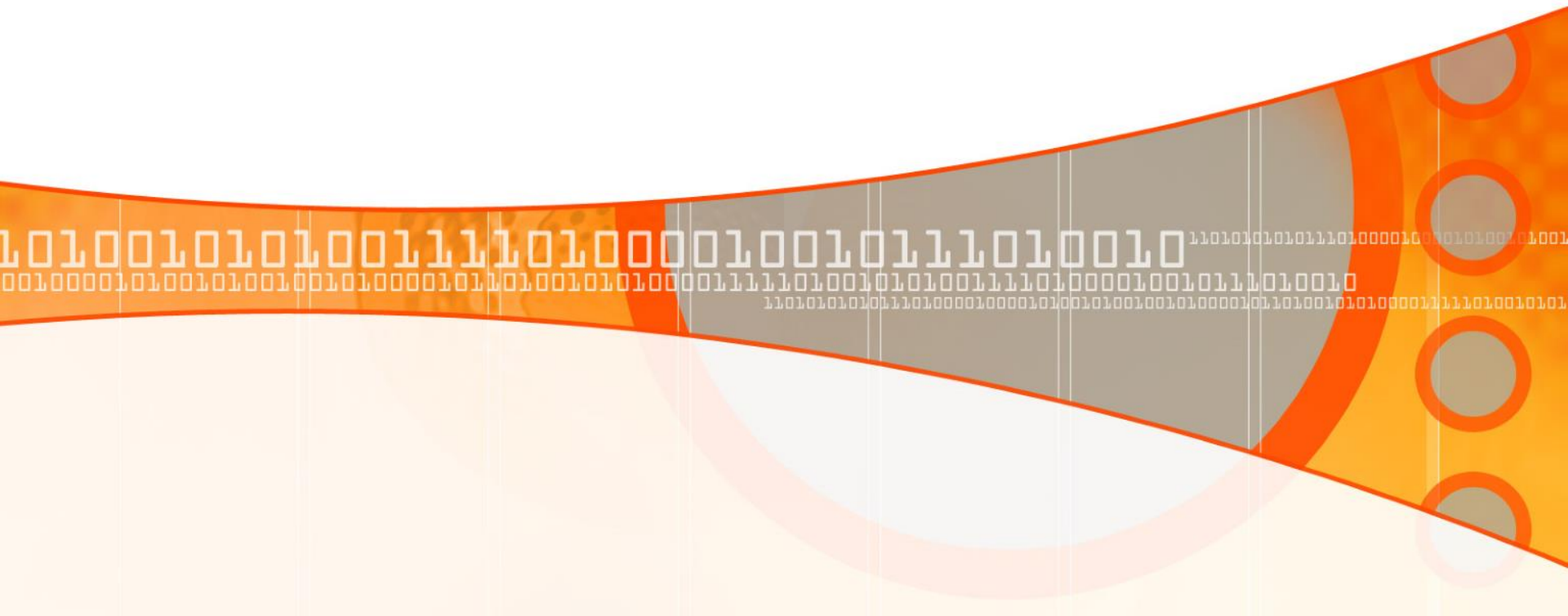


# STRUCTURI DE DATE

## Arbori echilibrati

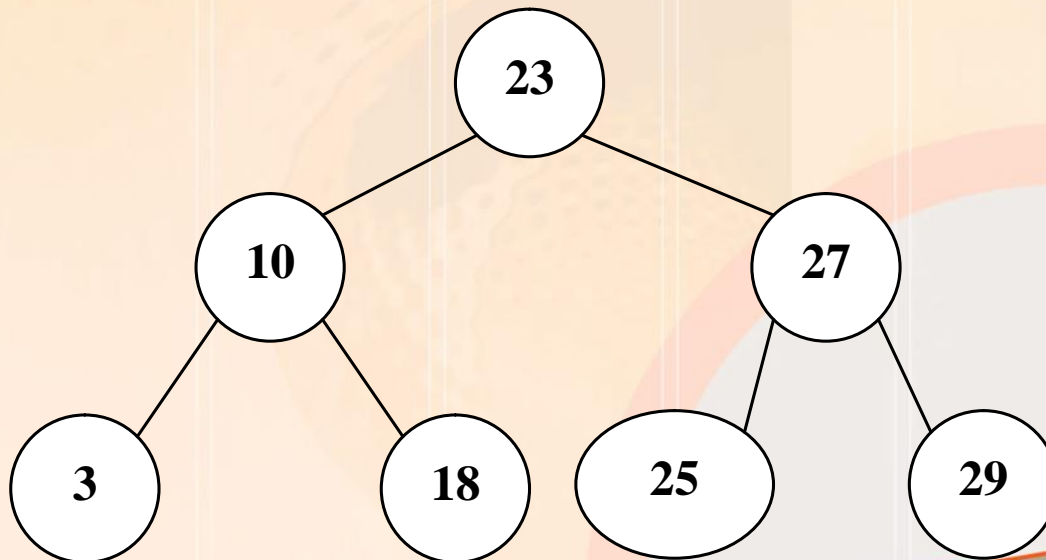


# ARBORI BINARI ECHILIBRATI

Abordari ale operatiei de echilibrare:

## 1. Echilibrare perfecta:

- Diferenta dintre nr. noduri SS si SD este 0, pentru fiecare nod din arbore;
- Toate nodurile frunza sunt pe acelasi nivel;
- Orice nod de pe nivelurile intermediare are doi descendenti ( $h$  – inaltime arbore);



# ARBORI BINARI ECHILIBRATI

Implementare operatie:

- Metoda **divide et impera**;
- Parcurgere sir de chei ordonate crescator si inserarea valorii din mijloc in arbore;
- **Volum mare** de calcule: operatii de inserare si stergere, parcurgere inordine arbore, reconstructie structura arborescenta.

# ARBORI BINARI ECHILIBRATI

```
void echlibrareArbore(int *chei, int dim, int stanga, int dreapta, NodArbore
*&radacina){
    if (dreapta>=stanga){
        int mijloc=(dreapta+stanga)/2;
        if (dreapta-stanga==1){
            radacina =inserareArbore(radacina, chei[stanga]);
            radacina = inserareArbore (radacina, chei[dreapta]);
        }
    else{
        if (dreapta==stanga)
            radacina = inserareArbore (radacina, chei[stanga]);
        else{
            radacina = inserareArbore (radacina, chei[mijloc]);
            echlibrareArbore (chei,dim,stanga, mijloc-1, radacina);
            echlibrareArbore (chei,dim, mijloc+1,dreapta, radacina);
        }
    }
}
```

- *chei* – vector: șirul sortat crescător al valorilor;
- *dim* – dimensiunea vectorului;
- *stanga, dreapta* – limitele intervalului curent;
- rădăcina arborelui ce va fi creat.

# ARBORI BINARI ECHILIBRATI

**Mentenananta** unei astfel de structuri:

- Grad de complexitate foarte ridicat;
- Recrearea arborelui perfect echilibrat după fiecare operație de inserare sau ștergere cu metoda *echilibrareArb*;



# ARBORI BINARI ECHILIBRATI

**Abordari ale operatiei de echilibrare  
(continuare):**

## **2. Echilibrare imperfecta:**

- **Diferenta dintre nr. noduri SS si SD este maxim 1, pentru fiecare nod din arbore;**
- **Crearea structurii: utilizarea metodei prezentate anterior, pornind de la un set de valori sortate crescător sau descrescător;**

# ARBORI BINARI ECHILIBRATI

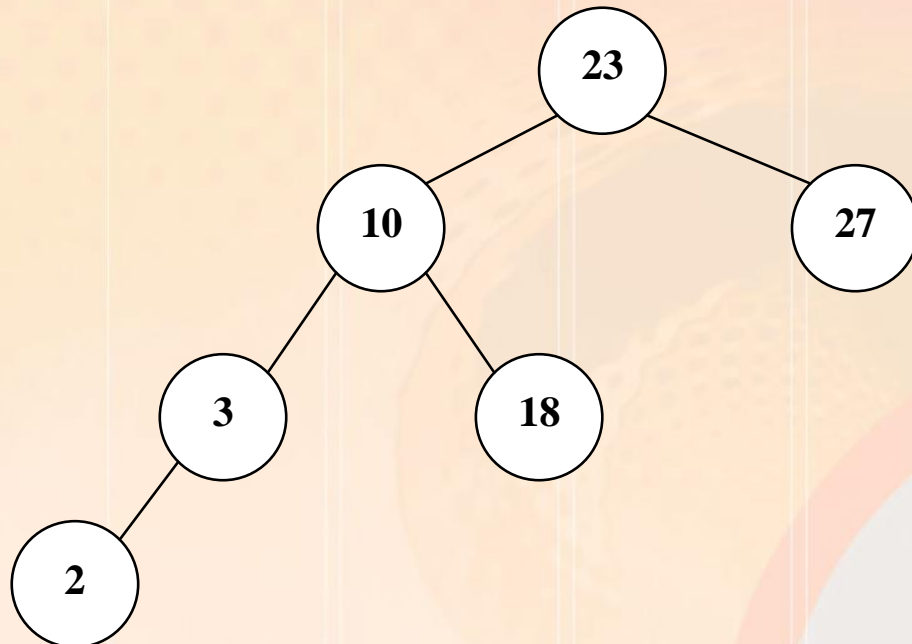
**Mentenananta** unei astfel de structuri:

- Grad de complexitate acceptabil;
- Metode specifice unor structuri arborescente echilibrate particulare: AVL, arbori B, arbori Rosu & Negru;
- Efort de prelucrare mai mic decât volumul operațiilor asociat reconstrucției arborelui prin metoda **echilibrareArb**.

