Электростатика
Постоянный электрический ток

Коцевич А.В. – член сборной РБ 2019 года

Актуальная версия пособия находится тут.

Оглавление

Все утверждения в тексте – обобщения опытных фактов, поэтому не требуют доказательств. Все формулы записаны в системе СИ. Разделы, отмеченные *, при первом чтении можно пропустить.

Глава 1

Электростатика

1.1 Электрическое поле в вакууме

1.1.1 Закон Кулона. Напряжённость электрического поля

Напомним некоторые общие определения:

Определение 1.1.1. *Стационарный* – неизменный с течением времени. *Однородный* – постоянный во всех точках пространства.

Стационарными и/или однородными могут быть например *электрические поля.*

Определение 1.1.2. *Электрическое поле* представляет собой особый вид материи, связанный с электрическими зарядами и передающий действия зарядов друг на друга.

Определение 1.1.3. Стационарное электрическое поле называется *электростатическим.* Оно создаётся неподвижными в пространстве и неизменными во времени электрическими зарядами (при отсутствии электрических токов).

Именно об электростатическом поле пойдёт речь в этом главе.

Определение 1.1.4. Малое тело (настолько, что практически не вызывает индуктивного перераспределения электрических зарядов на окружающих телах) является *пробным телом (зарядом).*

Практически означает, что в данной задаче мы можем пренебречь этим перераспределением. Понятие индукции будет дано позднее.

Возьмём два пробных заряда и будем последовательно помещать их в одну и ту же точку пространства, и притом так, чтобы оба заряда покоились в соответствующей системе отсчёта. Т.к. поле стационарно, то эти заряды будут подвергаться действию одного и того же поля. Пусть $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы, действующие на эти неподвижные заряды.

Утверждение 1.1.5. *Эти силы коллинеарны, отношение их проекций на ось, сонаправленную с направлением одной из сил, не зависит от положения точки, в которой помещаются пробные заряды.*

Отношение $\frac{F_1}{F_2}$ – характеристика самих пробных зарядов, а не поля. Это позволяет ввести понятие электрического заряда.

Определение 1.1.6. *Отношением зарядов* q_1 *и* q_2 двух пробных тел является отношение проекций действующих на них сил F_1 и F_2 при последовательном помещении их в одну и ту же точку пространства:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{F_1}{F_2} \tag{1.1}$$

При этом предполагается, что F_1 и F_2 (а с ними и q_1 и q_2) имеют одинаковые знаки, если эти силы совпадают по направлению, и противоположные знаки, если их направления противоположны.
В атоме электроны вращаются вокруг ядра, состоящего из нейтронов и протонов. Заряд протона положителен, электрона – отрицателен, нейтрона – 0.

Утверждение 1.1.7 (дискретность электрического заряда)**.** *Заряд протона по модулю равен заряду электрона. Заряд электрона является минимально возможным электрическим зарядом, поэтому его называют элементарным зарядом* $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ *Кл (СИ).*

Во многих случаях нет необходимости учитывать дискретность электрического заряда, то есть в математическом описании перейти к непрерывному описанию распределения зарядов. В этом случае можно ввести следующее понятие:

Определение 1.1.8. *Объемная плотность заряда* $\rho(x, y, z)$ – отношение величины заряда Δq, содержащегося в малом объеме ΔV вокруг точки с координатами (x, y, z), к величине этого объема:

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \tag{1.2}$$

По аналогии определяются *поверхностная* и *линейная плотности заряда*:

$$\sigma(x, y, z) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad \lambda(x, y, z) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \tag{1.3}$$

Если в точке $q(x, y, z) \neq 0$, то $\lambda(x, y, z) = \infty$; если в точке $\lambda(x, y, z) \neq 0$, то $\sigma(x, y, z) = \infty$; если в точке $\sigma(x, y, z) \neq 0$, то $\rho(x, y, z) = \infty$.

Теорема 1.1.9. *Заряд тела не зависит от (инвариантен относительно) инерциальной системы отсчёта, в которой он измеряется.*

Доказательство. Следует непосредственно из принципа относительности и определения отношения зарядов (через силы). □

Определение 1.1.10. Сила, действующая на единичный неподвижный пробный электрический заряд, называется *напряжённостью* электрического поля.
Обозначение: $\vec{E}$. В СИ: $[E] = 1\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

Сила $\vec{F}$, действующая на неподвижный точечный заряд q:

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{1.4}$$

Утверждение 1.1.11 (закон сохранения электрического заряда)**.** *Полный заряд системы не может измениться, если через её границу не проходят электрически заряженные частицы.*

Как найти силу, действующую на заряд, расположенный в поле другого заряда? Ответ даёт закон Кулона.

Утверждение 1.1.12 (закон Кулона)**.** *Сила взаимодействия $\vec{F}$ двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна этим величинам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r_{12} (соответствующий вектор $\vec{r}_{12}$ проведён из заряда q_1 к заряду q_2). Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковые.*

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \tag{1.5}$$

Упражнение 1.1.1. Сравните с аналогичным законом для гравитации (законом всемирного тяготения Ньютона).

В системе СИ: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$, где ε_0 – электрическая постоянная.
В гауссовой системе (СГСЭ): $k = 1$.
Таким образом, можно найти напряжённость поля, создаваемого зарядом q в точке с радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r} \tag{1.6}$$

Задача 1.1.2. Два одинаково заряженных шарика массы m, подвешенных в одной точке на нитях длины l, разошлись так, что угол между нитями α. Определите заряд шариков.

