Matemáticas III

Spline Cúbico
Diferenciación numérica
Polinomios de Taylor

Semana 11

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

UTEC UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Temas

Objetivos

Aplicar los Splines en la resolución de problemas en un contexto real y aproximar las derivadas mediante diferenciación numérica y Polinomios de Taylor.

1 SPLINES

Logros de Aprendizaje

1. Aproxima funciones mediante spline.
2. Aproxima las derivadas utilizando polinomios de Taylor.
3. Aproxima las derivadas utilizando polinomios de interpolación.

Spline

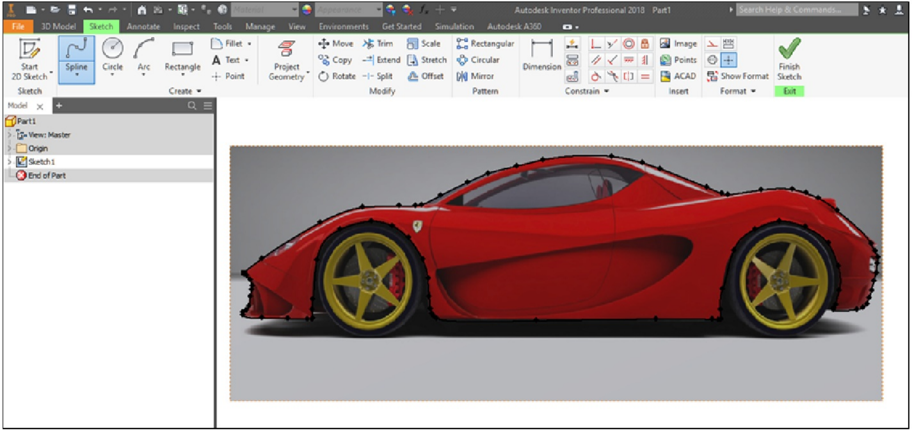
Situación

Se desea digitalizar el perfil de este auto deportivo en un software de modelado, a partir de una fotografía como esta.

Ferrari Aurea
Fuente: www.DesktopMachine.com

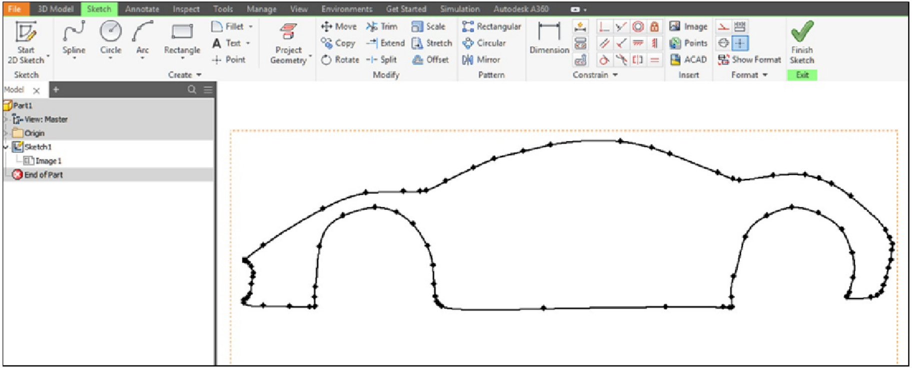
Situación

Se ubica la imagen sobre algún software de modelado y se captura una cantidad de puntos del perfil (en este caso 80 puntos) y luego se ajusta curvas polinomiales que pasen por dichos puntos.



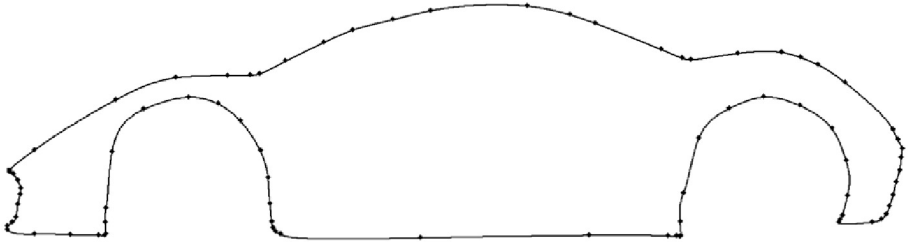
Situación

Se retira la imagen y nos quedamos con la curva que pasa por todos los puntos.



