Ньютоновская механика, напоминание: Рассмотрим динамику одной точечной частицы массы m. Ее движение подчинятся второму закону Ньютона

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \tag{1}$$

где $\vec{F}$ сила, которая в принципе может зависеть от положения частицы $\vec{r}$ и ее скорости $\dot{\vec{r}}$, но мы будет рассматривать только случай потенциальных сил

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}, -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y}, -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z}\right).$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что если задать значения координат и скоростей в некоторый момент времени

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad \text{и} \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0, \tag{2}$$

то можно "проинтегрировать"уравнения (1), т.е. найти $\vec{r}(t)$, а следовательно и $\dot{\vec{r}}(t)$, в произвольный момент времени. То, что необходимо задать два начальных условия связано с тем, что уравнение (1) имеет две производные. Понять это можно следующим образом. Производную и вторую производную функции можно аппроксимировать как

$$\dot{f}(t) \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \implies \ddot{f}(t) \approx \frac{\dot{f}(t+\Delta t) - \dot{f}(t)}{\Delta t} \approx \frac{f(t+2\Delta t) - 2f(t+\Delta t) + f(t)}{\Delta t^2}.$$

Поэтому уравнение (1) приблизительно имеет вид

$$\vec{r}(t+2\Delta t) = -\vec{r}(t) + 2\vec{r}(t+2\Delta t) + \frac{\Delta t^2}{m}\vec{F}(t)$$

и позволяет найти $\vec{r}(t+2\Delta t)$ если известны $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t+\Delta t)$. Отсюда два условия. Решение задачи Коши для уравнения (1), то есть нахождение $\vec{r}(t)$ по заданным начальным условиям (2), является основной задачей Ньютоновской механики.

Для того чтобы решить уравнения (1) нужно заметить что энергия, определенная по следующей формуле

$$E = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) \tag{3}$$

сохраняется "на уравнениях"движения

$$\dot{E} = \dot{\vec{r}}(t)\left(m\ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla}U(\vec{r})\right) \overset{(1)}{=} 0.$$

Поэтому $E = E_0$ – начальной энергии частицы

$$E_0 = \frac{m\vec{v}^2}{2} + U(\vec{r}_0).$$

Используя этот "закон сохранения"и (3), можно выразить

$$\dot{\vec{r}}(t)^2 = \frac{2(E_0 - U(\vec{r}))}{m},$$

однако выразить каждую $\dot{\vec{r}}(t)$ можно только если имеются дополнительные законы сохранения. Предположим например что потенциал $U(\vec{r})$ не зависит от двух координат

$$\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} = \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} = 0.$$

Тогда кроме энергии сохранятся также и импульсы $p_y = m\dot{y}$ и $p_z = m\dot{z}$, и можно найти

$$\dot{x}(t) = \pm\sqrt{\frac{2(E_0 - U(x))}{m} - \frac{p_x^2 + p_y^2}{m^2}}.$$

Заметим, что уравнения Ньютона (1) выполнены только в инерциальной системе отсчета, т.е. в такой в которой свободная частица (с $U(\vec{r}) = 0$) движется прямолинейно с постоянной скоростью

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t.$$

Лагранжев подход: Рассмотрим систему из N частиц с координатами $\vec{r}_1$ ... $\vec{r}_N$. Нам будет удобнее работать с обобщенными координатами $\boldsymbol{q} = \{x_1, y_1, z_1, \ldots x_N, y_N, z_N\}$. Пусть эти частицы находятся в потенциальном поле $U(\boldsymbol{q})$. Уравнения движения имеют вид (мы предположили для простоты, что все частицы имеют одинаковые массы)

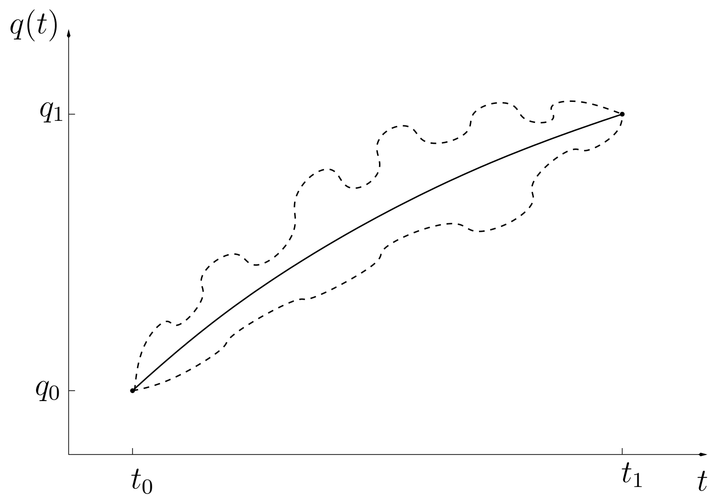
$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial U(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} \tag{4}$$