Ответ. $q = 4l \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg \tan\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 1.1.3. * Какой минимальный заряд q нужно закрепить в нижней точке сферической полости радиуса R, чтобы в поле тяжести небольшой шарик массы m и заряда Q находился в верхней точке полости в положении

а. равновесия;

б. устойчивого равновесия.

Ответ. а. $q = \frac{16\pi\varepsilon_0 mgR^2}{Q}$, б. $q = \frac{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}{Q}$.
Если поле создают несколько зарядов (их число может быть бесконечным), то справедлив принцип суперпозиции:

Утверждение 1.1.13. *Напряжённость электрического поля $\vec{E}$ нескольких неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, ... равна векторной сумме напряжённости полей, которые создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствие остальных:*

$$\vec{E} = k\sum_i \frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i \tag{1.7}$$

где $\vec{r}_i$ – вектор, проведённый из заряда q_i в точку наблюдения.

В случае непрерывного распределения зарядов формула преобразуется к виду:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} d^3\vec{r}\,' \tag{1.8}$$

где интегрирование проводится по всему пространству V', в котором $\rho(\vec{r}\,')$ отлично от нуля.

Задача 1.1.4. Вычислить напряжённость электрического поля равномерно заряженного кольца с зарядом Q на его оси.

Ответ. $E_x = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Задача 1.1.5. * Вычислить напряжённость электрического поля равномерно заряженного диска с радиусом R на расстоянии $\vec{r}$ от центра (на его геометрической оси). Поверхностная плотность заряда σ. Рассмотреть предельные случаи: $r \ll R$ и $r \gg R$.

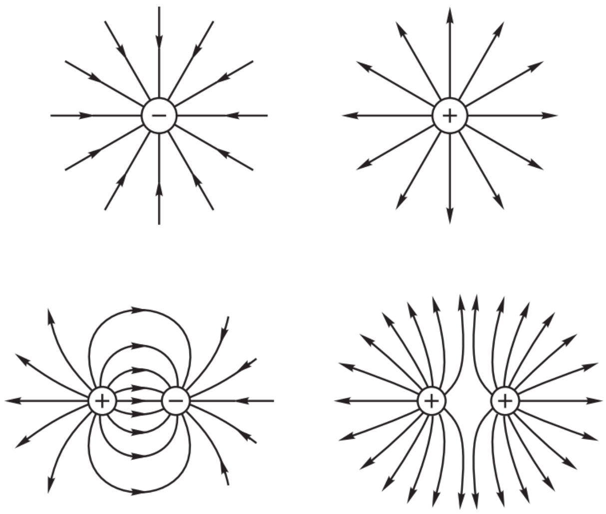

Рис. 1.1: Силовые линии

Ответ. $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}\right)\vec{i}$, где $\vec{i} = \frac{\vec{r}}{r}$. $\vec{E}(r \ll R) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$, $\vec{E}(r \gg R) = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{i}$.

Для наглядного изображения электрических полей используются силовые линии.

Определение 1.1.14. *Силовая линия* – линия, направление касательной которой в каждой точке, через которую линия проходит, совпадает с направлением вектора $\vec{E}$ в этой точке.

Положительное направление силовой линии – направление $\vec{E}$. При таком соглашении силовые линии начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. Примеры силовых линий представлены на рис. 1.1.

Свойства силовых линий:

- Силовые линии электрического поля не пересекаются. Они начинаются на положительных зарядах или на бесконечности и заканчиваются на отрицательных зарядах или на бесконечности.

- Густота силовых линий электрического поля пропорциональная напряженности E электрического поля (теорема 1.1.25).

- Силовые линии электростатического поля незамкнуты (теорема 1.1.31).

Простейшей системой точечных зарядов является электрический диполь.

Определение 1.1.15. *Электрический диполь* – совокупность равных по величине, но противоположных по знаку двух точечных зарядов (q и $-q$), сдвинутых друг относительно друга на радиус-вектор $\vec{l}$, проведённый от отрицательного заряда к положительному.
Если длина l пренебрежимо мала в сравнении с расстоянием от диполя до точки наблюдения, то диполь называется *точечным*.

Определение 1.1.16. Вектор $\vec{p} = q\vec{l}$ называется *электрическим моментом диполя (дипольным моментом)*.

Найдём поле $\vec{E}$, создаваемое диполем с моментом $\vec{p}$ в точке A с радиус-вектором $\vec{r}$. Для этого сначала рассмотрим два частных случая:

1. Точка A лежит на продолжении оси диполя. Напряжённость электрического поля в этой точке будет

$$E_{\|} = kq\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = kq\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right)(r_2 - r_1) = \frac{2kql}{r^3} = \frac{2kp}{r^3} \tag{1.9}$$

   В векторной форме:

$$\vec{E}_{\|} = \frac{2k\vec{p}}{r^3} \tag{1.10}$$

2. Точка B лежит на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его центра O. Напряжённость электрического поля в этой точке будет

$$E_{\perp} = E_1\alpha = k\frac{q}{r^2}\frac{l}{r} = k\frac{p}{r^3} \tag{1.11}$$

   В векторной форме:

$$\vec{E}_{\perp} = -\frac{k\vec{p}}{r^3} \tag{1.12}$$

Теперь рассмотрим общий случай.
I способ. Закон Кулона и принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = kq\left(\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right) = kq\left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r_2^3} + \frac{\vec{r}_1}{r_2^3} + \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right) \tag{1.13}$$

