

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TRUJILLO
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA



**“SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES EN
DIFERENCIAS FINITAS PARA DETERMINAR LAS
TEMPERATURAS NODALES EN UNA ALETA CILÍNDRICA ”**

TESIS
PARA OPTAR EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO

Autores:

Br. MAX EDUARDO CALDERÓN ZEVALLOS

Br. ANDY YEFFERSON CHAVEZ ALONZO

Asesor:

Dr. GUILLERMO EVANGELISTA BENITES

TRUJILLO – PERÚ

2018

PRESENTACIÓN

SEÑORES CATEDRÁTICOS MIEMBROS DEL JURADO:

De conformidad con lo dispuesto en el Reglamento de Grados y Títulos de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Química de la Universidad Nacional de Trujillo, nos es honroso presentar a consideración de vuestro elevado criterio el presente trabajo intitulado **"SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS PARA DETERMINAR LAS TEMPERATURAS NODALES EN UNA ALETA CILÍNDRICA"**, que sustentaremos como tesis para obtener el título de Ingeniero Químico, si vuestro dictamen nos es favorable.

Trujillo, Septiembre de 2018

Br. Max Eduardo Calderón Zevallos

Br. Andy Yefferson Chavez Alonzo

Jurado Dictaminador

Dr. Luis Moncada Albitres

Presidente del Jurado

Dr. Walter Moreno Eustaquio

Secretario

Dr. Guillermo Evangelista Benites

Asesor

DEDICATORIA

A DIOS por permitirme estar en este mundo y darme la fortaleza para poder culminar mi formación profesional al lado de los seres que más quiero en esta vida.

A Edilberto Calderón Avalos y Yovana Zevallos Cerna, mis adorados padres que son el motivo de mi constante lucha y perseverancia en el quehacer cotidiano. Gracias por darme ese amor y apoyo que no tienen precio. Los amaré toda mi vida y nunca los defraudaré.

A mis abuelos Eduardo Zevallos Rodríguez y Julia Cerna de Zevallos, quien con sus consejos y paciencia me enseñaron a darle un sentido muy especial a mi vida, no habría sido posible lograr mis objetivos sin su apoyo, siempre los tendré en mi corazón.

Max Calderón Z.

DEDICATORIA

A DIOS, el todopoderoso, por cuidarme y guiarme con su sabiduría por el camino correcto a lo largo de toda mi vida universitaria y personal.

A mis padres Juan Ricardo Chavez Olortegui y Zelis Violeta Alonzo Rodríguez, quienes me dieron la vida, me dan su amor y también esta profesión. Gracias por estar conmigo en todo momento y apoyarme en este gran reto que me tracé, ser un profesional y a quienes nunca los defraudaré

A mi abuelita Hilda Rodríguez Vergara, quien estuvo siempre conmigo en todo momento. Con su ejemplo y sus consejos me ayudaron a no desmayar en los momentos que más necesitaba. Gracias por apoyarme.

Andy Yefferson Chavez A.

AGRADECIMIENTO

Un agradecimiento muy especial a nuestro asesor, el Dr. Ing. Guillermo Evangelista Benites, por su amistad y su constante apoyo y orientación que nos permitieron culminar el presente trabajo de investigación.

Nuestro reconocimiento a la plana docente de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Química, por los conocimientos y experiencias impartidos durante el desarrollo de nuestra formación universitaria, así como también por su tolerancia y paciencia que nos brindaron a lo largo de la carrera.

Max y Andy.

RESUMEN

Frente a la dificultad de usar soluciones analíticas que resultan muchas veces engorrosas y de adquirir programas para resolver problemas de transferencia de calor por el alto costo y por la dependencia tecnológica que genera, se propuso investigar: ¿Es posible simular numéricamente las ecuaciones en diferencias finitas para determinar las temperaturas nodales en una aleta cilíndrica? Se desarrolló el programa “Aleta Cilíndrica” basado en la solución numérica por diferencias finitas y demostrar que la aplicación del mismo calcula las temperaturas nodales en una aleta cilíndrica. El error relativo porcentual entre las soluciones analíticas y numéricas es menor al 0.15%, lo cual demuestra que los resultados son precisos. La “Aleta Cilíndrica” ha sido codificada en el lenguaje de programación MATLAB Versión R2015b, por ser uno de los más usados hoy en día en el mundo científico, especialmente en ingeniería química y se validó con los programas numéricos POLYMATH y SOLVER DE EXCEL.

Palabras clave: simulación numérica, diferencias finitas, temperaturas nodales.

ABSTRACT

Faced with the difficulty of using analytical solutions that are often cumbersome and of acquiring program to solve heat transfer problems due to the high cost and the technological dependence it generates; it was proposed to investigate: Is it possible to numerically simulate the equations in finite differences to determine the nodal temperatures in a cylindrical fin? It was proposed to develop the program "Aleta Cilíndrica" based on the numerical solution for finite differences and to demonstrate that the application of the same calculates the nodal temperatures in a cylindrical fin. The percentage relative error between the analytical and numerical solutions is less than 0.15%, which shows that the results are extremely accurate. The "Aleta Cilíndrica" has been coded in the programming language MATLAB Version R2015b, as it is one of the most used in the scientific world today, especially in chemical engineering and was validated with the numerical program POLYMATH and SOLVER DE EXCEL.

Keywords: numerical simulation, finite differences, nodal temperatures.

ÍNDICE

CARÁTULA	i
PRESENTACIÓN	ii
JURADO DICTAMINADOR	iii
DEDICATORIA	iv
AGRADECIMIENTO	vi
RESUMEN	vii
ABSTRACT	viii
ÍNDICE	ix

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes	1
1.2. Identificación y justificación del problema	3
1.3. Formulación del problema	8
1.4. Hipótesis	8
1.5. Objetivo general	8
1.6. Objetivos específicos	8
1.7. Fundamento Teórico	8
1.7.1 Formulación en diferencias finitas de ecuaciones diferenciales	8
1.7.2 Conducción unidimensional de calor en estado estacionario	12
1.7.3 Transferencia de calor desde superficies con aletas	16

CAPÍTULO II: MATERIAL Y MÉTODOS

2.1. Material de estudio	23
2.2. Métodos y técnicas	
2.2.1 Población	23
2.2.2 Muestra	23
2.2.3 Variables	24
2.2.4 Procedimiento	24

CAPÍTULO III: RESULTADOS

CAPÍTULO IV: DISCUSIÓN DE RESULTADOS

CAPÍTULO V:	CONCLUSIONES	47
CAPÍTULO VI:	RECOMENDACIONES	48
CAPÍTULO VII:	BIBLIOGRAFÍA	49

Biblioteca de Ingeniería Química

ANEXOS

- Anexo 1. Codificación del software “ Aleta Cilíndrica ” en MATLAB.....	52
- Anexo 2. Tabla 1. Variación de la temperatura en los nodos cuando varía la temperatura base	56
- Anexo 3. Tabla 2. Variación de la temperatura en los nodos cuando varía el diámetro	57
- Anexo 4. Tabla 3. Variación de la temperatura en los nodos cuando varía la temperatura del aire ambiental.....	58
- Anexo 5. Iteración Gauss – Seidel.....	59
- Anexo 6. Imágenes de desarrollo de la investigación en el laboratorio de simulación - Facultad de Ingeniería Química	62

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1	Algunos diseños innovadores de aletas	5
Fig. 2	Modelado matemático de los problemas físicos	6
Fig. 3	La derivada de una función representa la pendiente de la función en ese punto	9
Fig.4	Representacion de los nodos y las temperaturas en cada nodo empleado en el avance de la formulacion en diferencia finitas de la transferencia de calor en una pared plana	10
Fig 5	La ecuación diferencial en todo punto de un medio es apropiado, y la ecuación en diferencias finitas solo es correcto en puntos discretos	11
Fig.6	Representacion de los puntos en los nodo y elementos de volumen en diferencias finitas de la conduccion unidimensional en una pared plana.	13
Fig.7	Representacion en diferencias finitas considerando la temperatura varía linealmente entre los nodos	15
Fig. 8	Elemento de volumen de una aleta	16
Fig. 9	Condiciones de frontera en la base de la aleta y en la punta de ella.....	18
Fig.10	Largo de aleta cilindrica de seccion transversal uniforme y el cambio de la temperatura en ella.....	19
Fig.11	Diseño de aleta cilíndrica.....	24
Fig.12	Diseño de aleta cilíndrica.....	28
Fig.13	Temperatura en los nodos en lo largo de la aleta.....	29
Fig.14	Pantalla de presentación del software “Aleta Cilíndrica” (MATLAB)	31
Fig.15	Ingreso de datos de aleta cilíndrica.....	32
Fig.16	Matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones y vector de términos independientes	33
Fig.17	Resultados analíticos y numéricos de temperaturas nodales de aleta cilíndrica usando MATLAB	34
Fig.18	Gráfica de Temperatura vs Longitud de aleta cilíndrica.....	35
Fig.19	Pantalla de datos del problema y sistema de ecuaciones usando POLYMATH	36
Fig.20	Resultados numéricos de temperaturas nodales de aleta cilíndrica usando POLYMATH.....	37

Fig.21 Pantalla de datos del problema y sistema de ecuaciones usando EXCEL.....	39
Fig.22 Resultados numéricos de temperaturas nodales de aleta cilíndrica usando SOLVER	40
Fig.23 Resultados de la razón transferencia de calor y error relativo porcentual	44

Biblioteca de Ingeniería Química

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Temperaturas nodales de aleta circular vía solución analítica y numérica y error relativo porcentual usando POLYMATH.....	38
Tabla 2. Temperaturas nodales de aleta circular vía solución analítica y numérica y error relativo porcentual usando EXCEL.....	41
Tabla 3. Resumen de temperaturas nodales de aleta circular vía solución analítica y numérica usando MATLAB, POLYMATH y SOLVER de EXCEL.....	42

I. INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

Durante el siglo XIX se avanzó mucho en el desarrollo de métodos matemáticos para resolver las diversas formas de la ecuación de conducción de calor. La primera contribución importante fue la de J. Fourier. En su libro, publicado en 1822, explicaba cómo se separaban las variables mediante el uso de un método, que conduce a la necesidad de expresar una función cualquiera en términos desarrollados *en serie de Fourier*. Después empezaron a usar *métodos de las transformadas* - en especial el de la *transformada de Laplace*, así como otros métodos de la matemática clásica.

El tratado de conducción de calor de Carlslaw y Jaeger, citados por Mills, contiene una exhaustiva recopilación de soluciones que se obtienen por medio de estos métodos clásicos. Cuando se emplean otros métodos suele ser necesario que las superficies limítrofes tengan una forma relativamente sencilla, que las condiciones de contorno tengan una forma matemática sencilla y que las propiedades termofísicas sean constantes. A pesar de estas limitaciones, muchos resultados analíticos se utilizan muy a menudo en aplicaciones de ingeniería. Los resultados analíticos forman modelos útiles para constatar la precisión de los métodos solución numérica. Además, el ejercicio de obtener un resultado analítico permite desarrollar una valiosa percepción de la naturaleza interior del fenómeno de transferencia de calor por conducción.

Recientemente se han elaborado métodos, entre ellos tenemos el de diferencias finitas y elementos finitos, que permiten obtener fácilmente soluciones de problemas en los que intervienen formas poco comunes, condiciones de contorno complicadas y propiedades termofísicas variables. Uno de los primeros ejemplos de esto fue la aplicación del método numérico de relajamiento a la conducción de calor estacionaria, llevada a cabo por H. Emmons en 1943. No obstante, dichos métodos se fueron desarrollando más con la presencia de las modernas computadoras con

mayor rapidez en la década de los setenta. La amplia disponibilidad del computador personal en los años ochenta ha llevado a la aparición en el mercado de programas versátiles. Dichos programas se usan para solucionar diversos ejercicios de conducción sin requerir el discernimiento de métodos numéricos por parte del usuario.

Se han usado otros métodos en la obtención de soluciones de enigmas de conducción de calor. Algunos textos sobre transferencia de calor, describen dos métodos gráficos: el método de representación gráfica del flujo por unidad de área y el método gráfico de Schmidt. El primero de ellos se usa para la conducción estacionaria bidimensional e implica el trazado a pulso de isothermas y de líneas de flujo de calor; el segundo se usa en la conducción transitoria, y es el equivalente gráfico del método de diferencias finitas. Antes de la aparición de los computadores digitales, se usaba el computador analógico o “analizador diferencial” para solucionar enigmas de conducción de calor (Mills, 1994).

Kreith, Manglik y Bohn (2013), citan en su obra Principios de Transferencia de Calor, que poseen diferentes procedimientos para fraccionar las ecuaciones diferenciales de conducción de calor. De los cuales son de diferencia finita, el elemento finito y el volumen de control.

Andocilla y Carrera (2015) realizó un estudio, en el cual indicó que las diferentes ecuaciones investigadas acerca de la transferencia de calor para aletas rectangulares son muy generales y no toman otros parámetros esenciales para esta investigación, por tal motivo el uso de diferencias finitas ayudó a tener una relación de temperatura-tiempo y temperatura-distancia de la aleta, obteniendo valores más cercanos a la realidad.

Naphon (2006), realizó una investigación sobre análisis de la transferencia de calor en intercambiadores de calor de tubo y aletas anulares. En la investigación solucionan las ecuaciones de conservación mediante métodos numéricos, considerando coeficientes de masa y transferencia de calor constantes. Se concluyó que el fragmento exhibido del intercambiador en fluido gaseoso, señaló mayor resistencia térmica, mostrando gradientes de temperaturas en superior magnitud.

Waltrich (2010), realizó un prototipo repetido donde explicó los principios matemáticos para el análisis del comportamiento termohidráulico para intercambiadores de calor de tubos y aletas. Dicho modelo se fundamentó en las ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía. Se propuso mediante dos sub-modelos, el térmico que provee la tasa de transferencia de calor y el estado termodinámico del aire y las corrientes de refrigerante, por otro lado, el hidráulico evaluó el flujo de aire suministrado.

Los modelos precisos, pero complicados, no suelen tener una elaboración tan ardua, sin embargo, no ayudan de mucho si son complejas y laboriosas. El modelo debe evidenciar las características importantes del problema físico que simboliza. Tenemos diversos problemas característicos en la actualidad que se puede estudiar con un modelo simple, teniendo en cuenta que las soluciones alcanzadas a partir de un análisis son precisas como las hipótesis fijadas en la síntesis del problema. Por consiguiente, el resultado no debe utilizarse en situaciones para las que no se cumplen las consideraciones originales (Cengel, 2011).

1.2 Identificación y justificación del problema

Las aletas o superficies extendidas se utilizan con la finalidad de aumentar la tasa de transferencia de calor de una superficie. Efectivamente, las aletas conexas a una superficie aumentan el área total disponible para la transferencia de calor. En el estudio y modelo de una superficie con aletas, la suma de energía calorífica disipada por una sola aleta de un tipo geométrico dado, se calcula auxiliándonos del gradiente de temperatura y el área transversal disponible para el flujo de calor en la base de la aleta. Por lo tanto, el número total de aletas necesarias para desaparecer una suma de calor establecida se hallará en base a la aglomeración de transferencia de calor.

