

# Производные на скорую руку.

"о" малое. *читайте тут.*

В этом листке для двух функций  $f$  и  $g$  будут встречаться записи вида  $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$ . Они означают, что для любой бесконечно малой последовательности  $(\varepsilon_n)$  ненулевых чисел, последовательность  $\frac{f(\varepsilon_n)}{|g(\varepsilon_n)|}$  – бесконечно малая. При этом предполагается, что  $g(\varepsilon) \neq 0$  при  $\varepsilon \neq 0$ . Подробнее про такие обозначения можно почитать в третьей главе Кормена.

**Определение 2.** Число  $a$  называют производной функции  $f$  в точке  $x$ , если

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + a\varepsilon + o(\varepsilon)$$

Иными словами  $f(x + \varepsilon) = f(x) + a\varepsilon + g(\varepsilon)$ , где  $g(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ .

Производная функции  $f$  в точке  $x$  обозначается  $f'(x)$

**Задача 1.** Осмыслите и проверьте следующие тождества:

а)  $\varepsilon^2 = o(\varepsilon)$ ,

б)  $\varepsilon^3 = o(\varepsilon^2)$ ,

в)  $o(\varepsilon^3) + o(\varepsilon^2) = o(\varepsilon^2)$ ,

г)  $\varepsilon = o(1)$ ,

д)  $\varepsilon \cdot o(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ .

**Задача 2.** Докажите эквивалентность определений производной.

**Задача 3.** Пусть функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x$ . Найдите производные в точке  $x$  у функций  $f + g$  и  $f \cdot g$  (и докажите, что они существуют).

**Задача 4.** Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x$ , а  $g$  – в точке  $f(x)$ . а) Найдите производную  $g(f(x))$  в точке  $x$ . а) Пусть также  $f$  и  $g$  взаимно обратны, т. е.  $g(f(x)) = x$ . Докажите, что  $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ .

**Задача 5.** Докажите, что  $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + o(\varepsilon)$ .

**Задача 6.** Найдите производную функции  $\frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$ .

**Задача 7.** Пусть функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x$  и  $g(x) \neq 0$ . Найдите производную  $\frac{f(x)}{g(x)}$  в точке  $x$ .

**Задача 8.** Найдите производные следующих функций:

а)  $\sin$

б)  $\cos$

в)  $x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

г)  $x^{-n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

Экспонента – это функция  $\exp(x)$ , такая что  $\exp'(x) = \exp(x)$  и  $\exp(0) = 1$ .  $\exp(x)$  также записывают как  $e^x$ . Логарифм ( $\log(x)$ ) – это обратная функция к экспоненте, определенная только на положительных числах. Т. е.  $\forall x : \log(\exp(x)) = x$  и  $\forall x > 0 : \exp(\log(x)) = x$ . То, что экспонента и логарифм существуют и дифференцируемы на всей своей области определения давайте пока считать очевидным.

**Задача 9.** Найдите производную  $\log(x)$  (при  $x > 0$ ).

**Задача 10\* (ненужная).** Помахайте руками и обоснуйте тождество:

$$\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$