Matemáticas III

Interpolación Polinomial

Semana 10

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Brígida Molina Carabaño
(bmolina@utec.edu.pe)
Rosulo Perez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Asistente: Victor Anhuaman
(vanhuaman@utec.edu.pe)

UTEC UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Temas

1 Interpolación Polinomial

2 Error de Interpolación

Objetivos

- Aproximar funciones utilizando métodos de interpolación polinomial.
- Acotar el error de interpolación.

1 INTERPOLACIÓN POLINOMIAL

Logros

1. Aproxima funciones complicadas mediante polinomios de interpolación, dado un conjunto de datos.
2. Halla una cota del error al aproximar una función por el polinomio de interpolación.

Los tipos de datos en la ciencia

- Datos discretos (Tablas de datos)
  - Experimentos
  - Observaciones
  - Cálculos
- Datos continuos
  - Funciones analíticas
  - Soluciones analíticas

De lo continuo a lo discreto

De lo discreto a lo continuo ?

?

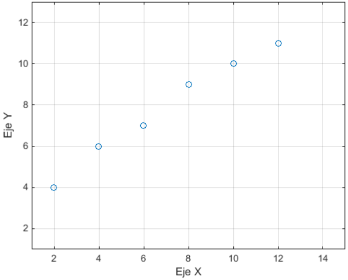
¿Qué es lo que queremos de conjuntos de datos discretos?

Dado el conjunto de datos discretos

$$\{(x_i,\, f(x_i))\,, \qquad i = 0, \ldots, N\}$$

A menudo es necesario conocer los valores de la función en cualquier punto arbitrario x.

¿Podemos generar valores para una x entre x_0 y x_n de una tabla de datos?



Interpolación

- Dado un conjunto de datos conocidos de alguna función $f(x)$

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_N, f(x_N))$$

buscamos una función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaga

$$P(x_i) = f(x_i), \quad \text{para todo} \;\; i = 0, \ldots, N$$

- P es una función interpolante o interpolador.
- El interpolador P puede ser
  - Polinomio
  - Spline

Interpolación Polinomial

Teorema

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_N$ son números reales distintos y f es una función cuyos valores están determinados en estos números por $y_0, y_1, \ldots, y_N$, entonces existe un único polinomio P_N de grado a lo sumo N tal que $P_N(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N$.

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{N-1} & x_0^N \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{N-1} & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_N & \ldots & x_N^{N-1} & x_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Ejemplo

Determine el polinomio de grado 2 que interpola los siguientes puntos: $(-2,-27)$, $(0,-1)$, $(1,0)$.

Solución:

Interpolación de Lagrange

Polinomios básicos de Lagrange

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_N)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_N)}$$

Propiedades

- L_k es un polinomio de grado N
- $L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = j \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j \end{cases}$

Polinomio interpolante de Lagrange

$$P_N(x) = f(x_0)L_0 + f(x_1)L_1 + \ldots + f(x_N)L_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)L_k(x)$$

Ejemplo

Ejemplo

Dado los siguientes puntos

x	0	0.8	2
y	1	0.4	0.2

hallar los polinomios básicos de Lagrange y el polinomio interpolante.

Solución:

Diferencias Divididas

Definición

La **diferencia dividida de primer orden** de f con respecto a x_i, x_{i+1} es denotado por $f[x_i, x_{i+1}]$ y es definido:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Definición

La **diferencia dividida de segundo orden** de f con respecto a x_i, x_{i+1}, x_{i+2} es denotado por $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ y es definido:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

Diferencias Divididas

Definición

Si se tienen las $(k-1)$-ésimas diferencias divididas $f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]$ y $f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]$ entonces la **diferencia dividida de orden** k de f con respecto a $x_i,\ldots,x_{i+k}$ es denotada por $f[x_i,\ldots,x_{i+k}]$ y es definida:

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}] - f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Tabla de Diferencias Divididas

