Matemáticas III

Sistema de Ecuaciones Lineales y Factorización

Semana 03

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Índice

1 PARTE TEÓRICA

Eliminación Gaussiana

Result: Algoritmo

1. Leer $A_{n\times n}$ y $b_{n\times 1}$
2. $Aa \leftarrow [A\ b]$
3. Desde k=1 hasta n-1

   3.1 pivo $\leftarrow$ Aa(k,k)

   3.2 Desde j=k+1 hasta n

      3.2.1 $m_{jk} \leftarrow Aa(j,k)/pivo$

      3.2.2 fila(Aa_j) $\leftarrow$ fila(Aa_j)-$m_{jk}\times$ fila(Aa_k)
4. [Ea, nb] $\leftarrow$ [A b]
5. Salida *Ea* y *nb*

Ejemplo

Example

Dado el Sistema de ecuaciones lineales

$$x + 2y - 3z = 5 \tag{1}$$

$$-3x - y - z = -8 \tag{2}$$

$$x - y + z = 0 \tag{3}$$

Resuelve utilizando eliminación gaussiana.

Solución

```
%Forma Matricial : AX=b
clc
A=[1 2 -3;-3 -1 1;1 -1 1]
b=[5;-8;0]
%Paso 1
pivo=Aa(1,1)
%multiplicadores
m21=Aa(2,1)/pivo
m31=Aa(3,1)/pivo
Aa(2,:)=Aa(2,:)-m21*Aa(1,:)
Aa(3,:)=Aa(3,:)-m31*Aa(1,:)
%Paso 2
pivo=Aa(2,2)
m32=Aa(3,2)/pivo
Aa(3,:)=Aa(3,:)-m32*Aa(2,:)
Ea=Aa(:,1:3)
nb=Aa(:,4)
```

Ejercicio

- Implemente una función en Matlab que determine si el sistema $A \times X = b$ tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución. (Sugerencia. Utilice el teorema de Rouche-Frobenius).
- Implemente una función en Matlab para el algoritmo de Eliminación Gaussiana con la siguiente cabecera

```
function [Ea,nb]=gauss(A,b)
```

Factorización LU con pivoteo en MATLAB

El programa MATLAB tiene incorporado la factorización de matrices, sin embargo se trata de la factorización con pivoteo, Contando para ello con el comando **lu**, cuya sintaxis se muestra a continuación:
$[L, U, P] = lu(A)$ donde A es la matriz a factorizar; L y U las matrices triangular inferior y superior; P es la matriz de permutación.
Ejemplo:

```
clc
% Ingresando la Matriz A
A=[10 5 6 -20;1 2 3 4;40 10 20 30;9 8 7 6]
% Ingresando vector la factorizacion lu
[L,U,P]=lu(A)
```

Continuación...

```
>> A=[10 5 6 -20;1 2 3 4;40 10 20 30;9 8 7 6]

A =

    10     5     6   -20
     1     2     3     4
    40    10    20    30
     9     8     7     6

>> [L,U,P]=lu(A)

L =

    1.0000         0         0         0
    0.2250    1.0000         0         0
    0.0250    0.3043    1.0000         0
    0.2500    0.4348   -0.0500    1.0000
```

```
U =

   40.0000   10.0000   20.0000   30.0000
         0    5.7500    2.5000   -0.7500
         0         0    1.7391    3.4783
         0         0         0  -27.0000


P =

     0     0     1     0
     0     0     0     1
     0     1     0     0
     1     0     0     0
```

Continuación...

Al comparar las matrices A y $L * U$ asi como $P * A$ y $L * U$ observamos los siguiente:

```
A =

    10     5     6   -20
     1     2     3     4
    40    10    20    30
     9     8     7     6

>> L*U

ans =

    40    10    20    30
     9     8     7     6
     1     2     3     4
    10     5     6   -20
```

```
>> P*A

ans =

    40    10    20    30
     9     8     7     6
     1     2     3     4
    10     5     6   -20
```

```
>> P

P =

     0     0     1     0
     0     0     0     1
     0     1     0     0
     1     0     0     0
```

Donde P es la matriz de permutación que guarda las pivotaciones que se realizó en el proceso de eliminación Gaussiana. Asimismo la factorización obtenida es la forma de Doolittle.

Ejercicio

Utilizando la factorizacion que proporciona MATLAB, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$10x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 20x_4 = 223 \tag{4}$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -11 \tag{5}$$
$$40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 30x_4 = -50 \tag{6}$$
$$9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 31 \tag{7}$$

Factorización de Crout

Presentamos ahora una factorización sin pivoteo llamada **Factorización de Crout**.

