)^n \log_3(3^n)}{3^{2n}} \qquad b_n = \frac{n^n + \cos(n)}{\sqrt{n^3} - \sqrt{n^4+1}} \qquad c_n = \frac{\dfrac{(n+1)!}{3^n + n}}{\dfrac{(n-1)!}{3^{-n}+n}}$$

b) *(2 puntos)* Ordena razonadamente las siguientes sucesiones según su orden de magnitud:

$$x_n = \frac{n^2}{e^n} \qquad y_n = \frac{e^n}{n^2} \qquad z_n = \log(n)e^{-n}$$

SOLUCIÓN:

a) $a_n = \dfrac{(-3)^n \cdot \log_3(3^n)}{3^{2n}} = \dfrac{(-1)^n \cdot 3^n \cdot n}{3^{2n}} = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{3^n} \sim \dfrac{n}{3^n}$

$$b_n = \frac{n^n + \cos(n)}{\sqrt{n^3} - \sqrt{n^4+1}} \underset{(1)}{\sim} \frac{n^n}{\sqrt{n^3} - \sqrt{n^4+1}} \underset{(2)}{\sim} \frac{n^n}{n^2} = n^{n-2}$$

(1) $\cos(n) \ll n^n$ porque $\lim \dfrac{\cos(n)}{n^n} = 0$ ya que es producto de una sucesión acotada ($\cos(n)$) y una convergente a cero ($1/n^n$). Por tanto $\cos(n) + n^n \sim n^n$.

(2) $-\sqrt{n^4+1} \sim \sqrt{n^4+1} \sim n^2 \gg n^{\frac{3}{2}}$ luego $\sqrt{n^3} - \sqrt{n^4+1} \sim n^2$.

$$c_n = \frac{(n+1)! \cdot (3^{-n}+n)}{(n-1)! \cdot (3^n + n)} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)! \cdot (3^{-n}+n)}{(n-1)! \cdot (3^n+n)} \sim \frac{n^2 \cdot (3^{-n}+n)}{3^n+n} \underset{(3)}{\sim} \frac{n^3}{3^n}$$

(3) $\dfrac{1}{3^n} \ll n$ luego $3^{-n} + n \sim n$. De igual forma $n \ll 3^n$ implica que $3^n + n \sim 3^n$.

b) Por jerarquía de infinitos se tiene que $\log(n) \ll n^2$. Luego

$$\frac{\log(n)}{e^n} \ll \frac{n^2}{e^n}$$

Así que $z_n \ll x_n$.

Por otro lado, tanto x_n como z_n tienden a 0 ($n^2 \ll e^n$ y $\log(n) \ll e^n$ por jerarquía de infinitos), mientras que $\lim y_n = \infty$. Luego finalmente la ordenación queda así:

$$z_n \ll x_n \ll y_n$$

Cuestión 2 (10 %)

Una región rica en bosques de pinares y encinas ha hecho un estudio sobre la gestión de estos recursos y ha observado lo siguiente: cada año la cantidad de madera que se recoge en la tala y limpieza de bosques es el 110% de lo que se recogía el año anterior y la cantidad de madera nueva que se genera cada año con la repoblación es el 80% de la que se generaba el año anterior.

Si en el año actual se recogen 3 toneladas de madera y se plantan árboles por el equivalente a 5 toneladas de madera, analiza rigurosamente las siguientes cuestiones:

a) *(4 puntos)* Da una expresión que represente el volumen total de la madera recogida al cabo de n años y su orden de magnitud.

b) *(4 puntos)* Da una expresión que represente el volumen total de la madera generada al cabo de n años y su orden de magnitud.

c) *(2 puntos)* Analiza el futuro de los bosques de esa región si la tendencia observada hasta el año actual se mantiene indefinidamente.

Indicación: Se recuerda que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}$ y $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

SOLUCIÓN:

a) Se denomina a_n a la cantidad de madera recogida en el año n-ésimo y el año actual se etiqueta con $n = 0$, de modo que la sucesión a_n se puede definir de forma recursiva por

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ 1'1 \cdot a_{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

y de forma explícita por $a_n = 3 \cdot 1'1^n$. Se trata de una progresión geométrica de razón $r = 1'1$.

El volumen de madera recogida al cabo de n años es la suma de lo recogido desde el año inicial hasta el año n. Si este volumen se representa por $R(n)$, se tiene que:

$$R(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 3\cdot(1'1)^k = 3\cdot\sum_{k=0}^{n}(1'1)^k = 3\cdot\frac{1-1'1^{n+1}}{1-1'1} = 3\cdot\frac{1-1'1^{n+1}}{-0'1} = 30\cdot(1'1^{n+1}-1)$$

Se verifica que $R(n) \sim 1'1^n$ ya que $\lim \frac{R(n)}{1'1^n} = 30 \cdot 1'1 \neq 0$.

b) Análogamente, si se denomina b_n a la cantidad de madera generada en el año n-ésimo y el año actual se etiqueta con $n = 0$, también es una progresión geométrica esta vez de razón $r = 0'8$ y su forma explícita es $b_n = 5 \cdot 0'8^n$.

