Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Введение в теорию групп (4 семестр, М.А. Берштейн)

Коцевич Андрей Витальевич, группа Б02-920

23 мая 2021 г. Версия 12.0

Содержание

Введение

Все задания, которые я присылаю, выполнены и написаны мной самостоятельно!

1 Определение группы. Группа перестановок.

Упражнение 1.1. а) $\alpha = (1,3,5)(2,4,7)$, $\beta = (1,4,7)(2,3,5,6)$.

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\boxed{\alpha\beta = (1,7,3)(2,5,6,4)} \tag{2}$$

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,5,2,6)(3,4,7) \tag{3}$$

$$\boxed{\operatorname{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{НОК}(4,3) = 12} \tag{4}$$

где $\operatorname{ord}\sigma$ – порядок элемента σ.

Задача 1.2. а)

Предложение 1. *Любая транспозиция является нечётной перестановкой.*

Доказательство. Пусть σ – транспозиция. По определению транспозиции:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ 1 & \dots & b & \dots & a & \dots & n \end{pmatrix} \tag{5}$$

Число инверсий $|\sigma| = 1 + 2(b-a-1)$, т.к. инверсиями будут следующие пары чисел: первое число из множества чисел между a и b (их $b-a-1$ штук), второе число из множества $\{a,b\}$ (таких инверсий $2(b-a-1)$ штук), а также a и b (1 инверсия). Тогда по определению σ является нечётной перестановкой. $\square$

б) Для начала докажем следующее предложение:

Предложение 2. *Умножение на транспозицию меняет чётность перестановки.*

Доказательство. Пусть σ – транспозиция. По определению транспозиции:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ 1 & \dots & b & \dots & a & \dots & n \end{pmatrix} \tag{6}$$

Транспозицию σ можно разложить в элементарные транспозиции. Их количество: $1 + 2(b-a-1)$ ($b-a-1$ элементарную транспозицию нужно сделать, чтобы a и b стали соседними, потом 1 транспозицию, чтобы поменять их местами, и ещё $b-a-1$, чтобы вернуть a и b на новое место). Каждая элементарная транспозиция меняет чётность, значит нечётное их число также меняет чётность. $\square$

Теорема 3. *Пусть перестановка разложена в произведение транспозиций. Тогда её чётность равна чётности количества этих транспозиций.*

Доказательство. Пусть количество транспозиций k. Докажем утверждение по индукции. База: $k = 0$ (0 транспозиций дают чётную перестановку). Прежположим, что для $k-1$ утверждение верно. Тогда для k утверждение верно, т.к. домножение на транспозицию меняет чётность перестановки (по предложению 2), а числа $k-1$ и k также имеют противоположные чётности. $\square$

в) Пусть $\sigma = (i_1, ..., i_d)$. Разложим σ в произведение транспозиций: $\sigma = (i_1, i_d)(i_1, i_{d-1})...(i_1, i_2)$. Всего $d-1$ транспозиций. Если число транспозиций $d-1$ чётно, то и σ чётная (по теореме 3); если $d-1$ нечётно, то и σ нечётная ($|\sigma| = d-1$). Таким образом, если d и σ имеют противоположные чётности.

Задача 1.3. Ответ на вопрос про собственные числа даёт характеристическое уравнение:

$$\det(R(\sigma) - \lambda E) = 0 \tag{7}$$

Пусть перестановка σ раскладывается в произведение циклов $\sigma = \prod\limits_{i=1}^{l} \sigma_i$, где все σ_i – циклы, l – их число.

Определение 4. *Циклический тип перестановки* – данные о том, сколько циклов каждой длины присутствует в разложении перестановки через циклы.

Пусть длина цикла σ_i равна k_i, количество циклов длины k в произведении равно m_k. Разумеется, $\sum\limits_{i=1}^{l} k_i = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k k = n$. Характеристическое уравнение инвариантно относительно выбора базиса. Значит выберем его так, чтобы матрица стала блочно-диагональной матрицей с блоками $R(\sigma_i)$, соответствующими i циклу:

$$R(\sigma) = \begin{pmatrix} R(\sigma_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(\sigma_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R(\sigma_l) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Матрица $R(\sigma_i)_{k_i \times k_i}$ будет выглядеть так:

$$R(\sigma_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\det(R(\sigma) - \lambda E) = \prod_{i=1}^{l} \det(R(\sigma_i) - \lambda E) \tag{10}$$

Определитель посчитаем, раскрыв по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{k_i - 1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$\det(R(\sigma_i)-\lambda E)=(-\lambda)(-\lambda)^{k_i-1}+(-1)^{k_i-1}=(-1)^{k_i}(\lambda^{k_i}-1) \tag{12}$$

$$\det(R(\sigma)-\lambda E)=\prod_{i=1}^{l}(-1)^{k_i}(\lambda^{k_i}-1)=(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{l}k_i}\prod_{i=1}^{l}(\lambda^{k_i}-1)=(-1)^n\prod_{i=1}^{l}(\lambda^{k_i}-1) \tag{13}$$

Сгруппируем множители:

$$\det(R(\sigma)-\lambda E)=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}(\lambda^k-1)^{m_k}=0 \tag{14}$$

Теперь мы можем выписать все собственные значения. Как видно, все λ_k – корни из 1 степени k:

$$\boxed{\lambda_{k,t}=\exp\left(\frac{2\pi t}{k}i\right),\quad t\in\{0,...,k-1\}} \tag{15}$$

m_k – количество $\lambda_{k,0},...,\lambda_{k,k-1}$. Всего собственных значений $\sum\limits_{k=1}^{n}m_k k=n$, как и должно быть (матрица $n\times n$ содержит n комплексных собственных чисел).

Задача 1.4 (*)**.** Для начала заметим, что при $n=1$ перестановка всего одна – тождественная. Для неё нет понятия инверсии, т.к. для нет i и j $(i<j)$. Элемент всего 1 и 2 разных выбрать нельзя.
Далее будем рассматривать случай $n\geq 2$ (обычно такой случай сразу и рассматривается). Пусть число чётных перестановок n_1, число нечётных n_2. Домножим все чётные перестановки на любую транспозицию (например, (1, 2)). Все они станут нечётными, а значит $n_1\leq n_2$. Делая то же самое с нечётными перестановками, получим неравенство $n_2\leq n_1$. Таким образом, в группе S_n число чётных перестановок равно числу нечётных: $n_1=n_2=\frac{n!}{2}$ ($n!$ чётен при $n\geq 2$).

2 Абелевы группы. Действие группы на множестве.

Упражнение 2.1. а) В группе $Z_{10}^*=\{1,3,7,9\}$ 2 элемента имеют порядок 4: 3 ($3^4=81=1\bmod 10$) и 7 ($7^4=2401=1\bmod 10$), а значит $Z_{10}^*\simeq C_4$ (по предложению 3 лекции 2).

б) $Z_{15}^*=\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$. Группа не является циклической, поскольку в ней не существует элемента, степени которого порождают всю группу (порядка 8): $\operatorname{ord}1=1$, $\operatorname{ord}2=4$, $\operatorname{ord}4=2$, $\operatorname{ord}7=4$, $\operatorname{ord}8=4$, $\operatorname{ord}11=2$, $\operatorname{ord}13=4$, $\operatorname{ord}14=2$.

Упражнение 2.2. $|G|=48$ – порядок группы симметрий куба. По теореме 12 лекции 2: $|Gx||G_x|=|G|=48$.

а) Пусть $x\in X$ – произвольное ребро. Симметриями оно может быть переведено в любое другое, а значит $|Gx|=12$ (в кубе 12 рёбер). $|G_x|=\frac{|G|}{|Gx|}=4$. Найдём эти 4 симметрии: тождественное, поворот на 180° вокруг прямой l, проходящей через центр ребра x и центр его противоположного на и эти повороты со симметрией относительно плоскости, проходящей через l и параллельной 2 граням куба. Повороты образуют группу, изоморфную C_2 (два поворота на 180° эквивалентны тождественному), симметрии тоже. Таким образом,

$$\boxed{G_x\simeq C_2\times C_2\simeq D_2} \tag{16}$$

б) Пусть $x \in X$ – произвольная грань. Симметриями она может быть переведена в любую другую, а значит $|Gx| = 6$ (в кубе 6 граней). $|G_x| = \frac{|G|}{|Gx|} = 8$. Найдём эти 8 симметрий. Это будет группа симметрий квадрата (диэдра D_4): тождественное, повороты на $90°$, $180°$, $270°$ вокруг прямой l, проходящей через центр грани x и центр её противоположной и эти повороты со симметрией относительно плоскости, проходящей через l и параллельной 2 граням куба. Таким образом,

$$\boxed{G_x \simeq D_4 \simeq C_2 \ltimes C_4} \tag{17}$$

Упражнение 2.3. Порядок группы S_3: $|S_3| = 3! = 6$. По теореме 12 лекции 2: $|S_3x||S_{3x}| = |S_3| = 6$. Следовательно, стабилизатор группы S_{3x} (являющийся подгруппой S_3 по предложению 10 лекции 2), имеет порядок, являющийся делителем 6. Всего 4 варианта: $1, 2, 3, 6$.

$$S_{3x} = \{g \in S_3 | gxg^{-1} = x\} \tag{18}$$

Найдём элементы g, удовлетворяющие соотношению $gxg^{-1} = x$. Домножим на g справа:

$$gx = xg \tag{19}$$

Среди таких g могут быть: e ($eg = ge = g$), x ($xx = x^2$), x^{-1} ($xx^{-1} = x^{-1}x = e$). Их уже 3 штуки. Рассмотрим несколько случаев:

1. $e = x = x^{-1}$. С e коммутирует любой элемент группы, следовательно $|S_{3e}| = 6$ и

   $$\boxed{S_{3e} = S_3} \tag{20}$$

   Со всей группой в S_3 коммутирует только e (это будет показано в п. 2), а значит при $x \neq e$ $|S_{3x} < 6|$. Из этого и того, что варианта всего 4 (1, 2, 3, 6) следует, что при $x \neq e$ $|S_{3x} \leq 3|$.

2. $x = x^{-1} \to x^2 = e$. Такими элементами являются транспозиции: $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$. Может оказаться, что порядок их стабилизаторов не 2, а 3. Проверим, что транспозиции с другими элементами не коммутируют на примере $(1, 2)$ (для $(1, 3)$ и $(2, 3)$ всё аналогично):

   $$(1,2)(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2) \neq (1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)(1,2) \tag{21}$$

   $$(1,2)(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3) \neq (1,3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2,3)(1,2) \tag{22}$$

   $$(1,2)(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3) \neq (1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3)(1,2) \tag{23}$$

   $$(1,2)(1,3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3) \neq (2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2)(1,2) \tag{24}$$

   Следовательно $|S_{3_{(1,2)}}| = |S_{3_{(1,3)}}| = |S_{3_{(2,3)}}| = 2$ и

   $$\boxed{S_{3_{(1,2)}} = \{e, (1,2)\}, \quad S_{3_{(1,3)}} = \{e, (1,3)\}, \quad S_{3_{(2,3)}} = \{e, (2,3)\}} \tag{25}$$

3. $e \neq x \neq x^{-1}$. Такими элементами являются оставшиеся циклы длины 3: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$ $((1,2,3)^{-1} = (1,3,2))$. Значит, $|S_{3_{(1,2,3)}}| = |S_{3_{(1,3,2)}}| = 3$ (мы уже предоставили 3 разных g, а больше быть не может) и

$$\boxed{S_{3_{(1,2,3)}} = S_{3_{(1,3,2)}} = \{e, (1,2,3), (1,3,2)\}} \tag{26}$$

Таким образом, мы рассмотрели все 6 перестановок и нашли их стабилизаторы.
Определение орбиты:

$$S_3 x = \{y \in S_3 | \exists g \in S_3 : y = gxg^{-1}\} \tag{27}$$

Рассмотрим также 3 случая:

1. $x = e$, $|S_{3_e}| = 6$: $|S_3 e| = \frac{|S_3|}{|S_{3_e}|} = 1$. Значит нужно найти единственный элемент $y \in S_3 e$: $y = geg^{-1} = gg^{-1} = e$.

$$\boxed{S_3 e = \{e\}} \tag{28}$$

2. Транспозиции, $|S_{3_x}| = 2$: $|S_3 x| = \frac{|S_3|}{|S_{3_x}|} = 3$. Значит нужно найти 3 элемента $y \in S_3 x$: $y = gxg^{-1}$. Для примера возьмём $x = (1,2)$. $g = (1,2)$: $y = (1,2)(1,2)(1,2)^{-1} = (1,2)$; $g = (1,3)$: $y = (1,3)(1,2)(1,3)^{-1} = (2,3)$; $g = (2,3)$: $y = (2,3)(1,2)(2,3)^{-1} = (1,3)$. Все 3 различных элемента y найдены. Орбиты $(1,3)$ и $(2,3)$ точно такие же по предложению 11 лекции 2 (они пересекаются, а значит должны совпадать).

$$\boxed{S_3(1,2) = S_3(1,3) = S_3(2,3) = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}} \tag{29}$$

3. Циклы длины 3, $|S_{3_x}| = 3$: $|S_3 x| = \frac{|S_3|}{|S_{3_x}|} = 2$. Значит нужно найти 2 элемента $y \in S_3 x$: $y = gxg^{-1}$. Для примера возьмём $x = (1,2,3)$. $g = (1,2,3)$: $y = (1,2,3)(1,2,3)(1,2,3)^{-1} = (1,2,3)$; $g = (1,2)$: $y = (1,2)(1,2,3)(1,2)^{-1} = (1,3,2)$. Оба различных элемента y найдены. Орбита $(1,3,2)$ точно такая же по предложению 11 лекции 2 (они пересекаются, а значит должны совпадать).

$$\boxed{S_3(1,2,3) = S_3(1,3,2) = \{(1,2,3), (1,3,2)\}} \tag{30}$$

Множество орбит:

$$\boxed{S_3/S_3 = \{\{e\}, \{(1,2), (1,3), (2,3)\}, \{(1,2,3), (1,3,2)\}\}} \tag{31}$$

Задача 2.4. Пусть $|G| = 54$ – абелева группа. Найдём все возможные такие группы. Воспользуемся теоремой 7 лекции 2:

$$G = C_{n_1} \times ... \times C_{n_l} \tag{32}$$

При этом $\prod\limits_{i=1}^{l} n_i = 54$. Разложим 54 на простые множители: $54 = 2 \cdot 3^3$. Воспользуемся теоремой 7 лекции 2 для того, чтобы найти все неизоморфные группы:

1. Группа $C_2 \times C_{27} \simeq C_{54}$ (т.к. НОД$(2,27) = 1$).

2. Группа $C_2 \times C_3 \times C_9 \simeq C_6 \times C_9$ (т.к. НОД$(2,3) = 1$).

3. Группа $C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \simeq C_6 \times C_3 \times C_3$ (т.к. НОД$(2,3) = 1$).

Всего 3 неизоморфные абелевы группы (они неизоморфны, поскольку НОД$(3,3) = 3 \neq 1$).

Задача 2.5.

Предложение 5. *Для любой точки $x \in X$ стабилизатор G_x является подгруппой в G.*

Доказательство. Проверим свойства подгруппы:

1. Пусть $g_1, g_2 \in G_x$, тогда $g_1 x = x$, $g_2 x = x$. $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1 x = x$, поэтому $g_1 g_2 \in G_x$.
2. Пусть $g \in G_x$, тогда $gx = x$. $x = g^{-1}gx = g^{-1}x$, поэтому $g^{-1} \in G_x$.

□

3 Теорема Лагранжа, классы сопряженности, нормальные подгруппы, полупрямое произведение.

Упражнение 3.1.

Предложение 6.

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, \phi_{a_2^{-1}}(b_1) b_2) \tag{33}$$

Полупрямое произведение, заданное формулой (33) является группой.

Доказательство. Проверим свойства группы:

1. Ассоциативность:
$((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (a_3, b_3) = (a_1 a_2, \phi_{a_2^{-1}}(b_1) b_2) \cdot (a_3, b_3) = (a_1 a_2 a_3, \phi_{a_3^{-1}}(\phi_{a_2^{-1}}(b_1) b_2) b_3) = (a_1 a_2 a_3, \phi_{a_3^{-1}}(\phi_{a_2^{-1}}(b_1)) \phi_{a_3^{-1}}(b_2) b_3) = (a_1 a_2 a_3, \phi_{a_3^{-1} a_2^{-1}}(b_1) \phi_{a_3^{-1}}(b_2) b_3)$.
$(a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) \cdot (a_2 a_3, \phi_{a_3^{-1}}(b_2) b_3) = (a_1 a_2 a_3, \phi_{(a_2 a_3)^{-1}}(b_1) \phi_{a_3^{-1}}(b_2) b_3) = (a_1 a_2 a_3, \phi_{a_3^{-1} a_2^{-1}}(b_1) \phi_{a_3^{-1}}(b_2) b_3)$.
2. Существование единицы (e, e):
$(a, b) \cdot (e, e) = (ae, \phi_{e^{-1}}(b) e) = (a, b)$.
$(e, e) \cdot (a, b) = (ea, \phi_{a^{-1}}(e) b) = (a, b)$.
3. Существование обратного $(a^{-1}, \phi_a(b^{-1}))$:
$(a, b) \cdot (a^{-1}, \phi_a(b^{-1})) = (aa^{-1}, \phi_a(b) \phi_a(b^{-1})) = (e, e)$.
$(a^{-1}, \phi_a(b^{-1})) \cdot (a, b) = (a^{-1} a, \phi_{a^{-1}}(\phi_a(b^{-1})) b) = (e, e)$.

□

Задача 3.2. a)

Предложение 7. *Пусть G – группа движений, сохраняющих правильный тетраэдр. Действие G на множестве вершин тетраэдра задаёт изоморфизм G и S_4.*

Доказательство. Для доказательства изоморфизма выпишем соответствие между перестановками различных циклических типов в S_4 и различными движениями, сохраняющими правильный тетраэдр:

1. e (единичный, 1 шт.) – тождественное движение (ничего не делает с тетраэдром).

2. (a, b) (транспозиции, 6 шт.) – отражение относительно плоскости π, проходящей через ребро (вершины которого остаются на месте) и центр противопложного ребра (вершины которого меняются местами).
3. $(a, b)(c, d)$ (произведение транспозиций, 3 шт.) – повороты на π вокруг прямой l_1, проходящей через центры противоположных рёбер (вершины которых и будут меняться местами).
4. (a, b, c) (цикл длины 3, 8 шт.) – поворот на $2\pi/3$ или $4\pi/3$ вокруг прямой l_2, проходящей через вершину и центр противоположной грани (вершины этой грани и будут циклически меняться).
5. (a, b, c, d) (цикл длины 4, 6 шт.) – зеркальный повороте на $\pi/2$ с прямой l_3, проходящей через середины двух противоположных ребер и плоскостью симметрии, проходящей через середины остальных ребер.

Таким образом, построено однозначное соответствие между перестановками и движениями, сохраняющее групповые операции, а значит изоморфизм групп построен. $\square$

По предложению 7 лекции 3 перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда имеют одинаковую циклическую структуру. А значит классами сопряжённости являются 5 видов движения, описанных выше.

б) В G_0 будут входить движения вида 1, 3 и 4 (см. список выше), поскольку среди них нет отражений и зеркальных поворотов. Всего 12 штук. Поскольку G_0 состоит из классов сопряжённости, то она нормальна. Также можно заметить, что она изоморфна знакопеременной группе A_4, которая является нормальной подгруппой S_4.
Проверим, какие классы сопряжённости из G перейдут в G_0. Конечно, класс $\{e\}$ сохранится. Класс, состоящий из произведений транспозиций сохранится также, поскольку из одного произведения можно получить остальные 2 при сопряжениях с циклами длины 3. $(1,3,4)(1,2)(3,4)(1,3,4)^{-1} = (1,4)(2,3)$, $(1,4,3)(1,2)(3,4)(1,4,3)^{-1} = (1,3)(2,4)$ (это все случаи, если учесть, что $(1,3,4)^{-1} = (1,4,3)$) (для сокращения записи циклы написаны в A_4, а не в G_0).
Рассмотрим циклы длины 3. $|G_0| = 12$, а значит класс сопряжённости (орбита) не может состоять из 8 элементов (12 на 8 не делится). В G_0 невозможно получить каждый цикл длины 3 из каждого, т.е. циклы длины 3 создадут 2 класса сопряжённости в G_0, которые соответствуют поворотам на $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ вокруг прямой, проходящей через вершину и центр противоположной грани тетраэдра (по 4 в каждом классе): $\{(1,2,3),(1,4,2),(1,3,4),(2,4,3)\}$, $\{(1,3,2),(1,2,4),(2,3,4),(1,4,3)\}$ (для сокращения записи циклы написаны в A_4, а не в G_0).
Таким образом, всего будет 4 класса сопряженности в G_0 (и соответственно в A_4).

