

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA ENERGIA**  
**INSTITUTO DE INVESTIGACION**

**INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACION**

**“TEXTO: METODOS NUMERICOS PARA  
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS  
CON MATLAB”**

**AUTOR**  
**ANDRES COLLANTE HUANTO**  
**LICENCIADO EN MATEMATICA**

**(Periodo de ejecucion: 01 de Mayo de 2010 al 30 de Abril de  
2011)**

**(Resolución Rectoral N°579-2010-R)**

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>iv</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>Parte teórica o marco teórico</b>	<b>1</b>
<b>1. Método de Euler</b>	<b>1</b>
1.1. Algoritmo de Euler . . . . .	2
1.2. Programa del método de Euler . . . . .	3
1.3. Problemas propuestos . . . . .	9
<b>2. Métodos de Taylor de orden superior</b>	<b>12</b>
2.1. Algoritmo de Taylor de orden $n$ . . . . .	14
2.2. Problemas propuestos . . . . .	18
<b>3. Métodos de Runge-Kutta</b>	<b>21</b>
3.1. Método del punto medio . . . . .	22
3.2. Método Modificado de Euler . . . . .	23
3.3. Método de Heun . . . . .	23
3.4. Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden . . . . .	23
3.4.1. Algoritmo del Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden . . . . .	24
3.4.2. Programa del Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden . . . . .	24
3.5. Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden para Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	26
3.5.1. Algoritmo del Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden para sistemas . . . . .	28
3.5.2. Vibración en una banda transportadora . . . . .	29
3.5.3. Algoritmo Runge-Kutta cuarto orden para un sistema $Y' = MY + F$	34

3.5.4. Monorriel de dos carros . . . . .	35
3.5.5. Programa del Método de Runge-Kutta . . . . .	38
3.5.6. Instrumento sísmico . . . . .	43
3.6. Problemas propuestos . . . . .	46
<b>4. Control del error y el método de Runge-Kutta-Fehlberg</b>	<b>50</b>
4.1. Algoritmo del Método de Runge-Kutta-Fehlberg . . . . .	53
4.2. Programa del Método de Runge-Kutta-Fehlberg . . . . .	54
4.3. Problemas propuestos . . . . .	57
<b>Materiales y Métodos</b>	<b>59</b>
<b>Resultados</b>	<b>60</b>
<b>Discusión</b>	<b>62</b>
<b>7. Bibliografía</b>	<b>64</b>
<b>Apéndice A: Introducción al programa Matlab</b>	<b>66</b>
A.1 Vectores y matrices . . . . .	66
A.2 Gráfica de funciones . . . . .	66
A.3 Programación . . . . .	67
<b>Apéndice B: Unicidad de la solución de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales</b>	<b>69</b>
B.1 Condición de Lipshitz . . . . .	69
B.2 Teorema de Unicidad . . . . .	69
<b>Apéndice C: Orden del Método de Runge Kutta</b>	<b>70</b>

# Índice de figuras

1.1. Línea poligonal de aproximación dada por el método de Euler . . . . .	2
1.2. Gráfica para distintos tamaños de $h$ , por el método de Euler . . . . .	5
1.3. Gráfica de la velocidad versus tiempo del paracaidista . . . . .	7
3.1. Sistema de banda transportadora . . . . .	29
3.2. Caso $v_0 = 0.5m/s$ , gráfica de desplazamientos versus tiempo . . . . .	32
3.3. Caso $v_0 = 1m/s$ , gráfica de desplazamientos versus tiempo . . . . .	33
3.4. Caso $v_0 = 1.5m/s$ , gráfica de desplazamientos versus tiempo . . . . .	34
3.5. Proceso monorriel de dos carros más un carro de máquinas. . . . .	35
3.6. Diagrama de cuerpo libre de $M_3$ . . . . .	36
3.7. Diagrama de cuerpo libre de $M_2$ . . . . .	36
3.8. Diagrama de cuerpo libre de $M_1$ . . . . .	37
3.9. Gráfica de desplazamientos y velocidades del monorriel . . . . .	42
3.10. Modelo de un instrumento sísmico . . . . .	44
3.11. Gráficas de desplazamiento y velocidad de un instrumento sísmico . . . .	45
3.12. Resortes . . . . .	48
3.13. Intercambiador de calor . . . . .	49
1. Gráfica de $x\cos(x)$ y $\sin(x)$ . . . . .	67

# Resumen

Las ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan una realidad específica, aumentan su complejidad en la medida que se aproximen cada vez más al comportamiento del objeto o fenómeno en estudio, razón por la cual en la mayoría de los casos hallar su solución por métodos analíticos es imposible lo que nos lleva a utilizar los métodos numéricos.

Estos métodos pueden implementarse en programas de cómputo elaborados en Matlab, los que me permiten determinar las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de modo que el lector encuentre una herramienta para modelar sus propias aplicaciones.

El trabajo de investigación tiene como objetivo; elaborar un texto de Métodos Numéricos para resolver Ecuaciones Diferenciales ordinarias con Matlab, en el que se desarrollan los métodos numéricos: De Euler, de Taylor de orden superior y Runge-Kutta.

La información de los temas tratados se obtuvieron de las referencias bibliográficas presentadas y de las páginas de internet como; Mathworks, Scielo, es.scribd.com, Macgraw-hill.es y sciencedirect.com por consiguiente la técnica usada es documental, bibliográfica.

En los capítulos desarrollados se da una idea de como se llega a plantear la teoría general, utilizando de esta manera el método inductivo y se da un ejemplo de aplicación, utilizando el software Matlab donde se ilustra la teoría general planteada.

La solución que se obtiene al usar los métodos numéricos es una aproximación a la solución real, que para nuestro caso se puede mejorar reduciendo el tamaño de paso  $h$ .

El método de Runge-Kutta de cuarto orden da respuestas más exactas que el resto de los métodos presentados en este texto.

# Introducción

En ingeniería hay procesos que son modelados con ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución es imposible determinar por métodos analíticos es allí la utilidad de los métodos numéricos que calcula una solución aproximada por medio de un número finito de iteraciones que mejora su eficiencia de manera rápida, al utilizar un software adecuado.

Un consolidado del planteamiento del problema es, la carencia de una adecuada bibliografía que desarrolle los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias con matlab, nos lleva a elaborar un texto de Métodos Numéricos que desarrolle dicho tema.

Como objetivos se tiene desarrollar:

En el **Capítulo 1** el Método de Euler.

En el **Capítulo 2** los Métodos de Taylor de orden superior.

En el **Capítulo 3** los Métodos de Runge-Kutta.

En el **Capítulo 4** el Control del error y el método de Runge-Kutta-Fehlberg.

El presente trabajo es importante porque nos proporciona un texto amigable de Métodos Numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias con Matlab y se justifica porque en ingeniería hay procesos que son modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias cuya solución es imposible determinar mediante métodos analíticos, razón más que suficiente para preocuparse en elaborar un texto que resuelva el problema.

Cada capítulo consta de una introducción teórica, una colección de problemas resueltos y otros tantos propuestos. La resolución de cada problema se lleva a cabo con el software Matlab, el cual reduce considerablemente el esfuerzo de programación y facilita la representación gráfica de los resultados.

## Capítulo 1

### Método de Euler

Sea el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.1)$$

supongamos que tiene una solución única  $\phi(x)$  en un algún intervalo con centro en  $x_0$ . Sea  $h > 0$  y consideremos puntos igualmente espaciados

$$x_n = x_0 + nh \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Los valores de la solución  $\phi(x_n)$  se pueden aproximar con  $y_n$ , donde los valores de  $y_n$  se obtienen como sigue [KEN 92]:

En el punto  $(x_0, y_0)$  la pendiente de la solución de (1.1) es  $\frac{dy}{dx} = f(x_0, y_0)$ . Por lo tanto, la recta tangente a la curva solución en el punto  $(x_0, y_0)$  es

$$y = y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0) \quad (1.2)$$

Si se usa (1.2) como una aproximación a  $\phi(x)$ , en el punto  $x_1 = x_0 + h$

$$\phi(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

En seguida, empezando en el punto  $(x_1, y_1)$  con pendiente  $f(x_1, y_1)$ , se tiene la recta  $y = y_1 + (x - x_1)f(x_1, y_1)$  al pasar de  $x_1$  a  $x_2 = x_1 + h$  nos da la aproximación

$$\phi(x_2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

al repetir el procedimiento se obtiene

$$\phi(x_3) \approx y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

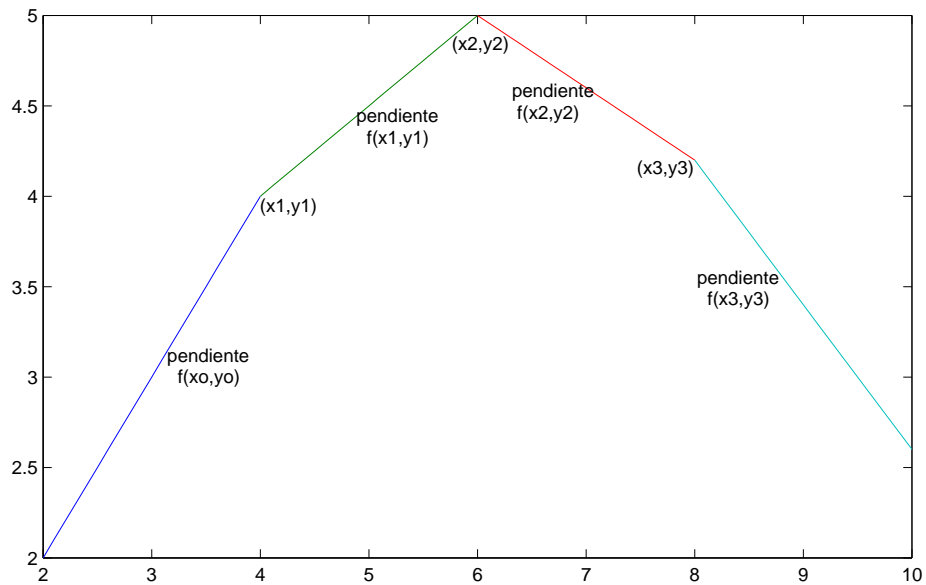


Figura 1.1: Línea poligonal de aproximación dada por el método de Euler

$$\phi(x_4) \approx y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) \quad , \text{ etc}$$

Este sencillo procedimiento se llama **Método de Euler**<sup>1</sup> y se resume mediante las siguientes fórmulas recursivas

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{1.3}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.4}$$

## 1.1. Algoritmo de Euler

Este algoritmo calcula la solución del problema de valor inicial (1.1) en puntos equidistantes  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h, \dots, x_N = x_0 + Nh$ , aquí  $f$  es tal que (1.1) tiene una solución única en  $[x_0, x_N]$ .

1. Entrada: Valores iniciales  $x_0, y_0$ , tamaño de paso  $h$  y número de pasos  $N$
2. Para  $n=0, \dots, N-1$ , hacer

---

<sup>1</sup>Leonhard Euler, fue un matemático y físico suizo. Se trata del principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes de todos los tiempos.



$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Salida  $x_{n+1}, y_{n+1}$

3. Parar

## 1.2. Programa del método de Euler

Vamos a programar el método de Euler usando dos function llamadas euler y fe. La función  $y=euler(n,a,b,h)$  tiene cuatro argumentos de entradas y un argumento de salida, donde  $n$  es el numero de pasos,  $a=x_0$ ,  $b=y(x_0)$  y  $h$  el tamaño de paso.

**Programa euler.m**

```
function y=euler(n,a,b,h)
format long
x=a:h:n*h;
y=zeros(n,1);
y(1)=b;
for k=1:n
    f=fe(x(k),y(k));
    y(k+1)=y(k)+h*f;
end
```

En la function fe se define la función  $f$  de (1.1)

**Programa fe.m**

```
function f=fe(x,y)
f=-y+x+2;%es la función del ejemplo 1
```

### Ejemplo 1

Sea la ecuación diferencial  $y' = -y + x + 2$  con la condición inicial  $y(0) = 2$ , usando el método de Euler con  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$  y  $h = 0.01$ , aproximar  $y(1)$ .

### Solución

Al usar el programa euler.m necesitamos hallar el valor de  $n$ , que lo podemos obtener de

$$n = \frac{x_N - x_0}{h}$$

donde para nuestro problema  $x_0 = 0$  y  $x_N = 1$  pues  $y(1) = y(x_N)$

Para  $h = 0.1$ , tenemos  $n = \frac{1-0}{0.1} = 10$ . Se digitó `>>euler(10, 0, 1, 0.1)`

Para  $h = 0.05$  tenemos  $n = \frac{1-0}{0.05} = 20$ . Se digitó `>>euler(20, 0, 1, 0.05)`  
 Para  $h = 0.01$  tenemos  $n = \frac{1-0}{0.01} = 100$ . Se digitó `>>euler(100, 0, 1, 0.01)`  
 Se obtuvo los siguientes valores

$x_n$	$h=0.1$	$h=0.05$	$h=0.01$
0.0	2.0000000000000000	2.0000000000000000	2.0000000000000000
0.1	2.0000000000000000	2.0025000000000000	2.004382075008805
0.2	2.0100000000000000	2.0145062500000000	2.017906937597231
0.3	2.0290000000000000	2.0350918906250000	2.039700373388280
0.4	2.0561000000000000	2.063420431289063	2.068971758569680
0.5	2.0904900000000000	2.098736939238379	2.105006067137536
0.6	2.1314410000000000	2.140360087662637	2.147156642390761
0.7	2.1782969000000000	2.187674979115530	2.194838659600207
0.8	2.2304672100000001	2.240126668651766	2.247523213763810
0.9	2.2874204890000001	2.297214318458219	2.304731972678324
1.0	2.3486784401000001	2.358485922408543	2.366032341273229

donde  $y(1) \approx 2.3486784401000001$  para  $h=0.1$ ,  $y(1) \approx 2.358485922408543$  para  $h=0.05$  e  $y(1) \approx 2.366032341273229$  para  $h=0.01$ .

Utilizando la solución analítica de la ecuación diferencial tenemos los siguientes valores:

$x_n$	$y = e^{-x} + x + 1$
0.0	2.0000000000000000
0.1	2.004837418035960
0.2	2.018730753077982
0.3	2.040818220681718
0.4	2.070320046035640
0.5	2.106530659712633
0.6	2.148811636094027
0.7	2.196585303791410
0.8	2.249328964117222
0.9	2.306569659740599
1.0	2.367879441171442

donde  $y(1) = 2.367879441171442$

Notemos que cuando se reduce el tamaño de paso  $h$  se obtiene una mejor aproximación,

se reduce el error que se comete.