Подставим $\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и учтём, что $\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2 \approx \vec{r}$ и $r_1 - r_2 = l\cos\theta$:

$$\vec{E} = kq\left(-\frac{\vec{l}}{r_2^3} + \frac{(r_1 - r_2)(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)}{r_1^3 r_2^3}\vec{r}_1\right) = k\left(3\frac{p\cos\theta}{r^4}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right) \tag{1.14}$$

$$\boxed{\vec{E} = k\left(\frac{3(\vec{p}, \vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)} \tag{1.15}$$

II способ. Можно воспользоваться частными случаями. Выразим дипольный момент $\vec{p}$ как сумму параллельного $\vec{p}_{\parallel}$ и перпендикулярного $\vec{p}_{\perp}$ дипольных моментов.

$$\vec{E} = \frac{k}{r^3}(2\vec{p}_{\parallel} - \vec{p}_{\perp}), \quad \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp} = \vec{p} \tag{1.16}$$

$$\vec{E} = \frac{k}{r^3}(3\vec{p}_{\parallel} - \vec{p}) \tag{1.17}$$

$$\vec{p}_{\parallel} = \frac{(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^2} \tag{1.18}$$

$$\boxed{\vec{E} = k\left(\frac{3(\vec{p}, \vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)} \tag{1.19}$$

Задача 1.1.6. * Найти форму силовой линии точечного диполя $\vec{p}$, расположенного в начале полярных координат $r(\theta)$.

Ответ. $r = r_0 \sin^2\theta$.

Пусть диполь $\vec{p}$ помещён во внешнее однородное электрическое поле $\vec{E}$. Полная сила: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$. Момент пары этих сил $\vec{M} = q[\vec{l}, \vec{E}]$:

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]} \tag{1.20}$$

Чтобы увеличить угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{E}$ на $d\alpha$, нужно совершить работу δA против сил, действующих на диполь в электрическом поле:

$$\delta A = M d\alpha = pE\sin\alpha d\alpha \tag{1.21}$$

$$W = \int pE\sin\alpha d\alpha = -pE\cos\alpha + C \tag{1.22}$$

Константу интегрирования полагаем равной $C = 0$ (потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной).

$$\boxed{W = -(\vec{p}, \vec{E})} \tag{1.23}$$

Задача 1.1.7. Найти энергию взаимодействия двух диполей $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$.

Ответ. $W = k\left(\frac{(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{r^3} - \frac{3(\vec{p}_1, \vec{r})(\vec{p}_2, \vec{r})}{r^5}\right)$.

Если поле неоднородно, то $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq \vec{0}$. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = qd\vec{E}$

$$d\vec{E} = l_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + l_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + l_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z} \tag{1.24}$$

$$\vec{F} = p_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z} \tag{1.25}$$

Определение 1.1.17. *Оператор Гамильтона (набла)*:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z} \tag{1.26}$$

Введём оператор $(\vec{p}\,\nabla)$:

$$(\vec{p}\,\nabla) = p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.27}$$

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p}\,\nabla)\vec{E}} \tag{1.28}$$

Если $p_x = p,\ p_y = p_z = 0$, то $\vec{F} = p\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$.

Задача 1.1.8. Найти силу взаимодействия $\vec{F}$ между точечным зарядом q и точечным диполем $\vec{p}$, если расстояние между ними $\vec{r}$ (вектор направлен от заряда к диполю) и $\vec{p} \parallel \vec{r}$.

Ответ. $\vec{F} = -k\frac{2qp}{r^3}\vec{i}$, где $\vec{i} = \frac{(\vec{p},\vec{r})}{pr^2}\vec{r}$.

Задача 1.1.9. Найти силу взаимодействия $\vec{F}$ двух точечных диполей $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, дипольные моменты которых направлены вдоль соединяющей их прямой, а расстояние между ними $\vec{r}$ ($\vec{r}$ направлен от диполя $\vec{p}_1$ к диполю $\vec{p}_2$).

Ответ. $\vec{F} = -k\frac{6(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{r^4}\vec{i}$, где $\vec{i} = \frac{\vec{r}}{r}$.

Задача 1.1.10. Найти силу взаимодействия $\vec{F}$ двух точечных диполей $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, дипольные моменты которых направлены перпендикулярно соединяющей их прямой, а расстояние между ними $\vec{r}$ ($\vec{r}$ направлен от диполя $\vec{p}_1$ к диполю $\vec{p}_2$).

Ответ. $\vec{F} = k\frac{3(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{r^4}\vec{i}$, где $\vec{i} = \frac{\vec{r}}{r}$.

Любая система с зарядом $Q \neq 0$, занимающая небольшой объём, в первом приближении ведёт себя как точечный заряд Q.

Определение 1.1.18. Система точечных зарядов называется *нейтральной*, если её заряд равен 0.

