Matemáticas III

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Semana 02

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Índice

Objetivo

Aplicar el método de eliminación gaussiana con pivoteo en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (S.E.L).

1 ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Logros de Aprendizaje

- Aplica el método de eliminación gaussiana con pivoteo en la resolución de un S.E.L

Método de Eliminación Gaussiana

El método consiste de dos etapas:

- **Eliminación hacia adelante**: El sistema es reducido a una forma triángular superior. Se usa una secuencia de operaciones elementales.
- **Sustitución Regresiva**: Resuelve el sistema empezando de la última variable.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ 0 & 0 & a_{33}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix}$$

Operaciones Elementales

Operaciones Elementales	Notación
Intercambio de filas	$f_i \longleftrightarrow f_j$
Multiplicación de fila por una constante	$f_i \to \lambda f_i \quad \lambda \neq 0$
Adicionar múltiplo de una fila a otra	$f_i \to f_i + \lambda f_j$

Ejemplo

Dada la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

realice todas las operaciones elementales

Pivoteo

Definición

Se utiliza eliminación gaussiana con pivoteo cuando:

- El ordenador utiliza la aritmética de precisión finita.
- Un pequeño error se introduce en cada operación aritmética, se propaga de error
- Cuando el elemento de pivote es muy pequeño, los multiplicadores serán grandes.
- Adición de números de magnitud ampliamente differentes puede conducir a la pérdida de significancia.
- Para reducir el error, intercambios de filas se hacen para maximizar la magnitud del elemento pivotal.

Eliminación Gaussiana con Pivoteo

Elemento Pivotal

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}^{(1)}} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_{2,1} &= a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \\ m_{3,1} &= a_{31}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \\ &\vdots \\ m_{n,1} &= a_{n1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

Caso: Sin Pivoteo

Aritmética de 4 dígitos $\begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 24.14 & -1.210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.414 \\ 22.93 \end{bmatrix}$

$$m_{21} = \frac{24.14}{1.133} = 21.31 \qquad \begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 0.000 & -113.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.414 \\ -113.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9956 \\ 1.001 \end{bmatrix}$$

Pérdida de significancia

Caso: Con Pivoteo

$$\begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 \\ 1.133 & 5.281 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.93 \\ 6.414 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{1.133}{24.14} = 0.04693 \quad \begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 \\ 0.000 & 5.338 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.93 \\ 5.338 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Pivoteo Parcial

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1i}^{(1)} & \cdots & a_{1j}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2i}^{(2)} & \cdots & a_{2j}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3i}^{(3)} & \cdots & a_{3j}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{(i)} & \cdots & a_{ij}^{(i)} & \cdots & a_{in}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ji}^{(i)} & \cdots & a_{jj}^{(i)} & \cdots & a_{jn}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ni}^{(i)} & \cdots & a_{nj}^{(i)} & \cdots & a_{nn}^{(i)}
\end{bmatrix}
$$

Intercambiar las filas

Más grande en magnitud

Ejemplo

En la etapa k, escoger para pivote el elemento de mayor módulo entre a_{ik}, i=k,k+1,...,n;

$$\textit{Para } n=4,\ k=2, \textit{ tenemos } \max_{i\geq 2}|a_{i2}|=3$$

$$\Rightarrow pivote = a_{32} = -3$$

$$A^{(1)}\,|\,b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

$$A^{(1)}\,|\,b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Ejemplo

Use la eliminación de Gauss con pivoteo para resolver el sistema de ecuaciones

$8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2$

$10x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$

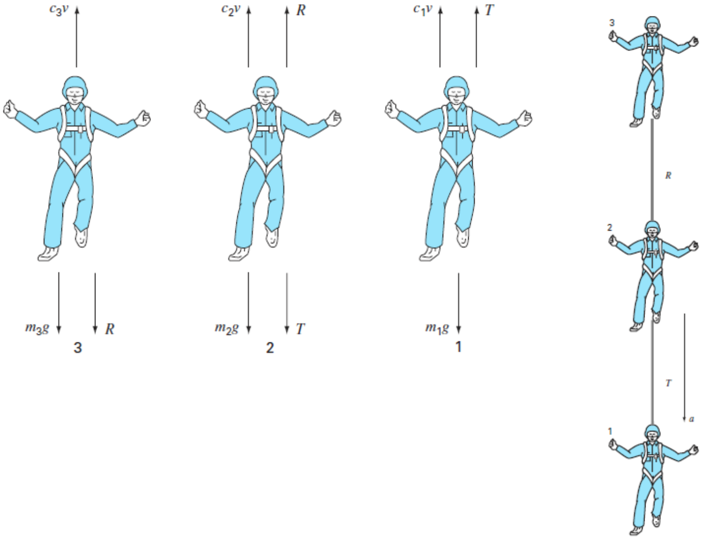
$12x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$

Actividad 1

Paracaidistas

Suponga que un equipo de tres paracaidista está unido por una cuerda ligera mientras va en caída libre a una velocidad de $5m/s$. Calcule la tensión en cada sección de la cuerda y la aceleración del equipo utilizando eliminación gaussiana con pivoteo, dado los siguientes datos:

Paracaidista	Masa, kg	Coeficiente de arrastre, kg/s
1	70	10
2	60	14
3	40	17



c_3v
c_2v
R
c_1v
T
m_3g
R
3
m_2g
T
2
m_1g
1
3
R
2
T
a
1

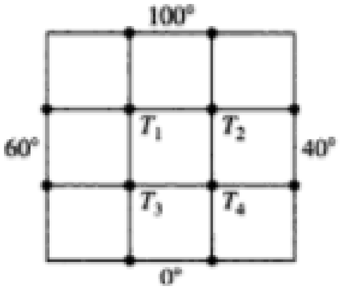
Actividad 2

Un modelo sencillo para estimar la distribución de temperatura en una placa cuadrada da lugar a un sistema de ecuaciones lineales. Para construir el sistema lineal adecuado, utilizamos la información siguiente. La placa cuadrada está perfectamente aislada por arriba y por abajo, por lo que el único flujo de calor es a través de la placa misma. Cada lado se mantiene a una temperatura constante, pero ésta puede ser diferente en cada lado. Para aproximar la temperatura en un punto interior de la placa, utilizamos la regla promedio de las temperaturas de sus cuatro puntos circunvecinos, al oeste, al norte, al este y al sur.

Continuación...

Distribución de Temperaturas

Aproximar las temperaturas T_i, $i = 1, 2, 3, 4$ en los cuatro puntos interiores igualmente espaciados en la placa, los mismos que se muestra en la figura. Utiliza eliminación gaussiana con pivoteo.



Conclusions

Gracias por su atención