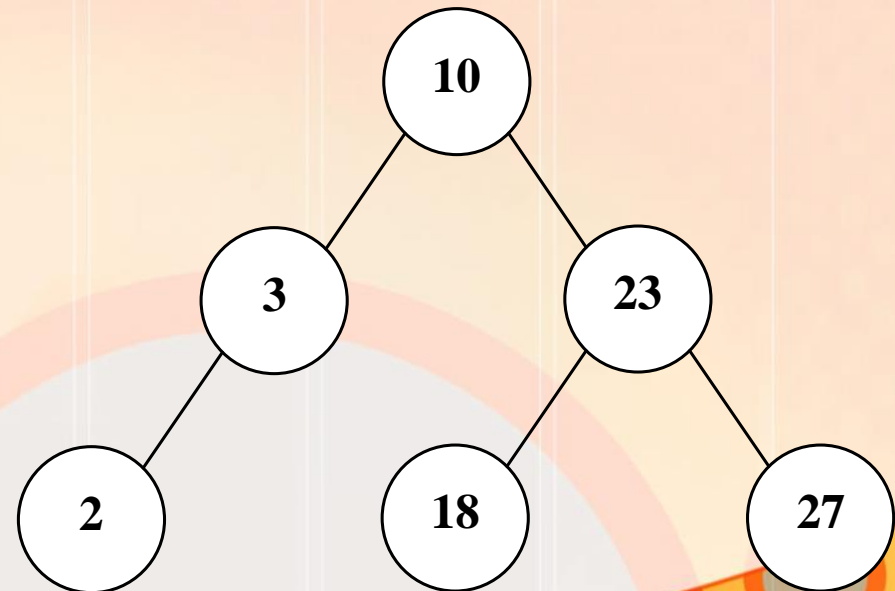
# ARBORI BINARI ECHILIBRATI

Minimizarea efortului de cautare:

- Aranjare echilibrata a valorilor pe ambii subarbori ai fiecărui nod.



23 – 10 – 3 – 2, 4 comparatii



10 – 3 – 2, 3 comparatii



# ARBORI AVL

## Caracteristici:

- Definit de G.M. Adelson-Velskii și E.M. Landis;
- Arbore binar de căutare echilibrat pe înălțime;
- Arbore binar de căutare este AVL: gradul de echilibru al fiecărui nod ia valori în mulțimea  $\{-1, 0, 1\}$ .

# ARBORI AVL

**Gradul de echilibru al unui nod (GE):**

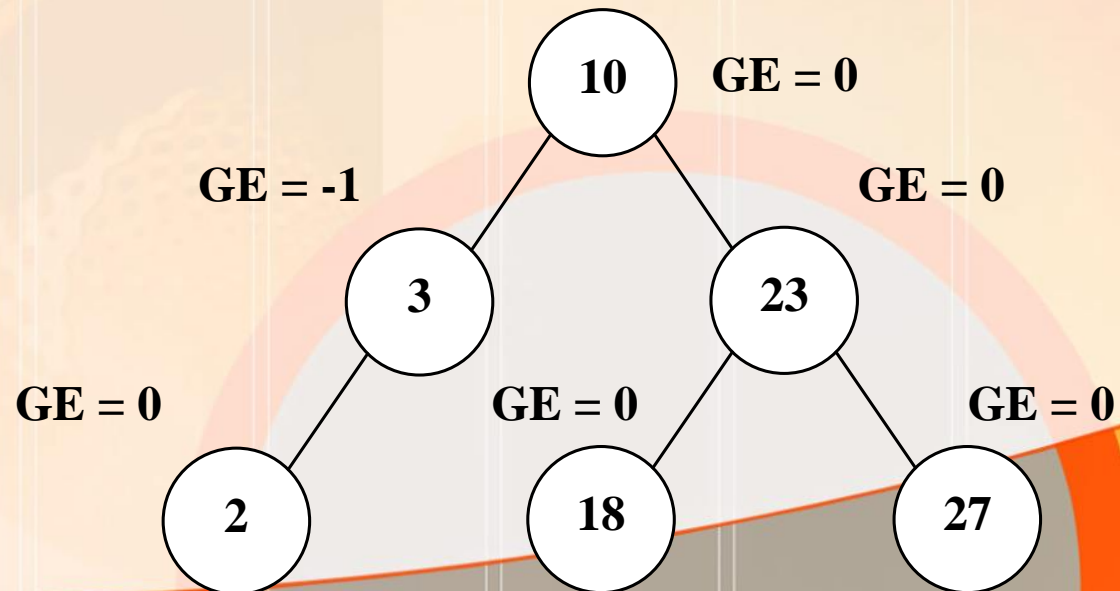
$$\text{GE} = H(\text{SD}) - H(\text{SS})$$

**H() – funcția de calcul a înălțimii unei structuri arborescente;**

$$H(\text{rad}) = 1 + \max (H(\text{subarbore drept}), H(\text{subarbore stâng}))$$

# ARBORI AVL

- Pentru  $GE = 0$ , nodul este echilibrat,
- Pentru  $GE=1$  si  $GE=-1$ , nodul descrie un dezechilibru la dreapta, respectiv la stânga; situații acceptate: pentru un număr par de valori este imposibil să se definească un arbore binar de căutare în care toate nodurile sunt perfect echilibrate.



# ARBORI AVL

**Mentenananta structura arbore AVL:**

- **Verificarea gradului de echilibru, pentru fiecare nod în parte;**
- **Inserare/ștergere afectează structura arborelui și conduc la situații de dezechilibru;**
- **Situațiile de dezechilibru puternic: identificate prin indicatorul GE care ia valori în mulțimea  $\{-2,2\}$ .**

# ARBORI AVL

**Reechilibrarea arborelui binar de căutare și  
păstrarea caracteristicilor aferente arborilor  
AVL:**

- **rotire simpla la stânga;**
- **rotire simpla la dreapta;**
- **dubla rotire la stânga;**
- **dubla rotire la dreapta.**



# ARBORI AVL

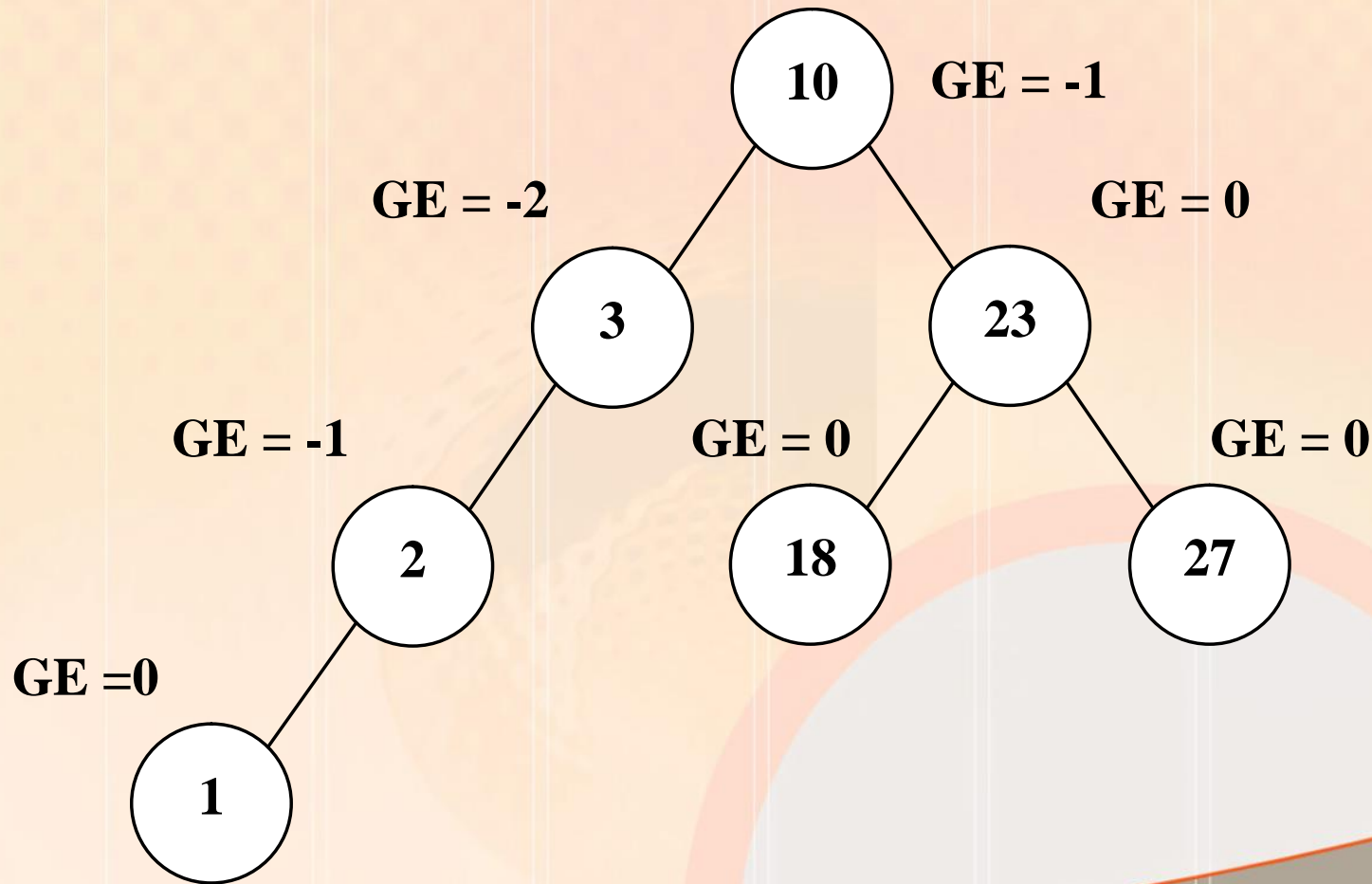
Operatia de echilibrare:

- **Inserare**: un arbore AVL dezechilibrat va fi reechilibrat printr-**o singură** rotație;
- **Stergere**: mult mai complexă, necesitând **minim** o rotație.

**Metoda adecvata** de reechilibrare: analiza gradului de echilibru a nodurilor aflate pe drumul de la rădăcina arborelui la locația unde a fost inserat/șters un nod.

