Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Избранные главы теоретической и математической физики (2 семестр)

Коцевич Андрей Витальевич, группа Б02-920

18 февраля 2021 г. Версия 5.0

Содержание

1 Фазовые переходы и модель Изинга (А. Александров)

1.1 Задача 1

1. В теории среднего поля для каждого спина можно записать:

$$s_i = \langle s_i \rangle + \delta s_i \tag{1}$$

где $m = \langle s_i \rangle$ – это средняя намагниченность, а δs_i мало.
Гамильтониан (полная энергия) в модели Изинга с точностью до константы:

$$\mathcal{H} = -Jm \sum_{<ij>} s_i s_j - h \sum_{i=1}^{N} s_i \tag{2}$$

где J – константа спин-спинового взаимодействия, h – внешнее магнитное поле. Угловые скобки означают суммирование только по ближайшим соседям. Слагаемые в сумме со спиновым взаимодействием $s_i s_j$ равны:

$$s_i s_j = (\langle s_i \rangle + \delta s_i)(\langle s_j \rangle + \delta s_j) = \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle + \langle s_i \rangle \delta s_j + \langle s_j \rangle \delta s_i + \delta s_i \delta s_j \tag{3}$$

Т.к. δs_i мало, то последним членом можно пренебречь:

$$s_i s_j = m^2 + m\delta s_i + m\delta s_j = m^2 + m(s_i - \langle s_i \rangle) + m(s_j - \langle s_j \rangle) = m^2 + m(s_i + s_j) - 2m^2 = m(s_i + s_j - m)$$

Следовательно, гамильтониан в теории среднего поля равен:

$$\mathcal{H} = -Jm \sum_{<ij>} (s_i + s_j - m) - h \sum_{i=1}^{N} s_i \tag{4}$$

Из-за симметрии i и j в сумме по ближайшим соседям можно записать:

$$\mathcal{H} = -Jm \sum_{<ij>} (2s_i - m) - h \sum_{i=1}^{N} s_i \tag{5}$$

Первая сумма достаточно сложна, попробуем упростить её. Для этого используем то, что у каждого спина одинаковое число соседей q (например, в одномерной модели Изинга $q = 2$, в двумерной с квадратной решёткой – $q = 4$).

$$\mathcal{H} = -\frac{qJm}{2} \sum_{i=1}^{N} (2s_i - m) - h \sum_{i=1}^{N} s_i \tag{6}$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ стоит, потому что сумма учитывает каждое парное взаимодействие дважды.

$$\mathcal{H} = \frac{qJm^2N}{2} - qJm \sum_{i=1}^{N} s_i - h \sum_{i=1}^{N} s_i = \frac{qJm^2N}{2} - (qJm + h) \sum_{i=1}^{N} s_i \tag{7}$$

Введём эффективное внешнее магнитное поле $\boxed{h_{\text{eff}} = qJm + h}$ и получим конечный ответ:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2} qJm^2N - h_{\text{eff}} \sum_{i=1}^{N} s_i} \tag{8}$$

В двумерной модели Изинга с квадратной решёткой: $\mathcal{H} = 2Jm^2N - h_{\text{eff}} \sum\limits_{i=1}^{N} s_i$, где $h_{\text{eff}} = 2Jm + h$.

2. Статистическую сумму можно найти по формуле:

$$\mathcal{Z} = \sum_{MS} \exp(-\beta\mathcal{H}) \tag{9}$$

где $\beta = \frac{1}{k_B T}$, а суммирование проводится по всем возможным микросостояниям, которые обозначены MS.

$$\mathcal{Z} = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta qJm^2N\right) \sum_{s_1=\pm1}\sum_{s_2=\pm1}...\sum_{s_N=\pm1} \exp\left(\beta h_{\text{eff}}\sum_{i=1}^{N} s_i\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\beta qJm^2N\right) \sum_{s_1=\pm1} \exp\left(\beta h_{\text{eff}} s_1\right) \sum_{s_2=\pm1} \exp\left(\beta h_{\text{eff}} s_2\right) ... \sum_{s_N=\pm1} \exp\left(\beta h_{\text{eff}} s_N\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\beta qJm^2N\right) \prod_{i=1}^{N}(\exp\left(\beta h_{\text{eff}}\right) + \exp\left(-\beta h_{\text{eff}}\right)) = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta qJm^2N\right)\left(2\cosh\beta h_{\text{eff}}\right)^N$$

$$\boxed{\mathcal{Z} = \left(2\cosh\beta h_{\text{eff}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2}\beta qJm^2N\right)} \tag{10}$$

Воспользуемся определением средней намагниченности:

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle s_i\rangle = \frac{1}{N}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} s_i \exp(-\beta\mathcal{H})}{\mathcal{Z}} \tag{11}$$

Сумму не придётся считать, если понять, что она уже почти посчитана:

$$\sum_{i=1}^{N} s_i \exp(-\beta\mathcal{H}) = -\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial h_{\text{eff}}}\right)\exp(-\beta\mathcal{H}) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial(\exp(-\beta\mathcal{H}))}{\partial h_{\text{eff}}} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial h_{\text{eff}}} \tag{12}$$

$$m = \frac{1}{N\beta\mathcal{Z}}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial h_{\text{eff}}} = \frac{1}{N\beta}\frac{\partial(\ln\mathcal{Z})}{\partial h_{\text{eff}}} \tag{13}$$

