Matemáticas III

SEL- Métodos Iterativos

Semana 07

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

UTEC UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Temas

1 **Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.**

2 **Convergencia de los métodos iterativos.**

Objetivo

Aplicar los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales previa convergencia de cada método iterativo y hallar el error cometido en cada iteración.

1 MÉTODOS ITERATIVOS

Logros de Aprendizaje

1. Describe los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.
2. Aplica los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel para la resolución de ecuaciones lineales.

Formalización de contenidos

Métodos iterativos básicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales:

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel

Métodos Iterativos para resolver $Ax = b$

Un método iterativo básico para resolver sistemas de ecuaciones lineales comienza con una aproximación $x^{(0)}$ y genera una sucesión de vectores, soluciones aproximadas del problema:

$$\{x^{(k)}\}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

que si converge, lo hace a la solución x del sistema $Ax = b$, esto es,

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x.$$

Esquema Iterativo

- El esquema iterativo comienza con una aproximación inicial, $x^{(0)}$, de la solución del sistema lineal $Ax = b$.
- Transforma el sistema $Ax = b$ de la forma:

$$x = Tx + c$$

donde T es una matriz fija de $n \times n$ y c un vector de dimensión n.

- La sucesión de aproximaciones se genera definiendo el esquema iterativo:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Iteración de Jacobi

Dado un sistema de ecuaciones de n ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n\right) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n\right) \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

Forma algebraica del método de Jacobi

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)\\
&\vdots\\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right), \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n
$$

siempre que $a_{ii} \neq 0$.

Forma matricial del método de Jacobi

Sea el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Consideremos la siguiente partición de A:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \vdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

De tal forma que:

$$A = D - L - U.$$

Continuación...

Sustituyendo esta partición de A en $Ax = b$ queda

$$(D - L - U)x = b$$

$$Dx = (L + U)x + b$$

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

Se define el método iterativo como:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

donde $T_j = D^{-1}(L + U)$, es la **Matriz de Iteración de Jacobi** y $c_j = D^{-1}b$ es el **vector de Jacobi**.

Ejemplo

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

1. Despeje la componente x_i de la ecuación i, para $i = 1, 2$.
2. Defina el método iterativo:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} &= (b_2 - a_{21}x_2^{(k)})/a_{22} \end{aligned}$$

3. Seleccione $x_1^{(0)} = 1;\ x_2^{(0)} = 2$ y calcule dos iteraciones del método.

Continuación...

Solución:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Al despejar x_1 de la primera ecuación y x_2 de la segunda ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{5}x_2 \\ x_2 &= 0 + \tfrac{1}{4}x_1 \end{aligned}$$

- Entonces el proceso iterativo se define:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0.2 - 0.4x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 0 + 0.25x_1^{(k)} \end{aligned}$$

- Sean $x_1^{(0)} = 1;\ x_2^{(0)} = 2$, entonces

Continuación...

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0.2 - 0.4x_2^{(0)} = 0.2 - 0.4(2) = -0.6 \\ x_2^{(1)} &= 0 + 0.25x_1^{(0)} = 0 + 0.25(1) = 0.25 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x_1^{(1)} &= -0.6 \\ x_2^{(1)} &= 0.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0.2 - 0,4x_2^{(1)} = 0.2 - 0.4(0.25) = 0.1 \\ x_2^{(2)} &= 0 + 0.25x_1^{(1)} = 0 + 0.25(-0.6) = -0.15 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x_1^{(2)} &= -0.1 \\ x_2^{(2)} &= -0.15 \end{aligned}$$

Ejemplo

Del ejemplo anterior, expresar el método en su forma matricial:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 0.2 - 0.4x_2^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= 0 + 0.25x_1^{(k)}
\end{aligned}
$$

con $x_1^{(0)} = 1;\ x_2^{(0)} = 2.$

Observe que se puede expresar en forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}}_{T_j = D^{-1}(L+U)} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{c_j = D^{-1}b}
$$

Método de Gauss Seidel

Observe que en el método de Jacobi, cuando se calculan las componentes del vector $x^{(k+1)}$, sólo se usan las componentes del vector $x^{(k)}$, sin embargo, note que para obtener $x_i^{(k+1)}$, se podrían haber usado las componentes $x_1^{(k+1)}$ hasta $x_{i-1}^{(k+1)}$ porque ellas ya han sido calculadas.

$$\text{Jacobi: } x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$= (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{Gauss-Seidel: } x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

siempre que $a_{ii} \neq 0$.

