CONCEPTUAL

Responda Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

1. **[2 ptos]** Si $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. FALSO

2. **[2 ptos]** El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 = k \end{cases}$$

no tiene solución si $\frac{k}{2} \neq 3$.

$\operatorname{Ker}(T):$

$\rightarrow T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array} \rightarrow$

$x = 0$

$\#$ de variables libres $= \#$ de vari $- \#$ filas No Nulas

$= 2 - 1$

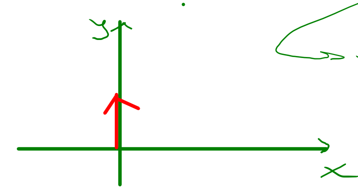
$= 1 \rightarrow \operatorname{Dim}(\operatorname{Ker}(T))$

$\operatorname{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

$= \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$x + 0 = 0$

$0 + 0 \cdot y = 0$



2. **[2 ptos]** El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 = k \end{cases}$$

(V)

Rang (A) ≠ Rang (Aa)

no tiene solución si $\frac{k}{2} \neq 3$.

$$Aa = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & k-6 \end{array}\right)$$

Rang (A) = 1

Rang (Aa) = 2 siempre que $k - 6 \neq 0$

$k \neq 6$

* Infinitas soluciones si $k = 6$

V ó F

Rang (A) = 1

Rang (Aa) = 1

de variables = 2

(V)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$ → infinitas soluciones

→ no tenga solución

PROCEDIMENTAL:

$T(0) = 0$

3. Considere el número real a y la tranformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + ay + 2z \\ 6x + 2y + 4z \end{bmatrix}$$

$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 0$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$2x - y = 0$

a) **[1.5 ptos]** Sabiendo que el núcleo de la transformación T es el plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación general es $\mathcal{P} : \frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 0$, halle el valor de a.
Sugerencia: tome cualquier punto del plano $\mathcal{P}$

b) **[2.5 ptos]** Si $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es otra transformación lineal cuya matriz asociada es $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$. Halle la imagen de S

Solución:

Para hallar el Ker(T)

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + ay + 2z \\ 6x + 2y + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & a & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$3x + ay + 2z = 0$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 0$

$3x + y + 2z = 0$

$\boxed{a = 1}$

b) **[2.5 ptos]** Si $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es otra transformación lineal cuya matriz asociada es $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$. Halle la imagen de S

Solución:

NO

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Me interesa que el sistema sea Compatible

$$A_a = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & v_1 \\ -3 & -9 & 6 & v_2 \end{array}\right)$$

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\operatorname{Rang}(T) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{R}^m \; T(u) = v \}$

$$\xrightarrow{f_2 + 3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & v_2 + 3v_1 \end{array}\right)$$

$v_2 + 3v_1 = 0$

de variables libres $= 1 =$ # de variables $-$ # de filas no nulas $= 2 - 1$

$v_1 = t$

$v_2 = -3t$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -3t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$$

4. **[2 ptos]** Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & n \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 3n-1 \end{bmatrix}$ la cual depende del parámetro n, halle la factorización LU de A forma de CROUT, en términos de n. Indique las operaciones elementales que realiza y paso a paso su procedimiento.

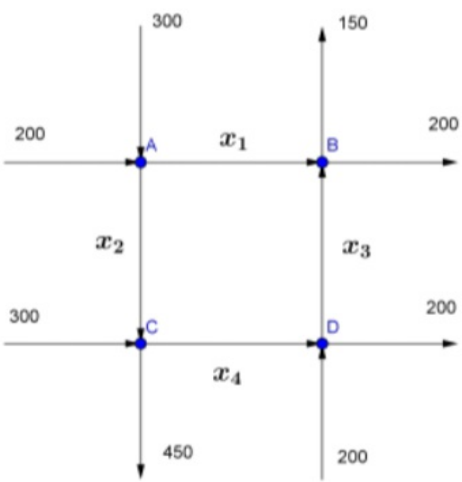
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & n \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 3n-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_3 - nC_1]{C_2 - 2C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 - (-1)C_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{L}$$

$$U = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & n \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

X_i : Cantidad de Vehiculos

$i = 1, 2, 3, 4$

5. **Flujo de redes** [10 puntos] Una red consiste en un conjunto de puntos llamados nodos, con líneas o arcos que los conectan denominadas ramas. La dirección del flujo se indica en cada rama y la cantidad (o tasa) de flujo se denota por medio de una variable. El supuesto básico estándar en una red de flujos es que el **flujo que entra a la red es el mismo que sale de la red, y que el flujo entrante a cada nodo es igual al flujo saliente de dicho nodo**. Por ejemplo, la red mostrada en la figura representa al flujo de tránsito en cierta ciudad. Se va a realizar una reparación en las calles y se quiere conocer el flujo en alguna de ellas para tomar decisiones en cuanto a su redireccionamiento. En la red de la figura se indica el flujo de tráfico que entra o sale de cada calle, en cantidad de vehículos por hora, considerando el tráfico promedio durante las horas pico. Identificamos los nodos: A, B, C y D, y los flujos a conocer: x_1, x_2, x_3 y x_4. Para cada nodo se debe verificar lo siguiente (flujo entrante, igual al flujo saliente):



a) [3 ptos] **Formule un sistema** de 4 ecuaciones con 4 incógnitas x_1, x_2, x_3 y x_4 en forma algebraica y matricial cuya solución permita hallar los flujos desconocidos.

Nodo A:

$x_1 + x_2 = 500$

Nodo B:

$x_1 + x_3 = 350$

Nodo C

$300 + x_2 = x_4 + 450$

Nodo D

$x_4 + 200 = x_3 + 200$

Forma Algebraica

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500 \\ x_1 \quad + x_3 = 350 \\ +x_2 \quad - x_4 = 150 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Forma Matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forma Matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) **[2 ptos]** Si M es la matriz de coeficientes del sistema planteado en el item anterior y se conoce $det(A) = 0$, utilice el valor dado para el determinante de la matriz de coeficientes para **resolver el sistema (en caso sea posible). Interprete** la solución obtenida de acuerdo al contexto presentado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -150 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4 - f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_4 = t$

$x_3 = t$

$x_2 = t + 150$

$x_1 = 350 - t$

$x_1 + x_2 = 500$

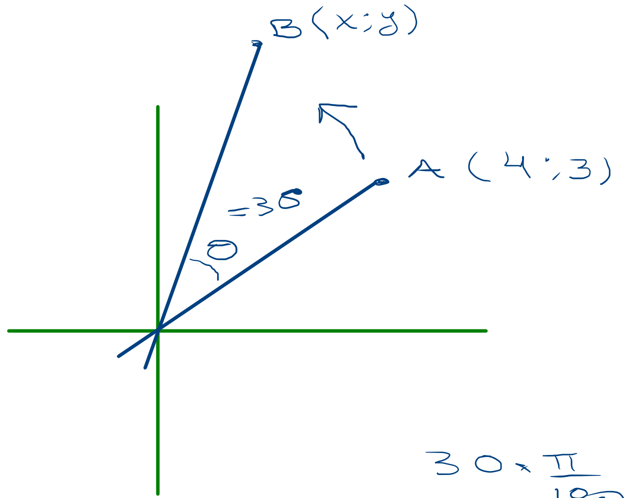
$-x_2 + x_3 = -150$

$x_3 - x_4 = 0$

\# de Variables libres = \# de Variables − \# filas No nulas

= 4 − 3 = 1

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$30 \times \frac{\pi}{180}$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen} & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$