Ejemplo

```
clc
%Ingresando la matriz A
A=[1 2 3;1 1 6;3 6 10]
%Ingresando vector columna b
b=[4;8;12]
%Factorizando la Matriz A
%Eliminacion por columnas ( ...
    Crout )
L=A
U=eye(3,3)
%Paso 1
%Hallando los multiplicadores
m12=L(1,2)/L(1,1)
m13=L(1,3)/L(1,1)
%Construyendo L
L(:,2)=L(:,2)-m12*L(:,1)
L(:,3)=L(:,3)-m13*L(:,1)
%Construyendo U
U(1,2)=m12
U(1,3)=m13
%Paso 2
%Hallando multiplicador
m23=L(2,3)/L(2,2)
%Construyendo L
L(:,3)=L(:,3)-m23*L(:,2)
%Construyendo U
U(2,3)=m23
disp(L)
disp(U)
```

Ejercicio

Implemente una función llamada **crout** en MATLAB que permita factorizar la matriz A de orden n, en la forma $A = LU$.

function [L,U]=crout(A)

Procedimiento

Dado el sistema lineal Ax=b y luego de obtener la factorización LU sin pivoteo $A = L * U$ planteamos y resolvemos dos sistemas lineales mas simples: $Lz = b$ y luego $Ux = z$ encontrando así la solución del sistema planteado Contamos para ello los algoritmos de sustitucion hacia adelante y hacia atrás:

```
function [x]=sustidir(L,b)
[m,n]=size(L);
x=zeros(n,1);
for k=1:n
    x(k)=(b(k)-sum(L(k,1:k-1)*x(1:k-1)))/L(k,k);
end
```

```
function [x]=sustinv(U,b)
[m,n]=size(U);
x=zeros(n,1);
for k=n:-1:1
    x(k)=(b(k)-sum(U(k,k+1:n)*x(k+1:n)))/U(k,k);
end
```

Ejercicio

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $Ax = b$, expresado en su forma algebraica:

$$
\begin{aligned}
60x_1 + 30x_2 + 20x_3 &= 180 \\
30x_1 + 20x_2 + 15x_3 &= 115 \\
20x_1 + 15x_2 + 12x_3 &= 86
\end{aligned}
$$

1. Factorice la matriz A, de la forma A=LU, utilizando la función **crout.m**
2. Resuelve el sistema $AX = b$. Para ello, Resuelve el sistema $LZ = b$, luego $UX = Z$. (Utilice la función **sustidir.m** y la función **sustinv.m**).

2 PARTE PRÁCTICA

Aplicación de SEL y Factorización

En lo que va del presente año la empresa Cintas y Textiles Industriales S.A. recibió 4 órdenes de fabricación, cada una correspondiente a un cliente específico tal como se muestra a continuación:

Orden de fabricación	Clientes	Ubicación geográfica
1	Minorista	OAXACA
2	Marina	VERACRUZ
3	IUSA	CD. MÉXICO
4	SEDENA	CD. MÉXICO

Si los montos de cada orden ascienden a \$158 260, \$122 150, \$117 415, y \$115 500 respectivamente, y cada cliente pretende tener una determinada cantidad de cada tipo de cinta fabricada por la empresa.

Table: Especificación de costos de cada cinta aplicables a cada cliente

	PRECIO DE CADA TIPO DE CINTA \$				
CLIENTES	**1/2 in**	**1 in**	**1 1/2 in**	**2 in**	**COSTO DE LA ORDEN**
Minorista	5.5	8.2	12.4	16	\$ 158 256
Marina	3.20	6	10.5	14	\$ 122 150
IUSA	2.90	5.75	10.10	13.90	\$ 117 415
SEDENA	2.80	5.60	10	13.80	\$ 115 500

PREGUNTAS:

1. Determine un sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas de la forma $P.X = Q$ donde el vector columna X representa la longitud en metros de cada tipo de cinta.
2. Factorice la matriz P por el método de Crout ; dar como respuesta la traza de la matriz triangular inferior.
3. Factorice la matriz P por el método de Doolittle ; Dar como respuesta la traza de la matriz triangular superior.
4. ¿Cuántos metros de cada tipo de cinta se necesitan entregar para cubrir los montos de cada orden?. Utilice cualquier método de solución.
5. Resuelve el item anterior utilizando el método de eliminación gaussiana con pivoteo.
6. Halle el precio total de la cinta de tipo: **2 in.**

Gracias por su atención