Задача 3.3. а) Группой симметрии правильного n-угольника является группа диэдра D_n (n поворотов и n осевых отражений). Основания могут поменяться местами при помощи отражения относительно плоскости π, проходящей через середины боковых рёбер. Тождественная симметрия (которая ничего не делает с призмой) и отражение образуют группу C_2. Поскольку все симметрии из D_{nh} можно представить в виде произведения элементов групп D_n и C_2, группы D_n и C_2 коммутативны и пересечение групп тривиально (по e), то

$$D_{nh} = D_n \times C_2 \tag{34}$$

$$\boxed{|D_{nh}| = |D_n| \cdot |C_2| = 4n} \tag{35}$$

Порядок можно было получить проще: только при 2 симметриях вершина x переходит сама в себя (тождественная и отражение относительно плоскости, проходящей через x). Значит $G_x = 2$. Любая вершина при симметриях может перейти в любую, значит $Gx = 2n$.

$$\boxed{|D_{nh}| = |G_x| \cdot |Gx| = 4n} \tag{36}$$

б)

$$\boxed{D_{3h} \simeq D_3 \times C_2 \simeq C_3 \ltimes C_2 \times C_2} \tag{37}$$

Сначала докажем следующее предложение:

Предложение 8. *D_6 изоморфно $D_3 \times C_2$.*

Доказательство. Заметим, что D_6 – группа симметрий правильного шестиугольника, а его вершины являются вершинами двух равносторонних треугольников. Группа симметрии правильного треугольника – D_3. Один треугольник можно перевести в другой при помощи поворота на π вокруг прямой l, проходящей через центр шестиугольника и перпендикулярной его плоскости. Тождественная симметрия и такой поворот образуют C_2. Поскольку все симметрии из D_6 можно представить в виде произведения элементов групп D_3 и C_2, группы D_3 и C_2 коммутативны и пересечение групп тривиально (по e), то утверждение доказано. □

Учтём, что $D_{3h} \simeq D_3 \times C_2$ и получим

$$\boxed{D_{3h} \simeq D_3 \times C_2 \simeq D_6} \tag{38}$$

Задача 3.4. а Движения получаются четырёх видов: трансляции относительно векторов решетки, симметрии относительно горизонтальных и вертикальных осей и центральные симметрии относительно точек половинной решётки (повороты на π вокруг прямой, проходящей через центр решётки перпендикулярно ей, можно получить из симметрий).

1. Группа трансляций T порождена сдвигами на порождающие вектора решётки e_1 и e_2. Её элемент:

$$t_{n_1,n_2,n_3,n_4} : \begin{cases} x_1 \to x_1 + n_1 e_1 + n_2 e_2 \\ x_2 \to x_2 + n_3 e_1 + n_4 e_2 \end{cases}, \quad n_i \in \mathbb{Z} \tag{39}$$

2. Общая симметрия относительно вертикальных осей:

$$s^v_{l_1,l_2,l_3,l_4} : \begin{cases} x_1 \to -x_1 + l_1 e_1 + l_2 e_2 \\ x_2 \to x_2 + l_3 e_1 + l_4 e_2 \end{cases}, \quad l_i \in \mathbb{Z} \tag{40}$$

   где x_1, x_2 – координаты вектора x.

3. Общая симметрия относительно горизонтальных осей:

$$s^h_{k_1,k_2,k_3,k_4} : \begin{cases} x_1 \to x_1 + k_1 e_1 + k_2 e_2 \\ x_2 \to -x_2 + k_3 e_1 + k_4 e_2 \end{cases}, \quad k_i \in \mathbb{Z} \tag{41}$$

4. Общая центральная симметрия:

$$s_{m_1,m_2,m_3,m_4} : \begin{cases} x_1 \to -x_1 + m_1 e_1 + m_2 e_2 \\ x_2 \to -x_2 + m_3 e_1 + m_4 e_2 \end{cases}, \quad m_i \in \mathbb{Z} \tag{42}$$

Предложение 9. *Подгруппа T является нормальной*

Доказательство. При сопряжениях с движениями любых видов трансляция перейдёт в трансляцию (коэффициенты перед x_1 и x_2 будут либо 1, либо $(-1)^2 = 1$, а значит $x \to x + a$, где a – некоторый вектор с целыми координатами). □

Движения различных типов (T, 3 вида симметрий) – 4 класса смежности по T. Факторгруппа G/T состоит из 4 элементов:

1. $$e = t_{0,0,0,0} : x \to x \tag{43}$$

2. $$s^v_{0,0,0,0} : \begin{cases} x_1 \to -x_1 \\ x_2 \to x_2 \end{cases} \tag{44}$$

3. $$s^h_{0,0,0,0} : \begin{cases} x_1 \to x_1 \\ x_2 \to -x_2 \end{cases} \tag{45}$$

4. $$s_{0,0,0,0} : x \to -x \tag{46}$$

Такая факторгруппа $G/T \simeq C_2 \times C_2$ (таблицы умножения совпадают). Рассмотрим подгруппу G_0 движений, сохраняющих начало координат.
Пусть G_0 – подгруппа движений, сохраняющих начало координат. Группа $G \simeq G_0 \ltimes T$, G_0 действует на T следующим образом: $\phi_e(t_{n_1,n_2,n_3,n_4}) = t_{n_1,n_2,n_3,n_4}$, $\phi_{s_0^v}(t_{n_1,n_2,n_3,n_4}) = t_{-n_1,-n_2,n_3,n_4}$, $\phi_{s_0^h}(t_{n_1,n_2,n_3,n_4}) = t_{n_1,n_2,-n_3,-n_4}$ и $\phi_{s_0}(t_{n_1,n_2,n_3,n_4}) = t_{-n_1,-n_2,-n_3,-n_4}$:

$$\phi_e(t_{n_1,n_2,n_3,n_4})(x) = et_{n_1,n_2,n_3,n_4}e(x) = t_{n_1,n_2,n_3,n_4}(x)$$

$$\phi_{s_0^v}(t_{n_1,n_2,n_3,n_4})(x_1, x_2)^T = s^v_{0,0,0,0}t_{n_1,n_2,n_3,n_4}s^v_{0,0,0,0}(x_1, x_2)^T = s^v_{0,0,0,0}t_{n_1,n_2,n_3,n_4}(-x_1, x_2)^T =$$
$$= s^v_{0,0,0,0}(-x_1+n_1e_1+n_2e_2, x_2+n_3e_1+n_4e_2)^T = (x_1-n_1e_1-n_2e_2, x_2+n_3e_1+n_4e_2)^T = t_{-n_1,-n_2,n_3,n_4}(x)$$

$$\phi_{s_0^h}(t_{n_1,n_2,n_3,n_4})(x_1, x_2)^T = s^h_{0,0,0,0}t_{n_1,n_2,n_3,n_4}s^h_{0,0,0,0}(x_1, x_2)^T = s^h_{0,0,0,0}t_{n_1,n_2,n_3,n_4}(x_1, -x_2)^T =$$
$$= s^h_{0,0,0,0}(x_1+n_1e_1+n_2e_2, -x_2+n_3e_1+n_4e_2)^T = (x_1+n_1e_1+n_2e_2, x_2-n_3e_1-n_4e_2)^T = t_{n_1,n_2,-n_3,-n_4}(x)$$

$$\phi_{s_0}(t_{n_1,n_2,n_3,n_4})(x_1, x_2)^T = s_{0,0,0,0}t_{n_1,n_2,n_3,n_4}s_{0,0,0,0}(x_1, x_2)^T = s_{0,0,0,0}t_{n_1,n_2,n_3,n_4}(-x_1, -x_2)^T =$$
$$= s_{0,0,0,0}(-x_1 + n_1e_1 + n_2e_2, -x_2 + n_3e_1 + n_4e_2)^T = (x_1 - n_1e_1 - n_2e_2, x_2 - n_3e_1 - n_4e_2)^T =$$
$$= t_{-n_1,-n_2,-n_3,-n_4}(x_1, x_2)^T$$

б)* Найдём классы сопряжённости в G. Они также будут совпадать с 4 типами движений: трансляции и 3 симметрии (см. список выше), поскольку невозможно получить из движения одного типа сопряжением движение другого типа (т.к. при сопряжениях знак при x_1 и x_2 меняется чётное число раз: 0 (если то, чем мы сопрягаем не меняет там знак) или 2 (если то, чем мы сопрягаем меняет там знак)). Т.е. если например трансляция не меняла знаки при x_1 и x_2. то и при сопряжении чем угодно менять знак не будет; если симметрия меняла знак при x_1 и не меняла при x_2, то и при сопряжении чем угодно будет менять при x_1 и не будет при x_2. Т.е. всего 4 класса сопряжённости (трансляции и 3 вида симметрий).

4 Разные конструкции.

Задача 4.1. Пусть φ – гомоморфизм из S_4 в S_3. По предложению 2 лекции 4 Ker φ – нормальная подгруппа в S_4. Значит, Ker φ является объединением каких-то классов сопряжённости. $|S_4| = 4! = 24$, $|S_3| = 3! = 6$. Тогда по предложению 5 лекции 4 $|S_4| = |\text{Ker } \varphi||S_3|$, откуда $|\text{Ker } \varphi| = \frac{|S_4|}{|S_3|} = 4$. Классы сопряжённости S_4 рассмотрены в задаче 3.2. Всего 2 класса имеют мощность, не превышающую 4: $\{e\}$ и $\{(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$, они и будут составлять ядро (их суммарная мощность равна 4): Ker $\varphi = \{e,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$.
Воспользуемся действием S_4 на пространстве многочленов от четырёх переменных вида $P = x_1x_2 + x_3x_4$, переставляя переменные. Ещё есть 2 многочлена такого вида, не равные P: $Q = x_1x_3 + x_2x_4$ и $R = x_1x_4 + x_2x_3$. Все элементы ядра соответствуют перестановке $P \to P$, $Q \to Q$, $R \to R$ ($\varphi(\text{Ker } \varphi) = e$). Транспозиции $(1,2)$, $(3,4)$ соответствуют перестановке (Q,R) ($\varphi((1,2)) = \varphi((3,4)) = (Q,R)$). Транспозиции $(1,3)$, $(2,4)$ соответствуют перестановке (P,R) ($\varphi((1,3)) = \varphi((2,4)) = (P,R)$). Транспозиции $(1,4)$, $(2,3)$ соответствуют перестановке (P,Q) ($\varphi((1,4)) = \varphi((2,3)) = (P,Q)$). Циклы длины 3 $(1,3,2),(1,4,3),(1,2,4)$, $(2.3.4)$ соответствуют перестановке (P,Q,R) ($\varphi((1,3,2)) = \varphi((1,4,3)) = \varphi((1,2,4)) = \varphi((2,3,4)) = (P,Q,R)$). Циклы длины 3 $(1,2,3),(1,3,4),(1,4,2)$, $(2,4,3)$ соответствуют перестановке (P,R,Q) ($\varphi((1,3,2)) = \varphi((1,4,3)) = \varphi((1,2,4)) = \varphi((2,3,4)) = (P,R,Q)$). Циклы длины 4 $(1,2,4,3)$, $(1,3,4,2)$ соответствуют перестановке (P,Q) ($\varphi((1,2,4,3)) = \varphi((1,3,4,2)) = (P,Q)$). Циклы длины 4 $(1,2,3,4)$, $(1,4,3,2)$ соответствуют перестановке (P,R) ($\varphi((1,2,3,4)) = \varphi((1,4,3,2)) = (P,R)$). Циклы длины 4 $(1,3,2,4)$, $(1,4,2,3)$ соответствуют перестановке (Q,R) ($\varphi((1,3,2,4)) = \varphi((1,4,2,3)) = (Q,R)$). Таким образом, построено отображение из S_4 в S_3. Оно сюръективно, поскольку Im $\varphi = S_3$. Также $\forall a,b \in S_4$ $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, поскольку a переставит индексы в многочленах (этому соответствует перестановка многочленов $\varphi(a)$), b переставит индексы в многочленах (этому соответствует перестановка многочленов $\varphi(b)$), а перестановке индексов ab соответствует перестановка многочленов $\varphi(ab)$. Значит φ – действительно сюръективный гомоморфизм из S_4 в S_3.
Ядро гомоморфизма:

$$\boxed{\text{Ker } \varphi = \{e,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}} \tag{47}$$

Задача 4.2. Рассмотрим две подгруппы $\mathbb{C}^*$: $\mathbb{R}_+$ и $U(1)$ (*унитарная группа порядка 1* – подгруппа комплексных чисел, по модулю равных 1 (на комплексной плоскости это окружность радиуса 1): $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, z = \exp(i\theta)\}$). $\mathbb{R}_+$ и $U(1)$ коммутируют (комплексные числа коммутируют при умножении). $\mathbb{R}_+ \cap U(1) = \{1\}$ (луч из центра окружности пересекается с окружностью в 1 точке). $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+ \cdot U(1)$ (любое комплексное число представимо в экспотенциальной форме: $z = r\exp(i\theta)$). Тогда по предложению 7 лекции 4: $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R}_+ \times U(1)$. По предложению 10 лекции 4:

$$\boxed{\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \simeq U(1)} \tag{48}$$

Задача 4.3. а) Любой элемент D_n может быть представлен в виде r^b или sr^b.
Найдём классы сопряжённости r^b.

$$r^a r^b r^{-a} = r^b, \quad sr^a r^b (sr^a)^{-1} = sr^{a+b}r^{-a}s^{-1} = sr^b s^{-1} = r^{-b} \tag{49}$$

Таким образом, если n – чётное, то классы сопряжённости: $\{e\}, \{r, r^{-1}\}, \{r^2, r^{-2}\}, ..., \{r^{\frac{n}{2}}\}$ ($\frac{n}{2}$+1 штук); если n – нечётное, то классы сопряжённости: $\{e\}, \{r, r^{-1}\}, \{r^2, r^{-2}\}, ..., \{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{-\frac{n-1}{2}}\}$ ($\frac{n+1}{2}$ штук).
Найдём классы сопряжённости sr^b.

$$r^a sr^b r^{-a} = r^a sr^{b-a} = sr^{b-2a}, \quad sr^a sr^b (sr^a)^{-1} = sr^a sr^{b-a} s = sr^{2a-b} \tag{50}$$

Таким образом, если n – чётное, то классы сопряжённости: $\{sr, sr^3, ..., sr^{n-1}\}$ (b нечётное) и $\{s, sr^2, ..., sr^{n-2}\}$ (b чётное); если n – нечётное, то класс сопряжённости 1 (не зависит от чётности b): $\{s, sr, ..., sr^{n-1}\}$.

б) Рассмотрим 4 возможных случая:

1. $x = r^a$, $y = r^b$.
$$xyx^{-1}y^{-1} = r^a r^b r^{-a} r^{-b} = r^0 = e \tag{51}$$

2. $x = sr^a$, $y = r^b$.
$$xyx^{-1}y^{-1} = sr^a r^b (sr^a)^{-1} r^{-b} = sr^{a+b} r^{-a} s^{-1} r^{-b} = sr^b sr^{-b} = r^{-2b} \tag{52}$$

3. $x = r^a$, $y = sr^b$.
$$xyx^{-1}y^{-1} = r^a sr^b r^{-a} (sr^b)^{-1} = r^a sr^{-a} s = r^{2a} \tag{53}$$

4. $x = sr^a$, $y = sr^a$.
$$xyx^{-1}y^{-1} = sr^a sr^b (sr^a)^{-1} (sr^b)^{-1} = r^{b-a} r^{-a} sr^{-b} s = r^{2(b-a)} \tag{54}$$

Во всех возможных случаях коммутаторы элементов – повороты в чётной степени. При определённых a и b среди них есть r^2, который порождает коммутант.
Если n – чётное, то коммутант состоит из всех поворотов в чётной степени:

$$\boxed{[D_n, D_n] = \{e, r^2, r^4, ..., r^{n-2}\}, \quad n = 2k, k \in \mathbb{Z}} \tag{55}$$

Если n – нечётное, то $r^{n-1}r^2 = r^1$ и коммутант состоит из всех поворотов:

$$\boxed{[D_n, D_n] = \{e, r, r^2, ..., r^{n-1}\}, \quad n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}} \tag{56}$$

в)*

Предложение 10. *D_n изоморфно полупрямому произведению C_n и C_2.*

Доказательство. В группе D_n содержатся повороты (подгруппа C_n) и симметрия (подгруппа C_2). Они пересекаются только по e. Любой элемент D_n – r^b или sr^b. Группа C_n является нормальной подгруппой в D_n, поскольку является объединением классов сопряжённости из D_n (см. п. а). По предложению 9 лекции 4, предложение доказано. □

$$\boxed{D_n \simeq C_2 \ltimes C_n} \tag{57}$$

Задача 4.4. а)

Предложение 11. *Пусть G_0 – группа собственных движений, сохраняющих куб. Действие G_0 на множестве диагоналей куба задаёт изоморфизм G_0 и S_4.*

Доказательство. Для доказательства изоморфизма выпишем соответствие между перестановками различных циклических типов в S_4 и различными собственными движениями, сохраняющими куб:

1. e (единичный, 1 шт.) – тождественное движение (ничего не делает с кубом).

2. (a,b) (транспозиции, 6 шт.) – повороты на π вокруг прямой l_1, проходящей через центры противоположных рёбер.
3. $(a,b)(c,d)$ (произведение транспозиций, 3 шт.) – повороты на π вокруг прямой l_2, проходящей через центры противоположных граней.
4. (a,b,c) (цикл длины 3, 8 шт.) – поворот на $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ вокруг прямой l_3, проходящей через диагональ куба.
5. (a,b,c,d) (цикл длины 4, 6 шт.) – повороты на $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ вокруг прямой l_2, проходящей через центры противоположных граней.

Таким образом, построено однозначное соответствие между перестановками и движениями, сохраняющее групповые операции, а значит изоморфизм групп построен. □

б) По предложению 7 лекции 3 перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда имеют одинаковую циклическую структуру. А значит классами сопряжённости являются 5 видов движения, описанных выше.

в)

Предложение 12. *G изоморфно $G_0 \times C_2$.*

Доказательство. В G тождественное движение и центральная симметрия образуют C_2. Все движения из G можно представить в виде произведения собственных движений из G_0 и элементов C_2. Подгруппы G_0 и C_2 коммутируюет и пересекаются только по e. По предложению 7 лекции 4 предложение доказано. □

$$\boxed{G \simeq G_0 \times C_2} \tag{58}$$

В G_0 5 классов сопряжённости, в C_2 – 2 класса ($\{e\}$ и $\{r\}$). Пусть $x = (g_x, c_x) \in G_0 \times C_2$, $y = (g_y, c_y) \in G_0 \times C_2$. Найдём классы сопряжённости в $G_0 \times C_2$.

$$xyx^{-1} = (g_x, c_x)(g_y, c_y)(g_x, c_x)^{-1} = (g_x g_y g_x^{-1}, c_x c_y c_x^{-1}) \tag{59}$$

Как видно, если g_x и g_y сопряжены и c_x и c_y сопряжены, то и (g_x, c_x) и (g_y, c_y) сопряжены и наоборот. Т.е. классы сопряжения произведения групп – произведения классов сопряжённости этих групп. Поэтому число классов сопряжённости $2 \cdot 5 = 10$.

5 Представления групп.

