Matemáticas III

SEL Métodos Iterativos

Semana 07

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Índice

1 PARTE TEÓRICA

Métodos Iterativos

Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b \to x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$, dado $x^{(0)}$ inicial, donde:
T: Matriz de iteración.
c: vector columna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \to A = D - L - U, \text{ donde:}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 8 & 10 & 4 \\ 1 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

Halle la matriz D, L y U

```
A=[3 1 6;8 10 4;1 9 12]
D=diag(diag(A))
L=-tril(A,-1)
U=-triu(A,1)
D-L-U % Obtenemos la matriz A
```

Método de Jacobi

$Ax = b \rightarrow (D - L - U)x = b$

$Dx = (L + U)x + b$

$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$

Ecuación de recurrencia:

$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b,$

Dado $x^{(0)}$.

$T_j = D^{-1}(L + U)$; Matriz de Iteración de Jacobi.

$c_j = D^{-1}b$; Vector columna del lado derecho.

Función Jacobi

```
function [z]=jacobi(A,b,x0,Tol)
D=diag(diag(A));
L=-tril(A,-1);
U=-triu(A,1);
Tj=inv(D)*(L+U);
cj=inv(D)*b;
error=1;
z=[x0' error];
while error>Tol
    x1=Tj*x0+cj;
    error=norm(x1-x0,inf)/norm(x1,inf);
    z=[z;x1' error];
    x0=x1;
end
end
```

Ejemplo

El sistema lineal $Ax = b$ dado por:

$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$

$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$

$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$

$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$

Tiene una solución única $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Utilice el método iterativo de Jacobi para encontrar aproximaciones $x^{(k)}$ a x^*, comenzando con $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ hasta

$\frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty}{||x^{(k+1)}||_\infty} < 10^{-3}$

Solución

```
A=[10 -1 2 0;-1 11 -1 3;2 -1 10 -1;0 3 -1 8]
b=[6;25;-11;15]
Tol=1e-3
x0=[0;0;0;0]
z=jacobi(A,b,x0,Tol)
```

Ejercicio

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 23 \end{aligned}$$

Aproximar la solución utilizando el método de Jacobi. Realice 10 iteraciones.

Considere $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.

Nota: Modifique la función jacobi.m para resolver el ejercicio.

Método de Gauss Seidel

$Ax = b \to (D - L - U)x = b$
$(D - L)x = Ux + b$
$x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b$
Ecuación de recurrencia:
$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$
$T_{gs} = (D - L)^{-1}U$
$c_{gs} = (D - L)^{-1}b,$
dado $x^{(0)}$

Función Gauss Seidel

```
function [z]=gausseidel(A,b,x0,Tol)
D=diag(diag(A));
L=-tril(A,-1);
U=-triu(A,1);
Tgs=inv(D-L)*U;
cgs=inv(D-L)*b;
error=1;
z=[x0' error];
while error>Tol
    x1=Tgs*x0+cgs;
    error=norm(x1-x0,inf)/norm(x1,inf);
    z=[z;x1' error];
    x0=x1;
end
end
```

Ejemplo

El sistema lineal $Ax = b$ dado por:

$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$

$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$

$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$

$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$

Tiene una solución única $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Utilice el método iterativo de Gauss Seidel

para encontrar aproximaciones $x^{(k)}$ a x^*, comenzando con $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ hasta

$\frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty}{||x^{(k+1)}||_\infty} < 10^{-3}$

Solución

```
A=[10 -1 2 0;-1 11 -1 3;2 -1 10 -1;0 3 -1 8]
b=[6;25;-11;15]
Tol=1e-3
x0=[0;0;0;0]
z=gausseidel(A,b,x0,Tol)
```

Ejercicio

Dado el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\
x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 14 \\
2x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 23
\end{aligned}
$$

Aproximar la solución utilizando el método de Gauss Seidel. Realice 10 iteraciones.

Considere $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.

Nota: Modifique la función gausseidel.m para resolver el ejercicio.

