Матожидания.

Пусть дано вероятностное пространство Ω. *Случайной величиной* (на вероятностном пространстве Ω) называется произвольная функция ξ из Ω в вещественные числа[1]. *Математическим ожиданием* (оно же *матожидание*) случайной величины ξ называется число[2]

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)P(\omega).$$

Задача 1. Чему равно матожидание числа, выпадающего на игральном кубике?

Задача 2. **а)** Докажите, что:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{y\in\xi(\Omega)} y\cdot P(\xi = y)$$

($\xi(\Omega)$ обозначает множество всех значений функции ξ на множестве Ω).

б) Предположим случайная величина ξ принимает только неотрицательные целые значения. Докажите, что:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=0}^{\infty} P(\xi > i).$$

Задача 3. В Китае ввели закон, имеющий целью уменьшить прирост населения. Если в семье первый ребёнок — мальчик, семье не разрешается больше иметь детей. Если же первый ребёнок — девочка, можно завести еще одного ребёнка. Как выполнение закона повлияет на соотношение численностей мужского и женского населения в Китае (вероятностью рождения двойняшек пренебречь).

Задача 4. Докажите, что $\mathbb{E}(\xi+\zeta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\zeta$.

На предыдущей задаче основан важный *принцип линейности матожидания*[3]: "Пусть вам дали сложную и страшную случайную величину ξ и требуют посчитать ее матожидание. Но вы вы догадались, что ее можно разложить в сумму некоторого числа более понятных величин: $\xi = \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_N$. Тогда $E\xi = E\xi_1+E\xi_2+\ldots+E\xi_N$."
Вот вам три задачи, чтобы распробовать, как этот принцип применять:

Задача 5. Каждый из n людей положил в мешок по подарку, затем подарки в мешке перемешали и каждый вытащил подарок для себя. Найдите матожидание числа тех, кому достался подарок, который они сами принесли.

Задача 6. Собралось k случайных людей. Найдите матожидание числа пар людей с совпадающими днями рождения (предполагается, что никто не родился 29 февраля).

Задача 7. Если человек тратит в очереди минуту на ожидание, будем говорить, что бесцельно затрачена одна человеко-минута. В очереди в банке стоит восемь человек, из них пятеро планируют простые операции, занимающие 1 минуту, а остальные планируют операции, занимающие 5 минут. Рассмотрим суммарное количество бесцельно затраченных человеко-минут, найдите его: **а)** наименьшее и наибольшее возможное значения; **б)** математическое ожидание, при условии, что клиенты встают в очередь в случайном порядке.

Пусть A – событие с ненулевой вероятностью. *Условным математическим ожиданием* случайной величины ξ при условии A называется число

$$\mathbb{E}(\xi|A) = \frac{1}{P(A)}\sum_{\omega\in A} \xi(\omega)P(\omega).$$

---

[1] Традиционно в олдскульном тервере для обозначения случайных величин используются станные греческие буквы вроде ξ, ζ, η.

[2] реже то же самое часто обозначают $M\xi$.

[3] Эта техника подсчета матожиданий, подробно описанна в этой (возможно, уже вам известной) книге: "Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. - Алгоритмы: построение и анализ"(глава 5).

Задача 8. Докажите, что:

$$\mathbb{E}(\xi|A) = \sum_{y \in \xi(\Omega)} y \cdot P(\xi = y|A)$$

Задача 9. **а)** Кинули два кубика, каково матожидание числа выпавшего на первом кубике при условии, что в сумме выпало 10?
б) (пример *регрессии к среднему*) Предположим, что люди рождаются с IQ принимающим целые значения из $[50, 150]$ с равными вероятностями. При измерении IQ возникает ошибка, равновероятно принимающая целые значения из $[-50, 50]$ (ошибка независима с IQ). Каково матожидание IQ человека, написавшего тест на $100 + k$ баллов.

Неравенства и закон больших чисел.

Задача 10 (неравенство Маркова). Пусть X - неотрицательная случайная величина (т. е. её значения на любом элементарном исходе неотрицательны). Докажите что $\mathrm{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$ (где a – любое положительное число).

Задача 11. В некоторой лотерее билет стоит 100 рублей и 40% средств идут на выплату призов. Докажите что вероятность выиграть 5000 рублей меньше 1%.

Определение 1. *Случайные величины X и Y называются* ***независимыми****, если любые двух a и b события вида $X = a$ и $Y = b$ независимы.*

Задача 12. Пусть A и B – произвольные множества в $\mathbb{R}$. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы, то события $X \in A$ и $Y \in B$ независимы.

Задача 13. Приведите пример двух независимых и двух зависимых случайных величин.

Задача 14. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы, то $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Задача 15. Приведите контрпример к утверждению предыдущей задачи для зависимых случайных величин.

Определение 2. ***Дисперсией***[4] *случайной величины X называется число*

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$$

.

Задача 16. Докажите, что $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$.

Задача 17. Дисперсия величины X равна d, чему тогда равна дисперсия
а) величины $X + c$?
б) величины $a \cdot X$?

Задача 18. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы, то $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y)$.

Задача 19 (неравенство Чебышева). Докажите что $\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{D}(X)}{a^2}$.

Задача 20. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины с дисперсией d. Найдите дисперсию величины $S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$

Задача 21 (Слабый закон больших чисел). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины с неизвестным вам матожиданием m. Известно, что дисперсия каждой из них не превосходит d. Вам дали задание оценить m с точностью $\varepsilon > 0$ и дали право ошибаться с вероятностью $\delta > 0$. Какое нужно взять n, чтобы оценка $S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ подходила?

[4] Также это называют вариацией и обозначают $Var(X)$.