La ecuación diferencial que explica la distribución de temperatura en una aleta surge de un equilibrio de energía en una sección fundamental de la aleta que es conductora, y capaz para la convección. Las aletas proporcionan una transformación del enigma unidimensional al problema bidimensional (Karlekar y Desmond, 1995).

Comúnmente se utiliza un área con aletas cuando el flujo convectivo participante es un gas, debido a los coeficientes convectivos de transferencia de calor para un gas son normalmente menores que los de un líquido. Así, por ejemplo, de un área con aletas se tienen los cilindros de una motocicleta, las aletas de enfriamiento de componentes electrónicos, así como los tubos del condensador de un refrigerador doméstico (Mills, 1994).

Las aletas son discos anulares concéntricos alrededor de un tubo (aletas circunferenciales) o bien secciones transversales rectangulares (aletas longitudinales). (Incropera, 1999).

La tasa de transferencia de calor desde un área que está a una temperatura T_s hacia el alrededor que está a T_∞ se expresa por la ley del enfriamiento de Newton de la siguiente manera:

$$\dot{Q}_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty) \quad (1.1)$$

Donde A_s es el área superficial de transferencia de calor y h es el coeficiente de transferencia de calor por convección. Cuando las temperaturas T_s y T_∞ se adhieren por suposiciones de diseño, tenemos dos formas de aumentar la tasa de la transferencia de calor: incrementar el coeficiente de transferencia de calor por convección, h , o aumentar el área superficial A_s . El incremento de h puede exigir la instalación de una bomba o ventilador, o cambiar el existente con uno mayor, pero este método puede no ser efectivo o apropiado. La opción es incrementar el área superficial al añadir unas *superficies extendidas* llamadas *aletas*, creadas de materiales conductores como el aluminio.

Habitualmente, las superficies con aletas se usan para mejorar la transferencia de calor e incrementar la tasa desde una superficie repetidas veces. El mercado cuenta con una gran diversidad de modelos innovadores de aletas (Fig. 1) (Çengel y Ghajar, 2011).

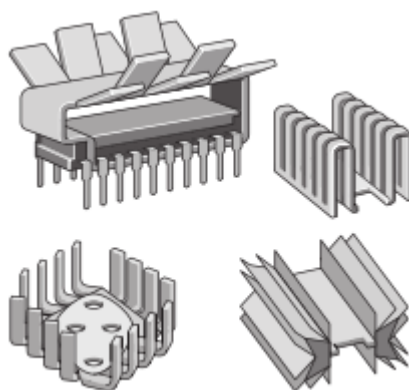


Fig. 1 Algunos diseños innovadores de aletas

Fuente : Cengel y Ghajar, 2011, p.164

La transferencia de calor presenta un rol fundamental en la industria, desde las técnicas asociadas a la generación de energía térmica hasta las máquinas implicadas con su beneficio o modificación en otro tipo de energía, siendo esencial en el modelo de intercambiadores de calor, condensadores, calderas, turbinas, etc. (Montes, 2015)

En el estudio de los problemas de conducción de calor tenemos dos cantidades de interés práctico; entre ellas tenemos: la tasa de flujo de calor y la distribución de temperatura. Las razones de flujo de calor hablan de la demanda de energía en un sistema dado, cuando se exige una distribución de temperaturas adecuada para crear un sistema apropiado. En cualquier circunstancia, conocida la distribución de la temperatura es viable hallar las razones de flujo de calor con la denominada ley de Fourier (Karlekar y Desmond, 1995).

Los enigmas científicos abarcan las ecuaciones que se vinculan entre sí, las modificaciones de ciertas variables puntuales. Usualmente, cuando el aumento elegido en las variables cambiantes es menor será más universal y precisa a la descripción.

Las ecuaciones diferenciales que facilitan formulaciones matemáticas exactas para las leyes y principios físicos simbolizan las razones de cambio como derivadas. En consecuencia, se emplean las ecuaciones diferenciales para averiguar una extensa variedad de enigmas en las ciencias y la ingeniería (Fig. 2). No obstante, varios

enigmas que se hallan en la práctica se pueden solucionar sin requerir a las ecuaciones diferenciales y a las dificultades asociadas con estas.

Una persona que analice un enigma de ingeniería, reiteradas veces se va encontrar en el dilema de escoger entre un diseño preciso, pero complicado, y uno simple, pero no tan preciso. La elección adecuada depende de la circunstancia que se presente. La elección adecuada frecuentemente es el diseño más simple que da origen a soluciones oportunas. (Cengel, 2011).

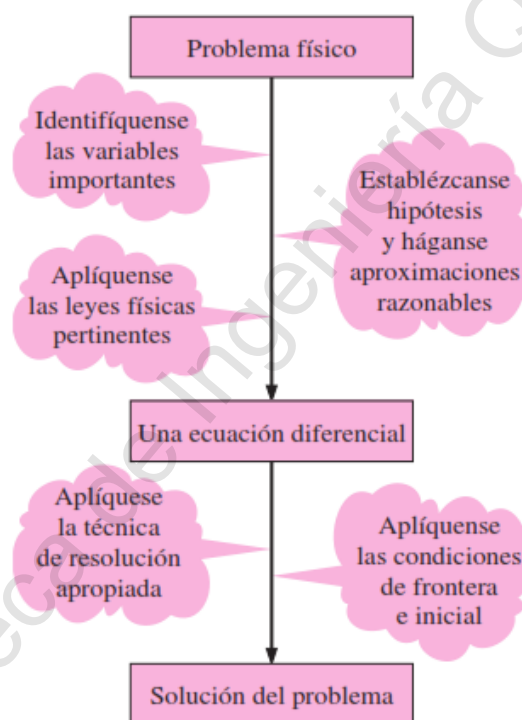


Fig. 2 Modelado matemático de los problemas físicos

Fuente: Cengel y Ghajar, 2011, p.6

Entre las conclusiones de Andocilla y Carrera (2015), indica que las diferentes ecuaciones investigadas acerca de la transferencia de calor para aletas rectangulares son muy generales y no toman otros parámetros esenciales para esta investigación, por tal motivo el uso de diferencias finitas ayudó a tener una relación de temperatura-

tiempo y temperatura-distancia de la aleta, obteniendo valores más cercanos a la realidad.

La aplicación de los métodos numéricos para solucionar enigmas de transferencia de calor, surge de la dificultad de los resultados vinculados a los enigmas prácticos de ingeniería. Con regularidad, los resultados analíticos son improbables. Las causas que llevan a los métodos numéricos son la geometría compleja, condiciones en la frontera no uniformes, condiciones en la frontera que es necesario el tiempo, y propiedades que necesitan de la temperatura.

En ciertas situaciones es viable obtener resultados analíticos, al inicio, aunque a veces son más complejos que la mecánica que se solicita para conseguir el resultado que el trabajo requiere y solucionar el enigma numéricamente. Otros métodos numéricos que se utilizarán estarán basados en la resolución por métodos iterativos (Mills, 1995).

Los resultados analíticos establecen patrones apropiados para comprobar la precisión, en ciertas situaciones, de los métodos de solución numérica, a pesar que, los métodos numéricos se han desarrollado más con la presencia de las nuevas computadoras de mayor rapidez. Hoy en día en el mercado se encuentran una gran cantidad de programas versátiles que se pueden emplear para solucionar diversos enigmas de conducción sin requerir del conocimiento del usuario. Circunstancia que resalta nuestra necesidad tecnológica y económica de países que desean realzar la tecnología de punta.

Entre las líneas de investigación de nuestra Facultad de Ingeniería Química tenemos la Simulación de Procesos, y este trabajo de investigación debe formar parte de un paquete de programas en el área de transferencia de calor. Además, dicha Facultad posee un amplio Laboratorio de Simulación, el cual tiene computadoras de última generación nos posibilita investigar soluciones a enigmas de cálculo de las temperaturas nodales de una aleta cilíndrica, y no solo alcanzar y emplear una tecnología sino también diseñarla para aprovechamiento y utilidad de la Universidad.

1.3 Formulación del problema

¿Es posible simular numéricamente las ecuaciones en diferencias finitas para determinar las temperaturas nodales en una aleta cilíndrica?

1.4 Hipótesis

La aplicación de un programa ingenieril a desarrollar (tal como MATLAB, POLYMATH, SOLVER de EXCEL) basado en la simulación numérica usando el método iterativo de Gauss-Seidel, nos permitió calcular la temperatura de los nodos en una aleta cilíndrica. Se consideró que la transferencia de calor en lo largo de la aleta fue constante y unidimensional, al igual que las propiedades térmicas y la transferencia de calor por radiación fue despreciable.

1.5 Objetivo general

Desarrollar un programa de simulación numérica que resuelva las ecuaciones en diferencias finitas usando el método iterativo Gauss-Seidel en MATLAB, POLYMATH y SOLVER de EXCEL.

1.6 Objetivos específicos

- Formular el modelo matemático a partir de las ecuaciones en diferencias finitas.
- Aplicar el programa desarrollado para calcular las temperaturas nodales en una aleta cilíndrica.

1.7 Fundamento Teórico

1.7.1 Formulación en diferencias finitas de ecuaciones diferenciales

Los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales se basan en el reemplazo de las *ecuaciones diferenciales* por *ecuaciones algebraicas*. En el caso del método de las **diferencias finitas**, esto se realiza al reemplazar las *derivadas* por *diferencias*.

Las derivadas son los bloques de construcción de las ecuaciones diferenciales y, por consiguiente, se dará un breve repaso a las derivadas. Considere una función f que depende de x (Fig. 3). La primera derivada de $f(x)$ en un punto es equivalente a la pendiente de una recta tangente a la curva en ese punto y se define como

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.2)$$

lo cual es la razón del incremento Δf en función al incremento Δx de la variable independiente, cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Si no se toma el límite indicado, se tendrá la siguiente relación aproximada para la derivada:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.3)$$

Esta expresión aproximada de la derivada en términos de diferencias es la forma en diferencias finitas de la primera derivada.

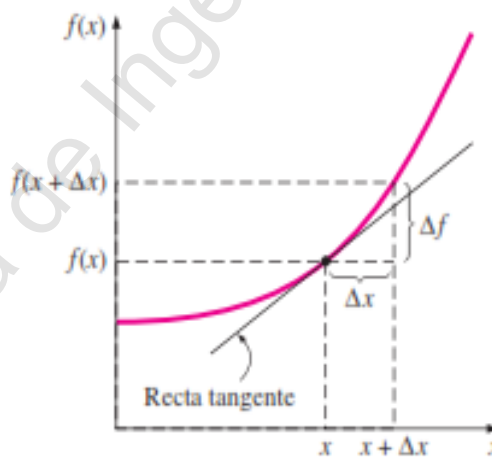


Fig. 3 Derivada de una función representa la pendiente de la función en ese punto.

Fuente: Cengel y Ghajar, 2011, p.300

Considere ahora la conducción de calor unidimensional en estado estacionario en una pared plana de espesor L , con generación de calor. La pared se subdivide en M secciones de espesor igual $\Delta x = L/M$, en la dirección x , separadas por planos que pasan por los $M + 1$ puntos $0, 1, 2, \dots, m - 1, m, m + 1, \dots, M$, llamados **odos** o **puntos nodales**, como se muestra en la figura siguiente.

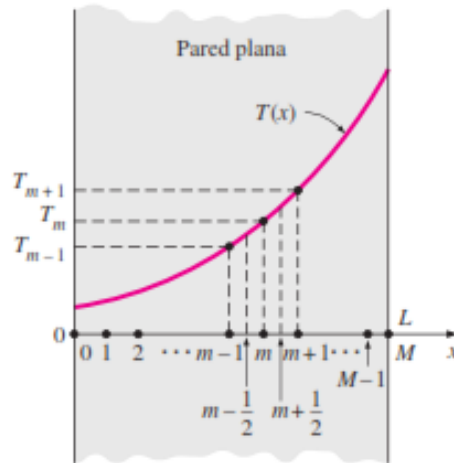


Fig. 4 Representación de los nodos y las temperaturas en cada nodo empleado en el avance de la formulación en diferencias finitas de la transferencia de calor en una pared plana.

Fuente: Cengel y Ghajar, 2011, p.300

La coordenada x de cualquier punto m es simplemente $x_m = m\Delta x$ y la temperatura en ese punto es simplemente $T(x_m) = T_m$.

La ecuación de conducción de calor comprende las segundas derivadas de la temperatura con respecto a las variables espaciales, tales como d^2T/dx^2 y la formulación en diferencias finitas se basa en el reemplazo de las segundas derivadas por diferencias apropiadas. Pero se necesita iniciar el proceso con las primeras derivadas. Mediante la ecuación (1-3), la primera derivada de la temperatura, dT/dx , en los puntos medios $m - 1/2$ y $m + 1/2$ de las secciones que están a uno y otros lados del nodo m se puede expresar como

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{m-1/2} \cong \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x} \quad y \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{m+1/2} \cong \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad (1.4)$$

Dado que la segunda derivada es simplemente la derivada de la primera derivada, la segunda derivada de la temperatura en el nodo m se puede expresar como

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2T}{dx^2}\right|_m &\cong \frac{\left.\frac{dT}{dx}\right|_{m+\frac{1}{2}} - \left.\frac{dT}{dx}\right|_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} - \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2}\end{aligned}\quad (1.5)$$

lo cual es la *representación en diferencias finitas de la segunda derivada* en un nodo interno general m . Observar que la segunda derivada de la temperatura en el nodo m se expresa en términos de las temperaturas en el nodo m y sus dos nodos vecinos. Entonces la ecuación diferencial

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{e}}{k} = 0 \quad (1.6)$$

que rige la transferencia de calor *unidimensional en estado estacionario* en una pared plana, con conducción de calor y conductividad térmica constante, se puede expresar en la forma de diferencias finitas como (Fig. 5).

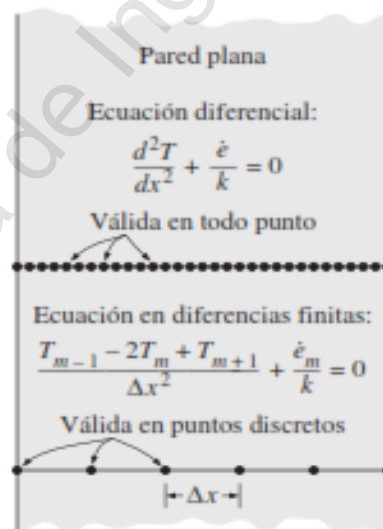


Fig. 5 La ecuación diferencial en todo punto de un medio es apropiado, y la ecuación en diferencias finitas sólo es correcto en puntos discretos.

