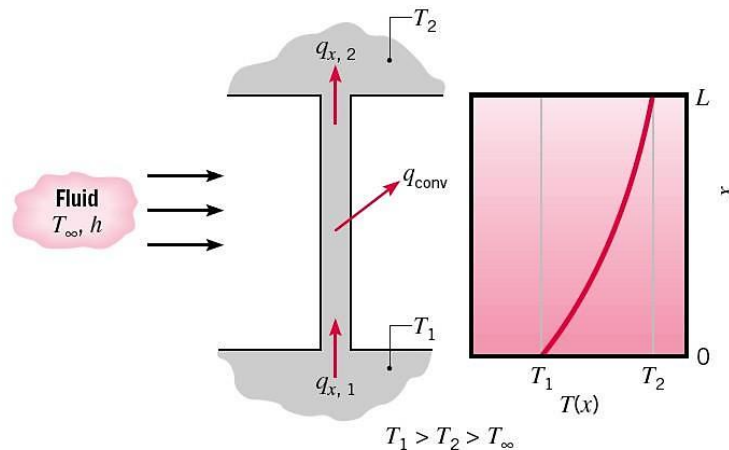


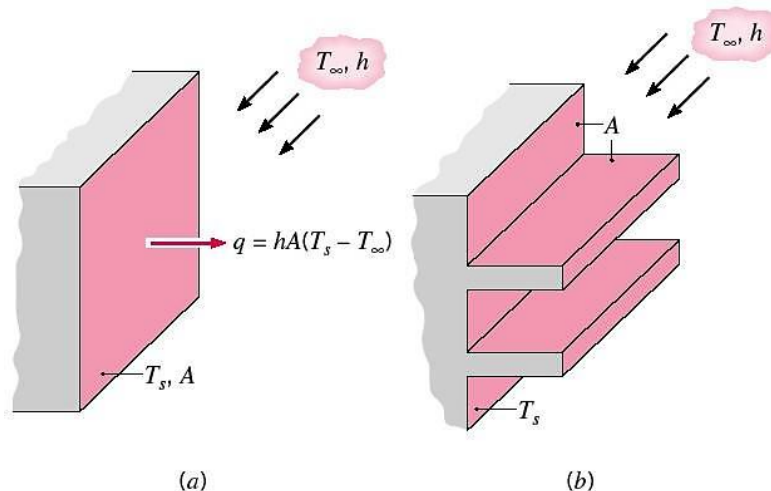
### 3.6 TRANSFERENCIA DE CALOR DESDE SUPERFICIES EXTENDIDAS

El término superficie extendida se usa comúnmente en referencia a un sólido que experimenta transferencia de energía por conducción dentro de sus fronteras, y transferencia de energía por convección y/o radiación entre sus fronteras y el medio que lo rodea.



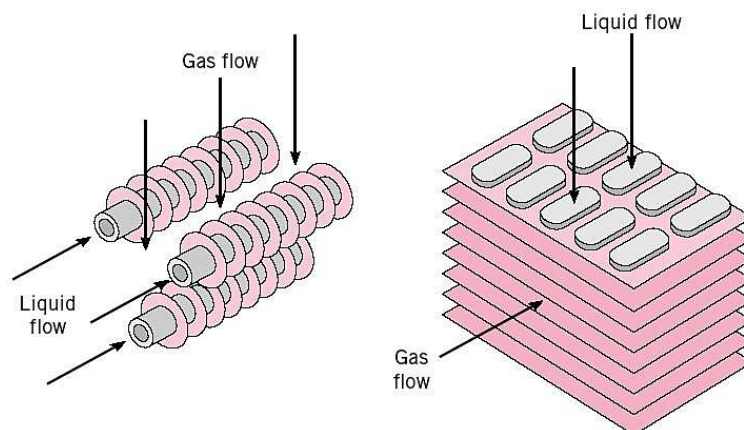
**Figura 3.11** Conducción y convección combinadas en un elemento estructural.

Las superficies extendidas, llamadas comúnmente aletas, se usan específicamente para mejorar la velocidad de transferencia de calor entre un sólido y el fluido adyacente.