Упражнение 5.1. а) Регулярное представление C_3:

$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad r^2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{60}$$

Найдём инвариантные подпространства в этом представлении (кроме тривиальных $\{0\}$ и $\mathbb{C}^3$). Для этого найдём собственные векторы матриц $\rho(r)$ и $\rho(r^2)$ (для единичной матрицы любой вектор собственный с собственным значением 1).

$$\det(\rho(r) - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 = 0 \tag{61}$$

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \lambda_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} \tag{62}$$

$$\lambda_0 = 1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{01} \\ h_{02} \\ h_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to h_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$\lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} : \begin{pmatrix} -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 & 1 \\ 1 & -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 1 & -e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$\lambda_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} : \begin{pmatrix} -e^{\frac{4\pi i}{3}} & 0 & 1 \\ 1 & -e^{\frac{4\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 1 & -e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix} \tag{65}$$

Заметим, что эти же вектора и значения являются собственными и для $\rho(r^2)$:

$$\rho(r^2)h_0 = \lambda_0 h_0, \quad \rho(r^2)h_1 = \lambda_2 h_1, \quad \rho(r^2)h_2 = \lambda_1 h_2 \tag{66}$$

Таким образом,

$$\boxed{V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix} \right\rangle} \tag{67}$$

являются одномерными инвариантными представлениями.

$$\mathbb{C}^3 = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \tag{68}$$

Разложим представление C_n в сумму R_j:

1. В V_0: $R_0(e) = 1$, $R_0(r) = 1$, $R_0(r^2) = 1$.
2. В V_1: $R_1(e) = 1$, $R_1(r) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $R_1(r^2) = e^{\frac{4\pi i}{3}}$.
3. В V_2: $R_2(e) = 1$, $R_2(r) = e^{\frac{4\pi i}{3}}$, $R_2(r^2) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Заметим, что для R_j можно записать общую формулу:

$$R_j(r^m) = e^{\frac{2\pi i}{n} mj} \tag{69}$$

$$\boxed{R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2} \tag{70}$$

б) В базисе h_0, h_1, h_2:

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix}, \quad \rho(r^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \tag{71}$$

Матрица перехода к этому базису:

$$\boxed{\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix}} \tag{72}$$

Задача 5.2. а)

Предложение 13. *Характеры сопряжённых элементов равны.*

Доказательство.

$$\mathrm{tr}(\rho(gxg^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(g)\rho(x)\rho(g^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(g)\rho(x)\rho(g)^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho(g)\rho(g)^{-1}\rho(x)) = \mathrm{tr}(\rho(x))$$

□

б)

$$U_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \middle| \sum_{i=1}^{3} x_i = 0 \right\} \tag{73}$$

Воспользуемся базисом:

$$e' = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'' = e_1 - e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

Любой вектор может быть выражен через базисные вектора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -x_2 e' - x_3 e'' \tag{75}$$

Выпишем, во что будут переходить e' и e'' при домножении слева на $\rho(g)$ (из перестановочного представления): $\rho(e)e' = (1, -1, 0)^T = e'$, $\rho(e)e'' = (1, 0, -1)^T = e''$, $\rho((1,2))e' = (-1, 1, 0)^T = -e'$, $\rho((1,2))e'' = (0, 1, -1)^T = e'' - e'$, $\rho((1,3))e' = (0, -1, 1)^T = e' - e''$, $\rho((1,3))e'' = (-1, 0, 1)^T = -e''$, $\rho((2,3))e' = (1, 0, -1)^T = e''$, $\rho((2,3))e'' = (1, -1, 0)^T = e'$, $\rho((1,2,3))e' = (0, 1, -1)^T = e'' - e'$, $\rho((1,2,3))e'' = (-1, 1, 0)^T = -e'$, $\rho((1,3,2))e' = (-1, 0, 1)^T = -e''$, $\rho((1,3,2))e'' = (0, -1, 1)^T = e' - e''$.
Представление U_2:

$$\boxed{e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1,2) \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1,3) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \tag{76}$$

$$\boxed{(2,3) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1,2,3) \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1,3,2) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \tag{77}$$

в) *Тривиальное представление:*

$$\rho(g) = 1 \to \boxed{\chi_V(g) = \mathrm{Tr}\ 1 = 1} \tag{78}$$

Перестановочное представление S_3 задаётся матрицами ($\rho(g)e_x = e_{gx}$):

$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,2) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,3) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{79}$$

$$(2,3) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1,2,3) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1,3,2) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{80}$$

$$\boxed{\chi_V(e) = 3, \quad \chi_V((a,b)) = 1, \quad \chi_V((a,b,c)) = 0} \tag{81}$$

Регулярное представление ($ge_x = e_{gx}$).

$|S_3| = 6$. Рассмотрим пространство $V = \mathbb{C}^6$. Элементы S_3 представим в виде: $e = (1,0,0,0,0,0)$, $(1,2) = (0,1,0,0,0,0)$, $(2,3) = (0,0,1,0,0,0)$, $(1,3) = (0,0,0,1,0,0)$, $(1,2,3) = (0,0,0,0,1,0)$, $(1,3,2) = (0,0,0,0,0,1)$.

Все матрицы регулярного представления состоят из 0 и 1, в каждой строке и столбце по одной 1. Если характер элемента не равен 0, то на диагонали по крайней мере есть одна 1. Пусть она будет стоять на m месте. Это значит, что $ge_m = e_m$, что может быть только при $g = e$. Следовательно, при $g \neq e$ характер $\rho(g)$ равен 0.

$$\boxed{\chi_V(e) = 6, \quad \chi_V(g) = 0,\ g \neq e} \tag{82}$$

Представление U_2:

$$\boxed{\chi_V(e) = 2, \quad \chi_V((a,b)) = 0, \quad \chi_V((a,b,c)) = -1} \tag{83}$$

Задача 5.3. а) R_α – вращение трёхмерного пространства относительно некоторой оси на угол α. В базисе, в котором один из базисных векторов ($\vec{k}$) проходит через эту ось, R_α записывается в виде

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

$$\boxed{\mathrm{tr} R_\alpha = 2\cos\alpha + 1} \tag{85}$$

Такой след будет иметь матрица R_α в любом базисе, поскольку следы сопряжённых матриц равны.

S_α – зеркальный поворот – композиция вращения трёхмерного пространства относительно некоторой оси на угол α и отражения относительно плоскости перпендикулярной этой оси. В базисе, в котором один из базисных векторов ($\vec{k}$) проходит через эту ось, S_α записывается в виде

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{86}$$

$$\boxed{\mathrm{tr} S_\alpha = 2\cos\alpha - 1} \tag{87}$$

Такой след будет иметь матрица S_α в любом базисе, поскольку следы сопряжённых матриц равны.

б) Выпишем следы матриц ρ_3 для всех симметрий, сохраняющих правильный тетраэдр:

1. e (единичный, 1 шт.) – тождественное движение (ничего не делает с тетраэдром).

$$\mathrm{tr} R_0 = 2\cos 0 + 1 = 3 \tag{88}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}(e) = 3} \tag{89}$$

2. (a, b) (транспозиции, 6 шт.) – отражение относительно плоскости π, проходящей через ребро (вершины которого остаются на месте) и центр противопложного ребра (вершины которого меняются местами).

$$\mathrm{tr} S_0 = 2\cos 0 - 1 = 1 \tag{90}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b)) = 1} \tag{91}$$

3. $(a, b)(c, d)$ (произведение транспозиций, 3 шт.) – повороты на π вокруг прямой l_1, проходящей через центры противоположных рёбер (вершины которых и будут меняться местами).

$$\mathrm{tr} R_\pi = 2\cos\pi + 1 = -1 \tag{92}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b)(c, d)) = -1} \tag{93}$$

4. (a, b, c) (цикл длины 3, 8 шт.) – поворот на $2\pi/3$ или $4\pi/3$ вокруг прямой l_2, проходящей через вершину и центр противоположной грани (вершины этой грани и будут циклически меняться).

$$\mathrm{tr} R_{\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{tr} R_{\frac{4\pi}{3}} = 2\cos\frac{2\pi}{3} + 1 = 0 \tag{94}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b, c)) = 0} \tag{95}$$

5. (a, b, c, d) (цикл длины 4, 6 шт.) – зеркальный повороте на $\pi/2$ с прямой l_3, проходящей через середины двух противоположных ребер и плоскостью симметрии, проходящей через середины остальных ребер.

$$\mathrm{tr} S_{\frac{\pi}{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2} - 1 = -1 \tag{96}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b, c, d)) = -1} \tag{97}$$

в) Выпишем следы матриц ρ_4 для всех вращений, сохраняющих куб:

1. e (единичный, 1 шт.) – тождественное движение (ничего не делает с кубом).

$$\mathrm{tr} R_0 = 2\cos 0 + 1 = 3 \tag{98}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}(e) = 3} \tag{99}$$

2. (a, b) (транспозиции, 6 шт.) – повороты на π вокруг прямой l_1, проходящей через центры противоположных рёбер.

$$\mathrm{tr} R_\pi = 2\cos\pi + 1 = -1 \tag{100}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b)) = -1} \tag{101}$$

3. $(a,b)(c,d)$ (произведение транспозиций, 3 шт.) – повороты на π вокруг прямой l_2, проходящей через центры противоположных граней.

$$\mathrm{tr}R_{\pi} = 2\cos\pi + 1 = -1 \tag{102}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a,b)(c,d)) = -1} \tag{103}$$

4. (a,b,c) (цикл длины 3, 8 шт.) – поворот на $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ вокруг прямой l_3, проходящей через диагональ куба.

$$\mathrm{tr}R_{\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{tr}R_{\frac{4\pi}{3}} = 2\cos\frac{2\pi}{3} + 1 = 0 \tag{104}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a,b,c)) = 0} \tag{105}$$

5. (a,b,c,d) (цикл длины 4, 6 шт.) – повороты на $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ вокруг прямой l_2, проходящей через центры противоположных граней.

$$\mathrm{tr}R_{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{tr}R_{\frac{3\pi}{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2} + 1 = 1 \tag{106}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a,b,c,d)) = 1} \tag{107}$$

Задача 5.4. а)

Предложение 14. *Для любой группы G коммутант является нормальной подгруппой.*

Доказательство. Коммутант группы порождён коммутаторами её элементов $[x,y]$. А значит любой элемент коммутанта можно представить в виде $[x_1,y_1]...[x_l,y_l]$.

$$\forall g,x,y \in G, \quad g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) \tag{108}$$

$$\forall g,x,y \in G, \quad g[x,y]g^{-1} = gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$$

Используем выведенные выше равенства:

$$g([x_1,y_1]...[x_l,y_l])g^{-1} = (g[x_1,y_1]g^{-1})...(g[x_l,y_l]g^{-1}) = [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}]...[gx_lg^{-1}, gy_lg^{-1}] \in [G,G]$$

Значит, $[G,G]$ является нормальной подгруппой. □

б)*

Предложение 15. *Для любой группы G фактор по коммутанту является коммутативной группой.*

Доказательство. Пусть $x[G,G]$, $y[G,G] \in G/[G,G]$.

$$(x[G,G])(y[G,G]) = xy[G,G] = xy[y^{-1},x^{-1}][G,G] = yx[G,G] = (y[G,G])(x[G,G]) \tag{109}$$

Значит, $G/[G,G]$ является коммуативной группой. □

Задача 5.5. а)

Предложение 16. *Единственные одномерные представления симметрической группы - это тривиальное представление и знаковое представление.*

Доказательство. Пусть ρ – одномерное представление S_n. Любая транспозиция имеет порядок 2, значит должна переходить либо в 1, либо в -1. Рассмотрим 2 случая:

1. $\exists$ транспозиция $\alpha : \rho(\alpha) = 1$. Все транспозиции лежат в одном классе сопряжённости, значит $\forall \beta \in S_n$ и $\gamma \in S_n$ можно написать $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$.

   $$\rho(\alpha) = \rho(\gamma\beta\gamma^{-1}) = \rho(\gamma)\rho(\beta)\rho(\gamma^{-1}) = \rho(\gamma)\rho(\gamma^{-1})\rho(\beta) = \rho(\gamma\gamma^{-1}\beta) = \rho(\beta) \tag{110}$$

   Значит любая транспозиция переходит в 1. Любой элемент S_n может быть представлен в виде произведения транспозиций. Значит любой элемент S_n переходит в 1 и ρ – тривиальное представление.

2. $\exists$ транспозиция $\alpha : \rho(\alpha) = -1$. Значит любая транспозиция переходит в -1 (по аналогии с предыдущим пунктом). Любой элемент S_n может быть представлен в виде произведения m транспозиций (чётность элемента равна чётности их количества m по предложению 3). Значит любой элемент S_n переходит в свою чётность $(-1)^m$ и ρ – знаковое представление.

□

б)*

Предложение 17. *Коммутант группы S_n – это A_n.*

Доказательство. Любой тройной цикл является коммутатором:

$$(a, b, c) = (b, c)(a, b)(b, c)(a, b) = [(b, c), (a, b)] \tag{111}$$

Значит, любой тройной цикл лежит в коммутанте. Коммутатор любых двух перестановок чётен, поэтому $[S_n, S_n] \subseteq A_n$. Рассмотрим случаи произведения двух транспозиций:

1. $$(a, b)(a, b) = e = (a, b, c)(c, b, a) \tag{112}$$

2. $$(a, b)(a, c) = (a, c, b), \quad b \neq c \tag{113}$$

3. $$(a, b)(c, d) = (a, d, b)(a, d, c) \tag{114}$$

Таким образом, произведение транспозиций – цикл длины 3 или произведение циклов длины 3. Т.к. любой элемент A_n раскладывается в чётное число транспозиций, то, разбив транспозиции на пары и заменив на циклы длины 3, любой элемент A_n выражается через циклы длины 3. Значит A_n порождена циклами длины 3 и $A_n \subseteq [S_n, S_n]$. Таким образом, $[S_n, S_n] = A_n$. □

6 Унитарность. Характеры представлений.

Упражнение 6.1.

а)

Предложение 18. *Вектор* $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ *не является разложимым.*

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что $\exists\ v = \sum\limits_i a^i e_i,\ u = \sum\limits_i b^j f_j$:

$$v \otimes u = e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2 \tag{115}$$

Подставим v и u:

$$a^1b^1e_1 \otimes f_1 + a^2b^1e_2 \otimes f_1 + a^2b^1e_2 \otimes f_1 + a^2b^2e_2 \otimes f_2 = e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2 \tag{116}$$

$$a^1b^1 = a^2b^2 = 1, \quad a^1b^2 = a^2b^1 = 0 \tag{117}$$

Из правых уравнений следует, что в каждой паре из a^1, b^2 и a^2, b^1 есть хотя бы 1 нуль. Противоречие с левыми уравнениями. $\square$

б) Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

$$\boxed{A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{12} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}} \tag{118}$$

$$\mathrm{tr} A \otimes B = a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22}, \quad \mathrm{tr} A = a_{11} + a_{22}, \quad \mathrm{tr} B = b_{11} + b_{22} \tag{119}$$

$$\boxed{\mathrm{tr} A \otimes B = \mathrm{tr} A \cdot \mathrm{tr} B} \tag{120}$$

Задача 6.2. а) Классы сопряжённости групп D_n описаны в задаче 4.3, п. а. В D_7 5 классов сопряжённости: $\{e\}$, $\{r^{-1}, r^1\}$, $\{r^2, r^{-2}\}$, $\{r^3, r^{-3}\}$, $\{sr^b\}$. Значит и число неприводимых представлений равно 5. Найдём их размерности: $|D_7| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 14$. Единственный возможный вариант: $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = d_4 = d_5 = 2$.

Найдём все одномерные представления (их всего 2). Коммутанты D_n описаны в задаче 4.3, п. б. $[D_7, D_7] = \{e, r, r^2, ..., r^6\}$. Факторгруппа $D_7/[D_7, D_7] \simeq \mathbb{Z}_2$, т.е. $|D_7/[D_7, D_7]| = |\mathbb{Z}_2| = 2$ (ещё раз получаем, что всего 2 одномерных неприводимых представления). Любое одномерное неприводимое представление – представление фактора по коммутанту. Первое одномерное неприводимое представление – *тривиальное*: все элементы D_7 переходят в 1.

$$\boxed{\rho_1(r) = \rho_1(s) = 1} \tag{121}$$

Для отражений верно, что $(sr^b)^2 = sr^bsr^b = r^{-b}r^b = e$. Поэтому $\rho(sr^b)^2 = \rho((sr^b)^2) = \rho(e) = 1$ и $\rho(sr^b) = \pm 1$. $\rho(sr^b) = 1$ соответствует тривиальному представлению, а $\rho(sr^b) = -1$ – второму одномерному представлению. Т.е. во втором одномерном представлении все повороты перейдут в 1, а отражения – в -1.

$$\boxed{\rho_2(r) = 1, \quad \rho_2(s) = -1} \tag{122}$$

б) Найдём 3 оставшихся двумерных неприводимых представления. Для них должны выполняться тождества: $\rho(r^b)^7 = \rho((r^b)^7) = \rho(e) = 1$ (матрицы поворота), $\rho(sr^b)^2 = \rho((sr^b)^2) = \rho(e) = 1$ (матрица отражения), $\rho(r)\rho(s)\rho(r)\rho(s) = \rho(rsrs) = \rho(e) = 1$.

$$\boxed{\rho_3(r) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{7} & -\sin\frac{2\pi}{7} \\ \sin\frac{2\pi}{7} & \cos\frac{2\pi}{7} \end{pmatrix}, \quad \rho_3(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \tag{123}$$

$$\boxed{\rho_4(r) = \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{7} & -\sin\frac{4\pi}{7} \\ \sin\frac{4\pi}{7} & \cos\frac{4\pi}{7} \end{pmatrix}, \quad \rho_4(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \tag{124}$$

$$\boxed{\rho_5(r) = \begin{pmatrix} \cos\frac{6\pi}{7} & -\sin\frac{6\pi}{7} \\ \sin\frac{6\pi}{7} & \cos\frac{6\pi}{7} \end{pmatrix}, \quad \rho_5(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \tag{125}$$

	e 1	r^1, r^{-1} 2	r^2, r^{-2} 2	r^3, r^{-3} 2	sr^b 7
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	$2\cos\frac{2\pi}{7}$	$2\cos\frac{4\pi}{7}$	$2\cos\frac{6\pi}{7}$	0
$\chi^{(4)}$	2	$2\cos\frac{4\pi}{7}$	$2\cos\frac{6\pi}{7}$	$2\cos\frac{2\pi}{7}$	0
$\chi^{(5)}$	2	$2\cos\frac{6\pi}{7}$	$2\cos\frac{2\pi}{7}$	$2\cos\frac{4\pi}{7}$	0

Таблица 1: Таблица характеров группы D_7

Ещё раз проверим, что все найденные представления являются неприводимыми. Для этого воспользуемся критерием $\langle \chi^{(i)}, \chi^{(i)} \rangle = 1$:

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{14}(1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 7\cdot 1) = 1 \tag{126}$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{14}(1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 7\cdot 1) = 1 \tag{127}$$

$$\langle \chi^{(3)}, \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{14}(1\cdot 4 + 2\cdot 4\cos^2\frac{2\pi}{7} + 2\cdot 4\cos^2\frac{4\pi}{7} + 1\cdot 4\cos^2\frac{6\pi}{7} + 7\cdot 0) = 1 \tag{128}$$

$$\langle \chi^{(4)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{14}(1\cdot 4 + 2\cdot 4\cos^2\frac{4\pi}{7} + 2\cdot 4\cos^2\frac{6\pi}{7} + 1\cdot 4\cos^2\frac{2\pi}{7} + 7\cdot 0) = 1 \tag{129}$$

$$\langle \chi^{(5)}, \chi^{(5)} \rangle = \frac{1}{14}(1\cdot 4 + 2\cdot 4\cos^2\frac{6\pi}{7} + 2\cdot 4\cos^2\frac{2\pi}{7} + 1\cdot 4\cos^2\frac{4\pi}{7} + 7\cdot 0) = 1 \tag{130}$$

В приведённых выше равенствах использовано, что:

$$\begin{gathered}
\cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{4\pi}{7} + \cos^2\frac{6\pi}{7} = \frac{(e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{2\pi}{7}})^2}{4} + \frac{(e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}})^2}{4} + \frac{(e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{-i\frac{6\pi}{7}})^2}{4} = \\
= \frac{1}{4}(e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}} + 2 + e^{i\frac{8\pi}{7}} + e^{-i\frac{8\pi}{7}} + 2 + e^{i\frac{12\pi}{7}} + e^{-i\frac{12\pi}{7}} + 2) = \frac{1}{4}(5 + e^{-i\frac{12\pi}{7}}(1 + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}} + \ldots + e^{i\frac{24\pi}{7}})) = \\
= \frac{5}{4} + \frac{e^{-i\frac{12\pi}{7}}}{4}\frac{e^{4\pi i} - 1}{e^{i\frac{4\pi}{7}} - 1} = \frac{5}{4}
\end{gathered} \tag{131}$$

где в предпоследнем равенстве использована формула для суммы геометрической прогрессии.