# ARBORI AVL

Arbore binar AVL dezechilibrat dupa inserare nod cu  
valoare cheie = 1



# ARBORI AVL

**Aplicare metoda de reechilibrare:**

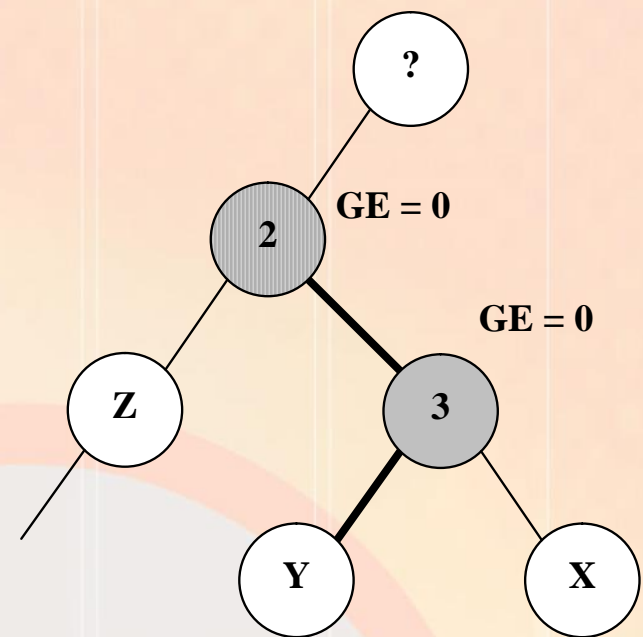
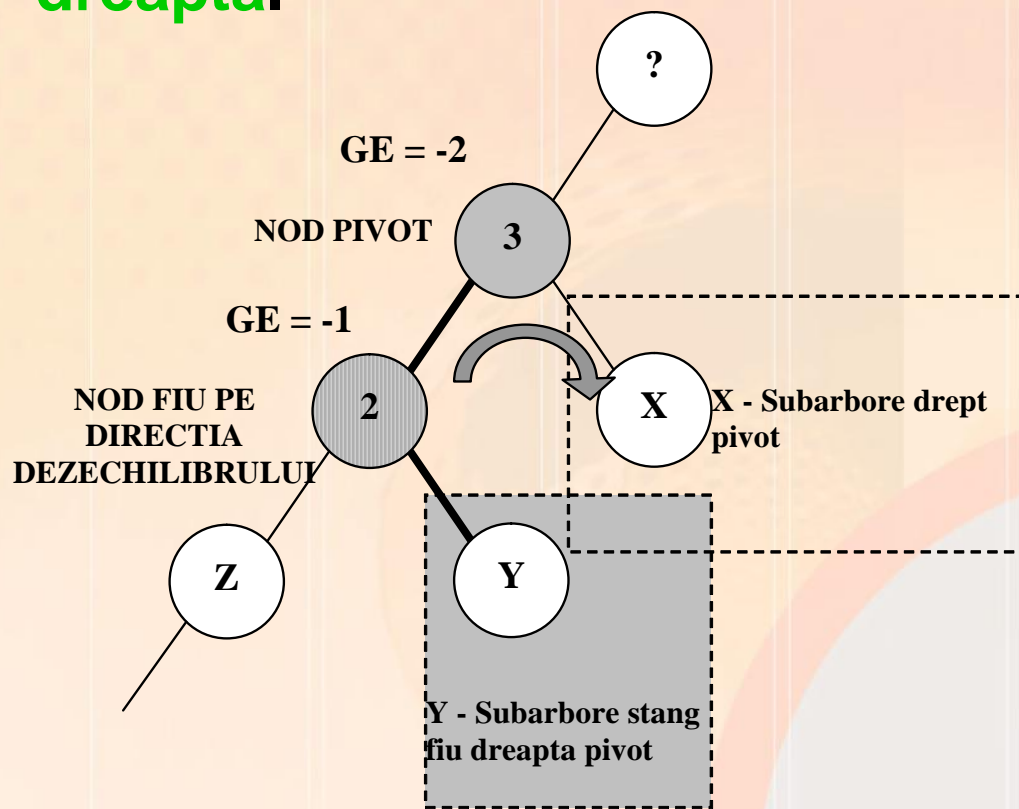
- Se identifica un nod (**pivot**) în care se realizează rotirea subarborelui – abordare bottom-up pornind de la locatia nodului inserat/sters;
- **Reechilibrarea**: cat mai aproape de locatia care a generat dezechilibrul;
- **Identificare** operatie de rotatie: gradul de echilibru al nodului pivot si fiu al pivotului pe directia dezechilibrului.

# ARBORI AVL

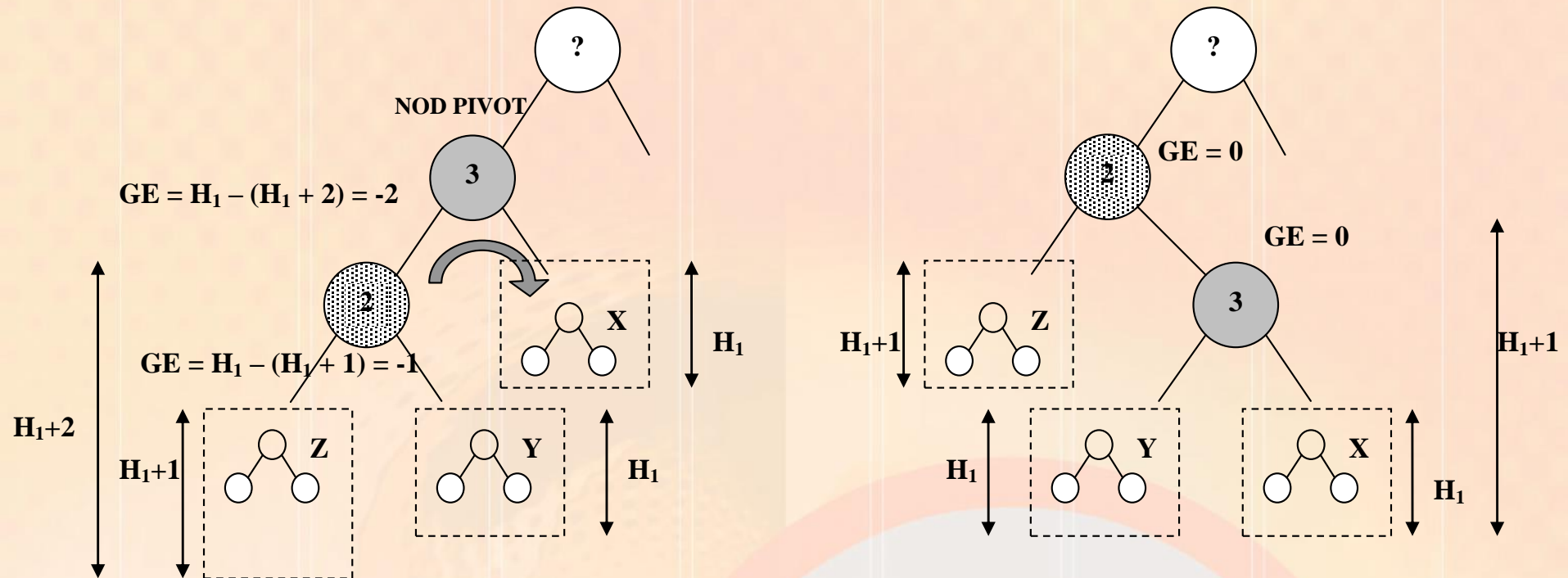
Nodul pivot (**cheia 3**), are  $GE = -2$ : dezechilibru la stânga.

Nodul fiu stânga (**cheia 2**), are dezechilibru la stânga.

Reechilibrarea se realizează prin operația de **rotire simplă la dreapta**.



