Matemáticas III

Transformaciones Lineales - Aplicaciones

Semana 04

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

UTEC UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Índice

Objetivo

Aplicar transformaciones lineales para resolver problemas en un contexto real.

1 REPRESENTACIONES MATRICIALES DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Logros de aprendizaje

- Identifica y aplica las propiedades de las transformaciones lineales en la resolución de problemas y su relación con las matrices.

Matriz de una transformación lineal

Teorema

Suponga que A es una matriz de orden $m \times n$. Defina una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T(v) = Av$. Entonces T es una transformación lineal.

Ejemplo

Indique cuál es la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y + z \\ x + y + z \\ x - 3y \\ 2x + 3y + z \end{pmatrix}$$

Construir transformaciones lineales a partir de matrices

Teorema

Suponga que A es una matriz de $m \times n$. Defina una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T(v) = Av$. Entonces T es una transformación lineal.

Ejemplo

Defina la transformación lineal cuya matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

P1

La Transformación Lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es definida por $T(v) = Av$. Encontrar las dimensiones de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ para la transformación lineal dada por cada matriz:

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Continuación...

P2

¿Cómo podrías expresar de forma matricial la transformación lineal $T(x;y) = (x;-y)$?

P3

¿Cuál es la matriz asociada a la transformación lineal $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, para cada transformación T?

1. $T(x;y) = (3x-4y;x+y)$
2. $T(x;y) = (x;3y-x)$
3. $T(x;y;z) = (x+2y-z;x+7y)$

Formalización de contenidos

- Reflexiones
- Proyecciones

Reflexiones en $\mathbb{R}^2$

Las transformaciones definida por las siguientes matrices son llamadas reflexiones.

Reflexiones en el Eje Y

$$T(x; y) = (-x; y)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Reflexiones en el Eje X

$$T(x; y) = (x; -y)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Actividad 1

P1

¿Como definirías Transformaciones que reflejen puntos tomando la recta $y = x$ como espejo?

P2

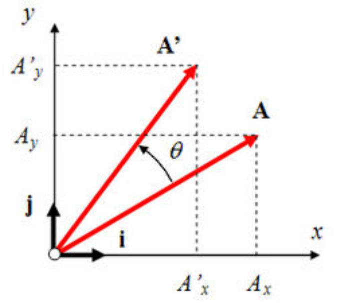
¿Como definirías Transformaciones que reflejen puntos tomando el origen como espejo?

UTEC UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Continuación...

P3

¿Como definirías Transformaciones que permiten rotar un punto dado en el plano un cierto ángulo θ?



2 NÚCLEO E IMAGEN DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Logros de Aprendizaje

- Calcula el núcleo e imagen de una aplicación lineal y reconoce la fórmula de las dimensiones.
- Es capaz de usar Transformaciones Lineales para resolver problemas de contexto real.

Formalización de contenidos

- Definición del Núcleo (Kernel) de una Transformación Lineal.

Kernel

Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. El núcleo T es el subconjunto formado por todos los vectores en R^n que se mapean a cero en $\mathbb{R}^m$.

$$Ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^n \quad / \quad T(v) = 0 \in \mathbb{R}^m \ \}$$

Ejemplos

Indique cuáles opciones contienen un vector en el núcleo de la transformación de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ definida como

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+3z \\ -23x-15y-18z \\ -5x-3y-3z \end{bmatrix}$$

dentro de las opciones:

1. $\mathbf{v}_1 = (0,0,0)^T$
2. $\mathbf{v}_2 = (12,-28,8)^T$
3. $\mathbf{v}_3 = (1,-2,1)^T$
4. $\mathbf{v}_4 = (3,-7,2)^T$
5. $\mathbf{v}_5 = (2,-4,-4)^T$
6. $\mathbf{v}_6 = (9,-18,-15)^T$

Ejemplo

Ejemplo

Encontrar el Núcleo de la transformación Lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} v$$

Solución:

Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

De donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así: $Ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 \;/\; x = (t; -2t; t),\;\; t \in \mathbb{R}\}$

Formalización de contenidos

- Definición de Imagen de una Transformación Lineal.

