

# Matemáticas III

Matrices y Sistemas de  
Ecuaciones Lineales

**Semana 01**

**Hermes Pantoja Carhuavilca**

(hpantoja@utec.edu.pe)

**Brigida Molina Carabaño**

(bmolina@utec.edu.pe)

**Rosulo Perez Cupe**

(rperezc@utec.edu.pe)

**Asistente: Victor Anhuaman**

(vanhuaman@utec.edu.pe)



# Índice

- 1 Nociones elementales de matrices y determinantes**
- 2 Consistencia de un S.E.L**
- 3 Espacio Nulo de una matriz**

# Objetivo

Aplicar operaciones con matrices y determinantes, así como el ordenamiento de información en términos matriciales para modelar situaciones de contexto real con sistemas de ecuaciones lineales analizando la consistencia del sistema y establecer el concepto de espacio nulo de una matriz.

A photograph of a modern, multi-story building with a grid of large glass windows. The building is set against a clear blue sky. In the bottom right corner, there is some faint text that appears to be "UTEC".

**1**

# NOCIONES ELEMENTALES DE MATRICES Y DETERMINANTES

# Logros de Aprendizaje

- 1 Aplica operaciones con matrices y determinantes.
- 2 Ordena la información en términos matriciales usando la notación matricial.
- 3 Modela en forma matricial situaciones reales.

# Actividad 1



# Medallero de algunos países en las Olimpiadas Tokio 2020

En las olimpiadas de Tokio 2020, **Estados Unidos** obtuvo 113 medallas de las cuales 39 fueron de Oro, 41 de plata y 33 de Bronce. **Gran Bretaña** obtuvo 65 medallas de las cuales 22 fueron de oro, 21 de plata y 22 de Bronce. **China** obtuvo 88 medallas de las cuales 38 fueron de Oro, 32 de Plata y 18 de Bronce. **Rusia** (Los deportistas Rusos compitieron bajo el nombre de **ROC**) obtuvo 71 medallas de las cuales 20 fueron de Oro, 28 de Plata y 23 de Bronce. **Alemania** obtuvo 37 medallas de las cuales 10 fueron de Oro, 11 de Plata y 16 de Bronce.

# Formalización de contenidos

- Definición de una Matriz
- Tipos de matrices

P1

Organizar la información en una tabla que describa el número de medallas de Oro, Plata y Bronce que obtuvo cada país mencionado.

## Solución

# Formalización de contenidos

Operaciones con Matrices:

- Suma de Matrices
- Multiplicación de una matriz por un escalar
- Multiplicación de Matrices

P2

Calcule el número total de cada tipo de medallas que han conseguido Estados Unidos, Gran Bretaña, China, Rusia y Alemania en los dos últimos Juegos Olímpicos: Tokio 2020 y Río 2016. **Sugerencia: Se debe organizar la información del segundo medallero conservando el orden presentado en el primer medallero**

**Solución:**

### P3

Si se parte del supuesto que en los Juegos Olímpicos Tokio 2020, los jugadores de los países de Estados Unidos, Gran Bretaña, China, Rusia y Alemania recibieron por parte de marcas patrocinadoras cierta cantidad de dinero para cubrir algunos de los gastos que se presentaran en las olimpiadas y se cree que para los juegos de Paris 2024, tales marcas coincidentemente incrementarían sus aportes en un 20 % para los jugadores de los países mencionados. Pronostique la cantidad que percibirán esos países.

	Aporte Patrocinadores
Estados Unidos	20000
Gran Bretaña	30000
China	27000
Rusia	25000
Alemania	10000

