

## Notas de Clase.

# 1 Formulación Lagrangiana de la Mecánica

## 1.1 Ligaduras

(i). *Tipos de Ligaduras:*

Si queremos hacer restringir el movimiento de una partícula debemos aplicar una fuerza, estas fuerzas son llamadas fuerzas de ligadura. Estas fuerzas son dependientes de la posición y del tiempo.

$$f_I(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0 \quad \text{con} \quad I = 1, \dots, K < 3N \quad \text{Holonomas}$$

$$f_I(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) = 0 \quad \text{con} \quad I = 1, \dots, K < 3N \quad \text{No Holonomas}$$

Para este caso trabajaremos con las ligaduras holonomas, y por tanto, podemos escribir entonces la ligadura como

$$f(\mathbf{x}, t) = 0$$

(ii). *Fuerzas de Ligadura:*

Las ecuaciones de movimiento contemplando las ligaduras se expresan como

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{C}$$

Donde  $\mathbf{C}$  denota las fuerzas de ligadura y  $\mathbf{F}$  las fuerzas externas que se aplican sobre el sistema. Para este problema entonces tendremos 6 incógnitas ( $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{C}$  para cada coordenada del espacio), pero tan solo contamos con 4 ecuaciones por lo que este sistema no tendrá solución. Por otro lado, las fuerzas de ligadura tienen que ser perpendiculares a la superficie de ligadura para que estas no realicen trabajo, y así no puedan aportar a los cambios de energía del sistema, esto permite escribir las fuerza de ligadura como

$$\mathbf{C} = \lambda \nabla f(\mathbf{f}, t)$$

Aquí  $\lambda$  es función del tiempo, y se establece que  $\mathbf{C}$  es perpendicular a la superficie lo que implica que  $\nabla f \neq 0$ . Esto hace un poco más sencillo el problema pues ahora solo se tienen 4 incógnitas para 4 ecuaciones.

Retomando las ecuaciones de movimiento y asumiendo que las fuerzas externas son conservativas ( $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{x}, t)$ ) podemos expresar

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V + \lambda \nabla f$$

Aplicando producto punto de  $\dot{\mathbf{x}}$  ambos lados de la ecuación

$$m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = -\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \lambda \nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

Recordando la definición de derivada total respecto al tiempo sobre una función de varias variables

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{dV}{dt} &= \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial t}\end{aligned}$$

Ahora como sobre la superficie de ligadura  $f(\mathbf{x}, t) = 0$  entonces  $\frac{df}{dt} = 0$ , esto permite escribir las anteriores expresiones como

$$\begin{aligned}\nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}} &= -\frac{\partial f}{\partial t} \\ -\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} &= -\frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}\end{aligned}$$

Remplazando

$$\begin{aligned}m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} &= -\frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 \right) &= -\frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + V \right) &= \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

Esto significa que la energía de un sistema puede cambiar si  $V$  o  $f$  son funciones explícitas del tiempo o si la superficie de ligadura se esta moviendo. Esto puede ser un poco más claro en el sentido que si la superficie de ligadura cambia entonces no siempre se respeta que  $\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$ . Por lo tanto, para este caso se consideran superficies de ligadura que no dependan explícitamente del tiempo (superficies *suaves*).

## 1.2 Coordenadas generalizadas

Partiendo de las ecuaciones de movimiento para una sola partícula ligada a una superficie

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F} + \lambda \nabla f \\ f(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned}$$

Para solucionar estas ecuaciones primero debemos eliminar  $\lambda(t)$ , como  $\lambda \nabla f$  siempre es perpendicular a la superficie (si trabajamos con superficies suaves) entonces podemos eliminar esta componente si solo tomamos las componentes tangenciales a la superficie, se habla de componentes tangenciales porque dependiendo de la superficie de ligadura podemos encontrar mas de un vector tangencial a la superficie, por ejemplo si tenemos una curva entonces solo tendrá una componente tangencial, pero si se tiene una superficie entonces se tiene un plano tangencial.