Частную производную найдём, используя (10):

$$\frac{\partial(\ln\mathcal{Z})}{\partial h_{\text{eff}}} = \frac{1}{\partial h_{\text{eff}}}\left(-\frac{1}{2}\beta qJm^2N + N\ln 2 + N\ln(\cosh(\beta h_{\text{eff}}))\right) = N\beta\tanh(\beta h_{\text{eff}}) \tag{14}$$

$$m = \tanh(\beta h_{\text{eff}}) = \tanh(\beta(h + qJm)) \tag{15}$$

Получилось трансцендентное уравнение. Его решения зависят от h и β. Рассмотрим 2 случая:

Случай 1. $h = 0$ **(внешнего поля нет).**

$$m = \tanh(\beta qJm) \tag{16}$$

Разложим гиперболический тангенс по формуле Тейлора:

$$\tanh(\beta qJm) = \beta qJm - \frac{(\beta qJm)^3}{3} + \mathcal{O}((\beta qJm)^5) \tag{17}$$

Пренебрегая $\mathcal{O}((\beta qJm)^5)$, получим уравнение

$$m = \beta qJm - \frac{(\beta qJm)^3}{3} \tag{18}$$

$$m\left(1 - \beta qJ - \frac{(\beta qJ)^3}{3}m^2\right) = 0 \tag{19}$$

$$m_1 = 0, \quad m_{2,3} = \pm\sqrt{3\frac{1-\beta qJ}{(\beta qJ)^3}} \tag{20}$$

2 и 3 корни существуют, если $1 - \beta qJ \geq 0$. Т.е. при $k_BT \geq qJ$ решение одно, а при $k_BT \leq qJ$ решения три. Значит, критическая температура:

$$\boxed{T_c = \frac{qJ}{k_B}} \tag{21}$$

В одномерном случае модели Изинга (21) предсказывает, что $T_c = \frac{2J}{k_B}$. Это неверно, т.к. при конечных температурах фазового перехода нет.
Случай 2. $h \neq 0$ **(внешнее поле есть).**

$$m = \tanh(\beta(h + qJm)) \tag{22}$$

Разложим гиперболический тангенс в ряд:

$$\tanh(\beta(h + qJm)) = \beta(h + qJm) + \mathcal{O}((\beta(h + qJm))^3) \tag{23}$$

Пренебрегая $\mathcal{O}((\beta(h + qJm))^3)$, получим уравнение

$$m = \beta(h + qJm) \to m = \frac{\beta h}{1 - \beta qJ} \tag{24}$$

При любых конечных температурах решение одно. В этом случае фазовый переход отсутствует и критической температуры нет.
Найдём критические показатели β и γ. Их определения:

$$m(t) \sim (-t)^\beta, \quad \chi(t) \sim |t|^\gamma \tag{25}$$

где $t = \frac{T - T_c}{T_c}$.
По формуле (20) при $T \leq T_c$: $m = 0$, при $T \geq T_c$:

$$m(T) = \left(3\frac{T^2}{T_c^3}(T_c - T)\right)^{\frac{1}{2}} \to \boxed{\beta = \frac{1}{2}} \tag{26}$$

Найдём магнитную восприимчивость. По определению:

$$\chi(T) = \left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_{T,h=0} \tag{27}$$

По формуле (15):

$$\chi = \frac{\beta(1 + qJ\chi)}{\cosh^2(\beta(h + qJm))} \tag{28}$$

Выразим χ:

$$\chi = \frac{\beta}{\cosh^2(\beta(h+qJm)) - \beta qJ} \tag{29}$$

Подставим $h = 0$ и разложим гиперболический косинус в ряд:

$$\cosh(\beta qJm) = 1 + \mathcal{O}((\beta qJm)^2) \tag{30}$$

Пренебрежём $\mathcal{O}((\beta qJm)^2$ при $T \to T_c$ и $T \leq T_c$ (т.к. $m \to 0$):

$$\chi = \frac{\beta}{1-\beta qJ} = \frac{1}{k_B T_c |t|} \to \boxed{\gamma = -1} \tag{31}$$

Как видно, показательные коэффициенты в модели среднего поля отличаются от соответствующих коэффициентов в двумерной модели Изинга: $\beta = \frac{1}{8}$ и $\gamma = -\frac{7}{4}$.

3. Уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса (при $\nu = 1$):

$$p = \frac{k_B T}{v-b} - \frac{a}{v^2} \tag{32}$$

где $v = \frac{V}{N}$ – объём, занимаемый одной частицей.

$$pv^3 - (pb + k_B T)v^2 + av - ab = 0 \tag{33}$$

В критической точке все три корня уравнения сливаются в один, поэтому предыдущее уравнение эквивалентно следующему:

$$(v - v_c)^3 = 0 \tag{34}$$

Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях v, получим значения критических параметров:

$$v_c = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad T_c = \frac{8a}{27bk_B} \tag{35}$$

Приведённые параметры определяются как отношения:

$$\varphi = \frac{v}{v_c}, \quad \pi = \frac{p}{p_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c} \tag{36}$$

С их помощью можно переписать (32) и получить приведённое уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\pi = \frac{8\tau}{3\varphi - 1} - \frac{3}{\varphi^2} \tag{37}$$