Задача 6.3. Классы сопряжённости S_4 описаны в задаче 3.2, п. а и в задаче 4.4, п. а и б. Всего классов сопряжённости 5, значит и неприводимых представлений 5. Найдём их размерности: $|S_4| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 24$. У S_n всего 2 одномерных неприводимых представления: тривиальное и знаковое (см. задачу 5.5, п.а), значит $d_1 = d_2 = 1$, $d_3, d_4, d_5 > 1$. Найдём размерности остальных. Единственный возможный вариант: $d_3 = d_4 = 3$, $d_5 = 2$.
Трёхмерные представления S_4 рассмотрены в задаче 5.3, п. б и в: ρ_3 получено из изоморфизма S_4 и группы симметрий тетраэдра, ρ_4 – из изоморфизма S_4 и группы вращений куба.
Характеры двумерного произведения ρ_5 можно найти из следствия 1 предложения 9 лекции 6:

$$\chi_{\text{reg}} = d_1\chi^{(1)} + d_2\chi^{(2)} + d_3\chi^{(3)} + d_4\chi^{(4)} + d_5\chi^{(5)} \to \chi^{(5)} = \frac{1}{2}(\chi_{\text{reg}} - \chi^{(1)} - \chi^{(2)} - 3\chi^{(3)} - 3\chi^{(4)}) \quad (132)$$

Характер регулярного произведения можно найти из предложения 8 лекции 6:

$$\chi_{\text{reg}}(e) = |S_4| = 24, \quad \chi_{\text{reg}}(g) = 0,\ g \neq e \quad (133)$$

$$\chi^{(5)}(e) = \frac{1}{2}(24 - 1 - 1 - 3\cdot 3 - 3\cdot 3) = 2 = d_5 \quad (134)$$

$$\chi^{(5)}((a,b)) = \frac{1}{2}(0 - 1 + 1 - 3\cdot 1 - 3\cdot(-1)) = 0 \quad (135)$$

$$\chi^{(5)}((a,b)(c,d)) = \frac{1}{2}(0 - 1 - 1 - 3\cdot(-1) - 3\cdot(-1)) = 2 \quad (136)$$

$$\chi^{(5)}((a,b,c)) = \frac{1}{2}(0 - 1 - 1 - 3\cdot 0 - 3\cdot 0) = -1 \quad (137)$$

$$\chi^{(5)}((a,b,c,d)) = \frac{1}{2}(0 - 1 + 1 - 3\cdot(-1) - 3\cdot 1) = 0 \quad (138)$$

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	3	1	-1	0	-1
$\chi^{(4)}$	3	-1	-1	0	1
$\chi^{(5)}$	2	0	2	-1	0

Таблица 2: Таблица характеров группы S_4

Проверим соотношения ортогональности между характерами:

$$\langle\chi^{(1)}, \chi^{(1)}\rangle = \frac{1}{24}(1 + 6\cdot 1 + 3\cdot 1 + 8\cdot 1 + 6\cdot 1) = 1 \quad (139)$$

$$\langle\chi^{(1)}, \chi^{(2)}\rangle = \frac{1}{24}(1 - 6\cdot 1 + 3\cdot 1 + 8\cdot 1 - 6\cdot 1) = 0 \quad (140)$$

$$\langle\chi^{(1)}, \chi^{(3)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 3 + 6\cdot 1 - 3\cdot 1 + 8\cdot 0 - 6\cdot 1) = 0 \quad (141)$$

$$\langle\chi^{(1)},\chi^{(4)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 3 - 6\cdot 1 - 3\cdot 1 + 8\cdot 0 + 6\cdot 1) = 0 \tag{142}$$

$$\langle\chi^{(1)},\chi^{(5)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 2 + 6\cdot 0 + 3\cdot 2 - 8\cdot 1 + 6\cdot 0) = 0 \tag{143}$$

$$\langle\chi^{(2)},\chi^{(2)}\rangle = \frac{1}{24}(1 + 6\cdot 1 + 3\cdot 1 + 8\cdot 1 + 6\cdot 1) = 1 \tag{144}$$

$$\langle\chi^{(2)},\chi^{(3)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 3 - 6\cdot 1 - 3\cdot 1 + 8\cdot 0 + 6\cdot 1) = 0 \tag{145}$$

$$\langle\chi^{(2)},\chi^{(4)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 3 + 6\cdot 1 - 3\cdot 1 + 8\cdot 0 - 6\cdot 1) = 0 \tag{146}$$

$$\langle\chi^{(2)},\chi^{(5)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 2 + 6\cdot 0 + 3\cdot 2 - 8\cdot 1 + 6\cdot 0) = 0 \tag{147}$$

$$\langle\chi^{(3)},\chi^{(3)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 9 + 6\cdot 1 + 3\cdot 1 + 8\cdot 0 + 6\cdot 1) = 1 \tag{148}$$

$$\langle\chi^{(3)},\chi^{(4)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 9 - 6\cdot 1 + 3\cdot 1 + 8\cdot 0 - 6\cdot 1) = 0 \tag{149}$$

$$\langle\chi^{(3)},\chi^{(5)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 6 + 6\cdot 0 - 3\cdot 2 - 8\cdot 0 + 6\cdot 0) = 0 \tag{150}$$

$$\langle\chi^{(4)},\chi^{(4)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 9 + 6\cdot 1 + 3\cdot 1 + 8\cdot 0 + 6\cdot 1) = 1 \tag{151}$$

$$\langle\chi^{(4)},\chi^{(5)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 6 - 6\cdot 0 - 3\cdot 2 - 8\cdot 0 + 6\cdot 0) = 0 \tag{152}$$

$$\langle\chi^{(5)},\chi^{(5)}\rangle = \frac{1}{24}(1\cdot 4 + 6\cdot 0 + 3\cdot 4 + 8\cdot 1 + 6\cdot 0) = 1 \tag{153}$$

Рассмотрим $\rho_6 = \rho_3 \otimes \rho_4$. По предложению 5 лекции 6 получим:

$$\chi^{(6)} = \chi^{(4)} \cdot \chi^{(5)} \tag{154}$$

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
$\chi^{(6)}$	9	-1	1	0	-1

Воспользуемся алгоритом разложения на неприводимые:

$$\chi^{(6)} = \sum_{i=1}^{5} a_i\chi^{(i)}, \quad a_i = \langle\chi^{(i)},\chi^{(6)}\rangle \tag{155}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1\cdot 9 - 6\cdot 1 + 3\cdot 1 + 8\cdot 0 - 6\cdot 1) = 0 \tag{156}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1\cdot 9 + 6\cdot 1 + 3\cdot 1 + 8\cdot 0 + 6\cdot 1) = 1 \tag{157}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot 27 - 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = 1 \tag{158}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot 27 + 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 6 \cdot 1) = 1 \tag{159}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot 18 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 1 \tag{160}$$

Таким образом, получаем разложение:

$$\boxed{V_6 = V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5} \tag{161}$$

Задача 6.4.

Предложение 19 (Второе соотношение ортогональности для характеров). *Для любых двух классов сопряжённости C_i, C_j, где $i \leq i, j \leq k$ верно:*

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \chi^{(\alpha)}(h_i)\overline{\chi^{(\alpha)}(h_j)} = \delta_{i,j}\frac{|G|}{|C_i|} \tag{162}$$

Доказательство. Разложим γ_i по базису $\chi^{(\alpha)}$:

$$\gamma_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \gamma_i^{(\alpha)}\chi^{(\alpha)}, \tag{163}$$

где γ_i^{α} можно найти по формуле

$$\gamma_i^{(\alpha)} = \langle \chi^{(\alpha)}, \gamma_i \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{k} \overline{\chi^{(\alpha)}(h_j)}\gamma_i(h_j) \tag{164}$$

Воспользуемся определением характеристической функции γ_i:

$$\gamma_i(h_j) = \delta_{i,j} \tag{165}$$

Тогда в сумме останутся $|C_i|$ слагаемых $\chi^{(\alpha)}(h_i)$:

$$\gamma_i^{(\alpha)} = \frac{|C_i|}{|G|}\overline{\chi^{(\alpha)}(h_i)} \tag{166}$$

Подставим в (163):

$$\gamma_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{|C_i|}{|G|}\overline{\chi^{(\alpha)}(h_i)}\chi^{(\alpha)} = \frac{|C_i|}{|G|}\sum_{\alpha=1}^{k} \overline{\chi^{(\alpha)}(h_i)}\chi^{(\alpha)} \tag{167}$$

$$\gamma_i(h_j) = \frac{|C_i|}{|G|}\sum_{\alpha=1}^{k} \overline{\chi^{(\alpha)}(h_i)}\chi^{(\alpha)}(h_j) = \delta_{i,j} \tag{168}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \overline{\chi^{(\alpha)}(h_i)}\chi^{(\alpha)}(h_j) = \delta_{i,j}\frac{|G|}{|C_j|} \tag{169}$$

Поменяем индексы i и j местами:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \chi^{(\alpha)}(h_i)\overline{\chi^{(\alpha)}(h_j)} = \delta_{i,j}\frac{|G|}{|C_i|} \tag{170}$$

$\square$

7 Разные конструкции. Группа $SO(2)$.

Упражнение 7.1 (*).

Предложение 20. *Пусть A – матрица, состоящая из одного жорданова блока размера $n \times n$, $n > 1$ с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$. Матрица $\exp(\alpha A)$ не будет диагональной при любом $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. При $\lambda \neq 0$ матрица A^k не будет диагональной при любом $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Жорданова клетка A:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{171}$$

$$A = \lambda E + B \tag{172}$$

где B – нильпонентная матрица: $B^n = 0$. Домножение B^i на B сдвигает «диагональ единиц» на одну позицию вверх. Найдём экспоненту матрицы B:

$$e^B = E + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{B^i}{i!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{173}$$

$$e^{\alpha B} = E + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\alpha B)^i}{i!} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} & \dots & \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & \frac{\alpha^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{\alpha^{n-4}}{(n-4)!} & \frac{\alpha^{n-3}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{174}$$

$$e^{\alpha A} = e^{\alpha\lambda E} e^{\alpha B} = e^{\alpha\lambda} e^{\alpha B} = e^{\alpha\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} & \dots & \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & \frac{\alpha^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{\alpha^{n-4}}{(n-4)!} & \frac{\alpha^{n-3}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{175}$$

Данная матрица не является диагональной при $\alpha \neq 0$.

$$A^k = (\lambda E + B)^k = \sum_{i=1}^{\min(k,n-1)} C_k^i \lambda^{n-i} B^i = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-2} \lambda^{k-n+2} & C_k^{n-1} \lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-3} \lambda^{k-n+3} & C_k^{n-2} \lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \dots & C_k^{n-4} \lambda^{k-n+4} & C_k^{n-3} \lambda^{k-n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

где подразумевается, что $C_k^i = 0$ при $i > k$. При $k \geq 1$ и $\lambda \neq 0$ матрица A^k не диагональна. $\square$

Задача 7.2. а) Классы сопряжённости групп D_n описаны в задаче 4.3, п. а. В D_6 6 классов сопряжённости: $\{e\}$, $\{r^{-1}, r^1\}$, $\{r^2, r^{-2}\}$, $\{r^3\}$, $\{sr^{2b}\}$, $\{sr^{2b+1}\}$. Значит и число неприводимых представлений равно 6. Найдём их размерности: $|D_6| = d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2+d_6^2 = 12$. Единственный возможный вариант: $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$, $d_5 = d_6 = 2$.

Найдём все одномерные представления (их всего 4). Коммутанты D_n описаны в задаче 4.3, п. б. $[D_6, D_6] = \{e, r^2, r^4\}$. Факторгруппа $D_6/[D_6, D_6] \simeq C_2 \times C_2$, т.е. $|D_6/[D_6, D_6]| = |C_2 \times C_2| = 4$ (ещё раз получаем, что всего 4 одномерных неприводимых представления). Любое одномерное неприводимое представление – представление фактора по коммутанту. Первое одномерное неприводимое представление – *тривиальное*: все элементы D_6 переходят в 1.

$$\boxed{\rho_1(r) = \rho_1(s) = 1} \tag{176}$$

Для отражений верно, что $(sr^b)^2 = sr^b sr^b = r^{-b}r^b = e$. Поэтому $\rho(sr^b)^2 = \rho((sr^b)^2) = \rho(e) = 1$ и $\rho(sr^b) = \pm 1$. $\rho(sr^b) = 1$ соответствует тривиальному представлению, а $\rho(sr^b) = -1$ – второму одномерному представлению. Т.е. во втором одномерном представлении все повороты перейдут в 1, а отражения – в -1.

$$\boxed{\rho_2(r) = 1, \quad \rho_2(s) = -1} \tag{177}$$

Произведение двух нечётных поворотов – чётный поворот. Поэтому все чётные повороты можно перевести в 1, а нечётные – в -1. Отражения sr^{2b} можно перевести в 1, а sr^{2b+1} – в -1 (третье представление) или наоборот (четвёртое представление). При этом будут выполняться необходимые тождества: $\rho(r^a r^b) = \rho(r^{a+b})$, $\rho(r^a sr^b) = \rho(sr^{b-a}) = \rho(sr^{a+b}) = \rho(sr^a r^b)$, $\rho(sr^a sr^b) = \rho(r^{b-a})$.

$$\boxed{\rho_3(r^2) = 1, \quad \rho_3(r) = -1, \quad \rho_3(sr^2) = 1, \quad \rho_3(sr) = -1} \tag{178}$$

$$\boxed{\rho_4(r^2) = 1, \quad \rho_4(r) = -1, \quad \rho_4(sr^2) = -1, \quad \rho_4(sr) = 1} \tag{179}$$

Найдём 2 оставшихся двумерных неприводимых представления. Для них должны выполняться тождества: $\rho(r^b)^6 = \rho((r^b)^6) = \rho(e) = 1$ (матрицы поворота), $\rho(sr^b)^2 = \rho((sr^b)^2) = \rho(e) = 1$ (матрица отражения), $\rho(r)\rho(s)\rho(r)\rho(s) = \rho(rsrs) = \rho(e) = 1$.

$$\boxed{\rho_5(r) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{6} & -\sin\frac{2\pi}{6} \\ \sin\frac{2\pi}{6} & \cos\frac{2\pi}{6} \end{pmatrix}, \quad \rho_5(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \tag{180}$$

$$\boxed{\rho_6(r) = \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{6} & -\sin\frac{4\pi}{6} \\ \sin\frac{4\pi}{6} & \cos\frac{4\pi}{6} \end{pmatrix}, \quad \rho_6(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \tag{181}$$

Ещё раз проверим, что все найденные представления являются неприводимыми. Для этого воспользуемся критерием $\langle \chi^{(i)}, \chi^{(i)} \rangle = 1$:

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 1 \tag{182}$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 1 \tag{183}$$

	e 1	r^1, r^{-1} 2	r^2, r^{-2} 2	r^3 1	sr^{2b} 3	sr^{2b+1} 3
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	-1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	1	-1	-2	0	0
$\chi^{(6)}$	2	-1	-1	2	0	0

Таблица 3: Таблица характеров группы D_6

$$\langle\chi^{(3)}, \chi^{(3)}\rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 1 \tag{184}$$

$$\langle\chi^{(4)}, \chi^{(4)}\rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 1 \tag{185}$$

$$\langle\chi^{(5)}, \chi^{(5)}\rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = 1 \tag{186}$$

$$\langle\chi^{(6)}, \chi^{(6)}\rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = 1 \tag{187}$$

б) Группа D_{nh} рассмотрена в задаче 3.3, п. а. $D_{nh} = D_n \times C_2$. По теореме 1 лекции 7 все неприводимые представления D_{6h} можно получить как $\rho^{D_6} \boxtimes \rho^{C_2}$, где ρ^{D_6} и ρ^{C_2} – неприводимые представления D_6 и C_2 соответственно. В группе C_2 всего 2 элемента: e и r, каждый из которых является классом сопряжённости. Значит всего 2 неприводимых представления. Найдём их размерности: $|C_2| = d_1^2 + d_2^2 = 2$. Единственный возможный вариант: $d_1 = d_2 = 1$.

$$\rho_1(e) = 1, \quad \rho_1(r) = 1 \tag{188}$$

$$\rho_2(e) = 1, \quad \rho_2(r) = -1 \tag{189}$$

	e 1	r, 1
$\chi^{(1)}$	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1

Таблица 4: Таблица характеров группы C_2

$$\dim(V \otimes U) = \dim V \cdot \dim U \tag{190}$$

Значит для получения двумерных неприводимых представлений нужно перемножить два двумерных представления D_6 с двумя одномерными представлениями C_2. Получится всего 4 двумерных подпространства D_{6h}.
Их характеры можно найти по формуле

$$\chi_{\rho^{D_6} \boxtimes \rho^{C_2}}(g^{D_6}, g^{C_2}) = \chi_{\rho^{D_6}}(g^{D_6}) \cdot \chi_{\rho^{C_2}}(g^{C_2}), \tag{191}$$

где $g^{D_6} \in D_6$ и $g^{C_2} \in C_2$.

	$(e,e)\ ^{1}$	$(r^1,e),\,(r^{-1},e)\ ^{2}$	$(r^2,e),\,(r^{-2},e)\ ^{2}$	$(r^3,e)\ ^{1}$	$(sr^{2b},e)\ ^{3}$	$(sr^{2b+1},e)\ ^{3}$
$\chi_{\rho_5^{D_6}\boxtimes\rho_1^{C_2}}$	2	1	-1	-2	0	0
$\chi_{\rho_6^{D_6}\boxtimes\rho_1^{C_2}}$	2	-1	-1	2	0	0
	$(e,r)\ ^{1}$	$(r^1,r),\,(r^{-1},r)\ ^{2}$	$(r^2,r),\,(r^{-2},r)\ ^{2}$	$(r^3,r)\ ^{1}$	$(sr^{2b},r)\ ^{3}$	$(sr^{2b+1},r)\ ^{3}$
$\chi_{\rho_5^{D_6}\boxtimes\rho_1^{C_2}}$	2	1	-1	-2	0	0
$\chi_{\rho_6^{D_6}\boxtimes\rho_1^{C_2}}$	2	-1	-1	2	0	0
	$(e,e)\ ^{1}$	$(r^1,e),\,(r^{-1},e)\ ^{2}$	$(r^2,e),\,(r^{-2},e)\ ^{2}$	$(r^3,e)\ ^{1}$	$(sr^{2b},e)\ ^{3}$	$(sr^{2b+1},e)\ ^{3}$
$\chi_{\rho_5^{D_6}\boxtimes\rho_2^{C_2}}$	2	1	-1	-2	0	0
$\chi_{\rho_6^{D_6}\boxtimes\rho_2^{C_2}}$	2	-1	-1	2	0	0
	$(e,r)\ ^{1}$	$(r^1,r),\,(r^{-1},r)\ ^{2}$	$(r^2,r),\,(r^{-2},r)\ ^{2}$	$(r^3,r)\ ^{1}$	$(sr^{2b},r)\ ^{3}$	$(sr^{2b+1},r)\ ^{3}$
$\chi_{\rho_5^{D_6}\boxtimes\rho_2^{C_2}}$	-2	-1	1	2	0	0
$\chi_{\rho_6^{D_6}\boxtimes\rho_2^{C_2}}$	-2	1	1	-2	0	0

Таблица 5: Двумерные неприводимые представления D_{6h}

Задача 7.3. Классы сопряжённости A_4 описаны в задаче 3.2, п. б. Всего классов сопряжённости 4, значит и неприводимых представлений 4. Найдём их размерности: $|A_4| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 12$. Единственный возможный вариант: $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, $d_4 = 3$.
Найдём все одномерные представления. Для этого найдём коммутант A_4. В A_4 всего 4 коммутатора, они порождают коммутант: $[A_4, A_4] = \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$. Факторгруппа $A_4/[A_4, A_4] \simeq \mathbb{Z}_3$, т.е. $|A_4/[A_4, A_4]| = |\mathbb{Z}_3| = 3$ (ещё раз получаем, что всего 2 одномерных неприводимых представления). Любое одномерное неприводимое представление – представление фактора по коммутанту. Первое одномерное неприводимое представление – *тривиальное*: все элементы A_4 переходят в 1.

$$\rho_1(g) = 1, \quad \forall g \in A_4 \tag{192}$$

Второе одномерное неприводимое представление – циклы из группы $(1,2,3)$ переходят в корень 3 степени из 1 ($e^{i\frac{2\pi}{3}}$), циклы из группы $(1,3,2)$ – в другой корень 3 степени из 1 ($e^{i\frac{4\pi}{3}}$) (квадрат цикла из группы $(1,2,3)$ равен циклу из группы $(1,3,2)$ и наоборот). Произведения транспозиций $(a,b)(c,d)$ перейдут в 1, поскольку произведение циклов длины 3 из разных группы равно произведению транспозиций и $\rho((a,b)(c,d)) = e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1$.

$$\rho_2((a,b)(c,d)) = 1, \quad \rho_2((1,2,3)) = e^{i\frac{2\pi i}{3}}, \quad \rho_2((1,3,2)) = e^{i\frac{4\pi i}{3}} \tag{193}$$

Третье одномерное неприводимое представление – циклы из группы $(1,2,3)$ переходят в корень 3 степени из 1 ($e^{i\frac{4\pi}{3}}$), циклы из группы $(1,3,2)$ – в другой корень 3 степени из 1 ($e^{i\frac{2\pi}{3}}$) (квадрат цикла из группы $(1,2,3)$ равен циклу из группы $(1,3,2)$ и наоборот). Произведения транспозиций $(a,b)(c,d)$ перейдут в 1, поскольку произведение циклов длины 3 из разных группы равно произведению транспозиций и $\rho((a,b)(c,d)) = e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1$.

$$\rho_3((a,b)(c,d)) = 1, \quad \rho_2((1,2,3)) = e^{i\frac{4\pi i}{3}}, \quad \rho_2((1,3,2)) = e^{i\frac{2\pi i}{3}} \tag{194}$$

где через $(1,2,3)$ обозначены все циклы длины 3, содержащиеся в одном с $(1,2,3)$ классе сопряжённости, через $(1,3,2)$ аналогично.
Трёхмерное неприводимое представление A_4 можно получить как ограничение трёхмерных неприводимых представлений S_4 на A_4 (они сольются в одно).

