Matemáticas III

Integración Numérica

Semana 12

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brigida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

Temas

Objetivos

Aplicar integración numérica para aproximar integrales definidas.

$¿\int_a^b f(x)dx?$

Ejemplo:

① $\int_2^5 (x^3-5x+4)dx = \frac{x^4}{4}-\frac{5x^2}{2}+4x \Big|_{x=2}^{x=5}$

② $\int_{-1}^3 x e^{-x} dx \Rightarrow$ integración partes.

③ $\int_0^1 e^{x^2} dx \rightarrow$ No se puede resolver mediante las herramientas de mate 1

④ $\int_2^7 f(x)dx$

x	2	3	5	6	7
$f(x)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$

⑤ $\int_{-1}^{50} x^{\ln x} \operatorname{sen}(e^{2x})\,dx$

1 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Logros

1. Aplica el método de Simpson 1/3 en la aproximación de integrales.
2. Calcula el error estimado (cota del error) .

Reglas Simples o Compuestas (Multiples)

- Regla del punto Medio. (o rectangulo)
- Regla del trapecio.
- Regla de Simpson.

Logros

1. Aplica el método de Simpson 1/3 en la aproximación de integrales.
2. Calcula el error estimado (cota del error) .

Reglas Simples o Compuestas (Multiples)

- Regla del punto Medio. (o rectangulo)
- Regla del trapecio.
- Regla de Simpson.

Motivación

Existen integrales que pueden ser hallados analíticamente haciendo uso del segundo teorema fundamental del cálculo, sin embargo no todas las funciones poseen antiderivada. En general

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(b) \qquad \text{donde} \qquad F'(x) = f(x)$$

Calcule (si es posible)

- $\displaystyle\int_0^2 x^2 dx$
- $\displaystyle\int_0^2 e^{\sqrt{x}} dx$

y comente sobre la necesidad de utilizar un método numérico

Introducción

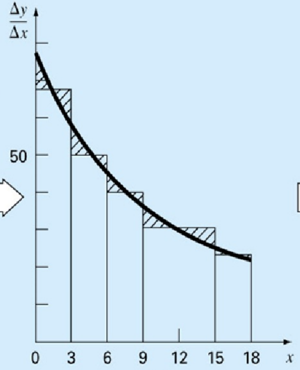
La función que va a diferenciarse o integrarse estará, usualmente, en una de las siguientes tres formas:

- Una función continua simple como un polinomio, una función exponencial o una función trigonométrica.
- Una función continua complicada que es difícil o imposible de diferenciar o integrar.
- Una función tabulada donde los valores de x y $f(x)$ son dados en un conjunto discreto de puntos, lo cual es el caso cuando se tienen datos experimentales o de campo.

Figuras

x	y	$\Delta y/\Delta x$
0	0	
		66.7
3	200	
		50
6	350	
		40
9	470	
		30
15	650	
		23.3
18	720	

(a)



(b)

x	dy/dx
0	76.50
3	57.50
6	45.00
9	36.25
15	25.00
18	21.50

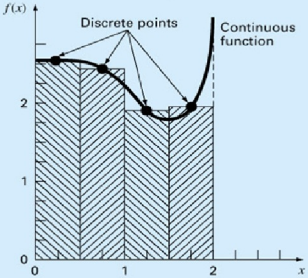
(c)

(a) $$\int_0^2 \frac{2 + \cos(1 + x^{3/2})}{\sqrt{1 + 0.5 \sin x}} e^{0.5x} \, dx$$

(b)

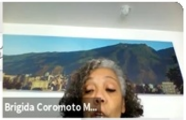
x	$f(x)$
0.25	2.599
0.75	2.414
1.25	1.945
1.75	1.993

(c)



M3_Teoria_Sesion_12_2021_2.pdf

Archivo | C:/Users/Usuario/Desktop/Brigida/UTEC/Matemática%20III/2021-II/Semana%2012/M3_Teoria_Sesion_12_2021_2.pdf



Formulación de contenidos

Fórmula de Integración de Newton Cotes Son los tipos de integración más comunes.