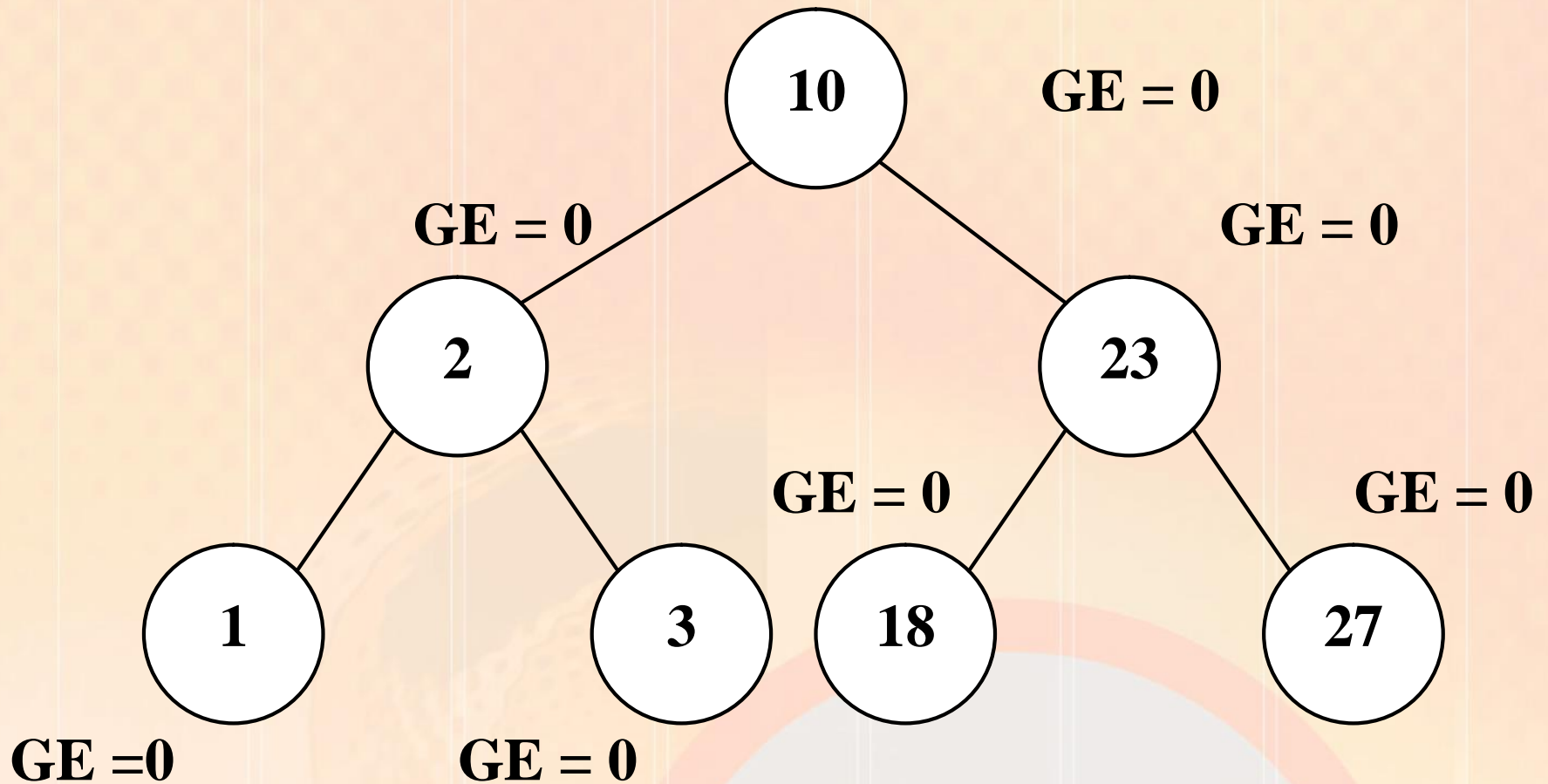
# ARBORI AVL



Procesul de rotire simplă la dreapta



# ARBORI AVL



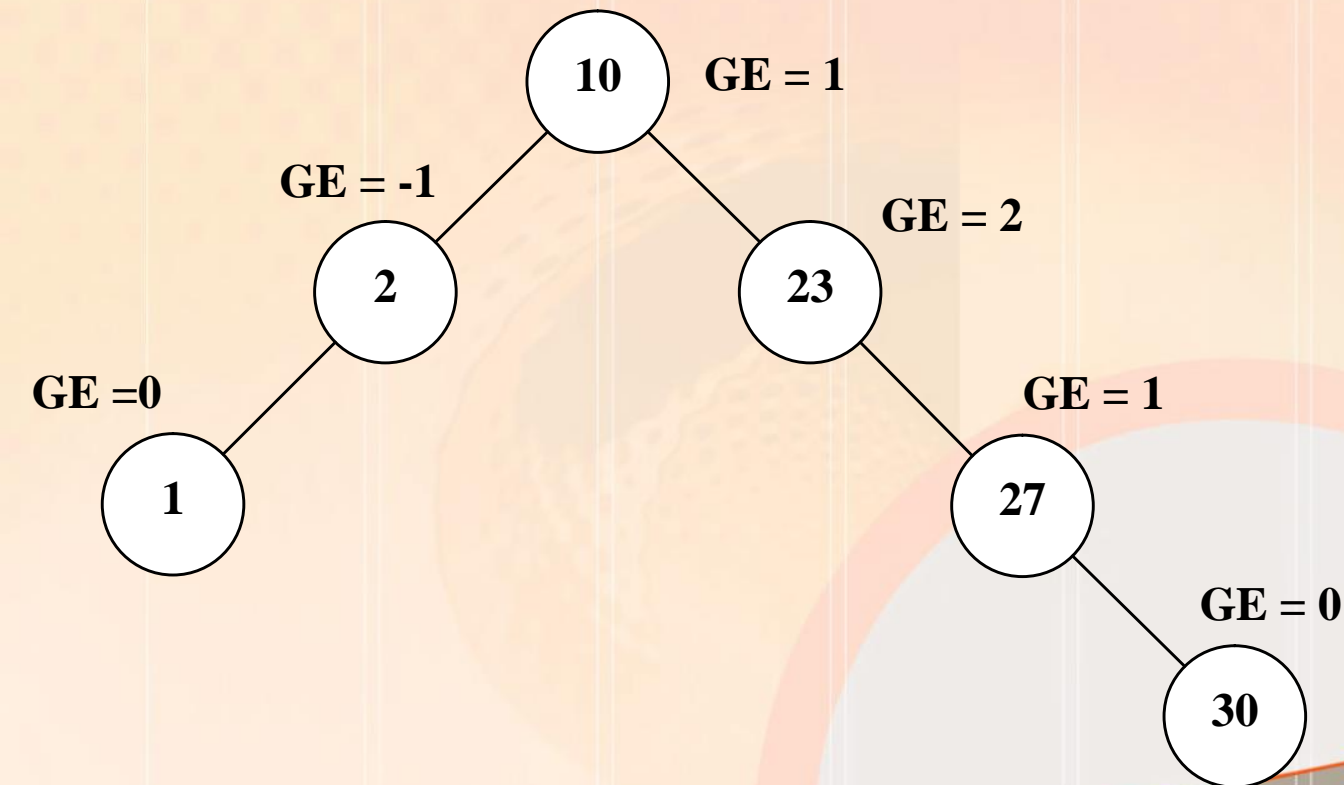
Arbore AVL reechilibrat

# ARBORI AVL

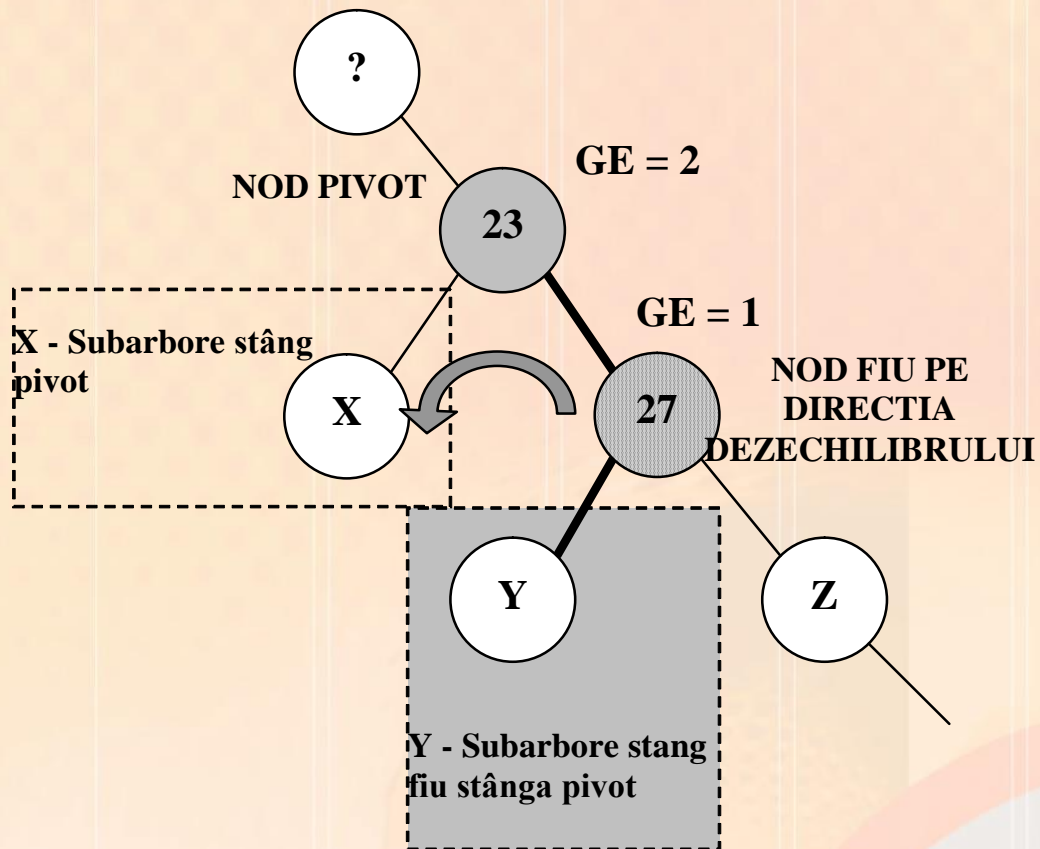
Nodul pivot (**cheia 23**), are  $GE = 2$ : dezechilibru la dreapta.

Nodul fiu stânga (**cheia 27**), are dezechilibru la dreapta.

Reechilibrarea se realizează prin operația de **rotire simplă la stanga**.

