Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Классические интегрируемые системы
(4 семестр, В.Э. Адлер)

Коцевич Андрей Витальевич, группа Б02-920

23 мая 2021 г. Версия 6.1

Содержание

1 Введение. Представление нулевой кривизны для КдФ. Решение в виде бегущей волны. Солитон.

Домашних заданий не было!

2 Законы сохранения. Эволюционные уравнения. Операторы полных производных. Алгоритм интегрирования по частям.

ДЗ 2-1. Эволюционные уравнения могут быть записаны в виде:

$$u_t = f(t, x, u, u_1, ..., u_n) \tag{1}$$

Утверждение 1. *У уравнения вида (1) при* $n > 0$ *не бывает первого интеграла:*

$$D_t(I) \neq 0, \quad \forall I = I(t, x, u, u_1, ..., u_k) \tag{2}$$

Доказательство. Докажем от противного: предположим, что первый интеграл существует. Распишем оператор полной производной по времени:

$$D_t(I) = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial u} f + \frac{\partial I}{\partial u_1} D_x(f) + ... + \frac{\partial I}{\partial u_k} D_x^k(f) = 0 \tag{3}$$

Оператор полной производной по координате:

$$D_x^k(f) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k} + ... \tag{4}$$

Следовательно, $D_x^k(f) = f(t, x, u, u_1, ..., u_{n+k})$. Поскольку $I = I(t, x, u, u_1, ..., u_k)$, то $\frac{\partial I}{\partial u_k} \neq 0$ (иначе мы бы писали $I = I(t, x, u, u_1, ..., u_{k-1})$) и f можно выразить как функцию u_{n+k}:

$$f = \left(\frac{\partial I}{\partial u}\right)^{-1} \left(-\frac{\partial I}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial I}{\partial u_i} D_x^i(f) - \frac{\partial I}{\partial u_k} D_x^k(f)\right) \tag{5}$$

Значит, $f = f(t, x, u, ..., u_{n+k})$ – противоречие с тем, что $f = f(t, x, u, ..., u_n)$ ($k > 0$, поскольку при $k = 0$ верно, что $n = 0$ (следует из (5))). □

ДЗ 2-2. Обобщим законы сохранения для уравнения:

$$u_t = u_{xxx} + G''(u) u_x \tag{6}$$

Покажем, что первые два закона сохранения КдФ подходят и для этого случая

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} (u_{xxx} + G''(u) u_x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} D_x(u_{xx} + G'(u)) dx = (u_{xx} + G'(u))|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Таким образом, получен 1 первый интеграл:

$$\boxed{I_1 = \int_{\mathbb{R}} u dx} \tag{7}$$

Соответствующие плотость и ток:

$$\boxed{\rho_1 = \frac{dI_1}{dx} = u, \quad \sigma_1 = \frac{dI_1}{dt} = u_{xx} + G'(u)} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2uu_t dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2u(u_{xxx}+G''(u)u_x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_x(2uu_{xx}-u_x^2+2G'(u)u-2G(u))dx =$$
$$= (2uu_{xx} - u_x^2 + 2G'(u)u - 2G(u))|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Таким образом, получен 2 первый интеграл:

$$\boxed{I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} u^2 dx} \tag{9}$$

Соответствующие плотость и ток:

$$\boxed{\rho_2 = \frac{dI_2}{dx} = u^2, \quad \sigma_2 = \frac{dI_2}{dt} = 2uu_{xx} - u_x^2 + 2G'(u)u - 2G(u)} \tag{10}$$

Будем искать 3 первый интеграл в виде:

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}} (u_x^2 + \alpha G(u))dx \tag{11}$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+\alpha G(u))dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(2u_xu_{xt}+\alpha G'(u)u_t)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(2u_x(u_{xxxx}+G'''(u)u_x^2+G''(u)u_{xx})+$$

$$+\alpha G'(u)(u_{xxx}+G''(u)u_x))dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(D_x(2u_xu_{xxx}-u_{xx}^2)+2G'''(u)u_x^3+D_x(G''(u)u_x^2)-G'''(u)u_x^3+$$

$$+ D_x(\alpha G'(u)u_{xx}) - D_x\left(\frac{\alpha}{2}G''(u)u_x^2\right) + \frac{1}{2}\alpha G'''(u)u_x^3 + D_x\left(\frac{\alpha}{2}G'(u)^2\right)\right) dx = (2u_xu_{xxx} - u_{xx}^2+$$

$$+G''(u)u_x^2+\alpha G'(u)u_{xx}-\frac{\alpha}{2}G''(u)u_x^2+\frac{\alpha}{2}G'(u)^2)|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(G'''(u)u_x^3+\frac{\alpha}{2}G'''(u)u_x^3\right)dx = 0$$

Для того, чтобы I_3 было первым интегралом, необходимо и достаточно:

$$1 + \frac{\alpha}{2} = 0 \to \alpha = -2 \tag{12}$$

Таким образом, получен 3 первый интеграл:

$$\boxed{I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}} (u_x^2 - 2G(u))dx} \tag{13}$$

Соответствующие плотость и ток:

$$\boxed{\rho_3 = u_x^2 - 2G(u), \quad \sigma_3 = 2u_xu_{xxx} - u_{xx}^2 + G''(u)u_x^2 + \alpha G'(u)u_{xx} + \frac{\alpha}{2}(G'(u)^2 - G''(u)u_x^2)}$$

ДЗ 2-3.

$$A = a_0 u u_{2n} + a_1 u_1 u_{2n-1} + ... + a_n u_n^2 \tag{14}$$

Воспользуемся алгоритмом (блок-схемой) интегрирования по частям $n+2$ раза. Пусть $f = A$.

1. ord $f = 2n$, $g = a_0 u$, $\frac{\partial g}{\partial u_{2n}} = 0$, $G = \int g du_{2n-1} = a_0 u u_{2n}$, $f_1 = f - D_x(G) = (a_1 - a_0) u_1 u_{2n-1} + ... + a_n u_n^2$.
2. ord $f_1 = 2n-1$, $g = (a_1 - a_0) u_1$, $\frac{\partial g}{\partial u_{2n-1}} = 0$, $G = \int g du_{2n-2} = (a_1 - a_0) u_1 u_{2n-2}$, $f_2 = f_1 - D_x(G) = (a_2 - a_1 + a_0) u_2 u_{2n-2} + ... + a_n u_n^2$.

n. ord $f_{n-1} = n+1$, $g = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} a_i u_{n-1}$, $\frac{\partial g}{\partial u_{n+1}} = 0$, $G = \int g du_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} a_i u_{n-1} u_n$, $f_n = f_{n-1} - D_x(G) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} a_i u_n^2$.

$n+1$. ord $f_n = n$, $g = 2 \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} a_i u_n$, $\frac{\partial g}{\partial u_n} = 2 \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} a_i$.