При $\tau < 1$ существуют 2 стабильных решения (жидкость и газ):

$$\pi = \frac{8\tau}{3\varphi_{\text{gas}} - 1} - \frac{3}{\varphi_{\text{gas}}^2} = \frac{8\tau}{3\varphi_{\text{liquid}} - 1} - \frac{3}{\varphi_{\text{liquid}}^2} \tag{38}$$

Решим уравнение относительно τ:

$$\tau = \frac{(3\varphi_{\text{gas}} - 1)(3\varphi_{\text{liquid}} - 1)(\varphi_{\text{gas}} + \varphi_{\text{liquid}})}{8\varphi_{\text{gas}}^2 \varphi_{\text{liquid}}^2} \tag{39}$$

Будем приближаться к критической точке: $\varphi_{\text{gas}} \to 1$ и $\varphi_{\text{liquid}} \to 1$. Обозначим $\Delta\varphi = \varphi_{\text{gas}} - \varphi_{\text{liquid}}$, будем подходить к критической точке симметрично: $\varphi_{\text{gas}} = 1 + \frac{\Delta\varphi}{2}$ и $\varphi_{\text{liquid}} = 1 - \frac{\Delta\varphi}{2}$.

$$\tau = \frac{(2 + \frac{3\Delta\varphi}{2})(2 - \frac{3\Delta\varphi}{2})}{4(1 + \frac{\Delta\varphi}{2})^2(1 - \frac{\Delta\varphi}{2})^2} = \left(1 - \frac{9(\Delta\varphi)^2}{16}\right)\left(1 - \frac{(\Delta\varphi)^2}{4}\right)^{-2} + \mathcal{O}((\Delta\varphi)^4) =$$
$$= 1 - \frac{1}{16}(\Delta\varphi)^2 + \mathcal{O}((\Delta\varphi)^4)$$

$$\boxed{v_{\text{gas}} - v_{\text{liquid}} \sim (T_c - T)^\beta, \quad \beta = \frac{1}{2}} \tag{40}$$

Определение сжимаемости:

$$\kappa = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \tag{41}$$

Из уравнения состояния газа Ван-дер-Ваальса (32):

$$\frac{\partial p}{\partial v}(v_c) = -\frac{k_B T}{(v_c - b)^2} + 2\frac{a}{v_c^3} = -\frac{k_B T}{4b^2} + \frac{2a}{27b^3} = -\frac{k_B T}{4b^2} + \frac{k_B T_c}{4b^2} = -\frac{k_B}{4b^2}(T - T_c) \tag{42}$$

$$\boxed{\kappa \sim (T - T_c)^\gamma, \quad \gamma = -1} \tag{43}$$

Как видно, показательные коэффициенты совпадают с теорией среднего поля. Это удивительно, так как модели частиц и взаимодействий между ними совсем разные. Видимо, при фазовом переходе всё это становится несущественным. В этом состоит гипотеза универсальности.

1.2 Задача 2

Запишем статистические суммы для высокой температуры для треугольной и гексагональной решёток по аналогии со случаем квадратной решётки:

$$\mathcal{Z}_\triangle = 2^{N_\triangle}(\cosh K)^{q_\triangle} \sum_L G_\triangle(L, N_\triangle) \tanh^L K \tag{44}$$

$$\mathcal{Z}_{\hexagon} = 2^{N_{\hexagon}}(\cosh K)^{q_{\hexagon}} \sum_L G_{\hexagon}(L, N_{\hexagon}) \tanh^L K \tag{45}$$

где $K = \beta J$, $N_{\triangle,\hexagon}$ – количество узлов в решётке, $q_{\triangle,\hexagon}$ – количество ближайших соседей, $G_{\triangle,\hexagon}(L, N_{\triangle,\hexagon})$ – количество способов нарисовать замкнутый граф длиной L в решётке с $N_{\triangle,\hexagon}$ узлами.
Для низкой температуры:

$$\mathcal{Z}_\triangle = 2\exp(N_\triangle K) \sum_L M_\triangle(L, N_\triangle) \exp(-2KL) \tag{46}$$

$$\mathcal{Z}_{\hexagon} = 2\exp(N_{\hexagon} K) \sum_L M_{\hexagon}(L, N_{\hexagon}) \exp(-2KL) \tag{47}$$

где $M_{\triangle,\hexagon}(L, N_{\triangle,\hexagon})$ – количество доменных стенок длины L в решётке с $N_{\triangle,\hexagon}$ узлами. Выразим их через $G_{\triangle,\hexagon}(L, N_{\triangle,\hexagon})$.

Воспользуемся двойственностью между треугольной и гексагональной решётками. Замкнутые графы соответствуют доменным стенкам на дуальной решётке. Чтобы получить гексагональную решетку из треугольной, нужно поместить узел решетки в центр каждого треугольника. Следовательно, двойственная треугольная решетка с $N_\triangle$ узлами является гексагональной решеткой с $2N_\triangle$ узлами:

$$M_\triangle(L, N_\triangle) = G_{\hexagon}(L, 2N_\triangle) \tag{48}$$

$$M_{\hexagon}(L, N_{\hexagon}) = G_\triangle\left(L, \frac{N_{\hexagon}}{2}\right) \tag{49}$$

Для дуальных решёток выполняется соотношение ("звезда-треугольник"):

$$C\exp(K'(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1)) = 2\cosh(K(s_1 + s_2 + s_3)) \tag{50}$$

