Transformaciones Lineales (T.L.) - Continuación

Prof. Brígida Molina

Matemáticas III

Septiembre 2021

ACTIVIDAD 1

Indique cuáles opciones contienen un vector en el núcleo de la transformación de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ definida como

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+3z \\ -23x-15y-18z \\ -5x-3y-3z \end{bmatrix}$$

dentro de las opciones:

1. $\mathbf{v}_1 = (0,0,0)^T$
2. $\mathbf{v}_2 = (12,-28,8)^T$
3. $\mathbf{v}_3 = (1,-2,1)^T$
4. $\mathbf{v}_4 = (3,-7,2)^T$
5. $\mathbf{v}_5 = (2,-4,-4)^T$
6. $\mathbf{v}_6 = (9,-18,-15)^T$

Antes de pasar a responder la pregunta, es conveniente obtener la matriz A asociada a la transformación, es decir, hallar A tal que $T(x) = Ax$. Claramente A es de 3×3 ya que $T : \mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ y

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 3z \\ -23x - 15y - 18z \\ -5x - 3y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz asociada a la transformación lineal T es:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Veamos si $\mathbf{v}_1 = (0,0,0)^T$ está o no en el núcleo de T:

$$T(\mathbf{v}_1) = A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \in \mathbf{R}^3.$$

   Por lo tanto, $\mathbf{v}_1 = (0,0,0)^T$ se encuentra en el núcleo de T, esto es, $\mathbf{v}_1 = (0,0,0)^T \in Ker(T)$.

3. Veamos si $\mathbf{v}_3 = (1, -2, 1)^T$ está o no en el núcleo de T:

$$T(\mathbf{v}_3) = A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+3 \\ -23+30-18 \\ -5+6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{v}_3 = (1, -2, 1)^T \notin Ker(T)$.

Verificar si los otros 4 vectores pertenecen o no al $Ker(T)$.

Ejemplo

Ejemplo

Encontrar el Núcleo de la transformación Lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} v$$

Solución: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, entonces por definición el $Ker(T)$ es el conjunto de todos los vectores $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = \vec{0} \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$T(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} v_1 + v_2 + v_3 & = & 0 \\ v_2 + 2v_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} v_2 = -2v_3 & & \\ v_1 - 2v_3 + v_3 & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_2 = -2v_3 \\ v_1 = v_3 \end{array} \right. .$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 \\ -2v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ para cualquier escalar } t \in \mathbb{R}.$$

De donde se obtiene que:

$$Ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 \ / \ v = (t; -2t; t),\ \ t \in \mathbb{R}\} = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 \ / \ v = (t; -2t; t), \ t \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Observaciones:

- La dimensión de $Ker(T)$ es 1 ($\dim(Ker(T)) = 1$),
- lo cual corresponde al número de columnas sin pivote en la matriz modificada asociada a T.
- Geométricamente, en $\mathbb{R}^3$ esto corresponde a la recta:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$$

ACTIVIDAD 2

Indique cuáles opciones contienen un vector en la imagen de la transformación de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ definida como

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+5y+z \\ 8x+12y+6z \\ -4x-2y-4z \end{bmatrix}$$

dentro de las opciones:

1. $\mathbf{v}_1 = (0,0,0)'$
2. $\mathbf{v}_2 = (2,8,-4)'$
3. $\mathbf{v}_3 = (-23,-52,6)'$
4. $\mathbf{v}_4 = (5,12,-2)'$
5. $\mathbf{v}_5 = (-3,1,-1)'$

2. Veamos si $\mathbf{v}_2 = (2, 8, -4)^T$ está o no en la imagen de T.
Por definición, el vector $\mathbf{v}_2 = (2, 8, -4)^T \in \mathbf{R}^3$ está en la imagen de T si existe un vector $(x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v_2$.
Es decir, si es consistente el sistema:

$$\begin{array}{rcr} 2x + 5y + z & = & 2 \\ 8x + 12y + 6z & = & 8 \\ -4x - 2y - 4z & = & -4 \end{array}$$

Reduciendo la matriz aumentada se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 8 & 12 & 6 & 8 \\ -4 & -2 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - (-2) f_1]{f_2 \to f_2 - 4 f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - (-1) f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el sistema es consistente y v_2 sí está en la imagen de T, esto es, $v_2 \in Im(T)$. Verificar si los otros 4 vectores pertenecen o no al $Im(T)$.

¿Cómo podemos hacerlo con Matlab?

Ejemplo

Encontrar la Imagen(Rango) de la transformación Lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(v) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 8 & 12 & 6 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} v$$

Solución

El vector $v = (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$ está en la imagen de T si existe un vector $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

es decir si es consistente el sistema

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5y + z & = & a \\ 8x + 12y + 6z & = & b \\ -4x - 2y - 4z & = & c \end{array}.$$

Reduciendo la matriz aumentada se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & a \\ 8 & 12 & 6 & b \\ -4 & -2 & -4 & c \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - (-2)f_1]{f_2 \to f_2 - 4f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & a \\ 0 & -8 & 2 & b - 4a \\ 0 & 8 & -2 & c + 2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - (-1)f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 2 & b - 4a \\ 0 & 0 & 0 & c - 2a + b \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el sistema es consistente si y solo si $-2a + b + c = 0$, es decir $a = (1/2)b + (1/2)c$.

Es decir $(a; b; c)$ está en la imagen de T si y solo si

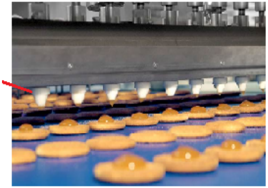
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2b + 1/2c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$Im(T) = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ACTIVIDAD 3

El desplazamiento de un brazo robótico en una fábrica de galletas que se encarga de inyectar crema a las galletas que se desplazan sobre una faja sin fin (la cual se considera como un plano), se puede modelar a través de la transformación lineal $T : \mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$, definida mediante $T(x, y, z) = (2x?y + 4z; -4x + 2y - 8z)$, donde (x, y, z) es el punto en $\mathbf{R}^3$ en el que el inyector se abastece de crema mientras que $(2x - y + 4z; -4x + 2y - 8z)$ es el punto en $\mathbf{R}^2$, es decir en la faja sin fin, en el que se aplica la crema a la galleta, tal como se muestra en la figura.



1. Halle la matriz asociada a la transformación lineal.
   $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida mediante
   $T(x, y, z) = (2x - y + 4z; -4x + 2y - 8z)$
   Así:
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Los sabores especiales con los cuales se abastecerá el inyector se encuentra sobre un plano que pasa por el origen **(0;0;0)** . EL brazo robótico ha sido recalibrado para que solo aplique los sabores especiales a una determinada línea de producción situado en el origen de coordenadas **(0;0)** de la faja sin fin. Determine la ecuación del plano en el cual está situado los sabores especiales.

   Lo que nos piden es escontrar $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, hallar el núcleo de T.

4. El brazo robótico ha sido recalibrado para que sólo se abastezca de crema en la región triangular de vértices $(0; 0; 0)$ $(1; 0; 0)$ y $(0; 0; 1)$. Halle y represente gráficamente la imagen de dicha región vía la transformación T

   En este caso nos piden verificar si esos puntos mandan a un punto en la imagen de la transformación T.

5. Explique la razón por la cual el brazo robótico **NO** puede aplicar crema a una galleta que se encuentra en el punto de coordenadas (1;3).

   Se debe verificar que $(1; 3) \notin Im(T)$.