Matemáticas III

Factorización & Transformaciones Lineales

Semana 03

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

UTEC UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Índice

Objetivos

1. Aplica las técnicas de factorización LU para una matriz en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
2. Identificar las transformaciones lineales y sus propiedades.

1 FACTORIZACIÓN

Logros de Aprendizaje

- Utiliza las técnicas de factorización LU para una matriz.
- Aplica la factorización de Crout en la resolución de un S.E.L.

Factorización LU

Es un hecho conocido que los sistemas de ecuaciones cuyas matrices tienen alguna estructura especial como por ejemplo triangular superior o triangular inferior son muy fáciles de resolver.
Por ejemplo resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -50 \\ -28 \\ 80 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 6 & 0 \\ -7 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 1 \\ 71 \\ -5 \end{bmatrix}$$

El método se reduce a realizar sustitución hacia atrás y sustitución hacia adelante respectivamente.

Caso: Refinería

Una refinería produce gasolina con y sin azufre. Cada tonelada de gasolina sin azufre requiere 5 minutos en la planta de mezclado y 4 en la planta de refinación. Por su parte, cada tonelada de gasolina con azufre requiere 4 minutos en la planta de mezclado y 2 en la planta de refinación. Si la planta de mezclado tiene 3 horas disponibles al día y la de refinación 2 horas, ¿Cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo cada día ?

Solución:

x_1 : Cantidad de toneladas de gasolina sin azufre que se necesita producir.

x_2 : Cantidad de toneladas de gasolina con azufre que se necesita producir.

Modelo matemático:

$$5x_1 + 4x_2 = 180$$
$$4x_1 + 2x_2 = 120$$

Forma matricial: A**x**=**b**

Actividad 1

1. Descomponer la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones de la siguiente forma:
$$A = LU = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & U_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. ¿Cómo resolverá el sistema de ecuaciones $LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$?. Sugerencia: Resuelva primero el sistema $L\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$, halle $\boldsymbol{z}$, luego resuelva el sistema $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$. Finalmente, se encuentra la solución **x**. Trabaje primero en forma individual y luego comente en grupo como quedó la solución, La solución es igual a la obtenida en la sesión anterior?

- En general la factorización de una matriz A consiste en expresar A como el producto de dos o más matrices cuyas estructuras son mas simples y útiles de algín modo para fundamentalmente hacer cálculos mas acesibles con ellas.

Factorización LU

$$A = L \times U$$

L matriz triangular inferior (lower)
U matriz triangular superior (upper)

- La factorización LU de la matriz A está motivada por el muy frecuente problema industrial y de negocios que consiste en resolver una sucesión de ecuaciones, todas con la misma matriz de coeficientes:

$$Ax = b_1 \qquad Ax = b_2 \qquad \cdots \qquad Ax = b_p$$

Formalización de contenidos

- ¿Qué condiciones debe cumplir A ?
- ¿Cómo encontrar las matrices L y U ?
- ¿ Cómo resolver el sistema $Ax = b$ después de factorizar la matriz A?
- ¿Que forma de factorización elegir? (Doolittle, Crout o Cholesky)

Formas diferentes de factorización

Forma de Doolittle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Formas diferentes de factorización

Forma de Crout

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formas diferentes de factorización

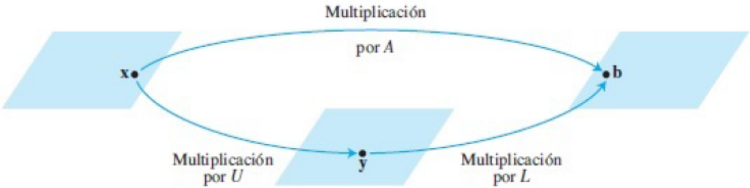
Descomposición de Cholesky

Sea A una matriz simétrica y definida positiva, existe una única matriz triangular inferior L con $l_{11} > 0$ tal que $A = L \times L^T$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

Desarrollo

- Una vez que se ha factorizado A como $L \times U$ con las condiciones indicadas, esta factorización será de utilidad para resolver de manera mas simple el sistema $Ax = b$ de acuerdo al siguiente esquema



- Es decir, luego de obtener las matrices L y U, primero se resuelve el sistema triangular inferior $Ly = b$ obteniendo el vector y, luego se resuelve el sistema triangular superior $Ux = y$ obteniendo finalmente x.

