XXX - цепочка и анзац Бете

Тензорное произведение.

1. Проверьте, что

$$1 \otimes 1 + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z = 2\, P_{12} \tag{1}$$

Координатный анзац Бете.

1. Покажите, что все собственные значения гамильтонина XXX-цепочки

$$H^{XXX} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - \sigma_0^{(k)}\sigma_0^{(k+1)}\right) \tag{2}$$

неотрицательны. Для этого докажите тождество

$$\frac{1}{4}(1 - \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)})^2 = 1 - \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)} \tag{3}$$

и воспользуйтесь им.

2. Покажите, что

$$[H^{XXX}, S_z] = 0, \tag{4}$$

где

$$S_z = \sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}. \tag{5}$$

3. Найдите собственные векторы и спектр энергий из пространства $\mathcal{H}_2$ (напомню, что это все состояния, в которых два "-" и $N-2$ "+"). Таких состояний должно быть $\dim \mathcal{H}_2 = \frac{N(N-1)}{2}$.

   (a) Нужно искать в виде

$$|\Psi\rangle = \left|\Psi^{(2)}\right\rangle = \sum_{1\le k_1<k_2\le N}^{N} a(k_1,k_2)\sigma_-^{(k_1)}\sigma_-^{(k_2)}\,|\Omega\rangle \tag{6}$$

   решения уравнения

$$H^{XXX}\,|\Psi\rangle = E\,|\Psi\rangle\,. \tag{7}$$

   Для этого нужно уравнение (7) домножить слева на $\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)}$. Вы должны получить разные уравнения на коэффициенты $a(k_1,k_2)$ для случаев:

i. $n_1 < n_2 - 1$

ii. $n_1 = n_2 - 1$

iii. $n_1 = 1,\ n_2 = N$

(b) Возьмите теперь $a(n_1, n_2)$ в виде

$$a(n_1, n_2) = A\, e^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2} + B\, e^{ip_2 n_1 + ip_1 n_2} \tag{8}$$

и найдите отношение $\frac{A}{B}$.

(c) Вспомните про периодические условия. Первое и очевидное условие:

$$a(n_1 + N, n_2 + N) = a(n_1, n_2). \tag{9}$$

Какие еще периодические условия нужно наложить? Можно ли наложить условие

$$a(n_1 + N, n_2) = a(n_1, n_2)? \tag{10}$$

4. Найдите собственные векторы и собственные значения гамильтонина XYZ-цепочки при $N = 2$

$$H^{XYZ} = J_x \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + J_y \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} + J_z \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \tag{11}$$