Теорема 1.1.19. *Любая нейтральная система точечных зарядов, занимающая небольшой объём, в первом приближении ведёт себя как точечный диполь.*

Доказательство. Разделим мысленно заряды системы на более мелкие части так, чтобы каждому заряду соответствовал равный заряд противоположного знака. Сгруппировав такие заряды попарно, можно рассматривать нашу систему как систему диполей $\vec{p}_i$. При вычислении поля на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы, такие

диполи можно считать точечными. Их можно перенести в одну точку и векторно сложить в один точечный диполь с дипольным моментом $\vec{p} = \sum\limits_i \vec{p}_i = \sum\limits_i q_i^+ \vec{l}_i = \sum\limits_i q_i^+ (\vec{r}_i^{\,+} - \vec{r}_i^{\,-}) = \sum\limits_i (q_i^+ \vec{r}_i^{\,+} + q_i^- \vec{r}_i^{\,-})$
где q_i^+, r_i^+, q_i^-, r_i^- – величины положительных и отрицательных зарядов и их радиус-векторы соответственно.
Теперь можно снова соединить мысленно разделённые заряды и вернуться к первоначальной системе. Тогда

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i \tag{1.29}$$

где суммирование проводится по всем зарядам первоначальной системы.
Рассмотрим величину этой суммы при переходе в другую систему координат: $\vec{r}_i\,' = \vec{r}_i + \vec{a}$, где $\vec{a}$ – вектор. $\vec{p}\,' = \sum\limits_i q_i \vec{r}_i\,' = \sum\limits_i q_i \vec{r}_i + \vec{a} \sum\limits_i q_i$.
Последнее слагаемое 0, т.к. система электрически нейтральна, поэтому $\vec{p}\,' = \vec{p}$. □

Вот почему важно изучать свойства диполей. Если дипольный момент системы оказывается равным нулю, то система в первом приближении будет вести себя как *квадруполь*.

Определение 1.1.20. *Квадруполь* – совокупность двух одинаковых диполей с равными по величине и противоположными по направлению дипольными моментами, расположенных на некотором расстоянии друг от друга.

Далее можно продолжать по аналогии, любая система в первом приближении ведёт себя как некоторый *мультиполь*. Поле любой системы можно разложить по полям мультиполей. Это называется *мультипольным разложением*.

Литература и задачи к 1.1.1

1. Слободянюк А.И. Физика для любознательных. Электростатика. Постоянный электрический ток. 2015. §1, 2.1-2.4.

2. David J. Morin. Electricity and magnetism. 2013. 1.1-1.4, 1.7-1.8

3. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Том 3. Электричество. 2016. §1-4.

4. Савченко О.Я. Задачи по физике. 2008. §6.1

1.1.2 Поток напряжённости электрического поля. Теорема Гаусса

Первоначально понятие потока вектора было введено в гидродинамике. Возьмём в поле скоростей жидкости малую площадку dS. Пусть α – угол между вектором $\vec{v}$ и нормалью $\vec{n}$ к площадке dS. Объём жидкости, протекающей через эту площадку за время dt, равен $dV = vdS\cos\alpha dt$. Введём вектор $d\vec{S} = dS\vec{n}$. Тогда $\frac{dV}{dt} = (\vec{v}, d\vec{S})$. Единичный вектор $\vec{n}$ может быть проведён в двух направлениях. Одно из них принимается за положительное, в этом направлении и проводится $\vec{n}$.

Определение 1.1.21. Сторона площадки, из которой исходит нормаль $\vec{n}$, называется *внешней*, а та, в которую входит, – *внутренней.*

Определение 1.1.22. *Потоком вектора $\vec{v}$ через бесконечно малую площадку dS* называется величина $d\Phi = (\vec{v}, d\vec{S})$, *потоком вектора через конечную площадку S –* $\Phi = \int(\vec{v}, d\vec{S})$.
Поток вектора напряжённости $\vec{E}$: $\Phi = \int(\vec{E}, d\vec{S})$.

Теорема 1.1.23 (принцип суперпозиции для потоков)**.** *Потоки векторов $\vec{E}_i$ через одну и ту же поверхность складываются арифметически:*

$$\Phi = \sum_i \Phi_i \tag{1.30}$$

Доказательство. Вектор $\vec{E}$ представляется геометрической суммой: $\vec{E} = \sum\limits_i \vec{E}_i$. Домножим это равенство скалярно на $d\vec{S}$ и проинтегрировав, получим требуемое (Φ_i – потоки векторов $\vec{E}_i$ через ту же поверхность). □

Теорема 1.1.24 (электростатическая теорема Гаусса в интегральной форме)**.** *Поток вектора напряжённости через произвольную замкнутую поверхность:*

$$\boxed{\Phi \equiv \oint(\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \tag{1.31}$$

где Q – алгебраическая сумма всех зарядов, находящихся внутри этой поверхности.

Доказательство. Пусть заряды находятся в замкнутой поверхности S. Возьмём произвольную элементарную площадку dS с установленным на ней положительным направлением нормали $\vec{n}$. Поток вектора $\vec{E}$, создаваемого зарядом q, через эту площадку будет

$$d\Phi = (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{qdS_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qd\Omega}{4\pi\varepsilon_0} \tag{1.32}$$

где dS_r – проекция $d\vec{S}$ на плоскость, перпендикулярную к радиусу $\vec{r}$. Условимся считать телесный угол $d\Omega$ положительным, если площадка обращена к q внутренней стороной, и отрицательным в противоположном случае. Рассмотрим 2 случая.
Случай 1. Заряд q лежит внутри пространства, окружённого поверхностью S. Прямая, исходящая из q, пересекает поверхность S нечётное число раз. Нечётное число пересечений при вычислении потока сводится к одному пересечению. Поток вектора $\vec{E}$:

$$\Phi = \oint\limits_S \frac{q d\Omega}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1.33}$$

Случай 2. Заряд q лежит вне пространства, окружённого поверхностью S. В этом случае прямая, исходящая из q, пересекает поверхность S чётное число раз. Поэтому полный телесный угол, а с ним и поток равны 0. Если зарядов несколько, то можно воспользоваться принципом суперпозиции для потоков. Заряды q_i, находящиеся внутри пространства, внесут вклад в поток $\frac{q_i}{\varepsilon_0}$; заряды q_j, находящиеся вне пространства вклада не внесут. □