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F} + \lambda \nabla f \\ m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} &= \lambda \nabla f \\ (m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\tau} &= \lambda \nabla f \cdot \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

Donde  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector tangente arbitrario que tiene que cumplir que  $\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla f = 0$ , por tanto, la ecuación de movimiento se reduce

$$(m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

Dado que  $\boldsymbol{\tau}$  es un vector sobre el plano tangente a la superficie se puede expresar como una combinación lineal de dos bases ortogonales, por lo que en realidad esta última ecuación en realidad serán dos ecuaciones, pero entonces si queremos encontrar la función vectorial  $\mathbf{x}(t)$  serán necesarias tres ecuaciones. La tercera ecuación será entonces la ecuación de ligadura  $f(\mathbf{x}, t) = 0$ . Ahora si generalizamos a un sistema de  $N$  partículas con  $K$  ligaduras holonomas independientes, por tanto escribimos la segunda ley de Newton como

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{C}_i$$

y la ligadura está dada por

$$f_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0 \quad \text{con} \quad I = 1, \dots, K < 3N$$

al igual que antes las ligaduras no determinan completamente  $\mathbf{C}_i$ , entonces asumimos la condición de suavidad sobre la superficie de ligadura

$$\mathbf{C}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla_i f_i$$

donde  $\nabla_i$  es el gradiente con respecto al vector posición  $\mathbf{x}_i$  y  $\lambda_i(t)$  son  $K$  funciones las cuales son desconocidas. Si el potencial  $V$  cumple que  $\partial V / \partial t = 0$  entonces,

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

entonces nuevamente las ligaduras realizarán trabajo solo si dependen explícitamente del tiempo. Ahora tendremos que  $\tau_i$  serán  $N$  vectores arbitrarios tangentes a la superficie y cumplen la condición

$$\sum_{i=1}^N \tau_i \cdot \nabla_i f_i = 0 \quad \text{con } I = 1, \dots, K$$

esta ecuación da  $K$  relaciones independientes entre las  $3N$  componentes de los  $N$  vectores  $\tau_i$ , entonces solo  $3N - K$  componentes serán independientes, finalmente realizando el producto punto entre la segunda ley de Newton y  $\tau_i$

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \tau_i = 0 \quad (1)$$

La Eq.(1) es conocida como el *Principio de D'Alembert*. Con esta ecuación podemos determinar las  $3N - K$  ecuaciones independientes para solucionar un problema. Por otro lado, la ecuación de ligadura provee la última relación necesaria para describir el movimiento de las  $3N$  componentes de  $\mathbf{x}_i$ .

TERMINAR LAS COORDENADAS GENERALIZADAS

### 1.3 Demostración de las ecuaciones de Lagrange

Ahora el siguiente paso es realizar la construcción del principio de D'Alembert en términos de las coordenadas generalizadas, es decir, escribir  $\ddot{\mathbf{x}}_i$ ,  $\mathbf{F}_i$  y  $\tau_i$  en términos de  $q^\alpha$ . Empezando por  $\tau_i$ , que son los vectores tangenciales al espacio de configuración  $\mathbb{Q}$ , como en cada punto de  $\mathbb{Q}$  hay  $n$  curvas, entonces existirán  $n$  vectores tangentes a cada  $n$ -curva de  $\mathbb{Q}$ . Cada una de estas curvas esta parametrizada por una de las primeras  $n$  de  $q^\alpha$ , y su tangente esta dada dada por su derivada de la siguiente forma.

$$\tau_i = \epsilon^\alpha \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}$$

Esta ecuación, expresa que los vectores tangenciales serán una combinación lineal entre las bases coordenada  $(\partial \mathbf{x}_i / \partial q^\alpha)$  y los respectivos coeficientes  $(\epsilon^\alpha)$ . Esta ecuación también indica que el punto tangencia sobre  $\mathbb{Q}$  para cada  $\tau_i$  está dado en términos de  $q^\alpha$ . Remplazando en el principio de D'Alembert.