	e 1	$(a,b)(c,d)$ 3	$(1,2,3)$ 4	$(1,3,2)$ 4
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$e^{i\frac{4\pi}{3}}$
$\chi^{(3)}$	1	1	$e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$\chi^{(4)}$	3	-1	0	0

Таблица 6: Таблица характеров группы A_4

Ещё раз проверим, что все найденные представления являются неприводимыми. Для этого воспользуемся критерием $\langle \chi^{(i)}, \chi^{(i)} \rangle = 1$:

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = 1 \tag{195}$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} + 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 1 \tag{196}$$

$$\langle \chi^{(3)}, \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} + 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}) = 1 \tag{197}$$

$$\langle \chi^{(4)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0) = 1 \tag{198}$$

Разложим ограничения неприводимых представлений S_4 на A_4:

	e 1	$(a,b)(c,d)$ 3	$(1,2,3)$ 4	$(1,2,3)$ 4
$\bar{\chi}^{(1)}$	1	1	1	1
$\bar{\chi}^{(2)}$	1	1	1	1
$\bar{\chi}^{(3)}$	3	-1	0	0
$\bar{\chi}^{(4)}$	3	-1	0	0
$\bar{\chi}^{(5)}$	2	2	-1	-1

Таблица 7: Ограничение неприводимых представлений S_4 на A_4

Как видно,

$$\boxed{\bar{\chi}^{(1)} = \bar{\chi}^{(2)} = \chi^{(1)}} \tag{199}$$

$$\boxed{\bar{\chi}^{(3)} = \bar{\chi}^{(4)} = \chi^{(4)}} \tag{200}$$

Разложим $\bar{\chi}^{(5)}$ при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\bar{\chi}^{(5)} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi^{(5)} \rangle \tag{201}$$

$$a_1 = \frac{1}{12}(1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1) = 0 \tag{202}$$

$$a_2 = \frac{1}{12}(1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} - 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}) = 1 \tag{203}$$

$$a_3 = \frac{1}{12}(1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} - 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 1 \tag{204}$$

$$a_4 = \frac{1}{12}(1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0) = 0 \tag{205}$$

Таким образом, двумерное пространство оказалось приводимым:

$$\boxed{\bar{\chi}^{(5)} = \chi^{(2)} + \chi^{(3)}} \tag{206}$$

Задача 7.4. а)

Предложение 21. *Порядок группы вращений додекаэдра G_0 равен 60.*

Доказательство. Пусть x – произвольная грань додекаэдра. Симметриями она может быть переведена в любую другую, а значит $|Gx| = 12$ (в додекаэдре 12 граней). Вращения, переводящие грань додекаэдра (правильный пятиугольник) в себя, образуют группу C_5. $|G_x| = |C_5| = 5$. Таким образом,

$$\boxed{|G_0| = |G_x||Gx| = 60} \tag{207}$$

□

б) Различные собственными движения, сохраняющие додекаэдр:

1. Id (1 шт.) – тождественное движение (ничего не делает с додекаэдром).
2. r_1 (12 шт., порядок 5) – повороты на $\pm\frac{2\pi}{5}$ вокруг прямых l_1, проходящих через центры противоположных граней.
3. r_2 (12 шт., порядок 5) – повороты на $\pm\frac{4\pi}{5}$ вокруг прямых l_1, проходящих через центры противоположных граней.
4. r_3 (20 шт., порядок 3) – повороты на $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ вокруг прямых l_2, проходящих через противоположные вершины.
5. r_4 (15 шт., порядок 2) – повороты на π вокруг прямых l_3, проходящих через середины противоположных рёбер.

в)

Предложение 22. *G_0 изоморфна группе чётных перестановок A_5.*

Доказательство. Для доказательства изоморфизма выпишем соответствие между перестановками различных циклических типов в A_5 5 тетраэдров и различными движениями, сохраняющими додекаэдр:

1. e (единичный, 1 шт.) – Id.
2. $(1,2,3,4,5)$, $(1,2,4,5,3)$, $(1,2,5,3,4)$, $(1,3,2,5,4)$, $(1,3,4,2,5)$, $(1,3,5,4,2)$, $(1,4,2,3,5)$, $(1,4,3,5,2)$, $(1,4,5,2,3)$, $(1,5,2,4,3)$, $(1,5,3,2,4)$, $(1,5,4,3,2)$ (циклы длины 5, 12 шт.) – r_1.
3. $(1,2,3,5,4)$, $(1,2,4,3,5)$, $(1,2,5,4,3)$, $(1,3,2,4,5)$, $(1,3,4,5,2)$, $(1,3,5,2,4)$, $(1,4,2,5,3)$, $(1,4,3,2,5)$, $(1,4,5,3,2)$, $(1,5,2,3,4)$, $(1,5,3,4,2)$, $(1,5,4,2,3)$ (циклы длины 5, 12 шт.) – r_2.
4. (a,b,c) (циклы длины 3, 20 шт.) – r_3.
5. $(a,b)(c,d)$ (произведение транспозиций, 15 шт.) – r_4.

Таким образом, построено однозначное соответствие между перестановками и движениями, сохраняющее групповые операции, а значит изоморфизм групп построен. □

г)

Предложение 23. *Группа всех симметрий додекаэдра G изоморфна группе $C_2 \times A_5$.*

Доказательство. В G тождественное движение и центральная симметрия образуют C_2. Все движения из G можно представить в виде произведения собственных движений из G_0 и элементов C_2. Подгруппы G_0 и C_2 коммутируюет и пересекаются только по e. По предложению 7 лекции 4 предложение доказано. □

д)

Предложение 24. *Группы S_5 и $C_2 \times A_5$ не изоморфны.*

Доказательство. В группе S_5 максимальный порядок среди всех элементов 6 (у элементов $(a,b,c)(d,e)$. В группе $C_2 \times A_5$ есть элемент порядка 10 (у элементов $((a,b,c,d,e),s)$, где s – центальная симметрия). Значит, эти группы изоморфными быть не могут. □

Задача 7.5. По предложению 7 лекции 3 перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда имеют одинаковую циклическую структуру. Значит, в S_5 всего 7 классов сопряжённости: $\{e, (a,b), (a,b,c), (a,b,c,d), (a,b,c,d,e), (a,b)(c,d), (a,b,c)(d,e)\}$.
Рассмотрим перестановочное представление S_5. Оно имеет два нетривиальных подпредставления

$$U_1 = \{\sum_{i=1}^{5} x_i e_i | x_1 = x_2 = ... = x_5\}, \quad U_2 = \{\sum_{i=1}^{5} x_i e_i | \sum_{i=1}^{5} x_i = 0\} \tag{208}$$

$$\mathbb{C}^5 = U_1 \oplus U_2 \tag{209}$$

Любое одномерное представление неприводимо. Докажем, что U_2 также является неприводимым. Для этого воспользуемся базисом:

$$e' = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'' = e_1 - e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{210}$$

$$e''' = e_1 - e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'''' = e_1 - e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{211}$$

Любой вектор может быть выражен через базисные вектора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = -x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{212}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = -x_2e' - x_3e'' - x_4e''' - x_5e'''' \tag{213}$$

Выпишем, во что будут переходить базисные векторы при домножении слева на $\rho(g)$ (из перестановочного представления): $\rho(e)e' = (1,-1,0,0,0)^T = e'$, $\rho(e)e'' = (1,0,-1,0,0)^T = e''$, $\rho(e)e''' = (1,0,0,-1,0)^T = e'''$, $\rho(e)e'''' = (1,0,0,0,-1)^T = e''''$, $\rho((1,2))e' = (-1,1,0,0,0)^T = -e'$, $\rho((1,2))e'' = (0,1,-1,0,0)^T = e'' - e'$, $\rho((1,2))e''' = (0,1,0,-1,0)^T = e''' - e'$, $\rho((1,2))e'''' = (0,1,0,0-1)^T = e''''-e'$, $\rho((1,2,3))e' = (0,1,-1,0,0)^T = e''-e'$, $\rho((1,2,3))e'' = (-1,1,0,0,0)^T = -e'$, $\rho((1,2,3))e''' = (0,1,0,-1,0)^T = e''' - e'$, $\rho((1,2,3))e'''' = (0,1,0,0,-1)^T = e'''' - e'$, $\rho((1,2,3,4))e' = (0,1,-1,0,0)^T = e''-e'$, $\rho((1,2,3,4))e'' = (0,1,0,-1,0)^T = e'''-e'$, $\rho((1,2,3,4))e''' = (-1,1,0,0,0)^T = -e'$, $\rho((1,2,3,4))e'''' = (0,1,0,0,-1)^T = e''''-e'$, $\rho((1,2,3,4,5))e' = (0,1,-1,0,0)^T = e'' - e'$, $\rho((1,2,3,4,5))e'' = (0,1,0,-1,0)^T = e''' - e'$, $\rho((1,2,3,4,5))e''' = (0,1,0,0,-1)^T = e'''' - e'$, $\rho((1,2,3,4,5))e'''' = (-1,1,0,0,0)^T = -e'$, $\rho((1,2)(3,4))e' = (-1,1,0,0,0)^T = -e'$, $\rho((1,2)(3,4))e'' = (0,1,0,-1,0)^T = e'''-e'$, $\rho((1,2)(3,4))e''' = (0,1,-1,0,0)^T = e''-e'$, $\rho((1,2)(3,4))e'''' = (0,1,0,0,-1)^T = e'''' - e'$, $\rho((1,2,3)(4,5))e' = (0,1,-1,0,0)^T = e'' - e'$, $\rho((1,2,3)(4,5))e'' = (-1,1,0,0,0)^T = -e'$, $\rho((1,2,3)(4,5))e''' = (0,1,0,0,-1)^T = e'''' - e'$, $\rho((1,2,3)(4,5))e'''' = (0,1,0,-1,0)^T = e''' - e'$.
Представление U_2:

$$\boxed{e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1,2) \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1,2,3) \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{(1,2,3,4) \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1,2,3,4,5) \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \tag{214}$$

$$\boxed{(1,2)(3,4) \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1,2,3)(4,5) \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \tag{215}$$

Характер представления U_2:

	e ^{1}	(a,b) ^{10}	(a,b,c) ^{20}	(a,b,c,d) ^{30}	(a,b,c,d,e) ^{24}	$(a,b)(c,d)$ ^{15}	$(a,b,c)(d,e)$ ^{20}
$\chi^{(4)}$	4	2	1	0	-1	0	-1

Проверим, что все представление U_2 являются неприводимыми. Для этого воспользуемся критерием $\langle \chi^{(i)}, \chi^{(i)} \rangle = 1$:

$$\langle \chi^{(4)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{120}(1 \cdot 16 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 1 + 30 \cdot 0 + 24 \cdot 1 + 15 \cdot 0 + 20 \cdot 1) = 1 \tag{216}$$

Таким образом, пятимерное перестановочное произведение разложено в прямую сумму двух неприводимых:

$$\boxed{\mathbb{C}^5 = U_1 \oplus U_2} \tag{217}$$

Задача 7.6. а)* Проверим, какие классы сопряжённости из S_5 перейдут в A_5. Конечно, класс $\{e\}$ сохранится. 2 класса, состоящие из произведений транспозиций и циклов длины 3, сохранятся также.

Рассмотрим циклы длины 5. $|A_5| = 60$, а значит класс сопряжённости (орбита) не может состоять из 24 элементов (60 на 24 не делится). В A_5 невозможно получить каждый цикл длины 5 из каждого, т.е. циклы длины 5 создадут 2 класса сопряжённости в A_5, которые соответствуют поворотам на $\pm\frac{2\pi}{5}$ и $\pm\frac{4\pi}{5}$ вокруг прямых, проходящих через центры противоположных граней додекаэдра (по 12 в каждом классе):
$\{(1,2,3,4,5),(1,2,4,5,3),(1,2,5,3,4),(1,3,2,5,4),(1,3,4,2,5),(1,3,5,4,2),(1,4,2,3,5),$
$(1,4,3,5,2),(1,4,5,2,3),(1,5,2,4,3),(1,5,3,2,4),(1,5,4,3,2)\}$;
$\{(1,2,3,5,4),(1,2,4,3,5),(1,2,5,4,3),(1,3,2,4,5),(1,3,4,5,2),(1,3,5,2,4),(1,4,2,5,3),$
$(1,4,3,2,5),(1,4,5,3,2),(1,5,2,3,4),(1,5,3,4,2),(1,5,4,2,3)\}$.
Таким образом, всего будет 5 классов сопряженности в A_5.

б) 3 различных неприводимых представления группы A_5:

1. Тривиальное одномерное преставление. Все элементы A_5 переходят в 1.
2. Первое трёхмерное представление, соответствующее вращениям додекаэдра:

$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \to \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a,b)(c,d) \to \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi & 0 \\ \sin\pi & \cos\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1,2,3,4,5) \to \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1,2,3,5,4) \to \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{5} & -\sin\frac{4\pi}{5} & 0 \\ \sin\frac{4\pi}{5} & \cos\frac{4\pi}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Второе трёхмерное представление, соответствующее вращениям додекаэдра (соответствует другому способу нумерования тетраэдров):

$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \to \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a,b)(c,d) \to \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi & 0 \\ \sin\pi & \cos\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1,2,3,4,5) \to \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{5} & -\sin\frac{4\pi}{5} & 0 \\ \sin\frac{4\pi}{5} & \cos\frac{4\pi}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1,2,3,5,4) \to \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в) Классы сопряжённости A_5 описаны в п. а. Всего классов сопряжённости 5, значит и неприводимых представлений 5. Найдём их размерности: $|A_5| = d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2 = 60$. Единственный возможный вариант: $d_1 = 1$, $d_2 = d_3 = 3$, $d_4 = 4$, $d_5 = 5$.

Единственное одномерное представление ρ_1 – тривиальное. Оба трёхмерных представления ρ_2 и ρ_3 A_5 рассмотрены в п. б. Четырёхмерное представление в A_5 ρ_4 – ограничение представления U_2 (см. задачу 7.5) на A_5.

Характеры пятимерного произведения ρ_5 можно найти из следствия 1 предложения 9 лекции 6:

$$\chi_{\text{reg}} = d_1\chi^{(1)} + d_2\chi^{(2)} + d_3\chi^{(3)} + d_4\chi^{(4)} + d_5\chi^{(5)} \to \chi^{(5)} = \frac{1}{5}(\chi_{\text{reg}} - \chi^{(1)} - 3\chi^{(2)} - 3\chi^{(3)} - 4\chi^{(4)}) \tag{218}$$

Характер регулярного произведения можно найти из предложения 8 лекции 6:

$$\chi_{\text{reg}}(e) = |A_5| = 60, \quad \chi_{\text{reg}}(g) = 0,\ g \neq e \tag{219}$$

$$\chi^{(5)}(e) = \frac{1}{5}(60 - 1 - 3\cdot 3 - 3\cdot 3 - 4\cdot 4) = 5 = d_5 \tag{220}$$

$$\chi^{(5)}((a,b,c)) = \frac{1}{5}(0 - 1 - 3\cdot 0 - 3\cdot 0 - 4\cdot 1) = -1 \tag{221}$$

$$\chi^{(5)}((a,b)(c,d)) = \frac{1}{5}(0 - 1 - 3\cdot(-1) - 3\cdot(-1) - 4\cdot 0) = 1 \tag{222}$$

$$\chi^{(5)}((1,2,3,4,5)) = \frac{1}{5}(0 - 1 - 3\cdot(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5}) - 3\cdot(1 + 2\cos\frac{4\pi}{5}) - 4\cdot(-1)) = 0 \tag{223}$$

$$\chi^{(5)}((1,2,3,5,4)) = \frac{1}{5}(0 - 1 - 3\cdot(1 + 2\cos\frac{4\pi}{5}) - 3\cdot(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5}) - 4\cdot(-1)) = 0 \tag{224}$$

В последних 2 уравнениях использовано равенство:

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}}{2} + \frac{e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}}}{2} = \frac{1}{2}(e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}}) = \frac{e^{-i\frac{4\pi}{5}}}{2}\frac{e^{i\frac{8\pi}{5}} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1} = -\frac{1}{2} \tag{225}$$

Таблица характеров A_5:

	e 1	(a,b,c) 20	$(1,2,3,4,5)$ 12	$(1,2,3,5,4)$ 12	$(a,b)(c,d)$ 15
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	3	0	$1+2\cos\frac{2\pi}{5}$	$1+2\cos\frac{4\pi}{5}$	-1
$\chi^{(3)}$	3	0	$1+2\cos\frac{4\pi}{5}$	$1+2\cos\frac{2\pi}{5}$	-1
$\chi^{(4)}$	4	1	-1	-1	0
$\chi^{(5)}$	5	-1	0	0	1

Таблица 8: Таблица характеров группы A_5

Проверим представления на неприводимость, для этого воспользуемся критерием $\langle\chi^{(i)}, \chi^{(i)}\rangle = 1$:

$$\langle\chi^{(1)}, \chi^{(1)}\rangle = \frac{1}{60}(1\cdot 1 + 20\cdot 1 + 12\cdot 1 + 12\cdot 1 + 15\cdot 1) = 1 \tag{226}$$

$$\langle\chi^{(2)}, \chi^{(2)}\rangle = \frac{1}{60}\left(1\cdot 9 + 20\cdot 0 + 12\cdot\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 12\cdot\left(1 + 2\cos\frac{4\pi}{5}\right)^2 + 15\cdot 1\right) = 1 \tag{227}$$

$$\langle\chi^{(3)}, \chi^{(3)}\rangle = \frac{1}{60}\left(1\cdot 9 + 20\cdot 0 + 12\cdot\left(1 + 2\cos\frac{4\pi}{5}\right)^2 + 12\cdot\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 15\cdot 1\right) = 1 \tag{228}$$

Неприводимость $\chi^{(4)}$ проверена в задаче 7.5.

$$\langle\chi^{(5)}, \chi^{(5)}\rangle = \frac{1}{60}(1\cdot 25 + 20\cdot 1 + 12\cdot 0 + 12\cdot 0 + 15\cdot 1) = 1 \tag{229}$$

8 Группы Ли, алгебры Ли.

Упражнение 8.1. Перемножим матрицы:

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha a} & e^{i\alpha b} \\ e^{-i\alpha c} & e^{i\alpha d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & e^{2i\alpha}b \\ e^{-2i\alpha}c & d \end{pmatrix}$$

Рассматривая a, b, c, d как координаты в четырёхмерном пространстве, получим

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e^{2i\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to e^{-2i\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда для $e^{i\alpha} \in U(1)$ верно, что

$$\rho(e^{i\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{230}$$

Характер этого перестановочного представления:

$$\chi(\alpha) = 2 + e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha} \tag{231}$$

$$\boxed{\chi(\alpha) = 2(1 + \cos 2\alpha)} \tag{232}$$

Все неприводимые представления абелевых групп одномерны. Неприводимые представления $U(1)$ были рассмотрены на лекции 7:

$$\chi^{(k)}(\alpha) = e^{ik\alpha} \tag{233}$$

Разложение характера в ряд Фурье:

$$\chi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \chi^{(k)}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \chi(\alpha)\overline{\chi^{(k)}(\alpha)}d\alpha \tag{234}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (2 + e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha})e^{-ik\alpha}d\alpha \tag{235}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (2 + e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha})d\alpha = \frac{1}{2\pi}(2\cdot 2\pi) = 2 \tag{236}$$

$$c_{\pm 2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (2 + e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha})e^{\mp 2i\alpha}d\alpha = \frac{1}{2\pi}(2\pi) = 1 \tag{237}$$

Все остальные $c_k = 0$ как интегралы по целому числу периодов от синусов и косинусов.

$$\boxed{\chi = 2\chi^{(0)} + \chi^{(-2)} + \chi^{(2)}} \tag{238}$$

Задача 8.2. Группа унитарных матриц $U(n)$ состоит из таких матриц $g_{n\times n} \in U(n)$, что $g^*g = gg^* = E$. $g = (g_1, g_2, ..., g_n)$. Распишем условие $gg^* = E$ через столбцы g_i: $g_i\bar{g}_j^T = \delta_{ij}$. При $i = j$: $g_i\bar{g}_i^T = |g_i|^2 = 1$ – всего n вещественных уравнений; при $i \neq j$: $g_i\bar{g}_j^T = 0$ – всего $\frac{n(n-1)}{2}$ комплексных или $n(n-1)$ вещественных уравнений. Всего вещественных уравнений:

$$\boxed{n + n(n-1) = n^2} \tag{239}$$

Рассмотрим все возможные гладкие кривые $g(t) \in U(n)$, где $g(0) = E$. При малых t эта кривая имеет вид $g(t) = E + At + o(t)$, где $A = g'(0)$. $gg^* = (E + At + o(t))(E + A^*t + o(t)) = E + (A + A^*)t + o(t) = E$, значит $A + A^* = 0$. Всё $T_EU(n)$ состоит из таких A, значит $T_EU(n)$ – пространство антиэрмитовых матриц размера $n \times n$.

