Matemáticas III

Spline Cúbico
Diferenciación Numérica
Semana 11

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Índice

1 PARTE TEÓRICA

Spline Cúbico

Una función $S(x)$ es un spline de grado 3 (spline cúbico) definido en el intervalo $[a; b]$ si se cumple:

- $S(x)$ es continua en $[a; b]$.
- $S'(x)$ es continua en $[a; b]$.
- $S''(x)$es continua en $[a; b]$.

Continuación...

La forma de cada Spline Cúbico para cada subintervalo es:
$S_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$
donde $x \in [x_k; x_{k+1}]$ y $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$
n es el número de subintervalos.
Nota:
Si $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ se denomina el **Spline Cúbico Natural**.

Spline Natural

```
function S=splinenatural(X,Y)
N=length(X)-1; H=diff(X); E=diff(Y)./H;
diagprinc=2*(H(1:N-1)+H(2:N)); diagsupinf=H(2:N-1);
g0=0; gn=0;
A=diag(diagprinc)+diag(diagsupinf,1)+diag(diagsupinf,-1);
b=6*diff(E'); g=A\b;
g=[g0 g' gn];
for i=1:N
    S(i,1)=(g(i+1)-g(i))/(6*H(i));
    S(i,2)=g(i)/2;
    S(i,3)= E(i)-H(i)*(g(i+1)+2*g(i))/6;
    S(i,4)=Y(i);
    xx=linspace(X(i),X(i+1),100);
    yy=S(i,1)*(xx-X(i)).^3+S(i,2)*(xx-X(i)).^2+S(i,3)*(xx-X(i))+S(i,4);
    plot(xx,yy),  hold on
end
grid on, hold off
```

Ejemplo

Obtener una interpolación por spline cúbico natural para el polinomio $p(x) = x^4$, para $x = 0, 1, 2, 3$. Muestre el Spline $S(x)$ para cada subintervalo.
Solución:

```
clf
x=[0 1 2 3];
y=x.^4;
S=splinenatural(x,y)
```

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 0.4(x-0)^3 + 0(x-0)^2 + 0.6(x-0) + 0, & x \in [0,1] \\ S_1(x) = 12(x-1)^3 + 1.2(x-1)^2 + 1.8(x-1) + 1, & x \in [1,2] \\ S_2(x) = -12.4(x-2)^3 + 37.2(x-2)^2 + 40.2(x-2) + 16, & x \in [2,3] \end{cases}$$

Comando Spline

Si x e y son los vectores que contienen los puntos iniciales, la orden Matlab

obtiene un spline cubico fit
con condiciones :

$$y^* = spline(x, y, x^*)$$

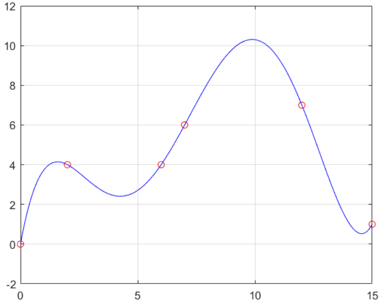
calcula el valor $y^* = S(x^*)$, siendo $S(x)$ la función definida por los splines cúbicos. Si se desea la función $S(x)$, se deben generar un número suficiente de valores de la gráfica de $S(x)$.
El comando de Matlab **Spline**, impone como condición adicional la derivada tercera continua en el segundo y en penultimo nodo.

Ejemplo

Se desea diseñar la trayectoria plana a seguir por un brazo robot para que trasporte diferentes piezas de un lugar a otro. Dicho mecanismo ha de moverse de forma suave para que no caigan los elementos transportados, y para que no se dañen sus articulaciones. Se ha de diseñar la trayectoria con un número de puntos por los que debe pasar: partiendo de punto inicial que suponemos el origen $(0, 0)$, el brazo debe dirigirse al punto $(7, 6)$ en donde recogerá una pieza, aunque previamente tendrá que pasar por dos puntos de control, el $(2, 4)$ y el $(6, 4)$. Finalmente debe llegar hasta el purto $(15, 1)$ en donde dejará la pieza en cuestión, pero pasando antes por el punto de control $(12, 7)$.

