Sesión 1 - Complemento

Prof. Brígida Molina

Matemáticas III

Septiembre 2021

Inversa de una matriz

Definición

Dada una matriz cuadrada A de $n \times n$, si existe una matriz cuadrada de $n \times n$, denotada por A^{-1}, tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

donde I_n denota la matriz identidad de $n \times n$, se dice que A^{-1} es la **matriz inversa** de A.

Si existe la matriz inversa de A, se dice que la matriz A es **invertible** o **no singular**. En caso contrario, se dice que la matriz A es **singular**.

Ejemplo:

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ tiene inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Propiedades de las inversas

1. Si A y B son matrices cuadradas de $n \times n$ invertibles, entonces la matriz AB es invertible. Además:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

2. Si A es una matriz cuadrada de $n \times n$ invertible, entonces A^{-1} es también invertible y

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

3. Si A es una matriz cuadrada de $n \times n$ invertible, entonces A^t es también invertible y además

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

4. Si $\alpha \neq 0$ es un escalar y A es una matriz cuadrada de $n \times n$ invertible, entonces αA es invertible y

$$(\alpha A)^{-1} = (1/\alpha)A^{-1}.$$

Determinante de una matriz

Definición

1. Si A es una matriz de 2×2 expresada como $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, el **determinante de** A es:

$$det(A) = ad - bc.$$

2. Si A es una matriz de 3×3 expresada como $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, el **determinante de** A está dado por:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

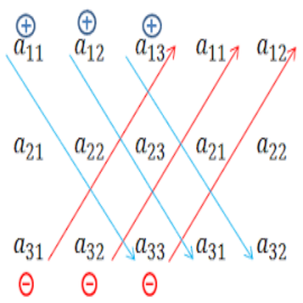
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Continuación determinante de una matriz

3.

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Regla de Sarrus:



Continuación determinante de una matriz

4. En general si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, entonces el **determinante de** A se define como:
   Fijando la fila k:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}$$

   donde M_{kj} es el determinante de la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que queda al eliminar la fila k y la columna j de A.

Observación

$C_{kj} = (-1)^{k+j} M_{kj}$ es llamado el **cofactor** kj **de** A.

Fijando la fila k:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}$$

donde M_{kj} es el determinante de la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que queda al eliminar la fila k y la columna j de A.

Ejemplo:

El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ es

$$det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3} a_{13} det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1(3) - 2(-9+2) = 3 + 14 = 17$$

Propiedades de los determinantes

Sean A y B son matrices cuadradas de $n \times n$, entonces:

1. $det(AB) = det(A)det(B)$.
2. $det(A^t) = det(A)$.
3. Si A es una matriz invertible, entonces $det(A) \neq 0$ y además
$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$
4. Si A es una matriz triangular superior o triangular inferior,
$$det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

Cálculo de la inversa de una matriz

Definición

La matriz Adjunta de A, denotada por $Adj(A)$, está definida como:

$$Adj(A) = [Cof(A)]^t$$

es decir, la matriz adjunta de A es la transpuesta de la matriz de cofactores de A.

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. La inversa de A puede calcularse como:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A).$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición

Un sistema de n ecuaciones lineales de n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Re$ es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

donde los coeficientes a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ y los elementos b_i, $1 \leq i \leq n$ son números reales dados.

Forma Matricial del Sistema

El sistema anterior puede ser expresado en forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b},$$

donde A es llamada **la matriz de coeficientes** del sistema, x **el vector de incógnitas** y b **el vector independiente.**

Problema:

Dados una matriz A de $n \times n$ y un vector $b \in \Re^n$, el problema es encontrar un vector $x \in \Re^n$ tal que $Ax = b$.

Estamos interesados en resolver el sistema:

$$Ax = b.$$

Si A es una matriz invertible, entonces multiplicando por A^{-1} a la expresión anterior se obtiene:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$

y simplificando queda:

$$x = A^{-1}b.$$

Es decir, si A es invertible el sistema $Ax = b$ tiene única solución y es $x = A^{-1}b$.

Ejemplo:

Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 &= -5. \end{aligned}$$

La representación matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Calculando la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{(4)(2)-(1)(9)} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -61 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Pregunta: Sin calcular explícitamente A^{-1}, cómo podemos saber que A^{-1} existe?

Rango de una matriz

Definición

El rango de una matriz A de $m \times n$, denotado por $rg(A)$, se define como el número máximo de columnas (o filas) linealmente independientes.

Ejemplo:

¿Cuál es el rango de cada una de las siguientes matrices?

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$.
3. Sea $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Definición

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. A tiene **rango completo** si todas las columnas (o filas) de A son linealmente independientes, es decir, si $rg(A) = n$

¿Cómo verifico que A tiene n columnas (o filas) linealmente independientes?

Definición

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ y denotemos por $a_i = i-$ésima columna de A. A tiene n **columnas linealmente independientes** si dada la combinación lineal:
$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$ entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Observación: NO es tarea fácil verificar que A tiene rango completo con la información que tenemos hasta ahora. Ni por la definición, ni por la manera que les enseñaron en uno de los tutoriales (viendo submatrices de tamaños diferentes y calculándoles el determinante)!!!

Espacio nulo de una matriz

Definición

El espacio nulo de una matriz A de $m \times n$, denotado por $N(A)$, es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea:

$$Ax = 0,$$

es decir,

$$N(A) = \{x \in \Re^n / Ax = 0\}.$$

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Está u en el espacio nulo de A, es decir, $u \in N(A)$.