Situación

Esta curva que se ajusta a todos los puntos se llama **Spline**, la cual viene a ser un conjunto de polinomios de grado 3 calculados para cada par de puntos consecutivos. “Se imagina tratar de calcular un solo polinomio que pase por los 80 puntos”.



Formalización de contenidos

- Un spline es una función de interpolación segmentaria a través de polinomios de bajo grado, normalmente desde grado 1 hasta grado 3.
- Su aplicación principal es el modelamiento de superficies curvas a partir de muchos puntos a través de software de modelado.
- Con esta herramienta se desarrollan por ejemplo: Los perfiles de las alas de los aviones, el casco de los barcos, los alabes de una turbina, todos los elementos ergonómicos, etc.

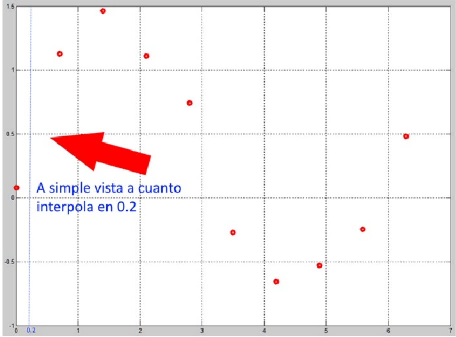
Formalización de contenidos

- Para el desarrollo de este tema nos centraremos en uno de los tipos de Spline: Spline Cúbico natural, la cual tiene las siguientes características:
  - Considera polinomios de grado 3 en cada par de puntos consecutivos.
  - La primera y segunda derivada son iguales, en los puntos internos.
  - La segunda derivada en los extremos es cero.

Ventaja sobre la interpolación polinomial

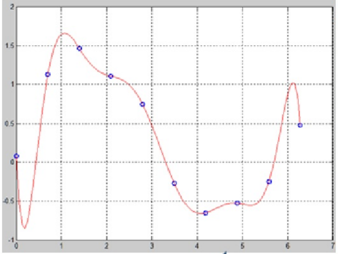
Por ejemplo, si de un laboratorio obtenemos 10 puntos de un experimento que sabemos que debería tener una tendencia sinusoidal, sin embargo esta presenta distorsión considerable, y luego quisieramos usar estos puntos para interpolar en 0.2.

N	x	y
1	0	0.0788
2	0.6981	1.1281
3	1.3963	1.4634
4	2.0944	1.1087
5	2.7925	0.7422
6	3.4907	-0.2711
7	4.1888	-0.6551
8	4.8869	-0.5269
9	5.5851	-0.2467
10	6.2832	0.4797

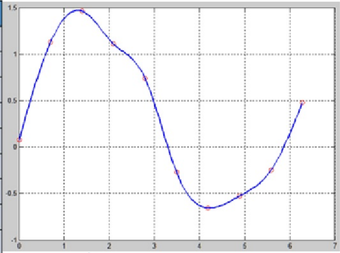


Ventaja sobre la interpolación polinomial

Sin embargo, si comparamos la interpolación polinomial vs la interpolacion por spline, tenemos lo siguiente:



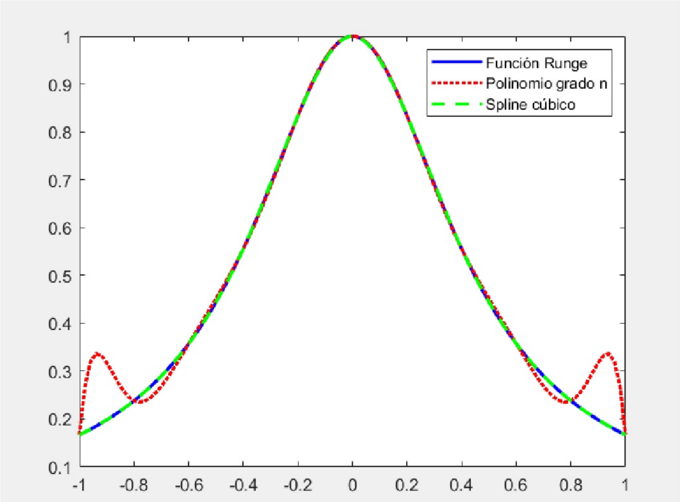
N	x	y
1	0	0.0788
2	0.6981	1.1281
3	1.3963	1.4634
4	2.0944	1.1087
5	2.7925	0.7422
6	3.4907	-0.2711
7	4.1888	-0.6551
8	4.8869	-0.5269
9	5.5851	-0.2467
10	6.2832	0.4797



Interpolación polinomial de grado 9

Interpolación con spline cúbico natural

Ventaja sobre la interpolación polinomial



¿Como se calcula un spline cúbico natural?

Construcción del Spline

- Si tenemos n+1 puntos:
  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), \ldots .(x_n, y_n),$
- el Spline cúbico natural es un polinomio definido a tramos, esto es, está formado por n polinomios de grado 3 definidos de la siguiente manera:
  $S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$ para $i = 0, 1, 2, ..n - 1$
  donde:
  $a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}$, $b_i = \frac{M_i}{2}$
  $c_i = y[x_i, x_{i+1}] - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} h_i$, $d_i = y_i$
  $M_i = S_i''(x_i)$
  $h_i = x_{i+1} - x_i$.

¿Como se calcula un spline cúbico natural?

Construcción del Spline

- M_i se obtiene del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$6\begin{pmatrix} y[x_1,x_2]-y[x_0,x_1] \\ y[x_2,x_3]-y[x_1,x_2] \\ \vdots \\ y[x_{n-2},x_{n-1}]-y[x_{n-3},x_{n-2}] \\ y[x_{n-1},x_n]-y[x_{n-2},x_{n-1}] \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Calcule el spline cúbico natural que se interpole a los siguientes puntos, luego estime la velocidad en los instantes 3s y 10s, usando la funcion de interpolación.

tiempo (s)	**Velocidad** (m/s)
1	5
5	10
10	15
12	25

Solución

Primero planteamos el sistema de ecuaciones para hallar M_i, para ello, es recomendable componer una tabla como se muestra:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} y[x_1,x_2]-y[x_0,x_1] \\ y[x_2,x_3]-y[x_1,x_2] \\ \vdots \\ y[x_{n-2},x_{n-1}]-y[x_{n-3},x_{n-2}] \\ y[x_{n-1},x_n]-y[x_{n-2},x_{n-1}] \end{bmatrix}$$

i	x	y	hi	y[xi,xi+1]
0	1	5	4	1.25
1	5	10	5	1
2	10	15	2	5
3	12	25		

$M_0 := 0 \qquad M_3 := 0$

$$\begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.621 \\ 1.936 \end{bmatrix}$$

Continuación...

Luego, usando las fórmulas correspondientes, hallamos cada uno de los coeficientes de cada polinomio y finalmente formamos los polinomios para interpolar:

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i} \quad b_i = \frac{M_i}{2} \quad d_i = y_i$$

$$c_i = y[x_i, x_{i+1}] - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} h_i$$

	[xi,xi+1]	a	b	c	d
s0	1 - 5	-0.026	0	1.6641	5
s1	5 - 10	0.0852	-0.31057	0.42181	10
s2	10 -12	-0.161	0.96806	3.70925	15