Предложение 25. *$T_EU(n)$ замкнуто относительно коммутатора.*

Доказательство. Пусть $A, B \in T_EU(n)$, тогда $A^* = -A$, $B^* = -B$.

$$[A,B]+[A,B]^* = AB-BA+(AB-BA)^* = AB-BA+B^*A^*-A^*B^* = AB-BA+BA-AB = 0$$

Значит, $[A, B] \in T_EU(n)$ и $T_EU(n)$ замкнуто относительно коммутатора. □

Задача 8.3. а)

Предложение 26. *Алгебра Ли $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ изоморфна алгебре векторов $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Для матриц $[A, B] = AB - BA$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ состоит из всех кососимметричных матриц размера 3×3 (пример 1, п. в лекции 8). Базис в $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{240}$$

$$[I_1, I_2] = I_3, \quad [I_1, I_3] = -I_2, \quad [I_2, I_3] = I_1 \tag{241}$$

Структурные константы:

$$c_{ij}^k = \epsilon_{ijk} \tag{242}$$

Для векторов в $\mathbb{R}^3$ коммутатор – векторное произведение. Пусть e_1, e_2, e_3 – базис в $\mathbb{R}^3$.

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk}e_k \tag{243}$$

Структурные константы:

$$c_{ij}^k = \epsilon_{ijk} \tag{244}$$

□

б)

Предложение 27. *Алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть $g \in SU(2)$, тогда $gg^* = E$ и $\det g = 1$. Рассмотрим малое приращение

$$g = E + t\delta g + o(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{245}$$

Подставим это в уравнение на g:

$$(E+t\delta g+o(t))(E+t\delta g+o(t))^* = (E+t\delta g+o(t))(E+t\delta g^*+o(t)) = E+t(\delta g+\delta g^*)+o(t) = E$$

$$\det g = 1 + t\ \mathrm{tr}\delta g + o(t) = 1 \tag{246}$$

$$\delta g = -\delta g^*, \quad \mathrm{tr}\ \delta g = 0 \tag{247}$$

Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$ состоит из антиэрмитовых матриц с нулевым следом. Пусть $A \in \mathfrak{su}(2)$, тогда общий вид такой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} ia_1 & a_2+ia_3 \\ -a_2+ia_3 & -ia_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{248}$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \tag{249}$$

Базис в $\mathfrak{su}(2)$:

$$I_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{250}$$

$$[I_1, I_2] = I_3, \quad [I_1, I_3] = -I_2, \quad [I_2, I_3] = I_1 \tag{251}$$

Структурные константы:

$$c_{ij}^k = \epsilon_{ijk} \tag{252}$$

□

в)*

Предложение 28. *Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ не изоморфна алгебре $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.*

Доказательство. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ состоит из всех матриц размера 2×2 с нулевым следом. Базис в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{253}$$

$$[I_1, I_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{254}$$

Т.е. коммутатор $[I_1, I_2]$ пропорционален I_2, чего точно не может быть в векторном произведении. □

9 Симметричные тензоры. Группы Ли $SO(3)$, $SU(2)$.

Упражнение 9.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A \otimes A = \begin{pmatrix} a_{11}A & a_{12}A \\ a_{21}A & a_{22}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{12} & a_{22}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{12}a_{22} \\ a_{21}^2 & a_{21}a_{22} & a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \end{pmatrix} \tag{255}$$

Пусть e_1, e_2 – базис в векторном пространстве V. Базисные векторы пространства $V \otimes V$:

$$e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{256}$$

$$S^2V = \langle e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \rangle \tag{257}$$

$$A \otimes A(e_1 \otimes e_1) = \begin{pmatrix} a_{11}^2 \\ a_{11}a_{21} \\ a_{11}a_{21} \\ a_{21}^2 \end{pmatrix} = a_{11}^2 e_1 \otimes e_1 + a_{11}a_{21}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + a_{21}^2 e_2 \otimes e_2 \tag{258}$$

$$A\otimes A(e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1) = \begin{pmatrix} 2a_{11}a_{12} \\ a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \\ a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \\ 2a_{21}a_{22} \end{pmatrix} = 2a_{11}a_{12}e_1\otimes e_1+(a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21})(e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1)+2a_{21}a_{22}e_2\otimes e_2 \tag{259}$$

$$A \otimes A(e_2 \otimes e_2) = \begin{pmatrix} a_{12}^2 \\ a_{12}a_{22} \\ a_{12}a_{22} \\ a_{22}^2 \end{pmatrix} = a_{12}^2 e_1 \otimes e_1 + a_{12}a_{22}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + a_{22}^2 e_2 \otimes e_2 \tag{260}$$

Таким образом, S^2A можно задать матрицей:

$$\boxed{S^2A = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 2a_{11}a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{22}^2 & 2a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \end{pmatrix}} \tag{261}$$

$$\boxed{\mathrm{tr}\ S^2A = a_{11}^2 + a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + a_{22}^2} \tag{262}$$

$$\Lambda^2V = \langle e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \rangle \tag{263}$$

$$A \otimes A(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \tag{264}$$

Таким образом, $\Lambda^2 A$ можно задать матрицей:

$$\boxed{\Lambda^2 A = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \tag{265}$$

$$\boxed{\text{tr}\ \Lambda^2 A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{266}$$

Как видно, предложение 3 лекции 9 в данном упражнении выполняется ($\text{tr}A = a_{11} + a_{22}$, $\text{tr}A^2 = a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2$):

$$\text{tr}\ S^2 A = \frac{1}{2}((\text{tr}A)^2 + \text{tr}A^2), \quad \text{tr}\ \Lambda^2 A = \frac{1}{2}((\text{tr}A)^2 - \text{tr}A^2) \tag{267}$$

Упражнение 9.2. Пусть $g \in SU(2)$, тогда

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{268}$$

$$\begin{cases} a = a_0 + ia_3, \\ b = a_2 + ia_1. \end{cases} \to g = a_0 E + ia_1\sigma_1 + ia_2\sigma_2 + ia_3\sigma_3 \tag{269}$$

где $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – матрицы Паули.

Пусть $a_0 = \cos\alpha$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sin^2\alpha$. Введём n_j так, что $a_j = n_j \sin\alpha$ и $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

$$g = E\cos\alpha + i\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}) \tag{270}$$

Разложим $\exp(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}))$ в ряд Тейлора:

$$\exp(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n} (\vec{n}, \vec{\sigma})^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1} (\vec{n}, \vec{\sigma})^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{271}$$

$$(\vec{n}, \vec{\sigma})^2 = n_1^2\sigma_1^2 + n_2^2\sigma_2^2 + n_3^2\sigma_3^2 + n_1 n_2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1) + n_1 n_3(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + n_2 n_3(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2) \tag{272}$$

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \to (\vec{n}, \vec{\sigma})^2 = n_1^2\sigma_1^2 + n_2^2\sigma_2^2 + n_3^2\sigma_3^2 = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)E = E \tag{273}$$

$$(\vec{n}, \vec{\sigma})^{2n} = E, \quad (\vec{n}, \vec{\sigma})^{2n+1} = (\vec{n}, \vec{\sigma}) \tag{274}$$

Подставим (274) в (271):

$$\exp(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n} E}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1} (\vec{n}, \vec{\sigma})}{(2n+1)!} = E\cos\alpha + i\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}) \tag{275}$$

Таким образом,

$$\boxed{g = \exp(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma})), \quad \forall g \in SU(2)} \tag{276}$$

Задача 9.3. а)

$$g = E\cos\alpha + i\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}) \tag{277}$$

$$g^{-1} = g^* = (E\cos\alpha + i\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}))^* = E\cos\alpha - i\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}^*) \tag{278}$$

$$\boxed{g^{-1} = E\cos\alpha - i\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma})} \tag{279}$$

б)
$$g = \exp(i\alpha\sigma_3) = E\cos\alpha + i\sin\alpha\sigma_3, \quad g^{-1} = E\cos\alpha - i\sin\alpha\sigma_3 \tag{280}$$

Рассмотрим действие g на базисе $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $i\sigma_3$ алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$.

$$gi\sigma_1 g^{-1} = (E\cos\alpha + i\sin\alpha\sigma_3)i\sigma_1(E\cos\alpha - i\sin\alpha\sigma_3) = i\sigma_1\cos^2\alpha + i\sigma_3\sigma_1\sigma_3\sin^2\alpha -$$
$$-\sin\alpha\cos\alpha\sigma_3\sigma_1 + \sin\alpha\cos\alpha\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_1(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2i\sigma_2\sin\alpha\cos\alpha = i\sigma_1\cos 2\alpha - i\sigma_2\sin 2\alpha$$

$$gi\sigma_2 g^{-1} = (E\cos\alpha + i\sin\alpha\sigma_3)i\sigma_2(E\cos\alpha - i\sin\alpha\sigma_3) = i\sigma_2\cos^2\alpha + i\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sin^2\alpha -$$
$$-\sin\alpha\cos\alpha\sigma_3\sigma_2 + \sin\alpha\cos\alpha\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2i\sigma_1\sin\alpha\cos\alpha = i\sigma_2\cos 2\alpha + i\sigma_1\sin 2\alpha$$

$$gi\sigma_3 g^{-1} = (E\cos\alpha + i\sin\alpha\sigma_3)i\sigma_3(E\cos\alpha - i\sin\alpha\sigma_3) = i\sigma_3\cos^2\alpha + i\sigma_3^3\sin^2\alpha -$$
$$- \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = i\sigma_3$$

Таким образом, матрица присоединённого действия

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{281}$$

соответствует повороту на 2α вокруг оси, проходящей через $i\sigma_3$. Это преообразование является ортогональным:
$$AA^T = E \tag{282}$$

в) Покажем, что присоединённое представление сохраняет скалярное произведение: $(A, B) = c\mathrm{Tr}AB$, где $c = \mathrm{const}$:
$$(gAg^{-1}, gBg^{-1}) = c\mathrm{Tr}(gAg^{-1}gBg^{-1}) = c\mathrm{Tr}(gABg^{-1}) = c\mathrm{Tr}(AB) = (A, B) \tag{283}$$

Найдём c. Вычислим скалярные произведения базисных векторов: $(i\sigma_j, i\sigma_k) = -2c\delta_{jk} = 1$. Тогда $c = -\frac{1}{2}$.
Поскольку преобразование сохраняет скалярное произведение, то оно является ортогональным.

г)

Предложение 29. *Полученный гомоморфизм φ из группы $SU(2)$ в $SO(3)$ является сюръективным.*

Доказательство. По аналогии с п. а, действия $g = \exp(i\alpha\sigma_j)$ являются поворотами на 2α вокруг оси, проходящей через $i\sigma_j$. Из таких поворотов состоит любой элемент $SO(3)$, а значит гомоморфизм φ сюръективен. □

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{g \in SU(2) : gi\sigma_j g^{-1} = i\sigma_j\} \tag{284}$$

$$\cos 2\alpha = 1 \to \alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z} \to g = \cos\pi n = (-1)^n E \tag{285}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\varphi = \{E, -E\} \simeq C_2} \tag{286}$$

Задача 9.4. a) Естественный базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$:

$$J_{ab} = E_{ab} - E_{ba} \tag{287}$$

$$\begin{aligned}[][J_{ab}, J_{cd}] = [E_{ab} - E_{ba}, E_{cd} - E_{dc}] = (E_{ab} - E_{ba})(E_{cd} - E_{dc}) - (E_{cd} - E_{dc})(E_{ab} - E_{ba}) = \\ = E_{ab}E_{cd} - E_{ba}E_{cd} - E_{ab}E_{dc} + E_{ba}E_{dc} - E_{cd}E_{ab} + E_{dc}E_{ab} + E_{cd}E_{ba} - E_{dc}E_{ba} = \\ = \delta_{bc}E_{ad} - \delta_{ac}E_{bd} - \delta_{bd}E_{ac} + \delta_{ad}E_{bc} - \delta_{ad}E_{cb} + \delta_{ac}E_{db} + \delta_{bd}E_{ca} - \delta_{bc}E_{da} = \\ = \delta_{bc}(E_{ad} - E_{da}) + \delta_{ad}(E_{bc} - E_{cb}) + \delta_{ac}(E_{db} - E_{bd}) + \delta_{bd}(E_{ca} - E_{ac})\end{aligned} \tag{288}$$

$$\boxed{[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{bc}J_{ad} + \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{ac}J_{db} + \delta_{bd}J_{ca}} \tag{289}$$

б)*

Предложение 30. *Алгебра Ли $\mathfrak{so}(4)$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.*

Доказательство. Естественный базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$: $J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}$. Пусть

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{34}), \quad J_2 = \frac{1}{2}(J_{14} + J_{23}), \quad J_3 = \frac{1}{2}(J_{13} - J_{24}) \tag{290}$$

$$J'_1 = \frac{1}{2}(J_{12} - J_{34}), \quad J'_2 = \frac{1}{2}(J_{13} + J_{24}), \quad J'_3 = \frac{1}{2}(J_{14} - J_{23}) \tag{291}$$

$$[J_1, J_2] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{14}]+[J_{34}, J_{14}]+[J_{12}, J_{23}]+[J_{34}, J_{23}]) = \frac{1}{4}(J_{42}+J_{13}+J_{13}+J_{42}) = \frac{1}{2}(J_{13}-J_{24}) = J_3$$

$$[J_1, J_3] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{13}]+[J_{34}, J_{13}]-[J_{12}, J_{24}]-[J_{34}, J_{24}]) = \frac{1}{4}(J_{32}+J_{41}-J_{14}-J_{23}) = -\frac{1}{2}(J_{14}-J_{23}) = -J_2$$

$$[J_2, J_3] = \frac{1}{4}([J_{14}, J_{13}]+[J_{23}, J_{13}]-[J_{14}, J_{24}]-[J_{23}, J_{24}]) = \frac{1}{4}(J_{34}+J_{12}+J_{12}+J_{34}) = \frac{1}{2}(J_{12}+J_{34}) = J_1$$

Следовательно,

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk}J_k \to \langle J_1, J_2, J_3\rangle \simeq \mathfrak{so}(3) \tag{292}$$

$$[J'_1, J'_2] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{13}]+[J_{12}, J_{24}]-[J_{34}, J_{13}]-[J_{34}, J_{24}]) = \frac{1}{4}(-J_{23}+J_{14}+J_{14}-J_{23}) = \frac{1}{2}(J_{14}-J_{23}) = J'_3$$

$$[J'_1, J'_3] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{14}]-[J_{34}, J_{14}]-[J_{12}, J_{23}]+[J_{34}, J_{23}]) = \frac{1}{4}(-J_{24}-J_{13}-J_{13}-J_{24}) = -\frac{1}{2}(J_{13}+J_{24}) = -J'_2$$

$$[J'_2, J'_3] = \frac{1}{4}([J_{13}, J_{14}]+[J_{24}, J_{14}]-[J_{13}, J_{23}]-[J_{24}, J_{23}]) = \frac{1}{4}(-J_{34}+J_{12}+J_{12}-J_{34}) = \frac{1}{2}(J_{12}-J_{34}) = J'_1$$

Следовательно,

$$[J'_i, J'_j] = \epsilon_{ijk}J'_k \to \langle J'_1, J'_2, J'_3\rangle \simeq \mathfrak{so}(3) \tag{293}$$

$$[J_1, J'_1] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{12}] + [J_{34}, J_{12}] - [J_{12}, J_{34}] - [J_{34}, J_{34}]) = 0$$

$$[J_1, J'_2] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{13}] + [J_{34}, J_{13}] + [J_{12}, J_{24}] + [J_{34}, J_{24}]) = \frac{1}{4}(-J_{23} - J_{14} + J_{14} + J_{23}) = 0$$

$$[J_1, J'_3] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{14}] + [J_{34}, J_{14}] - [J_{12}, J_{23}] - [J_{34}, J_{23}]) = \frac{1}{4}(-J_{24} + J_{13} - J_{13} + J_{24}) = 0$$

$$[J_2, J'_1] = \frac{1}{4}([J_{14}, J_{12}] + [J_{23}, J_{12}] - [J_{14}, J_{34}] - [J_{23}, J_{34}]) = \frac{1}{4}(J_{24} - J_{13} - J_{13} - J_{24}) = 0$$

$$[J_2, J_2'] = \frac{1}{4}([J_{14}, J_{13}] + [J_{23}, J_{13}] + [J_{14}, J_{24}] + [J_{23}, J_{24}]) = \frac{1}{4}(J_{34} + J_{12} - J_{12} - J_{34}) = 0$$

$$[J_2, J_3'] = \frac{1}{4}([J_{14}, J_{14}] + [J_{23}, J_{14}] - [J_{14}, J_{23}] - [J_{23}, J_{23}]) = 0$$

$$[J_3, J_1'] = \frac{1}{4}([J_{13}, J_{12}] - [J_{24}, J_{12}] - [J_{13}, J_{34}] + [J_{24}, J_{34}]) = \frac{1}{4}(J_{23} + J_{14} - J_{14} - J_{23}) = 0$$

$$[J_3, J_2'] = \frac{1}{4}([J_{13}, J_{13}] - [J_{24}, J_{13}] + [J_{13}, J_{24}] - [J_{24}, J_{24}]) = 0$$

$$[J_3, J_3'] = \frac{1}{4}([J_{13}, J_{14}] - [J_{24}, J_{14}] - [J_{13}, J_{23}] + [J_{24}, J_{23}]) = \frac{1}{4}(-J_{34} - J_{12} + J_{12} + J_{34}) = 0$$

Следовательно,

$$[J_i, J_j'] = 0 \tag{294}$$

Таким образом,

$$\boxed{\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)} \tag{295}$$

□

10 Представления алгебры $\mathfrak{su}(2)$.

Задача 10.1. а)

Предложение 31. $J_+J_- = -J^2 - J_3^2 - iJ_3$.

Доказательство.

$$J^2 = -J_1^2 - J_2^2 - J_3^2, \quad J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2 \tag{296}$$

$$J_+J_- = (J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) = J_1^2 - iJ_1J_2 + iJ_2J_1 + J_2^2 = J_1^2 + J_2^2 - i[J_1, J_2] \tag{297}$$

$$\boxed{J_+J_- = -J^2 - J_3^2 - iJ_3} \tag{298}$$

□

б)

$$J_+J_- = \mathrm{diag}(a_{j-1}b_j, a_{j-2}b_{j-1}, ..., a_{-j}b_{1-j}, 0) \tag{299}$$

Подставим доказанное в п. а равенством $J_+J_- = -J^2 - J_3^2 - iJ_3$ и $b_{m+1} = -\bar{a}_m$:

$$\mathrm{diag}(a_{j-1}b_j, a_{j-2}b_{j-1}, ..., a_{-j}b_{1-j}, 0) = -J^2 - J_3^2 - iJ_3 \tag{300}$$

$$\mathrm{diag}(-|a_{j-1}|^2, -|a_{j-2}|^2, ..., -|a_{-j}|^2, 0) = \mathrm{diag}(-\lambda - j^2 - j, ..., -\lambda + j^2 + j = 0) \tag{301}$$

$$|a_{j-1-k}|^2 = \lambda + j - k - (j-k)^2 = 2j - k - k^2 + 2jk = 2j(k+1) - k(k+1) \tag{302}$$

$$|a_{j-1-k}| = \sqrt{(2j-k)(k+1)} \tag{303}$$

Домножим векторы ортонормированного базиса на фазу, чтобы $a_m^2 \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{a_{j-1-k} = \pm\sqrt{(2j-k)(k+1)}} \tag{304}$$

Задача 10.2. По предложению 6 лекции 10 характеры неприводимых представлений π_j группы $SU(2)$ равны:

$$\chi_j(\varphi) = \frac{\sin((2j+1)\varphi)}{\sin\varphi} \tag{305}$$

$$\chi_{\pi_{\frac{1}{2}}\otimes\pi_{\frac{1}{2}}}(\varphi) = \chi^2_{\frac{1}{2}}(\varphi) = \frac{\sin^2 2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{2(1+\cos 2\varphi)\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2\sin\varphi + \sin 3\varphi - \sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi + \sin 3\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\chi_{\pi_{\frac{1}{2}}\otimes\pi_{\frac{1}{2}}}(\varphi) = \chi_0(\varphi) + \chi_1(\varphi) \tag{306}$$

Таким образом, $\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}}$ раскладывается как

$$\boxed{\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}} = \pi_0 \oplus \pi_1} \tag{307}$$

Задача 10.3.

Предложение 32. *Представление π_j, в котором действие генераторов iJ_3, J_+, J_- задано формулами:*

$$iJ_3 \to \begin{pmatrix} j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & j-1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -j+1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -j \end{pmatrix}, \tag{308}$$

$$J_+ \to \begin{pmatrix} 0 & a_{j-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{-j} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_{1-j} & 0 \end{pmatrix}, \tag{309}$$

является неприводимым.