Forma algebraica del método de Gauss-Seidel

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right), \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii})/a_{ii}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

siempre que $a_{ii} \neq 0$.

Ejemplo

P1

Resuelva con el método de Gauss-Seidel el sistema de ecuaciones dado a continuación partiendo de $x_1^{(0)} = 1;\ \ x_2^{(0)} = 2;\ \ x_3^{(0)} = 0$

$$\begin{aligned} 10x_1 + 0x_2 - x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 12x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Solución:

- Despejamos la variable de modo similar al método de Jacobi:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.10 - 0.00x_2 + 0.10x_3 \\ x_2 &= 0.66 - 0.33x_1 + 0.33x_3 \\ x_3 &= 0.40 - 0.40x_1 - 0.40x_2 \end{aligned}$$

- Entonces aplicando el método de Gauss-Seidel para el sistema dado:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -0.10 - 0.00x_2^{(k)} + 0.10x_3^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= 0.66 - 0.33x_1^{(k+1)} + 0.33x_3^{(k)} \\
x_3^{(k+1)} &= 0.40 - 0.40x_1^{(k+1)} - 0.40x_2^{(k+1)}
\end{aligned}$$

- Aplicamos la primera iteración partiendo de $x_1^{(0)} = 1; \quad x_2^{(0)} = 2; \quad x_3^{(0)} = 0$

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -0.10 + 0.00(2) + 0.10(0) = -0.10 \\
x_2^{(1)} &= 0.66 - 0.33(-0.10) + 0.33(0) = 0.70 \\
x_3^{(1)} &= 0.40 - 0.40(-0.10) - 0.40(0.70) = 0.16
\end{aligned}$$

- Aplicamos la segunda iteración partiendo de $x_1^{(1)} = -0.10; \quad x_2^{(1)} = 0.70; \quad x_3^{(1)} = 0.16$

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -0.10 + 0.00(0.70) + 0.10(0.16) = -0.084 \\
x_2^{(2)} &= 0.66 - 0.33(-0.084) + 0.33(0.16) = 0.748 \\
x_3^{(2)} &= 0.40 - 0.40(-0.084) - 0.40(0.748) = 0.134
\end{aligned}$$

- Realice la tercera iteración partiendo de $x_1^{(2)} = -0.084; \quad x_2^{(2)} = 0.748; \quad x_3^{(2)} = 0.134$

Forma matricial del método de Gauss-Seidel

Sea el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Consideremos la siguiente partición de A:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \vdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

De tal forma que:

$$A = D - L - U.$$

Sustituyendo esta partición de A en $Ax = b$ queda

$$(D - L - U)x = b$$

$$(D - L)x = Ux + b$$

$$x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b$$

Se define el método iterativo como:

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

donde $T_{gs} = (D - L)^{-1}U$, es la **Matriz de Iteración de Gauss-Seidel** y $c_{gs} = (D - L)^{-1}b$ es el **vector de Gauss-Seidel.**

Resumen - Formas Matriciales

La solución del sistema $Ax = b$ se obtiene mediante la siguiente expresión recursiva.

$$A = D - L - U$$
$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$

Método	T	c
Jacobi	$D^{-1}(L+U)$	$D^{-1}b$
Gauss-Seidel	$(D-L)^{-1}U$	$(D-L)^{-l}b$

2 CONVERGENCIA DE METODOS ITERATIVOS

Logros de Aprendizaje

1. Identifica la convergencia de cada método iterativo.
2. Calcula el estimado del error cometido con cada método.

Formalización de contenidos

- Teoremas de convergencia.
- Radio espectral.
- Estimado del error cometido.

Definición (Matriz diagonal estrictamente dominante)

Una Matriz A es diagonal estrictamente dominante por filas si para cada fila $i = 1, \ldots, n$:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Definición (Radio Espectral)

Radio espectral de T: $\rho(T) = Max\{|\lambda|\}, \ \lambda$ es valor propio de T.