Для существования интеграла необходимо, чтобы $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} a_i = 0$. При этом: $G = \int g du_{n-1} = 0$, $f_{n+1} = f_n - D_x(G) = 0$.

$n+2$. ord $f_{n+1} = -1$, $A \in \mathrm{Im} D_x$.

Таким образом, мы получили условие на коэффициенты:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} a_i = 0} \tag{15}$$

$$B = b_0 u u_{2n+1} + b_1 u_1 u_{2n} + ... + b_n u_n u_{n+1} \tag{16}$$

Воспользуемся алгоритмом (блок-схемой) интегрирования по частям $n+2$ раза. Пусть $f = B$.

1. ord $f = 2n+1$, $g = b_0 u$, $\frac{\partial g}{\partial u_{2n+1}} = 0$, $G = \int g du_{2n} = b_0 u u_{2n}$, $f_1 = f - D_x(G) = (b_1 - b_0) u_1 u_{2n} + ... + b_n u_n u_{n+1}$.
2. ord $f_1 = 2n$, $g = (b_1 - b_0) u_1$, $\frac{\partial g}{\partial u_{2n}} = 0$, $G = \int g du_{2n-1} = (b_1 - b_0) u_1 u_{2n-1}$, $f_2 = f_1 - D_x(G) = (b_2 - b_1 + b_0) u_2 u_{2n-1} + ... + b_n u_n u_{n+1}$.

n. ord $f_{n-1} = n+2$, $g = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} b_i u_{n-1}$, $\frac{\partial g}{\partial u_{n+2}} = 0$, $G = \int g du_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} b_i u_{n-1} u_{n+1}$, $f_n = f_{n-1} - D_x(G) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} b_i u_n u_{n+1}$.

$n+1$. ord $f_n = n+1$, $g = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} b_i u_n$, $\frac{\partial g}{\partial u_{n+1}} = 0$, $G = \int g du_n = \frac{1}{2} \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} b_i u_n^2$, $f_{n+1} = f_n - D_x(G) = 0$.

$n+2$. ord $f_{n+1} = -1$, $B \in \mathrm{Im} D_x$.

Таким образом, для B интеграл существует **при любых коэффициентах** b_i.

3 Преобразование Миуры.

ДЗ 3-1. 1. *Уравнение теплопроводности*:

$$u_t = u_{xx} \tag{17}$$

Пусть $v = \frac{u_x}{u}$.

$$v_t = \frac{u_{xt}u - u_x u_t}{u^2} = \frac{u_{xxx}u - u_x u_{xx}}{u^2} \tag{18}$$

$$v_x = \frac{u_{xx}u - u_x^2}{u^2} \tag{19}$$

$$v_{xx} = \frac{u_{xxx}}{u} - \frac{u_{xx}u_x}{u^2} - \frac{u_{xx}u_x}{u^2} - \frac{2u_x u_{xx}}{u^2} + \frac{2u_x^3}{u^3} = \frac{u_{xxx}}{u} - \frac{4u_{xx}u_x}{u^2} + \frac{2u_x^3}{u^3} \tag{20}$$

$$v_{xx} + 2vv_x = \frac{u_{xxx}}{u} - \frac{4u_{xx}u_x}{u^2} + \frac{2u_x^3}{u^3} + 2\frac{u_x}{u}\frac{u_{xx}u - u_x^2}{u^2} = \frac{u_{xxx}u - u_x u_{xx}}{u^2} = v_t \tag{21}$$

Получилось *уравненик Бюргерса*:

$$\boxed{v_t = v_{xx} + 2vv_x} \tag{22}$$

2. *Волновое уравнение*:

$$u_{xy} = 0 \tag{23}$$

Пусть $v = \log\left(\frac{2u_x u_y}{u^2}\right)$.

$$v_x = \frac{u^2}{2u_x u_y}\frac{(2u_{xx}u_y + 2u_x u_{xy})u^2 - 4u_x^2 u_y u}{u^4} = \frac{u_{xx}u_y}{u_x u_y} + \frac{u_x u_{xy}}{u_x u_y} - \frac{2u_x^2 u_y}{u_x u_y u} \tag{24}$$

$$v_x = \frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{u_{xy}}{u_y} - \frac{2u_x}{u} \tag{25}$$

$$v_{xy} = \frac{u_{xxy}u_x - u_{xx}u_{xy}}{u^2} - 2\frac{u_{xy}u - u_x u_y}{u^2} = \frac{u_{xxy}}{u_x^2} + \frac{2u_x u_y}{u^2} = \frac{2u_x u_y}{u^2} \tag{26}$$

Получилось *уравнение Лиувилля*:

$$\boxed{v_{xy} = e^v} \tag{27}$$

3.

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{4u_x} \tag{28}$$

Пусть $v = \sqrt{u_x}$.

$$v_t = \frac{u_{xt}}{2\sqrt{u_x}} = \frac{u_{xxxx} - \frac{3(2u_x u_{xx} u_{xxx})}{4u_x^2}}{2\sqrt{u_x}} \tag{29}$$

$$v_{xxx} = \left(\frac{u_{xx}}{2\sqrt{u_x}}\right)_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{xxx}\sqrt{u_x} - u_{xx}\frac{u_{xx}}{2\sqrt{u_x}}}{u_x}\right)_x = \frac{u_{xxxx}\sqrt{u_x} - \frac{u_{xxx}}{2\sqrt{u_x}}}{2u_x} - \frac{2u_x^{3/2}u_{xx}u_{xxx} - \frac{3}{2}u_x u_{xx}^3}{4u_x^3}$$

$$v_{xxx} = \frac{u_{xxxx}}{2\sqrt{u_x}} - \frac{3u_{xx}^2}{4u_x} \tag{30}$$

$$\boxed{v_t = v_{xxx}} \tag{31}$$

ДЗ 3-2.

$$\begin{cases} \Psi_{xx} = (u-\lambda)\Psi, \\ \Psi_t = u_x\Psi - (4\lambda + 2u)\Psi_x. \end{cases} \tag{32}$$

Пусть $u = 0$:

$$\begin{cases} \Psi_{xx} = -\lambda\Psi, \\ \Psi_t = -4\lambda\Psi_x. \end{cases} \tag{33}$$

Пусть $\lambda = -k^2$, тогда (заменим cosh на sinh):

$$\Psi = \mu \sinh(kx + 4k^3t + \delta) \tag{34}$$

$$f = \frac{\Psi_x}{\Psi} = \frac{\mu k \cosh(kx - 4k^3t + \delta)}{\mu \sinh(kx - 4k^3t + \delta)} = k \coth(kx - 4k^3t + \delta) \tag{35}$$

$$\widetilde{u} = u - 2f_x = -2f_x \tag{36}$$

$$\boxed{\widetilde{u} = \frac{2k^2}{\sinh^2(kx - 4k^3t + \delta)}} \tag{37}$$

При обращении знаменателя в 0 будет полюс.
Пусть $\lambda = k^2$, тогда

$$\Psi = C_1'(t)e^{ikx} + C_2'(t)e^{-ikx} + C_3(t) \tag{38}$$

$$\Psi_t = \dot{C}_1'e^{ikx} + \dot{C}_2'e^{-ikx}, \quad \Psi_x = -ike^{ikx} + ikC_2'e^{-ikx} \tag{39}$$