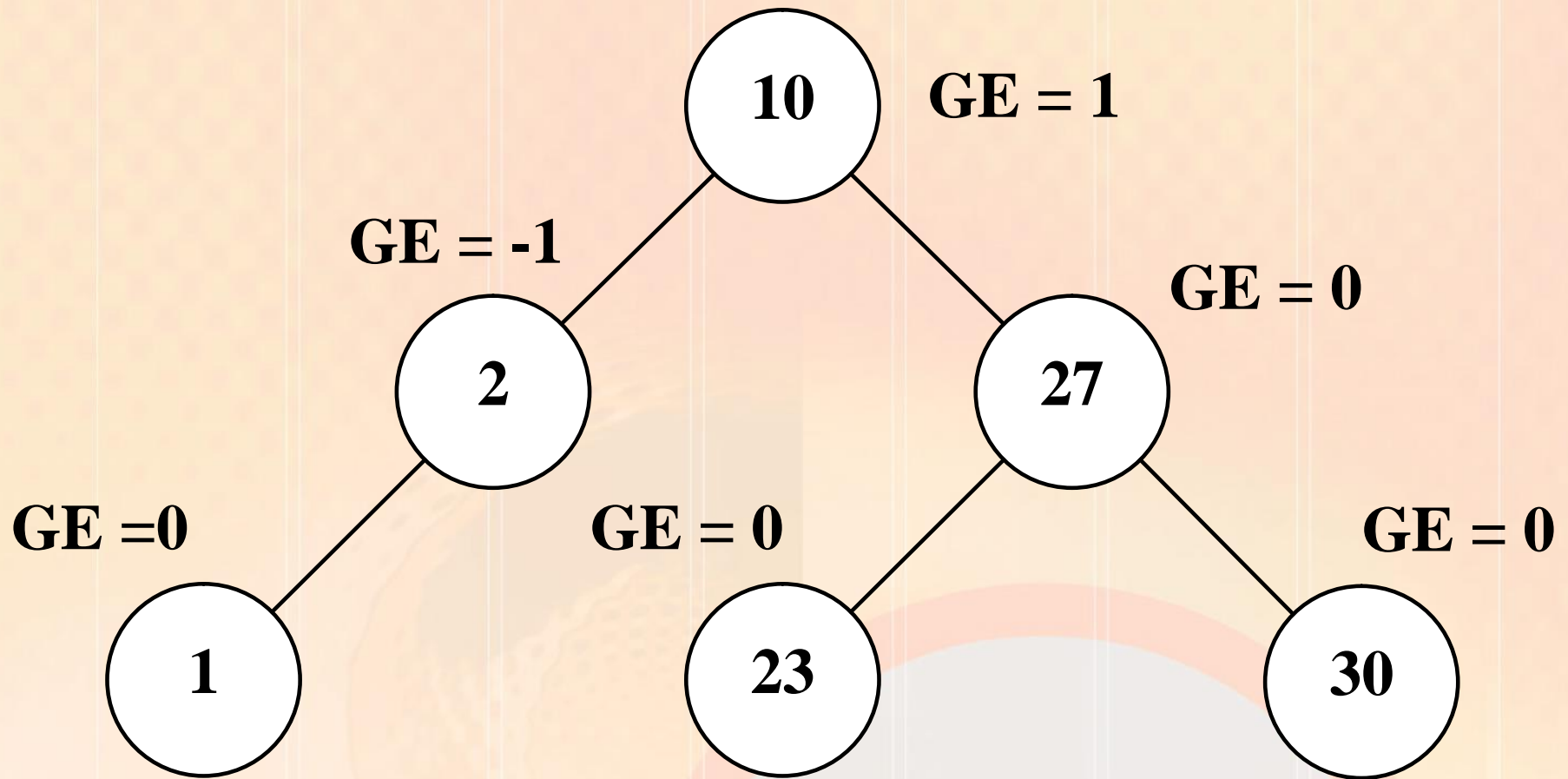


# ARBORI AVL



Procesul de rotire simplă la stânga

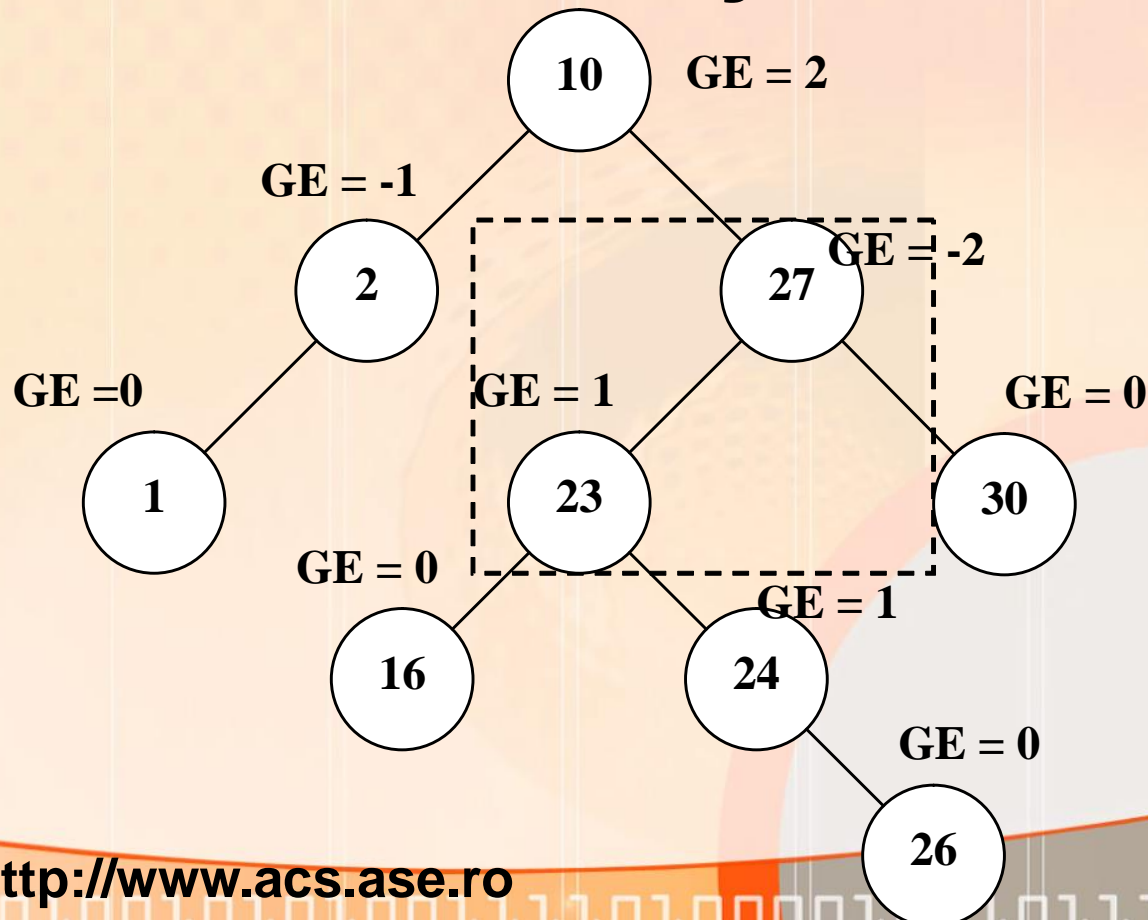
# ARBORI AVL



Arbore AVL reechilibrat

# ARBORI AVL

Se inserează în arborele AVL anterior elementele cu valorile **16**, **24**, **26**. Structura arborescentă obținută este:



Arbore AVL dezechilibrat

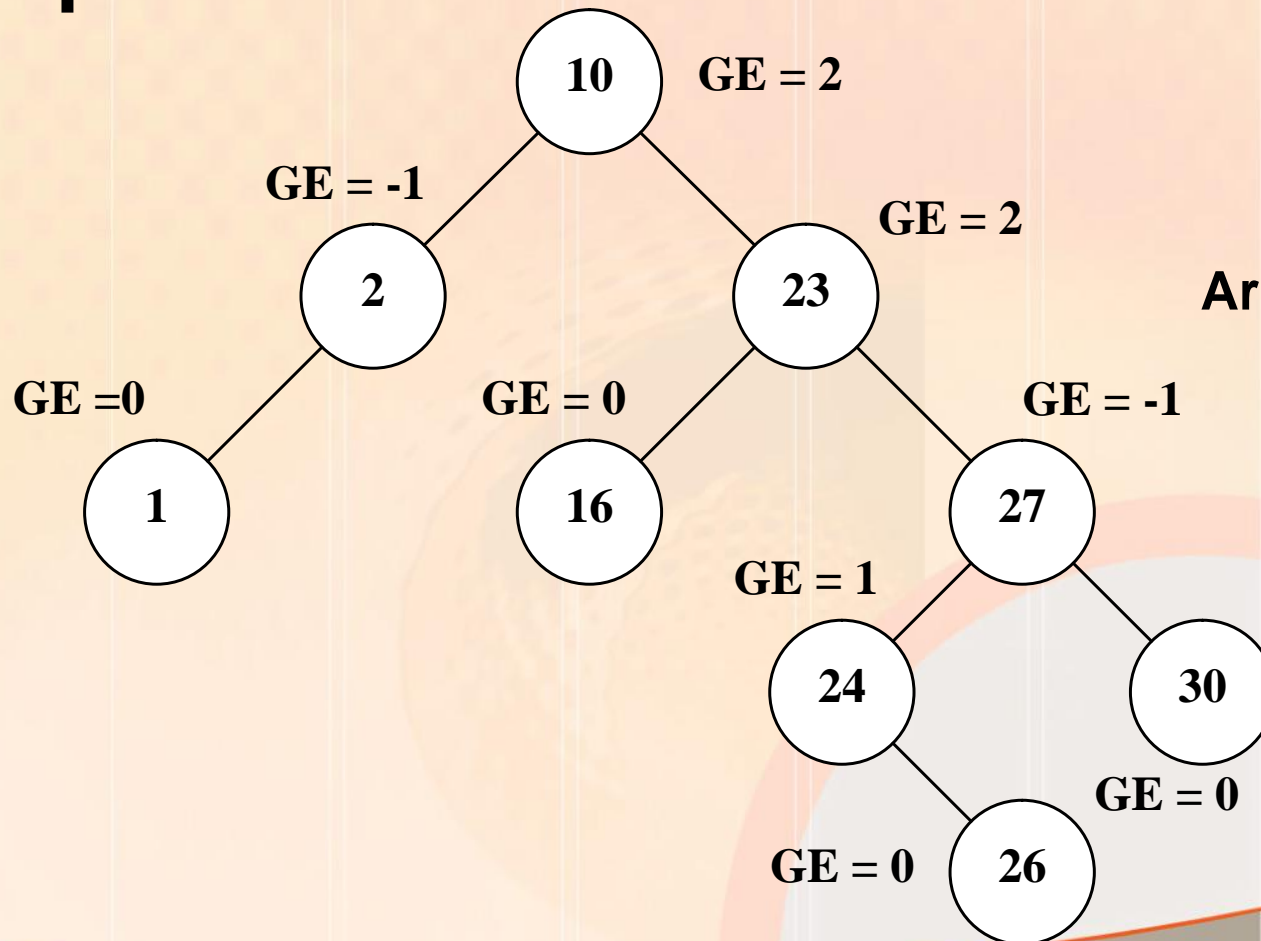


# ARBORI AVL

- **Ultima operatie: inserare nod 26;**
- **Analiza drumului de la nodul 26 rădăcină conduce la identificarea pivotului, nodul 27;**
- **Nodul 27: puternic dezechilibrat la stânga, nodul fiu, nodul 23, este dezechilibrat slab pe direcția opusă;**

# ARBORI AVL

## Simulare rotire simplă la dreapta aplicată pivotului



Arbore AVL dezechilibrat

# ARBORI AVL

Arborele AVL obtinut:

- Este dezechilibrat, dar în sens opus;
- Reechilibrarea: tot cu o rotire simplă, dar în sens opus: va conduce la obținerea ipotezei inițiale;
- Soluția este **ineficienta**.

