

Байесовская статистика.

Задача 1. Известно, что синдрому внезапной смерти подвержен один человек из 10000. Тест на этот синдром дает верный результат с вероятностью 99%. Тест показывает, что у вас синдром внезапной смерти. С какой вероятностью это действительно так?

А теперь кидаем монеты 100500 раз...

Задача 2. Монету бросили 10 раз. Какова вероятность того, что а) все 10 раз выпал орёл б) сначала выпало 5 орлов, а затем 5 решек в) выпало 5 орлов и 5 решек (в произвольном порядке)?

Задача 3. Монету бросили n раз. С какой вероятностью а) орёл выпал k раз? б) а если монетка была "нечестная" и орёл выпадает с вероятностью p , а не $1/2$?

Задача 4 (!). Из 100 монет одна фальшивая имеет два орла. Выбрали случайно монету, бросили 5 раз: выпали все орлы. С какой вероятностью, если её бросить ещё 10 раз, снова выпадут все орлы?

Задача 5. Вы приходите в бар на диком западе играть в некоторую полностью случайную азартную игру. Вероятность победы в ней равна $1/2$. Известно, что 10% игроков на диком западе – шулеры, которые выигрывают у честных игроков с вероятностью 90%. Вы играете честно. Какова вероятность, что вы играете с шулером, если а)

Задача 6. У шулера в кармане две монетки одна честная, другая нечестная, выпадающая орлом чаще, чем честная. Он достает какую-то из них (какую захочет) и кидает 10 раз. Выпадает 10 орлов. С какой вероятностью взятая им монетка нечестная?

Частотная статистика.

Задача 7 (!). Расскажите мне все про тест точный тест Фишера: в чем состоит нулевая гипотеза; как считать p -value; докажите корректность.

Задача 8 (!). Расскажите мне все про тест Манна-Уитни: в чем состоит нулевая гипотеза; как считать p -value; докажите корректность.

Задача 9. Придумайте, как посчитать статистику Манна-Уитни за $O(n \log n)$ (сортировка + $O(n)$)

Задача 10. Приведите пример таких величин X , Y что $P(Y > X) > 1/2$, но $E(Y) < E(X)$.

Задача 11. Приведите пример таких величин X , Y и Z , что

$$P(Y > X) > 1/2, \quad P(Z > Y) > 1/2 \quad \text{и} \quad P(X > Z) > 1/2.$$

Задача 12*. Посчитайте дисперсию статистики Манна-Уитни при условии нулевой гипотезы.

Задача 13.** Посчитайте правильное p -value для "теста Гальтона".