Подставим во второе уравнение системы (33):

$$\dot{C}_1'e^{ikx} + \dot{C}_2'e^{-ikx} = -4\lambda(-ike^{ikx} + ikC_2'e^{-ikx}) \tag{40}$$

$$\dot{C}_1' = -4ik^3C_1' \to C_1' = C_1e^{-4ik^3t} \tag{41}$$

$$\dot{C}_2' = 4ik^3C_2' \to C_1' = C_2e^{4ik^3t} \tag{42}$$

$$\Psi = C_1e^{i(kx-4k^3t)} + C_2e^{-i(kx-4k^3t)} = \mu \cos(kx - 4k^3t + \delta) \tag{43}$$

$$f = \frac{\Psi_x}{\Psi} = -\frac{\mu k \sin(kx - 4k^3t + \delta)}{\mu \cos(kx - 4k^3t + \delta)} = -k \tan(kx - 4k^3t + \delta) \tag{44}$$

$$\widetilde{u} = u - 2f_x = -2f_x \tag{45}$$

$$\boxed{\widetilde{u} = -\frac{2k^2}{\cos^2(kx - 4k^3t + \delta)}} \tag{46}$$

ДЗ 3-3. *Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ)*:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u^2v, \\ v_t = -v_{xx} - 2uv^2. \end{cases} \tag{47}$$

Утверждение 2. *НУШ $\Leftrightarrow$ представление кривизны с*

$$U_t = V_x + [V, U], \quad U = \begin{pmatrix} \lambda & -v \\ u & -\lambda \end{pmatrix}, V = -2\lambda U + \begin{pmatrix} -uv & v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix} \tag{48}$$

Доказательство.

$$U_t = \begin{pmatrix} 0 & -v_t \\ u_t & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

$$V_x = -2\lambda U_x + \begin{pmatrix} -u_x v - u v_x & v_{xx} \\ u_{xx} & u_x v + u v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_x v - u v_x & v_{xx} + 2\lambda v_x \\ u_{xx} - 2\lambda u_x & u_x v + u v_x \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$[V, U] = VU - UV = \begin{pmatrix} -uv & v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -v \\ u & -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & -v \\ u & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -uv & v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$[V, U] = \begin{pmatrix} v_x u + v u_x & 2(uv^2 - \lambda v_x) \\ 2(u^2 v + \lambda u_x) & -v_x u - v u_x \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$V_x + [V, U] = \begin{pmatrix} 0 & v_{xx} + 2uv^2 \\ u_{xx} + 2u^2 v & 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

Из (49) и (53):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \\ v_t = -v_{xx} - 2uv^2. \end{cases} \tag{54}$$

Для доказательства в обратную сторону нужно переписать все действия в обратном порядке. $\square$

ДЗ 3-4.

$$u_t = f[u, v], \quad v_t = g[u, v] \tag{55}$$

$$\boxed{D_x = \partial_x + u_1 \partial_u + v_1 \partial_v + \ldots + u_{k+1} \partial_{u_k} + v_{k+1} \partial_{v_k}} \tag{56}$$

$$\boxed{D_t = \partial_t + f \partial_u + g \partial_v + D_x(f) \partial_{u_1} + D_x(g) \partial_{v_1} \ldots + D_x^k(f) \partial_{u_k} + D_x^k(g) \partial_{v_k} + \ldots} \tag{57}$$

ДЗ 3-5. *Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ)*:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \\ v_t = -v_{xx} - 2uv^2. \end{cases} \tag{58}$$

1. $\rho_2 = uv$.
   $D_t(uv) = u_t v + u v_t = (u_{xx} + 2u^2 v) v + u(-v_{xx} - 2uv^2) = u_{xx} v - v_{xx} u = D_x(u_x v) - u_x v_x - D_x(v_x u) + u_x v_x = D_x(u_x v - v_x u)$.

$$\boxed{\sigma_2 = u_x v - v_x u} \tag{59}$$

2. $\rho_3 = u v_x$.
   $D_t(u v_x) = u_t v_x + u v_{xt} = (u_{xx} + 2u^2) v_x + u(-v_{xxx} - 2u_x v^2 - 4uvv_x) = -2u^2 v v_x + u_{xx} v_x - u v_{xxx} - 2uvv_x) = D_x(-u^2 v^2 + u_x v_x) - u_x v_{xx} - D_x(u v_{xx}) + u_x v_{xx} = D_x(-u^2 v^2 + u_x v_x - u v_{xx})$.

$$\boxed{\sigma_3 = -u^2 v^2 + u_x v_x - u v_{xx}} \tag{60}$$

3. $\rho_4 = uv_{xx} + u^2v^2$.
$D_t(uv_{xx} + u^2v^2) = u_tv_{xx} + uv_{xxt} + 2uu_tv^2 + 2u^2vv_t = u_{xx}v_{xx} + u(-v_{xxxx} - 4u_xvv_x - 4u_xvv_x - 4uv_x^2 - 4uvv_{xx}) = u_{xx}v_{xx} - uv_{xxxx} - 8uu_xvv_x - 4u^2v_x^2 - 4u^2vv_{xx} = D_x(u_xv_{xx}) - u_xv_{xxx} - D_x(uv_{xxx}) - D_x(4u^2vv_x) = D_x(u_xv_{xx} - uv_{xxx} - 4u^2vv_x)$.

$$\boxed{\sigma_4 = u_xv_{xx} - uv_{xxx} - 4u^2vv_x} \tag{61}$$

ДЗ 3-6. Воспользуемся алгоритмом нахождения плотности:

1. Перечислим все мономы веса 5: vv_xu^2, uu_xv^2, u_xv_{xx}, $u_{xx}v_x$, $u_{xxx}v$, uv_{xxx} (мономы, содержащие производную по времени, выписывать нет смысла).
2. Выкинем все по модулю D_x: $vv_xu^2 + uu_xv^2 = D_x(\frac{1}{2}v^2u^2)$; $u_xv_{xx} + v_xu_{xx} = D_x(u_xv_x)$; $u_{xxx}v + uv_{xxx} = D_x(u_{xx}v - u_xv_x + v_{xx}u)$; $u_{xxx}v - u_xv_{xx} = D_x(u_{xx}v - u_xv_x)$.
Таким образом, остаётся всего 2 монома: $u_{xx}v_x$ и uu_xv^2.
3. Расставим неопределённые коэффициенты: $\rho_5 = u_{xx}v_x + auu_xv^2$.
4. Продифференцируем по t в силу системы НУШ:
$D_t(u_{xx}v_x + auu_xv^2) = u_{xxt}v_x + u_{xx}v_{xt} + au_tu_xv^2 + auu_{xt}v^2 + 2auu_xvv_t = (u_{xxxx} + 4u_x^2v + 8uu_xv_x + 4uu_{xx}v + 2u^2v_{xx})v_x + u_{xx}(-v_{xxx} - 2u_xv^2 - 4uvv_x) + a(u_{xx} + 2u^2v)u_xv^2 + au(u_{xxx} + 4uu_xv + 2u^2v_x)v^2 + 2auu_xv(-v_{xx} - 2uv^2) = u_{xxt}v_x + u_{xx}v_{xt} + au_tu_xv^2 + auu_{xt}v^2 + 2auu_xvv_t = (u_{xxxx} + 4u_x^2v + 8uu_xv_x + 2u^2v_{xx})v_x + u_{xx}(-v_{xxx} - 2u_xv^2) + a(u_{xx} + 2u^2v)u_xv^2 + au(u_{xxx} + 2u^2v_x)v^2 - 2auu_xvv_{xx}$.
5. Выделим полную производную по x:
$D_t(u_{xx}v_x + auu_xv^2) = D_x(u_{xxx}v_x - u_{xx}v_{xx} + 4u^2v_x^2 + 2u_x^2v^2 - 3u^2v_x^2 - 3v^2u_x^2) + 6uu_xv_x^2 + 6vv_xu_x^2 + aD_x(\frac{2}{3}u^3v^2 + uu_{xx}v^2 - 2uu_xvv_x) + 2auu_xv_x^2 + 2avv_xu_x^2$.
6. Приравняем остаток к 0:

$$6uu_xv_x^2 + 6vv_xu_x^2 + 2auu_xv_x^2 + 2avv_xu_x^2 = 0 \to a = -3 \tag{62}$$

$$\boxed{\rho_5 = u_{xx}v_x - 3uu_xv^2} \tag{63}$$

4 Потенциалы Баргманна.

ДЗ 4-1.

$$\varphi_t = -2(u - 2z^2)\varphi_x + (u_x - 2zu)\varphi \tag{64}$$

$$\frac{\varphi_{1,t}}{z} + \frac{\varphi_{2,t}}{z} + ... = -2(u - 2z^2)\left(\frac{\varphi_{1,x}}{z} + \frac{\varphi_{2,x}}{z} + ...\right) + (u_x - 2zu)\left(1 + \frac{\varphi_1}{z} + \frac{\varphi_2}{z} + ...\right) \tag{65}$$

Выпишем и приравняем коэффициенты при z, 1, z^{-1}, ... в левой и правой части:

$$z : 0 = 2\varphi_{1,x} - u \tag{66}$$

$$1 : 0 = 4\varphi_{2,x} + u_x - 2\varphi_1u \tag{67}$$

$$z^{-1} : \varphi_{1,t} = -2u\varphi_{1,x} + 4\varphi_{3,x} + u_x\varphi_1 - 2\varphi_2u \tag{68}$$

$$z^{-k} : \varphi_{k,t} = -2u\varphi_{k,x} + 4\varphi_{k+2,x} + u_x\varphi_k - 2\varphi_{k+1}u \tag{69}$$

ДЗ 4-2. На самом деле у нас порядок равен $2n+1$, а не $2n$, поскольку есть ещё время.

ДЗ 4-3.

Утверждение 3.

$$\Psi(z) = c\frac{W(y_1, ..., y_n, e^X)}{W(y_1, ..., y_n)}, \quad X = xz + 4z^3 t \tag{70}$$

Доказательство. φ_i можно найти из СЛУ:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n+1-i} & y_{n+1-i}' & \dots & y_{n+1-i}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ \vdots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix} \tag{71}$$

Правило Крамера:

$$\varphi_i = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_1^{(n-i)} & y_1^{(n)} & y_1^{(n+2-i)} & \dots & y_1^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & \dots & y_n^{(n-i)} & y_n^{(n)} & y_n^{(n+2-i)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{W(y_1, ..., y_n)} = (-1)^{i-1}\frac{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_1^{(i-1)} & y_1^{(i+1)} & \dots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & \dots & y_n^{(i-1)} & y_n^{(i+1)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1, ..., y_n)} \tag{72}$$

$$W(y_1, ..., y_n, e^X) = e^X \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & \dots & y_n^{(n)} \\ 1 & \dots & z^n \end{vmatrix} \tag{73}$$

Раскроем определитель по последней строке:

$$W(y_1, ..., y_n, e^X) = e^X \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+n} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_1^{(i-1)} & y_1^{(i+1)} & \dots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & \dots & y_n^{(i-1)} & y_n^{(i+1)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} z^i =$$
$$= (-1)^{n+1} W(y_1, ..., y_n) e^X \sum_{i=0}^{n} \varphi_i z^i \tag{74}$$

Поскольку верно, что $\Psi = e^X \sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i z^i$, то утверждение доказано. □

5 Метод обратной задачи рассеяния.

ДЗ 5-1.

Утверждение 4. *Решение интегрального уравнения*

$$\Psi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} + \int\limits_{\mathbb{R}} G_+(x-y) U(y) \Psi(y) dy \tag{75}$$

удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$\Psi_{xx} + k^2\Psi = U\Psi \tag{76}$$

Доказательство. Запишем определение $G_+(x-y)$:

$$G_+(x-y) = \begin{cases} -\frac{\sin k(x-y)}{k}, & x < y \\ 0, & x \geq y \end{cases} \tag{77}$$

Подставим в уравнение

$$\Psi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} - \int\limits_x^\infty \frac{\sin k(x-y)}{k} U(y)\Psi(y)dy \tag{78}$$

Дважды продифференцируем уравнение (78):

$$\Psi_x = ikC_1 e^{ikx} - ikC_2 e^{-ikx} + \frac{\sin(k(x-x))}{k} U(x)\Psi(x) - \int\limits_x^\infty \cos k(x-y) U(y)\Psi(y)dy \tag{79}$$

$$\Psi_{xx} = -k^2 C_1 e^{ikx} + k^2 C_2 e^{-ikx} + \cos(k(x-x))U(x)\Psi(x) + \int\limits_x^\infty k\sin k(x-y)U(y)\Psi(y)dy \tag{80}$$

$$\Psi_{xx} = -k^2 C_1 e^{ikx} + k^2 C_2 e^{-ikx} + U(x)\Psi(x) + \int\limits_x^\infty k\sin k(x-y)U(y)\Psi(y)dy \tag{81}$$

$$\Psi_{xx} + k^2\Psi = U\Psi \tag{82}$$

□

ДЗ 5-2. Функции Йоста для потенциала с дельта-функцией:

$$\varphi_1(x,k) = e^{-ikx} + \int\limits_{-\infty}^x \frac{\sin(k(x-y))}{k} \alpha\delta(y)\varphi_1(y,k)dy \tag{83}$$