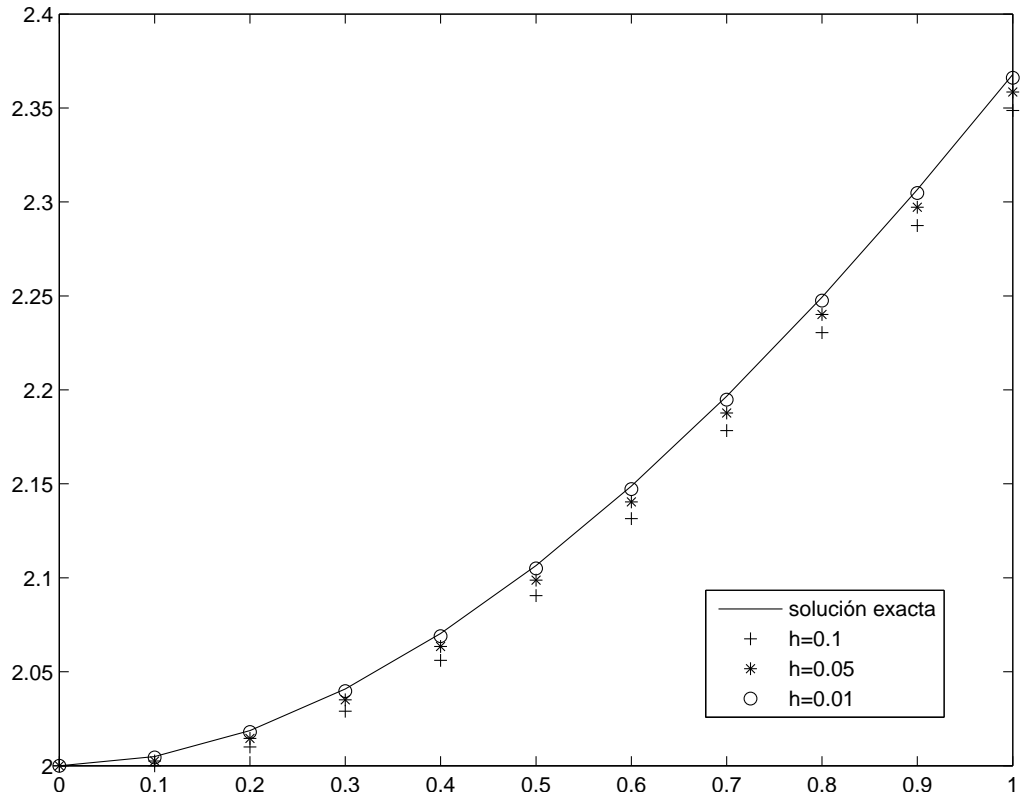


Figura 1.2: Gráfica para distintos tamaños de  $h$ , por el método de Euler

## Ejemplo 2

Un paracaidista de masa  $M$  kg salta desde un avión en  $t = 0$ . Consideremos que la velocidad vertical inicial del paracaidista es cero en  $t = 0$  y que la caída es vertical. Si el arrastre aerodinámico está dado por  $F_{aire} = cv^2$ , donde  $c$  es una constante y  $v$  es la velocidad vertical(positiva hacia abajo), asuma  $M = 70kg$ ,  $c = 0.27kg/m$  y  $h = 0.1$ . Halle la velocidad del paracaidista para  $t \leq 20s$

### Solución

Por la primera ley de Newton, el equilibrio de fuerzas satisface

$$M \frac{dv(t)}{dt} = -F_{aire} + gM \quad (1.5)$$

donde  $v$  es la velocidad del paracaidista en  $m/s$ (positiva hacia abajo) y  $g$  es la aceleración debida a la gravedad,  $9.8m/s^2$ . La ecuación (1.5) puede escribirse como:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{c}{M^2}v^2 + g, \quad v(0) = 0 \quad (1.6)$$

que es lo mismo a,

$$v' = f(t, v), \quad v(0) = 0$$

reemplazando los valores indicados arriba,tenemos

$$f(t, v) = -\frac{0.27}{70}v^2 + 9.8$$

### Programa euler1.m

```
function [x y]=euler1(n,a,b,h)
%Resuelve el problema de paracaidista
format long
x=a:h:n*h;
y=zeros(n,1);
y(1)=b;
for k=1:n
    f=fe1(x(k),y(k));
    y(k+1)=y(k)+h*f;
end
plot(x,y)
grid
xlabel('tiempo(s)');
ylabel('velocidad(m/s)');
```

Programa fe1.m

```
function y1=fe1(x,y)
y1=(-0.27/70)*y^2+9.8;
```

Ejecutamos el programa >>euler1(200,0,0,0.1) donde n=200 es el número de intervalos, la longitud de la partición es  $h = 0.1$  como la condición inicial es  $v(0) = 0$  entonces  $a = 0$  y  $b = 0$

Tenemos los siguientes resultados numéricos, que se grafican en la figura (1.3)

$t_i(s)$	$v_i(m/s)$
0	0
0.1	9.800000000e-001

0.2	1.95962956e+000
0.3	2.93814836e+000
0.4	3.91481860e+000
0.5	4.88890722e+000
⋮	⋮
19.5	5.03604023e+001
19.6	5.03621653e+001
19.6	5.03638597e+001
19.8	5.03654884e+001
19.9	5.03670537e+001
20.0	5.03685582e+001

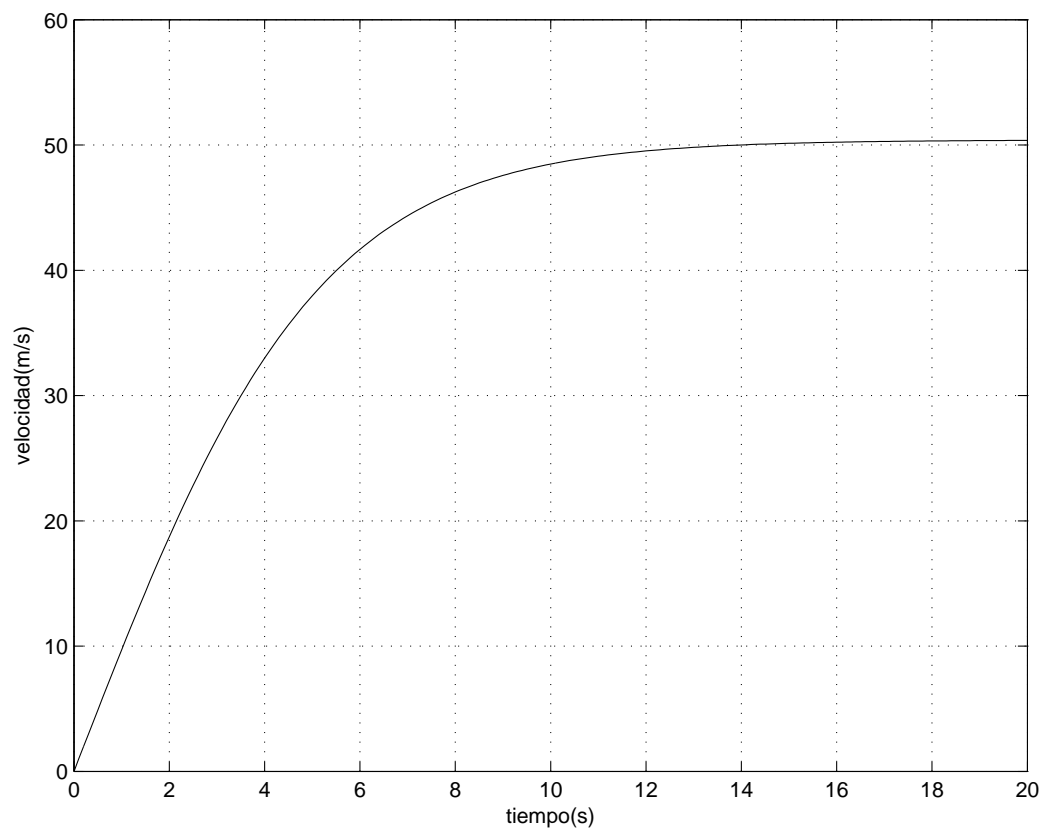


Figura 1.3: Gráfica de la velocidad versus tiempo del paracaidista

**Definición 1.2.1.** *Se dice que una función  $f(t, y)$  satisface la condicion de Lipschitz en*

la variable  $y$  en un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  si existe una constante  $L > 0$  con la propiedad

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in D$ . A la constante  $L$  se le llama constante de Lipschitz para  $f$

### Ejemplo

Si  $D = \{(t, y) / -1 \leq t \leq 10, -6 \leq y \leq 20\}$  y  $f(t, y) = y \cos(t)$  entonces para cada par de puntos  $(t, y_1), (t, y_2) \in D$  tenemos

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 \cos(t) - y_2 \cos(t)| \leq |y_1 - y_2|$$

donde  $L = 1$ , se dice que  $f$  satisface la condición de Lipschitz en  $D$  en la variable  $y$  con la constante 1 de Lipschitz

**Teorema 1.1.** Sea  $f(t, y)$  está definida en un conjunto convexo  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Si existe una constante  $L > 0$  con

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq L, \quad \forall (t, y) \in D$$

entonces  $f$  satisface la condición de Lipschitz en  $D$  en la variable  $y$  con la constante  $L$  de Lipschitz

### Ejemplo

La función  $f(t, y) = y \cos(t)$  satisface

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| = |\cos(t)| \leq 1 \quad \forall (t, y) \in D = \{(t, y) / -1 \leq t \leq 10, -6 \leq y \leq 20\}$$

observemos que  $L = 1$

**Teorema 1.2.** Sea  $f$  continua y satisface la condición de Lipschitz con la constante  $L$  en

$$D = \{(t, y) / a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

y que existe una constante  $M$  con la propiedad de que  $|y''(t)| \leq M \forall t \in [a, b]$

Si  $y(t)$  es la solución única del problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

y sean  $y_0, y_1, \dots, y_n$  las aproximaciones generadas con el método de Euler para algún entero positivo  $N$ , entonces

$$|y(t_i) - y_i| \leq \frac{hM}{2L} [e^{L(t_i-a)} - 1] \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, N$$

### Ejemplo

Sea el problema de valor inicial

$$y' = -y + x + 2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 2$$

cuya solución exacta es  $y = e^{-x} + x + 1$  de manera que  $y'' = e^{-x}$  y  $|y''(x)| \leq M = 1$   $\forall x \in [0, 1]$  con  $h=0.1$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| = 1 = L, \quad \forall (x, y) \in D$$

obtenemos la cota del error

$$|y(x_i) - y_i| \leq \frac{(0.01)(1)}{2(1)} [e^{(1)(x_i-0)} - 1]$$

## 1.3. Problemas propuestos

1. Resuelva los siguientes problemas en  $0 \leq t \leq 5$  utilizando el método de Euler con  $h=0.5$

a)  $y' + ty = 1, y(0) = 1$

b)  $y' + 3y = e^{-t}, y(0) = 1$

c)  $y' = (t^2 - y), y(0) = 0.5$

d)  $y' + y|y| = 0, y(0) = 1$

e)  $y' + y|y|^{1/2} = \sin(t), y(0) = 1$

2. Use el método de Euler con  $h=0.1$  para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2, \quad y(1) = -1$$

en el intervalo  $1 \leq x \leq 2$

3. Sea la ecuación logística

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \quad p(0) = p_0$$

que se usa para modelar el crecimiento de poblaciones. Un modelo más general es la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^r \quad p(0) = p_0 \tag{1.7}$$

donde  $r > 1$ . Para ver el efecto de cambiar el parámetro  $r$  en (1.7), tome  $a = 3$ ,  $b = 1$  y  $P_0 = 1$ . Utilice ahora el método de Euler con  $h = 0.25$  para aproximar la solución de (1.7) en el intervalo  $0 \leq t \leq 5$  para  $r = 1.5, \quad 2 \quad y \quad 3$

4. La velocidad de un cuerpo en caída se modela mediante el problema de valor inicial

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad v(0) = v_0$$

de acuerdo con la hipótesis de que la fuerza debida a la resistencia del aire es  $-kv$ . sin embargo, en ciertos casos la fuerza originada por la resistencia del aire se comporta más como  $-kv^r$ , donde  $r > 1$  es alguna constante. Esto da el modelo

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^r \quad v(0) = v_0 \quad (1.8)$$

Para estudiar el efecto de cambiar el parámetro  $r$  en (1.8),  $m = 1$ ,  $g = 9.81$ ,  $k = 2$  y  $v_0 = 0$ . Ahora utilice el método de Euler con  $h=0.2$  para aproximar la solución de (1.8) en el intervalo  $0 \leq t \leq 5$  para  $r = 1, 1.5, 2$

5. En un circuito de voltaje impreso  $E$  que tiene la resistencia  $R$ , la inductancia  $L$  y la capacitancia  $C$  en paralelo, la corriente  $i$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 E}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dE}{dt} + \frac{1}{L} E$$

Supongamos que  $C=0.3$  faradios,  $R=1.4$  ohms,  $L=1.7$  henrios y que el voltaje está dado por

$$E(t) = e^{-0.06t} \sin(2t - \pi)$$

Si  $i(0) = 0$ , calcule la corriente  $i$  con los valores  $t = 0.1j$ , donde  $j = 0, 1, \dots, 100$ .

6. Un tanque cónico contiene agua hasta una altura de 0.5m desde el fondo. El tanque tiene un agujero de 0.02m de radio en el fondo. El radio del está dado por  $r = 0.25y$ , donde  $r$  es el radio e  $y$  es la altura medida desde el fondo. La velocidad del agua que sale por el agujero está dada por  $v^2 = 2gy$ , donde  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . Con  $h=0.001$ , utilice el método de Euler para averiguar cuántos minutos tardará el tanque en vaciarse.
7. Un circuito en serie, tiene una inductancia de  $L = 100\text{mH}$ , una resistencia de  $R = 20\Omega$  y una fuente de voltaje de 10V. Si el interruptor se cierra en  $t = 0$ .
- Determine la corriente  $I$  en  $t = 1, 2, 3, 4$  y 5 seg usando el método de Euler con  $h=0.01$
  - Evalúe el error comparando la solución numérica con la solución analítica.



8. Una pieza metálica con una masa de 0.1kg y 25°C se calienta internamente de forma eléctrica a razón de  $q=3000\text{W}$ . La ecuación diferencial de la temperatura que se obtiene es:

$$\frac{dT}{dt} = 20 - t^2, \text{ si } T(0) = 298$$

Calcule  $T(1)$  empleando el método de Euler con  $h=0.01$

9. La ley de Newton del enfriamiento establece que la razón de cambio de la temperatura  $T(t)$  es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio  $M(t)$  y la temperatura del cuerpo. Esto es

$$\frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)]$$

donde  $K$  es una constante. Sea  $K = 1\frac{1}{min}$  y supóngase que la temperatura del medio es constante.  $M(t) = 70^\circ$ . Si el cuerpo está inicialmente a  $100^\circ$ , use el método de Euler con  $h=0.1$  para aproximar la temperatura del cuerpo al cabo de

- a) 1 minuto
- b) 2 minutos

10. La ley de Stefan de radiación establece que la razón de cambio de la temperatura de un cuerpo a  $T(t)$  grados, que se encuentra en un medio a  $M(t)$  grados es, proporcional a  $M^4 - T^4$ . Es decir,

$$\frac{dT}{dt} = K(M^4 - T^4)$$

donde  $K$  es una constante. Sea  $K = 40^{-4}$  y suponga que la temperatura del medio es constante,  $M(t) = 70$ . Si  $T(0) = 100$ , use el método de Euler con  $h = 0.1$  para aproximar  $T(1)$  y  $T(2)$ .

## Capítulo 2

# Métodos de Taylor de orden superior

Sea el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.1)$$

supongamos que tiene solución única  $\phi(x)$  en un algún intervalo con centro en  $x_0$ . Sea  $h > 0$  y consideremos puntos igualmente espaciados

$$x_n = x_0 + nh \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Consideremos que la solución  $\phi(x)$  tiene  $n + 1$  derivadas continuas. Si se desarrolla la solución  $\phi(x)$  en función del enesimo polinomio de Taylor alrededor de  $x_n$  y calculamos en  $x_{n+1}$  obtendremos

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + h\phi'(x_n) + \frac{h^2}{2}\phi''(x_n) + \dots + \frac{h^n}{n!}\phi^{(n)}(x_n) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\epsilon_n)$$

para algún  $\epsilon_n \in \langle x_n, x_{n+1} \rangle$

La derivada sucesiva de la solución  $\phi(x)$  nos da

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

$$\phi''(x) = f'(x, \phi(x))$$

En general

$$\phi^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x, \phi(x))$$

Al sustituir este resultado en la ecuación , tenemos

$$\begin{aligned} \phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + hf(x_n, \phi(x_n)) + \frac{h^2}{2}f'(x_n, \phi(x_n)) \\ + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n-1)}(x_n, \phi(x_n)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(\epsilon_n, \phi(\epsilon_n)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

haciendo  $\phi(x_0) = y_0$

$$\phi(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}f'(x_0, y_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n-1)}(x_0, y_0)$$

$$\phi(x_2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) + \frac{h^2}{2}f'(x_1, y_1) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n-1)}(x_1, y_1)$$

$$\phi(x_3) \approx y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) + \frac{h^2}{2}f'(x_2, y_2) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n-1)}(x_2, y_2),$$

Este procedimiento se llama **Método de Taylor de orden  $p$**  y se resume mediante las siguientes fórmulas recursivas

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (2.3)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f'(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^p}{p!}f^{(p-1)}(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Si  $p = 1$ , el método de taylor de orden 1 es el método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si  $p = 2$ , el método de taylor de orden 2 es

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f'(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si  $p = 3$ , el método de taylor de orden 3 es

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f'(x_n, y_n) + \frac{h^3}{3!}f^{(2)}(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad etc$$

La fórmula (2.4) tambien se puede escribir como

$$y_{n+1} = y_n + hT^{(p)}(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

donde

$$T^{(p)}(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f'(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^p}{p!}f^{(p-1)}(x_n, y_n) \quad (2.6)$$

## 2.1. Algoritmo de Taylor de orden n

Este algoritmo calcula la solución del problema de valor inicial (1.1) en puntos equidistantes  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h, \dots, x_N = x_0 + Nh$ , aquí  $f$  es tal que (1.1) tiene una solución única en  $[x_0, x_N]$ .