# ARBORI AVL

## Soluția eficientă:

- Aplicarea unei **rotiri duble**: constă în două rotiri simple;
- **Prima rotire**: scop de a rearanja structura arborescentă astfel încât direcțiile dezechilibrului nodului pivot și a fiului acestuia să aibă același sens;
- **A doua rotire** are ca obiectiv reechilibrarea arborelui;

# ARBORI AVL

**Soluția eficientă (continuare):**

- Cele două rotații sunt aplicate unor **noduri diferite**;
- **Prima rotație**: nodului fiu al nodului pivot, pe direcția dezechilibrului;
- **A doua rotire**: nodului pivot și are sens opus dezechilibrului.



# ARBORI AVL

Pivotul este nodul 27, puternic dezechilibrat la stânga.

Etape pentru a reechilibra arborele:

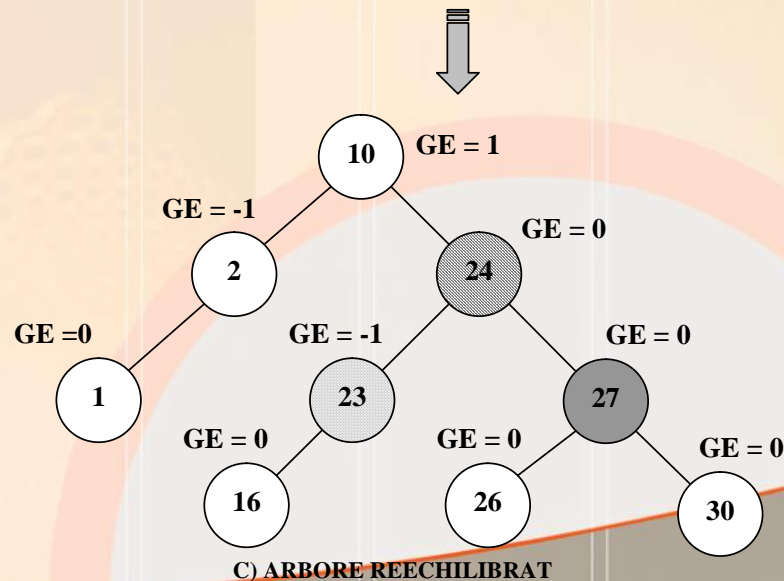
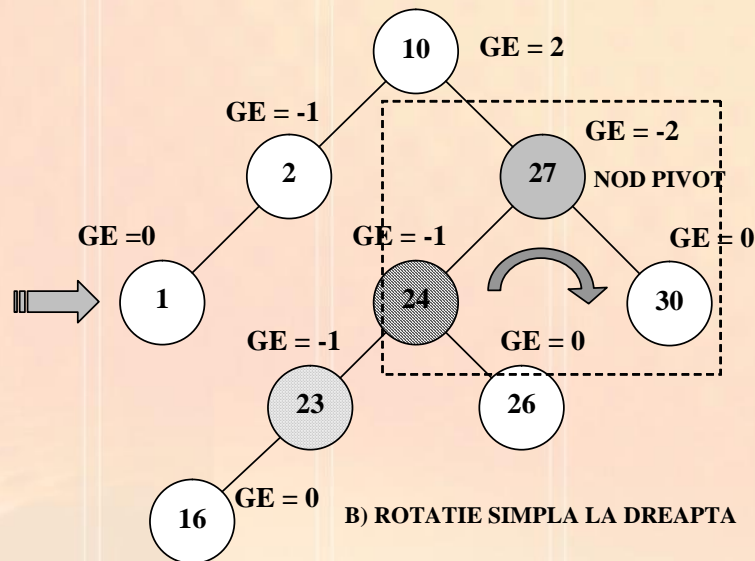
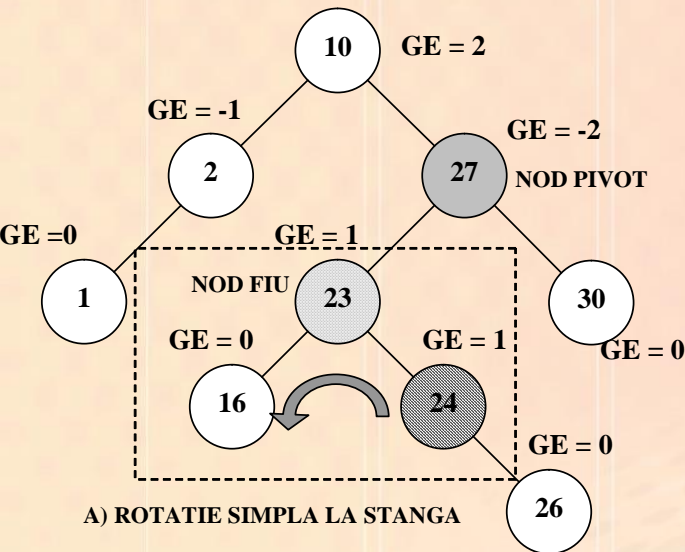
- Se analizează **nodul fiu al nodului pivot** pe direcția dezechilibrului, nodul 23 și este slab dezechilibrat la dreapta;
- Reechilibrare printr-o **dublă rotație** (pivotul și nodul fiu sunt dezechilibrate pe direcții diferite);

# ARBORI AVL

Etape pentru a reechilibra arborele (cont.):

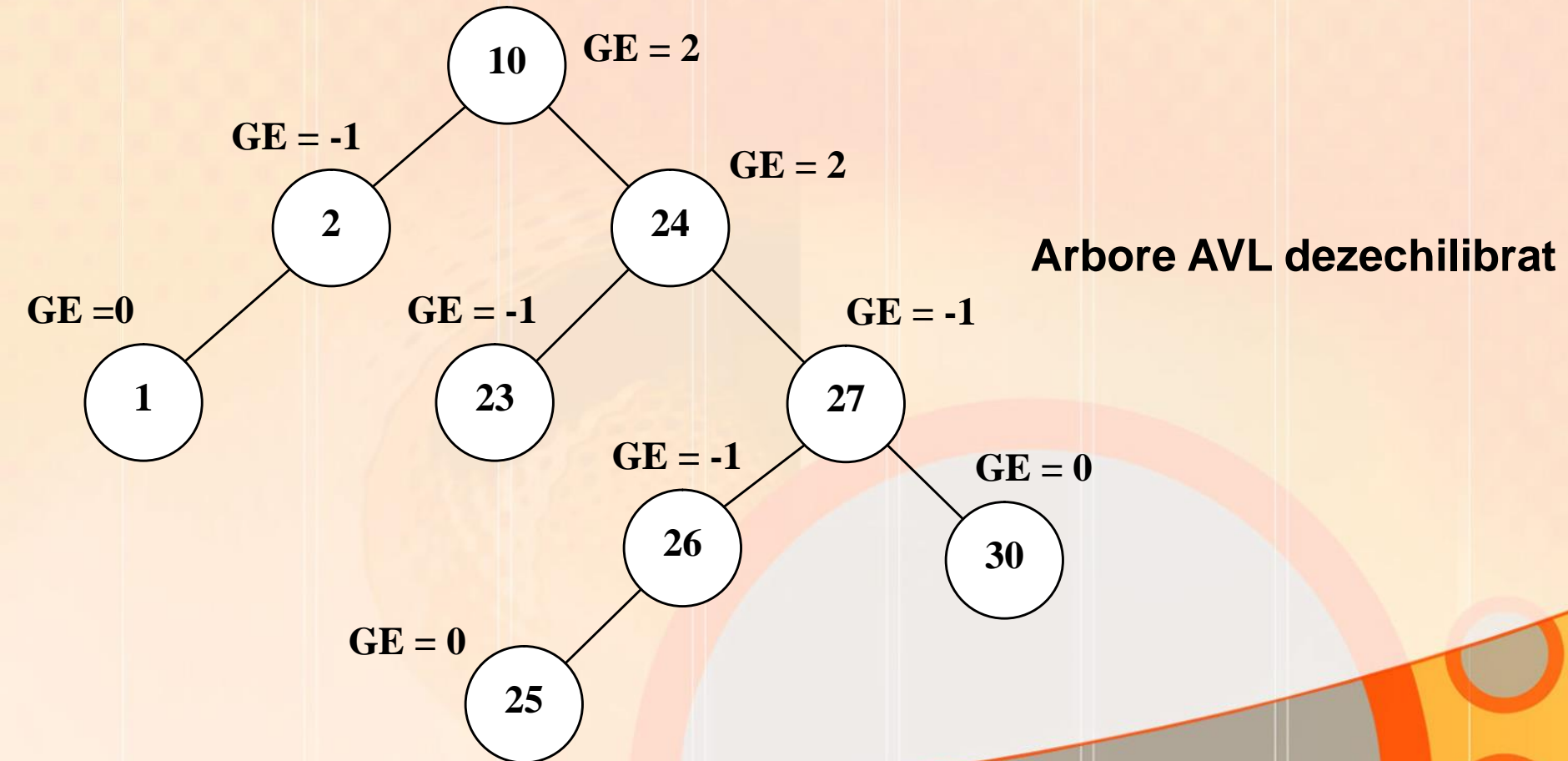
- **Prima rotație** se aplică **nodului fiu**; are sens identic cu dezechilibrul nodului pivot; redefinește situația pentru aplicarea unei rotații simple
- **A doua rotație** se aplică nodului pivot și are sens opus dezechilibrului

# ARBORI AVL



# ARBORI AVL

Reechilibrare arbore AVL prin stergerea unei chei **16** si inserarea cheii **25**.



# ARBORI AVL

Există două noduri, **24** și **10**, ce descriu dezechilibre puternice,  $GE = 2$ , la dreapta.

Analiza drumului de la noul nod inserat la rădăcină arborelui, stabilește ca fiind pivot nodul cu valoarea **24**.

