Линал++.

Вектора из $\mathbb{R}^n$ будем обозначать жирными буквами, а значения отдельных чисел в векторе – той же буквой, только нежирной и с индексом. Например x_i – это i-тое число в векторе $\mathbf{x}$. **Жирные** задачи важны для понимания дальнейшего материала, а не жирные просто к слову пришлись.

Определение 1. ***Скалярное произведение*** *на* $\mathbb{R}^n$ *это любая функция* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *от двух векторов такая что:*

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ *(симметричность)*
- $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$ *и* $\langle c \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *(билинейность)*
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$ *при этом* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *(положительная определенность)*

Задача 1. Проверьте, что операция $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ является скалярным произведением. Ее называют *стандартным скалярным произведением.*

Задача 2. Проверьте, что скалярное произведение векторов на плоскости из геометрии (произведение длин на косинус) является скалярным произведением в смысле определения 1.

Задача 3. С легкостью (и алгебраично!) выведите теорему косинусов из предыдущей задачи.

Определение 2. ***Норма*** *(она же длина) вектора* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *это* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, *(заметьте, что определение нормы зависит от выбора скалярного произведения)*

Задача 4 (многомерная теорема Пифагора). а) Пусть вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, то есть $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Убедитесь что $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2}$.

б) Пусть есть много попарно ортогональных векторов $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots \mathbf{x_k}$. Докажите что:

$$\|\mathbf{x_1} + \mathbf{x_1} + \ldots + \mathbf{x_k}\| = \sqrt{\|\mathbf{x_1}\|^2 + \|\mathbf{x_2}\|^2 + \ldots + \|\mathbf{x_k}\|^2}.$$

Задача 5. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – (произвольное) скалярное произведение на плоскости.

а) Докажите, что есть базис (v_1, v_2), такой что $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ и $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ (такой базис называется ***ортонормальным***).

б) Докажите, что в системе координат, заданной ортонормальным базисом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ является стандартным скалярным произведением.

в) Обобщите результат предыдущих пунктов на $\mathbb{R}^n$.

г) Выведите из **б)** эквивалентность двух определений скалярного произведения на плоскости (через косинус и через координаты).

Определение 3. *Функция* $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется* ***линейной***, *если:*

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R} : l(c \cdot \mathbf{x}) = c \cdot l(\mathbf{x})$
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : l(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{y})$

Задача 6. Докажите, что линейность функции l равносильна следующему:

$$\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle.$$

Задача 7 (неравенство Коши-Буняковского-Шварца). Докажите[1] что :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leqslant \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

а) для $\mathbb{R}^2$ (через **5а, б**)

б) для $\mathbb{R}^n$ (через пункт **а**)

в) для любых (возможно бесконечномерных) векторных пространств над $\mathbb{R}$.

Задача 8. Равенство в КБШ достигается тогда и только тогда, когда вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пропорциональны.

Задача 9. Проверьте свойства нормы:

а) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, при этом $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

б) $\|c \cdot \mathbf{x}\| = |c| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

в) (многомерное неравенство треугольника) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (используйте КБШ).

---

[1] Есть еще стандартное доказательство и мерзкое через буковки.

Задача 10. Пусть $a+b+c=1$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$

Задача 11. Пусть $a_1, \ldots, a_n > 0$. Докажите, что $(a_1+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$

Определение 4. ***Ковариация*** *двух случайных величин X и Y это*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y).$$

Определение 5. ***Дисперсия*** *случайной величины X это $\mathbb{D}(X) = Cov(X,X)$.*

Определение 6. ***Корреляция*** *двух случайных величин X и Y это*

$$corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X \cdot \mathbb{D}Y}}.$$

Задача 12. Докажите, что корреляция может принимать значения только в отрезке $[-1,1]$. Т. е. для любых X и Y верно: $-1 \leqslant corr(X,Y) \leqslant 1$.