Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Семинары по квантовой механике – I
(И.В. Побойко, Д.С. Антоненко, Н.А. Степанов)

Коцевич Андрей Витальевич, группа Б02-920

5 семестр, 2021

Содержание

1 Основы квантовой механики.

Упражнения (20 баллов)

Упражнение 1. Унитарные матрицы (5 баллов).
Покажите, что унитарные матрицы, как и эрмитовы, диагонализуемы. *Указание*: покажите, что эрмитова и анти-эрмитова часть унитарного оператора диагонализуемы совместно.
Решение.
Разложим унитарный оператор на эрмитову и анти-эрмитову части:

$$\hat{U} = \frac{\hat{U} + \hat{U}^\dagger}{2} + i\frac{\hat{U} - \hat{U}^\dagger}{2i} \tag{1}$$

Вычислим их коммутатор, учитывая унитарность оператора $\hat{U}$ ($\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{I}$):

$$[\hat{U}+\hat{U}^\dagger, \hat{U}-\hat{U}^\dagger] = \hat{U}\hat{U}+\hat{U}^\dagger\hat{U}-\hat{U}\hat{U}^\dagger-\hat{U}^\dagger\hat{U}^\dagger-\hat{U}\hat{U}+\hat{U}^\dagger\hat{U}-\hat{U}\hat{U}^\dagger+\hat{U}^\dagger\hat{U}^\dagger = 2(\hat{U}^\dagger\hat{U}-\hat{U}\hat{U}^\dagger) = 0 \tag{2}$$

Часть $\frac{\hat{U}+\hat{U}^\dagger}{2}$ эрмитова, $i\frac{\hat{U}-\hat{U}^\dagger}{2i}$ антиэрмитова. Докажем следующее предложение:

Предложение 1. *Если операторы коммутируют, то их можно одновременно диагонализировать.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ – собственный вектор оператора $\hat{A}$, соответствующий некратному собственному значению λ ($\hat{A}\vec{a} = \lambda\vec{a}$). Вектор $\hat{B}\vec{a}$ тоже будет принадлежать собственному значению λ матрицы A:

$$\hat{A}\hat{B}\vec{a} = \hat{B}\hat{A}\vec{a} = \lambda\hat{B}\vec{a} \tag{3}$$

Следовательно, вектор $B\vec{a}$ пропорционален $\vec{a}$, т.е. $\vec{a}$ является собственным вектором матрицы $\hat{B}$.
В случае кратного собственного значения λ имеем несколько собственных векторов x_i, принадлежащим этому собственному значению. Пусть $Bx_i = b_{ij}x^j$, где b_{ij} – некоторые числа. Матрицу b_{ij} можно диагонализовать, выбрав в качестве принадлежащих λ собственных векторов матрицы A другие векторы $y_i = c_{ij}x^j$: $Ay_i = \lambda y_i$ и $By_i = \Lambda_i y_i$ (в последнем равенстве суммы по i нет).
Т.е. у операторов общая система собственных векторов. Можно перейти к базису, состоящему из собственных векторов, и в этом базисе обе матрицы будут диагональны. □

Таким образом, эрмитова и анти-эрмитовы части диагонализуемы совместно. Следовательно, и их сумма – унитарный оператор $\hat{U}$ диагонализуем.

Упражнение 2. Замена базиса (5 баллов).
В квантовой механике замена базиса реализуется унитарными преобразованиями $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$.

1. Покажите, что гамильтониан при этом заменяется на $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$.

2. Последнее утверждение необходимо модифицировать, если унитарное преобразование зависит явно от времени $\hat{U} = \hat{U}(t)$. Покажите, что в таком случае гамильтониан необходимо заменить на $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\hbar\hat{U}\partial_t\hat{U}^\dagger$.

Решение.
Запишем нестационарное уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle \tag{4}$$

Очень жаль, что это конец демо-версии данного файла! Для получения полной версии перейдите по секретной ссылке.