Sistemas de Ecuaciones Lineales

Prof. Brígida Molina

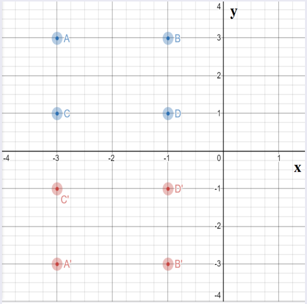
Matemáticas III

Septiembre 2021

ACTIVIDAD 1 P1

La Geometría de las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$

Imagina que quieres reflejar el cuadrado que se muestra en la figura con respecto al eje X.



¿Cuáles serían las coordenadas de los nuevos puntos A,B, C y D? Identifícalos como A';B';C' y D'

Si consideramos que T es la función que lleva el punto A en el punto A', al punto B en el punto B' y así sucesivamente, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
T(A) = A' &\rightarrow T(-3;3) = (-3;-3)\\
T(B) = B' &\rightarrow T(-1;3) = (-1;-3)\\
T(C) = C' &\rightarrow T(-3;1) = (-3;-1)\\
T(D) = D' &\rightarrow T(-1;1) = (-1;-1)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la regla de correspondencia de $T(x;y)$ es:

$$T(x;y) = (x;-y).$$

Ejemplo 1

Defina la función $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 5z \\ -4x + 2y - 10z \end{pmatrix}.$$

¿Es T una transformación lineal?

Solución:

Sean $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dos vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^3$. Entonces:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2) - (y_1+y_2) + 5(z_1+z_2) \\ -4(x_1+x_2) + 2(y_1+y_2) - 10(z_1+z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2x_1 - y_1 + 5z_1) + (2x_2 - y_2 + 5z_2) \\ (-4x_1 + 2y_1 - 10z_1) + (-4x_2 + 2y_2 - 10z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 - y_1 + 5z_1 \\ -4x_1 + 2y_1 - 10z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 - y_2 + 5z_2 \\ -4x_2 + 2y_2 - 10z_2 \end{pmatrix} = T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Sean $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vector cualquiera en $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$T(\alpha u) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(\alpha x) - (\alpha y) + 5(\alpha z) \\ -4(\alpha x) + 2(\alpha y) - 10(\alpha z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(2x - y + 5z) \\ \alpha(-4x + 2y - 10z) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2x - y + 5z \\ -4x + 2y - 10z \end{pmatrix} = \alpha T(u)$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal.

Observación: No toda función es una transformación lineal.

1. Defina la función $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $T(x) = cos(x)$.

   Sean x y y cualesquiera valores en $\mathbb{R}$.

   $$T(x+y) = cos(x+y) \neq cos(x) + cos(y) = T(x) + T(y)$$

   Por lo tanto T **no** es una transformación lineal.

2. Defina la función $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $S(x) = 4x^2$.

   Sean x y y cualesquiera valores en $\mathbb{R}$.

   $$S(x+y) = 4(x+y)^2 = 4(x^2+2xy+y^2) = 4x^2+8xy+4y^2 \neq S(x)+S(y)$$

   Por lo tanto S **no** es una transformación lineal.

Propiedades:

- Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal entonces $T(\mathbf{0_n}) = \mathbf{0}_m$.
  Es fácil de demostrar. Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, entonces
  $$T(\mathbf{0}_n) = T(0\boldsymbol{x}) = 0T(\boldsymbol{x}) = 0\boldsymbol{w} = \mathbf{0}_m$$
  .
- Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal entonces $T(-\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$.

Ejemplo 2

Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T(1;0;0) = (2;-1;4),\ T(0;1;0) = (1;5;-2),\ T(0;0;1) = (0;3;1)$$

Encontrar $T(2;3;-2)$

Solución: Para cualquier $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Evaluando T en el punto dado:

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3-0 \\ -2+15-6 \\ 8-6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3

Indique cuál es la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y + z \\ x + y + z \\ x - 3y \\ 2x + 3y + z \end{pmatrix}$$

Solución:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Teorema

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces existe una única matriz A tal que

$$T(x) = Ax, \quad \text{para toda} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Más áun, A es la matriz de $m \times n$ cuya j-ésima columna es el vector $T(e_j)$, donde e_j es el j-ésimo vector canónico en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$A = [T(e_1)\ T(e_2)\ \ldots\ T(e_n)]\,.$$

Ejemplo 4

Defina la transformación lineal cuya matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Solución:

Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + 8z + w \\ 2x + 5z - 2w \\ x + y + 3z - 7w \end{pmatrix}.$$

ACTIVIDAD 2

P1

La Transformación Lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es definida por $T(v) = Av$. Encontrar las dimensiones de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ para la transformación lineal dada por cada matriz:

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

P2

¿Cómo podrías expresar de forma matricial la transformación lineal $T(x;y) = (x;-y)$?

P3

¿Cuál es la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, para cada transformación T?

1. $T(x;y) = (3x - 4y; x + y)$
2. $T(x;y) = (x; 3y - x)$
3. $T(x;y;z) = (x + 2y - z; x + 7y)$

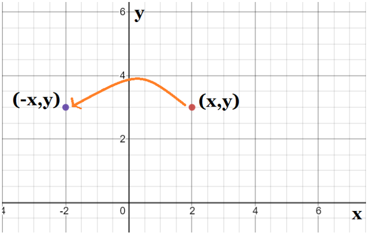
Reflexiones en $\mathbb{R}^2$

Las transformaciones definida por las siguientes matrices son llamadas reflexiones.

Reflexiones en el Eje Y

$$T(x;y) = (-x;y)$$

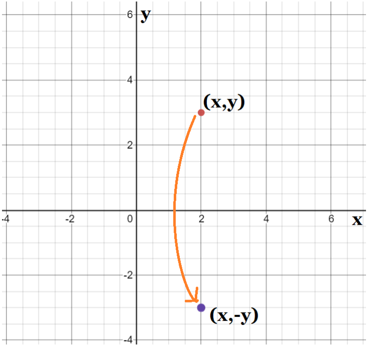
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$



Reflexiones en el Eje X

$$T(x;y) = (x;-y)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



ACTIVIDAD 3

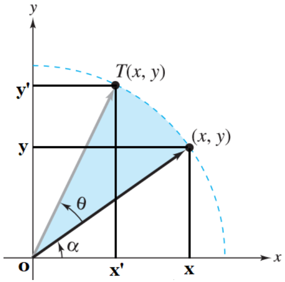
P1

¿Cómo definirías Transformaciones que reflejen puntos tomando la recta $y = x$ como espejo?

P2

¿Cómo definirías Transformaciones que reflejen puntos tomando el origen como espejo?

Rotación de un punto dado en el plano un cierto ángulo θ



$$x = r\cos(\alpha), \qquad x' = r\cos(\alpha+\theta)$$
$$y = r\mathrm{sen}(\alpha), \qquad y' = r\mathrm{sen}(\alpha+\theta).$$

Por identidades trigonométricas:

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)$$

$$y' = r\mathrm{sen}(\alpha+\theta) = r\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta) + r\cos(\alpha)\mathrm{sen}(\theta).$$

Sustituyendo las expresiones de x y y en las últimas ecuaciones:

$$x' = x\cos(\theta) - y\mathrm{sen}(\theta)$$

$$y' = y\cos(\theta) + x\mathrm{sen}(\theta)$$

Así,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\mathrm{sen}(\theta) \\ y\cos(\theta) + x\mathrm{sen}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$