Теорема 1.1.25. *Густота силовых линий пропорциональна напряжённости электрического поля.*

Доказательство. Возьмём какой-либо произвольный замкнутый контур L и через каждую его точку проведём электрическую силовую линию. Эти линии образуют трубчатую поверхность – *силовую трубку.* Рассмотрим произвольное поперечное сечение трубки поверхностью S. Положительную нормаль к S проведём в ту же сторону, в какую направлены силовые линии. Пусть Φ – поток вектора $\vec{E}$ через сечение S. Возьмём другое поперечное сечение S'. Найдём поток Φ' через него. Рассмотрим замкнутую поверхность, ограниченную сечениями S и S' и боковой поверхности трубки. Поток через боковую поверхность равен нулю, т.к. на поверхности трубки вектор $\vec{E}$ касается этой поверхности. Поток через поверхность S' равен $-\Phi'$, т.к. внешняя нормаль к замкнутой поверхности направлена противоположно $\vec{S}'$. Полный поток через рассматриваемую поверхность $\Phi - \Phi'$. По теореме Гаусса этот поток равен нулю, т.к. внутри силовой трубки нет электрических зарядов. Таким образом, $\Phi' = \Phi$. В частности, если трубка бесконечно узкая, а сечения S и S' нормальны к ней, то $ES = E'S'$. В тех местах, где трубка уже, поле $\vec{E}$ сильнее, где трубка шире – поле слабее. □

Теорема Гаусса – следствие закона Кулона. Последний по своей форме не отличается от закона всемирного тяготения Ньютона. Поэтому теорема Гаусса справедлива также для гравитационных полей. Роль заряда играет масса. Различие состоит только в том, что электрические заряды могут быть и положительными и отрицательными, тогда как массы всегда положительны.

Упражнение 1.1.11. Как будет выглядеть теорема Гаусса для гравитационного поля?

Для расчёта электрических полей произвольной системы зарядов теоремы Гаусса недостаточно, т.к. это скалярное соотношение. А одного скалярного уравнения мало для определения трёх неизвестных – составляющих E_x, E_y, E_z вектора $\vec{E}$. Необходима известная симметрия задачи, чтобы последняя свелась к решению одного скалярного уравнения.
Найдём напряжённость поля $\vec{E}$ в конкретных примерах:

1. *Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.*
   Поверхностная плотность заряда σ. Ввиду симметрии $\vec{E}$ должен быть перпендикулярен к этой плоскости. Поверхность – цилиндр с площадью сечения S, ось которого перпендикулярна плоскости.
   $$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \to \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \tag{1.34}$$

2. *Поле двух параллельных разноимённо и равномерно заряженных плоскостей.*
   Между плоскостями направления полей совпадают, и при их сложении получается поле
   $$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \tag{1.35}$$
   Во внешнем пространстве направления полей противоположны, результирующее поле равно 0.
   Т.е. всё поле концентрируется между пластинками. Это используется в плоских конденсаторах. Однако в мире не существует бесконечных пластин. В центре конденсатора поле такое же, а вот по краям поле искривляется. Это приводит к *краевым эффектам*, при очень малом расстоянии между пластинами ими можно пренебречь.

   Задача 1.1.12. Найти напряжённость в краевой точке между двумя разноимёнными плоскостями (поверхностная плотность заряда σ), силовая линия в которой отклонена от силовой линии в центре на угол α.

   Ответ. $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \cos\alpha}$.

3. *Поле бесконечной равномерно заряженной плоскопараллельной пластины.*
Пусть a – толщина пластинки, ρ – объёмная плотность заряда внутри пластинки. Начало координат O поместим в средней плоскости пластинки, а ось x направим перпендикулярно к ней. Рассуждая, как в предыдущей задаче, получим внутри пластинки

$$ES = \frac{\rho S x}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}} \tag{1.36}$$

Вне пластинки

$$\boxed{E = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}} \tag{1.37}$$

Будем уменьшать толщину пластинки, одновременно увеличивая плотность заряда ρ, чтобы величина ρa оставалась постоянной. В пределе получится бесконечная равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \rho a$, а формула (27) перейдёт в формулу (23).

4. *Поле равномерно заряженной сферы и шара.*
Поле вне шара (сферы). Ввиду шаровой симметрии вектор $\vec{E}$ параллелен или антипараллелелен радиус-вектору $\vec{r}$, проведённому из центра шара в точку наблюдения, а его длина может зависеть только от расстояния r. Проведём вне шара концентрическую с ним сферу радиуса r.

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \tag{1.38}$$

Результат не зависит от того, заряжен ли шар по объёму или по поверхности (как сфера).
Совершенно так же вычисляется поле внутри равномерно заряженного шара с плотностью ρ. Проведём внутри шара концентрическую с ним сферу радиуса r.

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}} \tag{1.39}$$

Внутри сферы зарядов нет, поэтому там поле $E = 0$.