Лагранжев подход основан на принципе наименьшего действия. Определим функцию Лагранжа

$$L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \frac{m\dot{q}_k^2}{2} - U(\boldsymbol{q}). \tag{5}$$

Рассмотрим все траектории с условием

$$\boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{q}(t_1) = \boldsymbol{q}_1.$$



Только одна траектория, выделенная жирным на рисунке, является классической, т.е. удовлетворяет (1). Каким же образом ее отличить ото всех остальных? Утверждается, что классическая траектория выделена тем, что на ней функционал *действие*

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t))dt$$

является экстремальным. Чтобы увидеть это, рассмотрим бесконечное малое изменение координат

$$\boldsymbol{q}(t) \to \boldsymbol{q}(t) + \delta\boldsymbol{q}(t), \quad \delta\boldsymbol{q}(t_0) = \delta\boldsymbol{q}(t_1) = 0.$$

При таком изменении действие меняется следующим образом[1]

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \cancel{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \right]} \right) dt,$$

где последний член не дает вклада из-за условия $\delta\boldsymbol{q}(t_0) = \delta\boldsymbol{q}(t_1) = 0$. Заметим что $\delta\boldsymbol{q}(t)$ произвольная, хоть и бесконечно-малая функция. Условие экстремума влечет уравнения *Эйлера-Лагранжа*

$$\delta S = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \tag{6}$$

что для функции Лагранжа (5) уравнения (6) эквивалентны уравнениям (4).

Одним из достоинств уравнений (6) является то, что они справедливы в любой системе координат.

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t) \implies \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}.$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 q_j}{\partial t \partial x_i} \right) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_i}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 q_j}{\partial t \partial x_i} \right),$$

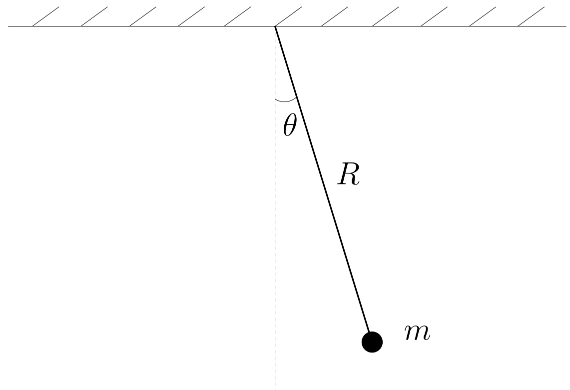
и следовательно

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right)\frac{\partial x_j}{\partial q_i}.$$

Таким образом, если уравнения Эйлера-Лагранжа (6) выполняются в одной системе координат, то они выполняются и в другой.

[1] Здесь и далее везде по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Еще одно преимущество лагранжева подхода состоит в том, что в нем удобно накладывать "связи". Рассмотрим пример: двумерный маятник длины R



Эту систему можно задать лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + mgy \tag{7}$$

с дополнительным условием

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{8}$$

Как же учесть "связь" (8)? Идея в том, чтобы деформировать (7), добавив так называемый множитель Лагранжа λ:

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + mgy + \lambda (x^2 + y^2 - R^2). \tag{9}$$

Уравнения движения для (9) имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda x, \\ m\ddot{y} &= mg + \lambda y, \\ x^2 + y^2 &= R^2 \end{aligned}$$

Гамильтонов подход: Уравнения Гамильтона принимают вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{10}$$

Интегрируемые и неинтегрируемые системы: Заметим, что уравнения Гамильтона (10) можно записать в симметричном виде если ввести обобщенные координаты

$$\boldsymbol{x} = \{q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n\}. \tag{11}$$

Тогда (10) принимают вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{S} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \Leftrightarrow \dot{x}_i = S_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{S}$ имеет вид

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix}$$

и $\boldsymbol{I}$ единичная $n \times n$ матрица.

Введем понятие канонического преобразования, то есть такой замены координат и импульсов $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, или что тоже самое обобщенных координат (11), которое не меняет вид Гамильтоновых уравнений (10). Сделаем общую замену

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}) \implies \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\dot{y}_j, \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Тогда в новых обобщенных координатах уравнения (12) принимают вид

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \tilde{\boldsymbol{S}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{y}} \quad \text{где} \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} S_{kl} \frac{\partial y_j}{\partial x_l}.$$

Мы видим что уравнения Гамильтона не меняют свой вид если

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} S_{kl} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} = S_{ij}. \tag{13}$$

Матрицы $\boldsymbol{M}$ удовлетворяющие соотношению $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}^T$ называются симплектическими. Мы видим, что замены обобщенных координат с симплектическим якобианом

$$J_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

являются каноническими преобразованиями.