где K и K' – константы для оригинальной и дуальной решёток.
Пусть $s_1 = s_2 = s_3 = 1$, тогда $C\exp(3K') = 2\cosh(3K)$; пусть $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = -1$, тогда $C\exp(-K') = 2\cosh K$. Из 2 соотношений получим:

$$K' = \frac{1}{4}\log\left(\frac{\cosh 3K}{\cosh K}\right), \quad C = 2\sqrt[4]{(\cosh K)^3\cosh 3K} \tag{51}$$

Преобразование «звезда-треугольник» связывает модель на гексагональной решетке с $N_{\hexagon}$ узлами и параметром K треугольной моделью с $\frac{1}{2}N_{\hexagon}$ узлами и параметром K':

$$K \sim K' = \frac{1}{4}\log\left(\frac{\cosh 3K}{\cosh K}\right) \tag{52}$$

Двойственность Крамерса-Вранье:

$$K \sim K'' = -\frac{1}{2}\log(\tanh K) \tag{53}$$

Объединяя преобразования, получим

$$K = \frac{1}{4}\log\left(\frac{\cosh(-\frac{3}{2}\log(\tanh K))}{\cosh(-\frac{1}{2}\log(\tanh K))}\right) \tag{54}$$

Решая данное трансцендетное уравнение, получим

$$K_c^\triangle = \frac{\log 3}{4} \to \boxed{T_c^\triangle = \frac{4J}{k_B\log 3}} \tag{55}$$

Записав преобразования в обратном порядке, получим

$$K = -\frac{1}{2}\log(\tanh\left(\frac{1}{4}\log\left(\frac{\cosh 3K}{\cosh K}\right)\right) \tag{56}$$

Решая данное трансцендетное уравнение, получим

$$K_c^{\hexagon} = \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3}) \to \boxed{T_c^{\hexagon} = \frac{2J}{k_B\log(2+\sqrt{3})}} \tag{57}$$

2 XXX-цепочка и анзац Бете (Д. Менской)

2.1 Тензорное произведение

1. Запишем тензорные произведения матриц:

$$1 \otimes 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{58}$$

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{59}$$

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$\boxed{1 \otimes 1 + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z = 2P_{12}} \tag{64}$$

2.2 Координатный анзац Бете

1. Для начала докажем тождество. Запишем $\vec{\sigma}^{(1)}$ и $\vec{\sigma}^{(2)}$:

$$\vec{\sigma}^{(1)} = \vec{\sigma} \otimes 1, \quad \vec{\sigma}^{(2)} = 1 \otimes \vec{\sigma}, \quad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \tag{65}$$

Скалярное произведение $\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}$:

$$\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)} = \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z \tag{66}$$

Воспользуемся доказанным тождеством (64):

$$\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)} = 2P_{12} - 1 \otimes 1 = 2P_{12} - 1 \tag{67}$$

$$(1 - \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)})^2 = (2 \cdot 1 - 2P_{12})^2 = 4P_{12}^2 - 8P_{12} + 4 \cdot 1 \tag{68}$$

$$P_{12}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$(1 - \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)})^2 = 8 \cdot 1 - 8P_{12} = 4 \cdot 1 - 4\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)} \tag{70}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}(1 - \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)})^2 = 1 - \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}} \tag{71}$$

Гамильтониан XXX-цепочки:

$$H^{XXX} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - \sigma_0^{(k)}\sigma_0^{(k+1)}) \tag{72}$$

$$H^{XXX} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)} - 1) \tag{73}$$

Воспользуемся доказанным тождеством (71):

$$H^{XXX} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N}(1 - \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)})^2 \tag{74}$$

Следовательно, все собственные значения гамильтониана XXX-цепочки неотрицательны.

2. Гамильтониан XXX-цепочки:

$$H^{XXX} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - 1) = -\sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1} + N \tag{75}$$

где $P_{k,k+1}$ – оператор, переставляющий k-й и $k+1$-й множители в тензорном произведении.

$$\begin{aligned}
[H^{XXX}, S_z] = [N - \sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1}, \sum_{n=1}^{N}\sigma_z^{(n)}] = N\sum_{n=1}^{N}\sigma_z^{(n)} - \sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1}\sum_{n=1}^{N}\sigma_z^{(n)} - \\
- \sum_{n=1}^{N}\sigma_z^{(n)} N + \sum_{n=1}^{N}\sigma_z^{(n)}\sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1} = \sum_{n=1}^{N}\sigma_z^{(n)}\sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1} - \sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1}\sum_{n=1}^{N}\sigma_z^{(n)} = \\
= \sum_{k=1}^{N}(\sigma_z^{(k)}P_{k,k+1} - P_{k,k+1}\sigma_z^{(k)} + \sigma_z^{(k+1)}P_{k,k+1} - P_{k,k+1}\sigma_z^{(k+1)})
\end{aligned} \tag{76}$$