Доказательство. Пусть $U \subset V$ – инвариантное относительно iJ_3, J_+, J_- подпространство, $u_1, ..., u_t$ – его базис. Разложим векторы u_i по базису $v_{\lambda,k}$:

$$u_i = \sum_{k=-j}^{j} h_k v_{\lambda,k} \tag{310}$$

В лекции 10 показано, что J_+ нильпотентный, поэтому $\exists$ минимальное n: $J_+^n u_i = 0$.

$$J_+^{n-1} u_j = h v_{\lambda,j} \in U \to v_{\lambda,j} \in U \tag{311}$$

Применением J_- из $v_{\lambda,j}$ можно получить все $v_{\lambda,k}$. Таким образом, $U = V$ и в V нет инвариантных подпространств и представление π_j является неприводимым. $\square$

11 Представления групп $SO(3)$ и $SU(2)$.

Упражнение 11.1. a) В задаче 10.2 показано, что

$$\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}} = \pi_0 \oplus \pi_1 \tag{312}$$

По предложению 3 лекции 11 $\pi_{\frac{1}{2}} \otimes (\pi_0 \oplus \pi_1) = \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \pi_{\frac{3}{2}}$. Таким образом,

$$\boxed{\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}} = \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \pi_{\frac{3}{2}}} \tag{313}$$

б) По предложению 3 лекции 11

$$\pi_0 \otimes \pi_j = \pi_j, \quad \pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_j = \pi_{j+\frac{1}{2}} \oplus \pi_{j-\frac{1}{2}}, \quad j > 0 \tag{314}$$

При тензорном умножении $\pi_{\frac{1}{2}}$ на себя образуется π_0. Далее при умножении на $\pi_{\frac{1}{2}}$ π_0 пропадает (превращается в $\pi_{\frac{1}{2}}$). После этого π_0 вновь образуются из произведений $\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}}$. Затем они пропадут и т.д. Т.е. наличие π_0 определяется чётностью степени $\pi_{\frac{1}{2}}$: при нечётных степенях кратность равна 0. Поскольку 101 – нечётное число, то кратность вхождения тривиального представления в $\pi_{\frac{1}{2}}^{101}$ равна 0.

Задача 11.2. а) Произвольный многочлен $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_0$:

$$P_0(x_1, x_2, x_3) = a_1 \tag{315}$$

$$\Delta P_0 = 0 \to H_0 = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_0, H_0 = \langle 1 \rangle \tag{316}$$

$$\boxed{\dim H_0 = 1} \tag{317}$$

Произвольный многочлен $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1$:

$$P_1(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \tag{318}$$

$$\Delta P_1 = 0 \to H_1 = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_0, H_1 = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \tag{319}$$

$$\boxed{\dim H_1 = 3} \tag{320}$$

Произвольный многочлен $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_2$:

$$P_2(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_1x_3 + a_6x_2x_3 \tag{321}$$

$$\Delta P_2 = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 \tag{322}$$

$$H_2 = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_2 \text{ при } a_1 + a_2 + a_3 = 0 \tag{323}$$

$$H_2 = \langle x_1^2 - x_2^2, x_1^2 - x_3^2, x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 \rangle \tag{324}$$

$$\boxed{\dim H_2 = 5} \tag{325}$$

Произвольный многочлен $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_3$:

$$P_3(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^3+a_2x_2^3+a_3x_3^3+a_4x_1^2x_2+a_5x_1x_2^2+a_6x_1^2x_3+a_7x_1x_3^2+a_8x_2^2x_3+a_9x_2x_3^2+a_{10}x_1x_2x_3$$

$$\Delta P_3 = 6a_1x_1 + 6a_2x_2 + 6a_3x_3 + 2a_4x_2 + 2a_5x_1 + 2a_6x_3 + 2a_7x_1 + 2a_8x_3 + 2a_9x_2 \tag{326}$$

$$H_3 = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_3 \text{ при } \begin{cases} 3a_1 + a_5 + a_7 = 0, \\ 3a_2 + a_4 + a_9 = 0, \\ 3a_3 + a_6 + a_8 = 0. \end{cases} \tag{327}$$

$$H_3 = \langle x_1(x_2^2 - x_3^2), x_2(x_1^2 - x_3^2), x_3(x_1^2 - x_2^2), x_1(x_1^2 - 3x_2^2), x_2(x_2^2 - 3x_1^2), x_3(x_3^2 - x_1^2), x_1x_2x_3 \rangle \tag{328}$$

$$\boxed{\dim H_3 = 7} \tag{329}$$

б)

Предложение 33. *Оператор Лапласа Δ является инвариантным относительно действия группы $SO(3)$.*

Доказательство. Группа $SO(3)$ действует на пространстве $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n$ по формуле

$$P(x_1, x_2, x_3) \to P((x_1, x_2, x_3)g) \tag{330}$$

Это можно переписать в виде:

$$x'_j = \sum_{i=1}^{3} x_i g_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{3} g_{ij}(g_{jk})^T = \sum_{j=1}^{3} g_{ij} g_{kj} = \delta_{ik} \tag{331}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} \right) = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} = g_{ik} g_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} \tag{332}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{3} g_{ik} g_{ij} \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} = \delta_{jk} \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} = \sum_{j}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x'^2_j} = \Delta' \tag{333}$$

Таким образом, оператор Лапласа Δ является инвариантным относительно действия группы $SO(3)$. □

Следствие 34. *Пространства H_n являются инвариантными подпространствами относительно группы $SO(3)$.*

Доказательство. Пусть $P(x_1, x_2, x_3) \in H_n$, тогда $\Delta P = 0$. По предложению 33: $\Delta' P = \Delta P = 0$, значит $P(x'_1, x'_2, x'_3) \in H_n$ и пространства H_n являются инвариантными подпространствами относительно группы $SO(3)$. □

в)

Предложение 35. *Отображение*

$$t_{i_1 \ldots i_n} \to P(x) = t_{i_1 \ldots i_n} x_{i_1} \ldots x_{i_n} \tag{334}$$

осуществляет изоморфизм между пространством симметричных бесследовых тензоров в $S^n\mathbb{C}^3$ и пространством гармонических полиномов степени n.

Доказательство. Поскольку все операции линейные, то отображение является гомоморфизмом. Рассмотрим многочлен

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{3} t_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1} \ldots x_{i_n} \tag{335}$$

$$\Delta P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i_1,...,i_n=1}^{3} t_{i_1,...,i_n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} x_{i_1}...\bar{x}_{i_j}...\bar{x}_{i_k}...x_{i_n}\delta_{i,i_j}\delta_{i,i_k}, \tag{336}$$

где $\bar{x}_{i_j}$ обозначает, что множителя x_{i_j} нет.

$$\Delta P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i_1,...,i_n=1}^{3} t_{i_1,...,i_n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} x_{i_1}...\bar{x}_{i_j}...\bar{x}_{i_k}...x_{i_n}\delta_{i_j,i_k} \tag{337}$$

$$\Delta P(x_1,x_2,x_3)=0 \Leftrightarrow \sum_{i_j,i_k=1}^{3} t_{i_1,...,i_n}\delta_{i_j,i_k}=0\ \forall j,k\in\{1,...,n\} \tag{338}$$

Условие справа означает бесследовость тензора $t_{i_1,...,i_n}$. Тензор $t_{i_1,...,i_n}$ симметричен, поскольку в P от перемены мест множителей произведение не меняется. Отображение между пространством симметричных бесследовых тензоров в $S^n\mathbb{C}^3$ и пространством гармонических полиномов степени n взаимно-однозначно, поскольку по коэффициентам $t_{i_1,...i_n}$ многочлен восстанавливается единственным образом. И наоборот, по многочлену легко выписать тензор $t_{i_1,...,i_n}$. Таким образом, показан изоморфизм между пространством симметричных бесследовых тензоров в $S^n\mathbb{C}^3$ и пространством гармонических полиномов степени n. $\square$

г)*

$$\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_n=\{x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3}\},\quad b_1+b_2+b_3=n \tag{339}$$

Найдём число таких $x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3}$. Оно равно количество способов поставить 2 перегородки между $n+3$ элементами. Всего мест между элементами для перегородок равно $n+2$. Следовательно,

$$\boxed{\dim\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_n=C_{n+2}^2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \tag{340}$$

Предложение 36. *Оператор Лапласа* $\Delta:\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_n\to\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_{n-2}$ *является сюръективным отображением.*

Доказательство. Произвольный многочлен P_n:

$$P_n(x_1,x_2,x_3)=\sum_{b_1+b_2+b_3=n} c_{b_1,b_2,b_3}x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3} \tag{341}$$

Пусть $m=\max(b_1,b_2,b_3)$. Пусть без ограничения общности $m=b_1$. Докажем утверждение методом математической индукции:

1. Проверим, что оно верно для $m=n$. Произвольный многочлен $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_n$:

$$P_n(x_1,x_2,x_3)=a_1x_1^n \tag{342}$$

Соответствующий ему многочлен P_{n+2} из $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_{n+2}$: $\Delta P_{n+2}=P_n$:

$$P_{n+2}(x_1,x_2,x_3)=\frac{a_1x_1^{n+2}}{(n+2)(n+1)} \tag{343}$$

Значит, утверждение верно при $m=n$.

2. Предположим, что утверждение верно для $m \geq k$:

$$\forall P_n(x_1, x_2, x_3) : \max(b_1, b_2, b_3) \geq k \; \exists \; P_{n+2}(x_1, x_2, x_3) : \Delta P_{n+2} = P_n \tag{344}$$

3. Проверим, что оно верно для $m = k - 1$.

$$P_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{b_1+b_2+b_3=n} c_{b_1,b_2,b_3} x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3}, \quad \max(b_1, b_2, b_3) = k - 1 \tag{345}$$

$b_1 = k - 1$, $b_2 \leq k - 1$, $b_3 \leq k - 1$.

$$\Delta(x_1^{k+1} x_2^{b_2} x_3^{b_3}) = (k+1)k x_1^{k-1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} + b_2(b_2 - 1) x_1^{k+1} x_2^{b_2-2} x_3^{b_3} + b_3(b_3 - 1) x_1^{k+1} x_2^{b_2} x_3^{b_3-2}$$

По предположению индукции $\exists P'_{n+2}(x_1, x_2, x_3) : \Delta P'_{n+2} = b_2(b_2 - 1) x_1^{k+1} x_2^{b_2-2} x_3^{b_3} + b_3(b_3-1) x_1^{k+1} x_2^{b_2} x_3^{b_3-2}$, поскольку $\max(k+1, b_2-2, b_3) = \max(k+1, b_2, b_3-2) = k+1 \geq k$.

$$x_1^{k-1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} = \Delta \left(\frac{x_1^{k+1} x_2^{b_2} x_3^{b_3}}{(k+1)k} - P'_{n+2} \right) \tag{346}$$

А значит и

$$\forall P_n(x_1, x_2, x_3) : \max(b_1, b_2, b_3) = k - 1 \; \exists \; P_{n+2}(x_1, x_2, x_3) : \Delta P_{n+2} = P_n \tag{347}$$

$\square$

В п. в показан изоморфизм между пространством симметричных бесследовых тензоров в $S^n\mathbb{C}^3$ и пространством H_n. По предложению 1 лекции 9 размерность пространства симметричных тензоров в $S^n\mathbb{C}^3$:

$$\dim S^n\mathbb{C}^3 = C_{n+2}^2 \tag{348}$$

Условие бесследовости:

$$\delta_{i_j i_k} t_{i_1 \ldots i_j \ldots i_k \ldots i_n} = 0 \tag{349}$$

Число уравнений равно числу способов выбрать 2 из n элементов: C_n^2.

$$\dim H_n = \dim S^n\mathbb{C}^3 - C_n^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \tag{350}$$

$$\boxed{\dim H_n = 2n + 1} \tag{351}$$

Задача 11.3. а)

$$V = \langle e_+, e_- \rangle, \quad S^2V = \langle e_+ \otimes e_+, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+), e_- \otimes e_- \rangle \tag{352}$$

$$\langle \pi_1 \otimes \pi_{\frac{1}{2}} \simeq S^2V \otimes V = \langle e|_+ \otimes e_+ \otimes e_+, e_+ \otimes e_+ \otimes e_-, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+),$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-), e_- \otimes e_- \otimes e_+, e_- \otimes e_- \otimes e_- \rangle$$

Пусть $e_1 = e_+ \otimes e_+ \otimes e_+$, $e_2 = e_+ \otimes e_+ \otimes e_-$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+)$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-)$, $e_5 = e_- \otimes e_- \otimes e_+$, $e_6 = e_- \otimes e_- \otimes e_-$.

$$J_+(e_+ \otimes e_+ \otimes e_+) = 0, \quad J_+(e_+ \otimes e_+ \otimes e_-) = e_+ \otimes e_+ \otimes e_+ \tag{353}$$

$$J_+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+)\right) = \sqrt{2}(e_+ \otimes e_+ \otimes e_+) \tag{354}$$

$$J_+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-)\right) = \sqrt{2}(e_+ \otimes e_+ \otimes e_-) + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+)$$

$$J_+(e_- \otimes e_- \otimes e_+) = e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+, \quad J_+(e_- \otimes e_- \otimes e_-) = e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_- \otimes e_+$$

$$\boxed{J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \tag{355}$$

$$J_-(e_+ \otimes e_+ \otimes e_+) = -e_- \otimes e_+ \otimes e_+ - e_+ \otimes e_- \otimes e_+ - e_+ \otimes e_+ \otimes e_-$$

$$J_-(e_+ \otimes e_+ \otimes e_-) = -e_+ \otimes e_- \otimes e_- - e_- \otimes e_+ \otimes e_- \tag{356}$$

$$J_-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+)\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-) - \sqrt{2} e_- \otimes e_- \otimes e_+$$

$$J_-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-)\right) = -\sqrt{2} e_- \otimes e_- \otimes e_- \tag{357}$$

$$J_+(e_- \otimes e_- \otimes e_+) = -e_- \otimes e_- \otimes e_-, \quad J_-(e_- \otimes e_- \otimes e_-) = 0 \tag{358}$$

$$\boxed{J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}} \tag{359}$$

$$iJ_3(e_+ \otimes e_+ \otimes e_+) = \frac{3}{2}(e_+ \otimes e_+ \otimes e_+), \quad iJ_3(e_+ \otimes e_+ \otimes e_-) = \frac{1}{2}(e_+ \otimes e_+ \otimes e_-) \tag{360}$$

$$iJ_3(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+)) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+) \tag{361}$$

$$iJ_3(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-)) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-) \tag{362}$$

$$iJ_3(e_-\otimes e_-\otimes e_+) = -\frac{1}{2}(e_-\otimes e_-\otimes e_+),\quad iJ_3(e_-\otimes e_-\otimes e_-) = -\frac{3}{2}(e_-\otimes e_-\otimes e_-) \tag{363}$$

$$\boxed{iJ_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}} \tag{364}$$

б) По предложению 3 лекции 11:

$$\pi_1\otimes\pi_{\frac{1}{2}} = \pi_{\frac{1}{2}}\oplus\pi_{\frac{3}{2}} \simeq S^3V\oplus V \tag{365}$$

Значит, V и S^3V являются инвариантными подпространствами.

$$S^3V = \langle e_+\otimes e_+\otimes e_+, \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+\otimes e_+\otimes e_- + e_+\otimes e_-\otimes e_+ + e_-\otimes e_+\otimes e_+), \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+\otimes e_-\otimes e_- + e_-\otimes e_+\otimes e_- + e_-\otimes e_-\otimes e_+), e_-\otimes e_-\otimes e_-\rangle$$

Выразим базисные векторы в S^3V через базисные векторы в $S^2V\otimes V$ из п. а:

$$e'_1 = e_+\otimes e_+\otimes e_+ = e_1 \tag{366}$$

$$e'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+\otimes e_+\otimes e_- + e_+\otimes e_-\otimes e_+ + e_-\otimes e_+\otimes e_+) = \frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3 \tag{367}$$

$$e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+\otimes e_-\otimes e_- + e_-\otimes e_+\otimes e_- + e_-\otimes e_-\otimes e_+) = \sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}} \tag{368}$$

$$e'_4 = e_-\otimes e_-\otimes e_- = e_6 \tag{369}$$

$$\boxed{S^3V = \langle e_1, \frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3, \sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}}, e_6\rangle} \tag{370}$$

Дополним e'_1, e'_2, e'_3' e'_4 до базиса векторами e_2 и e_5 при помощи ортогонализации Грама-Шмидта. Вектор e_2 выбран, т.к. он ортогонален всем векторам, кроме e'_2:

$$\tilde{e}'_5 = e_2 - \frac{(e_2, e'_2)}{(e'_2, e'_2)}e'_2 = e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3\right) = \frac{2e_2 - \sqrt{2}e_3}{3} \tag{371}$$

$$e'_5 = \frac{\tilde{e}'_5}{(\tilde{e}'_5, \tilde{e}'_5)} = \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}} \tag{372}$$

Вектор e_5 выбран, т.к. он оротонален всем векторам, кроме e'_3:

$$\tilde{e}'_6 = e_5 - \frac{(e_5, e'_3)}{(e'_3, e'_3)}e'_3 = e_5 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2e_5 - \sqrt{2}e_4}{3} \tag{373}$$

$$e_6' = \frac{\tilde{e}_6'}{(\tilde{e}_6', \tilde{e}_6')} = \sqrt{\frac{2}{3}}e_5 - \frac{e_4}{\sqrt{3}} \tag{374}$$

Рассмотрим действие генераторов J_+, J_-, iJ_3 в новом базисе.

$$J_+(e_1') = J_+(e_1) = 0, \quad J_+(e_2') = J_+\left(\frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3\right) = \sqrt{3}e_1 = \sqrt{3}e_1' \tag{375}$$

$$J_+(e_3') = J_+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}e_3 + \frac{2}{\sqrt{3}}e_2 = 2e_2', \quad J_+(e_4') = J_+(e_6) = e_5 + \sqrt{2}e_4 = \sqrt{3}e_3'$$

$$J_+(e_5') = J_+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 = 0 \tag{376}$$

$$J_+(e_6') = J_+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_5 - \frac{e_4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{e_3}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 = -e_5'$$

Как видно, $J_+(e_6') = -e_5'$. Нужно, чтобы $J_+(e_6') = e_5'$, поэтому поменяем знак e_6':

$$e_6' = \frac{e_4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}e_5 \tag{377}$$

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{378}$$

$$J_-(e_1') = J_-(e_1) = -\sqrt{3}e_2', \quad J_-(e_2') = J_-\left(\frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3\right) = -2e_3' \tag{379}$$

$$J_-(e_3') = J_-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}e_4, \quad J_-(e_4') = J_-(e_6) = 0 \tag{380}$$

$$J_-(e_5') = J_-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}}\right) = -e_6', \quad J_-(e_6') = J_-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_5 - \frac{e_4}{\sqrt{3}}\right) = 0 \tag{381}$$

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{382}$$

$$iJ_3(e_1') = iJ_3(e_1) = \frac{3}{2}e_2', \quad iJ_3(e_2') = iJ_3\left(\frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3\right) = \frac{1}{2}e_2' \tag{383}$$

$$iJ_3(e'_3) = iJ_3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}e_4, \quad iJ_3(e'_4) = iJ_3(e_6) = -\frac{3}{2}e_4 \tag{384}$$

$$iJ_3(e'_5) = iJ_3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}e'_5, \quad iJ_3(e'_6) = iJ_3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_5 - \frac{e_4}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}e'_6 \tag{385}$$

$$iJ_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{386}$$

$$\boxed{V = \langle\sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}e_5\rangle} \tag{387}$$

в)* $3j$ символы Вигнера – коэффиценты разложения одного базиса по другому:

$$v_{j,m} = \sum C_{j,m}^{j_1,m_1,j_2,m_2} v_{j_1,m_1} \otimes v_{j_2,m_2}, \quad j_1 = 1, j_2 = \frac{1}{2} \tag{388}$$

$$v_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} = e'_1 = e_1 = e_+ \otimes e_+ \otimes e_+ = v_{1,1} \otimes v_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \tag{389}$$

$$\boxed{C_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}^{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 1} \tag{390}$$

$$v_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = e'_2 = \frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}e_+ \otimes e_+ \otimes e_- + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+) \otimes e_+ \tag{391}$$

$$v_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}v_{1,1} \otimes v_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}v_{1,0} \otimes v_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \tag{392}$$

$$\boxed{C_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{1,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad C_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}} \tag{393}$$

$$v_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = e'_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}e_- \otimes e_- \otimes e_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+) \otimes e_- \tag{394}$$

$$v_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}v_{1,-1} \otimes v_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}v_{1,0} \otimes v_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \tag{395}$$

$$\boxed{C_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{1,-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad C_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{1,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}} \tag{396}$$

$$v_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}} = e'_4 = e_6 = e_- \otimes e_- \otimes e_- = v_{1,-1} \otimes v_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \tag{397}$$

$$\boxed{C^{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}} = 1} \tag{398}$$

$$v_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = e_5' = \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}e_+ \otimes e_+ \otimes e_- - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+) \otimes e_+ \tag{399}$$

$$v_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}v_{1,1} \otimes v_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}v_{1,0} \otimes v_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \tag{400}$$

$$\boxed{C^{1,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad C^{1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}} \tag{401}$$

$$v_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = e_6' = \frac{e_4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}e_5 = -\sqrt{\frac{2}{3}}e_- \otimes e_- \otimes e_+ + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+) \otimes e_- \tag{402}$$

$$v_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}v_{1,-1} \otimes v_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}v_{1,0} \otimes v_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \tag{403}$$

$$\boxed{C^{1,-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad C^{1,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}} \tag{404}$$

Задача 11.4 (*). а) Соответствие между перестановками различных циклических типов в S_4 и различными собственными движениями, сохраняющими куб (см. задачу 4.4):

1. e (единичный, 1 шт.) – тождественное движение (ничего не делает с кубом).
2. (a,b) (транспозиции, 6 шт.) – повороты на π вокруг прямой l_1, проходящей через центры противоположных рёбер.
3. $(a,b)(c,d)$ (произведение транспозиций, 3 шт.) – повороты на π вокруг прямой l_2, проходящей через центры противоположных граней.
4. (a,b,c) (цикл длины 3, 8 шт.) – поворот на $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ вокруг прямой l_3, проходящей через диагональ куба.
5. (a,b,c,d) (цикл длины 4, 6 шт.) – повороты на $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ вокруг прямой l_2, проходящей через центры противоположных граней.