Ejemplo

Resolver el sistema $Ax = b$, sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & -8 & -3 & -1 \\ -3 & 10 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ y

$b = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 16 \\ -13 \end{pmatrix}$ Conociendo además de antemano la factorización LU de la matriz A (forma de Crout); siendo las matrices L y U las siguientes

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

Algoritmo de Crout

- El algoritmo consiste en reducir A a su forma escalonada triangular inferior L empleando solo reemplazos de columnas que suman un múltiplo de una columna a otra situada a continuación de la primera. Esto se traduce en la existencia de matrices elementales triangulares superiores unitarias $E_1, \cdots, E_p$ tales que:

$$A \times (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = L$$

Algoritmo de Crout

- El algoritmo consiste en reducir A a su forma escalonada triangular inferior L empleando solo reemplazos de columnas que suman un múltiplo de una columna a otra situada a continuación de la primera. Esto se traduce en la existencia de matrices elementales triangulares superiores unitarias $E_1, \cdots, E_p$ tales que:

$$A \times (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = L$$

- Es decir,

$$A = L \times (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p)^{-1} = L \times U$$

Algoritmo de Crout

- El algoritmo consiste en reducir A a su forma escalonada triangular inferior L empleando solo reemplazos de columnas que suman un múltiplo de una columna a otra situada a continuación de la primera. Esto se traduce en la existencia de matrices elementales triangulares superiores unitarias $E_1, \cdots, E_p$ tales que:

$$A \times (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = L$$

- Es decir,

$$A = L \times (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p)^{-1} = L \times U$$

- En consecuencia

$$U = (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p)^{-1}$$

Algoritmo de Crout

- El algoritmo consiste en reducir A a su forma escalonada triangular inferior L empleando solo reemplazos de columnas que suman un múltiplo de una columna a otra situada a continuación de la primera. Esto se traduce en la existencia de matrices elementales triangulares superiores unitarias $E_1, \cdots, E_p$ tales que:

$$A \times (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = L$$

- Es decir,

$$A = L \times (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p)^{-1} = L \times U$$

- En consecuencia

$$U = (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p)^{-1}$$

- Dado que los productos e inversos de matrices triangulares superiores unitarios son también triangulares superiores unitarios, entonces queda claro que U es triangular superior unitaria.

Ejemplo (Método de Crout)

- Encuentre la factorización LU mediante el método de CROUT para la matríz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & 9 \\ 4 & 10 & 10 & 8 \\ 5 & 16 & 12 & 35 \\ 3 & 11 & 5 & 20 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Método de Crout)

- Reducimos la matríz A a su forma escalonada tringular inferior (realizando operaciones elementales por **columnas**), se muestra el proceso:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{9} & \boxed{6} & \boxed{9} \\ 4 & 10 & 10 & 8 \\ 5 & 16 & 12 & 35 \\ 3 & 11 & 5 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \boxed{-2} & \boxed{2} & \boxed{-4} \\ 5 & 1 & 2 & 20 \\ 3 & 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & \boxed{3} & \boxed{18} \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Algoritmo para hallar L y U

- Luego tomamos a la matríz obtenida en el proceso anterior como la matríz triangular INFERIOR $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Algoritmo para hallar L y U

- Luego tomamos a la matríz obtenida en el proceso anterior como la matríz triangular INFERIOR $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- En tanto para la matriz triangular SUPERIOR U consideramos las filas marcadas en el proceso para hallar L haciendo que la diagonal finalmente tenga como entrada el valor 1, obteniendo asi: $U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Algoritmo para hallar L y U

- Luego tomamos a la matríz obtenida en el proceso anterior como la matríz triangular INFERIOR $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- En tanto para la matriz triangular SUPERIOR U consideramos las filas marcadas en el proceso para hallar L haciendo que la diagonal finalmente tenga como entrada el valor 1, obteniendo asi: $U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Ejercicio verifique que $L \times U = A$

Algoritmo General de factorización LU

Dada la matriz A, al considerar la igualdad $A = L \times U$, es decir en componentes

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Obtenemos las matrices L y U aplicando el siguiente algoritmo genérico que se muestra a continuación.

Algoritmo general

1. Leer $A_{n\times n}$
2. Asignar $U = A$, $L = I$
3. Desde k=1 hasta n-1

   $L(k+1:n,k) = U(k+1:n,k)/U(k,k)$

   Desde i=k+1 hasta n

   $U(i,1:n) = U(i,1:n) - L(i,k) * U(k,1:n)$
4. Salida L y U

Algoritmo de Crout

1. Leer $A_{n\times n}$
2. Asignar $L = A$, $U = I$
3. Desde k=1 hasta n-1

   $U(k, k+1:n) = L(k, k+1:n)/L(k,k)$

   Desde j=k+1 hasta n

   $L(1:n, j) = L(1:n, j) - U(k, j) * L(1:n, k)$
4. Salida L y U

Ejercicio

- Aplique el algoritmo anterior (CROUT) al caso de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -20 & -28 \\ 7 & 41 & 67 \\ 8 & 30 & 30 \end{bmatrix}$$

- Utilizando la factorización anterior, resuelva el sistema

$$\begin{bmatrix} -4 & -20 & -28 \\ 7 & 41 & 67 \\ 8 & 30 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ -92 \\ -110 \end{bmatrix}$$

Actividad 2

Una pequeña empresa maderera tiene dos camiones m y n que pueden cargar 3 y4 toneladas respectivamente, estos dos camiones hicieron 23 viajes en total para abastecer con 80 toneladas de madera a la empresa. Se necesita saber la cantidad de viajes que realizó cada camión para presupuestar el gasto de combustible.