Fuente: Cengel y Ghajar, 2011, p.301

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{e}_m}{k} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M - 1 \quad (1.7)$$

donde \dot{e}_m es la razón de generación de calor por unidad de volumen en el nodo m . Para el caso en que no haya generación de calor ($\dot{e}_m = 0$), la ecuación 1.7 se reduce a $T_m = 1/2(T_{m-1} + T_{m+1})$, la cual es la forma más simplificada de una formulación en diferencia finita unidimensional. La ecuación tan sólo implica que la temperatura en cada nodo interior es el promedio aritmético de las temperaturas en los dos nodos adyacentes. Si se especifican las temperaturas superficiales T_0 y T_M , la aplicación de esta ecuación a cada uno de los $M-1$ nodos interiores conduce a $M-1$ ecuaciones para la determinación de $M-1$ temperaturas desconocidas en los nodos interiores. La solución simultánea de estas ecuaciones da los valores de la temperatura en los nodos. Si no se conocen las temperaturas en las superficies exteriores, entonces se necesitan obtener dos ecuaciones más en una manera semejante, mediante las condiciones de frontera específicas. Entonces se determinan las temperaturas desconocidas en los $M+1$ nodos, al resolver simultáneamente el sistema resultante de $M+1$ ecuaciones en las $M+1$ incógnitas.

La formulación en diferencias finitas se puede extender con facilidad a problemas bidimensionales o tridimensionales de transferencia de calor al reemplazar cada segunda derivada por una ecuación en diferencias en esa dirección (Cengel, 2011).

1.7.2 Conducción unidimensional de calor en estado estacionario

El *método del balance de energía* se basa en la *subdivisión* del medio en un número suficiente de elementos de volumen y, a continuación, aplicar un *balance de energía* en cada elemento. Esto se realiza al seleccionar en principio los puntos nodales (o nodos) en los cuales se van a determinar las temperaturas y, a continuación, para *formar elementos* (o *volúmenes de control*) sobre los nodos y trazar rectas que pasen por los puntos medios entre los nodos. De esta manera, los nodos interiores se mantienen a la mitad de los elementos, y las propiedades en el *nodo*, como la temperatura y la velocidad de generación de calor, representan las propiedades promedio del elemento. A veces resulta conveniente pensar en la temperatura como si variara linealmente entre los nodos, en especial al expresar la conducción de calor entre los elementos mediante la ley de Fourier.

Considerando una vez más la transferencia de calor unidimensional en estado estacionario en una pared plana de espesor L con generación de calor $\dot{e}(x)$ y conductividad constante k . La pared se subdivide ahora en M regiones iguales de espesor $\Delta x = L/M$, en la dirección x , y las divisiones entre las regiones se seleccionan como los nodos. Por lo tanto, se tienen $M + 1$ nodos nombrados $0, 1, 2, \dots, m - 1, m, m + 1, \dots, M$, como se muestra en la figura 6.

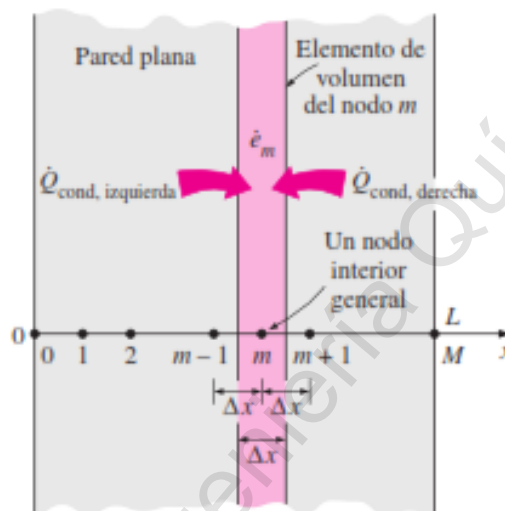


Fig. 6 Representación de los puntos en los nodos y elementos de volumen en diferencias finitas de la conducción unidimensional en una pared plana.

Fuente: Cengel y Ghajar, 2011, p.302

La coordenada x de cualquier nodo m es simplemente $x_m = m\Delta x$ y la temperatura en ese punto es $T(x_m) = T_m$. Los elementos se forman al trazar rectas verticales que pasen por los puntos medios entre los nodos. Observar que todos los elementos interiores representados por nodos interiores son de tamaño completo (tienen un espesor de Δx), en tanto que el tamaño de los dos elementos en las fronteras es la mitad.

Para obtener una ecuación en diferencias general para los nodos interiores, considere el elemento representado por el nodo m y los dos nodos vecinos $m - 1$ y $m + 1$. Si se supone que la conducción de calor se lleva a cabo hacia los elementos sobre todas las superficies, un balance de energía en el elemento se puede expresar como

$$\left(\begin{array}{c} \text{Razón de} \\ \text{la conducción} \\ \text{de calor en la} \\ \text{superficie izquierda} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Razón de} \\ \text{la conducción} \\ \text{de calor en la} \\ \text{superficie derecha} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Razón de} \\ \text{la generación} \\ \text{de calor dentro} \\ \text{del elemento} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Razón} \\ \text{de cambio del} \\ \text{contenido de energía} \\ \text{del elemento} \end{array} \right)$$

o bien,

$$\dot{Q}_{cond,izquierda} + \dot{Q}_{cond,derecha} + \dot{E}_{gen,elemento} = \frac{\Delta E_{elemento}}{\Delta t} = 0 \quad (1.8)$$

puesto que el contenido de energía de un medio (de cualquier parte de él) no cambia en condiciones *estacionarias* y, por lo tanto, $\Delta E_{elemento} = 0$. La razón de la generación de calor dentro del elemento se puede expresar como elemento

$$\dot{E}_{gen,elemento} = \dot{e}_m V_{elemento} = \dot{e}_m A \Delta x \quad (1.9)$$

donde \dot{e}_m es la razón de la generación de calor por unidad de volumen, en W/m^3 , evaluada en el nodo m y tratada como constante para el elemento completo, y A es el área de transferencia de calor, la cual es simplemente la superficie interior (o exterior) de la pared.

Cuando la temperatura varía linealmente, la razón estacionaria de conducción de calor a través de una pared plana de espesor L se puede expresar como

$$\dot{Q}_{cond} = kA \frac{\Delta T}{L} \quad (1.10)$$

donde ΔT es el cambio de temperatura a través de la pared y la dirección de la transferencia de calor va del lado con mayor temperatura hacia el de menor. Se puede aproximar la variación de temperatura entre los nodos como si fuera lineal en la determinación de la conducción de calor a través de una capa delgada de espesor Δx entre dos nodos (Fig. 7). Es obvio que entre menor sea la distancia Δx entre dos nodos, más precisa es esta aproximación. (De hecho, las consideraciones de este tipo constituyen la razón para clasificar los métodos numéricos como sistemas aproximados de solución. En el caso límite en que Δx tiende a cero, la formulación se vuelve exacta y se obtiene una ecuación diferencial).

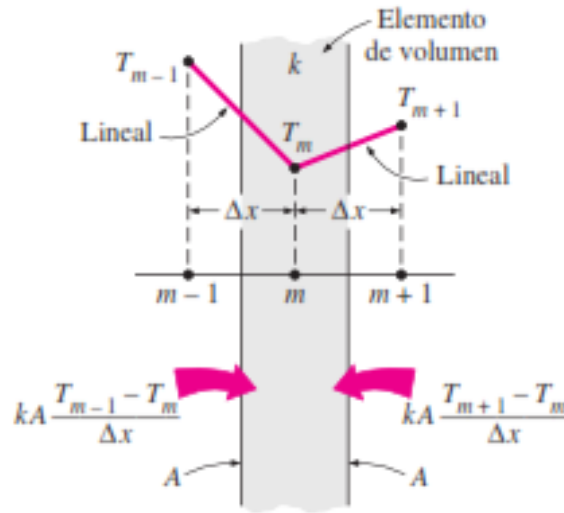


Fig. 7 Representación en diferencias finitas considerando la temperatura varía linealmente entre los nodos.

Fuente: Cengel y Ghajar, 2011, p.303

Ya que se supone que la dirección de la transferencia de calor en ambas superficies del elemento es hacia el nodo m , la razón de la conducción de calor en las superficies izquierda y derecha se puede expresar como

$$\dot{Q}_{cond, izquierda} = kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} \quad y \quad \dot{Q}_{cond, derecha} = kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad (1.11)$$

Al sustituir las ecuaciones (1.9) y (1.11) en la ecuación (1.8) da

$$kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + \dot{e}_m A \Delta x = 0 \quad (1.12)$$

la cual se simplifica a

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} + \dot{e}_m \Delta x = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M - 1 \quad (1.12)$$

que es idéntica a la ecuación en diferencias (ecuación 1.7) obtenida al principio. Una vez más, esta ecuación se puede aplicar a los $M - 1$ nodos interiores y su aplicación da lugar a $M - 1$ ecuaciones para la determinación de las temperaturas en $M + 1$ nodos.

Las dos ecuaciones adicionales que se necesitan resolver para las $M + 1$ temperaturas desconocidas en los nodos se obtienen mediante la aplicación del balance de energía en los dos elementos en las fronteras (a menos, por supuesto, que se especifiquen las temperaturas en las fronteras) (Cengel, 2011).

1.7.3 Transferencia de calor desde superficies con aletas

Considerando un elemento de volumen en una aleta, en la ubicación x , que tiene una longitud Δx , un área de sección transversal de A_c y un perímetro de p , como se muestra en la Fig. 8.

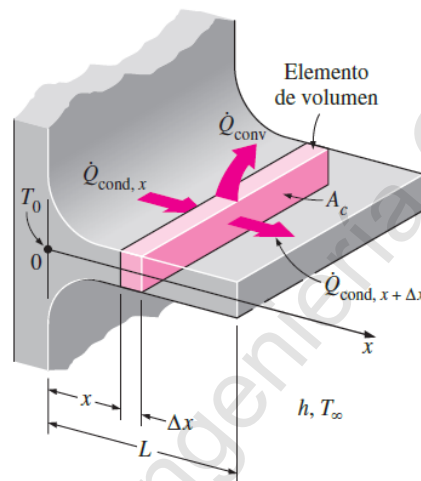


Fig. 8 Elemento de volumen de una aleta

Fuente: Cengel y Ghajar, 2011, p.164

En condiciones estacionarias, el balance de energía sobre este elemento de volumen se puede expresar como:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Razón de la} \\ \text{conducción del calor} \\ \text{hacia el elemento en } x \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Razón de la} \\ \text{conducción del calor} \\ \text{hacia el elemento en } x + \Delta x \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Razón de la} \\ \text{convección del calor} \\ \text{desde el elemento} \end{array} \right) \quad (1.13)$$

o sea

$$\dot{Q}_{cond,x} = \dot{Q}_{cond,x+\Delta x} + \dot{Q}_{conv}$$

donde

$$\dot{Q}_{conv} = h(p\Delta x)(T_s - T_\infty)$$

Al sustituir y dividir entre Δx , se obtiene:

$$\frac{\dot{Q}_{cond,x-\Delta x} - \dot{Q}_{cond,x}}{\Delta x} + hp(T_s - T_\infty) = 0 \quad (1.14)$$

Al tomar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ da

$$\frac{d\dot{Q}_{cond}}{dx} + hp(T_s - T_\infty) = 0 \quad (1.15)$$

Con base en la ley de Fourier de la conducción del calor, se tiene

$$\dot{Q}_{cond} = -kA_c \frac{dT}{dx} \quad (1.16)$$

donde A_c es el área de la sección transversal de la aleta en la ubicación x . La sustitución de esta relación en la ecuación (1.15) da la ecuación diferencial que rige la transferencia de calor en las aletas,

$$\frac{d}{dx} \left(kA_c \frac{dT}{dx} \right) - hp(T_s - T_\infty) = 0 \quad (1.17)$$

En general, el área de la sección transversal A_c y el perímetro p de una aleta varían con x , lo cual hace que esta ecuación diferencial sea difícil de resolver. En el caso especial de una sección transversal constante y conductividad térmica constante, la ecuación diferencial (1.17) se reduce a

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hp}{kA_c}(T_s - T_\infty) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0 \quad (1.18)$$

donde

$$m^2 = \frac{hp}{kA_c} \quad (1.19)$$

y $\theta = T_s - T_\infty$ es el *exceso de la temperatura*. En la base de la aleta se tiene $\theta_b = T_b - T_\infty$. La solución general de la ecuación diferencial (1.18) es

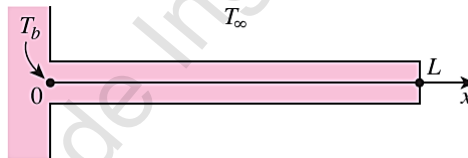
$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (1.20)$$

en donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias cuyos valores se deben determinar a partir de las condiciones de frontera en la base y en la punta de la aleta.

Es normal que la temperatura de la placa a la cual se sujetan las aletas se conozca con anterioridad. Por lo tanto, en la base de la aleta se tiene una condición de frontera de temperatura específica, expresada como

$$\text{Condición de frontera en la base de la aleta:} \quad \theta(0) = T_b - T_\infty \quad (1.21)$$

En la punta de la aleta se tienen varias posibilidades, que incluyen temperatura específica, pérdida de calor despreciable (idealizada como una punta aislada), convección o convección y radiación combinadas (Fig. 9).



1. Aleta infinitamente larga
2. Pérdida de calor despreciable (punta adiabática)
3. Temperatura específica
4. Convección

Fig. 9 Condiciones de frontera en la base de la aleta y en la punta de ella

Fuente: Cengel y Ghajar, 2011, p.166

1. Aleta infinitamente larga ($T_{\text{punta de la aleta}} = T_\infty$)

Para una aleta suficientemente larga de sección transversal uniforme ($A_c = \text{constante}$), la temperatura en la punta tenderá a la del medio, T_∞ y por consiguiente θ tenderá a cero. Es decir,

Condición de frontera en la punta de la aleta:

$$\theta(L) = T(L) - T_{\infty} = 0 \quad \text{cuando} \quad L \rightarrow \infty$$

Si $\theta = T_s - T_{\infty}$ y $m = \sqrt{hp/kA_c}$, la variación de la temperatura a lo largo de la aleta se puede expresar como

$$\text{Aleta muy larga:} \quad \frac{T(x) - T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}} = e^{-mx} = e^{-x\sqrt{hp/kA_c}} \quad (1.22)$$

Se puede observar que en este caso la temperatura a lo largo de la aleta decrece exponencialmente desde T_b hasta T_{∞} , como se muestra en la figura 10.

