Tarea 2

Problema 1

Sea $f(x)$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

① Calcule el valor de la constante c para que $f(x)$ sea la función de densidad de la variable aleatoria X.

$$\int_0^2 cx^2\, dx = 1$$

$$c\int_0^2 x^2\, dx = 1$$

$$c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 1 \Rightarrow c\left(\frac{8}{3}\right) = 1$$

$$\boxed{c = \frac{3}{8}}$$

② Calcule $P[0 < X \leq 1]$

$$\int_0^1 \frac{3}{8} x^2\, dx$$

$$\frac{3}{8}\int_0^1 x^2 dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{24} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Problema 2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{K}{x^4}, & \text{si } x > 1 \\ 0, & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de K para la cual f(x) es una función de densidad de probabilidad (fdp)

$$K \int_1^{\infty} x^{-4}\, dx = 1$$

$$K \left[\frac{x^{-3}}{-3} \right]_1^{\infty} = 1$$

$$K \left(0 + \frac{1}{3} \right) = 1 \Rightarrow \boxed{K = 3}$$

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿Su varianza?

$$E[X] = \int_1^{\infty} x \frac{3}{x^4}\, dx = 3 \int_1^{\infty} x^{-3}\, dx$$

$$= 3 \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^{\infty} = 3 \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{E[X] = \frac{3}{2}}$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \int_1^{\infty} x^2 \frac{3}{x^4} dx = 3 \int_1^{\infty} x^{-2} dx$$

$$= 3 \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^{\infty} = 3(0+1) = 3$$

$$E[X^2] = 3$$

$$Var(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{12}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{3}{4}}$$

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto mas de 2 seg.? ¿A lo mas 2? ¿X segundos o menos?

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} \frac{3}{x^4} dx = 3 \left[\frac{x^{-3}}{-3} \right]_2^{\infty} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{P(X > 2) = \frac{1}{8}}$$

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - \frac{1}{8}$$

$$\boxed{P(X \leq 2) = \frac{7}{8}}$$

$$P(X \leq x) = \int_1^{x} \frac{3}{t^4} dt = 3 \left[\frac{t^{-3}}{-3} \right]_1^{x}$$

$$\boxed{P(X \leq x) = 1 - \frac{1}{x^3}}$$