5. *Поле равномерно заряженной бесконечной нити и бесконечно длинного цилиндра.*

Поле бесконечной равномерно заряженной прямой линии с линейной плотностью λ направлено радиально – к линии или от неё (в зависимости от знака λ). Проведём цилиндр радиуса r и длины l, ось которого совпадает с нитью.

$$E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \to \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}} \tag{1.40}$$

Той же формулой определяется поле бесконечно длинного кругового цилиндра, равномерно заряженного по объёму или по поверхности, если точка наблюдения находится вне цилиндра. Пусть цилиндр равномерно заряжен по объёму с плотностью ρ. Проведём концентрический цилиндр радиуса r внутри исходного цилиндра.

$$E2\pi rl = \frac{\rho\pi r^2 l}{\varepsilon_0} \to \boxed{E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}} \tag{1.41}$$

Если цилиндр полый и равномерно заряжен по поверхности, то поле внутри него $E = 0$.

Задача 1.1.13. Вычислить напряжённость электрического поля равномерно заряженного кольца с зарядом Q в его плоскости.

Ответ. $E_y = -\frac{Qy}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$.

Задача 1.1.14. Дан равномерно заряженный правильный многогранник с длиной ребра равной a, составленный из m тонких одинаковых пластин (граней), толщина которых пренебрежимо мала по сравнению с размером a. Полный заряд многогранника Q. Найти силу F электростатического отталкивания и давление P, действующие на каждую пластинку, рассмотреть все случаи возможных правильных многогранников. Предельным переходом перейти к сфере и получить давление $P_{\text{сф}}$, действующее на её точки.

Ответ. $F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 m^2 S_m}$, $P = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 m^2 S_m^2}$, где S_m – площадь грани правильного многогранника ($S_{4,8,20} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, $S_6 = a^2$, $S_{12} = \frac{5a^2\cos\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}$), $P_{\text{сф}} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}$.

Задача 1.1.15. Равномерно заряженная сфера радиуса R разрезана на две части по плоскости, отстоящей на расстоянии h от центра сферы. Найдите силу, с которой отталкиваются друг от друга эти части. Полный заряд сферы Q. Какой минимальный заряд нужно поместить в центр сферы, чтобы ее части не разлетались?

Ответ. $F = \frac{Q^2(R^2-h^2)}{32\pi\varepsilon_0 R^4}$, $q = -\frac{Q}{2}$.

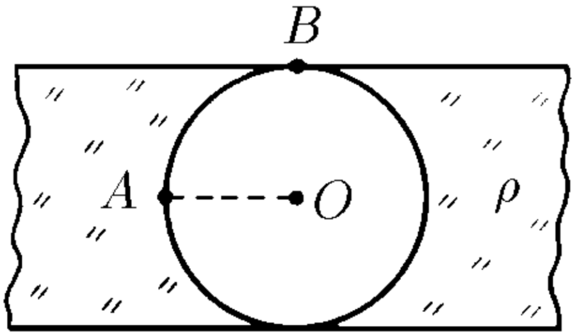

Рис. 1.2: К задаче 1.1.16

Задача 1.1.16. В равномерно заряженной бесконечной пластине вырезали сферическую полость (см. рис. 1.2). Толщина пластины h, объемная плотность заряда ρ. Чему равна напряженность электрического поля в точке A? В точке B? Найдите зависимость напряженности электрического поля вдоль прямой OA от расстояния до точки O.

Ответ. $E_A = \frac{\rho h}{6\varepsilon_0}$, $E_B = \frac{\rho h}{3\varepsilon_0}, E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$.

Задача 1.1.17. В равномерно заряженном шаре с центром O вырезали сферическую полость, центр которой находится в точке O'. Пусть $\vec{r} = \vec{OO'}$, объемная плотность заряда ρ. Найдите напряженность электрического поля в полости.

Ответ. $\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$.

Задача 1.1.18. Задача состоит из двух пунктов:

а. При пересечении двух шаров радиуса R, центры которых находятся на расстоянии l друг от друга, образуются два «полумесяца», равномерно заряженные разноименными электрическими зарядами. Объемная плотность электрического заряда слева $-\rho$, справа ρ. Найдите напряженность поля в области пересечения шаров.

б. Используя результаты предыдущего пункта и применяя метод предельного перехода: $l \to 0$, $\rho \to \infty$, $l\rho = const$, найдите распределение заряда на сфере радиуса R, которое даст внутри сферы однородное электрическое поле напряженности E. Как связана с напряженностью поля максимальная поверхностная плотность заряда?

Ответ. а. $E = \frac{\rho l}{3\varepsilon_0}$, б. $\sigma = 3\varepsilon_0 E \cos\alpha$, $\sigma_{\text{макс}} = 3\varepsilon_0 E$.

Придадим теперь теореме Гаусса *дифференциальную форму*. Будем предполагать, что объёмная плотность заряда ρ является непрерывной функцией пространственных координат.
Возьмём в пространстве бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz, параллельными координатным осям ПДСК. Полный поток поля через всю поверхность параллелепипеда

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dxdydx \tag{1.42}$$

$$d\Phi = \mathrm{div}\vec{E}\; dV \tag{1.43}$$

Из теоремы Гаусса

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \tag{1.44}$$

Эта формула и выражает электростатическую теорему Гаусса в дифференциальной форме.

Теорема 1.1.26. *Интегральная и дифференциальная формы теоремы Гаусса полностью эквивалентны.*

Доказательство. Теорема Гаусса в дифференциальной форме (1.44) является следствием интегральной формы (1.31). Обращая порядок рассуждений, можно получить интегральную. Математически обе формы эквивалентны. Дифференциальная теорема имеет смысл лишь в тех случаях, когда ρ конечно. Однако разрывные распределения заряда с бесконечно большими ρ являются математическими абстракциями и в физике должны рассматриваться как предельные случаи непрерывных распределений со всюду конечными ρ. Если это иметь в виду, то утверждение доказано. □

Упражнение 1.1.19. Получить формулы (1.36)-(1.41), пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме.