Домножим слева на $P_{t,t+1}$:

$$\sum_{k=1}^{N} P_{t,t+1}(\sigma_z^{(k)}P_{k,k+1} - P_{k,k+1}\sigma_z^{(k)} + \sigma_z^{(k+1)}P_{k,k+1} - P_{k,k+1}\sigma_z^{(k+1)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}((\sigma_z^{(k)} + \sigma_z^{(k+1)}) - (\sigma_z^{(k)} + \sigma_z^{(k+1)}))\delta_{tk} = \sum_{k=1}^{N}(\sigma_z^{(k)} + \sigma_z^{(k+1)} - \sigma_z^{(k)} - \sigma_z^{(k+1)}) = 0 \quad (77)$$

$$\boxed{[H^{XXX}, S_z] = 0} \quad (78)$$

3. (a) Решения уравнения

$$H^{XXX}\,|\Psi\rangle = E\,|\Psi\rangle \quad (79)$$

будем искать в виде

$$|\Psi\rangle = |\Psi^{(2)}\rangle = \sum_{1\le k_1\le k_2\le N} a(k_1,k_2)\sigma_-^{(k_1)}\sigma_-^{(k_2)}\,|\Omega\rangle \quad (80)$$

$$\left(N - \sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1}\right)|\Psi\rangle = E\,|\Psi\rangle \quad (81)$$

$$\sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1}\,|\Psi\rangle = (N-E)\,|\Psi\rangle \quad (82)$$

Домножим уравнение слева на $\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)}$:

$$\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)}\sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1}\,|\Psi\rangle = \langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)}(N-E)\,|\Psi\rangle \quad (83)$$

Операторы перестановки пронесём налево, используя правило (его справедливость можно доказать, домножив обе части слева на $P_{k,k+1}$)

$$\sigma_+^{(n)}P_{k,k+1} = P_{k,k+1}[\sigma_+^{(n)} + \delta_{kn}(\sigma_+^{(n+1)} - \sigma_+^{(n)}) + \delta_{k+1,n}(\sigma_+^{(n-1)} - \sigma_+^{(n)})] \quad (84)$$

Применив его два раза, получим:

$$\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)}P_{k,k+1} = \langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)} + \delta_{kn_1}\,\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}(\sigma_+^{(n_1+1)} - \sigma_+^{(n_1)}) +$$
$$+ \delta_{k+1,n_1}\,\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}(\sigma_+^{(n_1-1)} - \sigma_+^{(n_1)}) + \delta_{kn_2}\,\langle\Omega|\,(\sigma_+^{(n_2+1)} - \sigma_+^{(n_2)})\sigma_+^{(n_1)} +$$
$$+ \delta_{k+1,n_2}\,\langle\Omega|\,(\sigma_+^{(n_2-1)} - \sigma_+^{(n_2)})\sigma_+^{(n_1)} + \delta_{kn_1}\delta_{k+1,n_2}\,\langle\Omega|\,(\sigma_+^{(n_2-1)} - \sigma_+^{(n_2)})(\sigma_+^{(n_1+1)} - \sigma_+^{(n_1)}) +$$
$$+ \delta_{kn_2}\delta_{k+1,n_1}\,\langle\Omega|\,(\sigma_+^{(n_2+1)} - \sigma_+^{(n_2)})(\sigma_+^{(n_1-1)} - \sigma_+^{(n_1)}) \quad (85)$$

Просуммируем по k и воспользуемся тем, что

$$a(n_1,n_2) = \langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)}\,|\Psi\rangle \quad (86)$$

Рассмотрим случаи:

i. $n_1 < n_2 - 1$, $(n_1,n_2) \neq (1,N))$.
В этом случае $\delta_{kn_1}\delta_{k+1,n_2} = \delta_{kn_2}\delta_{k+1,n_1} = 0$. Получаем уравнение:

$$\boxed{a(n_1+1,n_2) + a(n_1-1,n_2) + a(n_1,n_2+1) + a(n_1,n_2-1) - 4a(n_1,n_2) = -Ea(n_1,n_2)} \quad (87)$$

ii. $n_1 = n_2 - 1 = n$.
В этом случае $\delta_{kn_2}\delta_{k+1,n_1} = 0$. Получаем уравнение:

$$\boxed{a(n, n+2) + a(n-1, n+1) - 2a(n, n+1) = -Ea(n, n+1)} \tag{88}$$

iii. $n_1 < n_2 - 1$, $(n_1, n_2) \neq (1, N)$).
В этом случае $\delta_{kn_1}\delta_{k+1,n_2} = 0$. Получаем уравнение:

$$\boxed{a(1, N-1) + a(2, N) - 2a(1, N) = -Ea(1, N)} \tag{89}$$

(b) Возьмём $a(n_1, n_2)$ в виде:

$$a(n_1, n_2) = Ae^{ip_1n_1 + ip_2n_2} + Be^{ip_2n_1 + ip_1n_2} \tag{90}$$

Подставим решение (90) в (87):

$$\begin{multline} Ae^{ip_1(n_1+1)+ip_2n_2} + Be^{ip_2(n_1+1)+ip_1n_2} + Ae^{ip_1(n_1-1)+ip_2n_2} + Be^{ip_2(n_1-1)+ip_1n_2} + \\ + Ae^{ip_1n_1+ip_2(n_2+1)} + Be^{ip_2n_1+ip_1(n_2+1)} + Ae^{ip_1n_1+ip_2(n_2-1)} + Be^{ip_2n_1+ip_1(n_2-1)} - \\ - 4(Ae^{ip_1n_1+ip_2n_2} + Be^{ip_2n_1+ip_1n_2}) = -E(Ae^{ip_1n_1+ip_2n_2} + Be^{ip_2n_1+ip_1n_2}) \end{multline} \tag{91}$$

$$E = 2(2 - \cos p_1 - \cos p_2) \tag{92}$$

Вычтем из (88) (87) при $n_1 = n_2 - 1 = n < N$, чтобы исключить E (если вычтем из (89) (87), то получим такое же уравнение при $n = N$ в силу периодичности):