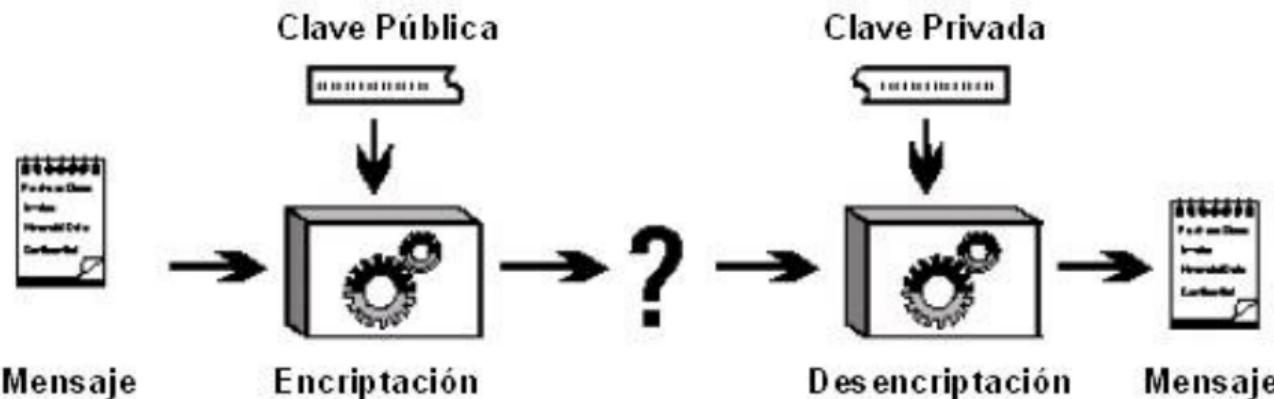
**Solución:**

## P4

Se parte del supuesto que en estos Juegos Olímpicos 2020, cada participante ganador de cualquiera de las medallas, se llevaba además de estas, dinero según la medalla recibida. Calcule la cantidad de dinero que recibieron los jugadores de china. Calcule la cantidad de dinero que recibieron los otros países.

	Cantidad de dinero por tipo de medalla(Euros)
Oro	94000
Plata	48000
Bronce	30000

# Actividad 2



# Sistema Criptográfico

El cifrado o encriptación es la transformación de datos a alguna forma ilegible. Su finalidad es asegurarla privacidad, manteniendo la información oculta a cualquiera a quién no ha sido destinada, incluso para aquellos que pueden ver los datos cifrados. El descifrado o des encriptación es el reverso decifrado; es la transformación de los datos cifrados, de vuelta en alguna forma entendible.

Considere

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_							
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27							

# Formalización de contenidos

- Inversa de una matriz.
- Determinante - Propiedades

P1

Halle el mensaje original  $M$  a encriptar, si se cumple  $K_1 \times M = C$ , donde:

$K_1$  : Clave Pública para encriptar mensaje.

$C$  : Mensaje encriptado.

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 19 & 15 & 25 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

## P2

Dada la Clave Privada  $K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y el mensaje encriptado  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

Halle el determinante de la matriz correspondiente al mensaje original M. Sabiendo ahora que  $M = K_2 \times C$ . Con una clave adicional, si el determinante es cero, no considerar el mensaje.

**Solución:**



**2**

**CONSISTENCIA DE  
UN S.E.L**

# Logros de Aprendizaje

- 1 Modela en forma matricial situaciones reales.
- 2 Determina la consistencia de un S.E.L. a través del rango de una matriz.

# Actividad 3



# Torres de Destilación

Los equipos fundamentales en una refinería de petróleo son las torres (o columnas) de destilación, en donde se lleva a cabo la separación de los diversos componentes del petróleo, para posteriormente ser procesados y de esta manera llegar al consumidor como gasolina en sus diferentes versiones. La operación de dichas torres se sustenta en un balance de materia y energía dando lugar éstos a **sistemas de ecuaciones lineales**.

# Formalización de contenidos

- Modelamiento de Sistema de Ecuaciones Lineales.
- Consistencia de un Sistema de Ecuaciones Lineales.

P1

Una refinería produce gasolina con y sin azufre. Cada tonelada de gasolina sin azufre requiere 5 minutos en la planta de mezclado y 4 en la planta de refinación. Por su parte, cada tonelada de gasolina con azufre requiere 4 minutos en la planta de mezclado y 2 en la planta de refinación. Si la planta de mezclado tiene 3 horas disponibles al día y la de refinación 2 horas, ¿ Cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo cada día ?

# Continuación...

- 1 Modele el sistema de ecuaciones lineales
- 2 Determine si el sistema es consistente determinado.

**Solución:**

# Solución de Sistema de Ecuaciones Lineales

## Forma Algebraica

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables y  $a_{ij}, b_j$  son constantes.