El spline cúbico natural esta formado por:

$$s_0 := -0.026 \cdot (x-1)^3 + 0\ (x-1)^2 + 1.6641 \cdot (x-1) + 5$$

$$s_1 := 0.0852 \cdot (x-5)^3 - 0.31057\ (x-5)^2 + 0.42181 \cdot (x-5) + 10$$

$$s_2 := -0.161 \cdot (x-10)^3 + 0.96806\ (x-10)^2 + 3.70925 \cdot (x-10) + 15$$

La interpolación en x=3 y x=10 será:

$$s_0(3) = 8.12 \qquad s_1(10) = s_2(10) = 15$$

ACTIVIDAD 1

P1

Determine el spline cúbico natural que interpola los siguientes datos:

x	0	1	2	3
y	1	1	0	10

Diferenciación Numérica

Introducción

¿$f'(x_0)$?
¿$f''(x_0)$?
¿$f^{k}(x_0)$?

* Sin conocer la función explícitamente.
* derivada muy complejo

- Muchas aplicaciones de ingeniería requieren estimaciones numéricas de derivadas de funciones.
- Especialmente cierto, cuando las derivadas analíticas no son posibles de obtener.
- También cuando la función no se conoce explícitamente, sólo se tiene la información de algunos puntos por donde pasa.

Formalización de contenidos

Comencemos con obtener una aproximación para $f'(x)$ en un punto x_0. Recordemos que la derivada de $f(x)$ en un punto x_0, se define por:

$$f'(x_0) = \cancel{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Si $h>0, h\approx 0$

Esta definición sugiere un método para aproximar $f'(x_0)$.

- Si se escoge a h una constante positiva pequeña ($h > 0$, $h \approx 0$), entonces

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

  Esta aproximación es llamada **fórmula de diferencia hacia adelante** para $f'(x_0)$.

- Si reemplazamos h por $-h$ en la fórmula de diferencia hacia adelante, donde h aún es positivo, obtenemos la fórmula de diferencia hacia atrás:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}.$$

x_0-h $\quad$ x_0

Esta aproximación es conocida como **fórmula de diferencia hacia atrás** para $f'(x_0)$.

- Si promediamos las dos aproximaciones anteriores, obtenemos:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Esta aproximación es llamada **fórmula de diferencia centrada** para $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$+$

$$2f'(x_0) \approx \frac{\cancel{f(x_0)} - f(x_0-h) + f(x_0+h) - \cancel{f(x_0)}}{h}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$ FOMULA DE DIFERENCIA CENTRADA

Ejemplo

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Aproxime $f'(2)$ mediante las fórmulas de diferencia hacia adelante, hacia atrás y centrada con $h = 0.01$. ¿Cuál de las tres aproximaciones es mejor?

Solución:

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.01) - f(2)}{0.01} = \frac{\frac{1}{2.01} - \frac{1}{2}}{0.01} = -0.248756$$

$$f'(2) \approx \frac{f(2) - f(2-0.01)}{0.01} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{1.99}}{0.01} = -0.251256$$

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.01) - f(2-0.01)}{2(0.01)} = \frac{\frac{1}{2.01} - \frac{1}{1.99}}{0.02} = -0.2500062$$

En este caso es muy sencillo calcular el valor exacto ya que $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, por lo tanto, $f'(2) = 0.25$. Claramente la fórmula centrada es mejor. Tiene 5 cifras significativas con respecto al valor exacto.

SOLUCIÓN:

1) Diferencia hacia adelante

$f(x) = \frac{1}{x}$, Pide $f'(2)$ Cuando $h < 0$, $h = 0.01$

$$f'(2) = \frac{f(2+0.01) - f(2)}{0.01} = \frac{\frac{1}{2.01} - \frac{1}{2}}{0.01} = -0.248756$$

2.Diferencia hacia atras

$$f'(2) = \frac{f(2) - f(2-0.01)}{0.01} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{1.99}}{0.01} = -0.25125$$

3.Diferencia centrada

$$f'(2) = \frac{f(2+0.01) - f(2-0.01)}{2 \times 0.01} = \frac{\frac{1}{2.01} - \frac{1}{1.99}}{2 \times 0.1} = -0.2500062$$