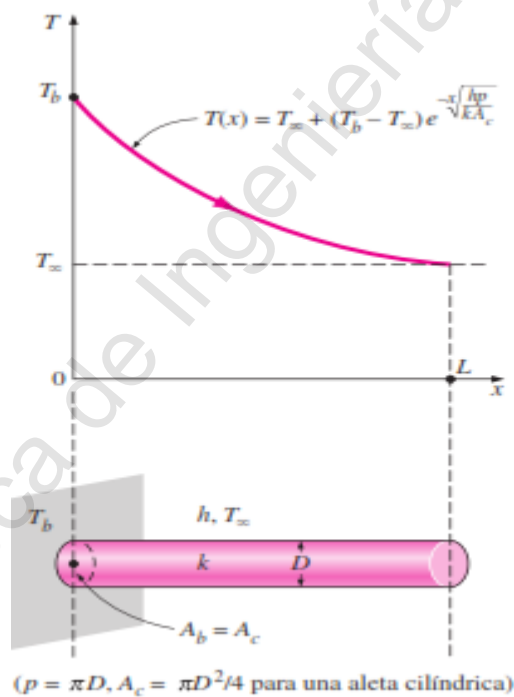


Fig. 10 Largo de aleta cilíndrica de sección transversal uniforme y el cambio de la temperatura en ella.

Fuente: Cengel y Ghajar, 2011, p.166

Se puede determinar la razón de la transferencia de calor estacionaria desde toda la aleta a partir de la ley de Fourier de la conducción del calor:

$$\text{Aleta muy larga: } \dot{Q}_{\text{aleta larga}} = -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \sqrt{\frac{hp}{kA_c}} (T_b - T_\infty) \quad (1.23)$$

donde p es el perímetro, A_c es el área de la sección transversal de la aleta y x es la distancia desde la base de la aleta.

2. Pérdida de calor despreciable desde la punta de la aleta (punta de la aleta aislada, ($\dot{Q}_{\text{punta de la aleta}} = 0$))

Suponiendo que la punta de la aleta está aislada y que la condición en ella puede expresarse como

$$\text{Condición en la frontera en la punta de la aleta: } \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (1.24)$$

La relación deseada para la distribución de la temperatura es:

$$\text{Punta adiabática de la aleta: } \frac{T(x) - T_x}{T_b - T_x} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (1.25)$$

Una vez más, se puede determinar la razón de la transferencia de calor a partir de la ley de Fourier de la conducción de calor:

$$\begin{aligned} \text{Punta adiabática de la aleta: } \dot{Q}_{\text{punta aislada}} &= -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \\ &= \sqrt{hp k A_c} (T_b - T_\infty) \tanh mL \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde la ecuación para la función de tangente hiperbólica es:

$$\tanh x = \sinh x / \cosh x = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x})$$

Observar que las relaciones de transferencia de calor para una aleta muy larga y una con pérdida de calor despreciable en la punta difieren en el factor $\tanh mL$, la cual tiende a 1 cuando L se hace muy grande.

3. Temperatura específica ($T_{\text{punta de la aleta}} = T_L$)

En este caso, la temperatura en el extremo de la aleta (la punta de aleta) está fija a una temperatura específica T_L . Este caso podría considerarse como una generalización de la *aleta infinitamente larga*, en el que la temperatura de la punta de aleta estaba fija en T_∞ . La condición en la punta de aleta para este caso es:

$$\text{Condición de frontera en la punta de la aleta: } \theta(L) = \theta_L = T_L - T_\infty \quad (1.27)$$

La distribución deseada de la temperatura es:

Temperatura específica de la punta de la aleta:

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_b-T_\infty} = \frac{[(T_L-T_\infty)/(T_b-T_\infty)] \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL} \quad (1.28)$$

Mediante la ley de Fourier de la conducción de calor, la razón de transferencia de calor de la aleta es:

Temperatura específica de la punta de la aleta:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{temperatura específica}} &= -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \\ &= \sqrt{hpkA_c} (T_b - T_\infty) \frac{\cosh mL - [(T_L - T_\infty)/(T_b - T_\infty)]}{\sinh mL} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Se puede notar que las ecuaciones (1.28) y (1.29) se reducen a las ecuaciones (1.22) y (1.23) para el caso de la aleta infinitamente larga ($L \rightarrow \infty$).

4. Convección (o convección y radiación combinadas) desde la punta de la aleta

En la práctica, las puntas de las aletas están expuestas a los alrededores; por lo tanto, la condición de frontera apropiada para la punta de la aleta es la de la

convección, que también puede incluir los efectos de la radiación. Considerando el caso de la convección sólo en la punta. La condición en la punta de la aleta se puede obtener a partir de un equilibrio de energía en la punta de la aleta ($\dot{Q}_{cond} = \dot{Q}_{conv}$). Es decir,

$$\text{Condición de frontera en la punta de la aleta: } -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = hA_c [T(L) - T_\infty] \quad (1.30)$$

Al sustituir las dos condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (1.21) y (1.30) en la solución general (1.20), se puede mostrar, después de algunas manipulaciones largas, que la distribución de la temperatura es:

Convección en la punta de la aleta:

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (1.31)$$

Se puede calcular la *razón de la transferencia de calor* de la aleta al sustituir en la ecuación de la ley de Fourier de conducción de calor el gradiente de temperatura en la base de la aleta, obtenido en la ecuación (1.31). El resultado de este procedimiento es:

Convección en la punta de la aleta:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{convección} &= -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \\ &= \sqrt{hpkA_c} (T_b - T_\infty) \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \end{aligned} \quad (1.32)$$

La solución a la ecuación general de aletas para el caso de la convección de la punta de la aleta es muy compleja (Cengel, 2011).

II. MATERIAL Y MÉTODOS

La presente investigación, fue de tipo aplicada, y se realizó en el Laboratorio de Simulación de Procesos del Departamento Académico Ingeniería Química de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional de Trujillo.

2.1 Material de estudio

A. Programa “**Aleta Cilíndrica**” basado en la simulación numérica por diferencias finitas, uso del método numérico de Gauss-Seidel y codificado en MATLAB, POLYMATH y Solver de Excel.

B. Laptop HP

- Procesador Intel Core i3
- Memoria RAM: 4GB
- Disco Duro: 1 TB
- Tarjeta de Video: 2GB
- Grabador de DVD

C. Impresora HP DeskJet 2135

2.2 Métodos y técnicas

2.2.1 Población:

La población de estudio estuvo conformada por aletas cilíndricas de sección transversal uniforme.

2.2.2 Muestra:

Para la muestra se consideró una aleta cilíndrica de sección transversal uniforme, con un diámetro de 10 mm y longitud de 50 mm, que se adhiere a una pared con temperatura superficial de 350°C, de un material que tiene una

conductividad térmica de $240 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ y expuesta a una condición de aire ambiental de 25°C , cuyo coeficiente de transferencia de calor por convección es de $250 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$.

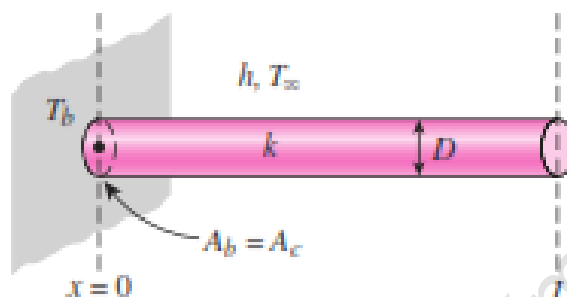


Figura 11. Diseño aleta cilíndrica

Fuente: Cengel y Ghajar, 2011, p.352

2.2.3 Variables:

Independiente: Simulación numérica de las ecuaciones en diferencias finitas.

Dependiente: Cálculo de las temperaturas de los nodos en una aleta cilíndrica.

2.2.4 Procedimiento:

El método más usado es la iteración de Gauss-Seidel, el cual se aplica a un sistema de N ecuaciones algebraicas en N temperaturas nodales, para el cual se realizó el siguiente procedimiento:

1) Primero escribimos las ecuaciones en diferencias finitas de forma clara para cada nodo como:

$$kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + h(p\Delta x)(T_\infty - T_m) = 0 \quad (3.1)$$

y para el nodo extremo

$$T_4 - T_5 + \frac{h \Delta x}{k A} \left(\frac{p \Delta x}{2} + A \right) (T_\infty - T_5) = 0 \quad (3.2)$$

Luego hallamos la razón de la transferencia de calor por convección en la punta de la aleta:

$$\dot{Q}_{convección} = \sqrt{hpkA_c} (T_b - T_\infty) \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (3.3)$$

2) Formulamos una consideración inicial sensata para cada temperatura en los nodos no conocidos.

3) Posteriormente utilizamos las ecuaciones detalladas para evaluar los nuevos valores de las temperaturas en cada nodo, y utilizando los valores actualizados de la temperatura para cada nodo.

4) Después repetimos el método hasta alcanzar la convergencia entre los rangos de error aceptable.

Los valores calculados de las temperaturas nodales en una aleta cilíndrica de sección transversal uniforme, para la conducción unidimensional de calor en estado estable mediante simulación numérica usando el método iterativo Gauss-Seidel, se compararán con datos de los resultados analíticos para el cambio de temperatura en la aleta. (Çengel, 2011).

Iteración de Gauss-Seidel (Chapra y Canale, 2015)

Es un método iterativo valioso y común en extremo. La práctica del sistema de ecuaciones representada por la ecuación se facilita con el siguiente procedimiento.

$$\begin{aligned} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{13}T_3 + \dots + a_{1N}T_N &= C_1 \\ a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + a_{23}T_3 + \dots + a_{2N}T_N &= C_2 \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{N1}T_1 + a_{N2}T_2 + a_{N3}T_3 + \dots + a_{NN}T_N = C_N
 \end{array} \quad (3.4)$$

1. Las ecuaciones deben reorganizarse para facilitar elementos diagonales con magnitudes mayores que otros elementos en la misma línea. Es decir, se pretende organizar las ecuaciones de este modo $a_{11} > a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1N}$; $a_{22} > a_{21}, a_{23}, \dots, a_{2N}$; y así progresivamente.

2. Luego de reorganizar, debemos de anotar cada una de las N ecuaciones de manera explícita para la temperatura vinculada con su elemento diagonal. Cada temperatura en el vector el resultado será de tal manera

$$T_i^{(k)} = \frac{C_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} T_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} T_j^{(k-1)} \quad (3.5)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$. El superíndice de k se refiere al nivel de iteración.

3. Consideramos un valor inicial ($k = 0$) para cada temperatura T_i . Los sucesivos cálculos pueden disminuir mediante la elección de valores fundamentados en estimaciones racionales.

4. Los nuevos valores de T_i se resuelven reemplazando los valores supuestos ($k = 0$) o nuevos ($k = 1$) de T_j en el lado derecho de la ecuación 1.25. Este paso es la primera iteración ($k = 1$).

5. Utilizamos la ecuación 1.25, y continuamos con el método de iteración resolviendo nuevos valores de $T_i^{(k)}$ a partir de los valores $T_j^{(k)}$ de la iteración actual, donde $1 \leq j \leq i-1$, y los valores $T_j^{(k-1)}$ de la iteración previa, donde $i+1 \leq j \leq N$.

6. La iteración termina cuando se complace la norma de convergencia establecido y esto lo expresamos como:

$$\left| T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon \quad (3.6)$$

donde ε representa un error en la temperatura, que se considera aceptable.

Si el paso 1 se lleva a cabo para cada ecuación, el sistema que resulta se dice que es diagonalmente dominante, y la velocidad de convergencia se maximiza (el número requerido de iteraciones se minimiza). Sin embargo, también se logra la convergencia en muchas situaciones para las que no es posible obtener el dominio diagonal, aunque se aminora la velocidad de convergencia. La manera en la que valores nuevos de T_i se calculan (pasos 4 y 5) también debe notarse. Debido a que para una iteración particular los T_i se calculan de forma secuencial, cada valor se calcula con las estimaciones más recientes de otro T_i . Esta característica está implícita en la ecuación (3.5), donde el valor de cada incógnita se actualiza tan pronto como es posible, es decir para $1 \leq j \leq i-1$ (Kreith et al, 2013; Chapra y Canale, 2015).

III. RESULTADOS

Las soluciones presentadas posteriormente pertenecen al enigma 5-17 propuesto por Çengel, Y. y Ghajar, A. (2011).

“Una aleta cilíndrica de sección transversal uniforme, con un diámetro de 10 mm y longitud de 50 mm, se adhiere a una pared con temperatura superficial de 350°C. La aleta es de un material con una conductividad térmica de 240 W/m.°C y está expuesta a una condición de aire ambiental de 25°C y el coeficiente de transferencia de calor por convección es de 250 W/m.°C.

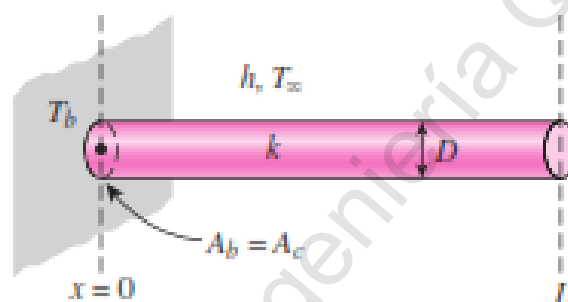


Figura 12. Diseño aleta cilíndrica

Fuente: Çengel y Ghajar, 2011, p.352

Considere que la transferencia de calor unidimensional se produce a lo largo de la aleta y que el espaciamiento nodal es uniforme de 10 mm

- mediante el método de balance de energía, obtenga las ecuaciones en diferencias finitas para determinar las temperaturas nodales.
- determine las temperaturas nodales a lo largo de la aleta al resolver esas ecuaciones y compare los resultados con la solución analítica.
- calcule la transferencia de calor y compare el resultado con la solución analítica.

Solución:

Haciendo las siguientes suposiciones:

1. La transferencia de calor en lo largo de la aleta es unidimensional y opera al estado estable.
2. La transferencia de calor por radiación es insignificante.
3. Las propiedades térmicas son constantes.

a) El espaciamiento nodal es uniforme de $\Delta x = 10 \text{ mm}$ y el número de nodos M es

$$M = \frac{L}{\Delta x} + 1 = \frac{50 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} + 1 = 6$$

Datos:

$$D = 10 \text{ mm (0,01 m)}$$

$$L = 50 \text{ mm (0,05 m)}$$

$$k = 240 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$T_\infty = 25^\circ\text{C}$$

$$h = 250 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

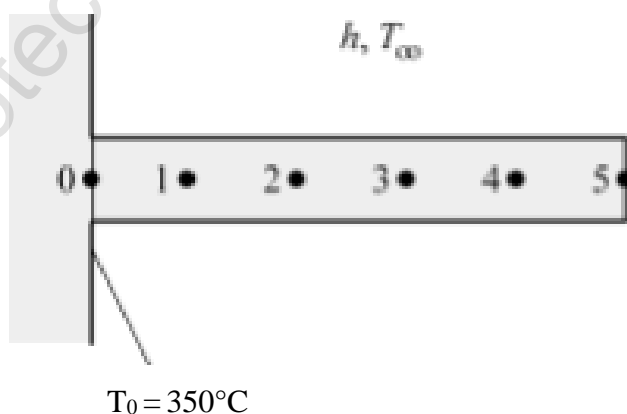


Figura 13. Temperatura en los nodos en lo largo de la aleta.