Приравняем потоки из формул (1.31) и (1.43):

$$\boxed{\oint\limits_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \int\limits_V \mathrm{div}\vec{E} dV} \tag{1.45}$$

Данная формула справедлива для любого непрерывно-дифференцируемого векторного поля и называется *формулой Гаусса-Остроградского*.

Теорема 1.1.27 (теорема Ирншоу)**.** *Всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных зарядов электрических зарядов неустойчива, если на них, кроме кулоновских сил, никакие другие силы не действуют.*

Доказательство. Докажем от противного: предположим, что существует такая система в устойчивом равновесии. Рассмотрим произвольный заряд q этой системы, находящийся в равновесии в положении A. Без ограничения общности, предположим, что q положителен. Если заряд сместится в бесконечно близкую точку A', то ввиду предположенной устойчивости равновесия должна возникнуть сила, направленная к точке A. Пусть $\vec{E}$ – электрическое поле, создаваемое всеми зарядами, кроме заряда q. В точке A' оно должно быть направлено к A, каково бы ни было направление AA'. Окружим заряд произвольной замкнутой поверхностью S и притом такой, чтобы все прочие заряды были расположены вно внешнем пространстве по отношению к этой поверхности. На поверхности S поле $\vec{E}$ направлено к точке A, поэтому поток вектора $\vec{E}$ отрицателен. Но по теореме Гаусса поток должен быть равен 0, поскольку создаётся зарядами, расположенными вне S. Противоречие. □

Утверждение 1.1.28. *Теорема Гаусса верна не только в электростатике, но и в электродинамике.*

Поэтому теорема Гаусса возводится в ранг основных постулатов электродинамики и является *первым уравнением Максвелла.*

Литература и задачи к 1.1.2

1. Слободянюк А.И. Физика для любознательных. Электростатика. Постоянный электрический ток. 2015. 2.5-2.7.

2. David J. Morin. Electricity and magnetism. 2013. 1.9-1.13

3. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Том 3. Электричество. 2016. §5-9.

4. Савченко О.Я. Задачи по физике. 2008. §6.2

1.1.3 Потенциальная энергия взаимодействия электрического заряда с электрическим полем. Электрический потенциал

Теорема 1.1.29. *Электростатическое поле точечного заряда является потенциальным.*

Доказательство. Неподвижный точечный заряд Q возбуждает в вакууме электрическое поле $\vec{E} = \frac{Q}{r^3}\vec{r}$. Пусть в этом поле перемещается другой точечный заряд q, переходя из начального положения 1 в конечное положение 2 вдоль произвольной кривой 12. Работа, совершаемая силами поля при таком перемещении, выражается криволинейным интегралом:

$$A_{12} = \int\limits_{12} q(\vec{E}, d\vec{r}) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{12} \frac{\vec{r}d\vec{r}}{r^3} \tag{1.46}$$

Но $\vec{r}d\vec{r} = rdr$ (из дифференцирования тождества $(\vec{r})^2 = r^2$). Поэтому криволинейный интеграл сводится к определённому:

$$A_{12} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{1.47}$$

Таким образом, при любом выборе начальной и конечной точек 1 и 2 работа A_{12} не зависит от формы пути, а определяется только положениями этих точек.
Доказанное справедливо для электрического поля любой системы неподвижных точечных зарядов. Это следует из принципа суперпозиции электрических полей и из теоремы механики, согласно которой работа результирующей силы равна сумме работ составляющих сил. □

Допустим, что в электростатическом поле заряд переносится из точки 1 в точку 2 сначала по пути 132, затем – по 142. В обоих случаях работы сил поля одинаковы: $A_{132} = A_{142}$. Если заряд переносится по замкнутому пути 13241, то на участке 241 работа изменит знак: $A_{241} = -A_{142}$, а потому $A_{132} + A_{241} = A_{13241} = 0$. Значит, при перемещении заряда по любому замкнутому пути работа в электростатическом поле равна 0. Таким образом, для любого контура

$$\boxed{\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0} \tag{1.48}$$

Такой интеграл называется *циркуляцией вектора* $\vec{E}$ по замкнутому контуру. Это приводит к другому определению потенциальности поля.

Определение 1.1.30. Векторное поле $\vec{E}$ называется *потенциальным*, если циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру равна 0.

Теорема 1.1.31. *Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми.*

Доказательство. Докажем от противного: пусть линия замкнута. Возьмём её в качестве контура интегрирования C. При обходе этого контура в положительном направлении силовой линии подынтегральное выражение, а с ним и интеграл $\oint(\vec{E}, d\vec{l})$ положительны. Это противоречит (1.48). □

Докажем более сильное утверждение.

Определение 1.1.32. *Квазизамкнутыми линями* называются линии, которые, выйдя из любой точки A, извивается и возвращается в сколь угодно малую окрестность той же точки, никогда не проходя точно через A.