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \epsilon^\alpha \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = 0$$

Como los valores de  $\epsilon^\alpha$  son arbitrarios, entonces para cada set de ecuaciones se tomara el valor correspondiente como diferente de cero y el resto de valores como cero (es decir, para un sistema de ecuaciones  $\epsilon^\alpha$  será una matriz unitaria).

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, n$$

$$\sum_i \left( m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} - \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \right) = 0$$

Desarrollando el término de la derecha, asumiendo que las fuerzas son conservativas, entonces

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q^\alpha}$$

Ahora, para el término en la izquierda puede ser visto en términos de la derivada de un producto, expresado de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left[ \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \right] = \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} + \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}$$

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} \left[ \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \right] - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}$$

Ahora como  $\dot{\mathbf{x}}$  es una función de  $q^\alpha$  y  $t$ , entonces la derivada total se expresa como

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

Si se deriva parcialmente respecto a  $\dot{q}^\alpha$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^\alpha}$$

Remplazando para en la expresión de la aceleración

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \sum_i \frac{d}{dt} \left[ m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] - \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}^\alpha}$$

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \sum_i \frac{d}{dt} \left[ m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] - \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha}$$

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha}$$

Remplazando estos términos en el principio de D'Alembert se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} = 0$$

Ahora, se define una función  $L$  llamada Lagrangiana, el cual esta dado por  $L = T - V$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$$

Si se tienen potenciales independientes de la velocidad, entonces se definen las ecuaciones de Euler-Lagrange como

$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right\} L = 0$$

## 1.4 Ejemplo

## 2 Fuerzas Centrales

El problema de fuerzas centrales tiene un rol muy importante en la física debido a que muchos problemas pueden ser aproximados como fuerzas centrales y pueden ser tratadas como perturbaciones de estas. Para un problema de fuerzas centrales se asume que la magnitud de la fuerza de interacción solo depende de la distancia entre las masas.

### 2.1 Problema de dos cuerpos

Estableciendo las ecuaciones de movimiento para un sistema de dos cuerpos con la segunda ley de Newton se obtiene que

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F} \quad (2)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{F} \quad (3)$$

Multiplicando la primera ecuación por  $m_2$ , la segunda por  $m_1$  y restando ambas ecuaciones

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{x}}_1 - \ddot{\mathbf{x}}_2) = (m_1 + m_2) \mathbf{F}$$

Si se establece el vector  $\mathbf{x}$  como la distancia entre  $m_1$  y  $m_2$ , entonces es posible reducir la dinámica del sistema de 6 ecuaciones diferenciales (una para cada coordenada en 2 y 3) a solo tres ecuaciones diferenciales dadas por

$$\mu \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \quad \text{con} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Otra forma de interpretar esto es la reducción en la dimensión de  $\mathbb{Q}$  mediante este cambio de variable. Las ecuación (4) muestra que *posición relativa* satisface las ecuaciones de Newton. La solución general de este problema se centra en considerar la dinámica de la masa reducida más el movimiento uniforme del centro de masa. Considerando ahora la energía cinética del sistema

$$T = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{X}_{cm}^2$$

En la mayoría de sistemas físicos que están gobernados por fuerzas centrales, se tiene la consideración de que  $m_2 \gg m_1$ , entonces el centro de masa está muy cerca de  $m_2$ , por lo que la separación entre las partículas es muy próxima a la distancia entre el centro de masa a  $m_1$ . Por lo tanto, la energía del sistema será

$$T = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2$$

Considerando las coordenadas esféricas para describir la dinámica del sistema y planteando la función lagrangiana.

$$L = \frac{1}{2} \mu \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r) \quad (5)$$

Ahora, como desde un principio de consideró que la fuerza solo depende de la distancia entre las masas, entonces será co-lineal al vector  $\mathbf{x}$ , esto tendrá como consecuencia que el momento angular será constante.