De la figura anterior se observa que hay 5 temperaturas nodales por calcular; por lo tanto, se necesitan 5 ecuaciones para determinarlas. Los nodos 1, 2, 3 y 4 son nodos interiores por lo que vamos a usar la relación de diferencias finitas general para calcular sus temperaturas.

$$kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + h(p \Delta x)(T_\infty - T_m) = 0 \quad (3.1)$$

Multiplicando todos los términos por $\left(\frac{\Delta x}{kA}\right)$

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} + \frac{h p \Delta x^2}{kA} (T_\infty - T_m) = 0 \quad (3.2)$$

haciendo $C_1 = \frac{h p \Delta x^2}{kA}$, luego la Ec. (3.2) queda como

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} + C_1 (T_\infty - T_m) = 0 \quad (3.3)$$

Para el nodo 5, aplicamos en el elemento de medio volumen un balance de energía,

$$kA \frac{T_4 - T_5}{\Delta x} + h \left(\frac{p \Delta x}{2} + A \right) (T_\infty - T_5) = 0 \quad (3.4)$$

Multiplicando todos los términos por $\left(\frac{\Delta x}{kA}\right)$

$$T_4 - T_5 + \frac{h \Delta x}{kA} \left(\frac{p \Delta x}{2} + A \right) (T_\infty - T_5) = 0 \quad (3.5)$$

Sabemos que el perímetro de la aleta es $p = \pi D$ y el área de la sección transversal es:

$$A = \pi D^2 / 4; \text{ haciendo } C_2 = \frac{h \Delta x}{kA} \left(\frac{p \Delta x}{2} + A \right) = \frac{h \Delta x}{k} \left(\frac{2 \Delta x}{D} + 1 \right), \text{ luego la Ec. (3.5)}$$

queda como

$$T_4 - T_5 + C_2 (T_\infty - T_5) = 0 \quad (3.6)$$

Estableciendo las ecuaciones para calcular las temperaturas en los 5 nodos

$$m = 1: \quad T_0 - 2T_1 + T_2 + C_1(T_\infty - T_1) = 0 \quad (3.7)$$

$$m = 2: \quad T_1 - 2T_2 + T_3 + C_1(T_\infty - T_2) = 0 \quad (3.8)$$

$$m = 3: \quad T_2 - 2T_3 + T_4 + C_1(T_\infty - T_3) = 0 \quad (3.9)$$

$$m = 4: \quad T_3 - 2T_4 + T_5 + C_1(T_\infty - T_4) = 0$$

(3.10)

$$m = 5: \quad T_4 - T_5 + C_2(T_\infty - T_5) = 0 \quad (3.11)$$

- b) El sistema de ecuaciones formado, Ecs.(3.7) a (3.11), para el cálculo de las temperaturas en los nodos, se aplicó el método numérico de Gauss-Seidel, y programas numéricos MATLAB, POLYMATH y SOLVER de EXCEL (Báez, 2012; Bober, 2014; Cutlip and Shacham, 2008; Gilat, 2015; Nieves y Hurtado, 2012).

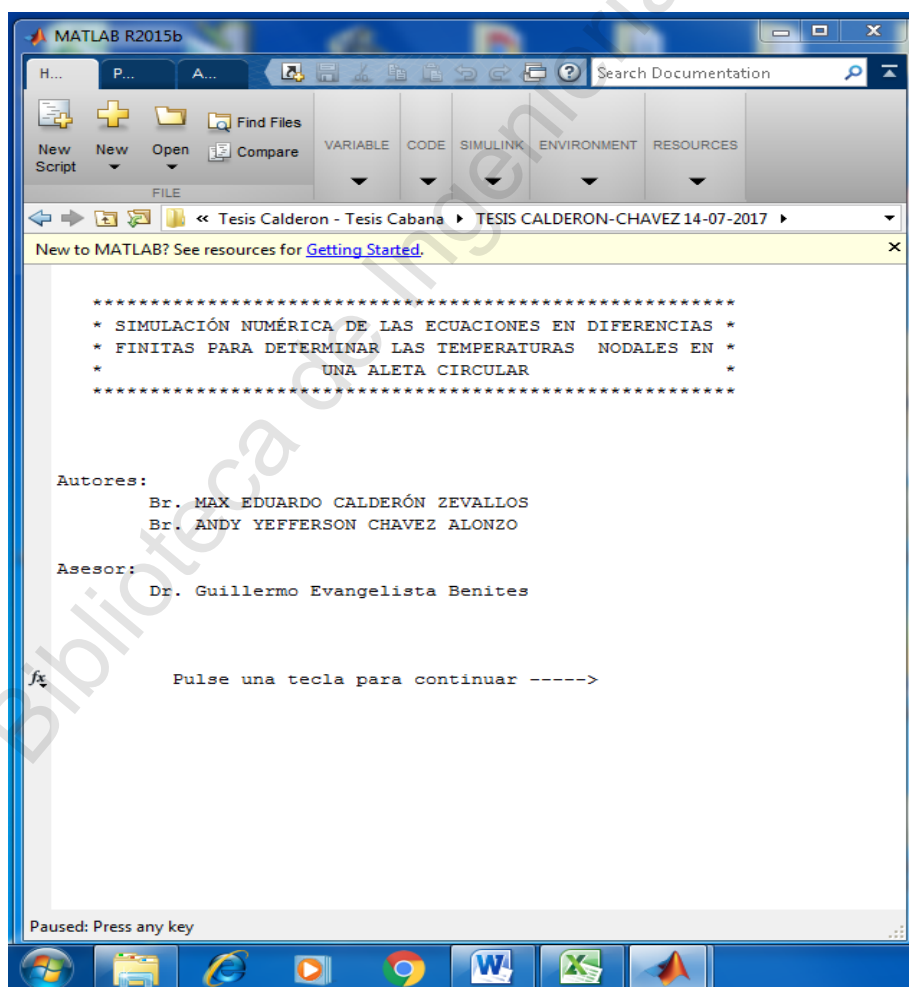


Figura 14. Pantalla de presentación del programa “Aleta Cilíndrica” (MATLAB)

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

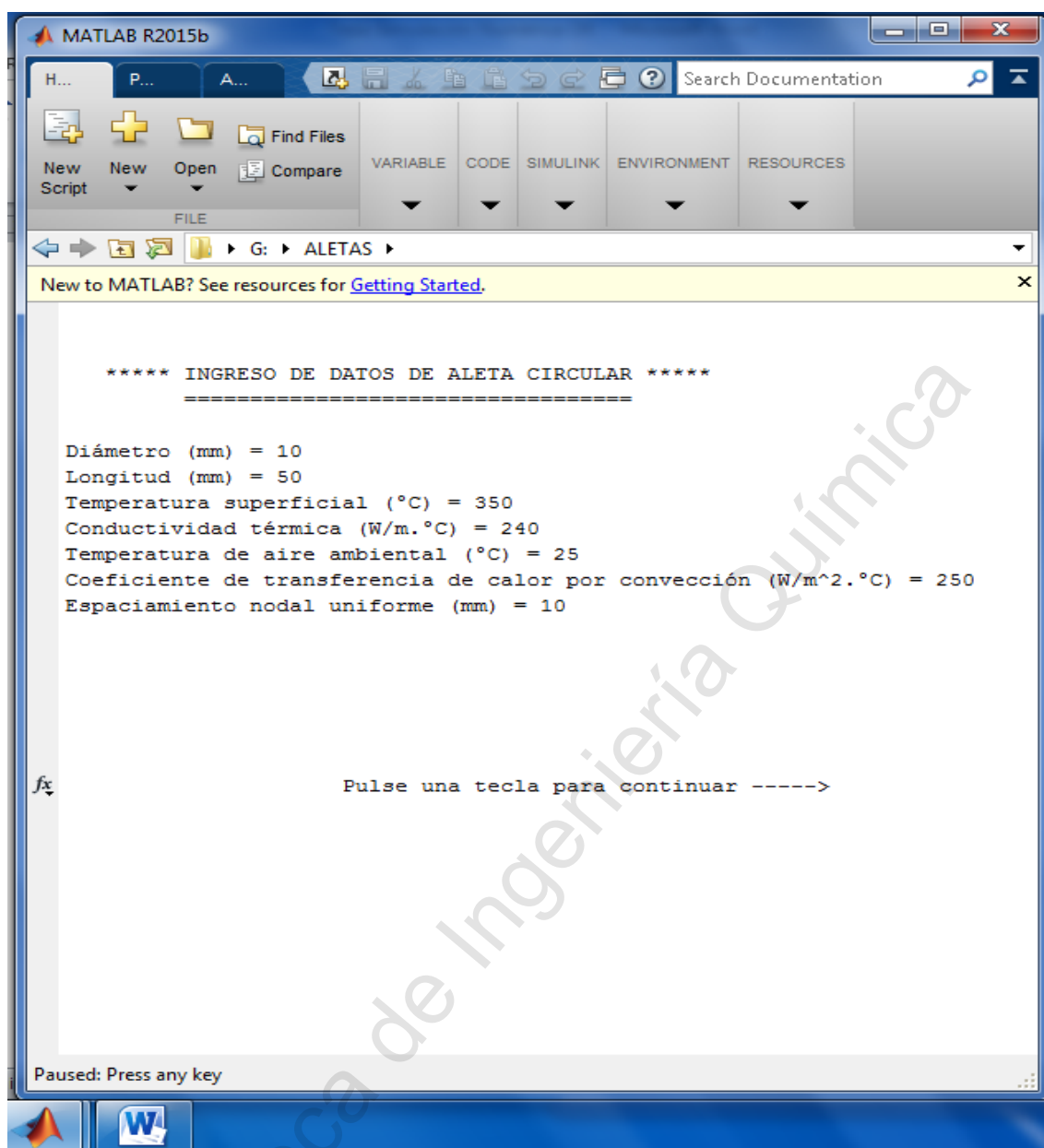


Figura 15. Ingreso de datos de “Aleta Cilíndrica”

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

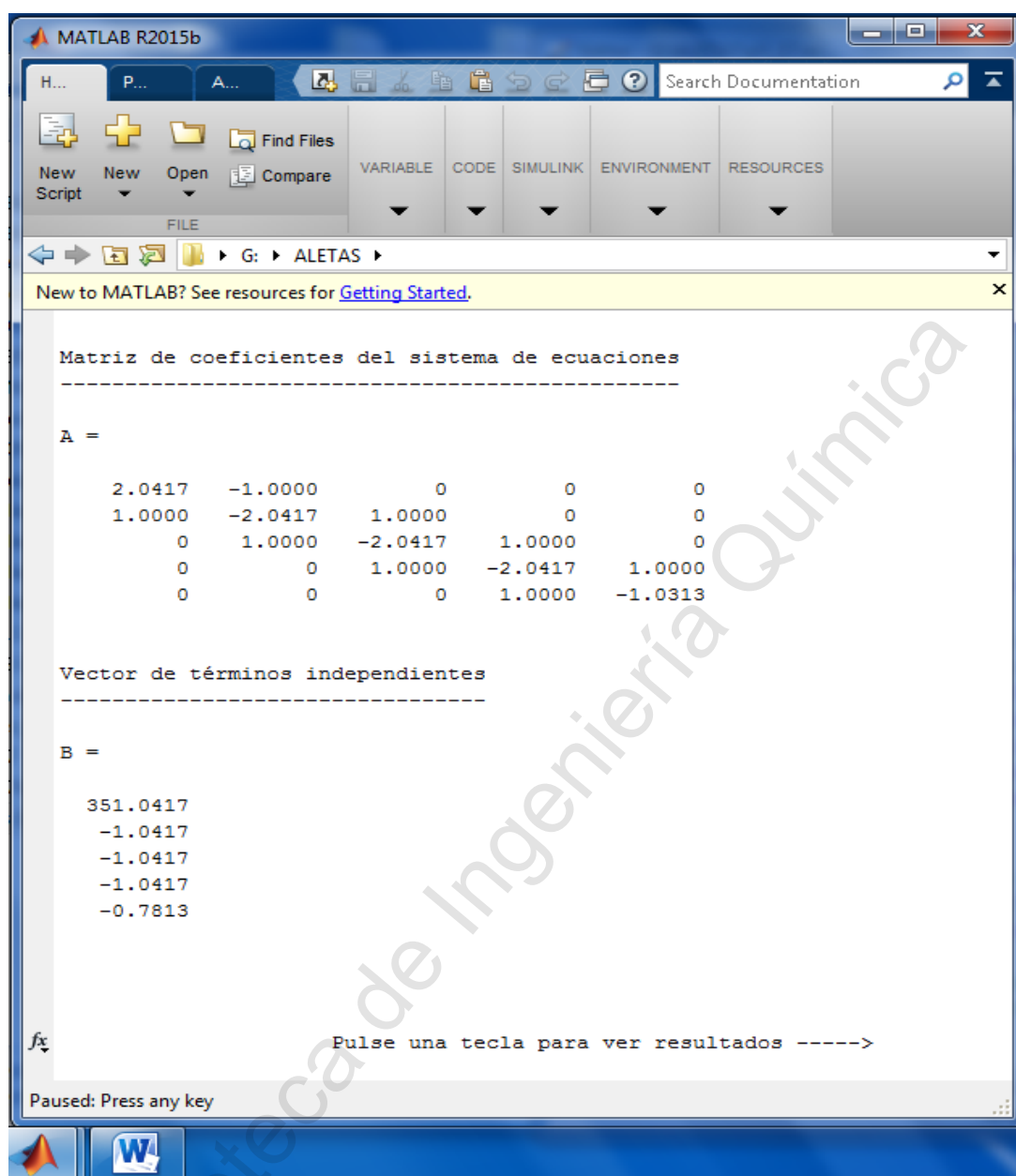


Figura 16. Matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones y vector de términos independientes