Sabemos:

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$\rightarrow f'(x) = -0.25$

Error relativo

$$|Er| = \frac{|f'(2) - \text{Aprox}2|}{|f'(2)|}$$

$|Er| = 2.48 \times 10^{-5}$

o sea 5 cifras significativas

$|Er| < 5 \times 10^{-n}$

n cifras significativas

se parecen en 5 cifras significativas

Las fórmulas vistas anteriormente y muchas otras, tanto para la primera derivada, $f'(x)$, como para derivadas de órdenes superiores, $f^{(k)}(x)$ para algún k, pueden ser obtenidas de diferentes maneras.

Dos Enfoques:

1. La expansión de la serie Taylor se puede utilizar para generar aproximaciones para $f'(x)$ o alguna derivada de orden superior, $f^{(k)}(x)$ para algún k, mediante el uso del álgebra lineal para combinar la expansiones en varios puntos.
2. Dado un conjunto de $n+1$ puntos por donde pasa la función $f(x)$, calcular el polinomio $P_n(x)$ que interpola a la función y aproximar a $f'(x_0)$ por la derivada el polinomio en el punto x_0, es decir,

$$f'(x_0) \approx P_n'(x_0).$$

$f(x_0) \approx P_n(x_0)$

$f'(x_0) \approx P_n'(x_0)$

Primer Enfoque: Polinomios de Taylor

Los polinomios de Taylor son una herramienta importante en diferenciación numérica porque permiten obtener aproximaciones de las derivadas de una función, así como los errores absolutos de las aproximaciones.

Teorema de Taylor

Suponga que $f \in C^n[a,b]$, existe $f^{(n+1)}$ existe en $[a,b]$, y $x_0 \in [a,b]$. Entonces para todo $x \in [a,b]$, existe $\xi(x)$ entre x_0 y x tal que:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $\quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$.
$P_n(x)$ es el **polinomio de Taylor de grado** n y R_n es el **término del error** (o residual, o error local de truncamiento).

¿ $f'(x)$?

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)}_{P_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(\xi_x)(x-x_0)^2}{2!}}_{R_n(x)}$$

Si $x = x_0 + h$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}) + \frac{f''(\xi_x)(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0})^2}{2}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f''(\xi_x)\frac{h}{2} = f'(x_0)$$ Formula de diferencia hacia adelante

Las fórmulas de diferencia hacia adelante, hacia atrás y centrada pueden ser derivadas del polinomio de Taylor.

- **Fórmula de diferencia hacia adelante:**

Según el teorema de Taylor, si $f''(x)$ existe en $[x_0, x_0 + h]$, entonces

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(\xi(x))\frac{h^2}{2}, \quad \text{con} \;\; \xi(x) \in (x_0, x_0 + h).$$

Despejando $f'(x_0)$, se obtiene: formula adelantada

error absoluto

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f''(\xi(x))\frac{h}{2}$$

con $\xi(x) \in (x_0, x_0 + h)$.

Fórmula de diferencia hacia atrás:

Según el teorema de Taylor, si $f''(x)$ existe en $[x_0 - h, x_0]$, entonces

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(\xi(x))\frac{h^2}{2}, \quad \text{con} \;\; \xi(x) \in (x_0 - h, x_0).$$

Despejando $f'(x_0)$, se obtiene:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + f''(\xi(x))\frac{h}{2}$$

con $\xi(x) \in (x_0 - h, x_0)$.

Fórmula de diferencia centrada:

En este caso, consideramos dos polinomios de Taylor. Si existen $f'''(x)$ en $[x_0 - h, x_0]$ y $f'''(x)$ en $[x_0, x_0 + h]$, entonces

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} - f'''(\xi_1(x))\frac{h^3}{3!}, \quad \text{con } \xi_1(x) \in (x_0-h, x_0)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + f'''(\xi_2(x))\frac{h^3}{3!}, \quad \text{con } \xi_2(x) \in (x_0, x_0+h).$$

Combinando estas dos ecuaciones se obtiene que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + f'''(\xi(x))\frac{h^2}{6}$$

con $\xi(x) \in (x_0 - h, x_0 + h)$.