$$\varphi_1(x,k) = \begin{cases} e^{-ikx} + \frac{\sin kx}{k}\alpha\varphi_1(0,k), & x \geq 0 \\ e^{-ikx}, & x < 0 \end{cases} \tag{84}$$

$$\varphi_1(0,k) = 1 \tag{85}$$

$$\boxed{\varphi_1(x,k) = \begin{cases} e^{-ikx} + \frac{\sin kx}{k}\alpha, & x \geq 0 \\ e^{-ikx}, & x < 0 \end{cases}} \tag{86}$$

$$\varphi_2(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_{-\infty}^x \frac{\sin(k(x-y))}{k} \alpha\delta(y)\varphi_2(y,k)dy \tag{87}$$

$$\varphi_2(x,k) = \begin{cases} e^{ikx} + \frac{\sin kx}{k}\alpha\varphi_2(0,k), & x \geq 0 \\ e^{ikx}, & x < 0 \end{cases} \tag{88}$$

$$\varphi_2(0,k) = 1 \tag{89}$$

$$\boxed{\varphi_2(x,k) = \begin{cases} e^{ikx} + \frac{\sin kx}{k}\alpha, & x \geq 0 \\ e^{ikx}, & x < 0 \end{cases}} \tag{90}$$

$$\Psi_1(x,k) = e^{-ikx} - \int\limits_x^\infty \frac{\sin(k(x-y))}{k}\alpha\delta(y)\Psi_1(y,k)dy \tag{91}$$

$$\Psi_1(x,k) = \begin{cases} e^{-ikx}, & x \geq 0 \\ e^{-ikx} - \frac{\sin kx}{k}\alpha\Psi_1(0,k), & x < 0 \end{cases} \tag{92}$$

$$\Psi_1(0,k) = 1 \tag{93}$$

$$\boxed{\Psi_1(x,k) = \begin{cases} e^{-ikx}, & x \geq 0 \\ e^{-ikx} - \frac{\sin kx}{k}\alpha, & x < 0 \end{cases}} \tag{94}$$

$$\Psi_2(x,k) = e^{ikx} - \int\limits_x^\infty \frac{\sin(k(x-y))}{k}\alpha\delta(y)\Psi_2(y,k)dy \tag{95}$$

$$\Psi_2(x,k) = \begin{cases} e^{ikx}, & x \geq 0 \\ e^{ikx} - \frac{\sin kx}{k}\alpha\Psi_2(0,k), & x < 0 \end{cases} \tag{96}$$

$$\Psi_2(0,k) = 1 \tag{97}$$

$$\boxed{\Psi_2(x,k) = \begin{cases} e^{ikx}, & x \geq 0 \\ e^{ikx} - \frac{\sin kx}{k}\alpha, & x < 0 \end{cases}} \tag{98}$$

ДЗ 5-3.

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = T(k)\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix} \tag{99}$$

Найдём φ_1, φ_2 в базисе Ψ_1, Ψ_2:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{i\alpha}{2k} \\ -\frac{i\alpha}{2k} \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{i\alpha}{2k} \\ 1 - \frac{i\alpha}{2k} \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$T(k) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{i\alpha}{2k} & -\frac{i\alpha}{2k} \\ \frac{i\alpha}{2k} & 1 - \frac{i\alpha}{2k} \end{pmatrix} \tag{101}$$

$$\boxed{a(k) = 1 + \frac{i\alpha}{2k}, \quad b(k) = -\frac{i\alpha}{2k}} \tag{102}$$

6 Метод обратной задачи рассеяния (продолжение).

ДЗ 6-1. Проверим выполнения свойств 1-5 для уравнения Шрёдингера с дельта-функцией:

1. $\overline{a(k)} = 1 - \frac{i\alpha}{2k} = a(-k), \quad \overline{b(k)} = \frac{i\alpha}{2k} = b(-k).$
2. $|a|^2 - |b|^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{4k^2} - \frac{\alpha^2}{4k^2} = 1.$
3.

$$W(\varphi_1, \Psi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \Psi_2 \\ \varphi_{1x} & \Psi_{2x} \end{vmatrix} = \varphi_1 \Psi_{2x} - \varphi_{1x} \Psi_2 \tag{103}$$

$$\varphi_{1x}(x, k) = \begin{cases} -ike^{-ikx} + \alpha \cos kx, & x \geq 0 \\ -ike^{-ikx}, & x < 0 \end{cases} \tag{104}$$

$$\Psi_{2x}(x, k) = \begin{cases} ike^{ikx}, & x \geq 0 \\ ike^{ikx} - \alpha \cos kx, & x < 0 \end{cases} \tag{105}$$

$$W(\varphi_1, \Psi_2) = \begin{cases} ik + i\alpha \sin kxe^{ikx} + ik - \alpha \cos kxe^{ikx}, & x \geq 0 \\ ik - \alpha \cos kxe^{-ikx} + ik - i\alpha \sin kxe^{-ikx}, & x < 0 \end{cases} \tag{106}$$

$$i\alpha \sin kxe^{ikx} - \alpha \cos kxe^{ikx} = \frac{i\alpha}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})e^{ikx} - \frac{\alpha}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})e^{ikx} = -\alpha$$

$$-\alpha \cos kxe^{-ikx} - i\alpha \sin kxe^{-ikx} = -\frac{\alpha}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})e^{-ikx} - \frac{i\alpha}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})e^{-ikx} = -\alpha$$

$$W(\varphi_1, \Psi_2) = \begin{cases} 2ik - \alpha, & x \geq 0 \\ 2ik - \alpha, & x < 0 \end{cases} = 2ik - \alpha \tag{107}$$

$$\frac{W(\varphi_1, \Psi_2)}{2ik} = 1 + \frac{i\alpha}{2k} = a(k) \tag{108}$$

$$W(\varphi_1, \Psi_1) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \Psi_1 \\ \varphi_{1x} & \Psi_{1x} \end{vmatrix} = \varphi_1 \Psi_{1x} - \varphi_{1x} \Psi_1 \tag{109}$$

$$\varphi_{1x}(x, k) = \begin{cases} -ike^{-ikx} + \alpha \cos kx, & x \geq 0 \\ -ike^{-ikx}, & x < 0 \end{cases} \tag{110}$$

$$\Psi_{1x}(x, k) = \begin{cases} -ike^{-ikx}, & x \geq 0 \\ -ike^{-ikx} - \alpha \cos kx, & x < 0 \end{cases} \tag{111}$$

$$W(\varphi_1, \Psi_1) = \begin{cases} -ike^{-2ikx} - i\alpha \sin kxe^{-ikx} + ike^{-2ikx} - \alpha \cos kxe^{-ikx}, & x \geq 0 \\ -ike^{-2ikx} - \alpha \cos kxe^{-ikx} + ike^{-2ikx} - i\alpha \sin kxe^{-ikx}, & x < 0 \end{cases} \tag{112}$$

