Matemáticas III
Exámen E1
Pregrado
2021-1

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.

Duración 60 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Responda Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Si $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

2. [**2 ptos**] El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 = k \end{cases}$$

no tiene solución si $\frac{k}{2} \neq 3$.

PROCEDIMENTAL

3. Considere el número real a y la tranformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + ay + 2z \\ 6x + 2y + 4z \end{bmatrix}$

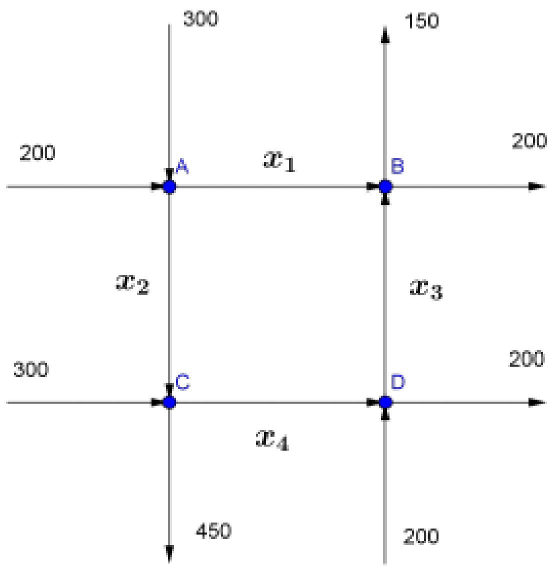
   a) [**1.5 ptos**] Sabiendo que el núcleo de la transformación T es el plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación general es $\mathcal{P} : \frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 0$, halle el valor de a.
   Sugerencia: tome cualquier punto del plano $\mathcal{P}$

   b) [**2.5 ptos**] Si $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es otra transformación lineal cuya matriz asociada es $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$. Halle la imagen de S

4. [**2 ptos**] Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & n \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 3n-1 \end{bmatrix}$ la cual depende del parámetro n, halle la factorización LU de A forma de CROUT, en términos de n. Indique las operaciones elementales que realiza y paso a paso su procedimiento.

APLICACIONES

5. **Flujo de redes [10 puntos]** Una red consiste en un conjunto de puntos llamados nodos, con líneas o arcos que los conectan denominadas ramas. La dirección del flujo se indica en cada rama y la cantidad (o tasa) de flujo se denota por medio de una variable. El supuesto básico estándar en una red de flujos es que el **flujo que entra a la red es el mismo que sale de la red, y que el flujo entrante a cada nodo es igual al flujo saliente de dicho nodo**. Por ejemplo, la red mostrada en la figura representa al flujo de tránsito en cierta ciudad. Se va a realizar una reparación en las calles y se quiere conocer el flujo en alguna de ellas para tomar decisiones en cuanto a su redireccionamiento. En la red de la figura se indica el flujo de tráfico que entra o sale de cada calle, en cantidad de vehículos por hora, considerando el tráfico promedio durante las horas pico. Identificamos los nodos: A, B, C y D, y los flujos a conocer: x_1, x_2, x_3 y x_4. Para cada nodo se debe verificar lo siguiente (flujo entrante, igual al flujo saliente):



   a) **[3 ptos] Formule un sistema** de 4 ecuaciones con 4 incógnitas x_1, x_2, x_3 y x_4 en forma algebraica y matricial cuya solución permita hallar los flujos desconocidos.

   b) **[2 ptos]** Si M es la matriz de coeficientes del sistema planteado en el item anterior y se conoce $det(A) = 0$, utilice el valor dado para el determinante de la matriz de coeficientes para **resolver el sistema (en caso sea posible). Interprete** la solución obtenida de acuerdo al contexto presentado.

c) [**3 ptos**] Fijando el valor del flujo x_4 en 100, **formule un sistema de 4 ecuaciones** en las incognitas x_1, x_2 y x_3, y luego de identificar la matriz aumentada **halle su forma escalonada** mediante operaciones elementales, a partir de la forma escalonada hallada **determine los rangos** de la matriz de coeficientes y de la matriz aumentada.
Nota: En la solución de este item debe indicar las operaciones elementales realizadas en cada paso.

d) [**2 ptos**] Utilizando la matriz escalonada obtenida en el item anterior y el teorema de Rouche-Frobenius concluya respecto a la consistencia del sistema y finalmente halle la solución (en caso exista) o un argumente la razón por la cual no existe solución.