Теория

Говорят, что конечное множество Ω является *конечным вероятностным пространством*, если для любого его подмножества $A \subset \Omega$ задана его *вероятность* $P(A)$ и выполняются следующие условия:

- $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$.
- Для любого $A \subset \Omega$ верно $P(A) \geqslant 0$.
- Для любых $A, B \subset \Omega$ верно $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Элементы $\omega \in \Omega$ принято называть *элементарными исходами*, а подмножества Ω — *событиями*. События A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Задача 1. Придумайте вероятностные пространства для задач 5 (про 2 монеты) и 6 (про 2 кубика) из этого листка.

Задача 2. A и B независимы. Докажите что A и $\overline{B} = \Omega \backslash B$ независимы.

Если $P(B) \neq 0$, то *условной вероятностью* события A при условии события B называется число $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Задача 3. Пусть $P(B) \neq 0$, тогда A и B независимы $\Leftrightarrow P(A) = P(A|B)$.

Задача 4 (формула Байеса). Проверьте что $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$.

Задачи

Задача 5. Одновременно подбрасываются 2 монеты, какова вероятность того что выпадет хотя бы один орел?

Задача 6. Кинули два игральных кубика. С какой вероятностью **а)** сумма выпавших чисел равна 9? а 10? **б)** на втором кубике выпало больше, чем на первом? Независимы ли следующие события: **в)** «на первом выпала тройка» и «выпавшая сумма чётна»; **г)** «на первом выпала тройка» и «выпавшая сумма больше 6».

Задача 7. В 90% ресторанов, где есть хорошие бургеры, нет хороших крылышек, а в 90% ресторанов, где есть хорошие крылышки, нет хороших бургеров. Значит ли это, наличия хороших бургеров и хороших крылышек являются зависимыми событиями?

Задача 8. По результатам исследования среди выздоровевших людей 12% принимали лекарство, а среди не выздоровевших – 1%. Журналисты сделали два вывода: 1) Для тех, кто принимает лекарство, вероятность выздороветь в 12 раз больше, чем вероятность не выздороветь. 2) При условии приема лекарства вероятность не выздороветь равна 1%, следовательно вероятность выздороветь равна 99%. **а)** Какие из выводов журналистов верны? **б)** Как посчитать вероятность выздороветь при условии приема лекарства и каких данных для этого не хватает?

Задача 9. В одной лотерее у каждого игрока есть два набора из 15 различных чисел от 1 до 90. Игрок выигрывает джекпот, если случайный набор из 15 различных чисел от 1 до 90 (все такие наборы равновероятны) совпадет с одним из его наборов. Сравните с 1/2 вероятность того, что кто-то получит джекпот, если 10 миллиардов человек будут играть в эту лотерею каждый день в течении 1000 лет (разрешается использовать внешний неорганический мозг).