$$-i\alpha \sin kxe^{-ikx} - \alpha \cos kxe^{-ikx} = -\frac{i\alpha}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})e^{-ikx} - \frac{\alpha}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})e^{-ikx} = -\alpha$$

$$-\alpha \cos kxe^{-ikx} - i\alpha \sin kxe^{-ikx} = -\frac{\alpha}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})e^{-ikx} - \frac{i\alpha}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})e^{-ikx} = -\alpha$$

$$W(\varphi_1, \Psi_2) = \begin{cases} -\alpha, & x \geq 0 \\ -\alpha, & x < 0 \end{cases} = -\alpha \tag{113}$$

$$-\frac{W(\varphi_1, \Psi_2)}{2ik} = -\frac{i\alpha}{2k} = b(k) \tag{114}$$

4.
$$1-\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{iky}\alpha\delta(y)\varphi_1(y,k)dy=1-\frac{\alpha}{2ik}\varphi_1(0,k)=1+\frac{i\alpha}{2k}=a(k) \tag{115}$$

$$\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-2ik}\alpha\delta(x)\varphi_1(x,k)dx=\frac{\alpha}{2ik}\varphi_1(0,k)=-\frac{i\alpha}{2k}=b(k) \tag{116}$$

5. $a=1+\frac{i\alpha}{2k}=1+O(\frac{1}{k})$.

ДЗ 6-2. Уравнение Шрёдингера с дельта-функцией:

$$(\alpha\delta(x)-D_x^2)\Psi=\lambda\Psi,\quad \lambda=k^2 \tag{117}$$

При $x\neq 0$:

$$-D_x^2\Psi=k^2\Psi\to\Psi=C_1e^{ikx}+C_2e^{-ikx} \tag{118}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} C_1e^{ikx}+C_2e^{-ikx}, & x>0\\ C_1'e^{ikx}+C_2'e^{-ikx}, & x<0\end{cases} \tag{119}$$

$k\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, значит условия того, чтобы волновые функции не расходились на бесконечности, выглядят так:

$$\lim_{x\to\infty}\Psi(x)=0\to C_2=0 \tag{120}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\Psi(x)=0\to C_1'=0 \tag{121}$$

$$\lim_{x\to+0}\Psi(x)=\lim_{x\to-0}\Psi'(x)\to C_1=C_2'=C \tag{122}$$

Проинтегрируем уравнение Шрёдингера:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\alpha\delta(x)-D_x^2)\Psi(x)dx=\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\lambda\Psi(x)dx \tag{123}$$

$$\alpha\Psi(0)-D_x\Psi(\varepsilon)+D_x\Psi(-\varepsilon)=\lambda\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Psi(x)dx \tag{124}$$

Перейдём к пределу $\varepsilon\to 0$:

$$\alpha\Psi(0)-D_x\Psi(+0)+D_x\Psi(-0)=0 \tag{125}$$

$$\alpha C-ikC-ikC=0\to\boxed{k=-\frac{\alpha i}{2}} \tag{126}$$

Собственные функции:

$$\boxed{\Psi(x)=\begin{cases} Ce^{\frac{\alpha x}{2}}, & x\geq 0\\ Ce^{-\frac{\alpha x}{2}}, & x<0\end{cases},\quad \alpha<0} \tag{127}$$

$a(k)=0$: собственное значение $k=-\frac{\alpha i}{2}$ является нулём $a(k)$.

7 Метод обратной задачи рассеяния (окончание). Высшие уравнения КдФ.

ДЗ 7-1.

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi_x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix} \tag{128}$$

$$\Psi_t = V\Psi, \quad V = \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} + 2a(u-\lambda) & a_x \end{pmatrix} \tag{129}$$

$$\Psi_{xt} = U_t\Psi + U\Psi_t = U_t\Psi + UV\Psi \tag{130}$$

$$\Psi_{tx} = V_x\Psi + V\Psi_x = V_x\Psi + VU\Psi \tag{131}$$

$$\Psi_{xt} = \Psi_{tx} \to U_t = V_x + [V, U] \tag{132}$$

Утверждение 5. *Условие совместности* $U_t = V_x + [V, U] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b_x + a_{xx} = 0, \\ u_t = -a_{xxx} + 4a_x(u-\lambda) + 2au_x \end{cases} \tag{133}$$

Доказательство.

$$U_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix} \tag{134}$$

$$V_x = \begin{pmatrix} -a_{xx} & 2a_x \\ -a_{xxx} + 2a_x(u-\lambda) + 2au_x & a_{xx} \end{pmatrix} \tag{135}$$

$$\begin{gathered}[V, U] = VU - UV = \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} + 2a(u-\lambda) & a_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} + 2a(u-\lambda) & a_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a(u-\lambda) & -a_x \\ a_x(u-\lambda) & -a_{xx} + 2a(u-\lambda) \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} -a_{xx} + 2a(u-\lambda) & a_x \\ -a_x(u-\lambda) & 2a(u-\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & -2a_x \\ 2a_x(u-\lambda) & -a_{xx} \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{136}$$

$$V_x + [V, U] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_{xxx} + 4a_x(u-\lambda) + 2au_x & 0 \end{pmatrix} \tag{137}$$

Условие $U_t = V_x + [V, U] \Leftrightarrow u_t = -a_{xxx} + 4a_x(u-\lambda) + 2au_x$. □

8 Высшие уравнения КдФ.

ДЗ 8-1.

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \quad U_t = V_x + [V, U] \tag{138}$$

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ v & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \tag{139}$$

$$a, b, c \in P[\lambda] : \begin{cases} a = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n, \\ b = b_1\lambda^{n-1} + ... + b_n, \\ c = c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n. \end{cases}, \quad \begin{cases} u_{t_n} = f_n, \\ v_{t_n} = g_n, \end{cases} \tag{140}$$

1.

$$V_x + [V, U] = \begin{pmatrix} a' + bv - cu & b' + 2au - 2\lambda b \\ c' + 2\lambda c - 2av & -a' - bv + cu \end{pmatrix} \tag{141}$$

$$\begin{cases} u_{t_n} = b' + 2au - 2\lambda b, \\ v_{t_n} = c' + 2\lambda c - 2av, \\ 0 = a' + bv - cu; \end{cases} \tag{142}$$

Разделим уравнения на λ^n и перейдём к пределу $n \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i' \lambda^{-i} + 2 \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^{-i} u - 2 \sum_{i=0}^{n} b_{i+1} \lambda^{-i} = 0 \tag{143}$$

$$\boxed{b_{n+1} = ua_n + \frac{b_n'}{2}} \tag{144}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' \lambda^{-i} + 2 \sum_{i=0}^{n} c_{i+1} \lambda^{-i} - 2 \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^{-i} v = 0 \tag{145}$$

$$\boxed{c_{n+1} = va_n - \frac{c_n'}{2}} \tag{146}$$

$$\boxed{a_n' = -b_n v + c_n u} \tag{147}$$

2.

$$a_n = \int (-b_n v + c_n u) dx \tag{148}$$

$$\begin{cases} b_{n+1} = u \int (-b_n v + c_n u) dx + \frac{b_n'}{2}, \\ c_{n+1} = v \int (-b_n v + c_n u) dx - \frac{c_n'}{2}. \end{cases} \tag{149}$$

Оператор рекурсии:

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} -u \int v \, dx + \frac{d}{2dx} & u \int u \, dx \\ -v \int v \, dx & v \int u \, dx - \frac{d}{2dx} \end{pmatrix}} \tag{150}$$

3.