1. Entrada: Valores iniciales  $x_0$ ,  $y_0$ , tamaño de paso  $h$  y número de pasos  $N$

2. Para  $n=0, \dots, N-1$ , hacer

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$\phi'(x_n) = f(x_n, \phi(x_n))$$

$$\phi''(x_n) = f'(x_n, \phi(x_n))$$

$\vdots$

$$\phi^{(n)}(x_n) = f^{(n-1)}(x_n, \phi(x_n))$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \phi'(x_n) + \frac{h}{2} \left( \phi''(x_n) + \frac{h}{3} \left( \phi'''(x_n) \dots \frac{h}{n} \left( \phi^{(n)}(x_n) \right) \dots \right) \right) \right)$$

Salida  $x_{n+1}$ ,  $y_{n+1}$

3. Parar

### Ejemplos

1. Determine las fórmulas recursivas del método de Taylor de orden 2 para el problema de valor inicial

$$y' = e^{xy} \quad y(0) = 1$$

#### Solución

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) f(x_n, y_n) \right]$$

observar que

$$f(x, y) = e^{xy}$$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$$

fórmulas recursivas

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + he^{(x_n, y_n)} + \frac{h^2}{2!} [y_n e^{(x_n, y_n)} + x_n e^{(x_n, y_n)} e^{(x_n, y_n)}]$$

2. Aproximar  $y(0)$  de  $y' = \cos x - \sin y + x^2$ ,  $y(-1) = 3$ , usando el método de Taylor de orden 4 con  $h = 0.1$

### Solución

Para resolver implementemos una función.

#### Programa taylor.m

```
function y=taylor(n,a,b,h)
format long
x=a:h:n*h;
y=zeros(n,1);
y(1)=b;
for k=1:n
    y1=fe(x(k),y(k));
    y2=-sin(x(k))-cos(y(k))*y1+2*x(k);
    y3=-cos(x(k))+(sin(y(k)))*(y2)^2-(cos(y(k)))*y1+2;
    y4=sin(x(k))+(y1^3-y3)*cos(y(k));
    y(k+1)=y(k)+h*(y1+(h/2)*(y2+(h/3)*(y3+(h/4)*(y4)))));
end
```

#### Program fe.m

```
function y1=fe(x,y)
y1=cos(x)-sin(y)+x^2;
```

Ejecutamos el programa

```
>> taylor(10,-1,3,0.1)
```

donde  $n = 10$  es el número de intervalos de longitud  $h = 0.1$ , como la condición inicial es  $y(-1) = 3$  entonces  $a = -1$  y  $b = 3$

ans =

$x_n$	$y_n$
-1.0	3.0000000000000000

-0.9	3.141523798815666
-0.8	3.287216794698704
-0.7	3.438764055326533
-0.6	3.597569817751085
-0.5	3.764637981583152
-0.4	3.940425688412236
-0.3	4.124693336379560
-0.2	4.316391269699142
-0.1	4.513637715380874
0.0	4.713841791853081

de los resultados mostrados observemos que  $y(0) \approx 4.713841791853081$

3. En un circuito eléctrico, se dispone de un condensador con capacidad constante  $C = 1.1$  faradios y una resistencia  $R = 2.1$  ohmios. Se le aplica un voltaje

$$E(t) = e^{-0.06\pi t} \sin(2t - \pi)$$

La ecuación que rige el comportamiento de un circuito sin inducción es:

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE}{dt}$$

Supongamos que la intensidad en el instante inicial es  $I(0) = 1$  amperio.

Halle el valor aproximado de la intensidad cada 0.2 segundos los dos primeros segundos, utilice el método de Taylor de orden 3.

### **Solución**

Reemplazando los valores numéricos en el modelo matemático tenemos

$$2.1 \frac{dI}{dt} + \frac{I}{1.1} = (-0.06\pi) e^{-0.06\pi t} \sin(2t - \pi) + 2e^{-0.06\pi t} \cos(2t - \pi)$$

despejando

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{(1.1)(2.1)} - \frac{0.06\pi}{2.1} e^{-0.06\pi t} \sin(2t - \pi) + \frac{2}{2.1} e^{-0.06\pi t} \cos(2t - \pi)$$

desarrollamos los siguientes programas:

### **Programa taylor3.m**

```
function y=taylor3(n,a,b,h)
```

```

format long
x=a:h:n*h;
y=zeros(n,1);
y(1)=b;
for k=1:n
    y1=f1(x(k),y(k));
    r1=((0.06^2)*(pi^2)/2.1)-4/2.1;
    r2=4*(-0.06*pi/2.1);
    r3=(-1/(2.1*1.1));
    y2=r1*exp(-0.06*pi*x(k)).*sin(2*x(k)-pi)+...
    r2*exp(-0.06*pi*x(k)).*cos(2*x(k)-pi)+r3*y1;
    y3=(-0.06*pi*r1-2*r2)*exp(-0.06*pi*x(k)).*sin(2*x(k)-pi)+...
    (2*r1-0.06*pi*r2)*exp(-0.06*pi*x(k)).*cos(2*x(k)-pi)+r3*y2;
    y(k+1)=y(k)+h*(y1+(h/2)*(y2+(h/3)*(y3)));
end

```

### Programa fl.m

```

function y1=f1(x,y)
y1=(-y/(2.1*1.1))+(-0.06*pi/2.1)*exp(-0.06*pi*x)*sin(2*x-pi)+...
    (2/2.1)*exp(-0.06*pi*x)*cos(2*x-pi);

```

Ejecutamos el programa

```
>> taylor3(10,0,1,0.2)
```

ans =

$t_n$	$I_n$
0	1.0000000000000000
0.2	0.746508916487780
0.4	0.552980151519051
0.6	0.431802748271490
0.8	0.384440494683400
1.0	0.401911779693576
1.2	0.466844369290315

1.4	0.556674895401674
1.6	0.647418540098737
1.8	0.717388697783574
2.0	0.750299158260995

obsevando los resultados tenemos que  $I(2) \approx 0.750299158260995$  amperios.

## 2.2. Problemas propuestos

1. Determine las fórmulas recursivas del método de Taylor de orden 2 para:

a)  $y' = \cos(x + y) \quad y(0) = \pi$

b)  $y' = xy - y^2 \quad y(0) = -1$

2. use los métodos de Taylor de orden 2 y 4 con  $h=0.25$  para aproximar la solución al problema de valor inicial en  $x=1$ , compare estas aproximaciones con la solución verdadera

a)  $y' = x + 1 - y \quad y(0) = 1$ , solución exacta  $y = x + e^{-x}$

b)  $y' = 1 - y \quad y(0) = 0$ , solución exacta  $y = 1 - e^{-x}$

3. Aplique el método de Taylor de orden dos y cuatro para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.

a)  $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^3, 1 \leq x \leq 1.2, y(1) = 1$ , con  $h = 0.1$

b)  $y' = \cos x + e^{-x}, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 0$ , con  $h = 0.5$

4. Utilice el método de Taylor de orden 2 con  $h = 0.1$  para aproximar la solución de

$$y' = 1 + x \cos(xy), \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0$$

5. Dado el problema de valor inicial

$$y' = y + 2xe^{x+x^2} y(0) = 0, 0 \leq x \leq 1$$

con la solución exacta  $y = e^{x+x^2} - e^x$

- a) Aplique el método de Taylor de orden dos con  $h=0.01$  para aproximar la solución y compárela con los valores reales de  $y$ .



b) Use las respuestas obtenidas en el inciso a) para aproximar  $y$  en los siguientes valores y compárelos con los valores reales de  $y$ .

i)  $y(0.66)$

ii)  $y(0.82)$

iii)  $y(0.94)$

6. Un proyectil de masa  $m = 0.11\text{kg}$  que es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial  $v(0) = 8\text{m/s}$ , disminuye su velocidad por efecto de la fuerza de gravedad  $F_g = -mg$  y por la resistencia del aire  $F_r = kv|v|$ , donde  $g = 9.8\text{m/s}^2$  y  $k = 0.002\text{kg/m}$ . La ecuación diferencial de la velocidad  $v$  está dada por

$$mv' = -mg - kv|v|$$

a) Calcule la velocidad después de 0.1, 0.2, 0.3, ..., 1.0s.

b) Resuelva el problema de valor inicial

$$x' = -\frac{3t^2x + x^2}{2t^3 + 3tx} \quad x(1) = -2$$

mediante el método de Taylor de orden 2 en el intervalo  $[0,1]$  con pasos  $h = -0.01$ .

Utilice la función implícita  $t^3x^2 + tx^3 + 4 = 0$  como una verificación de la solución calculada.

Determine con una precisión de décimas de segundo, cuándo alcanzará el proyectil su altura máxima y cuándo empezará a caer.

7. Un tanque cilíndrico de 5m de diámetro y 11 m de largo aislado con asbesto se carga con un líquido que está a  $220^\circ\text{F}$  y el cual se deja reposar durante cinco días. A partir de los datos de diseño del tanque, las propiedades térmicas y físicas del líquido, y el valor de la temperatura ambiente, se encuentra la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = 0.615 + 0.175\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - 0.0114T$$

que relaciona la temperatura  $T$  del líquido (en  $^\circ\text{C}$ ) con el tiempo  $t$  en horas. ¿Cuál es la temperatura final del líquido?

8. En el estudio del campo electrónico inducido por dos líneas de transmisión cercanas, surge una ecuación de la forma

$$\frac{dz}{dx} + g(x)z^2 = f(x)$$

Sean  $f(x) = 5x + 2$ ,  $g(x) = x^2$  y  $z(0) = 1$ , aproximar  $z(1)$ .

9. Halle  $y(1)$  para la siguiente ecuación empleando el método de Taylor de orden dos con  $h = 0.5$ :

$$y' = -\frac{y}{x + y^2}$$

10. Un sistema de resorte tiene una resistencia al movimiento proporcional al cuadrado de la velocidad, y su movimiento está descrito por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.1 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 0.6x = 0$$

Si el resorte se suelta desde un punto que está a una unidad de distancia por arriba de su punto de equilibrio,  $x(0)$ ,  $x'(0) = 0$ . Determine  $x(2)$  empleando el método de Taylor de orden tres con  $h = 0.1$

## Capítulo 3

# Métodos de Runge-Kutta

En la sección anterior vimos los métodos de Taylor que tienen un error de truncamiento de orden alto, pero tienen la desventaja de requerir el cálculo y evaluación de las derivadas de  $f(x, y)$ , este es un procedimiento lento y complicado motivo por el cual rara vez se emplean. Los métodos de Runge<sup>1</sup> Kutta<sup>2</sup> tienen error de truncamiento alto, pero permiten prescindir del cálculo y evaluación de las derivadas.

El primer paso para derivar el Método de Runge-Kutta ([BUR 02]), es determinar los valores  $a, b$  y  $c$  con la propiedad de que  $af(x + b, y + c)$  aproxima a (2.6) para  $p = 2$

$$\begin{aligned} T^{(2)}(x, y) &= f(x, y) + \frac{h}{2} f'(x, y) \\ T^{(2)}(x, y) &= f(x, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot f(x, y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Al desarrollar  $f(x + b, y + c)$  en su polinomio de Taylor grado uno alrededor de  $(x, y)$  se obtiene

$$af(x + b, y + c) = af(x, y) + ab \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + ac \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot f(x, y) + aR_1(x + b, y + c) \quad (3.2)$$

donde

$$R_1(x + b, y + c) = \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\epsilon, \mu) + bc \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\epsilon, \mu) + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\epsilon, \mu)$$

para  $\epsilon$  entre  $x$  y  $x + b$ ,  $\mu$  entre  $y$  y  $y + c$

Al igualar los coeficientes de las ecuaciones (3.1) y (3.2) obtenemos  $a = 1$   $b = \frac{h}{2}$  y

---

<sup>1</sup>Carle David Tolmé Runge(30 de agosto de 1856-3 de enero de 1927) fue un matemático, físico y espectroscopista alemán

<sup>2</sup>Martin Wilhelm Kutta (3 de noviembre de 1867 - 25 de diciembre de 1944) fue un físico y matemático alemán.

$$c = \frac{h}{2}f(x, y)$$

En consecuencia

$$T^{(2)}(x, y) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(x, y)\right) - R_1\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(x, y)\right)$$

donde

$$R_1\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(x, y)\right) = \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\epsilon, \mu) + \frac{h^2}{4} f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\epsilon, \mu) + \frac{h^2}{8} (f(x, y))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\epsilon, \mu)$$

El método que resulta de sustituir  $T^{(2)}(x, y)$  por  $f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(x, y)\right)$  en el método de Taylor de orden dos es un método específico de Runge-Kutta, conocido con el nombre de Método del Punto medio

### 3.1. Método del punto medio

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) \quad (3.3)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Solo tres parámetros se encuentran en  $af(x+b, y+c)$  y los tres se requieren en la igualdad con  $T^{(2)}$ , necesitamos una forma mas compleja para cumplir las condiciones que requiere cualquiera de los métodos de Taylor de orden superior.

La forma más apropiada de cuatro parámetros con que se aproxima

$$T^{(3)}(x, y) = f(x, y) + \frac{h}{2}f'(x, y) + \frac{h^2}{6}f''(x, y)$$

es

$$af(x, y) + bf(x+c, y+d) + cf(x, y) + df(x, y) \quad (3.5)$$

y ni siquiera con esto se tiene la suficiente flexibilidad para igualar el término

$$\frac{h^2}{6} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right]^2 f(x, y)$$

resultante de la expansión de  $\frac{h^2}{6}f''(x, y)$

Por lo tanto, lo mejor que podemos lograr utilizando son métodos con el error local de truncamiento  $O(h^2)$ , sin embargo el hecho que tenga cuatro parámetros, da cierta flexibilidad en su elección para derivar varios métodos  $O(h^2)$ . Uno de los más importantes es el método modificado de Euler, que corresponde a seleccionar  $a = b = \frac{1}{2}$  y  $c = d = h$  y se representa de la siguiente forma.

### 3.2. Método Modificado de Euler

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))] \quad (3.6)$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Otro método importante  $O(h^2)$  es el de Heun, que corresponde a  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{3}{4}$ ,  $c = d = \frac{2}{3}h$ .

### 3.3. Método de Heun

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h \left[ f(x_n, y_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n)) \right] \quad (3.7)$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Ambos son métodos de Runge Kutta de orden dos, que es el orden de su error local de truncamiento.

Aunque podemos aproximar  $T^{(3)}(x, y)$  con el error  $O(h^3)$  mediante una expresión de la forma

$$f(x + a, y + df(x + b, y + cf(x, y)))$$

contiene cuatro parámetros, determinar los valores de a b c y d es complicada, de hecho el método de Runge Kutta de orden tres que resulta de esta expresión no se emplea. El método de Runge Kutta de mayor uso es el de cuarto orden

### 3.4. Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

### 3.4.1. Algoritmo del Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden

Este algoritmo calcula la solución del problema de valor inicial (1.1) en puntos equidistantes  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h, \dots, x_N = x_0 + Nh$ , aquí  $f$  es tal que (1.1) tiene una solución única en  $[x_0, x_N]$ .