$$a(n, n) + a(n+1, n+1) = 2a(n, n+1), \quad 1 \leq n \leq N \tag{93}$$

Подставим решение (90):

$$\begin{multline} Ae^{ip_1n+ip_2n} + Be^{ip_2n+ip_1n} + Ae^{ip_1(n+1)+ip_2(n+1)} + Be^{ip_2(n+1)+ip_1(n+1)} = \\ = 2(Ae^{ip_1n+ip_2(n+1)} + Be^{ip_2n_1+ip_1(n+1)}) \end{multline} \tag{94}$$

$$\boxed{\frac{A}{B} = -\frac{1 + e^{i(p_1+p_2)} - 2e^{ip_1}}{1 + e^{i(p_1+p_2)} - 2e^{ip_2}} \equiv e^{i\theta(p_1, p_2)}} \tag{95}$$

Значит, можно записать

$$a(n_1, n_2) = e^{i(p_1n_1 + ip_2n_2 + \frac{1}{2}\theta(p_1, p_2))} - e^{i(p_1n_1 + ip_2n_2 - \frac{1}{2}\theta(p_1, p_2))} \tag{96}$$

(c) Найдём периодические условия. Первое условие (система N-периодична):

$$\boxed{a(n_1 + N, n_2 + N) = a(n_1, n_2)} \tag{97}$$

Рассмотрим $a(1, n)$ при $n > 1$. Амплитуды $a(1, n)$ и $a(1, N - n + 2)$ соответствуют состояниям, в которых перевёрнутые спины разделены $n - 1$ рёбрами решётки. Они отличаются сдвигом на $n - 1$ узел. Для a выполнено условие (см. (96)):

$$a(n_1 + 1, n_2 + 1) = e^{i(p_1+p_2)}a(n_1, n_2) \tag{98}$$

Поэтому

$$a(n_1+k, n_2+k) = e^{ik(p_1+p_2)}a(n_1, n_2) \tag{99}$$

Поскольку пара звеньев $(1, n)$ и $(1, N-n+2)$ отличается сдвигом на $n-1$ звеньев, то $a(1, n)$ и $a(1, N-n+2)$ связаны:

$$a(1, n) = e^{i(n-1)(p_1+p_2)}a(1, N-n+2) \tag{100}$$

По аналогии,

$$a(n, N+1) = e^{i(n-1)(p_1+p_2)}a(1, N-n+2) \tag{101}$$

Значит, $a(1, n) = a(n, N+1)$ и второе периодическое условие:

$$\boxed{a(n_1, n_2) = a(n_2, n_1+N)} \tag{102}$$

Условие $a(n_1+N, n_2) = a(n_1, n_2)$ наложить нельзя, т.к. a определена только при $n_1 < n_2$.

4. Гамильтониан XYZ-цепочки при $N = 2$:

$$H^{XYZ} = J_x\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + J_y\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)} + J_z\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} \tag{103}$$

$$H^{XYZ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_x \\ 0 & 0 & J_x & 0 \\ 0 & J_x & 0 & 0 \\ J_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -J_y \\ 0 & 0 & J_y & 0 \\ 0 & J_y & 0 & 0 \\ -J_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \tag{104}$$

$$H^{XYZ} = \begin{pmatrix} J_z & 0 & 0 & J_x - J_y \\ 0 & -J_z & J_x + J_y & 0 \\ 0 & J_x + J_y & -J_z & 0 \\ J_x - J_y & 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \tag{105}$$

Собственные значения:

$$\boxed{E_1 = -J_x - J_y - J_z, \quad E_2 = -J_x + J_y + J_z, \quad E_3 = J_x - J_y + J_z, \quad E_4 = J_x + J_y - J_z} \tag{106}$$

Собственные векторы:

$$\boxed{\Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{107}$$

3 Некоторые задачи СТО и ОТО (Б. Еремин)

3.1 Некоторые задачи СТО и ОТО I

1. Рассмотрим два кольца, одно из которых покоится, а другое движется относительно первого со скоростью V навстречу ему в системе K'. Предположим, что движущееся кольцо уменьшает свои поперечные размеры ($L'' < L$). Тогда в системе K' второе кольцо пройдёт внутри первого, в системе K (которая движется вместе со вторым кольцом со

скоростью V) – наоборот. Нарушается объективная реальность: может произойти либо одно, либо другое. Если движущееся кольцо увеличивает свои поперечные размеры ($L'' > L$), то происходит то же самое. Значит остаётся одно – размеры не изменяются, $L'' = L$.

2. Пусть в системе K одновременно произошли вспышки света в точках с координатами $x_1 = 0$ и $x_2 = x$ в момент времени $t_1 = t_2 = 0$. Пусть в системе K' события произойдут в моменты времени: $t'_1 = 0$, $t'_2 = \Delta t' > 0$. Пусть τ – время встречи сигналов по часам в K'. Левый сигнал идёт время τ и проходит расстояние

$$c\tau = \frac{x'}{2} + V\tau \tag{108}$$

Правый сигнал проходит расстояние

$$c(\tau - \Delta t') = \frac{x'}{2} - V(\tau - \Delta t') \tag{109}$$

Итого получаем

$$\Delta t' = \frac{Vx'}{c^2 - V^2} = \frac{Vx}{c^2\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{110}$$

Где последнее равенство записано с учётом лоренцева сокращения длин (см. пункт 4).