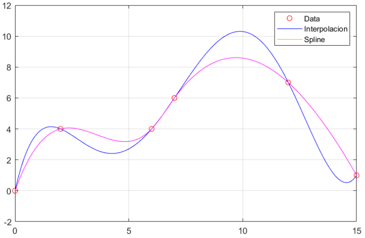
Polinomio interpolante (6 puntos, grado 5)

```
x=[0 2 6 7 12 15]
y=[0 4 4 6 7 1]
p=polyfit(x,y,5)
xx=[0:0.01:15];
yy=polyval(p,xx);
plot(x,y,'or',xx,yy,'b')
grid on
```



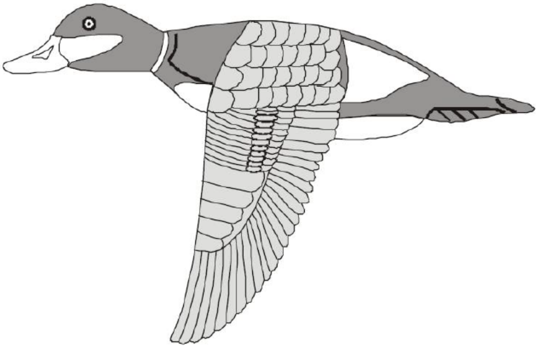
Spline

```
%Calculo de 100 puntos de la ...
    grafica de S(x)
xx=linspace(0,15,100);
yy=spline(x,y,xx);
%Dibujo de la funcion ...
    interpoladora S(x) sobre ...
    el conjunto de datos (x,y)
hold on
plot(xx,yy,'m')
legend('Data','Interpolacion','Spline')
```



Ejemplo

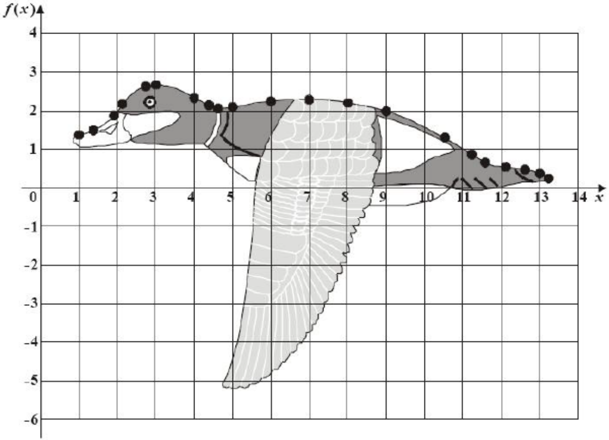
Utilice la función splinenatural.m para dibujar la siguiente figura:



Continuación...

Procedimiento

- Identificar puntos sobre la figura.

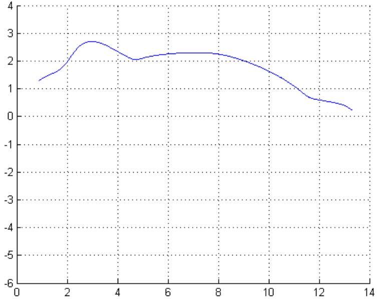


Continuación...

x	0,9	1,3	1,9	2,1	2,6	3,0	3,9	4,4	4,7	5,0	6,0
$f(x)$	1,3	1,5	1,85	2,1	2,6	2,7	2,4	2,15	2,05	2,1	2,25

x	7,0	8,0	9,2	10,5	11,3	11,6	12,0	12,6	13,0	13,3
$f(x)$	2,3	2,25	1,95	1,4	0,9	0,7	0,6	0,5	0,4	0,25