1. Modele el sistema de ecuaciones en su forma matricial $AX = b$.
2. Luego de factorizar la matriz de coeficientes A del sistema planteado en la forma $A = L \times U$ (forma de Crout) resuelva el sistema planteado.

2 TRANSFORMACIONES LINEALES

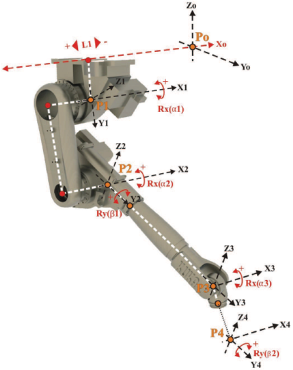
Logros de Aprendizaje

- Reconoce las transformaciones lineales.

¿Para qué nos sirven las Transformaciones Lineales?

Las Transformaciones Lineales son muy utilizadas entre otras aplicaciones en el diseño de brazos robóticos en la industria. El brazo robótico se construyó mediante el uso del software CAD (Computer-Aided Design, diseño asistido por computador) Solidworks®, teniendo en cuenta especificaciones del fabricante y siguiendo los lineamientos de ingeniería que nos permiten entender el funcionamiento básico del mismo. El trabajo de simulación ha sido realizado usando MATLAB®.

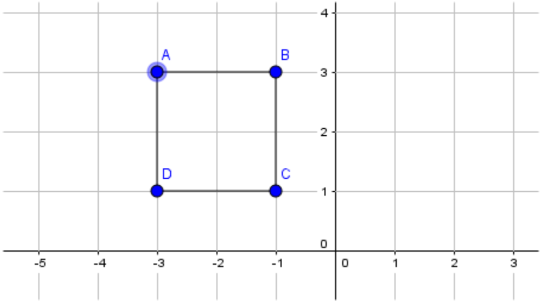
Actividad 1



Transformaciones lineales de dimensión finita, aplicadas al desarrollo del modelo cinemático directo para el robot KUKA KR 60 JET.

La Geometría de las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$

Imagina que quieres reflejar el cuadrado que se muestra en la figura con respecto al eje X.



¿Cuáles serían las coordenadas de los nuevos puntos A,B, C y D? Identifícalos como A';B';C' y D'.

Continuación..

Si consideramos que T es la función que lleva el punto A en el punto A', al punto B en el punto B' y así sucesivamente, complete la tabla siguiente:

$$
\begin{aligned}
T(A) = A' &\rightarrow T(-3;3) = (-3;-3) = A' \\
T(B) = B' &\rightarrow T(-1;3) = (-1;\quad) = B' \\
T(C) = C' &\rightarrow T(-1;1) = (\quad;\quad) = C' \\
T(D) = D' &\rightarrow T(\quad;\quad) = (\quad;\quad) = D'
\end{aligned}
$$

!! Intenten definir la regla de correspondencia de $T(x;y)$!!

$$T(x;y) = (\quad;\quad)$$

Formalización de contenidos

- Definición de una transformación lineal.
- Matriz de una transformación lineal

Definición

Una transformación Lineal es una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con las siguientes propiedades

1. Para cada $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
2. Para cada $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $c \in \mathbb{R}$, $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$

Ejemplo

Dado $T : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ definido por $T(x) = 5x$. Demuestre que T es una transformación Lineal.

Observaciones

- Muchas funciones no son transformaciones lineales:

$$\cos(x+y) \neq \cos(x) + \cos(y), \qquad \text{o} \quad (2x)^2 = 2(x^2)$$

- Para cualquier transformación lineal $T(\vec{0}) = \vec{0}$

Ejemplo

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T(1;0;0) = (2;-1;4),\ T(0;1;0) = (1;5;-2),\ T(0;0;1) = (0;3;1)$$

Encontrar $T(2;3;-2)$

Solución:

$$(2;3;-2) = 2(1;0;0) + 3(0;1;0) - 2(0;0;1)$$

$$\begin{aligned} T(2;3;-2) &= 2T(1;0;0) + 3T(0;1;0) - 2T(0;0;1) \\ &= 2(2;-1;4) + 3(1;5;-2) - 2(0;3;1) \\ &= (7;7;0) \end{aligned}$$

Conclusiones

Gracias por su atención