Ejemplo:

Sea $f(x) = \dfrac{sen^2\left(\frac{\sqrt{x^2+x}}{cosx-x}\right)}{Sen\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}$. Se desea calcular $f'(0.25)$.

Solución:

Para calcular la $f'(0.25)$ análiticamente se requiere primero derivar $f(x)$ haciendo uso de la regla del cociente y la regla de la cadena y luego evaluar la derivada en $x = 0.25$. En este caso, la expresión de $f'(x)$ es más compleja que la de $f(x)$ y tediosa de obtener.

Una alternativa, es usar por ejemplo, la fórmula de diferencia centrada con $h = 0.005$ para hallar el valor de $f'(0.25)$:

$$f'(0.25) \approx \frac{f(0.255) - f(0.245)}{0.01} = -9.067464295.$$

La solución exacta es $f'(0.25) = -9.066698770$, por lo tanto, la magnitud del error absoluto de la solución aproximada es:

$$|E_a| = |\text{Valor exacto} - \text{Valor aproximado}| = |-9.066698770 + 9.067464295| = 0.0007655.$$

Segundo Enforque: Utilizando Polinomios de Interpolación

Considere el polinomio de grado menor o igual a n que pasa por $n+1$ puntos distintos usando la fórmula de Newton. Entonces,

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x, f)$$

vander...

donde $E_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$. Por lo tanto, si derivamos la expresión anterior:

$$f'(x) = P_n'(x) + \frac{d}{dx}E_n(x, f)$$

Note que también podríamos obtener derivadas de órdenes superiones, por ejemplo $f^{(k)}(x)$ se puede generar derivando k veces la expresión para $f(x)$:

$$f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + \frac{d^k E_n(x, f)}{dx^k}$$

Fórmula de diferencia hacia adelante

Consideremos como puntos de interpolación $(x_0, f(x_0))$ y $(x0 + h, f(x0 + h))$. El polinomio de grado 1 que interpola a $f(x)$ mediante la fórmula de Newton es:

formula de Newton

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0 + h](x - x_0).$$

Derivando $P_1(x)$:

$$P_1'(x) = f[x_0, x_0 + h] = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Por lo tanto,

$$f'(x_0) \approx P_1'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

¿Cómo podríamos obtener las fórmulas de diferencia hacia atrás y centrada? ¿Qué puntos de interpolación se deben seleccionar en cada caso?

ACTIVIDAD 2

P1

Considere como puntos de interpolación (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) y (x_{i+2}, f_{i+2}), donde $f_i = f(x_i)$ y x_j, para $j = i, i+1, i+2$, están igualmente espaciados, es decir, $x_{i+2} - x_{i+1} = x_{i+1} - x_i = h$. Utilice interpolación polinomial con la fórmula de de Newton para obtener:

$$f'(x_i) = \frac{4f(x_{i+1}) - 3f(x_i) - f(x_{i+2})}{2h} + \frac{f'(\xi)}{3}h^2, \ \text{ con } \ \xi \in (x_i, x_{i+2})$$

ACTIVIDAD 3

P1

La velocidad ascendente de un cohete se da en función del tiempo (segundos) en la siguiente tabla.

$t\ (s)$	0	10	15	20	22.5	30
$v(t)\ (m/s)$	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

1. Usando la fórmula de diferencia hacia adelante, encuentre la aceleración del cohete en $t = 16\ s$.
2. Determine el valor de la aceleración en $t = 16\ s$ usando el polinomio de interpolación de grado 2 para la velocidad.
3. Usando el polinomio de interpolación de grado 3 para la velocidad, encuentre la aceleración del cohete en $t = 16\ s$.

Conclusiones

Gracias por su atención