$$\frac{dL}{dt} = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = 0$$

Dado que el momento angular es  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{P}$  y es constante, entonces el plano formado por la posición y el momento lineal también será constante, es decir, el movimiento del sistema siempre estará en el mismo plano. Esto implica que en coordenadas esféricas el ángulo  $\phi = \pi/2$  y  $\dot{\phi} = 0$  y por tanto, la lagrangiana será

$$L = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - V(r) \quad (6)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a la función lagrangiana se obtiene una ecuación para cada coordenada generalizada

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \mu r^2 \dot{\theta} \right) = 0 \quad (8)$$

La ecuación (8) define una *coordenada cíclica*, la cual permite desacoplar las ecuaciones diferenciales.

$$\mu r^2 \dot{\theta} = l \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$$

Donde  $l$  es una constante y será la magnitud del momento angular. Remplazando en la ecuación (7) se obtiene

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (9)$$

Esto se puede interpretar como el movimiento de un sistema de masa  $\mu$  bajo el efecto de una fuerza efectiva  $\mathcal{F}(r)$  que proviene de un potencial efectivo  $\mathcal{V}(r)$ .

$$\mathcal{F}(r) = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = -\nabla \mathcal{V}(r)$$

Esto permite establecer que el potencial debe ser

$$\mathcal{V}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (10)$$

Y entonces se establece una nueva función lagrangiana de un sistema equivalente al de una partícula de una dimensión.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \mathcal{V}(r)$$

Dado que  $\mathcal{L}$  tiene la forma  $\mathcal{L} = T - \mathcal{V}$ , entonces la energía se puede escribir como

$$E = T + \mathcal{V} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$



## 2.2 El Problema de Kepler

El problema de Kepler se centra el estudio de un problema de dos cuerpos bajo el efecto de un potencial con la forma

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \text{con} \quad \alpha = G\mu M \quad (11)$$

Parametrizando la trayectoria  $r$  en función de  $\theta$  (es decir pasara de  $r(t)$  a  $r(\theta)$ ) se hace necesario redefinir la derivada temporal bajo la siguiente sustitución.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \quad (12)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \right) = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \right) = \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \right) \quad (13)$$

Remplazando en la ecuación (9) se obtiene

$$\frac{l^2}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

Planteando el cambio de variable  $u = 1/r$  y  $du = -1/r^2 d\theta$

$$-\frac{l^2}{\mu} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{l^2 u^3}{\mu} + \alpha u^2 = 0$$

Simplificando la expresión se obtiene entonces la ecuación diferencial de la orbita para este caso

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\alpha \mu}{l^2} \quad (14)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea cuya solución está dada por

$$u = A \cos(\theta + \delta) + \frac{\alpha \mu}{l^2}$$

Esta ecuación se puede expresar en términos de nuevas constantes para que tenga la forma de la ecuación de orbita en coordenadas polares

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\alpha \mu}{l^2} [\epsilon \cos(\theta - \theta_0) + 1] \quad (15)$$

Si el parámetro  $\epsilon$  es cero, entonces se considerarán orbitas circulares, debido a que  $r(\theta)$  será constante para todo  $\theta$ . El valor máximo que puede tener  $r$  corresponde a cuando  $\theta$  es mínimo, es decir  $\theta = \theta_0$ , este punto es llamado el *perihelio*.

$$r_{min} = \frac{l^2}{\alpha \mu} \frac{1}{1 + \epsilon}$$

Ahora, el valor mínimo de  $r$  es cuando  $\theta$  es máximo, este valor será para  $\theta + \theta_0$ , este punto es llamado *afelio*.

$$r_{max} = \frac{l^2}{\alpha\mu} \frac{1}{1 - \epsilon}$$

Cuando  $r = r_{min}$  la partícula se esta moviendo con una velocidad  $v$  perpendicular con el vector posición. Su momento angular esta dado entonces por  $l = r_{min}\mu v$ , esto permite establecer la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{\mu\alpha^2(\epsilon + 1)^2}{2l^2}$$

Estableciendo entonces la energía en función del potencial y la energía cinética

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{\mu\alpha^2(\epsilon + 1)^2}{2l^2} - \frac{\alpha}{r_{min}}$$

$$E = \frac{\alpha^2\mu}{2l^2}(\epsilon^2 - 1)$$

Esto permite establecer una relación entre la energía y  $\epsilon$ . De aquí se puede concluir que  $E$  es negativo si  $\epsilon < 1$  (Orbitas cerradas), es cero si  $\epsilon = 1$  (Orbitas parabólicas) y es positiva si  $\epsilon > 1$  (Orbitas hiperbólicas).