Se basan en la estrategias de reemplazar una función complicada ó datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_n(x)dx$$

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

$$I = \int_0^5 e^{\sqrt{5x}} dx$$

Halle un fórmula de Newton-Cotes de 5 puntos para aproximar I

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x,f)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \underbrace{\int_a^b E_n(x,f)dx}_{\text{Error}}$$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	1.25	2.50	3.75	5

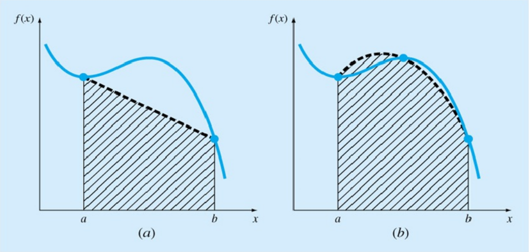
$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$P_4(x) = f(0) + f[0,1.25](x-0) + f[0;1.25;2.50](x-0)(x-1.25) + f[0,1.25;2.50;3.75](x-0)(x-1.25)(x-2.50) + f[0;1.25;2.50;3.75;5](x-0)(x-1.25)(x-2.50)(x-3.75)$$

UTEC

Ejemplos

En la figura (a) se utiliza un polinomio de primer grado(una recta) como una aproximación. En la figura (b), se emplea una parábola con el mismo propósito.



Formalización de contenidos

Otra forma de obtener una estimación más exacta de una integral consiste en usar polinomios de grado superior para unir los puntos.

Regla de Simpson 1/3

Resulta cuando el polinomio de interpolación de segundo grado $P_2(x)$ se integra.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx$$

Se consideran los puntos de interpolación $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ y $(b, f(b))$ donde $c = \frac{a+b}{2}$ para construir el polinomio interpolante de segundo grado.

.

.

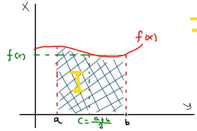
Obtención y estimación del error de la regla de Simpson 1/3

Usando la interpolación de Newton:

$$I = \underbrace{\frac{h}{3}[f(a) + 4f(c) + f(b)]}_{\text{Regla de Simpson 1/3}} - \underbrace{\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)h^5}_{\text{Error de truncamiento}}$$

Donde:
$h = \frac{b-a}{2}$ es el tamaño de paso

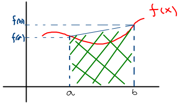
1



$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(c)(b-a) = R_s$$

2



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{[f(a)+f(b)](b-a)}{2} = T_s$$

3

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{3}R_s + \frac{1}{3}T_s = S_s$$

$$\frac{2}{3}f(c)(b-a) + \frac{1}{3}\frac{[f(b)+f(b)]}{2}(b-a)$$

formula de simpson simple(Ss)

$$\frac{4f(c)(b-a) + [f(b)+f(b)](b-a)}{6} = \frac{(b-a)[f(a)+4f(c)+f(b)]}{6}$$

Obtención y estimación del error de la regla de Simpson 1/3

$I = \frac{[f(a)+f(b)]}{2}(b-a) - \frac{1}{12} f''(\xi) h^2$

si $h<1$ ojo

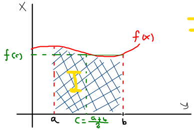
$I = f(c)(b-a) + \frac{1}{24} f''(\xi) h^2$

Usando la interpolación de Newton:

$$I = \underbrace{\frac{h}{3}[f(a) + 4f(c) + f(b)]}_{\text{Regla de Simpson 1/3}} - \underbrace{\frac{1}{90} f^{(4)}(\xi) h^5}_{\text{Error de truncamiento}}, \quad \xi \in (a,b)$$

Donde:
$h = \frac{b-a}{2}$ es el tamaño de paso

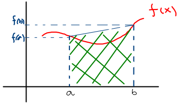
1



$I = \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(c)(b-a) = R_s$

2



$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{[f(a)+f(b)](b-a)}{2} = T_s$

3

$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{3} R_s + \frac{1}{3} T_s = S_s$

$\frac{2}{3} f(c)(b-a) + \frac{1}{3} \frac{[f(b)+f(b)]}{2}(b-a)$

formula de simpson simple(Ss)

$\frac{4f(c)(b-a) + [f(b)+f(b)](b-a)}{6} = \frac{(b-a)[f(a)+4f(c)+f(b)]}{6}$

Ejemplo

Aplique la regla de Simpson 1/3 para aproximar

$$\int_1^2 \ln(x)dx$$

y encuentre el error estimado(cota del error) para la aproximación.

Solución

$$\int_1^2 \ln(x)dx \approx \frac{2-1}{6}\left(\ln(1) + 4\ln(\frac{3}{2}) + \ln(2)\right) \approx 0.385834602$$

Sea:

función decreciente

$$f(x) = \ln(x), \;\; f^{(iv)}(x) = 6\left(\frac{-1}{x^4}\right) \rightarrow \text{máx } f^{iv}(x), x=1$$

y el error de la regla de Simpson se puede acotar en el intervalo [1,2] como sigue

$$\left| -\frac{h^5}{90} \underbrace{f^{(iv)}(x)}_{\text{máximo}} \right| \leq 6\frac{(0.5)^5}{90} \approx 0.002083333$$

