Matemáticas III

Integración Numérica: Fuerza distribuidas

Semana 12

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

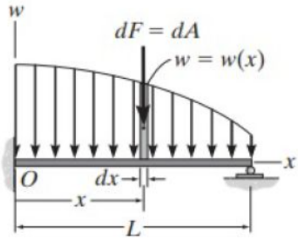
UTEC UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Índice

1 INTEGRACIÓN NUMÉRICA: FUERZAS DISTRIBUIDAS

Introducción

En ocasiones, un cuerpo puede estar sometido a una carga que se encuentra distribuida por toda su superficie. Por ejemplo, la presión del viento sobre la superficie de una señal de tránsito, la presión del agua dentro de un tanque, son todas *cargas distribuidas*. La presión ejercida sobre cada punto de la superficie indica la intensidad de la carga. Esta se mide por pascales Pa o ($\mathrm{N/m^2}$) en unidades del SI o $\mathrm{lb/pie^2}$ en el sistema americano.
Gráficamente:



Magnitud de la fuerza resultante

Como sabemos la fuerza resultante (F_R) se puede calcular como $F_R = \sum F$, entonces la magnitud de F_R es equivalente a la suma de todas las fuerzas en el sistema. En este caso, debemos usar integración puesto que hay una número infinito de fuerzas paralelas dF que actúan sobre la viga de la figura anterior, entonces se tiene:

$$dF = w(x)dx = dA$$

Para toda la longitud L, se tiene:

$$F_R = \int_L w(x)dx = \int_A dA = A$$

Ubicación de la fuerza resultante

Observando el gráfico, sabemos que:

$$M_{Ro} = \sum M_0$$

la ubicación $\bar{x}$ de la línea de acción de F_R puede determinarse igualando los momentos de la fuerza resultante y de la distribución de fuerzas con respecto al punto O (el eje y). Como dF produce un momento $xdF = xw(x)dx$ con respecto a O, entonces:

$$-\bar{x}F_R = -\int_L xw(x)dx$$

Continuación...

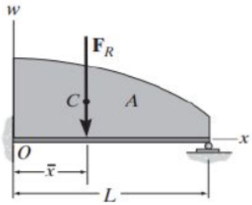


Figure: Ubicación de la fuerza resultante

Finalmente, tenemos:

$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x) dx}{\int_L w(x) dx} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

Obteniendo que la fuerza resultante actúa sobre el centro o centroide del área bajo la curva del diagrama de carga.

Aplicación

En la figura, se muestra la sección transversal de un bote de vela. Las fuerzas del viento (f), ejercidas por pie de mástil de las velas, varían en función de la distancia sobre la cubierta del bote (z), como se muestra en la figura.

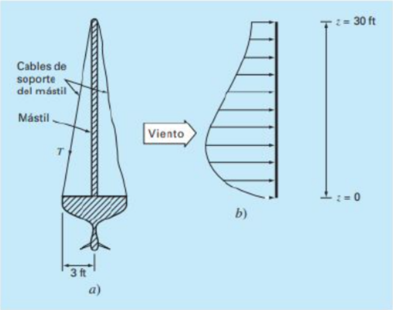


Figure: a)Sección transversal del bote. b) Fuerzas del viento f ejercidas por pie de mástil en función de la distancia z sobre la cubierta.

Continuación...

Se desea calcular la fuerza de tensión T en el cable izquierdo del mástil, suponiendo que el cable de soporte derecho está totalmente flojo y que el mástil se une a la cubierta de modo que transmite fuerzas horizontales o verticales, pero no momentos. Además $w(x)$ se modela por:

$$w(x) = 200\left(\frac{x}{5+x}\right)e^{-2x/30}$$

Resultados

Calculamos la fuerza

$$F = \int_0^{30} w(z)dz = \int_0^{30} 200\left(\frac{z}{5+z}\right)e^{-2z/30}dz$$

Para calcular dicha integral, podemos usar el método de Simpson compuesto con $n = 30$, subintervalos.

```
f1=inline('200*(x./(5+x)).*exp(-x/15)')
I1=simpcomp(f1,0,30,30)
```

I1 = 1.4805e+03

Continuación...

Ahora calculamos la integral

$$\int_0^{30} zw(z)dz = \int_0^{30} 200z\left(\frac{z}{5+z}\right)e^{-2z/30}dz$$

Para calcular dicha integral, podemos usar el método de Simpson compuesto con $n = 30$ subintervalos.

```
f2=inline('200*x.*(x./(5+x)).*exp(-x/15)')
I2=simpcomp(f2,0,30,30)
z=I2/I1
```

I2 = 1.9327e+04

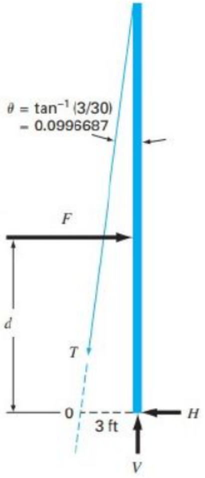
z = 13.0545

Continuación...

Finalmente:

$$\bar{z} = \frac{1480.5005}{19327.22} = 13.0545$$

Aproximando $\bar{z} = 13.0545$, ahora mostrando el diagrama de cuerpo libre:



Continuación...

Aplicando la sumatoria de fuerzas:

$$\sum F_h = 0 = F - T\sin\theta - H$$
$$\sum F_v = 0 = V - T\cos\theta$$
$$\sum M_0 = 0 = 3V - Fd$$

De la última ecuación:

$$V = \frac{Fd}{3} = \frac{(1480.5005)(13.0545)}{3} = 6442.41$$

Finalmente de la segunda ecuación:

$$T = \frac{V}{\cos\theta} = \frac{6442.41}{\cos(0.999)} = 11905.2 \ lb$$

2 APLICACIONES CON MATLAB

Desarrollo

```
function I=simpcomp(f,a,b,n)
if mod(n,2)==0
h=(b-a)/n;
x=[a:h:b];
ximpar=x(2:2:n);
xpar=x(3:2:n-1);
I=(h/3)*(f(a)+4*sum(f(ximpar))+2*sum(f(xpar))+f(b));
else
fprintf('El numero de subintervalos debe ser par\n')
end
end
```

Gracias por su atención