3. Пусть у нас есть часы, сделанные из 2 параллельных зеркал, и они движутся параллельно плоскости этих зеркал в системе K' со скоростью V. Пусть расстояние между зеркалами – L. В ней световой пучок пройдёт между испусканием и прибытием светового пучка к одному зеркалу путь

$$c\Delta t' = 2\sqrt{\left(\frac{V\Delta t'}{2}\right)^2 + L^2} \tag{111}$$

Из этого можно выразить время $\Delta t'$:

$$\Delta t' = \frac{2L}{c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{112}$$

Время прохождения сигнала в системе K:

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \tag{113}$$

Итого получаем:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{114}$$

4. Используем результаты эксперимента Майкельсона-Морли. Пусть длина пути в вертикальном направлении – L (она не меняется при движении, см. пункт а), в горизонтальном – L'. Пусть свет идёт в горизонтальном направлении: туда – время t_1, обратно – t_2, общее – t; в вертикальном направлении: туда – время t'_1, обратно – t'_2, общее – t'. Тогда мы можем записать следующие уравнения:

$$ct_1 = L' + Vt_1 \quad ct_2 = L' - Vt_2 \tag{115}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2L'c}{c^2 - V^2} \tag{116}$$

$$(ct_1')^2 = L^2 + (Vt_1')^2 \quad (ct_2')^2 = L^2 + (Vt_2')^2 \tag{117}$$

$$t' = t_1' + t_2' = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} \tag{118}$$

Из эксперимента Майкельсона-Морли следует $t = t'$:

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{119}$$

5. Суммируя пункты (1) - (4), мы можем получить:

$$\begin{cases} x' = Vt' + x\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \\ t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \Delta t'(x) = \frac{t + \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{120}$$

Запишем преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} x' = \frac{x+Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t+\frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{121}$$

Перепишем в более симметричном виде:

$$\begin{cases} x' = \Gamma(x + c\beta t) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \Gamma(ct + \beta x) \end{cases} \tag{122}$$

где $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ – Лоренц-фактор, $\beta = \frac{V}{c}$ – безразмерная скорость.

3.2 Некоторые задачи СТО и ОТО II

1. Предположим, что $e, b_{i_1}, b_{i_1}b_{i_2}, ..., b_1...b_n$, где $i_j \in \overline{1,n}$ и $i_j < i_{j+1}$ – базис алгебры $\mathrm{CL}(n,\mathbb{C})$. Покажем, что любой элемент алгебры может быть выражен через них. Поскольку b_i – генераторы, то $\forall U \in \mathrm{CL}(n,\mathbb{C})$ выполняется

$$U = \sum_{i_j} u_{i_1,\dots i_n} \prod_{j=1}^{n} b_{i_j}^{\alpha_{i_j}} \tag{123}$$

Т.к. $\{b_i, b_j\} = 2g_{ij}e$, то $b_i^2 = g_{ii}e$.

Если $\alpha_{i_j} = 2\beta_{i_j}$ – чётное, то $b_{i_j}^{\alpha_{i_j}} = b_{i_j}^{2\beta_{i_j}} = g_{i_j i_j}^{\beta_{i_j}} e$. Если $\alpha_{i_j} = 2\beta_{i_j} + 1$ – нечётное, то $b_{i_j}^{\alpha_{i_j}} = b_{i_j}^{2\beta_{i_j}} b_{i_j} = g_{i_j i_j}^{\beta_{i_j}} b_{i_j}$. Сумма разобьётся на слагаемые, содержащие e и b_{i_j}:

$$U = \sum_{i_j} u'_{i_1,\dots i_n} \prod_{j=1}^{n} b_{i_j}^{\gamma_{i_j}}, \quad \gamma_{i_j} \in \{0, 1\} \tag{124}$$

Если в произведении случился беспорядок между соседними множителями ($i_j > i_{j+1}$), то переставим их:

$$b_{i_j}b_{i_{j+1}} = 2g_{i_j i_{j+1}}e - b_{i_{j+1}}b_{i_j} \tag{125}$$

Таким образом, любой элемент алгебры может быть выражен через e, b_{i_1}, $b_{i_1}b_{i_2}$, ..., $b_1 ... b_n$. Т.к. любая нетривиальная линейная комбинация этих элементов не равна 0, то это выражение единственно и это базис.
Найдём количество элементов в базисе (размерность $\mathrm{CL}(n, \mathbb{C})$). Число вариантов выбора $\{i_j\}$ с $j \leq k$, где $0 \leq k \leq n$ равно числу сочетаний C_n^k. Бином Ньютона:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \tag{126}$$

$$\boxed{\dim \mathrm{CL}(n, \mathbb{C}) = 2^n} \tag{127}$$

2. Будем искать $S(\Lambda)$ в виде:

$$S(\Lambda) = E_{4\times 4} + \omega_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu} \tag{128}$$

Запишем преобразование, которому соответствует $S(\Lambda)$:

$$S(\Lambda)\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu = \gamma^\mu S(\Lambda) \tag{129}$$

Подставим $S(\Lambda)$:

$$(E_{4\times 4} + \omega_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta})(\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu)\gamma^\nu = \gamma^\mu(E_{4\times 4} + \omega_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta}) \tag{130}$$

$$(E_{4\times 4} + \omega_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta})(\gamma^\mu + \omega^\mu_\nu\gamma^\nu) = \gamma^\mu(E_{4\times 4} + \omega_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta}) \tag{131}$$

$$\omega^\mu_\nu\gamma^\nu + \omega_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta}\gamma^\mu + \omega_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta}\omega^\mu_\nu\gamma^\nu = \gamma^\mu\omega_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta} \tag{132}$$