Continuación

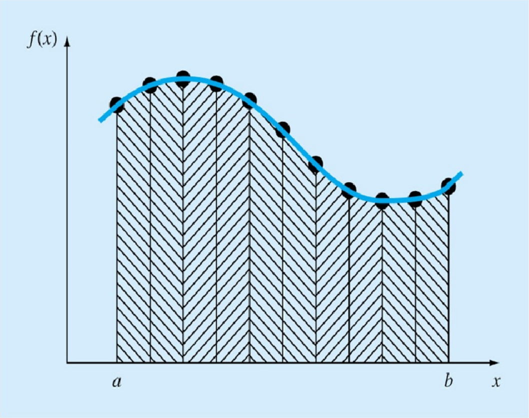
Finalmente,

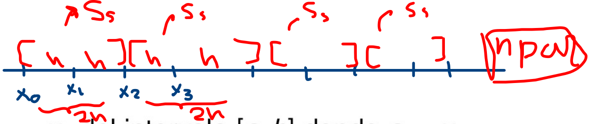
$$\int_1^2 \ln(x) = 0.3858 \pm 0.002083$$

Note que el valor exacto de la integral está dentro de este intervalo.

La regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple

La regla de Simpson 1/3 se mejora al dividir el intervalo de integración en varios segmentos de un mismo tamaño.





Continuación

Consideremos la partición regular $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ del intervalo $[a, b]$ donde $a = x_0$, $b = x_n$, $h = \frac{b-a}{n}$ y n PAR

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \overbrace{\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx}^{S_s} + \overbrace{\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx}^{S_s} + \ldots + \overbrace{\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx}^{S_s}$$

Al sustituir la regla de Simpson 1/3 en cada integral se obtiene

$$I \approx 2h\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6}$$

$$+ \ldots + 2h\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

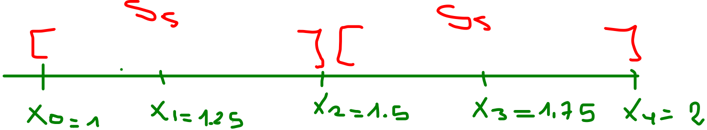
Continuación...

$$I \approx (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n}$$

Un error estimado en la regla de Simpson de aplicación múltiple (Regla de Simpson Compuesto) se obtiene sumando los errores individuales de los segmentos

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \qquad \forall \xi \in \langle x_0, x_n \rangle$$

Ejemplo



Aplique la regla de Simpson 1/3 compuesto (Considere 4 subintervalos) para aproximar

$$h = \frac{2-1}{4} = 0.25$$

$$\int_1^2 \ln(x)dx$$

y encuentre el error estimado(cota del error) para la aproximación.

jemplo

$$\int_1^2 \ln x\,dx \approx \frac{[f(1)+f(2) + 4[f(x_1)+f(x_2)] + 2f(x_2)]\,2h}{6}$$

Solución

Actividad 1

Dada la siguiente tabla

$v\,(m/s)$	0	1.0	1.8	2.4	3.5	4.4	5.1	6.0
$P\,(kW)$	0	3.8	15.6	22.2	34.7	43.9	45.3	48.1

De la información de la tabla se observa que la Potencia (P) suministrada a las ruedas motrices de un automóvil está en función de la velocidad v. Si la masa del automóvil es $m = 2000$ kg. La definición de Potencia $P = F \times v$

$$t = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{P}$$

Continuación...

- Plantee la integral que deberá utilizar para calcular el tiempo que se tardará el automóvil para acelerar de una velocidad v_0 hasta v_1
- Aproxime el tiempo t que se tardará el automovil para acelerar de 1 m/s a 6 m/s. Trabaje con cuatro lugares decimales. Utilice el método de Simpson Simple $1/3$.
- Si se tiene además la siguiente información $P(2.25) = 15.4$ y $P(4.75) = 42.6$. Aproxime el tiempo t que se tardará el automovil para acelerar de 1 m/s a 6 m/s. Trabaje con cuatro lugares decimales. Utilice el método de Simpson Compuesto $1/3$. Considere 5 puntos.

Continuación...

- Si consideramos la función potencia como una función constante $P = 20kW$, se obtuvo el tiempo igual a 1750 s. Determinar el error que se comete al utilizar el método de Simpson Simple 1/3 al aproximar el tiempo t que se tardará el automovil para acelerar de 1 m/s a 6 m/s. Trabaje con cuatro lugares decimales.
- Si se considera la función potencia $P(v) = v^2$. Determinar el error estimado (cota de error) que se comete al utilizar el método de Simpson Simple 1/3 al aproximar el tiempo t que se tardará el automovil para acelerar de 1 m/s a 10 m/s. Trabaje con cuatro lugares decimales.

Conclusiones

Gracias por su atención