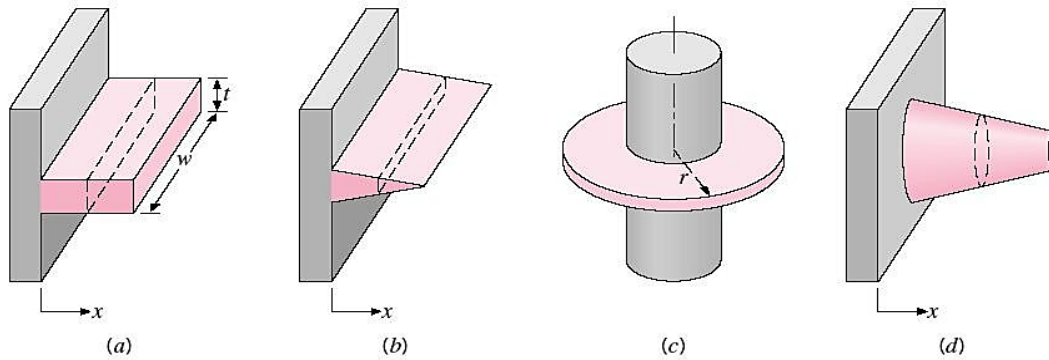


**Figura 3.12** Uso de aletas para mejorar la transferencia de calor desde una pared plana: (a) superficie lisa; (b) superficie aletada.

La velocidad de transferencia de calor se puede incrementar aumentando el área de la superficie a través de la cual ocurre la convección. Esto se consigue empleando aletas que se extienden, desde la pared, en el fluido que la rodea.



**Figura 3.13** Esquema de un intercambiador de calor de tubos aletados típico.

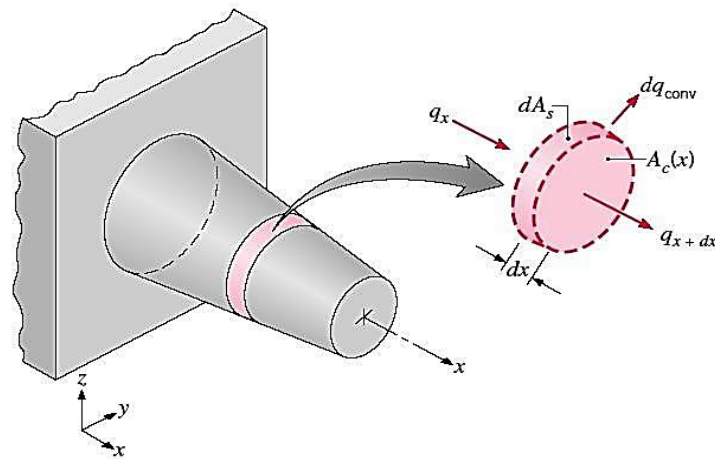


**Figura 3.14** Configuraciones de aletas: (a) aleta recta de sección transversal uniforme; (b) aleta recta de sección transversal no uniforme; (c) aleta anular; (d) aleta tipo pasador.

La selección de una configuración particular de aletas depende del espacio disponible, peso, fabricación y costo.

### 3.6.1 Un análisis general de la conducción

Para determinar la velocidad de transferencia de calor asociada con la aleta se debe determinar la distribución de temperatura en la aleta. Para ello se efectúa un balance de energía sobre un elemento diferencial apropiado.



**Figura 3.15** Balance de energía para una superficie extendida.

Hipótesis de simplificación:

- conducción unidimensional en la dirección  $x$
- condiciones de estado estacionario
- conductividad térmica constante
- efectos de radiación térmica despreciables
- no hay generación interna de calor
- coeficiente de convección uniforme sobre toda la superficie

Conservación de energía:

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv} \quad (3.56)$$

Ley de Fourier:

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx} \quad (3.57)$$

Serie de Taylor:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \quad (3.58)$$

$$q_{x+dx} = -kA_c \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left( A_c \frac{dT}{dx} \right) dx \quad (3.59)$$