Como antes, el volumen de madera generada al cabo de n años es la suma de lo generado desde el año inicial hasta el año n. Si este volumen se representa por $G(n)$, se tiene que:

$$G(n) = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} 5 \cdot 0'8^k = \frac{5 - 5\cdot(0'8)^{n+1}}{1-0'8} = \frac{5 - 5\cdot(0'8)^{n+1}}{0'2} = 25 - 25\cdot(0'8)^{n+1}$$

Como esta sucesión tiene límite $25 \neq 0$, se verifica que $G(n) \sim 1$.

c) Si la tendencia se mantiene, como la cantidad de madera generada es una expresión que tiene límite finito y la recogida tiende a infinito, en algún momento el bosque se extinguirá y no será posible seguir explotándolo.

Cuestión 3 (22 %)

Estudia la convergencia de cada una de estas series detallando el proceso e indicando los criterios utilizados.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{4^n}\pi^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n!}\right)}{(4n-3)(4n-1)}$$

SOLUCIÓN:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ es una serie de términos positivos convergente ya que $\displaystyle\lim \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1$ y por el criterio de la raíz se concluye su convergencia.

  (También puede aplicarse el criterio de comparación, por ejemplo con $\sum \frac{1}{n^2}$, o el criterio integral con la función $f(x) = xe^{-x}$)

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{4^n}\pi^n$ es una serie de términos con signo arbitrario que converge absolutamente por el criterio de comparación:

  $$\left|\frac{\cos(n)}{4^n}\pi^n\right| \leq \frac{\pi^n}{4^n} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \qquad \text{para todo } n$$

  y $\displaystyle\sum \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ converge porque es geométrica de razón $r = \dfrac{\pi}{4}$, con $|r| < 1$.

  Luego $\displaystyle\sum \left|\frac{\cos(n)}{4^n}\pi^n\right|$ converge y por tanto la serie original también.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n!}\right)}{(4n-3)(4n-1)}$ es una serie de términos positivos cuyo término general verifica:

  $$c_n = \frac{n\left(1+\frac{1}{n!}\right)}{(4n-3)(4n-1)} \sim \frac{n \cdot 1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

  Como la serie armónica con $p = 1$ diverge, por el criterio de comparación, la serie $\sum c_n$ también diverge.

Cuestión 4 (15 %)

Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n$, se pide lo siguiente:

a) *(6 puntos)* Halla los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que esta serie converge, es decir, su intervalo de convergencia IC.

b) Sabiendo que el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \dfrac{4}{(2-x)^2}$ es

$$\frac{4}{(2-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n \quad \text{para todo } x \in IC$$

1. *(2 puntos)* Halla el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden 3 centrado en $x_0 = 0$.
2. *(0.5 puntos)* Halla el valor del polinomio de Taylor hallado anteriormente para $x = 1$.
3. *(1.5 puntos)* ¿Qué valor de $f(x)$ se está aproximando con el polinomio de Taylor anterior cuando $x = 1$, y con qué error? ¿Mejoraría la aproximación de $f(1)$ si se usara un polinomio de Taylor de grado mayor, por qué?

SOLUCIÓN:

a) La serie de potencias está centrada en $x_0 = 0$ y su sucesión de coeficientes es $a_n = \dfrac{n+1}{2^n}$.

Por tanto, el intervalo de convergencia (IC) tendrá centro 0 y radio $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Como $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{2^n}} = \lim \dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{2} = \dfrac{1}{2}$, $R = 2$ y el intervalo de convergencia está delimitado por los puntos: -2 y 2.

Veamos qué pasa en los extremos de este intervalo:

- Para $x = -2$ la serie queda: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n$

  que diverge porque el término general no tiene límite cero ya que no existe el límite.
- Para $x = 2$ la serie queda: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)$

  que diverge porque de nuevo el término general no tiene límite cero: $\lim(n+1) = \infty$.

En definitiva, el intervalo de convergencia de esta serie de potencias es $\boxed{IC = (-2, 2)}$.

b) El polinomio de Taylor de orden 3 se obtiene truncando la serie de Taylor hasta tener un polinomio de grado menor o igual a 3, en este caso:

$$T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{n+1}{2^n} x^n = 1 + \frac{2}{2}x + \frac{3}{2^2}x^2 + \frac{4}{2^3}x^3 = 1 + x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

c) $T_3(1) = 1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 3'25$.

d) El polinomio de Taylor en $x = 1$ aproxima a la función f en el mismo punto, luego se está aproximando $f(1) = \dfrac{4}{2-1} = 4$. El error cometido en esta aproximación es la diferencia entre ambos valores: $|f(1) - T_3(1)| = 0'75$.

La aproximación sí mejoraría al aumentar el orden del polinomio de Taylor porque 1 está en el intervalo $(-2, 2)$ que es el campo de validez del desarrollo en serie de potencias de la función según nos dicen en el apartado **b)**.