### 3 Principio Variacional

Las ecuaciones de movimiento descritas con anterioridad se pueden demostrar desde un punto variacional. De todas las posibles trayectorias descritas por las funciones  $q(t)$ , el movimiento físico real se da cuando la acción  $S$  es mínima. La acción asociada a un movimiento descrito por una función  $q(t)$  en un intervalo de tiempo  $(t_0, t_1)$  esta dada por

$$S(q, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Donde  $S$  depende de la trayectorias  $q(t)$ , por tanto,  $S$  es un funcional de  $q(t)$ . Este análisis se centra solo en trayectorias que inician y terminan en los mismos dos puntos en  $\mathbb{Q}$ , es decir  $q(t_0, a) = q(t_0, b) = q(t_0)$  y  $q(t_1, a) = q(t_1, b) = q(t_1)$ . Las funciones  $q(t, a)$  y  $q(t, b)$  coinciden en los puntos extremos pero pueden no coincidir entre ellas, esto significa que pueden existir muchas funciones para  $q$  y cada una de ellas tiene asociado un valor de  $S$ . Entonces el problema físico se centra en encontrar la trayectoria  $q(t)$  que toma el sistema en el viaje de  $q(t_0)$  a  $q(t_1)$ .

#### 3.1 Principio de Hamilton

El principio de Hamilton establece que en una familia de de muchas trayectorias  $q(t, \epsilon)$  que comienzan en  $q(t_0)$  y terminan en  $q(t_1)$  y que contengan a la trayectoria física. La trayectoria física será aquella para la cual  $S$  sea mínima. Considerando trayectorias parametrizadas por  $\epsilon$ , las cuales sean continuas y diferenciables, todos los cálculos dependerán de  $\epsilon$  sólo a través de las derivadas, por lo que  $\epsilon$  puede cambiarse sin pérdida de generalidad. En general, lo que afirma el principio de Hamilton es que la trayectoria física produce el mínimo  $S$  de cada familia en la que puede incluirse. Matemáticamente esto puede escribir como

$$\frac{dS}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \left[ \frac{d}{d\epsilon} \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \right]_{\epsilon=0} = 0$$

Cambiando la notación se establece  $d/d\epsilon|_{\epsilon=0}$  como  $\delta$ .

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

Recordando que toda la expresión debe evaluarse en  $\epsilon = 0$ , ahora como  $L$  depende de  $q^\alpha$  y  $\dot{q}^\alpha$  entonces también depende de forma no explícita de  $\epsilon$ .

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \\ \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha \end{aligned}$$

Tomando el segundo término de la parte derecha, y dado que las derivadas son continuas y diferenciables, entonces se puede intercambiar el orden de las en el que se deriva  $q^\alpha$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt} \delta q^\alpha$$

Esta ultima ecuación se puede expresar en términos de la derivada de un producto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right] &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt} \delta q^\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt} \delta q^\alpha &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \delta q^\alpha \end{aligned}$$

Entonces el variacional de la Lagrangiana será

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \delta q^\alpha \\ \delta L &= \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \delta q^\alpha + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right] \end{aligned}$$

Remplazando en la integral de la acción se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \delta q^\alpha dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right] dt = 0 \\ \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \delta q^\alpha dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right]_{t_0}^{t_1} = 0 \end{aligned}$$

Como en los puntos extremos la variación de las trayectorias vale cero, esto implica que

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

Por lo tanto, la variación de la acción será

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \delta q^\alpha dt = 0$$

Realizando la sustitución

$$\Lambda_\alpha = \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \tag{16}$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda_\alpha \delta q^\alpha dt = 0$$