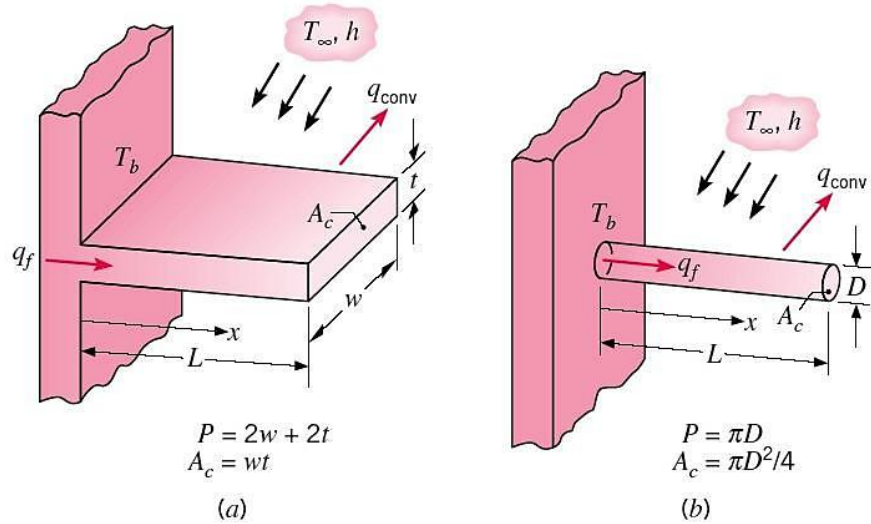
Ley de enfriamiento de Newton:

$$dq_{\text{conv}} = h dA_s (T - T_\infty) \quad (3.60)$$

Ecuación diferencial de la energía en la aleta:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left( \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left( \frac{1}{A_c} \frac{h dA_s}{k dx} \right) (T - T_\infty) = 0 \quad (3.61)$$

### 3.6.2 Aletas de sección transversal uniforme



**Figura 3.16 Aletas rectas de sección transversal uniforme:** (a) aleta rectangular; (b) aleta cilíndrica.

$A$  es el área de la sección transversal, constante,  $A_s = Px$  es el área de la superficie medida desde la base  $x=0$  hasta la coordenada  $x$  y  $P$  el perímetro de la aleta.

$$\begin{aligned} \frac{dA_c}{dx} &= 0 & \frac{dA_s}{dx} &= \frac{d(Px)}{dx} = P \\ \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c} (T - T_\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Temperatura en exceso:

$$\theta(x) \equiv T(x) - T_\infty \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(x)}{dx} &= \frac{d(T(x) - T_\infty)}{dx} = \frac{dT(x)}{dx} \\ \frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$m^2 \equiv \frac{hP}{kA_c} \quad (3.65)$$

Solución:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (3.66)$$

Condición de borde en la base  $x=0$ :

$$\theta(0) = T_b - T_\infty \equiv \theta_b \quad (3.67)$$

En el extremo de la aleta  $x=L$  se presentan cuatro casos:

### A) Transferencia de calor por convección desde el extremo de la aleta

Balance de energía:

$$h A_c [T(L) - T_\infty] = -k A_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L}$$

$$h \theta(L) = -k \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} \quad (3.68)$$

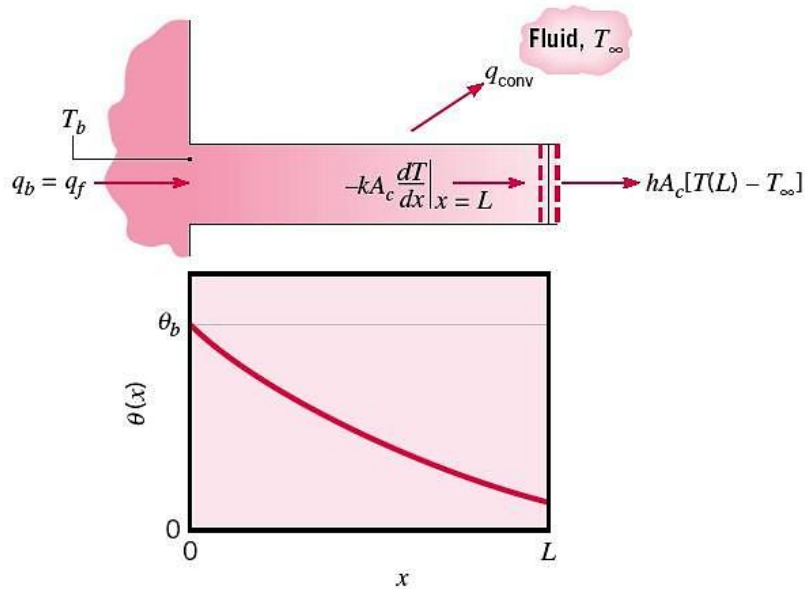


Figura 3.17 Conducción y convección en una aleta de sección transversal uniforme.

