

Линал++.

Вектора из \mathbb{R}^n будем обозначать жирными буквами, а значения отдельных чисел в векторе – той же буквой, только нежирной и с индексом. Например x_i – это i -тое число в векторе \mathbf{x} . **Жирные** задачи важны для понимания дальнейшего материала, а не жирные просто к слову прилились.

Определение 1. Скалярное произведение на \mathbb{R}^n это любая функция $\langle \cdot, \cdot \rangle$ от двух векторов такая что:

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ (симметричность)
- $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$ и $\langle c \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ (билинейность)
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ при этом $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (положительная определенность)

Задача 1. Проверьте, что операция $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ является скалярным произведением. Ее называют *стандартным скалярным произведением*.

Задача 2. Проверьте, что скалярное произведение векторов на плоскости из геометрии (произведение длин на косинус) является скалярным произведением в смысле определения 1.

Задача 3. С легкостью (и **алгебраично!**) выведите теорему косинусов из предыдущей задачи.

Определение 2. Норма (она же длина) вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ это $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, (заметьте, что определение нормы зависит от выбора скалярного произведения)

Задача 4 (многомерная теорема Пифагора). а) Пусть вектора \mathbf{x} и \mathbf{y} ортогональны, то есть $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Убедитесь что $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2}$.

б) Пусть есть много попарно ортогональных векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$. Докажите что:

$$\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_k\| = \sqrt{\|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 + \dots + \|\mathbf{x}_k\|^2}.$$

Задача 5. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – (произвольное) скалярное произведение на плоскости.

а) Докажите, что есть базис (v_1, v_2) , такой что $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ и $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ (такой базис называется **ортонормальным**).

б) Докажите, что в системе координат, заданной ортонормальным базисом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ является стандартным скалярным произведением.

в) Обобщите результат предыдущих пунктов на \mathbb{R}^n .

г) Выведите из б) эквивалентность двух определений скалярного произведения на плоскости (через косинус и через координаты).

Определение 3. Функция $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется **линейной**, если:

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R} : l(c \cdot \mathbf{x}) = c \cdot l(\mathbf{x})$
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : l(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{y})$

Задача 6. Докажите, что линейность функции l равносильна следующему:

$$\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle.$$

Задача 7 (неравенство Коши-Буняковского-Шварца). Докажите¹ что :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

а) для \mathbb{R}^2 (через 5а, б)

б) для \mathbb{R}^n (через пункт а)

в) для любых (возможно бесконечномерных) векторных пространств над \mathbb{R} .

Задача 8. Проверьте свойства нормы:

а) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, при этом $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

б) $\|c \cdot \mathbf{x}\| = |c| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

в) (многомерное неравенство треугольника) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (используйте КБШ).

Задача 9. Пусть $a + b + c = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

¹ Есть еще **стандартное доказательство** и **мерзкое через буковки**.

Задача 10. Пусть $a_1, \dots, a_n > 0$. Докажите, что $(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$

Определение 4. Ковариация двух случайных величин X и Y это

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y).$$

Определение 5. Дисперсия случайной величины X это $\mathbb{D}(X) = \text{Cov}(X, X)$.

Определение 6. Корреляция двух случайных величин X и Y это

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X \cdot \mathbb{D}Y}}.$$

Задача 11. Докажите, что корреляция может принимать значения только в отрезке $[-1, 1]$.
Т. е. для любых X и Y верно: $-1 \leq \text{corr}(X, Y) \leq 1$.