Imagen

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. El rango o imagen de T es el conjunto de todas las imágenes de T en $\mathbb{R}^m$.

$$Im(T) = \{ w \in \mathbb{R}^m \quad / \quad w = T(v) \quad \text{Para algún } v \in \mathbb{R}^n \}$$

Es decir, el rango es el subconjunto de $\mathbb{R}^m$ formado por aquellos vectores que provienen de algún vector de $\mathbb{R}^n$.

Continuación...

Teorema (Teorema del Nucleo Imagen)

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una transformacion lineal entonces:*

$$dim(\mathbb{R}^n)=n=dim(Ker(T))+dim(Im(T))$$

Ejemplos

Indique cuáles opciones contienen un vector en la imagen de la transformación de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ definida como

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+5y+z \\ 8x+12y+6z \\ -4x-2y-4z \end{bmatrix}$$

dentro de las opciones:

1. $\mathbf{v}_1 = (0,0,0)'$
2. $\mathbf{v}_2 = (2,8,-4)'$
3. $\mathbf{v}_3 = (-23,-52,6)'$
4. $\mathbf{v}_4 = (5,12,-2)'$
5. $\mathbf{v}_5 = (-3,1,-1)'$

Ejemplo

Ejemplo

Encontrar la Imagen(Rango) de la transformación Lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(v) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 8 & 12 & 6 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} v$$

Solución

El vector $v_1 = (a; b; c)$ de $\mathbb{R}^3$ está en la imagen de T si existe un vector $(x; y; z)$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $T(x; y; z) = v$; es decir si es consistente el sistema

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5y + z & = & a \\ 8x + 12y + 6z & = & b \\ -4x - 2y - 4z & = & c \end{array}$$

Al formar la matriz aumentada y escalonada se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & a \\ 0 & -8 & 2 & -4a + b \\ 0 & 0 & 0 & -2a + b + c \end{pmatrix}$$

El sistema es consistente si y solo si $-2a + b + c = 0$, es decir $a = (1/2)b + (1/2)c$.

Es decir $(a; b; c)$ está en la imagen de T si y solo si

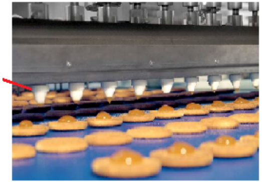
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2b + 1/2c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$Img(T) = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Actividad 2

El desplazamiento de un brazo robótico en una fábrica de galletas que se encarga de inyectar crema a las galletas que se desplazan sobre una faja sin fin (la cual se considera como un plano), se puede modelar a través de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida mediante $T(x, y, z) = (2x - y + 4z; -4x + 2y - 8z)$, donde (x, y, z) es el punto en $\mathbb{R}^3$ en el que el inyector se abastece de crema mientras que $(2x - y + 4z; -4x + 2y - 8z)$ es el punto en $\mathbb{R}^2$, es decir en la faja sin fin, en el que se aplica la crema a la galleta, tal como se muestra en la figura.



Continuación..

1. Halle la matríz asociada a la transformación lineal.
2. Los sabores especiales con los cuales se abastecerá el inyector se encuentra sobre un plano que pasa por el origen **(0;0;0)** . EL brazo robótico ha sido recalibrado para que solo aplique los sabores especiales a una determinada línea de producción situado en el origen de coordenadas **(0;0)** de la faja sin fin. Determine la ecuación del plano en el cual está situado los sabores especiales.
3. El brazo robótico ha sido recalibrado para que solo se abastezca de crema en la región triangular de vértices $(0;0;0)$ $(1;0;0)$ y $(0;0;1)$. Halle y represente gráficamente la imagen de dicha región via la transformación T.
4. Explique la razón por la cual el brazo robótico **NO** puede aplicar crema a una galleta que se encuentra en el punto de coordenadas (1;3).

Gracias por su atención