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (3.70)$$

Ley de Fourier en la base de la aleta:

$$q_f = q_b = -k A_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -k A_c \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} \quad (3.71)$$

Donde  $q_f$  es la velocidad de transferencia de calor total en la aleta, igual al de la base  $q_b$ .

$$q_f = \sqrt{h P k A_c} \theta_b \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (3.72)$$

Formulación alternativa:

$$q_f = \int_{A_f} h \theta(x) dA_s \quad (3.73)$$

### B) Pérdida de calor por convección en el extremo de la aleta es despreciable, adiabática

$$\frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (3.75)$$

$$q_f = \sqrt{h P k A_c} \theta_b \tanh(mL) \quad (3.76)$$

**C) Temperatura prescrita en el extremo  $\theta(L) = \theta_L$**

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL} \quad (3.77)$$

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \frac{\cosh mL - \theta_L/\theta_b}{\sinh mL} \quad (3.78)$$

**D) Aleta muy larga  $L \rightarrow \infty$ ,  $\theta_L \rightarrow 0$**

$$\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx} \quad (3.79)$$

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \quad (3.80)$$

**Tabla 3.4 Distribución de temperatura y pérdida de calor para aletas de sección transversal uniforme.**

Caso	Condición del extremo de la aleta $x=L$	Distribución de temperatura $\theta/\theta_b$	Transferencia de calor en la aleta $q_f$
A	Transferencia de calor por convección: $h\theta(L) = -k d\theta/dx _{x=L}$	$\frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (3.70)$	$M \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (3.72)$
B	Adiabática: $d\theta/dx _{x=L} = 0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (3.75)$	$M \tanh mL \quad (3.76)$
C	Temperatura establecida: $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL} \quad (3.77)$	$M \frac{\cosh mL - \theta_L/\theta_b}{\sinh mL} \quad (3.78)$
D	Aleta infinita ( $L \rightarrow \infty$ ) $\theta(L) = 0$	$e^{-mx} \quad (3.79)$	$M \quad (3.80)$
$\theta \equiv T(x) - T_\infty \quad \theta_b \equiv \theta(0) = T_b - T_\infty \quad m \equiv \sqrt{hP/kA_c} \quad M = \sqrt{hPkA_c} \theta_b$			

### 3.6.3 Desempeño de la aleta

La efectividad de la aleta representa la relación de la velocidad de transferencia de calor de la aleta a la velocidad de transferencia de calor que existiría sin la aleta:

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{hA_{c,b} \theta_b} \quad (3.81)$$

Si  $\varepsilon_f \geq 2$  se justifica el uso de la aleta.

Caso D de la Tabla 3.4:

$$q_f = M = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \quad (3.80)$$

$$\varepsilon_f = \left( \frac{kP}{hA_c} \right)^{1/2} \quad (3.82)$$

Resistencia de la aleta:

$$R_{t,f} = \frac{\theta_b}{q_f} \quad (3.83)$$

En la base de la aleta:

$$R_{t,b} = \frac{\theta_b}{hA_{c,b}\theta_b} = \frac{1}{hA_{c,b}} \quad (3.84)$$

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{hA_{c,b}\theta_b} = \frac{1}{hA_{c,b}} \frac{q_f}{\theta_b} = R_{t,b} \frac{1}{R_{t,f}} = \frac{R_{t,b}}{R_{t,f}} \quad (3.85)$$

Eficiencia de la aleta:

$$\eta_f \equiv \frac{q_f}{q_{\max}} = \frac{q_f}{hA_f\theta_b} \quad (3.86)$$

**Caso B** de la Tabla 3.4, extremo adiabático:

$$\eta_f = \frac{M \tanh mL}{hPL\theta_b} = \frac{\sqrt{hPkA_c}\theta_b}{hPL\theta_b} \tanh mL = \frac{\tanh mL}{mL} \quad (3.87)$$

**Caso A** de la Tabla 3.4, como la expresión de  $q_f$  es un poco complicada se puede aproximar usando la expresión **del caso B** con una longitud corregida  $L_c$ .

