Matemáticas III
Exámen E1
Pregrado
2021-1

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.

Duración 60 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Responda Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Si $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, entonces $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

2. [**2 ptos**] El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 = k \end{cases}$$

tiene única solución para cualquier valor de k.

PROCEDIMENTAL

3. Considere el número real a y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ 4x + 2y + az \end{bmatrix}$

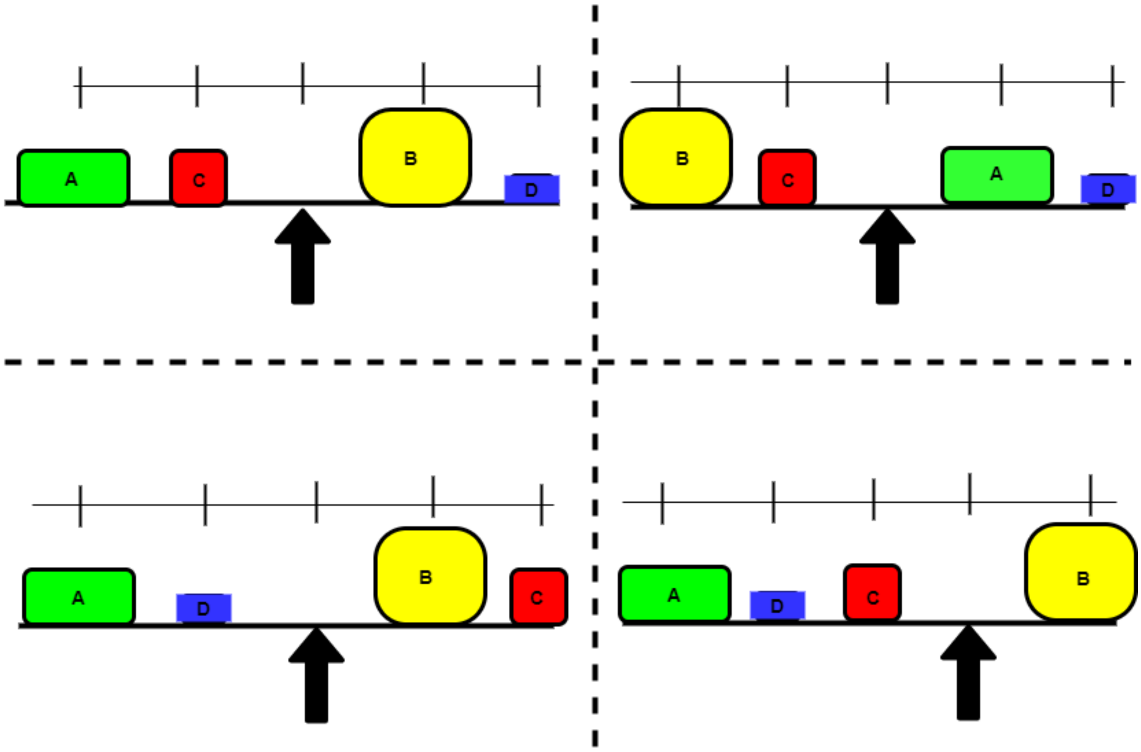
   a) [**1.5 ptos**] Sabiendo que el núcleo de la transformación T es el plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación general es $\mathcal{P} : x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0$, halle el valor de a.
   Sugerencia: tome cualquier punto del plano $\mathcal{P}$

   b) [**2.5 ptos**] Si $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es otra transformación lineal cuya matriz asociada es $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, halle la imagen de S

4. [**2 ptos**] Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ n & -1 & n-3 \end{bmatrix}$ la cual depende del parámetro n, halle la factorización LU de A forma de CROUT, en términos de n. Indique las operaciones elementales que realiza y paso a paso su procedimiento.

APLICACIONES

5. **Palanca en equilibrio [10 puntos]** Considerando el concepto de momento, para que un sistema de masas (como el mostrado en la figura) se mantenga en equilibrio, se requiere que la sumatoria de momentos respecto a un punto (en el caso de la figura el punto hacia donde apunta la flecha) sea igual a cero. Suponiendo que se tiene cuatro bloques cuyas masas están representados por A, B, C y D (en kg) y están dispuestos en diferente orden en cada una de las 4 situaciones mostradas, además se sabe que las distancias señaladas son todas iguales a 1m. Se plantea el problema de hallar las masas de los 4 bloques, suponiendo que en todos los casos el sistema de bloques se mantiene en equilibrio.



   a) **[3 ptos] Formule un sistema homogeneo** (lado derecho igual a cero) de 4 ecuaciones con 4 incógnitas A, B, C y D (en dicho orden) en forma algebraica y matricial cuya solución permita hallar las masas de los bloques.

   b) **[2 ptos]** Si M es la matriz de coeficientes del sistema planteado en el item anterior, donde $|det(M)| = 45$, teniendo en cuenta el valor proporcionado **resuelva el sistema (en caso sea posible)** y luego **interprete la solución** obtenida de acuerdo al contexto presentado.

c) [**3 ptos**] Fijando la masa del bloque D en 10kg, **formule un nuevo sistema de 4 ecuaciones** en las incognitas A, B y C, y luego de identificar la matriz aumentada **halle su forma escalonada** mediante operaciones elementales, a partir de la forma escalonada hallada **determine los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz aumentada.**
Nota: En la solución de este item debe indicar las operaciones elementales realizadas en cada paso.

d) [**2 ptos**] Utilizando la matriz escalonada obtenida en el item anterior y el teorema de Rouche-Frobenius concluya respecto a la consistencia del sistema y finalmente halle la solución (en caso exista) o argumente la razón por la cual no existe solución.