1. Entrada: Valores iniciales  $x_0, y_0$ , tamaño de paso  $h$  y número de pasos  $N$
2. Para  $n=0, \dots, N-1$ , hacer

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n) \\k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \text{Salida } &x_{n+1}, \quad y_{n+1}\end{aligned}$$

3. Parar

### 3.4.2. Programa del Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden

```
function y=rungekutta(n,a,b,h)
format long
x=a:h:b;
y=zeros(n,1);
y(1)=0;
for k=1:n
    k1=h*fe(x(k),y(k))
    k2=h*fe(x(k)+0.5*h,y(k)+0.5*k1)
    k3=h*fe(x(k)+0.5*h,y(k)+0.5*k2)
    k4=h*fe(x(k)+h,y(k)+k3)
    y(k+1)=y(k)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end

function y1=fe(x,y)
y1=x*exp(3*x)-2*y;
```

## Ejemplo

1. Sea la ecuación diferencial  $y' = xe^{3x} - 2y, y(0) = 0$ , cuya solución general es  $y(x) = \frac{1}{5}xe^{3x} - \frac{1}{25}e^{3x} + \frac{1}{25}e^{-2x}$ , usando el método de Runge-Kutta con  $h = 0.1$ , aproximar  $y(1)$

### Solución

Utilizando el método de Runge-kutta se consiguen los siguientes valores

		Método	
	Valor exacto	Runge-Kutta	Error
$x_n$	$y(x_n)$	$y_n$	$ y(x_n) - y_n $
			1.0e-003 *
0.0	0	0	0
0.1	0.005752053971599	0.005754631311524	0.002577339924445
0.2	0.026812801841426	0.026818770596771	0.005968755345566
0.3	0.071144527666900	0.071155164515354	0.010636848453718
0.4	0.150777835474151	0.150795060680180	0.017225206029203
0.5	0.283616521867142	0.283643159044116	0.026637176974542
0.6	0.496019565629524	0.496059711486905	0.040145857380935
0.7	0.826480869814429	0.826540417642342	0.059547827913398
0.8	1.330857026396779	1.330944404473756	0.087378076976341
0.9	2.089774397011061	2.089901607341672	0.127210330611138
1.0	3.219099319039492	3.219283395463391	0.184076423899171

observamos que  $y(1) \approx 3.219283395463391$ .

2. Sea la ecuación diferencial  $y' = -y + x + 2$  con la condición inicial  $y(0) = 2$ , usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$  y  $h = 0.01$ , aproximar  $y(1)$ .

### Solución

Si usamos el método de Runge-Kutta, observamos que al reducir  $h$  se reduce el error que se comete.

	Aproximación	Solución exacta	Error
h	a $y(1)$	$y(1)$	$ y(1) - \text{Aprox} $
0.1	2.367879774412498	2.367879441171442	3.332410560830112e-007
0.05	2.367879461147540	2.367879441171442	1.997609810899803e-008
0.01	2.367879441202356	2.367879441171442	3.091393807608256e-011

Si comparamos con el método de Euler

xi	Euler h=0.1	euler h=0.025	Runge kutta 4to orden	solución exacta
0	2.0000000000000000	2.0000000000000000	2.0000000000000000	2.0000000000000000
0.1	2.0000000000000000	2.003687890625000	2.0048374999999998	2.0048374180359598
0.2	2.0100000000000000	2.016651803662262	2.0187309014062498	2.0187307530779819
0.3	2.0290000000000000	2.037998345826651	2.0408184220011774	2.0408182206817180
0.4	2.0561000000000000	2.066920168424825	2.0703202889174905	2.0703200460356395
0.5	2.0904900000000000	2.102687680219100	2.1065309344233798	2.1065306597126332
0.6	2.1314410000000000	2.144641558442873	2.1488119343763148	2.1488116360940266
0.7	2.1782969000000000	2.192185981095952	2.1965856186712287	2.1965853037914096
0.8	2.2304672100000001	2.244782511051797	2.2493292897344279	2.2493289641172218
0.9	2.2874204890000001	2.301944569199290	2.3065699912000754	2.3065696597405991
1.0	2.348678440100001	2.363232439887880	2.3678797744124984	2.3678794411714423

De aquí se observa la superioridad del método de Runge Kutta de cuarto orden, pues con  $h = 0.025$  método de Euler necesita hacer 40 iteraciones para llegar  $y(1) \approx 2.363232439887880$ , mientras que método de Runge Kutta solo 10 iteraciones con  $h = 0.1$  para llegar  $y(1) \approx 2.3678797744124984$

### 3.5. Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden para Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Sea el sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{dx} &= f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 \frac{du_2}{dx} &= f_2(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 &\vdots \\
 \frac{du_m}{dx} &= f_m(x, u_1, u_2, \dots, u_m)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

para  $a \leq x \leq b$  con las condiciones iniciales

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m \tag{3.10}$$

El objetivo es hallar  $m$  funciones  $u_1, u_2, \dots, u_m$  que satisfagan el sistema de ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales.

El problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0, \quad a \leq x \leq b \tag{3.11}$$



se resuelve utilizando el método de Runge-Kutta

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales se generaliza como sigue, formamos una partición regular en el intervalo  $[a, b]$  con  $N$  subintervalos, con puntos  $x_n = a + nh$  donde  $n = 0, 1, \dots, N$  y  $h = \frac{b-a}{N}$

Usamos la notación  $y_{ij}$  para denotar una aproximación a  $u_i(x_j)$  para  $j = 0, 1, \dots, N$  y para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Las condiciones iniciales (3.10) se expresan como

$$y_{1,0}(a) = \alpha_1, y_{2,0}(a) = \alpha_2, \dots, y_{m,0}(a) = \alpha_m$$

Suponga que se calcularon  $y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{m,j}$ , enseguida obtenemos  $y_{1,j+1}, y_{2,j+1}, \dots, y_{m,j+1}$  de

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$

$$y_{i,j+1} = y_{i,j} + \frac{1}{6} (k_{1,j} + k_{2,j} + k_{3,j} + k_{4,j})$$

donde

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$

$$k_{1,j} = hf_i(x_j, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{m,j})$$

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$

$$k_{2,j} = hf_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m})$$

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$

$$k_{3,j} = hf_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m})$$

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$

$$k_{4,j} = hf_i(x_j + h, y_{1,j} + k_{3,1}, y_{2,j} + k_{3,2}, \dots, y_{m,j} + k_{3,m})$$

### 3.5.1. Algoritmo del Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden para sistemas

Este algoritmo aproxima la solución del problema de valor inicial

$$u'_j = f_j(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \quad u_j(a) = \alpha_j \quad a \leq x \leq b$$

para  $j = 1, 2, \dots, m$  en  $N + 1$  puntos equidistantes en el intervalo  $[a, b]$ .

**ENTRADA:** Los extremos del intervalo  $a$  y  $b$ ; número de ecuaciones  $m$ ; entero  $N$ ; condiciones iniciales  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ .

**SALIDA:** Aproximaciones  $y_j$  a  $u_j(x)$  en los  $N + 1$  valores de  $x$ .

1. Hacer  $h = \frac{b-a}{N}$ ;  $x = a$
2. Para  $j=1, \dots, m$ , hacer  $y_{j,0} = \alpha_j$
3. Para  $i = 0, 2, \dots, N - 1$  haga los pasos  $a$  al  $g$ .
  - a. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer

$$k_{1,j} = hf_i(x_j, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{m,j})$$

- b. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer

$$k_{2,j} = hf_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m})$$

- c. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer

$$k_{3,j} = hf_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m})$$

- d. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer

$$k_{4,j} = hf_i(x_j + h, y_{1,j} + k_{3,1}, y_{2,j} + k_{3,2}, \dots, y_{m,j} + k_{3,m})$$

e. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer

$$y_{i,j+1} = y_{i,j} + \frac{1}{6} (k_{1,j} + k_{2,j} + k_{3,j} + k_{4,j})$$

f. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer

g.  $x_1 = a + ih$ .

4. Salida  $(x_i, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{m,j})$ .

5. Parar.

### 3.5.2. Vibración en una banda transportadora

Se tiene una carga de masa  $m$  colocada en una banda transportadora[BAE 06] que tiene una velocidad  $v_0$ . Esta carga está asociada a un sistema resorte amortiguador como se muestra en la figura (3.1). Para determinar el desplazamiento de la masa  $M$  a una velocidad dada, primero hacemos el diagrama de cuerpo libre de la masa  $M$ .

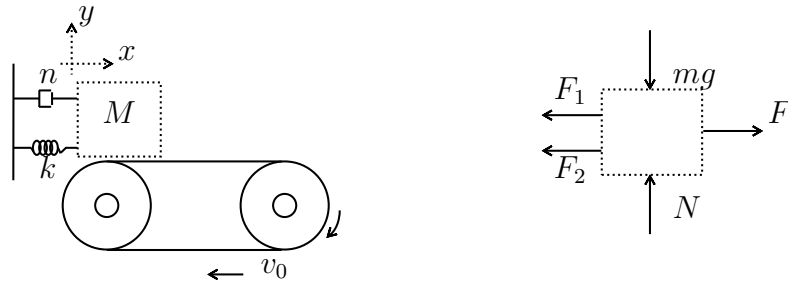


Figura 3.1: Sistema de banda transportadora

En el diagrama de cuerpo libre presentado sobre la masa  $M$  se tiene:  
Una fuerza de fricción dada por

$$F = \mu N[1 - bv + cv^3]$$

donde  $v$  es la velocidad de deslizamiento  $v = (v_0 - x')$

Por lo tanto la fuerza de rozamiento esta dada por

$$F = \mu N[1 - b(v_0 - x') + c(v_0 - x')^3]$$

$$F_1 = kx$$

$$F_2 = nx'$$

$$N = mg$$

La ecuación de movimiento de la masa es

$$mx'' = F - F_1 - F_2$$

$$mx'' = F - kx - nx'$$

que se puede escribir como

$$mx'' + nx' + kx = \mu N[1 - b(v_0 - x') + c(v_0 - x')^3]$$

Esta ecuación diferencial se puede llevar a un sistema de ecuaciones diferenciales haciendo

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x'$$

$$x_1' = x_2 \tag{3.13}$$

$$x_2' = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{n}{m}x_2 + \frac{\mu N[1 - b(v_0 - x_2) + c(v_0 - x_2)^3]}{m} \tag{3.14}$$

Los datos del problema son  $b = 0.3$ ,  $c = 0.1$ ,  $m = 1kg$ ,  $g = 9.8m/s^2$ ,  $u = 0.6$ ,  $k = 1600N/m$ ,  $n = 0.1kg/s$

### Programa banda.m

```
function y=banda(r)
%Programa que determina el desplazamiento de una banda transportadora
clc;global v0;v0=r;
format long
a=0;
b=8;
m=2; %numero de ecuaciones
N=1000; %numero de subintervalos
c(1)=0;%condiciones iniciales
c(2)=0;
h=(b-a)/N;
t=a;
for j=1:m,
```

```

        w(j)=c(j)
    end
    T=[t];
    y=[w];
    for i=1:N,
        for j=1:m,
            k1(j)=h*fs(t,w(1),w(2),j);
        end
        for j=1:m,
            k2(j)=h*fs(t+h/2,w(1)+(1/2)*k1(1),w(2)+(1/2)*k1(2),j);
        end
        for j=1:m,
            k3(j)=h*fs(t+h/2,w(1)+(1/2)*k2(1),w(2)+(1/2)*k2(2),j);
        end
        for j=1:m,
            k4(j)=h*fs(t+h,w(1)+k3(1),w(2)+k3(2),j);
        end
        for j=1:m,
            w(j)=w(j)+(k1(j)+2*k2(j)+2*k3(j)+k4(j))/6

        end
        t=a+i*h;
        T=[T;t];
        y=[y;w]
        input('pulse')
        fprintf('%4.4f      ',T(i+1));
        fprintf('%12.6i      ',w(1));fprintf('%12.6i\n',w(2));
    end
    plot(T,y(:,1))
    xlabel('tiempo (s)');
    ylabel('posicion (m)');
    grid

Programa fs.m

function y1=fs(t,x1,x2,j)

```

```

b=0.3;c=0.1;m=1;g=9.8;k=1600;n=0.1;u=0.6;N=m*g;v0=0.5;
if j==1,
    y1=x2;
end
if j==2,
    y1=(-k/m)*x1-(n/m)*x2+(u*N)*(1-b*(v0-x2)+c*(v0-x2)^3)/m;
end

```

Se realiza tres simulaciones para  $v_0 = 0.5\text{m/s}$  y  $v_0 = 1\text{m/s}$  tenemos las figuras (3.2) y (3.3) donde el sistema es inestable, para  $v_0 = 1.5\text{m/s}$  el sistema es estable según la figura (3.4).

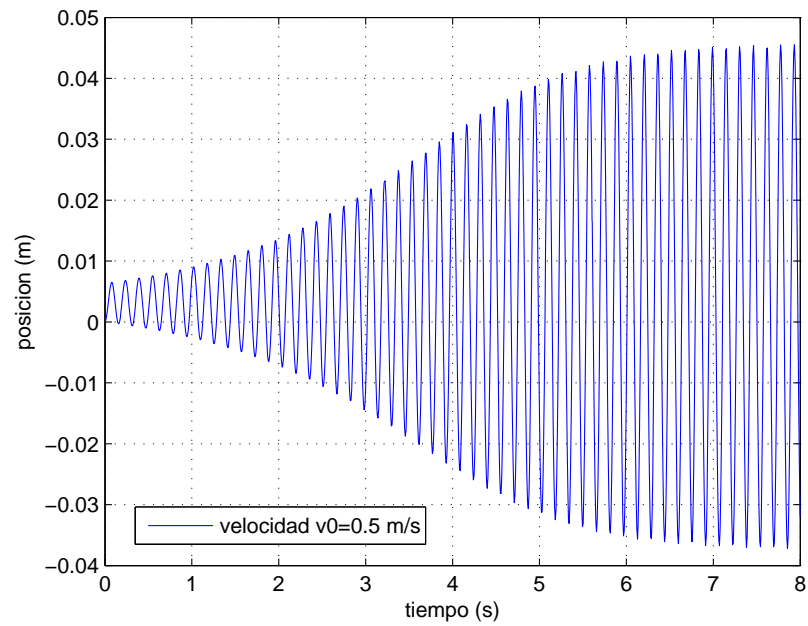


Figura 3.2: Caso  $v_0 = 0.5\text{m/s}$ , gráfica de desplazamientos versus tiempo

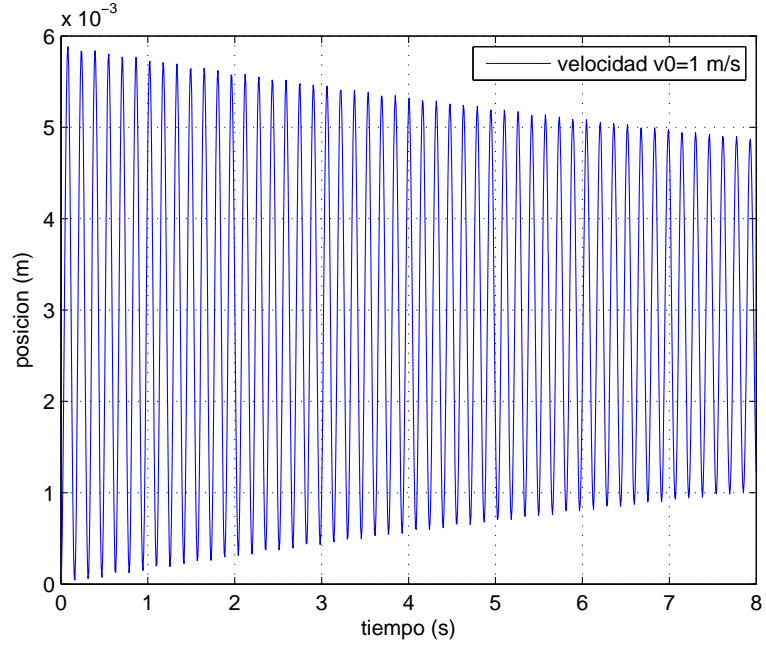


Figura 3.3: Caso  $v_0 = 1\text{ m/s}$ , gráfica de desplazamientos versus tiempo

Si escribimos (3.9) en forma matricial

$$Y' = f(x, Y) \quad (3.15)$$

donde

$$Y = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

entonces las iteraciones para el Método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas es:

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_n, Y_n) \\ K_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \frac{1}{2}K_2) \\ K_4 &= hf(x_n + h, Y_n + K_3) \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Si es posible escribir la ecuación (3.9) en forma lineal como

$$Y' = MY + F$$

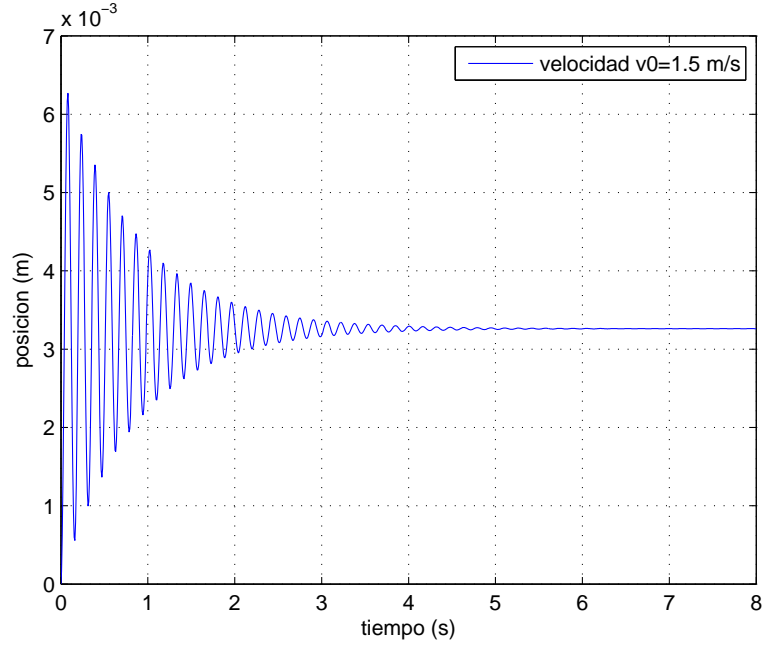


Figura 3.4: Caso  $v_0 = 1.5 \text{ m/s}$ , gráfica de desplazamientos versus tiempo

entonces (3.16) se escribe como:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= h [MY_n + F] \\
 K_2 &= h \left[ M \left( Y_n + \frac{K_1}{2} \right) + F \right] \\
 K_3 &= h \left[ M \left( Y_n + \frac{K_2}{2} \right) + F \right] \\
 K_4 &= h [M(Y_n + K_3) + F] \\
 Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Para este caso desarrollamos el siguiente algoritmo

### 3.5.3. Algoritmo Runge-Kutta cuarto orden para un sistema

$$Y' = MY + F$$

Este algoritmo calcula la solución del problema de valor inicial (1.1) en puntos equidistantes  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h, \dots, x_N = x_0 + Nh$ , aquí  $f$  es tal que (1.1) tiene una solución única en  $[x_0, x_N]$ .

1. Define: La matriz  $M$ ,  $F$  y la matriz que contiene las condiciones iniciales  $Y(a)$



2. Para  $n=0, \dots, N-1$ , hacer

$$\begin{aligned} K_1 &= h [MY_n + F] \\ K_2 &= h \left[ M \left( Y_n + \frac{K_1}{2} \right) + F \right] \\ K_3 &= h \left[ M \left( Y_n + \frac{K_2}{2} \right) + F \right] \\ K_4 &= h [M(Y_n + K_3) + F] \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ \text{Salida } x_{n+1}, \quad Y_{n+1} \end{aligned}$$

3. Parar

### 3.5.4. Monorriel de dos carros

La figura 3.5 muestra un monorriel de dos carros[ROJ 01]. Sean  $M_1$  la masa del carro de máquinas y  $B_1$  sus fricciones debido al aire y al rodamiento. La fuerza lineal equivalente para mover el proceso se designa como  $\hat{u}(t)$ . Los dos carros poseen masas  $M_2$  y  $M_3$  respectivamente, y están sujeto a fricciones  $B_2$  y  $B_3$ . Los carros se acoplan uno al otro con dispositivos no rígidos(resortes) que poseen constantes  $k_{23}$  y  $k_{12}$  y dispositivos amortiguadores de constantes  $B_{23}$  y  $B_{12}$ . Las coordenadas de posición se designan como  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . Para determinar los desplazamientos y velocidades de  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  en el intervalo de tiempo  $[0, 3]$ , hacemos el diagrama de cuerpo libre a cada masa.

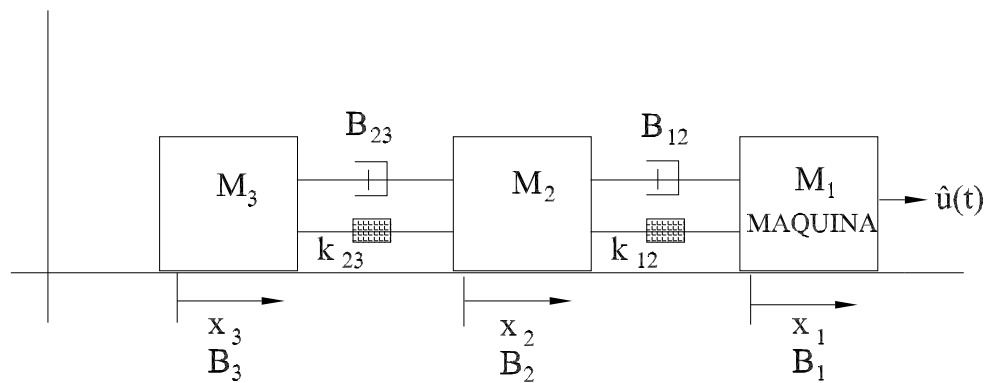


Figura 3.5: Proceso monorriel de dos carros más un carro de máquinas.

De la figura 3.6, el desplazamiento de la masa  $M_3$  satisface

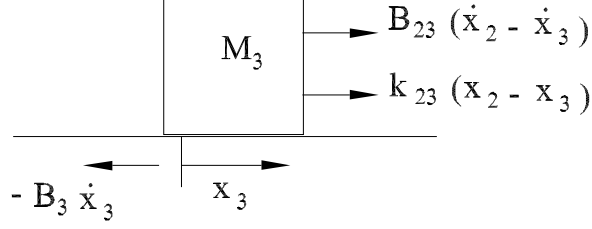


Figura 3.6: Diagrama de cuerpo libre de  $M_3$

$$M_3 \ddot{x}_3 = B_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_{23}(x_2 - x_3) - B_3 \dot{x}_3 \quad (3.18)$$

se puede llevar a la forma

$$\ddot{x}_3 = \frac{k_{23}}{M_3} x_2 + \frac{B_{23}}{M_3} \dot{x}_2 - \frac{k_{23}}{M_3} x_3 - \frac{(B_{23} + B_3)}{M_3} \dot{x}_3$$

De la figura 3.7, el desplazamiento de la masa  $M_2$  satisface

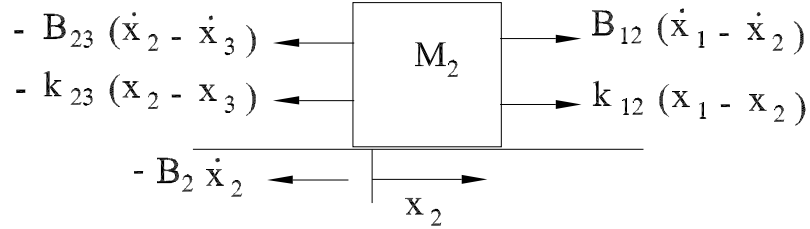


Figura 3.7: Diagrama de cuerpo libre de  $M_2$

$$M_2 \ddot{x}_2 = B_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{12}(x_1 - x_2) - B_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_{23}(x_2 - x_3) - B_2 \dot{x}_2 \quad (3.19)$$

se puede llevar a la forma

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_{12}}{M_2} x_1 + \frac{B_{12}}{M_2} \dot{x}_1 - \frac{(k_{12} + k_{23})}{M_2} x_2 - \frac{(B_{23} + B_{12} + B_2)}{M_2} \dot{x}_2 + \frac{k_{23}}{M_2} x_3 + \frac{B_{23}}{M_2} \dot{x}_3$$

De la figura 3.8, el desplazamiento de la masa  $M_1$  satisface

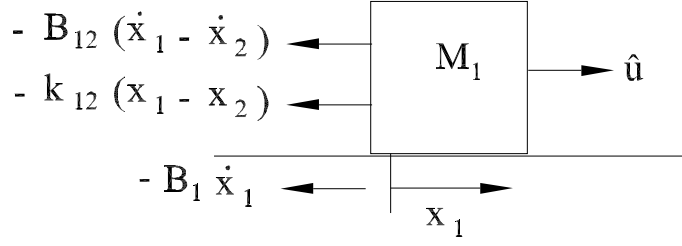


Figura 3.8: Diagrama de cuerpo libre de  $M_1$

$$M_1 \ddot{x}_1 = \hat{u} - B_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_{12}(x_1 - x_2) - B_1 \dot{x}_1 \quad (3.20)$$

se puede llevar a la forma

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k_{12}}{M_1}x_1 - \frac{(B_{12} + B_1)}{M_1}\dot{x}_1 + \frac{k_{12}}{M_1}x_2 + \frac{B_{12}}{M_1}\dot{x}_2 + \frac{\hat{u}(t)}{M_1}$$

Introduciendo nuevas variables  $x_1 = y_1$ ,  $\dot{x}_1 = y_2$ ,  $x_2 = z_1$ ,  $\dot{x}_2 = z_2$ ,  $x_3 = u_1$ ,  $\dot{x}_3 = u_2$  en las ecuaciones (3.18), (3.19), (3.20) tenemos el siguiente sistema

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 \quad (3.21)$$

$$\ddot{x}_1 = \dot{y}_2 = -\frac{k_{12}}{M_1}y_1 - \frac{(B_{12} + B_1)}{M_1}y_2 + \frac{k_{12}}{M_1}z_1 + \frac{B_{12}}{M_1}z_2 + \frac{\hat{u}(t)}{M_1} \quad (3.22)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{z}_1 \quad (3.23)$$

$$\ddot{x}_2 = \dot{z}_2 = \frac{k_{12}}{M_2}y_1 + \frac{B_{12}}{M_2}y_2 - \frac{(k_{12} + k_{23})}{M_2}z_1 - \frac{(B_{23} + B_{12} + B_2)}{M_2}z_2 + \frac{k_{23}}{M_2}u_1 \quad (3.24)$$

$$+ \frac{B_{23}}{M_2}u_2 \quad (3.25)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{u}_1 = u_2 \quad (3.26)$$

$$\ddot{x}_3 = \dot{u}_2 = \frac{k_{23}}{M_3}z_1 + \frac{B_{23}}{M_3}z_2 - \frac{k_{23}}{M_3}u_1 - \frac{(B_{23} + B_3)}{M_3}u_2 \quad (3.27)$$

que se puede expresar en forma matricial como

$$Y' = AY + F \quad (3.28)$$

donde

$$Y' = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{12}}{M_1} & -\frac{(B_{12}+B_1)}{M_1} & \frac{k_{12}}{M_1} & \frac{B_{12}}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_{12}}{M_2} & \frac{B_{12}}{M_2} & -\frac{(k_{12}+k_{23})}{M_2} & -\frac{(B_{23}+B_{12}+B_2)}{M_2} & \frac{k_{23}}{M_2} & \frac{B_{23}}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_{23}}{M_3} & \frac{B_{23}}{M_3} & -\frac{k_{23}}{M_3} & -\frac{(B_{23}+B_3)}{M_3} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\hat{u}(t)}{M_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Asumimos los siguientes valores para los parámetros

$$\begin{aligned} M_2 &= M_3 = 2M_1 = 2600kg \\ k_{23} &= k_{12} = 100,000 \frac{N-s}{m} \\ B_{23} &= B_{12} = 500 \frac{N-s}{m} \\ B_2 &= B_3 = 2B_1 = 10000 \frac{N-s}{m} \\ \hat{u}(t) &= 1300N \end{aligned}$$

### 3.5.5. Programa del Método de Runge-Kutta

Programa monorriel.m

```
%Halla los desplazamientos y velocidades
%de cada masa del monorriel de dos carros
clear;
clc;
format long
M2=2600;M3=2600;M1=1300;
K23=100000;K12=100000;
```

```

B2=10000;B3=10000;B1=5000;
B23=500;B12=500;
M=[0 1 0 0 0 0;
   -K12/M1 -(B12+B1)/M1 K12/M1 B12/M1 0 0;
   0 0 0 1 0 0;
   K12/M2 B12/M2 -(K12+K23)/M2 -(B23+B12+B2)/M2 K23/M2 B23/M2;
   0 0 0 0 0 1;
   0 0 K23/M3 B23/M3 -K23/M3 -(B23+B3)/M3];
Y(:,1)=[0;0;0;0;0;0];
h=0.1;n=1;t(1)=0;U=1300;F=[0;U/M1;0;0;0;0];
while t(n)<3
    k1=h*F4(Y(:,n),M,F);
    k2=h*F4(Y(:,n)+k1/2,M,F);
    k3=h*F4(Y(:,n)+k2/2,M,F);
    k4=h*F4(Y(:,n)+k3,M,F);
    Y(:,n+1)=Y(:,n)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    t(n+1)=n*h;
    n=n+1;
    F=[0;U/M1;0;0;0;0];
end
subplot(2,1,1)
plot(t,Y(1:2:6,:));
legend('posicion M1','posicion M2','posicion M3')
text(t(3),Y(1,3),'x1');
text(t(5),Y(3,5),'x2');
text(t(7),Y(5,7),'x3');
xlabel('tiempo (s)');
ylabel('desplazamientos x1,x2,x3 (m)');
grid;
subplot(2,1,2);
plot(t,Y(2:2:6,:));
legend('velocidad M1','velocidad M2','velocidad M3')
text(t(3),Y(2,3),'v1');
text(t(3),Y(4,3),'v2');
text(t(3),Y(6,3),'v3');

```

```

xlabel('tiempo (s)');
ylabel('velocidades(m/s)');
grid;
for i=1:1:length(Y)
fprintf('%i    ',i-1);fprintf('%4.1f    ',t(i));
fprintf('%8.4i    ',Y(1,i));fprintf('%8.4i    ',Y(3,i));
fprintf('%8.4i\n',Y(5,i));
end
for i=1:1:length(Y)
fprintf('%i    ',i-1);fprintf('%4.1f    ',t(i));
fprintf('%8.4i    ',Y(2,i));fprintf('%8.4i    ',Y(4,i));
fprintf('%8.4i\n',Y(6,i));
end

```

Los desplazamientos de cada masa es

$n$	$t_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0.0	0000	0000	0000
1	0.1	4.0492e-003	1.8553e-004	1.5409e-007
2	0.2	1.2129e-002	1.7013e-003	9.8981e-005
3	0.3	1.9227e-002	5.4582e-003	7.9289e-004
4	0.4	2.3799e-002	1.0704e-002	2.8566e-003
5	0.5	2.7024e-002	1.5859e-002	6.7719e-003
6	0.6	3.0385e-002	2.0116e-002	1.2256e-002
7	0.7	3.4343e-002	2.3911e-002	1.8408e-002
8	0.8	3.8664e-002	2.8111e-002	2.4317e-002
9	0.9	4.3220e-002	3.3079e-002	2.9572e-002
10	1.0	4.8187e-002	3.8519e-002	3.4310e-002
11	1.1	5.3675e-002	4.3951e-002	3.8904e-002
12	1.2	5.9448e-002	4.9165e-002	4.3646e-002
13	1.3	6.5079e-002	5.4258e-002	4.8631e-002
14	1.4	7.0314e-002	5.9382e-002	5.3816e-002
15	1.5	7.5231e-002	6.4570e-002	5.9120e-002
16	1.6	8.0093e-002	6.9759e-002	6.4467e-002
17	1.7	8.5104e-002	7.4906e-002	6.9790e-002
18	1.8	9.0293e-002	8.0042e-002	7.5045e-002