Gráfico Final



Solución

```
clf
X=[0.9 1.3 1.9 2.1 2.6 3.0 3.9 4.4 4.7 5 6 7 8 9.2 10.5 11.3 11.6 ...
    12 12.6 13 13.3]
Y=[1.3 1.5 1.85 2.1 2.6 2.7 2.4 2.15 2.05 2.1 2.25 2.3 2.25 1.95 ...
    1.4 0.9 0.7 0.6 0.5 0.4 0.25]
S=splinenatural(X,Y)
axis([0 14 -6 4])
grid on
```

Diferenciación Numérica

Halle la derivada de $f(x) = x^2 \ln(x)$ y evaluar la derivada en $x_0 = 2$

```
clc
syms x
f=inline('x^2*log(x)')
Der01=diff(f(x))
Der01_value=vpa(subs(Der01,2),15)
```

Continuación...

Aproximación de la 1era Derivada con 2 puntos:

Derivada hacia adelante:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

```
x0=2;
h=0.01;
Der1_Adelante=(f(x0+h)-f(x0))/h
```

Derivada hacia atrás: $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

```
x0=2;
h=0.01;
Der1_Adelante=(f(x0)-f(x0-h))/h
```

Continuación...

Derivada central:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

```
format long
x0=2;
h=0.01;
Der1_Central=(f(x0+h)-f(x0-h))/(2*h)
```

Continuación...

Aproximación de la 1era Derivada con 4 puntos

Dado los puntos:

$(x_0 - 2h; f(x_0 - 2h)), (x_0 - h; f(x_0 - h)), (x_0 + h; f(x_0 + h)), (x_0 + 2h; f(x_0 + 2h))$

$$f'(x) = \frac{f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h))}{12h}$$

```
format long
x0=2;
h=0.01;
Der1_4p=(f(x0-2*h)-8*f(x0-h)+8*f(x0+h)-f(x0+2*h))/(12*h)
error=abs(Der1_4p-Der01_value)
```

2 PARTE PRÁCTICA

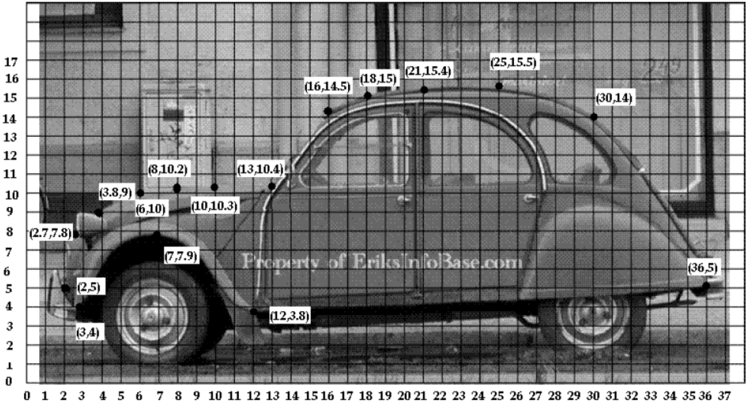
Aplicación de Spline

Construyamos mediante splines cúbicas el contorno del vehiculo de la fotografía:

Continuación...

Realice lo siguiente:

1. Primero, se realiza la toma de datos usando una malla cuadriculada sobre la fotografía:



Continuación...

2. Luego, los datos se tabulan. Los datos del contorno superior son:

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ x_k & 2 & 2.7 & 3.8 & 6 & 8 & 10 & 13 & 16 & 18 & 21 & 25 & 30 & 36 \\ y_k & 5 & 7.8 & 9 & 10 & 10.2 & 10.3 & 10.4 & 14.5 & 15 & 15.4 & 15.5 & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Finalmente, los datos del contorno inferior son:

$$\begin{bmatrix} x_k & 2 & 3 & 7 & 12 & 36 \\ y_k & 5 & 4 & 7.9 & 3.8 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicación Diferenciación Numérica

Dada la función $f(x, y) = e^x sen(y)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2;3)$ y también $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2;3)$, considerando un tamaño de paso $h = 0.01$. Compare sus resultados con el valor exacto.

Gracias por su atención