Утверждение 6. *Результат – дифференциальный многочлен от u и v.*

Доказательство. Воспользуемся утверждением из лекции 8:

$$\det V = -a^2 - cb = \text{const} \tag{151}$$

Значит a_n можно найти, зная все $a(i), b(i), c(i), i < n$, без интегрирования. Таким образом, результат – дифференциальный многочлен от u и v. □

9 Конечнозонные решения КдФ.

ДЗ 9-1.

$$u_{xy} = f(u), \quad u(x,y) = u(z), \quad z = xy \tag{152}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial (xy)}\frac{\partial (xy)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{153}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{154}$$

$$\boxed{f(u) = z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}} \tag{155}$$

ДЗ 9-2. *Уравнение Бюргерса*:

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \tag{156}$$

Припишем к (156) любое ОДУ:

$$u_{xxx} + u^2 = 0 \tag{157}$$

Утверждение 7. *При дифференцировании в силу (156) и исключенни производных в силу (157) получатся какие-то дополнительные связи и в результате нетривиальных решений не будет.*

Доказательство. Продифференцируем (157) по t:

$$u_{xxxt} + 2uu_t = 0 \tag{158}$$

Подставим u_t из уравнения Бюргерса (156):

$$(u_{xx} + 2uu_x)_{xxx} + 2u(u_{xx} + 2uu_x) = 0 \tag{159}$$

В силу (157):

$$u_{xxxxx} = -(u^2)_{xx} = -(2uu_x)_x = -2u_x^2 - 2uu_{xx} \tag{160}$$

$$(2uu_x)_{xxx} = 2u_{xxx}u_x + 6u_{xx}^2 + 6u_xu_{xxx} + 2uu_{xxxx} = -8u^2u_x + 6u_{xx}^2 - 4u^2u_x = -12u^2u_x + 6u_{xx}^2$$

$$-2u_x^2 - 12u^2u_x + 6u_{xx}^2 + 4u^2u_x = 0 \tag{161}$$

$$\boxed{u_x^2 + 4u^2u_x - 3u_{xx}^2 = 0} \tag{162}$$

Получилась дополнительная связь и в результате нетривиальных решений не будет. □

ДЗ 9-4.

$$u = \sum_{j=0}^{2n} e_j - 2\sum_{j=1}^{n}\gamma_j \tag{163}$$

Все корни вещественные и чередуются таким образом:

$$e_0 \le e_1 \le \gamma_1 \le e_2 \le e_3 \le \gamma_2 \le e_4 \le \ldots \le e_{2k-1} \le \gamma_k \le e_{2k} \le \ldots \le \gamma_n \le e_{2n} \tag{164}$$

Утверждение 8. *Из (163) и (164) следует*

$$e_0+e_1-e_{2n}\le u\le e_{2n} \tag{165}$$

Доказательство.

$$\gamma_k\le e_{2k}\to u\ge\sum_{j=0}^{2n}e_j-2\sum_{j=1}^{n}e_{2j}=e_0+e_1+\sum_{j=1}^{n-1}(e_{2j+1}-e_{2j})-e_{2n} \tag{166}$$

Из (164) следует, что $e_{2j+1}\ge e_{2j}$. Значит

$$u\ge e_0+e_1-e_{2n} \tag{167}$$

$$\gamma_k\ge e_{2k-1}\to u\le\sum_{j=0}^{2n}e_j-2\sum_{j=1}^{n}e_{2j-1}=\sum_{j=0}^{n-1}(e_{2j}-e_{2j+1})+e_{2n} \tag{168}$$

Из (164) следует, что $e_{2j+1}\ge e_{2j}$. Значит

$$u\le e_{2n} \tag{169}$$

$$\boxed{e_0+e_1-e_{2n}\le u\le e_{2n}} \tag{170}$$

□

ДЗ 9-5.

Утверждение 9.

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{s\ne j}(\gamma_j-\gamma_s)}=\begin{cases}0, & k=0,...,n-2,\\ 1, & k=n-1,\\ \Gamma, & k=n.\end{cases}, \tag{171}$$

где $\Gamma=\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_j$.

Доказательство. Пусть

$$F(\gamma)=\frac{\gamma^k}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\gamma-\gamma_j)} \tag{172}$$

Вычислим интеграл от $F(\gamma)$ по контуру, обхватывающему все γ_j, пользуясь теоремой Коши о вычетах:

$$\oint\limits_l F(\gamma)d\gamma=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{res}_{\gamma=\gamma_j}f(\gamma_j)=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{s\ne j}(\gamma_j-\gamma_s)} \tag{173}$$

Однако этот же интеграл можно посчитать по-другому:

$$\oint\limits_l F(\gamma)d\gamma=-2\pi i\operatorname*{res}_{\gamma=\gamma_j}f(\gamma_j)=\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{|\gamma|=\rho}\frac{e^{i\varphi}\rho id\varphi}{\gamma^{n-k}\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\frac{\gamma_j}{\gamma})} \tag{174}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{s\ne j}(\gamma_j-\gamma_s)}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{|\gamma|=\rho}\frac{e^{i\varphi}\rho id\varphi}{\gamma^{n-k}\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\frac{\gamma_j}{\gamma})} \tag{175}$$

Рассмотрим случаи:

1. $k < n-1$.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{s\neq j}(\gamma_j-\gamma_s)} = 0 \tag{176}$$

2. $k = n-1$.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{s\neq j}(\gamma_j-\gamma_s)} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{|\gamma|=\rho} \frac{e^{i\varphi}\rho i d\varphi}{\gamma\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\frac{\gamma_j}{\gamma})} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{|\gamma|=\rho} \frac{i d\varphi}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\frac{\gamma_j}{\gamma})} = 1$$

3. $k = n$.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{s\neq j}(\gamma_j-\gamma_s)} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{|\gamma|=\rho} \frac{e^{i\varphi}\rho i d\varphi}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\frac{\gamma_j}{\gamma})} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{|\gamma|=\rho} \rho e^{i\varphi} i\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j}{\gamma}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)\right)d\varphi$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{s\neq j}(\gamma_j-\gamma_s)} = \sum_{j=1}^{n}\gamma_j = \Gamma \tag{177}$$

Таким образом,

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{s\neq j}(\gamma_j-\gamma_s)} = \begin{cases} 0, & k=0,...,n-2, \\ 1, & k=n-1, \\ \Gamma, & k=n. \end{cases}} \tag{178}$$