Т.к. $|\omega^\mu_\nu| \ll 1$, то можно пренебречь слагаемым со вторым порядком малости:

$$\omega^\mu_\nu\gamma^\nu = \gamma^\mu\omega_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta}\gamma^\mu \tag{133}$$

Будем искать $\Gamma^{\mu\nu}$ пропорциональной коммутатору $\Gamma^{\mu\nu} = C[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$:

$$\omega^\mu_\nu\gamma^\nu = C\gamma^\mu\omega_{\alpha\beta}(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha) - C\omega_{\alpha\beta}(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)\gamma^\mu \tag{134}$$

Учтём, что $\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha \neq 0$ только при $\alpha \neq \beta$ и $\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha = 0$.

$$\omega^\mu_\nu\gamma^\nu = 2C\omega_{\alpha\beta}(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu) \tag{135}$$

При $\mu \neq \alpha$, $\mu \neq \beta$ $\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu = \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta = 0$. Значит

$$\omega^\mu_\nu\gamma^\nu = 2C\omega_{\mu\beta}(\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\beta - \gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\mu) - 2C\omega_{\alpha\mu}(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu - \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\mu) \tag{136}$$

$$\omega^\mu_\nu\gamma^\nu = 4C(\omega_{\mu\beta}\eta^{\mu\mu}\gamma^\beta - \omega_{\alpha\mu}\eta^{\mu\mu}\gamma^\alpha) = 8C\omega_{\mu\nu}\eta^{\mu\mu}\gamma^\nu = 8C\omega^\mu_\nu\gamma^\nu \tag{137}$$

Значит, $C = \frac{1}{8}$.

$$\boxed{\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{8}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]} \rightarrow \boxed{S(\Lambda) = E_{4\times 4} + \frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]} \tag{138}$$

4 Эффект Унру (П. Анемпотистов)

Функция отклика:

$$\Pi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \phi(t, \vec{x}(t))\phi(0,0)\rangle \tag{139}$$

где $\langle \phi(t, \vec{x}(t))\phi(t, \vec{x}'(t))\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{-(t-t'-i\epsilon)^2+(\vec{x}-\vec{x}')^2}$ – корреляционная функция, где ϵ мало.

$$\Pi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi^2(x^2-(t-i\epsilon)^2)} \tag{140}$$

1. Перейдём в систему покоя детектора ($x = 0$):

$$\Pi_{\text{inertial}}(\omega) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-i\omega t}}{(t-i\epsilon)^2} \tag{141}$$

   Подынтегральная функция имеет особую точку 2 порядка $t = i\epsilon$.

$$\text{Res}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{(t-i\epsilon)^2}\right)(i\epsilon) = \lim_{t\to i\epsilon}\left(\frac{de^{-i\omega t}}{dt}\right) = -i\omega e^{\epsilon\omega} \tag{142}$$

$$\Pi_{\text{inertial}}(\omega) = -\frac{2\pi i}{4\pi^2}(-i\omega\theta(-\omega)) \tag{143}$$

   где θ – тета-функция Хевисайда.

$$\boxed{\Pi_{\text{inertial}}(\omega) = -\frac{\omega}{2\pi}\theta(-\omega)} \tag{144}$$

2. При равноускоренном движении детектора:

$$x = \frac{1}{\alpha}\cosh\tau, \quad t = \frac{1}{\alpha}\sinh\tau, \quad \tau(-\infty,\infty) \tag{145}$$

$$\Pi_{\text{accelerated}}(\omega) = -\frac{\alpha}{16\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-\frac{i\omega\tau}{\alpha}}}{\sinh^2(\frac{\tau}{2}-i\epsilon)} \tag{146}$$

   Подынтегральная функция имеет счётное число особых точек 2 порядка $t = 2i\epsilon + 2i\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\text{Res}\left(\frac{e^{-\frac{i\omega\tau}{\alpha}}}{\sinh^2(\frac{\tau}{2}-i\epsilon)}\right)(2i\epsilon+2i\pi k) = \text{Res}\left(\frac{4e^{-\frac{i\omega\tau}{\alpha}}}{(\tau-2i\epsilon)^2}\right)(2i\epsilon+2i\pi k) = \\ = \lim_{\tau\to 2i\epsilon+2i\pi k}\left(4\frac{de^{-\frac{i\omega\tau}{\alpha}}}{dt}\right) = -\frac{4i\omega}{\alpha}e^{\frac{2\omega}{\alpha}(\epsilon+\pi k)}\end{aligned} \tag{147}$$

$$\Pi_{\text{accelerated}}(\omega) = -\frac{8\pi\omega\alpha}{16\pi^2\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{2\omega}{\alpha}(\epsilon-\pi k)} = \frac{\omega}{2\pi}\frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\alpha}}-1} \tag{148}$$

   где в последнем равенстве посчитана сумма геометрической прогрессии.

$$\boxed{\Pi_{\text{accelerated}}(\omega) = \frac{\omega}{2\pi(e^{\frac{2\pi\omega}{\alpha}}-1)}} \tag{149}$$