Ejemplo

Determinar si la siguiente matriz es diagonal estrictamente dominante

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Convergencia

Teorema

Si A es una matriz diagonal estrictamente dominante, entonces las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier vector inicial.

Teorema

La sucesión $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$, *para* $k \geq 0$ *converge a la solución única* $x = Tx + c$ *si y sólo si* $\rho(T) < 1$.

Ejemplo

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x_1 + x_2 & = & 7 \\ 2x_1 + 5x_2 & = & 9 \end{cases}$

1. Determine la matriz de iteración de Gauss-Seidel.
2. Determine si la matriz de coeficientes es diagonal estrictamente dominante.
3. Halle el radio espectral de la matriz de iteración de Gauss-Seidel.
4. Determine si el método iterativo de Gauss Seidel es convergente.
5. Realice dos iteraciones utilizando el método de Gauss-Seidel, considere $x_1^{(0)} = 1;\ x_2^{(0)} = 1.$

Solución

1

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow D - L = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{15} & 0 \\ \frac{-2}{15} & \frac{3}{15} \end{bmatrix} \Longrightarrow T_{gs} = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{15} \\ 0 & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Dado que se cumple: } \begin{cases} |3| > |1| \\ |5| > |2| \end{cases},$$

la matriz A es diagonal estrictamente dominante.

Continuación

3 Hallando el radio espectral ($\rho(T_{gs})$) de la matriz de iteración T_{gs}

$$|T_{gs} - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{15} \\ 0 & \frac{2}{15} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \frac{2}{15} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(T_{gs}) = \text{Max}\{|0|, |\frac{2}{15}|\} = \frac{2}{15}$$

4 Dado que el radio espectral $\rho(T_{gs}) = \frac{2}{15} < 1$ entonces el Método de Gauss-Seidel es convergente.
Nota: El método también es convergente por ser la matriz de coeficientes diagonal estrictamente dominante.

5 Iteración 1:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{15} \\ 0 & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} + c_{gs}$$

donde, el vector columna $c_g s$ está dado por $c_g s = (D-L)^{-1} b$. Siendo $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$, tenemos $c_{gs} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{13}{15} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{15} \\ 0 & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{13}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora puedes realizar una iteración más!!!

Comparación

- Si ambos métodos convergen, generalmente, la iteración de Gauss-Seidel converge más rápidamente que la iteración de Jacobi.
- Existen algunos casos que la iteración de Jacobi converge pero Gauss-Seidel no.

Errores cometidos

Definición (Estimados de error absoluto y error relativo)

El **estimado del error absoluto** *en la iteración* $k+1$ *es:*

$$E_a = x^{(k+1)} - x^{(k)}.$$

El **estimado del error relativo** *en la iteración* $k+1$ *es:*

$$E_r = \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k+1)}}.$$

Definición (Decimales exactos)

El número p^* *aproxima a* p *con* t **decimales exactos** *(o* **dígitos decimales exactos***), si* t *es el mayor entero no negativo para el cual*

$$|p - p^*| \leq 0.5 \times 10^{-t}.$$

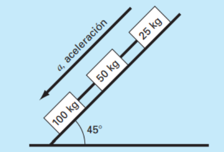
Definición (Cifras significativas)

El número p^* *aproxima a* p *con* t **cifras significativas** *(o* **dígitos significativos***) si* t *es el mayor entero no negativo para el cual*

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 5 \times 10^{-t}.$$

Aplicación

Se conectan tres bloques por medio de cuerdas carentes de peso y se deja en un plano inclinado (ver figura).



Se llega al siguiente sistema de ecuaciones $A \begin{bmatrix} a \\ T \\ R \end{bmatrix} = b$, donde

$A = \begin{bmatrix} 100 & 1 & 0 \\ 50 & -1 & 1 \\ 25 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 519.72 \\ 216.55 \\ 108.27 \end{bmatrix}$. Resolver para la aceleración a y las tensiones T y R en las dos cuerdas; utilice el método de Gauss Seidel para aproximar la solución dados $a^{(0)} = 1$, $T^{(0)} = 1$ y $R^{(0)} = 1$. Considere $g = 9,8 m/s^2$.

Gracias por su atención