Вероятностные пространства

Говорят, что конечное множество Ω является *конечным вероятностным пространством*, если для любого его подмножества $A \subset \Omega$ задана его *вероятность* $P(A)$ и выполняются следующие условия:

- $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$.
- Для любого $A \subset \Omega$ верно $P(A) \geqslant 0$.
- Для любых $A, B \subset \Omega$ верно $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Элементы $\omega \in \Omega$ принято называть *элементарными исходами*, а подмножества Ω — *событиями*. События A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Задача 1. Придумайте вероятностные пространства для задач 1 (про 2 монеты) и 3 (про 3 коробки с одним призом) из затравочного листка.

Задача 2. A и B независимы. Докажите что A и $\overline{B} = \Omega \backslash B$ независимы.

Задача 3. Кинули два игральных кубика. Независимы ли следующие события:

а) «на первом выпала тройка» и «выпавшая сумма чётна»;

б) «на первом выпала тройка» и «выпавшая сумма больше 6».

Если $P(B) \neq 0$, то *условной вероятностью* события A при условии события B называется число $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Задача 4. Пусть $P(B) \neq 0$, тогда A и B независимы $\Leftrightarrow P(A) = P(A|B)$.

Задача 5 (формула Байеса). Проверьте что $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$.

Вероятностные пространства

Говорят, что конечное множество Ω является *конечным вероятностным пространством*, если для любого его подмножества $A \subset \Omega$ задана его *вероятность* $P(A)$ и выполняются следующие условия:

- $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$.
- Для любого $A \subset \Omega$ верно $P(A) \geqslant 0$.
- Для любых $A, B \subset \Omega$ верно $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Элементы $\omega \in \Omega$ принято называть *элементарными исходами*, а подмножества Ω — *событиями*. События A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Задача 6. Придумайте вероятностные пространства для задач 1 (про 2 монеты) и 3 (про 3 коробки с одним призом) из затравочного листка.

Задача 7. A и B независимы. Докажите что A и $\overline{B} = \Omega \backslash B$ независимы.

Задача 8. Кинули два игральных кубика. Независимы ли следующие события:

а) «на первом выпала тройка» и «выпавшая сумма чётна»;

б) «на первом выпала тройка» и «выпавшая сумма больше 6».

Если $P(B) \neq 0$, то *условной вероятностью* события A при условии события B называется число $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Задача 9. Пусть $P(B) \neq 0$, тогда A и B независимы $\Leftrightarrow P(A) = P(A|B)$.

Задача 10 (формула Байеса). Проверьте что $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$.