2. Что такое модель Изинга? Модель Изинга в 1D

Актуальная версия листика находится тут (последнее обновление: 10 марта 2023 г.).

Упражнения

Упражнение 1. Работа с трансфер матрицей.
При решении одномерной модели Изинга была введена трансфер матрица

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{++} & T_{+-} \\ T_{-+} & T_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{K+h} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h} \end{pmatrix}, \; T_{\sigma,\sigma'} = \exp\left(K\sigma\sigma' + \frac{h(\sigma+\sigma')}{2}\right). \tag{1}$$

1. Убедитесь, что матричные элементы данной матрицы можно записать следующим образом
$$T_{\sigma,\sigma'} = \begin{pmatrix} \delta_{\sigma,1} & \delta_{\sigma,-1} \end{pmatrix} \mathbf{T} \begin{pmatrix} \delta_{\sigma',1} \\ \delta_{\sigma',-1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. Докажите следующее равенство
$$Z_N(H,T) = \sum_{\{\sigma_i=\pm1\}} T_{\sigma_1,\sigma_2} T_{\sigma_2,\sigma_3} \ldots T_{\sigma_N,\sigma_1} = \operatorname{tr} \mathbf{T}^N. \tag{3}$$

3. Найдите собственные значения значения трансфер матрицы.

4. Найдите собственные векторы трансфер матрицы.

Упражнение 2. Трансфер матрица и термодинамика.
Если выбранная нами трансфер матрица $\mathbf{T}$ размера $n \times n$, в этом случае статистическая сумма будет иметь вид
$$Z_N(H,T) = \operatorname{tr} \mathbf{T}^N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^N. \tag{4}$$

Дополнительно предположим, что $\lambda_1 > \lambda_i \; \forall \; i \neq 1$. В термодинамическом пределе укажите формулы для вычисления термодинамических величин на узел решётки в терминах собственных значений λ.

1. Свободная энергия.

2. Энтропия.

3. Энергия.

4. Теплоёмкость.

5. Намагниченность.

6. Магнитная восприимчивость.

Задачи

Задача 1. Намагниченность и магнитная восприимчивость.

1. Проверьте, что при фиксированной температуре T намагниченность является ограниченной, нечётной и неубывающей функцией от магнитного поля H

$$-1 \leq M(H,T) \leq 1, \quad M(H.T) = -M(-H,T), \quad \chi(H,T) = \frac{\partial M(H,T)}{\partial H} \geq 0 \tag{5}$$

   В частности, найдите, что восприимчивость χ выражается через среднее от оператора $\mathcal{M}$ как

$$\chi(H,T) = \frac{\partial M(H,T)}{\partial H} = \frac{\langle(\mathcal{M} - \langle\mathcal{M}\rangle)^2\rangle}{NkT}, \tag{6}$$

   а значит выражается через двухточечные корреляционные функции.

2. Используя выведенную формулу (6), вычислите магнитную восприимчивость и проверьте ответ с полученным на лекции.

3. Нарисуйте схематически поведение восприимчивости χ как функцию от H для различных температур, а так же χ как функцию от T для различных значений поля.

Задача 2. Глаза боятся, а руки делают.

Рассмотрим простую модель бинарного сплава. Пусть имеются равные количества атомов цинка и меди, расположенные плотно (нет дырок) на кубической объёмно центрированной решётке. При высоких температурах все узлы заселены хаотично. При «низких» температурах (T_c порядка 600 K) атомы меди (цинка) располагаются преимущественно на выделенных кубических подрешётках. Т.е. в узлах одной кубической подрешётки – атомы одного типа, а в центрах этих кубов, т.е. соответственно, на 2 кубической подрешётке – атомы другого типа. В замороженном состоянии атомы будут сидеть на разных подрешётках.
Простейшая модель, описывающая эту ситуацию, задаётся так. Рассмотрим заселённость одной кубической подрешётки. Пусть $\sigma_i = 1$, если заданный узел кубической решётки занимает атом меди, и $\sigma_i = -1$, если узел занят атомом цинка. Будем считать, что взаимодействуют только ближайшие соседи на этой кубической подрешётке и модельный гамильтониан определяется константами взаимодействия J_{CuCu}, J_{ZnZn} и J_{CuZn}.

$$\begin{aligned} E(\sigma) = -J_{CuCu} \sum_{<ij>} (1+\sigma_i)(1+\sigma_j) - J_{ZnZn} \sum_{<ij>} (1-\sigma_i)(1-\sigma_j) - \\ - J_{CuZn} \sum_{<ij>} ((1+\sigma_i)(1-\sigma_j) + (1-\sigma_i)(1+\sigma_j)) \end{aligned} \tag{7}$$

где сумма берётся по ближайшим соседям на кубической подрешётке.
Параметром порядка для нас будет плотность атомов, скажем, меди, на этой кубической подрешётке. Тогда в низкотемпературном режиме вакуумной конфигурацией будет состояние с либо всеми спинами -1, либо $+1$.
Покажите, что такая модель бинарного сплава – это модель Изинга на трёхмерной решётке. Т.е. модель на трёхмерной решётке, где спины принимают значения ± 1, а взаимодействие только между ближайшими соседями.

Задача 3. Одномерная модель Изинга спина 1.

По аналогии с материалом лекции, рассмотрите пример $D = 1$ модели Изинга с периодическими граничными условиями $\sigma_1 = \sigma_{N+1}$, в которой спины принимают значения $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$. Статистическая сумма такой системы

$$Z_N = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1, 0\}} \exp\left(K \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} + h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i + D \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 \right), \tag{8}$$

где последнее слагаемое обусловлено взаимодействием спином с самим собой.

1. Напишите соответствующую трансфер матрицу.

2. Найдите свободную энергию на узел в термодинамическом пределе, считая что $h = D = 0$.

3. Найдите энтропию, энергию и теплоёмкость системы на узел.

4. Напишите матрицу, вставляющую спины для анализа корреляторов и выпишите двухточечный коррелятор в терминах следа трансфер матрицы.

Задача 4. Доменные стенки.

В одномерной модели Изинга с выключенным магнитным полем

$$E = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1}, \tag{9}$$

σ_i принимают значения ± 1. Найти зависимость средней плотности числа доменных «стенок» от температуры в термодинамическом пределе $N \to \infty$.