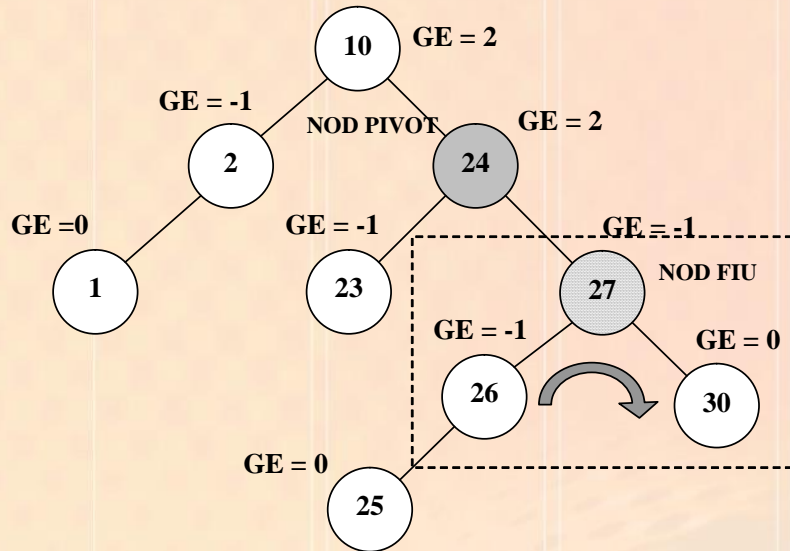


# ARBORI AVL

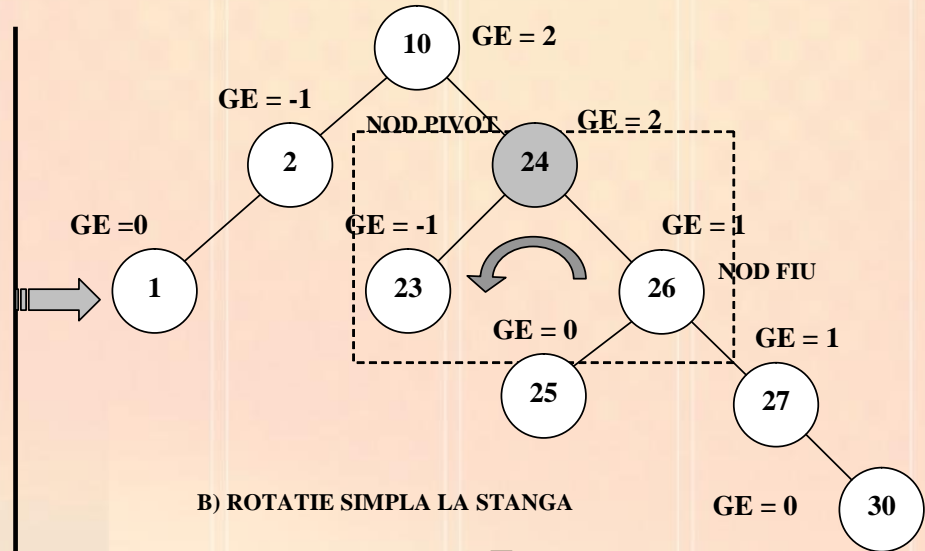
Reechilibrarea presupune:

- **Rotație simplă la dreapta** în nodul fiu al pivotului **27**; dacă pivotul are ambii fii atunci rotația se face în direcția dezechilibrului;
- **Rotație simplă la stânga**, în sens opus dezechilibrului, în nodul pivot;

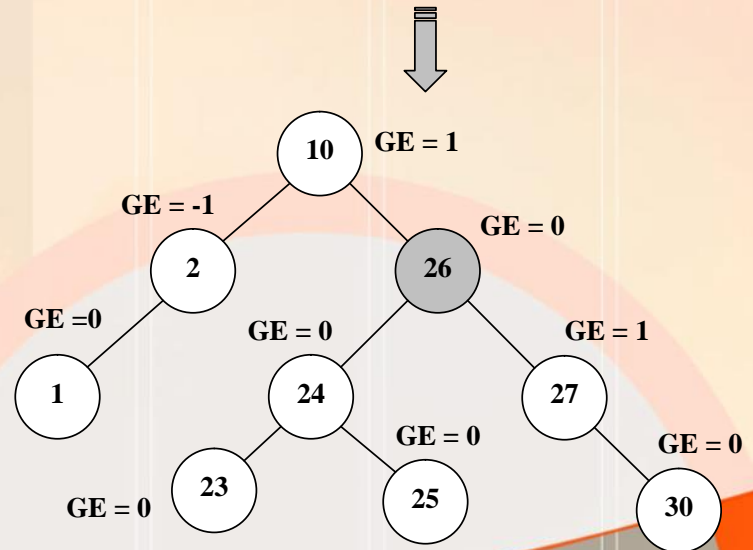
# ARBORI AVL



A) ROTATIE SIMPLA LA DREAPTA



B) ROTATIE SIMPLA LA STANGA



C) ARBORE REECHILIBRAT

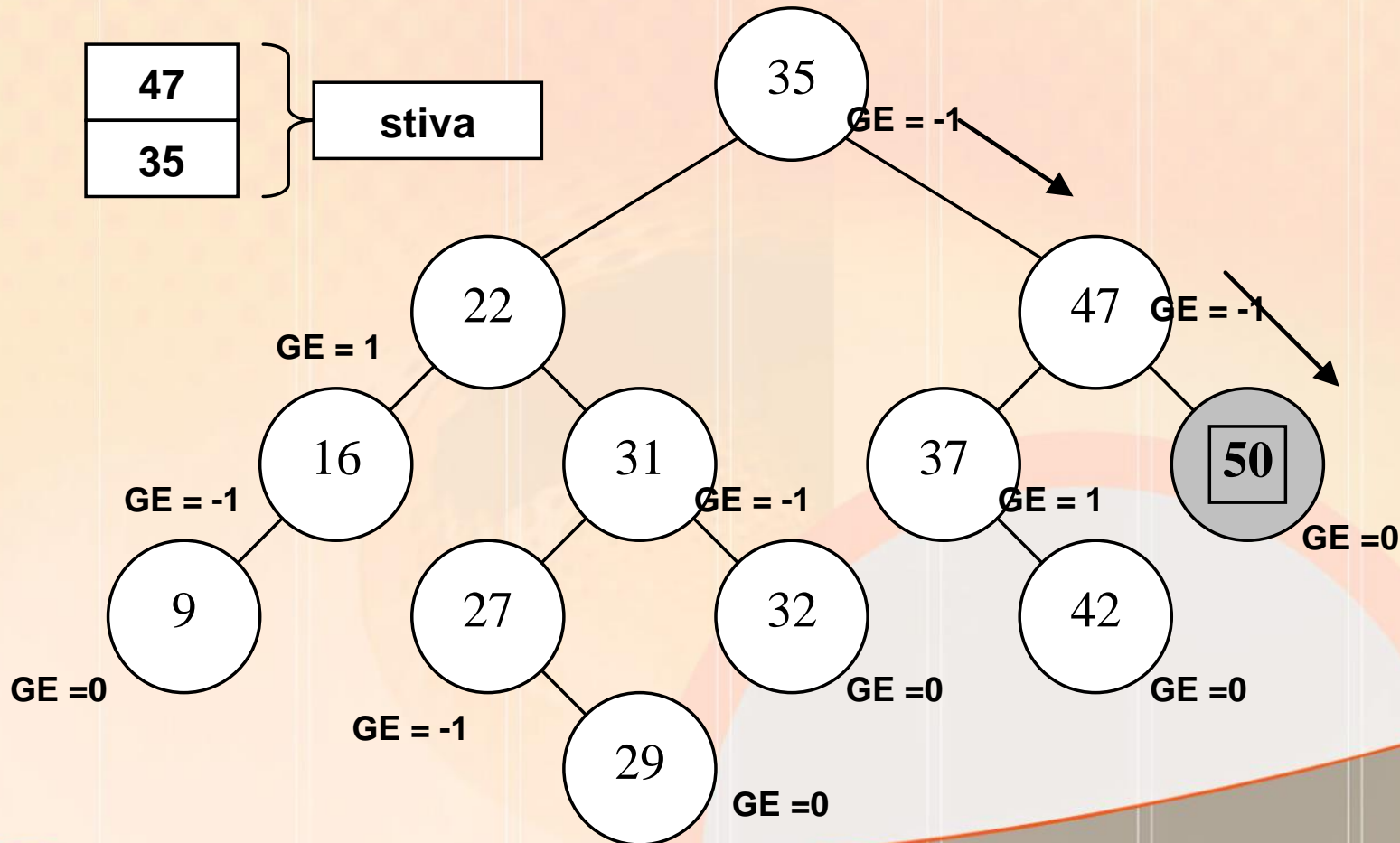
# ARBORI AVL

## Situații dezechilibru arbori AVL (operația de inserare)

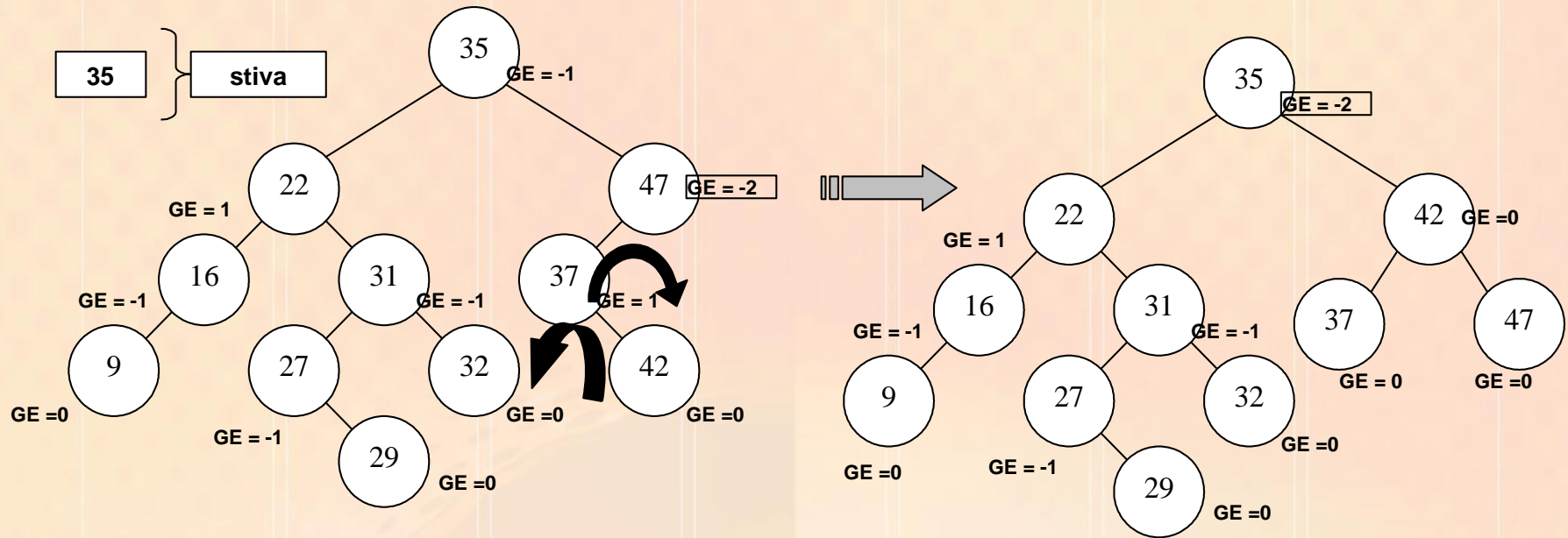
Grad echilibru nod pivot	Nod fiu analizat	Grad echilibru nod fiu (pe direcția dezechilibrului dat de pivot)	Rotire
+2	dreapta	+1 / 0	Simplă la stânga
+2	dreapta	-1	Dublă la stânga: rotire simplă la dreapta în fiul din dreapta al pivotului; rotire simplă la stânga în pivot.
-2	stânga	-1 / 0	Simplă la dreapta
-2	stânga	+1	Dublă la dreapta: rotire simplă la stânga în fiul din stânga al pivotului; rotire simplă la dreapta în pivot.