Para un set de  $n$  funciones  $f_\alpha$  de variables reales e integrables en un intervalo  $I$ .

$$\int_I f_\alpha h_\alpha dt = 0$$

Para un set de funciones integrales  $h_\alpha$  integrable en el mismo intervalo, las cuales se hacen cero en los puntos extremos, entonces  $f_\alpha$  será cero para todo  $\alpha$ . El principio de Hamilton se aplica para cualquier familia de trayectorias  $\epsilon$  y  $\delta q^\alpha$  es un set de funciones arbitrarias que depende de  $t$ , que se hacen cero en los puntos iniciales y finales tal como lo hace  $h_\alpha$ . Esto permite establecer que  $\Lambda_\alpha$  debe ser cero para todo  $\alpha$ . Esto permite entonces finalmente establecer que la trayectoria que minimiza la acción será la que cumpla las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\Lambda_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0 \quad (17)$$

La ecuación (16) se puede interpretar como el producto punto entre dos vectores expresados como funciones, esto permite concluir que el producto punto entre  $\Lambda$  y  $\delta q^\alpha$  es cero, y por tanto, estos vectores son ortogonales entre si, esto se puede expresar matemáticamente como

$$(\Lambda, \delta q) = 0 \quad (18)$$

### 3.2 Ligaduras

Ahora se aplicará el principio variacional para describir la dinámica de un sistema sometido a ligaduras. Entonces, se supone un sistema que está sujeto a  $K < n$  ligaduras no holonomas independientes que tiene la forma

$$f_I(q, \dot{q}, t) = 0 \quad \text{con} \quad I = 1, 2, \dots, K. \quad (19)$$

Aplicando el método variacional con la condición de las trayectorias parametrizadas por  $\epsilon$  tienen que satisfacer las ligaduras impuestas. Comenzando con la ecuación (17), con la excepción de que ahora  $\delta q \in \mathbb{F}$ , cuyas componentes ahora no son arbitrarias, sino que están dadas por las ligaduras. Esto significa entonces que  $\Lambda$  será ortogonal al sub espacio  $\mathbb{F}_q \in \mathbb{F}$ . Entonces para encontrar  $\Lambda$  se debe encontrar una expresión para  $\mathbb{F}_q$ , aplicando el principio variacional sobre  $f_I$ .

$$\frac{\partial f_I}{\partial \epsilon} = \frac{\partial f_I}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \epsilon} = 0$$

Ahora multiplique cada una de estas ecuaciones por una función arbitraria suficientemente bien comportada  $\mu_1(t)$  y sumando sobre  $I$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_I \left[ \mu_I \frac{\partial f_I}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} + \mu_I \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \epsilon} \right] dt = 0$$

Tomando el segundo termino del argumento en la integral

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} \right] &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon}\end{aligned}$$

Remplazando

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \sum_I \left[ \mu_I \frac{\partial f_I}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} + \mu_I \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} \right] - \mu_I \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} \right] dt &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_1} \sum_I \mu_I \left[ \frac{\partial f_I}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_I \mu_I \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} \right] dt &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_1} \sum_I \mu_I \left[ \frac{\partial f_I}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} dt + \left[ \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} \right]_{t_0}^{t_1} &= 0\end{aligned}$$

Pero como  $\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon}$  es cero en los puntos extremos entonces se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \sum_I \mu_I \left[ \frac{\partial f_I}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} dt &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_1} \sum_I \mu_I \left[ \frac{\partial f_I}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}^\alpha} \right] \delta q^\alpha dt &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_1} \sum_I \chi_I \delta q^\alpha dt &= 0\end{aligned}$$

Entonces como se vio antes, para que esto se cumpla se impone que  $\sum_I \chi_I = 0$ , esto implica que el producto punto entre estos vectores es cero y por tanto son ortogonales entre ellos.