$\square$

ДЗ 9-6.

$$y_j' = y_j\left(\sum_{s=1}^{n} y_s\right) - 2y_j^2, \quad j=1,...,n \tag{179}$$

Это уравнение Риккати. Введём замену: $y_j = \frac{u_j'}{2u_j}$.

$$\frac{u_j''u_j - {u_j'}^2}{2u_j^2} + \frac{{u_j'}^2}{2u_j^2} = \frac{u_j'}{2u_j}\left(\sum_{s=1}^{n} y_s\right) \tag{180}$$

$$u_j'' = u_j'\left(\sum_{s=1}^{n} y_s\right) \tag{181}$$

$$u_j = v + c_j,\ c_j = \text{const}, \quad \sum_{s=1}^{n} y_s = \frac{v''}{v'} \tag{182}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{u_j'}{2u_j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{v'}{2(v+c_j)} \tag{183}$$

$$\frac{v''}{v'} = \sum_{j=1}^{n}\frac{v'}{2(v+c_j)}, \rightarrow \frac{dv'}{v'} = \sum_{j=1}^{n}\frac{dv}{2(v+c_j)} \tag{184}$$

$$v' = c\sqrt{\prod_{j=1}^{n}(v+c_j)},\ c = \text{const} \tag{185}$$

Получилась гиперэллиптическая функция v.

$$\boxed{y_j = \frac{c\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{n}(v+c_k)}}{2(v+c_j)}, \quad v' = c\sqrt{\prod_{j=1}^{n}(v+c_j)}} \tag{186}$$

10 Одевающая цепочка.

ДЗ 10-1. *Цепочка Вольтерра*

$$u_{n,x} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{187}$$

эквиавалентна отображению

$$\tilde{u} = v, \quad \tilde{v} = \frac{v_x}{v} + u \quad ((u,v) = (u_{n-1}, u_n),\ (\tilde{u},\tilde{v}) = (u_n, u_{n+1})) \tag{188}$$

Утверждение 10. *Преобразование (188) переводит решение системы*

$$\begin{cases} u_t = -u_{xx} + (u^2 + 2uv)_x, \\ v_t = v_{xx} + (v^2 + 2uv)_x \end{cases} \tag{189}$$

в решение такой же системы.

Доказательство. Выразим из (188) v и u:

$$\begin{cases} v = \tilde{u}, \\ u = \tilde{v} - \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}}. \end{cases} \tag{190}$$

Подставим в (189):

$$\begin{cases} (\tilde{v} - \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}})_t = -(\tilde{v} - \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}})_{xx} + ((\tilde{v} - \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}})^2 + 2\tilde{u}(\tilde{v} - \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}}))_x, \\ \tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} + (\tilde{u}^2 + 2\tilde{u}(\tilde{v} - \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}}))_x \end{cases} \tag{191}$$

$$\tilde{u}_t = -\tilde{u}_{xx} + (\tilde{u}^2 + 2\tilde{u}\tilde{v})_x \tag{192}$$

Данное уравнение совпадает с первым уравнением системы (189).

$$\tilde{v}_t = \left(\frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}}\right)_t - \left(\tilde{v} - \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}}\right)_{xx} + \left(\tilde{v}^2 + \frac{\tilde{u}_x^2}{\tilde{u}^2} - \frac{2\tilde{v}\tilde{u}_x}{\tilde{u}} + 2\tilde{u}\tilde{v} - 2\tilde{u}_x\right)_x \tag{193}$$

Вместо $\left(\frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}}\right)_t$ запишем $\left(\frac{\tilde{u}_t}{\tilde{u}}\right)_x$:

$$\tilde{v}_t = \left(\frac{\tilde{u}_t}{\tilde{u}} - \tilde{v}_x + \frac{\tilde{u}_{xx}}{\tilde{u}} - \frac{\tilde{u}_x^2}{\tilde{u}^2} + \tilde{v}^2 + \frac{\tilde{u}_x^2}{\tilde{u}^2} - \frac{2\tilde{v}\tilde{u}_x}{\tilde{u}} + 2\tilde{u}\tilde{v} - 2\tilde{u}_x\right)_x \tag{194}$$

Вместо $\tilde{u}_t$ подставим $-\tilde{u}_{xx} + (\tilde{u}^2 + 2\tilde{u}\tilde{v})_x$:

$$\tilde{v}_t = \left(-\frac{\tilde{u}_{xx}}{\tilde{u}} + 2\tilde{u}_x + 2\tilde{v}_x + \frac{2\tilde{v}\tilde{u}_x}{\tilde{u}} - \tilde{v}_x + \frac{\tilde{u}_{xx}}{\tilde{u}} + \tilde{v}^2 - \frac{2\tilde{v}\tilde{u}_x}{\tilde{u}} + 2\tilde{u}\tilde{v} - 2\tilde{u}_x\right)_x \tag{195}$$

$$\tilde{v}_t = \left(\tilde{v}_x + \tilde{v}^2 + 2\tilde{u}\tilde{v}\right)_x \tag{196}$$

$$\tilde{v}_t = \tilde{v}_{xx} + \left(\tilde{v}^2 + 2\tilde{u}\tilde{v}\right)_x \tag{197}$$

Данное уравнение совпадает со вторым уравнением системы (189). □

ДЗ 10-3. *Уравнение синус-Гордона*:

$$u_{xy} = \sin u \tag{198}$$

Утверждение 11. *Исключение $\tilde{u}$ даёт уравнение синус-Гордона для u и наоборот для системы уравнений:*

$$\begin{cases} \tilde{u}_x + u_x = 2\alpha \sin \frac{\tilde{u}-u}{2}, \\ \tilde{u}_y - u_y = \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\tilde{u}+u}{2} \end{cases} \tag{199}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xy} + u_{xy} = 2\alpha \frac{\tilde{u}_y - u_y}{2} \cos \frac{\tilde{u}-u}{2}, \\ \tilde{u}_{yx} - u_{yx} = \frac{2}{\alpha} \frac{\tilde{u}_x + u_x}{2} \cos \frac{\tilde{u}+u}{2} \end{cases} \tag{200}$$

Подставим $\tilde{u}_x + u_x$ и $\tilde{u}_y - u_y$ из (199):

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xy} + u_{xy} = 2 \sin \frac{\tilde{u}+u}{2} \cos \frac{\tilde{u}-u}{2}, \\ \tilde{u}_{yx} - u_{yx} = 2 \sin \frac{\tilde{u}-u}{2} \cos \frac{\tilde{u}+u}{2}; \end{cases} \tag{201}$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xy} + u_{xy} = \sin \tilde{u} + \sin u, \\ \tilde{u}_{yx} - u_{yx} = \sin \tilde{u} - \sin u; \end{cases} \tag{202}$$

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{u}_{xy} = \sin \tilde{u}, \\ u_{xy} = \sin u; \end{cases}} \tag{203}$$

□