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

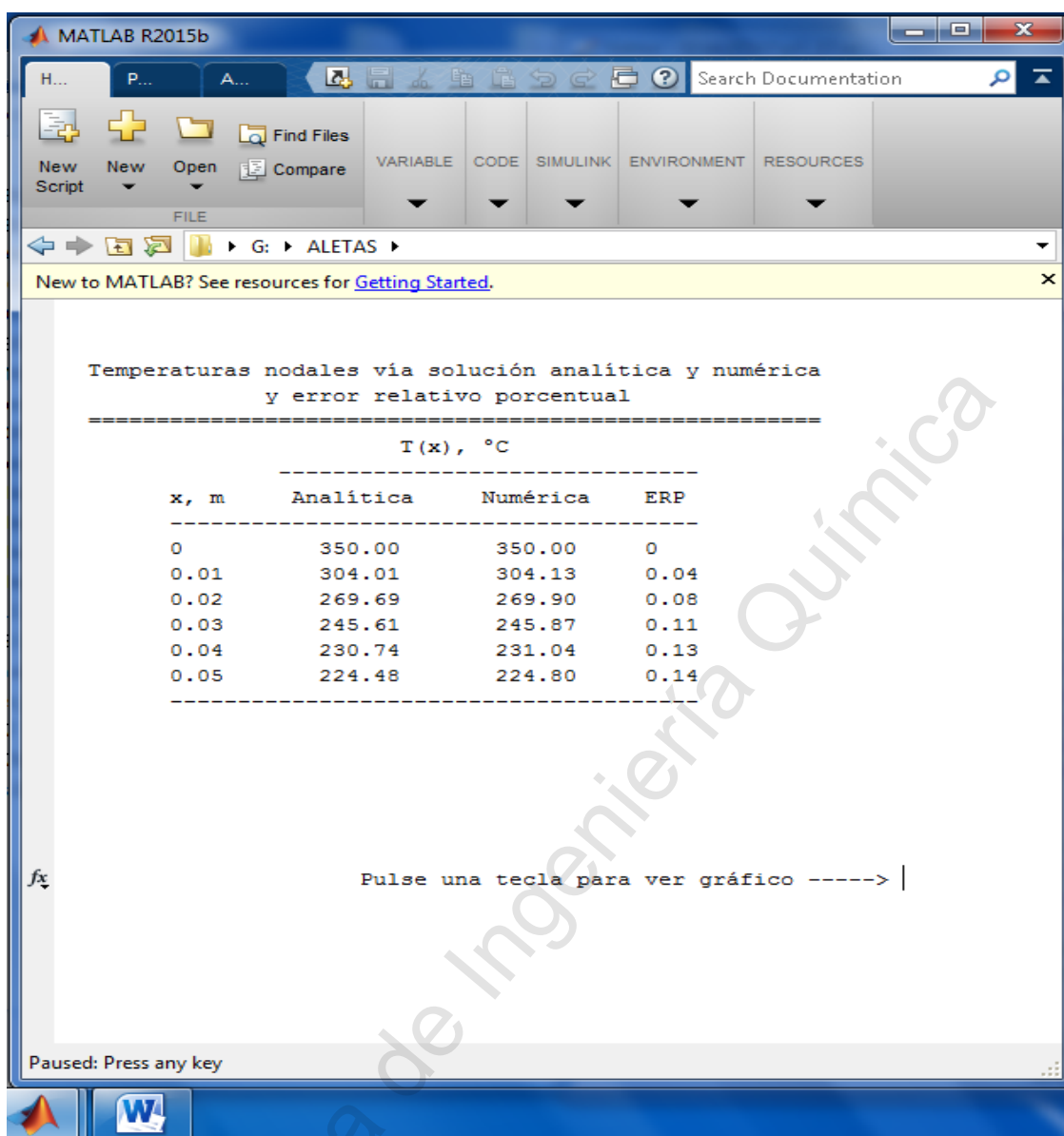


Figura 17. Resultados analíticos y numéricos de temperaturas nodales de “Aleta Cilíndrica” usando
MATLAB

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

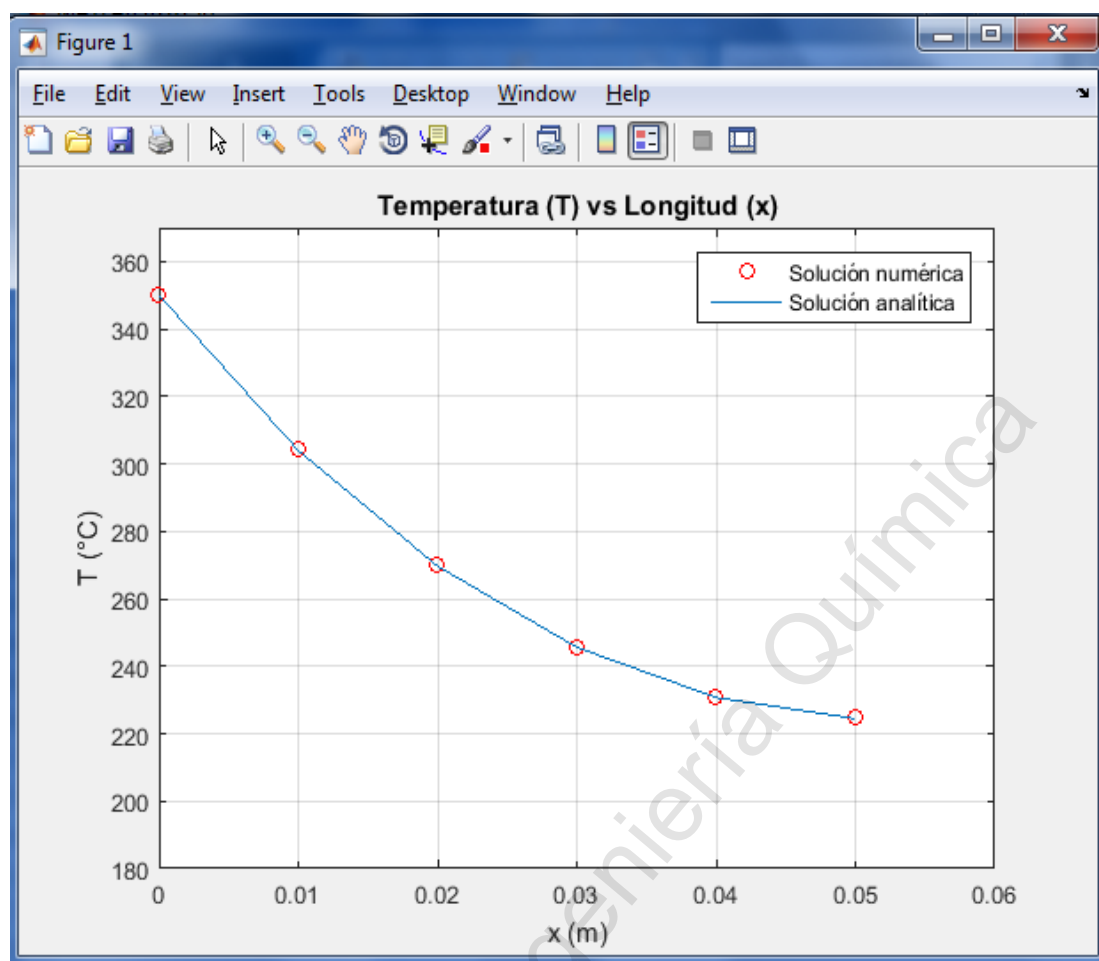


Figura 18. Gráfica de Temperatura vs Longitud de “Aleta Cilíndrica”

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

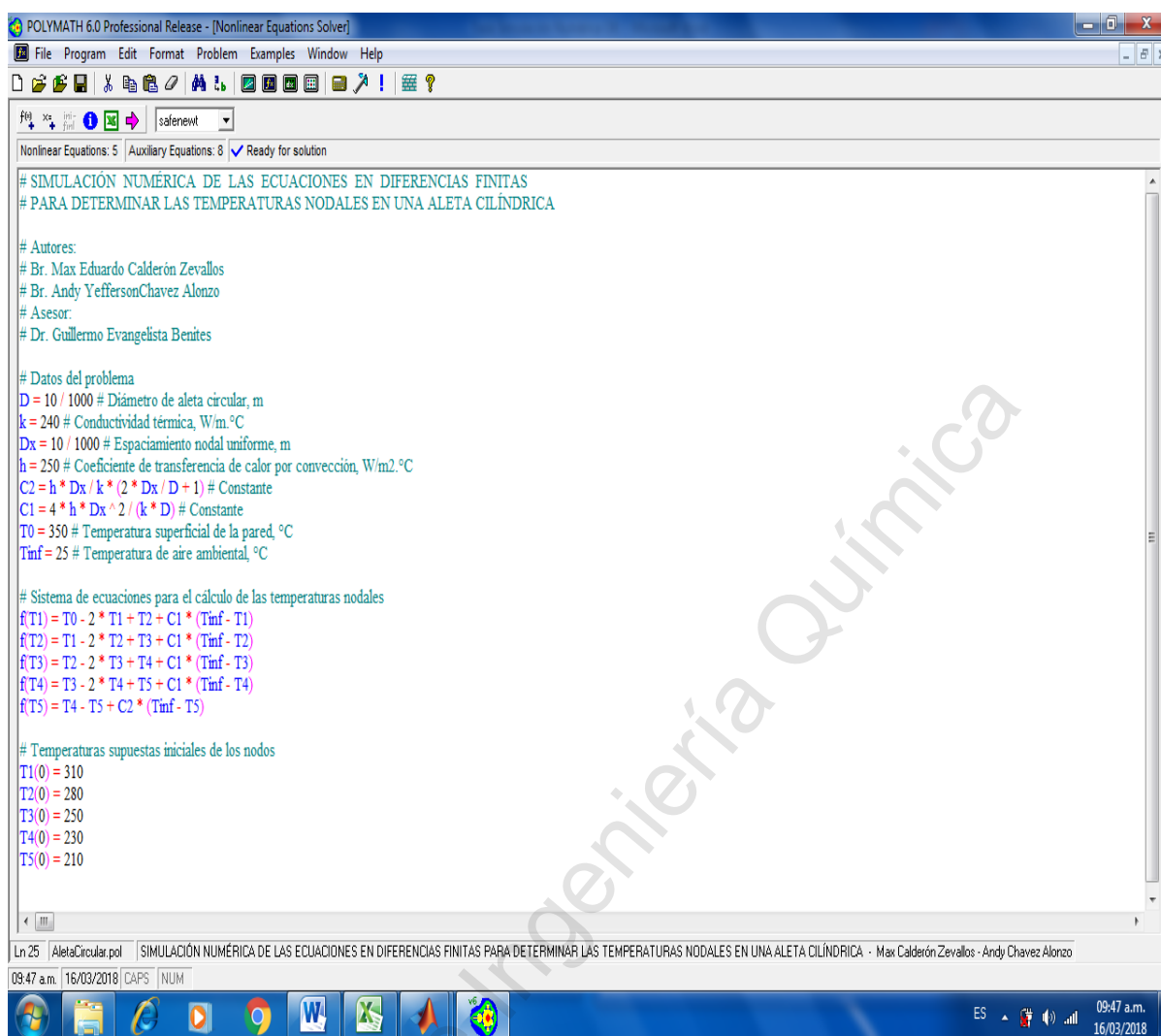


Figura 19. Pantalla de datos del problema y sistema de ecuaciones usando POLYMATH

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

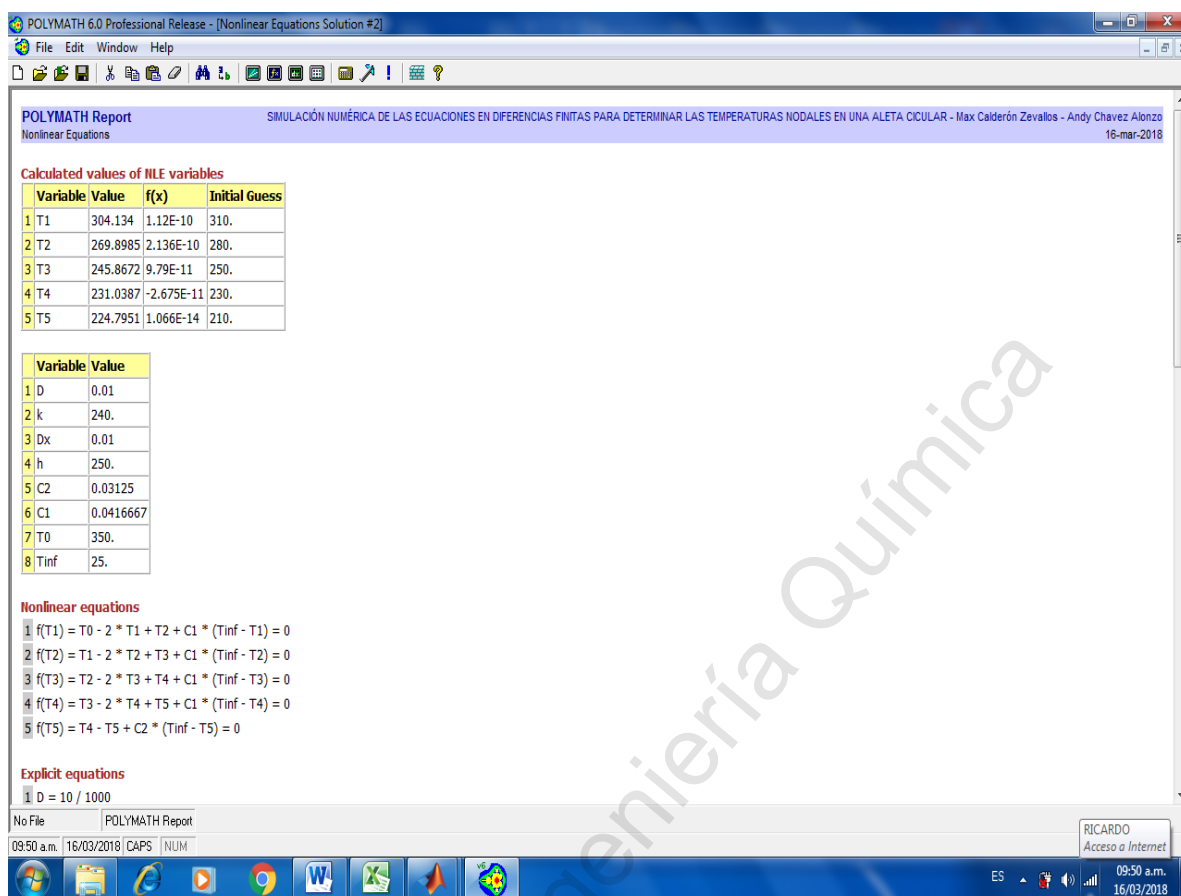


Figura 20. Resultados numéricos de temperaturas nodales de aleta cilíndrica usando POLYMATH

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

Tabla 1. Temperaturas nodales de aleta cilíndrica vía solución analítica y numérica y error relativo porcentual usando POLYMATH

x, m	T(x), °C		
	Analítica	Numérica	ERP
0	350,00	350,00	0
0,01	304,01	304,13	0,04
0,02	269,69	269,90	0,08
0,03	245,61	245,87	0,11
0,04	230,74	231,04	0,13
0,05	224,48	224,80	0,14