19	1.9	9.5572e-002	8.5217e-002	8.0219e-002
20	2.0	1.0085e-001	9.0446e-002	8.5342e-002
21	2.1	1.0611e-001	9.5694e-002	9.0463e-002
22	2.2	1.1134e-001	1.0092e-001	9.5620e-002
23	2.3	1.1654e-001	1.0611e-001	1.0082e-001
24	2.4	1.2173e-001	1.1129e-001	1.0605e-001
25	2.5	1.2690e-001	1.1647e-001	1.1128e-001
26	2.6	1.3206e-001	1.2167e-001	1.1650e-001
27	2.7	1.3725e-001	1.2687e-001	1.2170e-001
28	2.8	1.4245e-001	1.3208e-001	1.2690e-001
29	2.9	1.4767e-001	1.3728e-001	1.3209e-001
30	3.0	1.5289e-001	1.4248e-001	1.3728e-001

Las velocidades de cada cuerpo

$n$	$t_i$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
0	0.0	0000	0000	0000
1	0.1	7.1537e-002	5.6644e-003	6.5875e-005
2	0.2	8.2148e-002	2.5876e-002	2.8002e-003
3	0.3	5.7895e-002	4.7570e-002	1.2466e-002
4	0.4	3.5742e-002	5.4615e-002	2.9591e-002
5	0.5	3.0991e-002	4.7360e-002	4.8135e-002
6	0.6	3.6715e-002	3.8728e-002	5.9973e-002
7	0.7	4.2010e-002	3.8617e-002	6.1568e-002
8	0.8	4.4325e-002	4.5838e-002	5.6002e-002
9	0.9	4.7184e-002	5.2941e-002	4.9384e-002
10	1.0	5.2310e-002	5.5077e-002	4.5988e-002
11	1.1	5.6973e-002	5.3278e-002	4.6343e-002
12	1.2	5.7735e-002	5.1212e-002	4.8633e-002
13	1.3	5.4504e-002	5.0880e-002	5.0991e-002
14	1.4	5.0380e-002	5.1623e-002	5.2590e-002
15	1.5	4.8406e-002	5.2020e-002	5.3370e-002
16	1.6	4.9154e-002	5.1698e-002	5.3449e-002
17	1.7	5.1093e-002	5.1318e-002	5.2948e-002
18	1.8	5.2530e-002	5.1478e-002	5.2129e-002
19	1.9	5.2919e-002	5.2044e-002	5.1409e-002

20	2.0	5.2687e-002	5.2464e-002	5.1133e-002
21	2.1	5.2382e-002	5.2424e-002	5.1345e-002
22	2.2	5.2170e-002	5.2088e-002	5.1799e-002
23	2.3	5.1968e-002	5.1812e-002	5.2185e-002
24	2.4	5.1754e-002	5.1777e-002	5.2334e-002
25	2.5	5.1642e-002	5.1900e-002	5.2270e-002
26	2.6	5.1726e-002	5.2014e-002	5.2118e-002
27	2.7	5.1945e-002	5.2041e-002	5.1982e-002
28	2.8	5.2141e-002	5.2019e-002	5.1907e-002
29	2.9	5.2199e-002	5.2007e-002	5.1891e-002
30	3.0	5.2127e-002	5.2018e-002	5.1917e-00

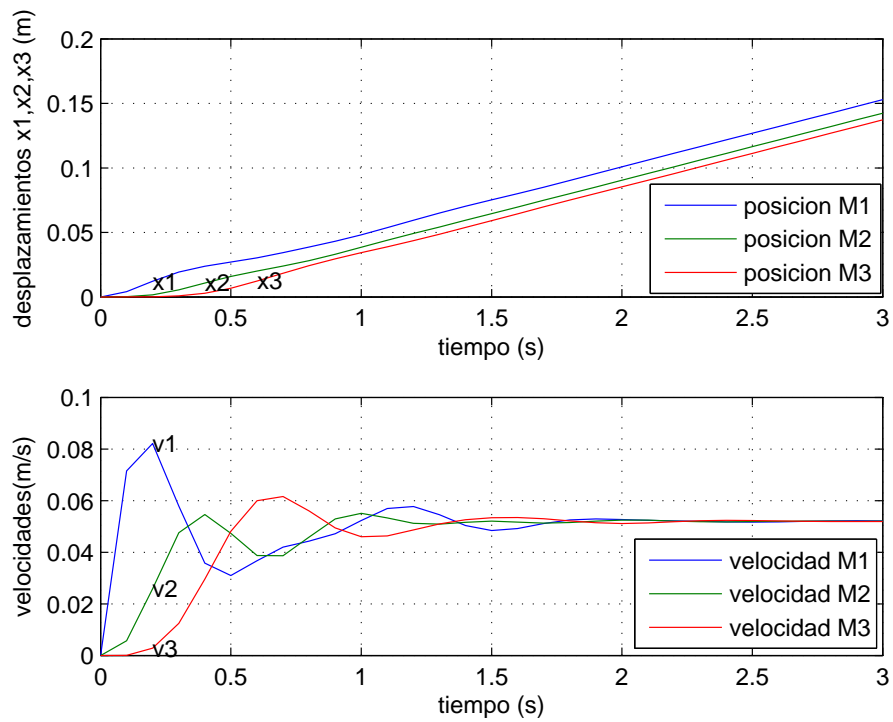


Figura 3.9: Gráfica de desplazamientos y velocidades del monorriel

Se observa de la (3.9) que los desplazamientos de las masas es creciente mientras que sus velocidades tienden a estabilizarse, es decir a tener una velocidad constante a partir de  $t = 2s$ .



### 3.5.6. Instrumento sísmico

En la figura (3.10) se muestra un modelo general utilizado para la medición de vibraciones[SET 70]. La base se sujeta al cuerpo, el cual tiene una vibración desconocida  $a \sin wt$ , considere  $m = 120\text{kg}$ ,  $w = 5.81778$ ,  $A = 0.1$ ,  $k = 400$ ,  $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , y  $c = w_n m$ . Para hallar el movimiento y la velocidad relativa del sistema durante 15 segundos, hacemos el diagrama de cuerpo libre de la masa  $m$ .

Las fuerzas que actúan sobre la masa son la fuerza del resorte  $k(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})(x_1 - x_2)$  y la fuerza de amortiguamiento  $c(x'_1 - x'_2)$ , suponiendo que  $x_1$  es mayor  $x_2$ , la ecuación de movimiento es:

$$-k(x_1 - x_2) - c(x'_1 - x'_2) = mx''_1$$

Sea el movimiento relativo  $x_1 - x_2 = x$  entonces  $x_1 = x + x_2$  y  $x'_1 = x' + x'_2$  y la ecuación de movimiento toma la forma:

$$m \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} \right) + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

o

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = -m \frac{d^2x_2}{dt^2}$$

Pero  $x_2 = A \sin wt$  es la vibración del cuerpo libre, sustituyendo

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = mA w^2 \sin wt$$

haciendo cambio de variable

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x'$$

formamos el sistema

$$x_1' = x' = x_2$$

$$x_2' = x'' = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + A w^2 \sin(wt)$$

que se puede expresar en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A w^2 \sin(wt) \end{pmatrix}$$

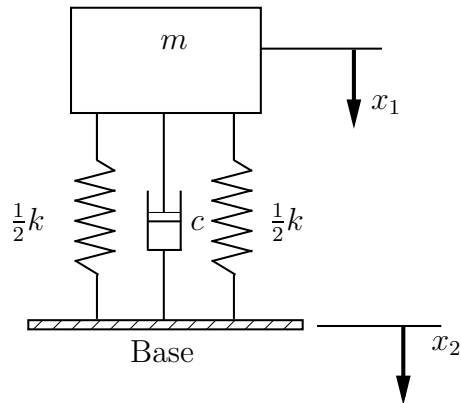


Figura 3.10: Modelo de un instrumento sísmico

### Program vibracion.m

```
%Halla el movimiento y velocidad del instrumento sísmico
clear;
clc;
format long
k=40*10;
w=5.81778;
m=120;A=0.1;wn=sqrt(k/m);c=wn*m
M=[0 1;-k/m -c/m];
Y(:,1)=[0;0];
h=0.1;n=1;t(1)=0;F=[0;A*(w^2)*sin(w*t(1))];
while t(n)<15
    k1=h*F4(Y(:,n),M,F);
    k2=h*F4(Y(:,n)+k1/2,M,F);
    k3=h*F4(Y(:,n)+k2/2,M,F);
    k4=h*F4(Y(:,n)+k3,M,F);
    Y(:,n+1)=Y(:,n)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    t(n+1)=n*h;
    n=n+1;
    F=[0;A*(w^2)*sin(w*t(n))];
end
subplot(2,1,1)
plot(t,Y(1,:));
```



### 3.6. Problemas propuestos

1. Use el método de Runge-Kutta de cuarto orden con  $h=0.1$  para aproximar la solución de

$$y' = 3\cos(y - 5x), \quad y(0) = 0$$

en los puntos  $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 4.0$ . Utilice sus respuestas para trazar una gráfica aproximada de la solución en  $[0, 4]$ .

2. Sean los siguientes problemas de valor inicial:

$$y' = \frac{1}{t(y^2 + y)}, \quad t \in [1, 3], \quad y(1) = 2$$

$$y' = \sin(t) + e^{-t}, \quad t \in [1, 4], \quad y(0) = 0$$

Utilice los métodos de Euler, Heun, Euler modificado y Runge-Kutta para aproximar las soluciones tomando  $h = 0.1$

3. La temperatura inicial de una pieza de metal es de  $25^\circ\text{C}$ . La pieza se calienta internamente mediante una corriente eléctrica a razón de  $Q = 3000\text{W}$ . La ecuación para la temperatura es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{V\rho c} [Q - \epsilon\sigma A(T^4 - 298^4) - h_c A(T - 298)], \quad T(0) = 298\text{K}$$

donde  $T$  esta en kelvin y

$k = 60\text{W/mK}$ (conductividad térmica)

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\text{W/m}^2\text{K}^4$ (constante de Stefan-Boltzman)

$A = 0.25\text{m}^2$ (área superficial)

$V = 0.001\text{m}$ (volumen)

$c = 900\text{J/kgK}$ (calor específico)

$\rho = 3000\text{kg/m}^3$ (densidad)

$h_c = 30\text{J/m}^2\text{K}$ (coeficiente de transferencia de calor

$\epsilon = 0.8$ (emisividad)

Calcule la temperatura para  $0 < t < 10$  min por el método de Runge-Kutta de cuarto orden con  $h = 0.1$

4. La velocidad de desintegración del radio es proporcional a la cantidad del mismo, siendo esta constante de proporcionalidad  $k = 0.00041$

a) Plantea el PVI que resulta para averiguar la variación de cantidad de radio existente en una muestra de 10g.

- b) Resuelva por el método de Runge-Kutta el PVI descrito, halle la cantidad de radio que quedaría en la muestra al cabo de 1500 años.
5. En el estudio del flujo no isotérmico de un fluido newtoniano entre placas paralelas se encontró la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2 e^y = 0, \quad x > 0$$

Mediante una serie de sustituciones esta ecuación se puede transformar en la ecuación de primer orden

$$\frac{dv}{du} = u \left( \frac{u}{2} + 1 \right) v^3 + \left( u + \frac{5}{2} \right) v^2$$

Use el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar  $v(3)$  si  $v(t)$  satisface  $v(2)=0.1$ , con  $h=0.1$

6. En el estudio del campo eléctrico inducido por dos líneas de transmisión cercanas, surge una ecuación de la forma

$$\frac{dz}{dx} + g(x)z^2 = f(x)$$

Sean  $f(x) = 5x + 2$  y  $g(x) = z^2$ . Si  $z(0) = 1$ , use el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar  $z(1)$ , con una tolerancia  $\epsilon=0.0001$ .

7. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - 2e^t + 1 \\ z' &= -x - e^t + 1 \end{aligned}$$

Utiliza el método de Runge-Kutta de orden 4 para obtener numéricamente la solución en  $[0,2]$ , con  $h=0.2$ , si  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$  y  $z(0) = 1$ .

8. Sean las masas  $m_1 = 1$  y  $m_2 = 1$  sujetas a resortes de masa insignificante, con constantes  $K_1 = 6$  y  $k_2 = 4$ .

A su vez, los resortes están conectados como se muestra en la figura 3.12. Sea  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  los desplazamientos verticales de las masas con respecto a sus posiciones de equilibrio. La ley de Hooke y la segunda ley de Newton describen el movimiento del sistema mediante las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} m_1 y_1'' &= -k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1) \\ m_1 y_2'' &= -k_2 (y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Sujeto a las siguientes condiciones  $y_1(0) = y_2(0) = 0$ ,  $y_1'(0) = 1$ ,  $y_2'(0) = -1$

- Expresa el sistema de orden dos como un sistema de 4 ecuaciones ordinarias.
- Utiliza el método de Runge Kutta para obtener la solución aproximada en un intervalo de tiempo  $[0, 100]$  tomando 200 subintervalos.
- Grafique la solución obtenida y describa el movimiento a partir de la relación entre dos incógnitas.

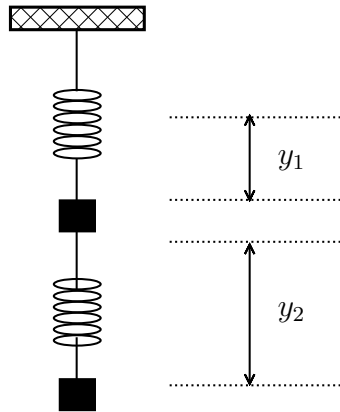


Figura 3.12: Resortes

- Las ecuaciones del movimiento de un satélite puesto en órbita desde la estación espacial internacional son:

$$\begin{aligned}x'' &= -u \frac{x}{r^3} \\ y'' &= -u \frac{y}{r^3}\end{aligned}$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  es la distancia a la tierra, situada en el origen de coordenadas y  $u = G \cdot (M_T + m_s) \approx 398598,309 km^3/s^2$  es llamado constante gravitacional, en el que se considera nula la masa del satélite respecto a la Tierra.

- Convierte el sistema de orden dos en uno de primer orden
- Considerando las condiciones iniciales siguientes que nos indican la situación de la estación espacial y las componentes de la velocidad inicial:

$$x(0) = 42167,911 km. \quad x'(0) = -1.07168 km/s$$

$$y(0) = 0 km, \quad y'(0) = 28827 km/s$$

resuelva el PVI con el método de Runge-Kutta, encontrando la posición del satélite respecto a la Tierra 24 horas desde su lanzamiento.

10. Transforme las siguientes ecuaciones de orden superior a sistemas de ecuaciones diferenciales de orden 1

a)  $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$  con  $x \in [0, 3]$ ,  $y(0) = -e$ ,  $y'(0) = 0$

b)  $y''' + 2xy'' + y' + y = xy$  con  $x \in [1, 2]$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 1$

Utilice los distintos métodos de resolución para obtener las soluciones aproximadas con  $h = 0.1$

11. Se tiene un intercambiador de calor de tubos concéntricos en contracorriente y sin cambio de fase, vease la figura 3.13. Las ecuaciones que describen el intercambiador de calor en ciertas condiciones de operación son:

$$\frac{dT_B}{dx} = 0.03(T_S - T_B)$$

$$\frac{dT_S}{dx} = 0.04(T_S - T_B)$$

Elabore un programa para calcular  $T_{B1}$  y  $T_{B0}$  si el intercambiador de calor tiene una longitud de 3m, use el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

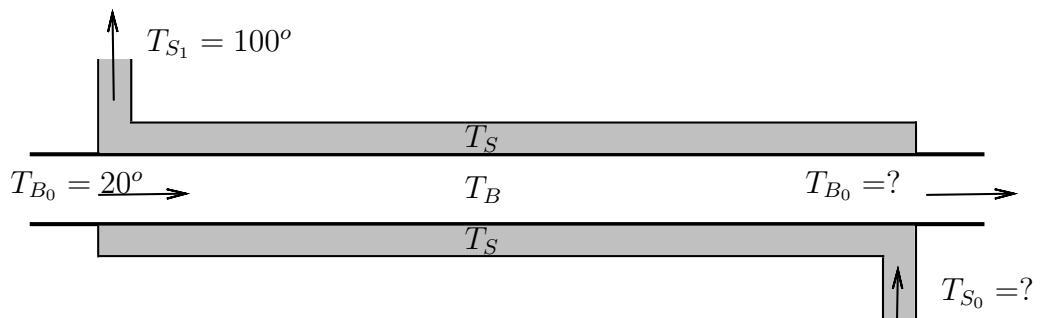


Figura 3.13: Intercambiador de calor

## Capítulo 4

# Control del error y el método de Runge-Kutta-Fehlberg

Mediante métodos de orden distinto podemos predecir el error local de truncamiento y seleccionar con esta predicción un tamaño de paso que controle el error global.

