Matemáticas III

Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Semana 14

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Temas

Objetivos

1. Transformar una EDO de orden superior a un sistema de ecuaciones de primer orden
2. Aplicar métodos numéricos para aproximar sistemas de ecuaciones diferenciales.
3. Resolver numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.

1 SISTEMA DE EDO

Logros

- Aplica el método de Runge Kutta(Heun) de orden dos para aproximar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales.
- Transforma una ecuación diferencial de orden superior a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Sistema de Ecuaciónes Diferenciales y Ecuaciónes de Orden Superior

Un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden con n funciónes incógnitas $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ en la variable independiente t, tendrá la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\
x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\
&\vdots \\
x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}
$$

Donde: $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son funciones de las n+1 variables $t, x_1, x_2, \cdots, x_n$

Sistema de Ecuaciónes Diferenciales y Ecuaciónes de Orden Superior

Reducción de sistemas de orden superior a sistemas de primer orden

En forma general tenemos:$x^{(n)} = f(t, x', x'', \cdots, x^{(n-1)})$ Introducimos nuevas variables dependientes para x y cada una de sus derivadas hasta el orden n-1.

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'', \cdots, x_n = x^{n-1}$$

De donde $x_1' = x' = x_2, x_2' = x'' = x_3$, etc. Obteniendo un sistema:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

Sistema de Ecuaciónes Diferenciales y Ecuaciónes de Orden Superior

El modelo Matemático de un circuito eléctrico viene dado por la ecuación:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = 12\frac{dQ}{dt} - 100Q + 48sen(10t)$$

Hacemos $y_1 = Q; y_2 = \frac{dQ}{dt}$ y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciónes de primer orden.

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -12y_2 - 100y_1 + 48sen(10t)$$

$$y_1(0) = \quad y_2(0) = 0$$

Sistema de Ecuaciónes Diferenciales y Ecuaciónes de Orden Superior

Ejemplo Guiado

Exprese la ecuación

$$y''' + ty'' - ty' - 2y = t, y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

como un sistema de ecuaciónes de primer orden.

Sistema de Ecuaciónes Diferenciales y Ecuaciónes de Orden Superior

Actividad Grupal

El movimiento de un sistema de resorte compuesto, es dado por la solución par de ecuaciónes simultaneas:

$$
\begin{gathered}
m_1 x_1''(t) = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\
m_2 x_2''(t) = k_2(x_1 - x_2) \\
x_1(0) = A; \quad x_1'(0) = B \\
x_2(0) = C; \quad x_2'(0) = D
\end{gathered}
$$

Donde x_1 y x_2 son los desplazamientos de las dos masas a partir de las posiciones de equilibrio.
Exprese como un sistema de ecuaciónes de primer orden.

Sistema de Ecuaciónes Diferenciales y Ecuaciónes de Orden Superior

Se desea resolver el sistema de 2 ecuaciones Diferenciales

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f(t,x,y); \quad x(t_0) = x_0 \\
y'(t) &= g(t,x,y); \quad y(t_0) = y_0
\end{aligned}
$$

Con un tamaño de paso h.

Sistema de Ecuaciónes Diferenciales y Ecuaciónes de Orden Superior

Método de Heun para un sistema de 2 ecuaciones diferenciales.

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2}(k_{1x} + k_{2x})h$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_{1y} + k_{2y})h$$

donde

$$k_{1x} = f(t_i; x_i; y_i)$$
$$k_{1y} = g(t_i; x_i; y_i)$$
$$k_{2x} = f(t_i + h; x_i + hk_{1x}; y_i + hk_{1y})$$
$$k_{2y} = g(t_i + h; x_i + hk_{1x}; y_i + hk_{1y})$$

Sistema de Ecuaciónes Diferenciales y Ecuaciónes de Orden Superior

Usaremos el método de Runge Kutta de segundo orden para aproximar la Solución $y_1(0.1)$ y $y_2(0.1)$ del Sistema de ecuaciónes diferenciales de primer orden; con h=0.1:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -12y_2 - 100y_1 + 48sen(10t)$$

$$y_1(0) = 0 \quad y_2(0) = 0$$

En este método siempre se utiliza el valor de K anterior al incrementar los valores de la función y el valor de h para incrementar la variable independiente. Se oscila entre los cálculos para y_1 y para y_2, es decir se hace k_{1y_1} y luego k_{1y_2} antes de hacer k_{2y_1} y así sucesivamente.

Sistema de Ecuaciónes Diferenciales y Ecuaciónes de Orden Superior

Sean:

$$f(t, y_1, y_2) = y_2$$
$$g(t, y_1, y_2) = -100y_1 - 12y_2 + 48sen(10t)$$

Hallar $y_1(0.1)$ y $y_2(0.1)$, con h=0.1
Primero encontramos:

$$k_{11} = k_{1y_1} = f(0,0,0) = 0$$
$$k_{12} = k_{1y_2} = g(0,0,0) = 0$$

Calculamos $(0 + 0.1; 0 + k_{11}(0.1), 0 + k_{12}(0.1)) = (0.1; 0; 0)$

$$k_{21} = k_{2y_1} = f(0.1; 0; 0) = 0$$
$$k_{22} = k_{2y_2} = g(0.1; 0; 0) = 40.39$$

Sistema de Ecuaciónes Diferenciales y Ecuaciónes de Orden Superior

Ahora Hallamos la aproximación de $y_1(0.1)$ y $y_2(0.1)$

$$y_1(0.1) = 0 + \frac{1}{2}(k_{11} + k_{21})h = 0$$

$$y_1(0.1) = 0$$

$$y_2(0.1) = 0 + \frac{1}{2}(k_{12} + k_{22})h = 2.019$$

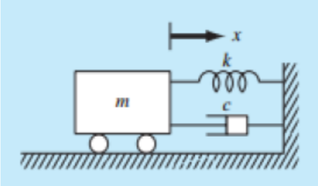
$$y_2(0.1) = 2.019$$

Aplicación

El movimiento de un sistema acoplado masa resorte **(vease la figura)** está descrito por la ecuación diferencial ordinaria que sigue:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx = 0$$

donde x=desplazamiento desde la posicion de equilibrio(m), t=tiempo,m=20kg masa, y c= coeficiente de amortiguamiento(N.s/m).El coeficiente de amortiguamiento adopta tres valores,5(subamortiguado), 40 (amortiguamiento crítico), y 200 (sobreamortiguamiento). La velocidad inicial es de cero y el desplazamiento inicial es x=1.



figura

Aplicación

1. Resuelva la ecuación usando el método de Runge Kutta de orden 2 para ecuaciones diferenciales de grado 2 para h=2.5; y $0 \leq t \leq 5s$.
2. Realize el ejercicio anterior para cada uno de los tres valores del coeficiente de amortiguamiento.

Gracias por su atención