# Solución de Sistema de Ecuaciones Lineales

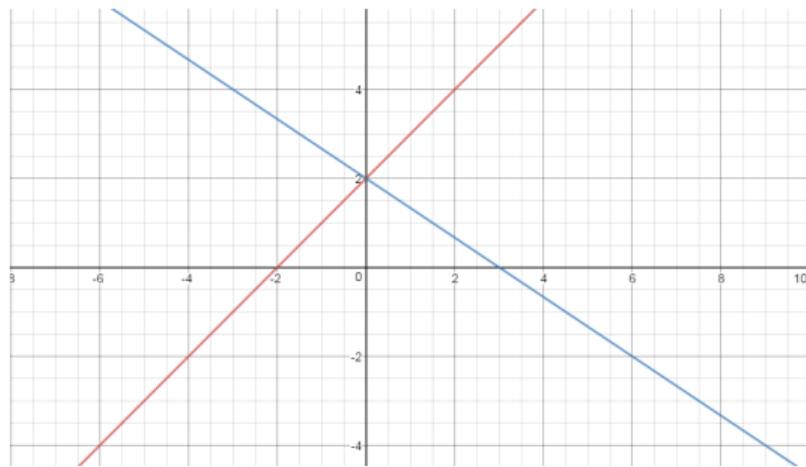
## Forma Matricial

$$A_{m \times n} x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$$

Donde  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ;  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ;  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

## Ejemplos

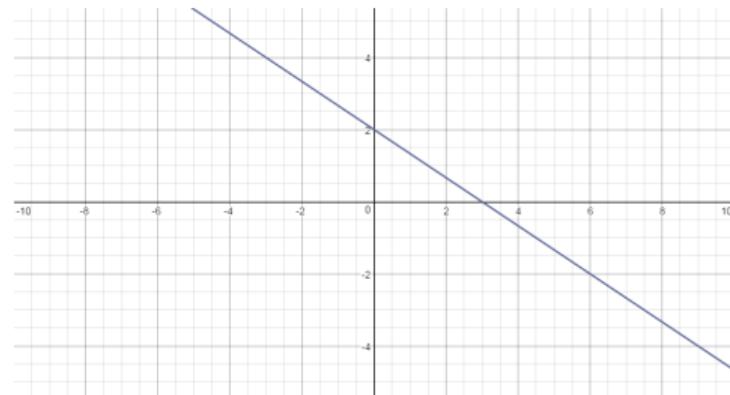
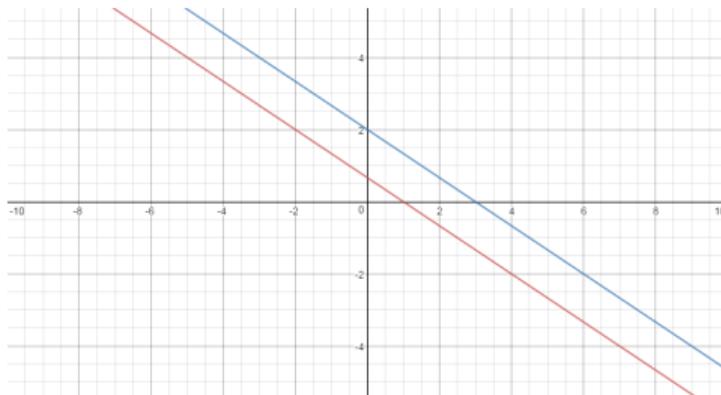
Encontrar el punto de intersección de las rectas  $x - y = -2$ ;  $2x + 3y = 6$



## Ejemplos

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 6y = 12 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$



# Teorema de Rouché Frobenius

## Rouché Frobenius

Para el sistema de ecuaciones en su forma matricial  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Sistema Compatible	<b>Compatible Determinado</b>
	Si $\text{rang}(A)=\text{rang}(A b)=n$
Sistema Incompatible	<b>Compatible Indeterminado</b>
	$\text{rang}(A)=\text{rang}(A b) < n$
Sistema Incompatible	<b>No tiene solución</b>
	Si $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A b)$



# 3 ESPACIO NULO DE UNA MATRIZ

# Logros de Aprendizaje

- 1 Establece el concepto de espacio nulo de una matriz.

# Espacio Nulo de una matriz

## Definición

El espacio nulo de una matriz  $A$  de orden  $m \times n$  denotado como  $N(A)$ , es el conjunto de todas las soluciones del sistema lineal homogénea  $AX = 0$ .

$$N(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \setminus AX = 0\}$$

## Ejemplo

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$  y sea  $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Determine si  $u$  pertenece al espacio nulo de  $A$ .

# Conclusiones

# Videos

Algunos videos a revisar

- Una explicación de Introducción a Matrices
- Un ejemplo de sistema compatible determinado

**Gracias por su  
atención**