**Para aleta rectangular:**  $L_c = L + t/2$

**Para aleta tipo aguja:**  $L_c = L + D/4$

$$q_f = M \tanh mL_c \quad (3.88)$$

$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c} \quad (3.89)$$

Si la aleta rectangular es más ancha que alta  $w \gg t$ :

$$P = 2(w + t) \approx 2w$$

$$mL_c = \left( \frac{hP}{kA_c} \right)^{1/2} L_c = \left( \frac{h2w}{kwt} \right)^{1/2} L_c = \left( \frac{2h}{kt} \right)^{1/2} L_c$$

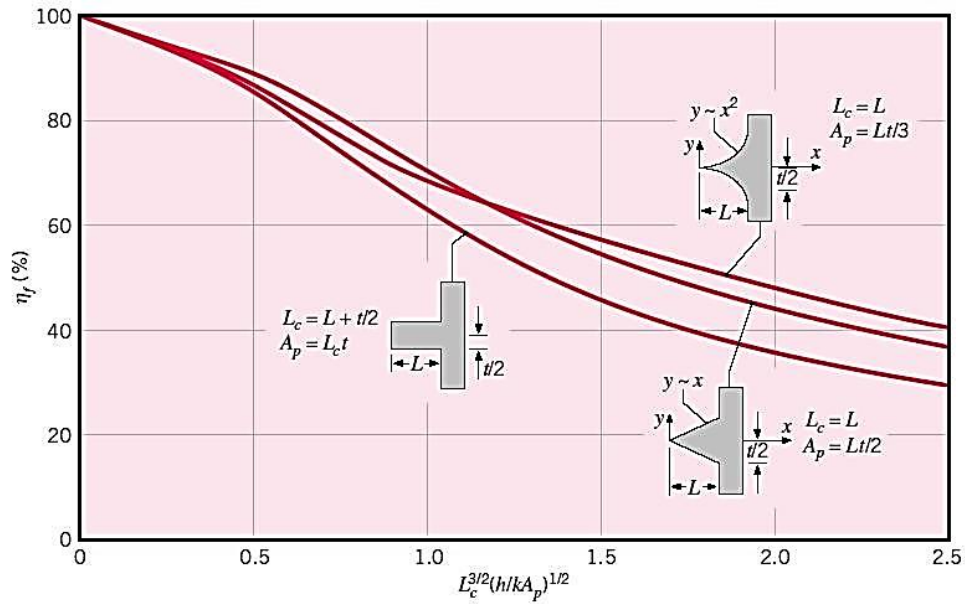
Área del perfil de aleta corregida:

$$A_p = Lt$$

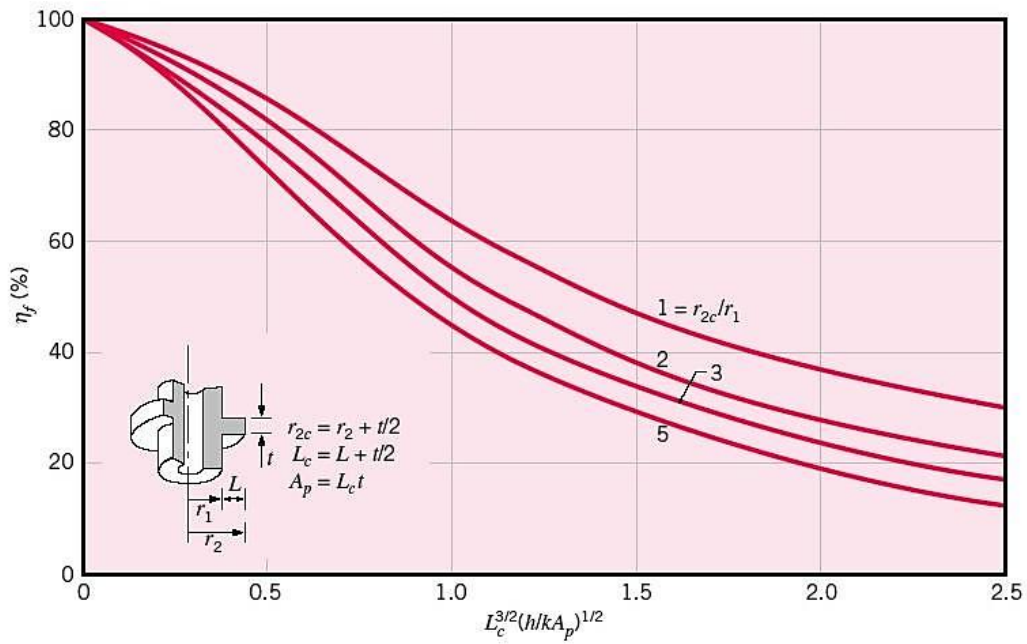
$$mL_c = \left( \frac{2h}{kt} \right)^{1/2} L_c \frac{L_c^{1/2}}{L_c^{1/2}} = \left( \frac{2h}{ktL_c} \right)^{1/2} L_c^{(1+1/2)} = \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} L_c^{3/2} \quad (3.90)$$