$$\left( \sum_I \chi_I, \delta q \right) = 0 \quad (20)$$

Esto establece todas las restricciones sobre los vectores  $\delta q$ , estas serán ortogonales a todos los vectores  $\chi_i$  posibles. Vectorialmente  $\mathbb{F}_q$  (que es el sub-espacio que contiene todos los vectores  $\delta q$ ) es ortogonal al sub-espacio  $\mathbb{F}_\chi$ . Dado que  $\Lambda$  es ortogonal a  $\mathbb{F}_q$  entonces debe estar contenido en  $\mathbb{F}_\chi$ , esto significa que  $\Lambda$  puede ser expresada como una combinación lineal  $\Lambda = \sum \alpha_I \chi_I$ , esto permite establecer la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left( L + \sum \lambda_I f_I \right) - \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left( L + \sum \lambda_I f_I \right) = 0 \quad (21)$$

Donde  $\lambda_I(t) = \alpha_I \mu_I(t)$ , son conocidos como *Multiplicadores de Lagrange*. Este es el resultado de aplicar el principio variacional con ligaduras, donde se obtienen un conjunto de ecuaciones que lucen similar a las ecuaciones de Euler-Lagrange bajo la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = L + \sum \lambda_i f_I$$

Ahora se tienen  $n$  ecuaciones de Euler-Lagrange representadas por (21), y  $K$  ecuaciones de ligadura dadas por (19), para poder encontrar  $n + K$  funciones  $q^\alpha$  y  $\lambda_I(t)$ . Ahora si se trabajan con ligaduras holonomas, entonces la ecuación (21) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left( L + \sum \lambda_I f_I \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \sum \lambda_I \frac{\partial f_i}{\partial q^\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

Esto se realiza con el objetivo de que las ecuaciones de movimiento no involucren derivadas temporales para  $\lambda$  esto debido a que se necesitarían condiciones iniciales sobre las fuerzas de ligadura y esto no tendría sentido físico.

### 3.3 Ejemplo

## 4 Simetrías y Conservación

Una de las ideas más importantes obtenidas a partir del formalismo de Lagrange es la relación de las leyes de conservación con las simetrías. Se dice que un sistema es *Simétrico* si bajo un sistema de transformaciones el sistema permanece invariante.

### 4.1 Coordenadas cíclicas

Cuando una coordenada generalizada no aparece de forma implícita dentro de las ecuaciones de Euler-Lagrange entonces se dice que es una *coordenada cíclica*, por tanto, dará lugar a una constante de movimiento en el sistema. Un ejemplo, si  $q^\beta$  no aparece dentro de la función Lagrangiana, entonces la cantidad conservada está dada por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} = 0$$

Esto implica que  $\partial L / \partial \dot{q}^\beta$  será constante en el tiempo y se le da el nombre de momento conjugado generalizado  $p_\beta$ . Si  $q^\beta$  es una coordenada cíclica entonces  $p_\beta$  da un conjunto de sub-conjunto (sub-manifold) en  $\mathbf{TQ}$ . Es decir, si el punto de fase inicial se encuentra en cualquier sub-conjunto cuya ecuación esta dada por  $p_\beta = C$ , el movimiento permanecerá en este. Todo esto implica que ahora el conjunto que contiene las ecuaciones de Euler-Lagrange es el sub-conjunto de  $\mathbf{TQ}$  cuya dimension es  $2n - 1$ , es decir, la dimensión del colector de fase es reducida por las coordenadas cíclicas.

### 4.2 Transformaciones: Pasivas y Activas

Considere una familia de transformaciones en  $\mathbb{Q}$  que solo desplaza la coordenada ignorable  $q^\lambda$  en una cantidad variable  $\epsilon$ . Estas transformaciones en  $\mathbb{Q}$  implican otras en  $\mathbf{TQ}$ , llamando las coordenadas transformadas como  $(Q, \dot{Q})$ , las transformaciones entre coordenadas estarán dadas por.

$$Q^\alpha = q^\alpha + \epsilon \delta^{\alpha\lambda} \qquad \dot{Q}^\alpha = \dot{q}^\alpha$$