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

	Variable	Value	Polymath Equation	Comments
1	POLYMATH NLE Migration Document			
2	Explicit Eqs	D	0.01	$D=10 / 1000$ Diámetro de aleta circular, m
3		k	240	$k=240$ Conductividad térmica, W/m. °C
4		Dx	0.01	$Dx=10 / 1000$ Espaciamiento nodal uniforme, m
5		h	250	$h=250$ Coeficiente de transferencia de calor por convección, W/m2. °C
6		T0	350	$T0=350$ Temperatura superficial de la pared, °C
7		Tinf	25	$Tinf=25$ Temperatura de aire ambiental, °C
8		C2	0.03125	$C2=h * Dx / k * (2 * Dx / D + 1)$ Constante
9		C1	0.04166667	$C1=4 * h * Dx ^ 2 / (k * D)$ Constante
10	Implicit Vars	T1	330	$T1(0)=330$
11		T2	300	$T2(0)=300$
12		T3	265	$T3(0)=265$
13		T4	240	$T4(0)=240$
14		T5	215	$T5(0)=215$
15	Implicit Eqs	f(T1)	-22.708333	$f(T1)=T0 - 2 * T1 + T2 + C1 * (Tinf - T1)$
16		f(T2)	-16.458333	$f(T2)=T1 - 2 * T2 + T3 + C1 * (Tinf - T2)$
17		f(T3)	-1.776E-15	$f(T3)=T2 - 2 * T3 + T4 + C1 * (Tinf - T3)$
18		f(T4)	-8.9583333	$f(T4)=T3 - 2 * T4 + T5 + C1 * (Tinf - T4)$
19		f(T5)	19.0625	$f(T5)=T4 - T5 + C2 * (Tinf - T5)$
20	Sum of Squares:		1230.17578	$F = f(T1)^2 + f(T2)^2 + f(T3)^2 + f(T4)^2 + f(T5)^2$

Figura 21. Pantalla de datos del problema y sistema de ecuaciones usando EXCEL

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

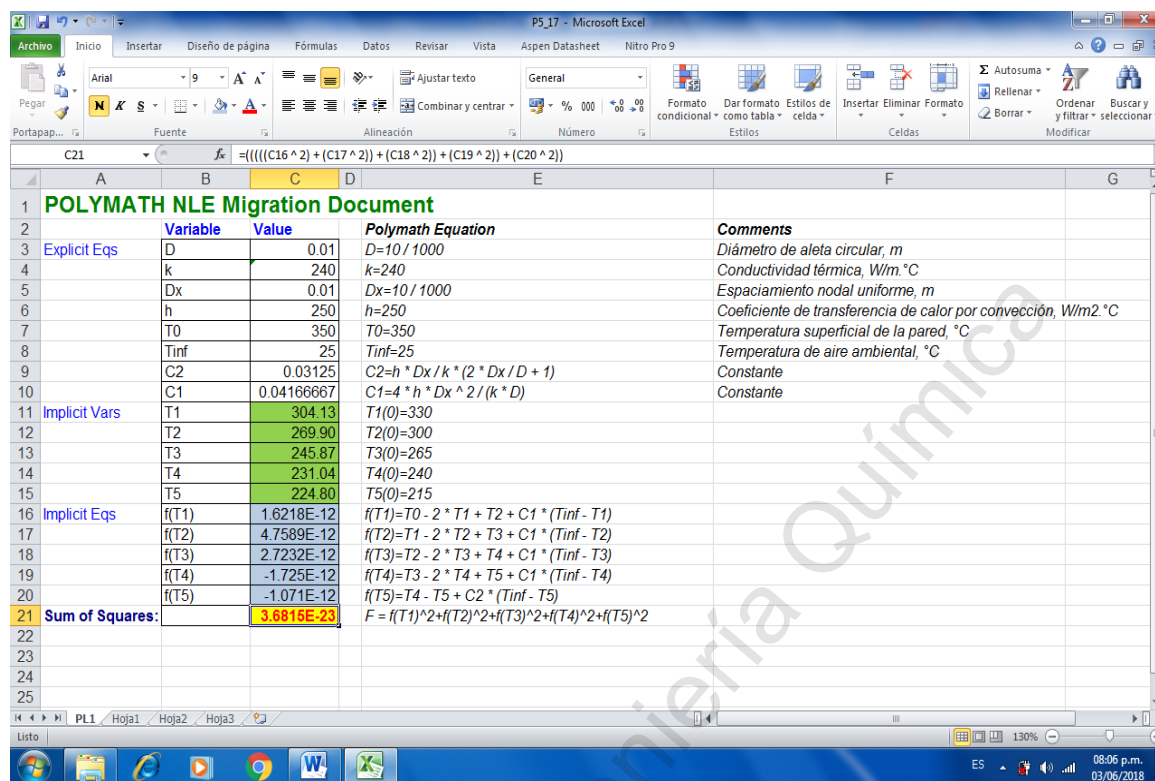


Figura 22. Resultados numéricos de temperaturas nodales de aleta cilíndrica usando SOLVER

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

Tabla 2. Temperaturas nodales de aleta cilíndrica vía solución analítica y numérica y error relativo porcentual usando SOLVER de EXCEL

x, m	T(x), °C		
	Analítica	Numérica	ERP
0	350,00	350,00	0
0,01	304,01	304,13	0,04
0,02	269,69	269,90	0,08
0,03	245,61	245,87	0,11
0,04	230,74	231,04	0,13
0,05	224,48	224,80	0,14

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

Tabla 3. Resumen de temperaturas nodales de aleta cilíndrica vía solución analítica y numérica usando MATLAB, POLYMATH y SOLVER de EXCEL

x, m	T(x), °C			
	Analítica	MATLAB	POLYMATH	SOLVER
0	350,00	350,00	350,00	350,00
0,01	304,01	304,13	304,13	304,13
0,02	269,69	269,90	269,90	269,90
0,03	245,61	245,87	245,87	245,87
0,04	230,74	231,04	231,04	231,04
0,05	224,48	224,80	224,80	224,80

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

- c) La razón de la transferencia de calor a partir de la aleta viene a ser la cantidad de transferencia de calor desde los elementos nodales (solución numérica):

$$\dot{Q}_{aleta} = \sum_{m=0}^5 \dot{Q}_{elemento,m} = \sum_{m=0}^5 hA_{superficie,m}(T_m - T_{\infty})$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{aleta} = hp \frac{\Delta x}{2} (T_0 - T_{\infty}) + hp \Delta x (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_{\infty}) \\ + h \left(p \frac{\Delta x}{2} + A \right) (T_5 - T_{\infty}) \end{aligned}$$

Reemplazando datos,

$$\dot{Q}_{aleta} = 99,22 \text{ W}$$

La razón de la transferencia de calor de la aleta con convección desde la punta es (solución analítica):

$$\dot{Q}_{convección} = -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}$$

$$\dot{Q}_{convección} = \sqrt{hpkA_c} (T_b - T_{\infty}) \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$$

Reemplazando datos,

$$\dot{Q}_{convección} = 98,80 \text{ W}$$

Cálculo del error relativo porcentual:

$$ERP = \frac{\text{abs}(\dot{Q}_{aleta} - \dot{Q}_{convección})}{\dot{Q}_{aleta}} \times 100$$

Reemplazando datos,

$$ERP = 0,42\%$$

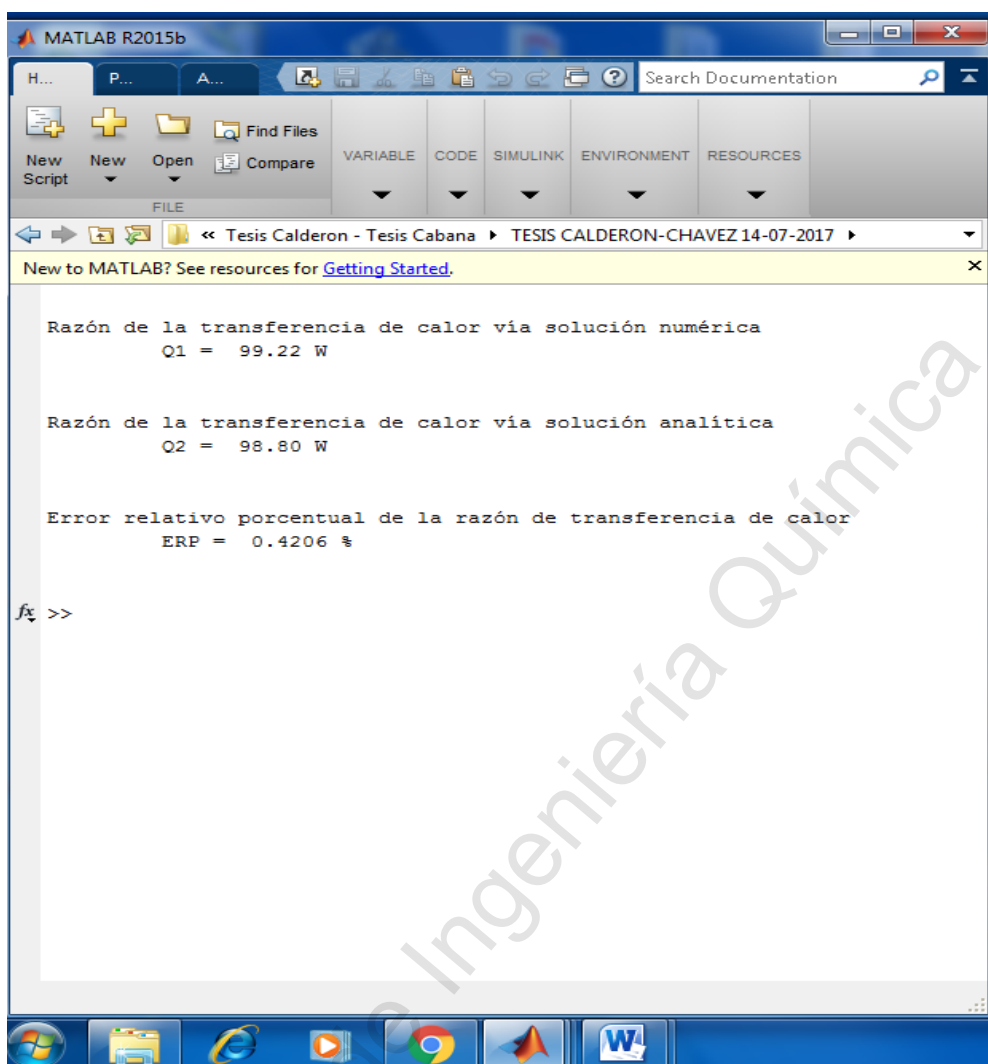


Figura 23. Resultados de la razón transferencia de calor y error relativo porcentual.

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

IV. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El programa “*Aleta Cilíndrica*” codificado en el lenguaje de programación para ingenieros MATLAB Versión: R2015b, permite determinar las temperaturas nodales en una aleta cilíndrica de sección transversal uniforme mediante la simulación numérica por diferencias finitas; así como, permite comparar la razón de transferencia de calor vía solución numérica y analítica.

Al programa “*Aleta Cilíndrica*” se provee los datos próximos:

- Diámetro de la aleta ($D = 10 \text{ mm}$)
- Longitud de la aleta ($L = 50 \text{ mm}$)
- Temperatura superficial de la pared ($T_o = 350^\circ\text{C}$)
- Conductividad térmica ($k = 240 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$)
- Temperatura de aire ambiental ($T_a = 25^\circ\text{C}$)
- Coeficiente de transferencia de calor por convección ($h = 250 \text{ W/m}^2$)
- Espaciamiento nodal uniforme ($Dx = 10 \text{ mm}$).

Se consideró las siguientes suposiciones:

- La transferencia de calor en lo largo de la aleta cilíndrica es estacionaria, no cambia con el tiempo.
- La temperatura a lo largo de la aleta varía sólo en la dirección x .
- La conductividad térmica es constante.
- La transferencia de calor por radiación es despreciable.

Los resultados del programa permitieron opinar que:

1. El balance de energía para una aleta cilíndrica de sección transversal uniforme, se formularon en un sistema de cinco ecuaciones en diferencias finitas para hallar las temperaturas en los nodos T_1 , T_2 , T_3 , T_4 y T_5 .

2. Los nodos interiores 1,2,3,4, se usó la relación de diferencias finitas para calcular sus temperaturas, Ec. (3-3).
3. La ecuación de diferencia finita para el nodo 5 en la punta de la aleta, se obtuvo aplicando un balance de energía en el elemento de medio volumen sobre ese nodo, Ec. (3-6).
4. El sistema de cinco ecuaciones algebraicas formuladas, Ecuaciones (3.7) a (3.11), para el cálculo de las temperaturas nodales, se determinan usando el método numérico de Gauss-Seidel y el lenguaje de programación MATLAB (también se usó los programas numéricos POLYMATH Y SOLVER de Excel).
5. La comparación entre las soluciones analíticas y numéricas de las temperaturas nodales es excelente, como se puede apreciar de Figura 5 (MATLAB), Figura 8 (POLYMATH) y Figura 10 (SOLVER), con un error relativo porcentual de 0,14%.
6. Se presenta un resumen en la tabla 3 de las temperaturas nodales donde se aprecia los resultados coincidentes usando MATLAB, POLYMATH y SOLVER de EXCEL.
7. De la Figura 11 se puede ver el resultado de la comparación de la razón de transferencia de calor analítica y numérica, con un error relativo porcentual aceptable de 0,42%.

V. CONCLUSIONES

1. Para problemas de conducción de calor en estado estacionario, la formulación en diferencias finitas, suelen conducir a la formulación de un sistema de N ecuaciones algebraicas en N temperaturas de nodos no conocidos, los cuales se resuelven en forma simultánea.
2. La aproximación numérica por diferencias finitas es una alternativa a la distribución de temperaturas en aletas unidimensionales conductoras del calor que conectan los pequeños puntos nodales.
3. El programa “*Aleta Cilíndrica*” desarrollado en el lenguaje de programación MATLAB Versión: R2015b, que resuelve el modelo matemático formulado, nos permite obtener resultados confiables menores al 0,5%.
4. También se usó los programas numéricos POLYMATH V6.0 y SOLVER de EXCEL para el cálculo de las temperaturas nodales con resultados confiables menores al 0,5% de error.

