Некоторые задачи СТО и ОТО II

Декабрь 2020

Алгебра Клиффорда $\mathrm{CL}(n, \mathbb{C})$ определяется как ассоциативная алгебра с единицей e и с антикоммутатором

$$\{b_i, b_j\} := b_i b_j + b_j b_i = 2g_{ij} e, \tag{1}$$

где g_{ij} - симметричная биленейная форму (в интересующем нас случае - метрика), а $b_i,\ i = 1, \ldots, n$ - генераторы.

1. Найдите базис алгебры $\mathrm{CL}(n, \mathbb{C})$, то есть такие линейно независимые элементы, через которые выражается любой элемент алгебры единственным образом. Найдите размерность $\mathrm{CL}(n, \mathbb{C})$.

В квантовой теории поля нас интересуют Лоренц-инвариантные уравнения, например уравнение Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\psi(x)$ - четырехкомпонентный спинор, а $\gamma^\mu,\ \mu = 0, \ldots, 3$ - матрицы Дирака. Матрицы Дирака образуют непреводимое представление алгебры $\mathrm{CL}(4, \mathbb{C})$ с соотношением

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} E_{4\times4}, \tag{3}$$

где $E_{4\times4}$ - единичная матрица 4 на 4. На матрицах Дирака действует группа Лоренца: $\gamma_\mu \to \Lambda^\nu_\mu \gamma_\nu$

2. Найдите элемент $S(\Lambda)$ алгебры Клиффорда $\mathrm{CL}(4, \mathbb{C})$, который соответсвует преобразованию

$$\Lambda^\mu_\nu \gamma_\nu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda). \tag{4}$$

То есть реализуйте внешнее действие группы Лоренца как внутренний автоморфизм алгебры Клиффорда. Для этого предлагается рассмотреть преобразование Лоренца близкое к единице:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \tag{5}$$

где ω^μ_ν антисимметрична и $|\omega^\mu_\nu| \ll 1$. Тогда $S(\Lambda)$ ищем в виде

$$S(\Lambda) = E_{4\times4} + \omega_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}. \tag{6}$$

Выразите $\Gamma^{\mu\nu}$ через гамма матрицы γ^μ. Подсказка: из за антисимметричности можно искать $\Gamma^{\mu\nu}$ пропорциональной коммутатору гамма матриц.