**Para aleta con convección en el extremo:**

$$\eta_f = f \left[ (h/kA_p)^{1/2}, L_c^{3/2} \right]$$



**Figura 3.18** Eficiencia de una aleta recta (perfil rectangular, triangular y parabólico).



**Figura 3.19** Eficiencia de una aleta anular de perfil rectangular.

### 3.6.4 Aletas de sección transversal no uniforme

Ecuación diferencial de la energía en la aleta:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left( \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left( \frac{1}{A_c} \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0 \quad (3.61)$$

Para aleta anular:

$$A_c = 2\pi r t \quad A_s = 2\pi (r - r_1) \quad x \rightarrow r$$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{2h}{kt} (T - T_\infty) = 0$$

$$m^2 \equiv 2h/kt \quad \theta \equiv T - T_\infty$$

$$\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - m^2 \theta = 0$$

$$\theta(r) = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

Donde  $I_0, K_0$  son las funciones de Bessel de orden cero modificadas, de primera y segunda clase.

Condiciones de borde en  $r_1$  y  $r_2$ :

En extremo adiabático:

$$\theta(r_1) = \theta_b \quad (d\theta/dr)_{r_2}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{I_0(mr)K_1(mr_2) + K_0(mr)I_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}$$

Donde  $I_1(x) = dI_0(x)/dx$  y  $K_1(x) = dK_0(x)/dx$  son las funciones de Bessel de primer orden modificadas, de primera y segunda clase.

**Velocidad de transferencia de calor en la aleta:**

$$q_f = -kA_{c,b} \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1} = -k(2\pi r_1 t) \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=r_1}$$

$$q_f = 2\pi k r_1 t \theta_b m \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}$$

$$\eta_f = \frac{q_f}{h 2\pi (r_2^2 - r_1^2) \theta_b} = \frac{2 r_1}{m(r_2^2 - r_1^2)} \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{K_0(mr_1)I_1(mr_2) + I_0(mr_1)K_1(mr_2)} \quad (3.91)$$

Para aplicarlo a una aleta con extremo convectivo activo, de la Figura 3.19:

$$r_{2c} = r_2 + t/2$$

**Resistencia térmica de la aleta:**

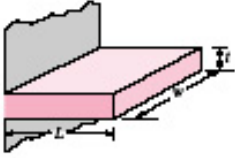

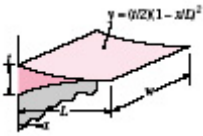
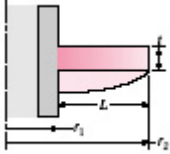
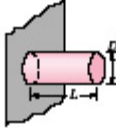
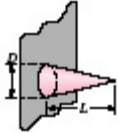
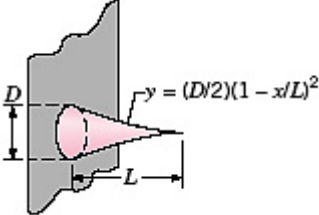
$$R_{t,f} = \frac{\theta_b}{q_f} \quad (3.83)$$