Рассмотрим бесконечно-малое каноническое преобразование

$$q_i \to q_i + \epsilon f_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \quad p_i \to p_i + \epsilon g_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}).$$

Из условия симплектичности (13) следует, что

$$\frac{\partial f_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial q_j} = -\frac{\partial g_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial p_j}.$$

Это условие выполняется если

$$f_i = \frac{\partial F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial p_i}, \quad g_i = -\frac{\partial F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial q_i},$$

где $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ называется производящей функцией канонического преобразования

$$q_i \to q_i + \epsilon \frac{\partial F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial p_i}, \quad p_i \to p_i - \epsilon \frac{\partial F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial q_i}.$$

Заметим, что это можно переписать как

$$\frac{dp_i}{d\epsilon} = -\frac{\partial F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{d\epsilon} = \frac{\partial F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial p_i},$$

то есть выглядит как уравнение Гамильтона во "времени"ϵ.

Практическую пользу из канонических преобразований можно извлечь перейдя, когда это возможно, к переменным действие угол. Продемонстрируем это на примере гармонического осциллятора

$$H = \frac{p^2 + q^2}{2}.$$

Перейдем к новым переменным

$$(q, p) \to (\theta, I), \qquad q = \sqrt{2I}\cos\theta, \quad p = \sqrt{2I}\sin\theta. \tag{14}$$

Легко проверить что якобиан перехода

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2I}} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2I}} \\ -\sqrt{2I}\sin\theta & \sqrt{2I}\cos\theta \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{J}^T$ и следовательно (14) является каноническим преобразованием. В новых переменных Гамильтониан имеет вид

$$H = I,$$

то есть не зависит от координаты θ и следовательно уравнения движения принимают замечательно простой вид

$$\dot{\theta} = 1, \quad \dot{I} = 0 \implies I = E_0, \quad \theta = \theta_0 + t.$$

Соответственно фазовое пространство гармонического осциллятора является цилиндром $\mathbb{S}^1 \otimes \mathbb{R}$, где $\mathbb{S}^1$ окружность "наматываемая" углом θ.

Возникает вопрос, можно ли также изящно решить произвольную систему? То есть перейти к переменным действие-угол

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \to (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{I})$$

так чтобы Гамильтониан не зависел от углов $H = H(\boldsymbol{I})$ и следовательно уравнения движения принимали бы замечательно простой вид

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{I}}, \quad \dot{\boldsymbol{I}} = 0.$$

Ясно, что необходимым условием является существование n сохраняющихся величин $(I_1, \ldots, I_n)$ (для системы с n степенями свободы). Достаточное условие, известное как теорема Лиувилля, требует чтобы все I_k находились в инволюции, то есть удовлетворяли

$$\{I_k, I_l\} = 0.$$

Системы с таким свойством называются интегрируемыми.

Задачи:

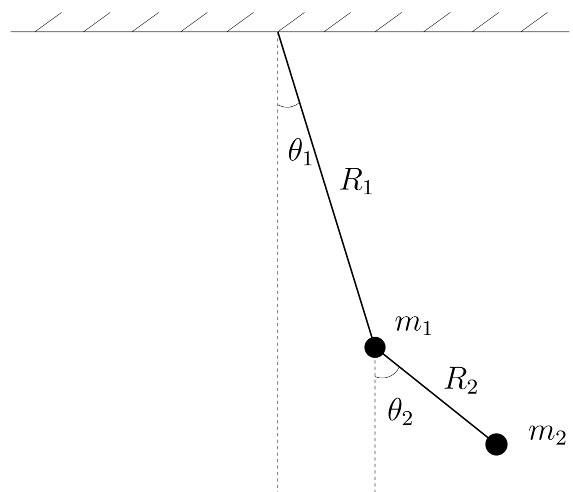
1. Рассмотрите свободную двумерную частицу на плоскости с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right).$$

Напишите уравнения ЭЛ во вращающейся системе отсчета

$$\tilde{x} = x \cos \omega t + y \sin \omega t,$$
$$\tilde{y} = -x \sin \omega t + y \cos \omega t.$$

2. Используя метод множителей Лагранжа найдите уравнения движения для двойного маятника



3. Проверьте тождество Якоби для скобок Пуассона

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

4. Частица с координатами и импульсами (x_k, p_k), $k = 1, 2, 3$ имеет угловой момент $M_i = \epsilon_{ijk} p_j x_k$. Найдите скобки Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = ?$$

5. Задача про вихри из лекции (...)

6. Покажите, что следующие преобразования являются каноническими

   (a) $(Q, P) = (pq^2, q^{-1})$

   (b) $(Q, P) = (pe^q, q + e^{-q} + \log p)$

   (c)

7.