Концентрированный ликбез по терверу

Конечное множество Ω является *конечным вероятностным пространством*, если для любого его подмножества $A \subset \Omega$ задана его *вероятность* $\mathrm{P}(A)$ и выполняются следующие условия:

- $\mathrm{P}(\varnothing) = 0, \mathrm{P}(\Omega) = 1$.
- Для любого $A \subset \Omega$ верно $\mathrm{P}(A) \geqslant 0$.
- Для любых $A, B \subset \Omega$ верно $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Элементы $\omega \in \Omega$ принято называть *элементарными исходами*, а подмножества Ω — *событиями*. События A и B называются *независимыми*, если $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

Случайной величиной (на вероятностном пространстве Ω) называется произвольная функция X из Ω в вещественные числа. *Математическим ожиданием* (оно же *матожидание*) случайной величины X называется число

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathrm{P}(\omega).$$

Задача 1. Для произвольных величин X и Y докажите что $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Задача 2. Докажите что тогда формулу для ее матожидания можно переписать так:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathrm{P}(X = x)$$

Задача 3 (неравенство Маркова). Пусть X - неотрицательная случайная величина (т. е. $\mathrm{P}(X \geqslant 0) = 1$). Докажите что для любого положительного a верно что $\mathrm{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

Задача 4. В некоторой лотерее билет стоит 100 рублей и 40% средств идут на выплату призов. Докажите что вероятность выиграть 5000 рублей меньше 1%.

Определение 1. *Случайные величины X и Y называются* ***независимыми****, если любые двух a и b события вида $X = a$ и $Y = b$ независимы.*

Задача 5. Пусть A и B – произвольные множества. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы то события $X \in A$ и $Y \in B$ независимы.

Задача 6. Приведите пример двух независимых и двух зависимых случайных величин.

Задача 7. Пусть величины X и Y независимы, докажите что $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Задача 8. Приведите контрпример к утверждению предыдущей задачи для зависимых случайных величин.

Определение 2. ***Дисперсией*** *случайной величины X называется число*

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

.

Задача 9. Дисперсия величины X равна d, чему тогда равна дисперсия

а) величины $X + ?$

б) величины $a \cdot X$?

Задача 10. Пусть величины X и Y независимы, докажите что $\mathbb{D}(X+Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y)$.

Задача 11 (неравенство Чебышева). Докажите что $\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{D}(X)}{a^2}$.

Задача 12. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины с дисперсией d. Найдите дисперсию величины $S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$

Задача 13 (Слабый закон больших чисел). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины с неизвестным вам матожиданием m. Известно, что дисперсия каждой из них не превосходит d. Вам дали задание оценить m с точностью $\varepsilon > 0$ и дали право ошибаться с вероятностью $\delta > 0$. Какое нужно взять n, чтобы оценка $S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ подходила?