$$\eta_f \equiv \frac{q_f}{h A_f \theta_b} \quad (3.86)$$

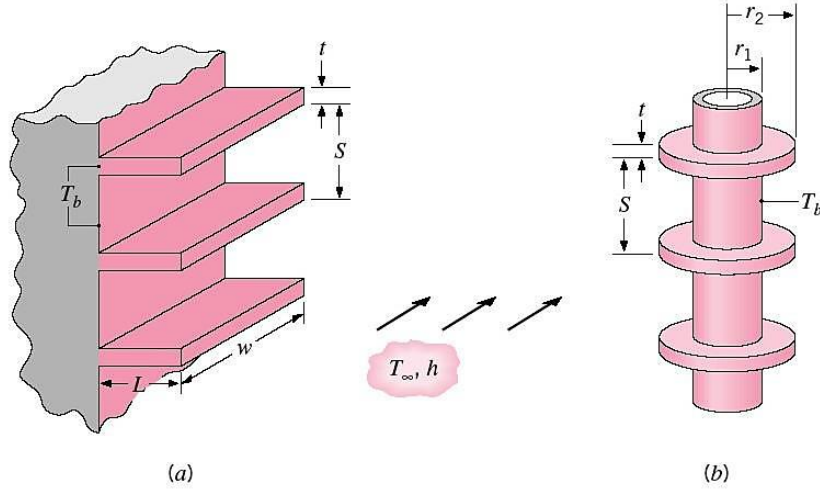
$$R_{t,f} = \frac{1}{h A_f \eta_f} \quad (3.92)$$



**Tabla 3.5 Eficiencia de aletas de formas comunes.**

<b>Aletas rectas</b>  <b>Rectangular <sup>a</sup></b>  $A_f = 2wL_c$ $L_c = L + t/2$		$\eta_f = \frac{\tanh m L_c}{m L_c}$	(3.89)
<b>Triangular <sup>a</sup></b>  $A_f = 2w[L^2 + (t/2)^2]^{1/2}$		$\eta_f = \frac{1}{m L} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$	(3.93)
<b>Parabólica <sup>a</sup></b>  $A_f = w[C_1 L + (L^2/t) \ln(t/L + C_1)]$  $C_1 = [1 + (t/L)^2]^{1/2}$		$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$	(3.94)
<b>Aleta circular</b>  Rectangular <sup>a</sup>  $A_f = 2\pi(r_2^2 - r_1^2)$  $r_2 = r_1 + (t/2)$		$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{K_0(mr_1)I_1(mr_{2c}) + I_0(mr_1)K_1(mr_{2c})}$  $C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_2^2 - r_1^2)}$	(3.91)
<b>Aletas tipo aguja</b>  Rectangular <sup>b</sup>  $A_f = \pi D L_c$  $L_c = L + (D/4)$		$\eta_f = \frac{\tanh m L_c}{m L_c}$	(3.95)
Triangular <sup>b</sup>  $A_f = (\pi D/2) [L^2 + (D/2)^2]^{1/2}$		$\eta_f = \frac{2}{m L} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$	(3.96)
Parabólica <sup>b</sup>  $A_f = (\pi L^3/8D) \{C_3 C_4 - (L/2D) \ln[2DC_4/L + C_3]\}$  $C_3 = 1 + 2(D/L)^2$ $C_4 = [1 + (D/L)^2]^{1/2}$		$\eta_f = \frac{2}{[4/9(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$	(3.97)
<sup>a</sup> $m = (2h/kt)^{1/2}$ <sup>b</sup> $m = (4h/kD)^{1/2}$			

### 3.6.5 Eficiencia de la superficie global



**Figura 3.20** Arreglos de aletas representativos: (a) aletas rectangulares; (b) aletas anulares.

La eficiencia de la superficie global, o total, que caracteriza un arreglo de aletas y la superficie base a la cual están pegadas:

$$\eta_o = \frac{q_t}{q_{\max}} = \frac{q_t}{hA_t\theta_b} \quad (3.98)$$

Donde  $q_t$  es la velocidad del calor desde la superficie total  $A_t$  igual a la superficie de las aletas más la porción expuesta de la base:

$$A_t = NA_f + A_b \quad (3.99)$$

Velocidad total de transferencia de calor por convección:

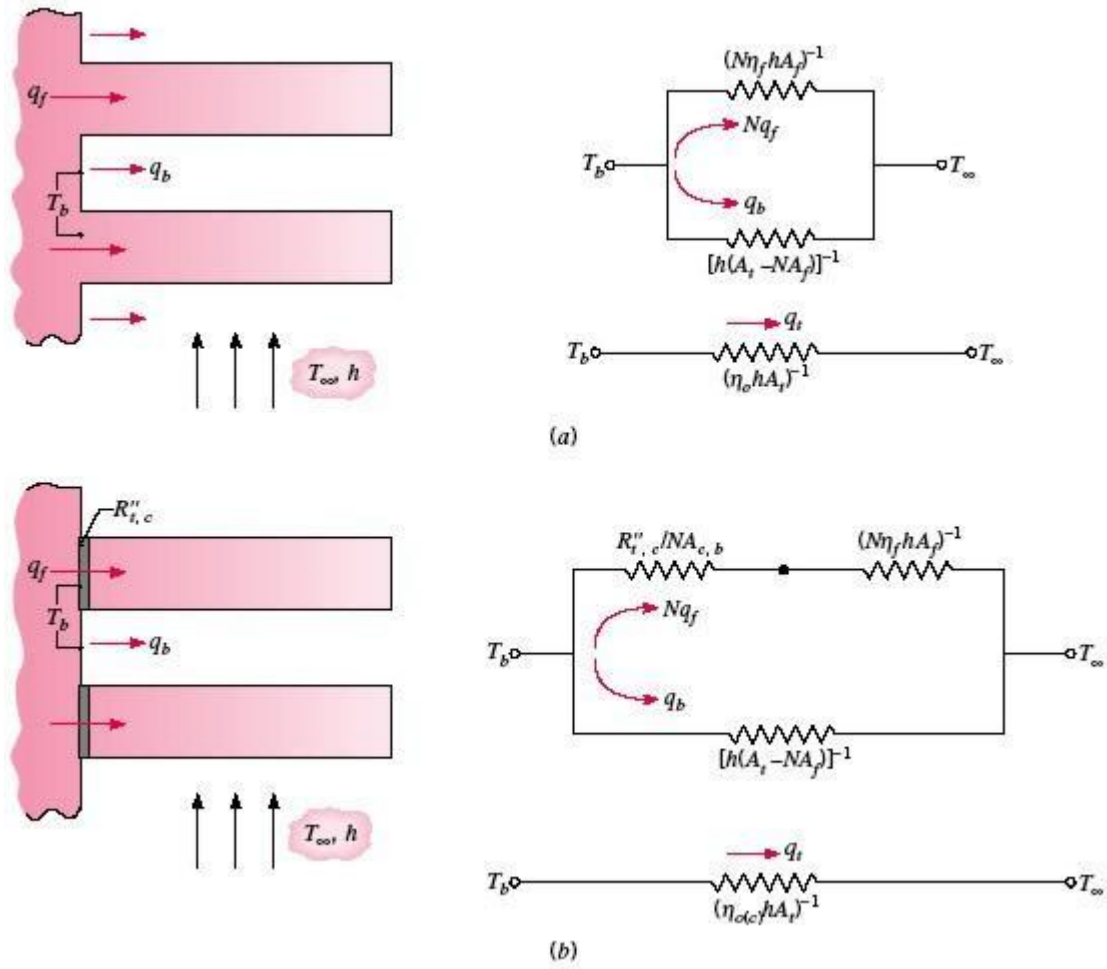
$$q_t = N\eta_f hA_f\theta_b + hA_b\theta_b \quad (3.100)$$

$$q_t = h[N\eta_f A_f + (A_t - NA_f)]\theta_b = hA_t \left[ 1 - \frac{NA_f}{A_t}(1 - \eta_f) \right] \theta_b \quad (3.101)$$

$$\eta_o = 1 - \frac{NA_f}{A_t}(1 - \eta_f) \quad (3.102)$$

Resistencia térmica:

$$R_{t,o} = \frac{\theta_b}{q_t} = \frac{1}{\eta_o hA_t} \quad (3.103)$$



**Figura 3.21** Arreglo de aletas y circuito térmico: (a) aletas que son integrales con la base; (b) aletas que están pegadas a la base.

Resistencia térmica de contacto:

$$R_{t,o(c)} = \frac{\theta_b}{q_t} = \frac{1}{\eta_{o(c)} h A_t} \quad (3.104)$$

$$\eta_{o(c)} = 1 - \frac{N A_f}{A_t} \left( 1 - \frac{\eta_f}{C_1} \right) \quad (3.105a)$$

$$C_1 = 1 + \eta_f h A_f (R''_{t,c} / A_{c,b}) \quad (3.105b)$$

Durante su fabricación se debe verificar que  $R_{t,c} \ll R_{t,f}$ .