# ARBORI AVL

Din arborele AVL de mai jos, se șterge nodul **50**.



# ARBORI AVL



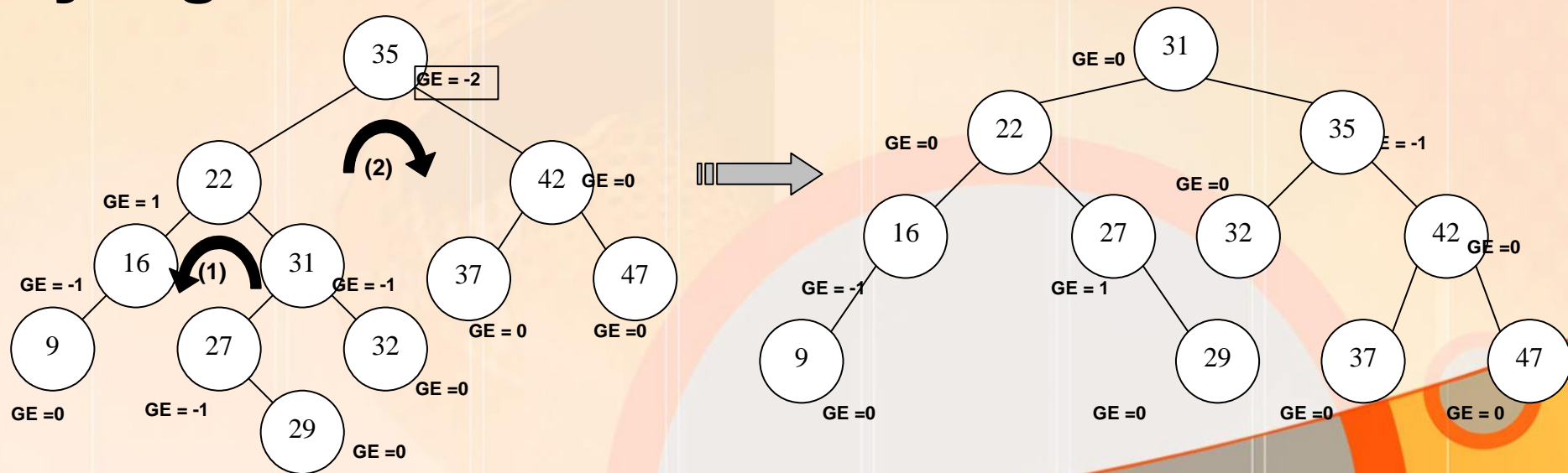
**Structură arborescenta de tip AVL dezechilibrată prin aplicarea unei rotații duble (1. stanga in 37, 2. dreapta in 42)**



# ARBORI AVL

Printr-o rotație la dreapta în nodul cu valoarea **35** considerat pivot, arborele AVL este reechilibrat.

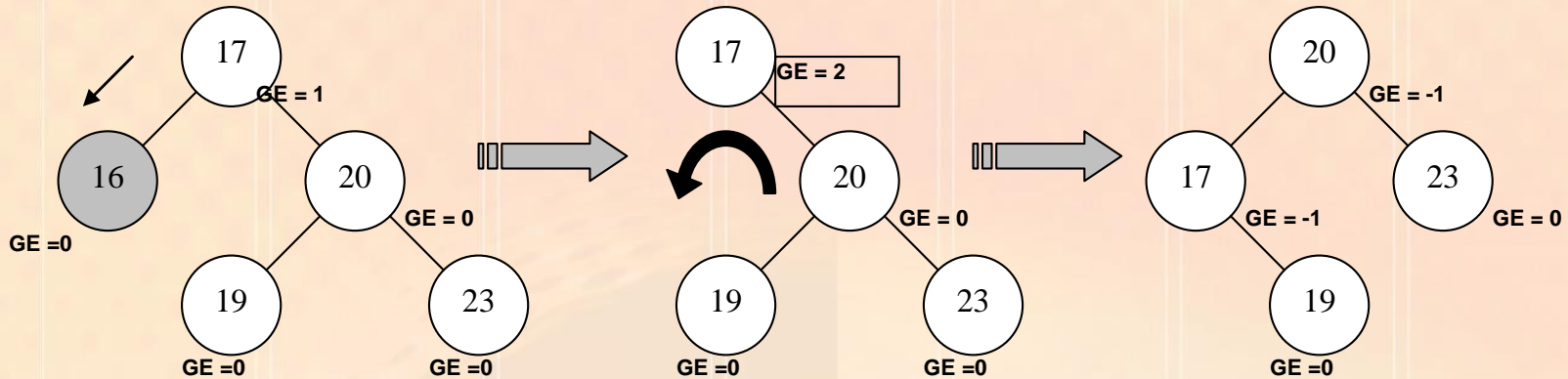
Deoarece stiva a fost golită, operație de ștergere se consideră încheiată



Structură arborescentă de tip AVL

# ARBORI AVL

## Situații de dezechilibru diferite de ipotezele analizate la operația de inserare



### Ștergere din structură arborescentă de tip AVL

Pivotul are un grad de echilibru **+2**, iar nodul fiu de pe direcția dezechilibrului are un echilibru **0**.

Soluția este data de o rotație simplă în pivot la stânga.

# ARBORI ROSU&NEGRU

## Caracteristici:

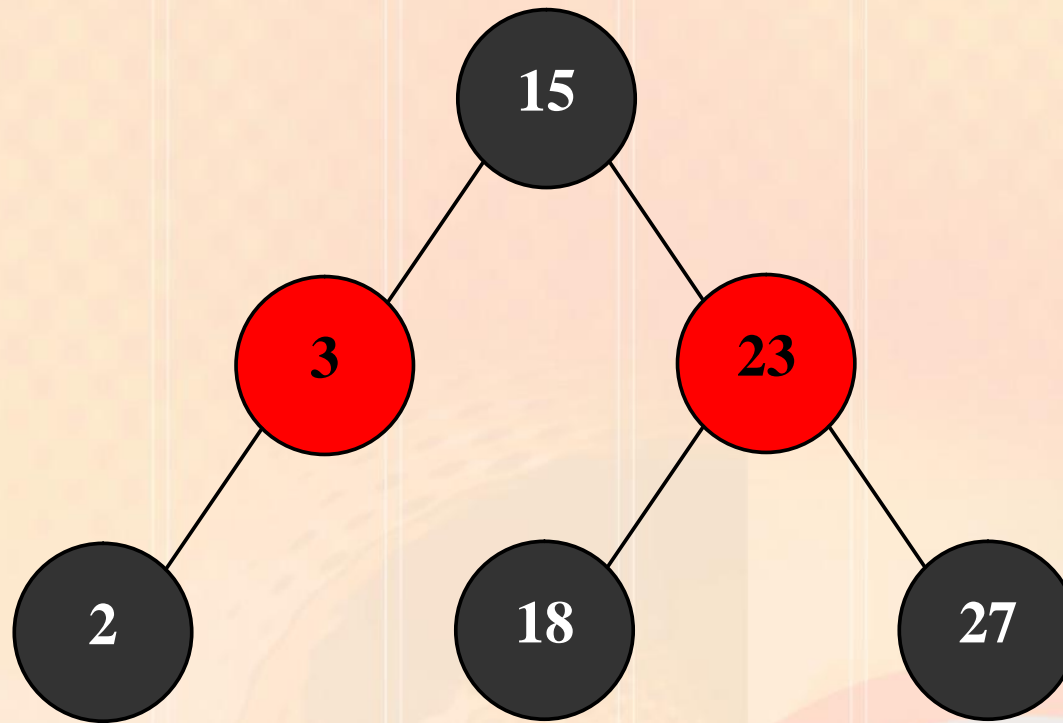
- Tipologie de arbori binari de căutare echilibrați;
- Definiți de Rudolf Bayer în 1972 sub forma de arbori simetrici;
- Nodurile sunt plasate în mod simetric în subarborii stânga sau dreapta.

# ARBORI ROSU&NEGRU

**Factorul cel mai important este dat de culoarea fiecărui nod:**

- **Fiecare nod are una dintre cele două culori, roșu sau negru;**
- **Nodul rădăcină este întotdeauna negru;**
- **Ambele noduri fiu ale unui nod părinte roșu sunt negre; un nod roșu nu poate avea ca părinte decât un nod negru;**
- **toate drumurile de la rădăcină la oricare din nodurile frunză conțin același număr de noduri negre.**

# ARBORI ROSU&NEGRU



Structură arborescenta de tip Roșu & Negru