Las diferencias divididas son calculadas en una tabla:

x_i	$f(x_i)$	$[\,,\,]$	$[\,,\,,\,]$	$[\,,\,,\,,\,]$
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

Ejemplo

Ejemplo

Calcule las diferencias divididas con la siguiente data:

x	$f(x)$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,]$
0	3			
1	4			
2	7			
4	19			

Interpolación con Diferencias Divididas

Si queremos escribir el polinomio interpolante de la forma:

$$P_N(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_N(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{N-1})$$

Se observa que:
$b_0 = f(x_0)$
$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$
Si continuamos calculando, obtendremos:

$$b_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \qquad \forall k = 0, 1, \ldots, N$$

Interpolación con Diferencias Divididas

Por lo tanto el polinomio interpolante de grado N se convierte:

$$P_N(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$\dots + f[x_0, \dots, x_N](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{N-1})$$

Esta fórmula es llamada Polinomio Interpolante de Newton utilizando diferencias divididas.

Ejemplo

Ejemplo

Dado los siguientes puntos

x	0	0.8	2
y	1	0.4	0.2

halle el polinomio interpolante de Newton.

Solución:

Error de Interpolación

- Si reemplazamos la función $f(x)$ con el polinomio $P_N(x)$, nos gustaría conocer cuál es el error que se está cometiendo.
- **Definición**: El error $E_N(x, f) = f(x) - P_N(x)$.
- El error varia de un punto a otro punto. En los puntos de interpolación el error es cero pero es diferente de cero en los otros puntos.
- Estaremos más interesados en el máximo de los $|E_N(x, f)|$ sobre el intervalo $[a, b]$. Este máximo es llamado **Cota del error**.

Error de Interpolación

Teorema

Supongamos que $x_0, x_1, \ldots, x_N$ son $N+1$ puntos distintos en el intervalo $[a, b]$ y $f(x)$ tiene $N+1$ derivadas continuas. Entonces, para cada x en $[a, b]$, un número $\xi(x)$ en $\langle a, b\rangle$ existe con

$$f(x) = P_N(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi(x))}{(N+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_N)$$

Donde $P_N(x)$ es el polinomio interpolante de Newton de grado N.

Error de Interpolación

Definición

El error es dado por la fórmula

$$E_N(x,f) = \frac{f^{(N+1)}(\xi(x))}{(N+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_N)$$

Nota:

- Si el intervalo $[a,b]$ no es dado, considere $[a,b]=[x_0,x_N]$
- Necesitamos la función $f(x)$ para calcular la **cota de error.**

Continuación...

Ejemplo

Para la función $f(x) = \cos(x)$, sea $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ $x_2 = 0.9$

- Halle el polinomio interpolante para aproximar $f(0.45)$.
- Encuentre el error absoluto en 0.45.
- Utilizando el teorema encuentre la **cota de error.**

Solución

- $P_2(0.45) = 0.898100747$
- Error Actual en $x = 0.45$:
  $\cos(45) - P_2(0.45) = 0.9004471024 - 0.898100747 \approx 0.0023$
- Cota de error
  $$E_2(x, f) = \frac{f'''(\xi(x))}{3!} x(x - 0.6)(x - 0.9)$$
  Queremos calcular $\max\limits_{x \in [0;0.9]} |E_2(x, f)|$
  Acotaremos el error en dos pasos:
  - Encontrar
    $$\max_{x \in [0;0.9]} |f'''(x)|$$
  - Encontrar
    $$\max_{x \in [0;0.9]} |x(x - 0.6)(x - 0.9)|$$

Solución

- Calculando

$$\max_{x\in[0;0.9]} |f'''(x)|$$

- Calculando las derivadas
  $f(x) = \cos(x)$
  $f'(x) = -\sin(x)$
  $f''(x) = -\cos(x)$
  $f'''(x) = \sin(x)$
- $|\sin(x)|$ es creciente en el intervalo $[0; 0.9]$. Luego