VI. RECOMENDACIONES

1. Cuando se trate de un sistema de 2 o 3 ecuaciones para el cálculo de las temperaturas nodales, se puede emplear un procedimiento elemental de eliminación, a fin de excluir las interrogantes, salvo una, luego librar esa interrogante y rápidamente se hallan las demás interrogantes por reemplazo hacia atrás.
2. Para problemas de cálculo de temperaturas nodales en un sistema transitorio multidimensional, se debe buscar una solución analítica sencilla, pero si los modelos a resolver son muy complejos, se debe ir directamente a las técnicas numéricas.
3. Se recomienda usar este programa para futuras tesis con distintas condiciones de frontera como radiación y/o flujo específico de calor y sus posibles combinaciones.
4. Este estudio se encuentra dentro de las líneas de investigación que cultiva nuestra Facultad de Ingeniería Química, la Simulación de Procesos; y debe formar parte de un banco de programas para uso académico de los estudiantes de ingeniería química, y otras áreas de la ingeniería como metalúrgica, materiales, mecánica, etc.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andocilla, J y Carrera, A. (2015). *Modelación matemática y simulación de la ecuación diferencial de transferencia de calor de una aleta rectangular de área constante y longitud "L" con Simulink*. Tesis para optar el título de Ingeniero Mecánico. Universidad Politécnica Salesiana Sede Quito. Ecuador.
- Báez, D. y Cervantes, O. (2012). *MATLAB con aplicaciones a la Ingeniería, Física y Finanzas*. 2ª. Edición. Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. México.
- Bober, W. (2014). *Introduction to Numerical and Analytical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. CRC Press Taylor & Francis Group, LLC. United States.
- Çengel, Y. y Ghajar, A. (2011). *Transferencia de calor y masa*. Cuarta Edición. McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V. México.
- Cutlip, M. and Shacham, M. (2008). *Problem Solving in Chemical and Biochemical Engineering with POLYMATH, Excel, and MATLAB*. Second Edition. Pearson Education, Inc. United States.
- Chapra, S. y Canale, R. (2015). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Séptima Edición. McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V. México.
- Gilat, A. (2015). *MATLAB An Introduction with Applications*. Fifth Edition. Jhon Wiley & Sons, Inc. United States of America.
- Geankoplis, C. J. (1998). *Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias*. 3ª. Edición. Compañía Editorial Continental, S. A. de C. V. México.
- Holman, J. P. (1998). *Transferencia de Calor*. 8ª. Edición. McGraw-Hill / Interamericana. España.

- Incropera, F. y de Witt, P. (1999). *Fundamentos de Transferencia de Calor*. 4ª. Edición. Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. México.
- Karlekar, B. y Desmond, R. (1994). *Transferencia de Calor*. 2a. Edición. McGraw-Hill / Interamericana de México, S.A. de C.V. México.
- Kreith, F. y Bohn, M. (2001). *Principios de Transferencia de Calor*. 6ª. Edición. Thomson Editores S. A. de C. V. México.
- Mills, A. (1995). *Transferencia de Calor*. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. / Times Mirror de España, S. A. – Irwin. España.
- Montes, M. (2015). *Teoría y problemas de transmisión de calor*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). España.
- Nieves, A. y Hurtado, F. (2012). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Grupo Editorial Patria, S.A. de C.V. México.
- Parra, A. y Hernández, J. (2011). *Conceptos Básicos de Transferencia de Calor y Masa*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería. Colombia.
- P. Naphon, (2006). “**Study on the heat transfer characteristics of the annular fin under dry-surface, partially wet-surface, and fully wet-surface conditions,**” Int. Commun. Heat Mass Transf., vol. 33, no. 1, pp. 112–121.
- M. Waltrich, C. J. L. Hermes, J. M. Goncalves, and C. Melo, (2010) “**A firstprinciples simulation model for the thermo-hydraulic performance of fan supplied tube-fin heat exchangers,**” Appl. Therm. Eng., vol. 30, no. 14–15, pp. 2011–2018.

ANEXOS

Anexo – 1

Código del programa “Aleta Cilíndrica” (MATLAB Versión: R2015b)

```

clc, clear all
disp(' '), disp(' '), disp(' ')
disp(' *****')
disp(' * SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS *')
disp(' * FINITAS PARA DETERMINAR LAS TEMPERATURAS NODALES EN *')
disp(' *                               UNA ALETA CILÍNDRICA                               *')
disp(' *****')
disp(' '), disp(' '), disp(' ')
disp(' Autores: ')
disp('          Br. MAX EDUARDO CALDERÓN ZEVALLOS')
disp('          Br. ANDY YEFFERSON CHAVEZ ALONZO')
disp(' ')
disp(' Asesor: ')
disp('          Dr. Guillermo Evangelista Benites')
disp(' '), disp(' '), disp(' '), disp(' '), disp(' '), disp(' ')
fprintf('\t\t\t\t\t Pulse una tecla para continuar -----> ')
pause
clc
disp(' '), disp(' ')
disp(' ***** INGRESO DE DATOS DE ALETA CILÍNDRICA *****')
disp(' ===== ')
disp(' ')
D=input('Diámetro (mm) = '); % 10
L=input('Longitud (mm) = '); % 50
To=input('Temperatura superficial (°C) = '); % 350
k=input('Conductividad térmica (W/m.°C) = '); % 240
Ta=input('Temperatura de aire ambiental (°C) = '); % 25
h=input('Coeficiente de transferencia de calor por convección
(W/m^2.°C) = '); % 250
Dx=input('Espaciamiento nodal uniforme (mm) = '); % 10
D=D/1000; % Diámetro, m
L=L/1000; % Longitud, m

```

```
Dx=Dx/1000; % Espaciamiento nodal uniforme, m
disp(' '), disp(' '), disp(' '), disp(' '), disp(' '), disp(' ')
fprintf('\t\t\t\t\t Pulse una tecla para continuar -----> ')
pause

% Constantes
c1=4*h*Dx^2/(k*D);
c2=h*Dx/k*(2*Dx/D+1);

clc
disp(' ')
disp('Matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones')
disp('-----')
A=[2+c1 -1 0 0 0; 1 -(2+c1) 1 0 0; 0 1 -(2+c1) 1 0; ...
    0 0 1 -(2+c1) 1; 0 0 0 1 -(1+c2)]
disp(' ')
disp('Vector de términos independientes')
disp('-----')
B=[To+c1*Ta; -c1*Ta; -c1*Ta; -c1*Ta; -c2*Ta]
disp(' '), disp(' '), disp(' ')
fprintf('\t\t\t\t\t Pulse una tecla para ver resultados -----> ')
pause
clc

% Método iterativo de Gauss-Seidel
[n n]=size(A); % Cálculo del número de filas y columnas
A=[A';B']'; % Matriz A ampliada
Tl=zeros(n,1); % Creamos una matriz nula de n filas y sólo 1 columna
for i=1:n ;
    for kk=[1:i-1,i+1:n]; % Se va a eliminar todo menos la fila pivote
        m=-A(kk,i)/A(i,i); % Factor multiplicante
        A(kk,:)=A(kk,:)+m*A(i,:);
    end
end
Tl=A(:,n+1)./diag(A); % Vector solución

p=pi*D; % Perímetro, m
Ac=pi*D^2/4; % Área de la sección transversal, m^2
m=sqrt(h*p/(k*Ac)); % Relación
```

```

% Constantes
c3=h/(m*k);
c4=m*L;

x=0;
disp(' ')
fprintf('  Temperaturas nodales vía solución analítica y numérica\n')
fprintf('          y error relativo porcentual\n')
fprintf(' =====\n')
fprintf('\t\t\t\t\t T(x), °C \n')
fprintf('\t\t\t\t\t ----- \n')
fprintf('\t\t\t\t\t x, m\t\t\t\t\t Analítica\t\t\t\t\t Numérica\t\t\t\t\t ERP \n')
fprintf('\t\t\t\t\t ----- \n')
fprintf('\t\t\t\t\t 0\t\t\t\t\t 350.00\t\t\t\t\t 350.00\t\t\t\t\t 0 \n')
for i=1:5
    x=x+10/1000;
    c5=cosh(m*(L-x))+c3*sinh(m*(L-x));
    c6=cosh(c4)+c3*sinh(c4);
    T2(i)=Ta+(To-Ta)*c5/c6;
    ERP=abs(T2(i)-T1(i))/T2(i)*100; % Error relativo porcentual
    fprintf('\t\t\t\t\t %4.2f \t\t\t\t\t %8.2f \t\t\t\t\t %8.2f \t\t\t\t\t %5.2f \n', x, T2(i),
T1(i), ERP)
end
fprintf('\t\t\t\t\t ----- \n')
disp(' '), disp(' '), disp(' '), disp(' '), disp(' '), disp(' ')
fprintf('\t\t\t\t\t Pulse una tecla para ver gráfico -----> ')
pause
clc
TN=T1;
x=0:0.01:0.05;
T1=T1';
T1=[350 T1];
T2=[350 T2];
plot(x,T1,'ro',x,T2)
xlabel('x (m)'), ylabel('T (°C)')
title('Temperatura (T) vs Longitud (x)')
axis([0 0.06 180 370])
grid on
legend('Solución numérica', 'Solución analítica')
disp(' ')

```

```

fprintf('Razón de la transferencia de calor vía solución numérica\n')
Q1=h*p*Dx/2*(To-Ta)+h*p*Dx*(TN(1)+TN(2)+TN(3)+TN(4)-4*Ta)+ ...
    h*(p*Dx/2+Ac)*(TN(5)-Ta);
fprintf('\t\t Q1 = % 6.2f W \n', Q1)
disp(' '), disp(' ')

fprintf('Razón de la transferencia de calor vía solución analítica\n')
Q2=sqrt(h*p*k*Ac)*(To-Ta)*(sinh(c4)+c3*cosh(c4))/(cosh(c4)+ ...
    c3*sinh(c4));
fprintf('\t\t Q2 = % 6.2f W \n', Q2)
disp(' '), disp(' ')

ERP=abs(Q1-Q2)/Q1*100;
fprintf('Error relativo porcentual de la razón de transferencia de
calor\n')
fprintf('\t\t ERP = % 6.4f %% \n', ERP)
disp(' '), disp(' ')

```

Anexo – 2

Tabla 1. Variación de la temperatura en los nodos cuando varía la temperatura base

x, m	T(x), °C		
	$T_b = 300$	$T_b = 350$	$T_b = 400$
0	300,00	350,00	400,00
0,01	261,19	304,13	347,08
0,02	232,22	269,89	307,57
0,03	211,89	245,86	279,85
0,04	199,34	231,03	262,74
0,05	194,06	224,79	255,53

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

Anexo – 3

Tabla 2. Variación de la temperatura en los nodos cuando varía el diámetro

x, m	T(x), °C		
	D = 5	D = 10	D = 15
0	350,00	350,00	350,00
0,01	278,19	304,13	289,52
0,02	227,49	269,89	270,66
0,03	193,66	245,86	258,62
0,04	173,88	231,03	262,74
0,05	166,51	224,79	253,08

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

Anexo – 4

Tabla 3. Variación de la temperatura en los nodos cuando varía la temperatura del aire ambiental

x, m	T(x), °C		
	$T_a = 20$	$T_a = 25$	$T_a = 30$
0	350,00	350,00	350,00
0,01	303,43	304,13	304,84
0,02	268,67	269,89	271,13
0,03	244,27	245,86	247,47
0,04	229,21	231,03	232,87
0,05	222,87	224,79	226,72

Elaborado por: Max Calderón, Andy Chávez

Anexo – 5**ITERACIÓN DE GAUSS-SEIDEL**

$$T1 = 0.4898 * T2 + 0.4898 * T_o + 0.5102$$

$$T2 = 0.4898 * T3 + 0.4898 * T1 + 0.5102$$

$$T3 = 0.4898 * T4 + 0.4898 * T2 + 0.5102$$

$$T4 = 0.4898 * T5 + 0.4898 * T3 + 0.5102$$

$$T5 = 0.9697 * T4 + 0.7575$$

$$T(\text{supuesto}) = 300^{\circ}\text{C}$$

$$T_o = 350^{\circ}\text{C}$$

Interacciones	T1	T2	T3	T4	T5
1	318.88	303.64	296.17	292.52	284.41
2	320.66	302.64	292.02	282.84	275.03
3	320.17	300.36	286.16	275.38	267.80
4	319.06	296.95	280.84	269.23	261.83
5	317.38	293.52	276.14	264.01	256.77
6	315.71	290.40	272.06	259.53	252.42
7	314.18	287.65	268.52	255.67	248.68
8	312.83	285.26	265.45	252.33	245.44
9	311.66	283.18	262.80	249.45	242.65
10	310.64	281.38	260.51	246.96	240.23
11	309.76	279.83	258.53	244.81	238.15
12	309.00	278.49	256.82	242.94	236.34
13	308.34	277.33	255.34	241.33	234.78
14	307.77	276.32	254.06	239.94	233.43
15	307.28	275.46	252.95	238.74	232.26
16	306.86	274.71	252.00	237.70	231.26
17	306.49	274.06	251.17	236.80	230.38
18	306.17	273.50	250.45	236.03	229.63
19	305.90	273.01	249.84	235.35	228.98
20	305.66	272.59	249.30	234.77	228.42
21	305.46	272.23	248.84	234.27	227.93
22	305.28	271.92	248.44	233.84	227.51
23	305.13	271.65	248.10	233.46	227.15
24	304.99	271.41	247.80	233.14	226.83
25	304.88	271.21	247.54	232.86	226.56

26	304.78	271.04	247.32	232.61	226.32
27	304.69	270.89	247.12	232.41	226.12
28	304.62	270.75	246.96	232.22	225.95
29	304.56	270.64	246.81	232.07	225.79
30	304.50	270.54	246.69	231.93	225.66
31	304.45	270.46	246.58	231.82	225.55
32	304.41	270.39	246.49	231.71	225.45
33	304.38	270.32	246.41	231.63	225.37
34	304.34	270.27	246.34	231.55	225.29
35	304.32	270.22	246.28	231.49	225.23
36	304.29	270.18	246.23	231.43	225.17
37	304.27	270.15	246.18	231.38	225.13
38	304.26	270.12	246.14	231.34	225.09
39	304.24	270.09	246.11	231.30	225.05
40	304.23	270.07	246.08	231.27	225.02
41	304.22	270.05	246.06	231.24	224.99
42	304.21	270.03	246.03	231.22	224.97
43	304.20	270.01	246.01	231.20	224.95
44	304.19	270.00	246.00	231.18	224.93
45	304.19	269.99	245.98	231.17	224.92
46	304.18	269.98	245.97	231.15	224.91
47	304.18	269.97	245.96	231.14	224.90
48	304.17	269.97	245.95	231.13	224.89
49	304.17	269.96	245.95	231.12	224.88
50	304.17	269.95	245.94	231.12	224.87
51	304.16	269.95	245.93	231.11	224.86
52	304.16	269.95	245.93	231.10	224.86
53	304.16	269.94	245.92	231.10	224.85
54	304.16	269.94	245.92	231.10	224.85
55	304.16	269.94	245.92	231.09	224.85
56	304.16	269.94	245.91	231.09	224.84
57	304.15	269.93	245.91	231.09	224.84
58	304.15	269.93	245.91	231.08	224.84
59	304.15	269.93	245.91	231.08	224.84
60	304.15	269.93	245.91	231.08	224.84

61	304.15	269.93	245.90	231.08	224.83
62	304.15	269.93	245.90	231.08	224.83
63	304.15	269.93	245.90	231.08	224.83
64	304.15	269.93	245.90	231.08	224.83
65	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83
66	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83
67	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83
68	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83
69	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83
70	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83
71	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83
72	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83
73	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83
74	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83
75	304.15	269.92	245.90	231.07	224.83

Anexo – 6

IMÁGENES DE DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN EN EL LABORATORIO DE SIMULACIÓN -FIQ