Таблица характеров группы S_4 (см. задачу 6.3):

	e ^{1}	(a,b) ^{6}	$(a,b)(c,d)$ ^{3}	(a,b,c) ^{8}	(a,b,c,d) ^{6}
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	3	1	-1	0	-1
$\chi^{(4)}$	3	-1	-1	0	1
$\chi^{(5)}$	2	0	2	-1	0

$$\chi_{\pi_2}(R(\alpha)) = e^{-2i\alpha} + e^{-i\alpha} + 1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} = 1 + 2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha \tag{405}$$

$$\chi_{\pi_2}(R(0)) = 1 + 2 + 2 = 5 \tag{406}$$

$$\chi_{\pi_2}(R(\pi)) = 1 - 2 + 2 = 1 \tag{407}$$

$$\chi_{\pi_2}\left(R\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 1 - 1 - 1 = -1 \tag{408}$$

$$\chi_{\pi_2}\left(R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 + 0 - 2 = -1 \tag{409}$$

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_2}	5	1	1	-1	-1

Разложим χ_{π_2} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_2} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_2} \rangle \tag{410}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot 5 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)) = 0 \tag{411}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1) = 0 \tag{412}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot 15 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = 1 \tag{413}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot 15 + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = 0 \tag{414}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot 10 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = 1 \tag{415}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_2} = \chi^{(3)} + \chi^{(5)}} \tag{416}$$

б)

$$\chi_{\pi_n}(R(\alpha)) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ij\alpha} = \frac{e^{-in\alpha}(e^{i(2n+1)\alpha} - 1)}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{e^{i(n+1)\alpha} - e^{-in\alpha}}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\alpha} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\alpha}}{e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}}}$$

$$\chi_{\pi_n}(R(\alpha)) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sin n\alpha \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \cos n\alpha \tag{417}$$

$$\chi_{\pi_n}(R(0)) = 2n + 1 \tag{418}$$

$$\chi_{\pi_n}(R(\pi)) = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{419}$$

$$\chi_{\pi_n}\left(R\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\begin{cases}1, & n=3k\\ 0, & n=3k+1\\ -1, & n=3k+2\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z} \tag{420}$$

$$\chi_{\pi_n}\left(R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\begin{cases}1, & n=4k,4k+1\\ -1, & n=4k+2,4k+3\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z} \tag{421}$$

Рассмотрим все случаи:

1. $n=12k, k\in\mathbb{Z}$.

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	1	1	1	1

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n}=\sum_{i=1}^{5}a_i\chi^{(i)},\quad a_i=\langle\chi^{(i)},\chi_{\pi_n}\rangle \tag{422}$$

$$a_1=\frac{1}{24}(1\cdot(2n+1)+6\cdot1+3\cdot1+8\cdot1+6\cdot1)=\frac{n}{12}+1 \tag{423}$$

$$a_2=\frac{1}{24}(1\cdot(2n+1)+6\cdot(-1)+3\cdot1+8\cdot1+6\cdot(-1))=\frac{n}{12} \tag{424}$$

$$a_3=\frac{1}{24}(1\cdot(6n+3)+6\cdot1+3\cdot(-1)+8\cdot0+6\cdot(-1))=\frac{n}{4} \tag{425}$$

$$a_4=\frac{1}{24}(1\cdot(6n+3)+6\cdot(-1)+3\cdot(-1)+8\cdot0+6\cdot1)=\frac{n}{4} \tag{426}$$

$$a_5=\frac{1}{24}(1\cdot(4n+2)+6\cdot0+3\cdot2+8\cdot(-1)+6\cdot0)=\frac{n}{6} \tag{427}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n}=\chi^{(1)}\left(\frac{n}{12}+1\right)+\chi^{(2)}\frac{n}{12}+(\chi^{(3)}+\chi^{(4)})\frac{n}{4}+\chi^{(5)}\frac{n}{6}} \tag{428}$$

2. $n=12k+1, k\in\mathbb{Z}$.

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	-1	-1	0	1

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n}=\sum_{i=1}^{5}a_i\chi^{(i)},\quad a_i=\langle\chi^{(i)},\chi_{\pi_n}\rangle \tag{429}$$

$$a_1=\frac{1}{24}(1\cdot(2n+1)+6\cdot(-1)+3\cdot(-1)+8\cdot0+6\cdot1)=\frac{n-1}{12} \tag{430}$$

$$a_2=\frac{1}{24}(1\cdot(2n+1)+6\cdot1+3\cdot(-1)+8\cdot0+6\cdot(-1))=\frac{n-1}{12} \tag{431}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-1}{4} \tag{432}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+3}{4} \tag{433}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0) = \frac{n-1}{6} \tag{434}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)}\frac{n-1}{12} + \chi^{(2)}\frac{n-1}{12} + \chi^{(3)}\frac{n+3}{4} + \chi^{(4)}\frac{n+3}{4} + \chi^{(5)}\frac{n-1}{6}} \tag{435}$$

3. $n = 12k+2, k \in \mathbb{Z}$.

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	1	1	-1	-1

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \tag{436}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-2}{12} \tag{437}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1) = \frac{n-2}{12} \tag{438}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+2}{4} \tag{439}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-2}{4} \tag{440}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = \frac{n+4}{6} \tag{441}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)}\frac{n-2}{12} + \chi^{(2)}\frac{n+2}{12} + \chi^{(3)}\frac{n+2}{4} + \chi^{(4)}\frac{n-2}{4} + \chi^{(5)}\frac{n+4}{6}} \tag{442}$$

4. $n = 12k+3, k \in \mathbb{Z}$.

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	-1	-1	1	-1

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \tag{443}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-3}{12} \tag{444}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1\cdot(2n+1) + 6\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 8\cdot 1 + 6\cdot 1) = \frac{n+9}{12} \tag{445}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1\cdot(6n+3) + 6\cdot(-1) + 3\cdot 1 + 8\cdot 0 + 6\cdot 1) = \frac{n+1}{4} \tag{446}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1\cdot(6n+3) + 6\cdot 1 + 3\cdot 1 + 8\cdot 0 + 6\cdot(-1)) = \frac{n+1}{4} \tag{447}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1\cdot(4n+2) + 6\cdot 0 + 3\cdot(-2) + 8\cdot(-1) + 6\cdot 0) = \frac{n-3}{6} \tag{448}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)}\frac{n-3}{12} + \chi^{(2)}\frac{n+9}{12} + \chi^{(3)}\frac{n+1}{4} + \chi^{(4)}\frac{n+1}{4} + \chi^{(5)}\frac{n-3}{6}} \tag{449}$$

5. $n = 12k+4, k \in \mathbb{Z}$.

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	1	1	0	1

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \tag{450}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1\cdot(2n+1) + 6\cdot 1 + 3\cdot 1 + 8\cdot 0 + 6\cdot 1) = \frac{n+8}{12} \tag{451}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1\cdot(2n+1) + 6\cdot(-1) + 3\cdot 1 + 8\cdot 0 + 6\cdot(-1)) = \frac{n-4}{12} \tag{452}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1\cdot(6n+3) + 6\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 8\cdot 0 + 6\cdot(-1)) = \frac{n}{4} \tag{453}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1\cdot(6n+3) + 6\cdot(-1) + 3\cdot(-1) + 8\cdot 0 + 6\cdot 1) = \frac{n}{4} \tag{454}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1\cdot(4n+2) + 6\cdot 0 + 3\cdot 2 + 8\cdot 0 + 6\cdot 0) = \frac{n+2}{6} \tag{455}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)}\frac{n+8}{12} + \chi^{(2)}\frac{n-4}{12} + \chi^{(3)}\frac{n}{4} + \chi^{(4)}\frac{n}{4} + \chi^{(5)}\frac{n+2}{6}} \tag{456}$$

6. $n = 12k+5, k \in \mathbb{Z}$.

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	-1	-1	-1	1

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \tag{457}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1) = \frac{n-5}{12} \tag{458}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-5}{12} \tag{459}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-1}{4} \tag{460}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+3}{4} \tag{461}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = \frac{n+1}{6} \tag{462}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = (\chi^{(1)} + \chi^{(2)})\frac{n-5}{12} + \chi^{(3)}\frac{n-1}{4} + \chi^{(4)}\frac{n+3}{4} + \chi^{(5)}\frac{n+1}{6}} \tag{463}$$

7. $n = 12k+6, k \in \mathbb{Z}$.

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	1	1	1	-1

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \tag{464}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+6}{12} \tag{465}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = \frac{n+6}{12} \tag{466}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+2}{4} \tag{467}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-2}{4} \tag{468}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 0) = \frac{n}{6} \tag{469}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = (\chi^{(1)} + \chi^{(2)})\frac{n+6}{12} + \chi^{(3)}\frac{n+2}{4} + \chi^{(4)}\frac{n-2}{4} + \chi^{(5)}\frac{n}{6}} \tag{470}$$

8. $n = 12k+7, k \in \mathbb{Z}$.

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	-1	-1	0	-1

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \tag{471}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-7}{12} \tag{472}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+5}{12} \tag{473}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+1}{4} \tag{474}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+1}{4} \tag{475}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0) = \frac{n-1}{6} \tag{476}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)}\frac{n-7}{12} + \chi^{(2)}\frac{n+5}{12} + (\chi^{(3)} + \chi^{(4)})\frac{n+1}{4} + \chi^{(5)}\frac{n-1}{6}} \tag{477}$$

9. $n = 12k + 8, k \in \mathbb{Z}$.

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	1	1	-1	1

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \tag{478}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1) = \frac{n+4}{12} \tag{479}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-8}{12} \tag{480}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n}{4} \tag{481}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n}{4} \tag{482}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = \frac{n+4}{6} \tag{483}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)}\frac{n+4}{12} + \chi^{(2)}\frac{n-8}{12} + \chi^{(3)}\frac{n}{4} + \chi^{(4)}\frac{n}{4} + \chi^{(5)}\frac{n+4}{6}} \tag{484}$$

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	-1	-1	1	1

10. $n = 12k + 9, k \in \mathbb{Z}$.

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \tag{485}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = \frac{n+3}{12} \tag{486}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+3}{12} \tag{487}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-1}{4} \tag{488}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+3}{4} \tag{489}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 0) = \frac{n-3}{6} \tag{490}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = (\chi^{(1)} + \chi^{(2)})\frac{n+3}{12} + \chi^{(3)}\frac{n-1}{4} + \chi^{(4)}\frac{n+3}{4} + \chi^{(5)}\frac{n-3}{6}} \tag{491}$$

11. $n = 12k + 10, k \in \mathbb{Z}$.

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	1	1	0	-1

Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \tag{492}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+2}{12} \tag{493}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+2}{12} \tag{494}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+2}{4} \tag{495}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-2}{4} \tag{496}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0) = \frac{n+2}{6} \tag{497}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = (\chi^{(1)} + \chi^{(2)})\frac{n+2}{12} + \chi^{(3)}\frac{n+2}{4} + \chi^{(4)}\frac{n-2}{4} + \chi^{(5)}\frac{n+2}{6}} \tag{498}$$

	e 1	(a,b) 6	$(a,b)(c,d)$ 3	(a,b,c) 8	(a,b,c,d) 6
χ_{π_n}	$2n+1$	-1	-1	-1	-1

12. $n = 12k+11, k \in \mathbb{Z}$.

    Разложим χ_{π_n} при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \tag{499}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-11}{12} \tag{500}$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1) = \frac{n+1}{12} \tag{501}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+1}{4} \tag{502}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+1}{4} \tag{503}$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = \frac{n+1}{6} \tag{504}$$

$$\boxed{\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)}\frac{n-11}{12} + \chi^{(2)}\frac{n+1}{12} + (\chi^{(3)} + \chi^{(4)})\frac{n+1}{4} + \chi^{(5)}\frac{n+1}{6}} \tag{505}$$

12 Представления более общих групп Ли.

Задача 12.1. а)

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1 + i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix} \tag{506}$$

$$\chi_V(g) = e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1 + i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} \tag{507}$$

Из лекции 12:

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = e^{-i\varphi_1} + e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} + e^{i\varphi_2} \tag{508}$$

$$\chi_{V \otimes \Lambda^2 V} = \chi_V \chi_{\Lambda^2 V} = (e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1 + i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2})(e^{-i\varphi_1} + e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} + e^{i\varphi_2}) \tag{509}$$

$$\chi_{V \otimes \Lambda^2 V} = 3 + e^{2i\varphi_1 - i\varphi_2} + e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + e^{-2i\varphi_1 + i\varphi_2} + e^{-i\varphi_1 + 2i\varphi_2} + e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} + e^{i\varphi_1 - 2i\varphi_2} \tag{510}$$

$$\boxed{\chi_{V \otimes \Lambda^2 V} = 3 + 2\cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + 2\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + 2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{511}$$

б) Генераторами группы $SU(3)$ являются *матрицы Гелл-Манна*:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{512}$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{513}$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{514}$$

$$g\lambda^1 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i(2\varphi_1 - \varphi_2)} & 0 \\ e^{i(-2\varphi_1 + \varphi_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g\lambda^2 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i(2\varphi_1 - \varphi_2)} & 0 \\ ie^{i(-2\varphi_1 + \varphi_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g\lambda^3 g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g\lambda^4 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g\lambda^5 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ie^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ ie^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g\lambda^6 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_1 - 2\varphi_2)} \\ 0 & e^{i(\varphi_1 - 2\varphi_2)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$g\lambda^7 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ie^{-i(\varphi_1 - 2\varphi_2)} \\ 0 & ie^{i(\varphi_1 - 2\varphi_2)} & 0 \end{pmatrix}, \quad g\lambda^8 g^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$g\lambda^1 g^{-1} = \cos(2\varphi_1 - \varphi_2)\lambda^1 - \sin(2\varphi_1 - \varphi_2)\lambda^2 \tag{515}$$

$$g\lambda^2 g^{-1} = \sin(2\varphi_1 - \varphi_2)\lambda^1 + \cos(2\varphi_1 - \varphi_2)\lambda^2 \tag{516}$$

$$g\lambda^3 g^{-1} = \lambda^3 \tag{517}$$

$$g\lambda^4 g^{-1} = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\lambda^4 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\lambda^5 \tag{518}$$

$$g\lambda^5 g^{-1} = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\lambda^4 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\lambda^5 \tag{519}$$

$$g\lambda^6 g^{-1} = \cos(2\varphi_2 - \varphi_1)\lambda^6 - \sin(2\varphi_2 - \varphi_1)\lambda^7 \tag{520}$$

$$g\lambda^7 g^{-1} = \sin(2\varphi_2 - \varphi_1)\lambda^6 + \cos(2\varphi_2 - \varphi_1)\lambda^7 \tag{521}$$

$$g\lambda^8 g^{-1} = \lambda^8 \tag{522}$$

Присоединённое представление:

$$Ad_g = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) & \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(2\varphi_1 - \varphi_2) & \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & +\cos(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(2\varphi_2 - \varphi_1) & \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(2\varphi_2 - \varphi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{523}$$

Характер присоединённого представления $SU(3)$:

$$\boxed{\chi_{Ad_g} = 2(1+\cos(2\varphi_1-\varphi_2)+\cos(\varphi_1-2\varphi_2)+\cos(\varphi_1+\varphi_2))} \tag{524}$$

в)* Как видно из п. а и б ($\chi_{\text{triv}} = 1$ – характер тривиального):

$$\boxed{\chi_{V\otimes\Lambda^2 V} = \chi_{Ad_g} + \chi_{\text{triv}}} \tag{525}$$

Задача 12.2. а) Базис в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,1)$:

$$J_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём структурные константы в этом базисе:

$$[J_i, J_j] = \sum_k a_{ij}^k J_k, \quad [K_i, K_j] = \sum_k b_{ij}^k J_k, \quad [J_i, K_j] = \sum_k b_{ij}^k K_k \tag{526}$$

$$[J_1, J_2] = J_1J_2 - J_2J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iJ_3 \tag{527}$$

$$[J_1, J_3] = J_1J_3 - J_3J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iJ_2 \tag{528}$$

$$[J_2, J_3] = J_2J_3 - J_3J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = iJ_1 \tag{529}$$

$$\boxed{a_{ij}^k = i\epsilon_{ijk}} \tag{530}$$

$$[K_1, K_2] = K_1K_2 - K_2K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iK_3 \tag{531}$$

$$[K_1, K_3] = K_1K_3 - K_3K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iK_2 \tag{532}$$

$$[K_2, K_3] = K_2K_3 - K_3K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iK_1 \tag{533}$$

$$\boxed{b_{ij}^k = -i\epsilon_{ijk}} \tag{534}$$

$$[J_1, K_2] = J_1K_2 - K_2J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iK_3 \tag{535}$$

$$[J_1, K_3] = J_1K_3 - K_3J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iK_2 \tag{536}$$

$$[J_2, K_3] = J_2K_3 - K_3J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iK_1 \tag{537}$$

$$\boxed{c_{ij}^k = i\epsilon_{ijk}} \tag{538}$$

б)

Предложение 37. *Алгебры* $\mathfrak{so}(3,1)$ *и* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *изоморфны.*

Доказательство. Для доказательства изоморфизма проверим совпадение структурных констант в $\mathfrak{so}(3,1)$ и $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Структурные константы в $\mathfrak{so}(3,1)$ (см. п. а):

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \tag{539}$$

Естественный базис в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: e, h, f, ie, if, ih, где

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{540}$$

Выберем в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ базис из

$$k = \frac{1}{2}(e+f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad m = \frac{1}{2}(e-f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[k, l] = -m, \quad [k, m] = -l, \quad [l, m] = k \tag{541}$$

Соответствие между базисами: $k \to iJ_1$, $l \to iJ_2$, $m \to iJ_3$, $ik \to K_1$, $il \to K_2$, $im \to K_3$. □

Задача 12.3. $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_N$ – образующие, которые удовлетворяют соотношениям:

$$\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = \delta_{a,b} \tag{542}$$

$$J_{ab} = \gamma_a\gamma_b, \quad a \neq b \tag{543}$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d - \gamma_c\gamma_d\gamma_a\gamma_b = \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d - \gamma_c(\delta_{ad} - \gamma_a\gamma_d)\gamma_b = \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d - \gamma_c\delta_{ad}\gamma_b + \\ + \gamma_c\gamma_a(\delta_{bd} - \gamma_b\gamma_d) = (\gamma_a\gamma_b\gamma_c - \gamma_c\gamma_a\gamma_b)\gamma_d + J_{ca}\delta_{bd} - \gamma_c\gamma_b\delta_{ad} = (\gamma_a\gamma_b\gamma_c - (\delta_{ca} - \gamma_a\gamma_c)\gamma_b)\gamma_d + \\ + J_{ca}\delta_{bd} + J_{bc}\delta_{ad} \tag{544}$$

$$\boxed{[J_{ab}, J_{cd}] = J_{ad}\delta_{bc} + J_{db}\delta_{ac} + J_{ca}\delta_{bd} + J_{bc}\delta_{ad}} \tag{545}$$

Задача 12.4. a) V – четырёхмерное представление алгебры $\mathfrak{so}(4)$. $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, значит

$$\chi_V = \chi_{\mathfrak{su}(2)} + \chi_{\mathfrak{su}(2)} \tag{546}$$

$$\chi_V = e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} \tag{547}$$

$$\boxed{\chi_V = 2\cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2} \tag{548}$$