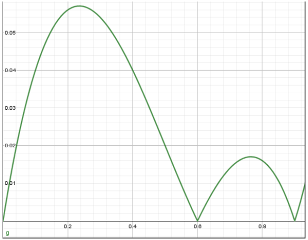
$$\max_{x\in[0;0.9]} |\sin(x)| \leq |\sin(0.9)|$$

Solución

- Calculando

$$\max_{x\in[0;0.9]} |x(x-0.6)(x-0.9)|$$

- $g(x) = x(x-0.6)(x-0.9)$
  $g'(x) = 3(x^2 - x + 0.18) = 0$
  $p_1 = 0.2354248689;$
  $p_2 = 0.7645751311$



$|g(x)| \leq |g(p_1)| = 0.05704;$ $\quad |g(p_2)| = 0.0170405184$

Solución

Colocamos junto las dos estimaciones

$$|E_2(x,f) = \frac{|\sin(\xi(x))|}{6}|x(x-0.6)(x-0.9)|$$

$$\leq \frac{|\sin(0.9)}{6} \times 0.05704 = 0.0074468$$

Estimación del error cuando $f(x)$ es desconocida: Regla del Término Siguiente

- Frecuentemente $f(x)$ no es conocida, y la enésima derivada de $f(x)$ es también desconocida..
- Consideremos que la N-ésima diferencia dividida es una estimación de la n-ésima derivada de f.

$$f[x_0, \ldots, x_N] = \frac{f^{(N)}(\xi(x))}{N!}$$

- Esto significa que el error es aproximado por el valor del siguiente termino a ser adicionado

$$E_N(x, f) = \frac{f^{(N+1)}(\xi(x))}{(N+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_N)$$

$$\approx f[x_0, \ldots, x_N, x_{N+1}](x - x_0)\ldots(x - x_N)$$

- $E_N(x, f) \approx$ el valor del siguiente término que debería ser adicionado a $P_N(x)$.

Ejemplo

Ejemplo

Para la función

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

- Construir la tabla de las diferencias divididas para los puntos $x_0 = 1.1;\ x_1 = 2;\ x_2 = 3.5;\ x_3 = 5;\ x_4 = 7.1$
- Encontrar el polinomio interpolante de Newton de grado 1 utilizando diferencias divididas para interpolar en $x = 1.75$.
- Use la regla del término siguiente para estimar el error de la interpolación para $f(1.75)$.

Solución

- La tabla de diferencias dividida es:

x	$f(x)$	$f[,]$	$f[,\ ,]$
$1,1$	0.6981	0.8593	-0.1755
2	1.4715	0.4381	
3.5	2.1287		

- $P_1(x) = 0.6981 + 0.8593(x - 1.1)$
- $P_2(x) = P_1(x) - 0.1755(x - 1,1)(x - 2)$
- De la regla del término siguiente obtenemos:

$$E_1(1.75; f) = -0.1755(1.75 - 1.1)(1.75 - 2) = 0.02852$$

Actividad 1

Un camión de arena en proceso de descarga, está sobre una balanza electrónica que registra el peso en cada instante de tiempo, generando la siguiente tabla:

Tiempo (s)	0	1	1.9	2.7
Peso (N)	20000	17530	15500	11534

Calcule lo siguiente, indicando claramente el procedimiento y sus resultados parciales.

Continuación...

1. Halle la Tabla de las Diferencias Divididas.
2. Determine el peso en el instante 0.5s utilizando un polinomio de tercer grado.
3. Halle las siguientes diferencias divididas
   $f[0, 1, 1.9]$; $f[0, 1.9, 1]$; $f[1.9, 0, 1]$
4. Halle el error al aproximar el peso en 0.5s utilizando un polinomio de segundo grado.
5. A la tabla inicial de Diferencias Divididas adicionar un nuevo punto $(1.5s; 16000N)$. Determine el peso para el instante 0.5s utilizando ahora un polinomio de cuarto grado.

Conclusiones

Gracias por su atención