Para ilustrar este método supongamos que tenemos dos métodos de aproximación. El primero es un método de  $n$ -ésimo orden obtenido de un método de Taylor de  $n$ -ésimo orden de la forma

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\phi(x_i, y(x_i), h) + O(h^{n+1})$$

que produce las aproximaciones

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + h\phi(x_{i+1}, w_i, h), \quad \text{para } i > 0 \end{aligned}$$

con el error de truncamiento  $\tau_{i+1}(h) = O(h^n)$

El segundo método es similar, pero posee un orden mayor, se deriva del método de Taylor de orden  $(n+1)$ -ésimo de la forma

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\bar{\phi}(x_i, y(x_i), h) + O(h^{n+2})$$

que produce las aproximaciones

$$\begin{aligned} \bar{w}_0 &= \alpha \\ \bar{w}_{i+1} &= \bar{w}_i + h\bar{\phi}(x_{i+1}, \bar{w}_i, h), \quad \text{para } i > 0 \end{aligned}$$

con el error de truncamiento  $\tau_{i+1}(h) = O(h^{n+1})$

Supongamos que  $w_i \approx y(x_i) \approx \bar{w}_i$  y seleccionamos un tamaño de paso fijo  $h$  para generar



las aproximaciones  $w_{i+1}$  y  $\bar{w}_{i+1}$  a  $y(x_{i+1})$ . Entonces

$$\begin{aligned}\tau_{i+1}(h) &= \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \phi(x_i, y(x_i), h) \\ &= \frac{y(x_{i+1}) - w_i}{h} - \phi(x_i, w_i, h) \\ &= \frac{y(x_{i+1}) - [w_i + h\phi(x_i, w_i, h)]}{h} \\ &= \frac{1}{h}(y(x_{i+1}) - w_{i+1})\end{aligned}$$

De manera similar

$$\bar{\tau}_{i+1}(h) = \frac{1}{h}(y(x_{i+1}) - \bar{w}_{i+1})$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\tau_{i+1}(h) &= \frac{1}{h}(y(x_{i+1}) - w_{i+1}) \\ &= \frac{1}{h}[(y(x_{i+1}) - \bar{w}_{i+1}) + (\bar{w}_{i+1} - w_{i+1})] \\ &= \bar{\tau}_{i+1}(h) + \frac{1}{h}(\bar{w}_{i+1} - w_{i+1})\end{aligned}$$

donde  $\tau_{i+1}(h)$  es  $O(h^n)$  y  $\bar{\tau}_{i+1}$  es  $O(h^{n+1})$ , por lo tanto la parte significativa proviene de

$$\frac{1}{h}(\bar{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

Esto nos da una aproximación del error local de truncamiento del método  $O(h^n)$ :

$$\tau_{i+1}(h) \approx \frac{1}{h}(\bar{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

El objetivo no es solo estimar el error local del truncamiento, sino ajustar además el tamaño de paso para mantenerlo dentro de una cota especificada. Para hacerlo, ahora se supone que como  $\tau_{i+1}$  es  $O(h^n)$ , existe un número  $K$  independiente de  $h$

$$\tau_{i+1}(h) \approx Kh^n$$

Podemos estimar el error local de truncamiento producido al aplicar el método de  $n$ -ésimo orden con un nuevo tamaño de paso  $qh$ , usando las aproximaciones originales  $w_{i+1}$  y  $\bar{w}_{i+1}$

$$\tau_{i+1}(qh) \approx K(qh)^n = q^n(Kh^n) \approx q^n\tau_{i+1}(h) \approx \frac{q^n}{h}(\bar{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

Para establecer la cota de  $\tau_{i+1}(qh)$  por  $\epsilon$ , escogemos  $q$  tal que

$$\frac{q^n}{h}|\bar{w}_{i+1} - w_{i+1}| \approx |\tau_{i+1}(qh)| \leq \epsilon$$

$$q \leq \left( \frac{\epsilon h}{|\bar{w}_{i+1} - w_{i+1}|} \right)^{1/n}$$

Un método que usa esta desigualdad para controlar el error es el método de Runge-Kutta-Fehlberg. Este consiste en emplear el método de Runge-Kutta con error local de truncamiento de quinto orden

$$\bar{w}_{i+1} = w_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

para estimar el error local en un método de Runge-Kutta de cuarto orden dado por

$$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, w_i) \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{3}{8}h, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\ k_4 &= hf\left(x_i + \frac{12}{13}h, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\ k_5 &= hf\left(x_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\ k_6 &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, w_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \end{aligned}$$

La ventaja de este método se da en que solo se requiere seis evaluaciones de  $f$  por paso. Los métodos arbitrarios de Runge Kutta de cuarto y quinto orden usados de manera conjunta requieren cuatro y seis evaluaciones de  $f$ , respectivamente, lo cual da diez evaluaciones de  $f$ .

En el control del error, un valor inicial de  $h$  en el  $i$ -ésimo paso se usó para obtener los primeros valores de  $w_{i+1}$  y  $\bar{w}_{i+1}$ , que nos permitieron determinar  $q$  en ese paso y luego se repitieron los cálculos. Este procedimiento requiere el doble de evaluaciones de funciones por paso, sin control de error. En la práctica, el valor de  $q$  a usar se selecciona de manera un poco diferente, a fin de que valga la pena el aumento de evaluaciones de funciones. El valor de  $q$  determinado en el  $i$ -ésimo paso cumple dos propósitos:

1. Para rechazar, de ser necesario, la elección inicial de  $h$  en el paso  $i$ -ésimo y repetir los cálculos por medio de  $qh$ , y
2. Para predecir una elección adecuada de  $h$  para el  $(i+1)$ -ésimo paso.

si se repiten los pasos,  $q$  se elige de manera conservadora, en el método de Runge-Kutta-Fehlberg con  $n=4$ , la elección común es

$$q = \left( \frac{\epsilon h}{2 |\bar{w}_{i+1} - w_i|} \right)^{1/4} = 0.84 \left( \frac{\epsilon h}{|\bar{w}_{i+1} - w_i|} \right)^{1/4}$$

En el algoritmo para el método de Runge-Kutta-Fehlberg, se agrega el paso 9 para suprimir grandes modificaciones al tamaño del paso. Esto se hace para no tener que dedicar mucho tiempo a los tamaños pequeños de paso en las irregularidades de las derivadas de  $y$ , y para evitar los grandes tamaños de paso, que pueden llevar a omitir las regiones sensibles entre los pasos. En algunos casos, en el algoritmo se omite totalmente el procedimiento que aumenta el tamaño del paso, y el procedimiento con que se disminuye el tamaño se modifica para que se incorpore sólo cuando es necesario controlar el error

## 4.1. Algoritmo del Método de Runge-Kutta-Fehlberg

Aproxima la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(x, y) \quad a \leq x \leq b \quad y(a) = \alpha \quad (4.1)$$

con un error local de truncamiento que no rebase la tolerancia especificada:

1. Entrada:  $a$  y  $b$  son los valores extremos del intervalo;  $\alpha$  es la condición inicial; tolerancia TOL; tamaño máximo de paso  $hmax$ ; tamaño mínimo de paso  $hmin$ .
2. Hacer

$$x = a$$

$$w = \alpha$$

$$h = hmax$$

$$BD = 1$$

$$\text{SALIDA } (x, w)$$

3. Mientras  $(BD = 1)$  hacer

### 3.1 Hacer

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_i, w_i) \\k_2 &= hf(x_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4}k_1) \\k_3 &= hf(x_i + \frac{3}{8}h, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2) \\k_4 &= hf(x_i + \frac{12}{13}h, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3) \\k_5 &= hf(x_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4) \\k_6 &= hf(x_i + \frac{1}{2}h, w_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)\end{aligned}$$

$$3.2 \text{ Tome } R = \frac{1}{h} \left| \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right|$$

$$(R = \frac{1}{h} |\bar{w}_{i+1} - w_{i+1}|)$$

### 3.3 Si $R \leq TOL$ entonces hacer

#### 3.3.1 Hacer $x = x + h$

$$w = w + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

#### 3.3.2 SALIDA $(x, w, h)$

### 3.4 Tome $\delta = 0.84(TOL/R)^{1/4}$

3.5 Si  $\delta \leq 0.1$  entonces tome  $h=0.1h$  o si  $\geq 0.4$  entonces tome  $h = 4h$  de otro modo tome  $h = h\delta$

3.6 Si  $h > hmax$  entonces  $h = hmax$

3.7 Si  $t \geq b$  entonces tome  $BD = 0$  de otro modo si  $x + h > b$  entonces tome  $h = b - x$  de otro modo si  $h < hmin$  entonces tome  $BD = 0$ ; SALIDA(rebasado h mínimo)

## 4. Parar

## 4.2. Programa del Método de Runge-Kutta-Fehlberg

El programa se llama rungekufeh2 y resuelve el problema planteado en el ejemplo indicado abajo, si se quiere resolver otra ecuación diferencial, se cambia en el programa

los parámetros en forma adecuada.

La función sol guarda la solución exacta de la ecuación diferencial.

### **Programa rungkufeh2.m**

```
a=1;b=4;yo=1;
tol=10(-6);
hmax=0.5;
hmin=0.02;
x=a;
w=yo;
h=hmax;
band=1;
fprintf('      xi');
fprintf('      yi=y(xi)');
fprintf('      wi');
fprintf('      hi');
fprintf('      |yi-wi|');
fprintf('      wi');
fprintf('      |yi-wii|\n');
fprintf('%12.3f',x);
fprintf('%12.3f',sol(x));
fprintf('%12.3f',w);
fprintf('      ');
fprintf('%12.3f\n',sol(x)-w);
while band==1
k1=h*ff(x,w);
k2=h*ff(x+(1/4)*h,w+(1/4)*k1);
k3=h*ff(x+(3/8)*h,w+(3/32)*k1+(9/32)*k2);
k4=h*ff(x+(12/13)*h,w+(1932/2197)*k1-(7200/2197)*k2+(7296/2197)*k3);
k5=h*ff(x+h,w+(439/216)*k1-8*k2+(3680/513)*k3-(845/4104)*k4);
k6=h*ff(x+(1/2)*h,w-(8/27)*k1+2*k2-(3544/2565)*k3+(1859/4104)*k4-(11/40)*k5);
R=(1/h)*abs((1/360)*k1-(128/4275)*k3-(2197/75240)*k4+(1/50)*k5+(2/55)*k6);
    if R<=tol
        x=x+h;
        wi=w+(16/135)*k1+(6656/12825)*k3+(28561/56430)*k4-(9/50)*k5+(2/55)*k6;
```

```

w=w+(25/216)*k1+(1408/2565)*k3+(2197/4104)*k4-(1/5)*k5;
    fprintf('%12.7f',x);
    fprintf('%12.7f',sol(x));
    fprintf('%12.7f',w);
    fprintf('%12.7f',h)
    fprintf(' %12.7e',abs(sol(x)-w));
    fprintf('%12.7f',wi);
    fprintf(' %12.7e\n',abs(sol(x)-wi));
end
delt=0.84*(tol/R)^(1/4);
if delt<=0.1
    h=0.1*h;
elseif delt>=4
    h=4*h;
else h=delt*h;
end
if h>hmax
    h=hmax;
end
if x>=b
    band=0;
elseif (x+h)>b
    h=b-x;
elseif h<hmin
    band=0;
end
end

function y2=sol(x)
y2=x/(1+log(x));

```

## Ejemplo

Use el metodo de Runge-Kutta-Fehlberg para aproximar la solución del problema de valor inicial  $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$ ,  $0 \leq x \leq 4$ ,  $y(1) = 1$  que tiene solución  $y = \frac{x}{(1 + \ln x)}$ .

La entrada al algoritmo es la tolerancia  $TOL = 10^{-6}$ , un tamaño máximo de paso  $hmax = 0.5$  y un tamaño mínimo de paso  $hmin = 0.02$

>>rungekufeh2

xi	yi=y(xi)	wi	hi	yi-wi	wii	yi-wii
1.000	1.000	1.000		0.000		
1.1101946	1.0051237	1.0051237	0.1101946	5.0083437e-008	1.0051237	7.3572313e-009
1.2191314	1.0175211	1.0175212	0.1089368	6.3878024e-008	1.0175212	4.2901327e-008
1.3572694	1.0396749	1.0396749	0.1381381	8.0686697e-008	1.0396749	5.1900760e-008
1.5290112	1.0732756	1.0732757	0.1717417	9.6474346e-008	1.0732756	6.3566870e-008
1.7470584	1.1213947	1.1213948	0.2180472	1.1067125e-007	1.1213948	7.1637317e-008
2.0286416	1.1881700	1.1881702	0.2815832	1.2109483e-007	1.1881701	7.4469349e-008
2.3994350	1.2795395	1.2795396	0.3707934	1.2387333e-007	1.2795395	6.7626636e-008
2.8985147	1.4041842	1.4041843	0.4990798	1.1211799e-007	1.4041842	4.4005706e-008
3.3985147	1.5285638	1.5285639	0.5000000	1.1162287e-007	1.5285639	9.1614480e-008
3.8985147	1.6514962	1.6514963	0.5000000	1.1352301e-007	1.6514963	1.0649609e-007
4.0000000	1.6762391	1.6762393	0.1014853	1.1398408e-007	1.6762393	1.1398268e-007

Las dos últimas columnas de la tabla contienen los resultados del método de quinto orden. Con valores pequeños de  $x_i$ , el error es menor que el de cuarto orden, pero es mayor cuando  $x_i$  aumenta.

### 4.3. Problemas propuestos

1. Aplique el algoritmo de Runge-Kutta-Fehlberg con la tolerancia  $TOL = 10^{-4}$  para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.

a)  $y' = \frac{1}{x}(y^2 + y)$ ,  $1 \leq x \leq 3$ ,  $y(1) = -2$ ,  $hmax = 0.5$  y  $hmin = 0.02$

b)  $y' = \sin x + e^{-x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $hmax = 0.25$ , y  $hmin = 0.02$

c)  $y' = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $hmax = 0.5$  y  $hmin = 0.02$

2. Use el método de Runge-Kutta-Fehlberg con la tolerancia  $TOL = 10^{-6}$   $hmax = 0.5$ ,  $hmin = 0.05$  para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor inicial. Después compare los resultados con los valores reales.

a)  $y' = 1 + \frac{1}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ ,  $1 \leq x \leq 3$ ,  $y(1) = 0$ , solución real  $y(x) = x \tan(\ln x)$

b)  $y' = (x + 2x^3)y^3 - xy$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $y(0) = \frac{1}{3}$ , solución real  $y(x) = (3 + 2x^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$

c)  $y' = -(y + 1)(y + 3)$ ,  $0 \leq x \leq 3$ ,  $y(0) = -2$  solución real  $y(x) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$

3. Aplique el método de Runge-Kutta-Fehlberg con la tolerancia  $TOL = 10^{-4}$ ,  $h_{max} = 0.25$  y  $h_{min} = 0.05$  para aproximar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial. Después compare los resultados con los valores reales.

a)  $y' = \cos 2x + \sin 3x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{4}{3}$

b)  $y' = 1 + \frac{y}{x}$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ; solución real  $y(x) = x \ln x + 2x$

c)  $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq x \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ ; solución real  $y(x) = x + \frac{1}{(1-x)}$



# Materiales y Métodos

La información de los temas tratados se obtuvieron de las referencias bibliográficas presentadas y de las páginas de internet como; Mathworks, Scielo, es.scribd.com, Macgraw-hill.es y sciencedirect.com por consiguiente la técnica usada es documental, bibliografica.