Convergencia

Definición:Diagonal estrictamente dominante

A es una matriz diagonal estrictamente dominante

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

si se cumple:

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$
$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

Función Diagonal Estrictamente Dominante

```
function op=diagdom(A)
%op=0: diagonal estrictamente dominante
%op=1: No es diagonal estrictamente dominante
[m,n]=size(A)
op=0;
if m==n
    for k=1:m
        if abs(A(k,k))≤sum(abs(A(k,:)))-abs(A(k,k))
            op=1;
            break;
        end
    end
end

end
```

Ejemplo

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 6 \\ 8 & 13 & 4 \\ 1 & 9 & -10 \end{bmatrix}$*, determinar si la matriz A es diagonal estrictamente dominante.*

Solución:

$|-8| > |1| + |6|$, cumple

$|13| > |8| + |4|$, cumple

$|-10| = |1| + |9|$, No cumple

Por lo tanto no es diagonal estrictamente dominante.

```
A=[-8 1 6;8 13 4;1 9 -10]
op=diagdom(A)
```

Teoremas de Convergencia

Teorema

Si A es diagonal estrictamente dominante entonces el método de Jacobi y Gauss Seidel son convergentes para cualquier $x^{(0)}$ inicial.

Teorema

Si el radio espectral ($\rho(T_j) < 1$) si y solo si el método de Jacobi es convergente.
Si el radio espectral ($\rho(T_{gs}) < 1$) si y solo si el método de Gauss Seidel es convergente.
Donde:
$\rho(T_{gs}) = Max(abs(\lambda_i))$: *Radio espectral*
λ_i *es valor propio de* T_{gs}, λ_i *es raiz del polinomio caracteristico:* $p(\lambda) = |T_j - \lambda_i I|$

Continuación...

Ejemplo

Dado el sistema, verificar si el método de Jacobi y Gauss Seidel es convergente

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 23 \end{aligned}$$

Solución:

```
A=[4 2 1;1 5 3;2 6 9]
op=diagdom(A)
if op==0
    fprintf('El metodo de Jacobi Y Gauss Seidel son convergentes')
else
    fprintf('No se puede afirmar nada')
end
```

Continuación...

Ejemplo

El sistema lineal $Ax = b$ dado por:

$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$

$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$

$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$

$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$

Hallar los radios espectrales de las matrices de iteración de Jacobi y Gauss Seidel para posteriormente verificar que el método de Jacobi y Gauss Seidel son convergentes.

Solución

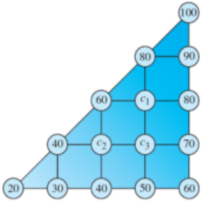
```
A=[10 -1 2 0;-1 11 -1 3;2 -1 10 -1; 0 3 -1 8]
D=diag(diag(A));
L=-tril(A,-1);
U=-triu(A,1);
Tj=inv(D)*(L+U);
Tgs=inv(D-L)*U;
rho_j=max(abs(eig(Tj)))
rho_gs=max(abs(eig(Tgs)))
```

2 PARTE PRÁCTICA

Aplicación de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Problemas de Valor de Frontera

Los métodos iterativos de SEL se pueden aplicar a problemas de valores de frontera para analizar una región que tiene una cantidad distribuida a través de ella. Se dibuja una cuadrícula o malla sobre la región y los valores se estiman en los puntos de la cuadricula. Se superpone una cuadrícula sobre una región triangular y se especifican los porcentajes de azul en los puntos exteriores de la cuadrícula. El valor del color en cada punto de la cuadricula interior es aproximadamente igual a la media de los porcentajes en los puntos de la cuadrícula circundante.



Continuación...

Ejemplo: $c_1 = \frac{1}{4}(80 + 80 + c_3 + 60)$.

PREGUNTAS:

1. Modele el SEL
2. Determinar si el método de Jacobi y Gauss Seidel convergen.
3. Aplique el método de Jacobi, si es posible. Aproximar la solución con una tolerancia de 10^{-3}. Considere $c^{(0)} = \begin{bmatrix} 70 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$
4. Aplique el método de Gauss-Seidel, si es posible. Aproximar la solución con una tolerancia de 10^{-3}. Considere $c^{(0)} = \begin{bmatrix} 70 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$

Gracias por su atención