Matemáticas III

Ecuaciones Diferenciale
Ordinaria
Semana 13

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

Temas

1 Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Objetivos

1. Aplicar métodos numéricos de un solo paso para aproximar ecuaciones y plantea ecuaciones de orden superior en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

ED

- EDO incognita depende de una sola variable
- EDP la incognita depende mas de una variable

orden: la derivada mas alta de la ecuacion

Grado: eponentemque esta elevado a la derivada mas alta

Logros de Aprendizaje

1. Aplica los métodos de un solo paso para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
2. Transforma ecuaciones diferenciales de orden superior en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Introducción

Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden n con valores iniciales

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

$$y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y'(x_0) = y_1 \quad ; \quad y''(x_0) = y_2 \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

se busca una función solución $y = y(x)$ que satisfaga la ecuacion dada, lo primero qu se busca es la **solución analítica** existen diferentes métodos para ello (vistos en el curso anterior) sin embargo todos esos métodos son insuficientes para resolver cualquier ecuación diferencial, es decir existen ecuaciones diferenciales imposibles de resolver analíticamente entonces se hace necesario buscar una **solución numérica** de dicha ecuación.

Ejemplos

- Ecuación diferencial ordinaria de valores iniciales de 1er orden

$$y' = x^2 - 3y; \qquad y(0) = 1$$

cuya solución explicita es $y(x) = \frac{25}{27}e^{-3x} + \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}$

- EDO de tercer orden

$$xe^{xy}y^{(3)} - \sin\left(xy''\right) + y' + \cos(y) = x^2\sin(x)$$
$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 1 \quad ; \quad y''(0) = -1$$

La solución analítica se desconoce, se debe usar un método numérico.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Problema de Valor Inicial

Forma estándar del Problema de Valor Inicia para una ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y); \quad a \leq x \leq b$
$y(a) = y_1$
Tamaño de paso: h

Ejemplo

$$y' = y + 1; \qquad y(0) = 0, \quad y(x) = e^x - 1$$
$$y' = 6x - 1 \qquad y(1) = 6, \quad y(x) = 3x^2 - x + 4$$
$$y' = \frac{x}{y+1}, \qquad y(0) = 0, \qquad y(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$$

Métodos de Runge Kutta

En nuestro caso aplicaremos el método de Runge Kutta (a desarrollar a continuación) para la resolución numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con valor inicial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

en el intervalo $x \in [x_0; b]$.

1 Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Métodos de Taylor

Expandiendo en serie de Taylor a la función incógnita $y(x)$ alrededor del punto $x = x_n$:

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + y''(x_n)\frac{(x-x_n)^2}{2} + \cdots + y^{(n)}(x_n)\frac{(x-x_n)^n}{} + \cdots$$

Evaluando en $x = x_{n+1}$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)\underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{h} + y''(x_n)\frac{(\overbrace{x_{n+1} - x_n}^{h})^2}{2} + \cdots + y^{(n)}(x_n)\frac{(x_{n+1}-x_n)^n}{} + \cdots$$

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \cdots + \frac{h^n}{}$$

Métodos de Runge Kutta

Del conjunto de todos los métodos numéricos que existen para resolver una EDO los métodos de Runge Kutta en general son los que logran mayor exactitud, debido a que utilizan la expansion de la serie de Taylor sin necesidad de calcular las derivadas de orden superior. Existen muchas variantes del método, sin embargo todas trabajan en la **forma general**

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(x_i, y_i, h)h$$

donde $\varphi(x_i, y_i, h)$ se conocen como la **función incremento**, la cual se interpreta como la pendiente representativa en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y además la función incremento tiene la forma general

$$\varphi = a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n$$

Método de Runge Kutta de segundo orden

En el caso particular de $n = 2$ tenemos los métodos de segundo orden de Runge Kutta:

RK de segundo orden

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)\, h \\
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)
\end{aligned}
$$

Donde las constantes a_1, a_2, p_1 y q_{11} son determinados al expandir la serie de Taylor de la función f hasta el segundo grado. Oteniéndose el siguiente sistema no lineal de tres ecuaciones:

Método de Runge Kutta de segundo orden

Sistema obtenido

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_2.p_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2.q_{11} = \frac{1}{2}$$

Al elegir un valor arbitrario para a_2, obtenemos valores para a_1 , p_1 y q_{11}

Método de Runge Kutta de segundo orden

A continuación una tabla donde están resumidos los más importantes métodos de Runge Kutta de segundo orden:

a_2	a_1	p_1	q_{11}	Método
1/2	1/2	1	1	Heun con un solo corrector
1	0	1/2	1/2	Del punto medio
2/3	1/3	3/4	3/4	Ralston

Método de Runge Kutta de segundo orden

o Método de Heun

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2)h$$

Donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1.h)$$

Donde se observa que k_1 es la pendiente al inicio del intervalo y k_2 la pendiente al final del intervalo.

Método de Runge Kutta de segundo orden

Ejemplo Use el método RK de segundo orden 2 y resuelva numericamente el PVI

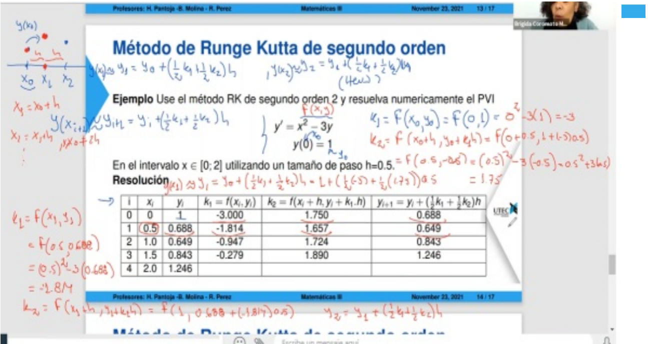
$$y' = x^2 - 3y$$
$$y(0) = 1$$

En el intervalo $x \in [0; 2]$ utilizando un tamaño de paso h=0.5.

Resolución

i	x_i	y_i	$k_1 = f(x_i, y_i)$	$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1.h)$	$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2)h$
0	0	1	-3.000	1.750	0.688
1	0.5	0.688	-1.814	1.657	0.649
2	1.0	0.649	-0.947	1.724	0.843
3	1.5	0.843	-0.279	1.890	1.246
4	2.0	1.246			

UTEC

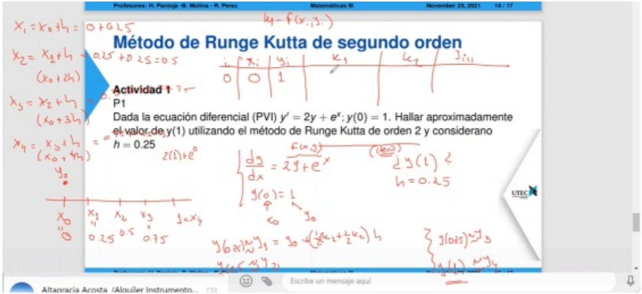


Método de Runge Kutta de segundo orden

Actividad 1

P1

Dada la ecuación diferencial (PVI) $y' = 2y + e^x$; $y(0) = 1$. Hallar aproximadamente el valor de y(1) utilizando el método de Runge Kutta de orden 2 y considerano $h = 0.25$



Método de Runge Kutta de cuarto orden

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{h}{6})(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + h/2, y_i + k_1.(h/2)) \\
k_3 &= f(x_i + h/2, y_i + k_2.(h/2)) \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3.h)
\end{aligned}$$

Gracias por su atención