En los capítulos desarrollados se da una idea de como se llega a plantear la teoría general,utilizando de esta manera el método inductivo y se da un ejemplo de aplicación, utilizando el software Matlab donde se ilustra la teoría general planteada.

Para la elaboración de los programas se utilizó Matlab 7.7.0(R2008b), MATLAB (abreviatura de MATrix LABoratory, "laboratorio de matrices") es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Está disponible para las plataformas Unix, Windows y Apple Mac OS X.

Entre sus prestaciones básicas se hallan: la manipulación de matrices, la representación de datos y funciones, la implementación de algoritmos, la creación de interfaces de usuario (GUI) y la comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware.

Es un software muy usado en universidades y centros de investigación y desarrollo.

El texto se digitó totalmente en Latex, que es uno de los procesadores de textos más potentes a la hora de elaborar complicadas fórmulas matemáticas y con una gran calidad de impresión final.

# Resultados

En cada capítulo podemos dar los siguientes resultados:

En el capítulo 1 se desarrolla el método de Euler dado por la fórmula (1.4), es una de las técnicas más simples para aproximar soluciones de una ecuación diferencial, por la figura (1.2) observamos que el método se encarga de aproximar la solución real por medio de una serie de segmentos de recta, debido a que la aproximación de una curva por medio de una línea recta no es exacta, se comete un error derivado del método. A este error se le conoce como error de truncamiento. Este error se puede disminuir reduciendo el valor de  $h$ , pero se obtendrá un mayor número de cálculos y, por consiguiente, un error de redondeo mucho más alto, su implementación en un programa en matlab es sencilla.

En el capítulo 2 se desarrolla los métodos de Taylor de orden superior, que al hacer variar  $p$  en la fórmula (2.4) tenemos diferentes métodos de Taylor, si  $p=1$  tenemos el método de Euler, al hacer que  $p = 4$ ,  $p = 5$  o tome valores mayores obtenemos métodos con mayor exactitud, pues la cantidad de términos se incrementa, pero sería menos práctico pues implicaría hallar derivadas complicadas de  $f(x, y)$ .

En el capítulo 3 se desarrolla los métodos de Runge Kutta, no es sólo un método sino una importante familia de métodos iterativos que me permiten aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, logran la exactitud del procedimiento de una serie de Taylor, no requieren evaluar ninguna derivada, sino únicamente valores de la función  $f(x, y)$ . Todo ello hace que el método de Runge Kutta, sea más fácil de aplicar que otros métodos. De todos los métodos de Runge Kutta el más usado es el de cuarto orden dado por (3.8), en el se requiere realizar cuatro evaluaciones por paso, deberá dar respuestas más exactas que las del método de Euler con un cuarto de tamaño de paso para que sea mejor. Además en este capítulo se desarrolla el Método de Runge Kutta de cuarto orden para sistemas de Ecuaciones diferenciales, pues allí encontramos interesantes aplicaciones a la ingeniería mecánica como; la vibración en una banda transportadora, donde se simuló el proceso y se halló que para una velocidad  $v_0 = 1.5$  m/s el sistema es estable, monorriel de dos carros que para una fuerza de  $u = 1300$  Newtons las masas tienen desplazamientos pequeños que son creciente, mientras que sus velocidades tienden

a mantenerse constante a partir del  $t=1.5s$  y el instrumento sismico se observa que sistema se tiene desplazamiento y velocidad oscilatorio.

En el capitulo 4 se desarrolla una teoría que es la prolongación del método de Runge Kutta donde mediante métodos de orden distinto podemos predecir el error local de truncamiento y seleccionar con esta predicción un tamaño de paso que controle el error global.

Por la teoría mostrada y los ejemplos presentados podemos concluir que:  
La aproximación que se obtiene mediante una técnica numérica se puede mejorar reduciendo el tamaño de paso  $h$ .

El método de Runge-Kutta de cuarto orden da respuestas más exactas que el resto de los métodos presentados en este texto.

# Discusión

En ingeniería hay diferentes procesos que son modelados por ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, determinar su solución mediante métodos analíticos es muchas veces imposible, pero utilizando una técnica numérica y un software adecuado es fácil conseguir una solución aproximada a la solución real.

El método de Euler es de fácil implementación, para tener una buena aproximación a la solución real, se reduce el tamaño de paso  $h$  dando lugar a que se incremente el número de iteraciones y se incremente el error por redondeo, como podemos observar en la figura (1.2).

Con los métodos de Taylor se mejora la exactitud, pues se incrementa el número de términos en su fórmula, pero es poco usado por las derivadas que aparecen, lo cual dificulta su implementación en un programa de cómputo.

Los métodos de Runge Kutta logran la exactitud del procedimiento de una serie de Taylor, en sus fórmulas no aparecen derivadas, lo cual facilita su implementación en un programa de Matlab. El método de Runge Kutta de cuarto orden es el más usado, pues en la tabla dada en el apéndice C diseñada por Butcher J.C. se indica por qué los métodos de orden menor que cinco con un tamaño menor de paso se prefieren a los de orden superior con un tamaño mayor de paso. Como el método de Runge-Kutta de cuarto orden requiere realizar cuatro evaluaciones por paso, tiene respuestas más exactas que el resto de los métodos presentados.

En la aplicación de la vibración de una banda transportadora el modelo matemático es una ecuación diferencial no lineal y determinar su solución por métodos analíticos es imposible, vemos como utilizando el método de Runge kutta de cuarto orden podemos hacer una simulación del proceso, sin necesidad de implementarlo físicamente.

En el ejemplo 2 del capítulo 3 se observa la superioridad del método de Runge Kutta de cuarto orden, pues con  $h = 0.025$  método de Euler necesita hacer 40 iteraciones para llegar  $y(1) \approx 2.363232439887880$ , mientras que método de Runge Kutta solo 10

iteraciones con  $h = 0.1$ .

En conclusión:

Los métodos numéricos desarrollados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, dan una aproximación a la solución real y se pueden mejorar reduciendo el tamaño de paso  $h$ .

El método de Runge-Kutta de cuarto orden da respuestas más exactas que el resto de los métodos presentados en este texto.

# Bibliografía

- [BAE 06]     BAEZ LOPEZ, DAVID. Matlab con aplicaciones a la Ingeniería, Física y Finanzas,México:Alfomega, Primera edición, 2006
- [BUR 02]     BURDEN,RICHARD L. Y DOUGLAS FAIRES, J.. Análisis Numérico,Mexico:Thomson-Learning, Séptima edición, 2002.
- [CHA 04]     CHAPRA,STEVEN C. Y CANALE,RAYMOND P.. Métodos Numéricos para ingenieros con programas de aplicación, México: MacGrav-Hill, Cuarta edición, 2004.
- [COR 06]     CORDERO B., ALICIA; HUESO P., JOSE L.; MARTINEZ M., EULALIA Y TORREGOSA S.,JUAN RAMON. Problemas resueltos de Métodos Numéricos, España: Thomson, Primera edición,2006.
- [DEM 97]     DEMIDOVICH,B.P. y MARON,I.A.. Cálculo Numérico Fundamental, España: Paraninfo,primera edición,1977.
- [GER 00]     GERALD, CURTIS F. Y WHEATLEY,PATRICK O.. Análisis Numérico con Aplicaciones, México: Prentice-Hall, Sexta edición, 2000.
- [HAI 08]     HAIRE,E.;NORSETT S.P.; WANNER,G.. Solving Ordinary Differential Equations I: nonstiff problems., USA:Springer, tercera edición, 2008.
- [INF 08]     INFANTE DEL RIO, J,A.; REY C.,JOSE M.. Métodos Numéricos teoría, problemas y prácticas con Matlab, España: Piramide, tercera edición, 2008.
- [KRE 08]     KREYSZIG,ERWIN. Matemáticas avanzadas para Ingeniería volumen II, México: Limusa wiley,Tercera edición, 2008.
- [MOO 07]     MOORE, HOLLY. Matlab para ingenieros, México: Pretince-Hall, Primera edición, 2007.

- [KEN 92] KEN NAGLE,R..Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales, U.S.A: Addison-Wesley Iberoamericana, Segunda edición,1992
- [NAK 92] NAKAMURA,SHOICHIRO. Métodos Numéricos aplicados con softwre ,México:Pretince-Hall, primera edición, 1992.
- [NAK 97] NAKAMURA, SHOICHIRO. Análisis Numérico y visualización gráfica con Matlab, México: Person Educación, Primera Edición, 1997
- [NIE 05] NIEVES, ANTONIO H. Y DOMINGUEZ,FEDERICO C.. Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería,México: Cecsca, Segunda edición, 2005.
- [RAL 65] RALSTON, ANTHONY. Introducción al Análisis Numérico, México: McGraw-Hill,primera edición, 1965.
- [ROJ 01] ROJAS MORENO, ARTURO. Control Avanzado diseño y aplicaciones en tiempo real,Perú:Maguiña,2001.
- [SET 70] SETO, WILLIAM W.. VIBRACIONES MECÁNICAS,México:McGraw-Hill,primera edición, 1970.
- [SCH 85] SCHEID, FRANCIS. Teoría y Problemas de Analisis Numérico, México: McGraw-Hill, primera edición,1985.

# Apéndice A: Introducción al programa Matlab

## A.1 Vectores y matrices

Para definir un vector fila, se introduce sus coordenadas entre dos corchetes

```
>> A=[4 9 -10 22]
```

A =

```
4      9     -10     22
```

Si queremos declarar un vector cuyos elementos estan equiespaciados, por ejemplo el primer elemento valga 10 y el ultimo elemento 30 y distancia entre elemento a elemento se 2, basta poner:

```
>>b=10:2:30
```

b =

```
10     12     14     16     18     20     22     24     26     28     30
```

Las matrices se escriben como vectores, separando las filas mediante un punto y coma, por ejemplo:

```
c=[1 2 3;5 9 2;4 5 6]
```

c =

```
1      2      3
5      9      2
4      5      6
```

## A.2 Gráfica de funciones

Se puede graficar los valores de un vector frente a otro de la misma longitud.



```

>> x=-pi:0.1:pi;
>> y=x.*cos(x);
>> plot(x,y);
>>grid

>> hold on %Mantiene en la ventana gráfica los dibujos anteriores
>> fplot('sin(x)',[-pi pi]) % Dibuja sobre la gráfica anterior
% la función sin(x)

```

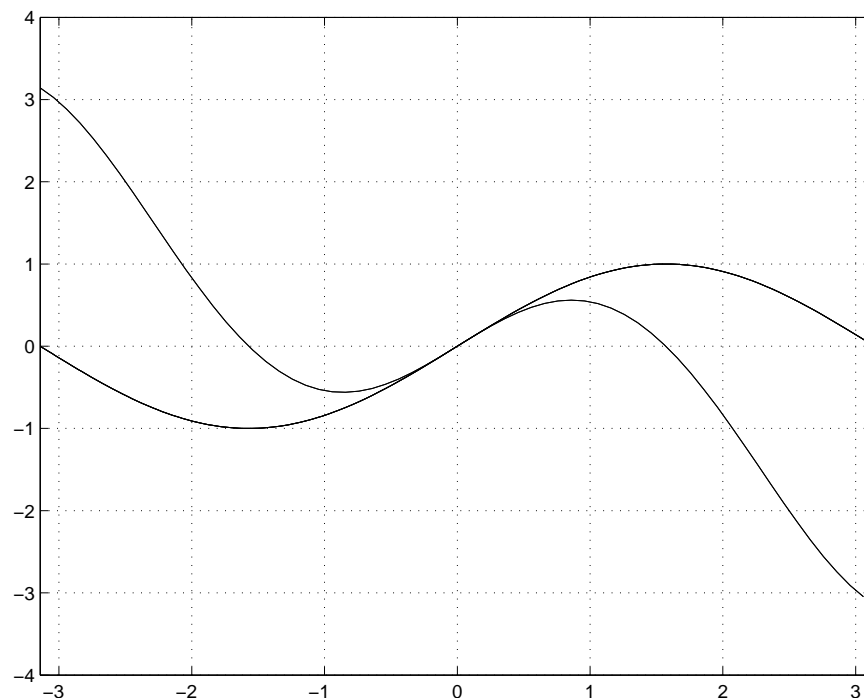


Figura 1: Gráfica de  $x\cos(x)$  y  $\sin(x)$

## A.3 Programación

1. Calcule la suma de los  $n$  primeros términos de la sucesión  $x, 2x^2, 3x^3, \dots, nx^n$  para un valor de  $x$ ,

Programa sumas.m

```

n=input('ingrese cuantos términos quiere sumar');
x=input('dame el valor del numeros x');
suma=x;
for i=2:n

```

```

suma=suma+i*x^i;
end
disp('el valor pedido es')
fprintf('suma= %4.2f\n ',suma);

```

2. Puede programarse funciones, cuyo encabezado es de la forma

```
function [argumentos de salida]=fun(argumentos de entrada)
```

Es conveniente que el fichero que contenga la función se llame como ella; así, la función anterior debería guardarse como fun.m

Calcule

$$\int_0^{10} (x^2 + 1)dx$$

Vamos a crear dos funciones

Programa fun21.m

```

function y=fun21(x)
y=x.^2+1;
end

```

Programa integra.m

```

function y=integra(f,ini,fin)
p=(fin-ini)/1000;
y=0;x=ini;
while x<=fin
    y=y+p*feval(f,x);
    x=x+p;
end
end

```

Se ejecuta el programa escribiendo

```
>>integra('fun21',0,10)
```

```
ans =
```

```
3.438434999999901e+002
```

# Apéndice B: Unicidad de la solución en un S.E. Diferenciales

## B.1 Condición de Lipshitz

Se dice que la función  $f(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$  definida en el conjunto

$$D = \{(t, u_1, u_2, \dots, u_m) / a \leq t \leq b, -\infty < u_i < \infty, \forall i = 1, 2, \dots, m\}$$

satisface la condición de Lipschitz sobre  $D$  en las variables  $u_1, u_2, \dots, u_m$  si existe una constante  $L > 0$  con la propiedad que

$$|f(t, u_1, u_2, \dots, u_m) - f(t, z_1, z_2, \dots, z_m)| \leq L \sum_{j=1}^m |u_j - z_j|$$

$\forall (t, u_1, u_2, \dots, u_m)$  y  $(t, z_1, z_2, \dots, z_m)$  en  $D$

## B.2 Teorema de Unicidad

sea el conjunto

$$D = \{(t, u_1, u_2, \dots, u_m) / a \leq t \leq b, -\infty < u_i < \infty, \forall i = 1, 2, \dots, m\}$$

y  $f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \forall i = 1, 2, \dots, m$  es continua en  $D$  y que satisface allí la condición de Lipschitz. El sistema de ecuaciones diferenciales (3.9) sujeto a las condiciones iniciales (3.10), tiene solución única  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  para  $a \leq t \leq b$ .

# Apéndice C: Orden del Método de Runge Kutta

Butcher J.C.<sup>1</sup> estableció la relación entre la cantidad de evaluaciones por paso y el orden del error local de truncamiento que aparece en la tabla. En ésta se indica por qué los métodos de orden menor que cinco con un tamaño menor de paso se prefieren a los de orden superior con un tamaño mayor de paso.

Evaluaciones por paso	El mejor error local de truncamiento posible
2	$O(h^2)$
3	$O(h^3)$
4	$O(h^4)$
$5 \leq n \leq 7$	$O(h^{n-1})$
$8 \leq n \leq 9$	$O(h^{n-2})$
$10 \leq n$	$O(h^{n-3})$

**Definición.** sean las funciones  $G$  y  $F$  que verifican  $\lim_{h \rightarrow 0} G(h) = 0$  y  $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = L$ . Si existe una constante positiva  $K$  tal que  $|F(h) - L| \leq K |G(h)|$ , para  $h$  suficientemente pequeña entonces escribimos  $F(h) = L + O(G(h))$ .

Por lo común, las funciones que usamos para la comparación tiene la forma  $G(h) = h^p$ , donde  $p > 0$ . Nos interesa el mayor valor de  $p$  para el que  $F(h) = L + O(h^p)$

---

<sup>1</sup>profesor de matemáticas en la Universidad de Auckland desde 1966 a 1998