Теорема 1.1.33. *Невозможны также квазизамкнутые линии потенциального поля.*

Доказательство. Докажем от противного: пусть A и B – бесконечно близкие точки, через которые проходит силовая линия. Замкнём её бесконечно малым отрезком, соединяющим эти точки. Т.к. интеграл $\int(\vec{E}, d\vec{l})$ вдоль этого отрезка также бесконечно мал, то для циркуляции $\oint(\vec{E}, d\vec{l})$ вдоль образовавшегося замкнутого контура получилась бы величина, отличная от 0. Противоречие. □

Опыт показывает, что уравнение (1.48), а с ним и его следствия, не являются верными в электродинамике, т.е. поле $\vec{E}$ в общем случае непотенциально.
Т.к. электростатическое поле является потенциальным, то для точечного заряда, находящегося в электростатическом поле можно ввести потенциальную энергию взаимодействия $U(r)$:

Определение 1.1.34. Работа электрического поля при перемещения точечного заряда из одной точки в другую равна изменению *потенциальной энергии*, взятому с противоположным знаком:

$$A_{12} = U_1 - U_2 \tag{1.49}$$

Сравнивая (1.47) и (1.49), можно определить выражение для потенциальной энергии электростатического взаимодействия двух точечных зарядов:

$$U(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1.50}$$

Подумайте, как будет выглядеть аналогичная формула в гравитации?
В случае притяжения $U(r) < 0$ (энергия притяжения отрицательна), отталкивания – $U(r) > 0$ (энергия отталкивания положительна).

Определение 1.1.35. *Разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками 1 и 2 называется работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда по произвольному пути из точки 1 в точку 2.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} \tag{1.51}$$

В СИ: $[\varphi] = 1$ В.
Используя определение потенциала и выведенную формулу для потенциальной энергии взаимодействия зарядов, запишем выражение для потенциала электростатического поля, создаваемого точечным зарядом Q:

$$\varphi(r) = \frac{U(r)}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1.52}$$

где r – расстояние от заряда Q до точки, в которой вычисляется потенциал.
Определение 1.1.35 имеет смысл потому, что для потенциальных полей эта работа *не зависит от формы пути*, а определяется только положением его начальной и конечной точек. Потенциалу какой-то произвольной точки O можно приписать любое значение φ_0. Тогда потенциалы всех прочих точек определяется однозначно. Если изменить значение φ_0, то потенциалы во всех других точках на одну и ту же постоянную. Таким образом, *потенциал определён с точностью до аддитивной постоянной.* В качестве точки нулевого потенциала выбирается бесконечность: $\varphi(\infty) = 0$. При таком выборе справедливо следующее определение:

Определение 1.1.36. *Потенциал электростатического поля* равен работе поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки на бесконечность:

$$\varphi(r) = \frac{A_{r\to\infty}}{q} \tag{1.53}$$

Для потенциала справедлив принцип суперпозиции:

Теорема 1.1.37. *Потенциал электрического поля φ нескольких неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, ... равен арифметической сумме потенциалов полей, которые создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствие остальных:*

$$\varphi = \sum_i \varphi_i \tag{1.54}$$

Доказательство. Следует из того, что выполняется принцип суперпозиции для электростатической силы, а значит и работы перемещения заряда из данной точки на бесконечность. □

Найдём потенциал диполя φ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$.

$$\varphi = kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = kq\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \tag{1.55}$$

Учтём, что $\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2 \approx \vec{r}$ и $r_1 - r_2 = l\cos\theta$:

$$\varphi = kq\frac{rl\cos\theta}{r^3} = kq\frac{(\vec{r}, \vec{l})}{r^3} \tag{1.56}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}} \tag{1.57}$$

Задача 1.1.20. Вычислить потенциал электрического поля равномерно заряженного кольца с зарядом Q на его оси.

Ответ. $\varphi(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Найдём связь потенциала с напряжённостью электрического поля.
Пусть 1 и 2 – бесконечно близкие точки, расположенные на оси x, $x_2 - x_1 = dx$. Работа при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 будет $qE_x dx$. Та же работа равна $q(\varphi_1 - \varphi_2) = -qd\varphi$. Приравнивая оба выражения, получим $d\varphi = -E_x dx$. Аналогичное рассуждение применимо для осей y и z. В результате получаются три соотношения:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Их можно объединить в одну векторную формулу:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \tag{1.58}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi = -\mathrm{grad}\ \varphi} \tag{1.59}$$

Упражнение 1.1.21. Получить напряжённость поля диполя через его потенциал $\varphi = \frac{(\vec{p},\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.

Выясним геометрический смысл градиента.

Определение 1.1.38. *Эквипотенциальная поверхность* – такая поверхность, на которой потенциал остаётся постоянным.

Теорема 1.1.39. *Силовые линии нормальны к эквипотенциальным поверхностям.*

Доказательство. Возьмём на эквипотенциальной поверхности произвольную точку O и введём систему координат в этой точке. Ось z направим по нормали $\vec{n}$ к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциала φ. Координатная плоскость xy совместится с касательной плоскостью к эквипотенциальной поверхности. Тогда в точке O: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n} \tag{1.60}$$

Поэтому можно дать следующее определение градиента:

Определение 1.1.40. *Градиент функции* $\varphi(x, y, z)$ – вектор, направленный в сторону максимального возрастания этой функции, а его модуль равен производной функции φ в том же направлении.

Преимущество этого определения состоит в том, что оно носит *инвариантный характер* (никак не связано с выбором какой-либо системы координат).
Вектор $\vec{E}$ направлен противоположно вектору градиента потенциала φ. Таким образом, силовые линии являются линиями, вдоль которых потенциал φ изменяется наиболее быстро. □

Обычно эквипотенциальные поверхности чертят так, чтобы при переходе от одной поверхности к соседней потенциал получал одно и то же приращение $\Delta\varphi$.
Найдём потенциал поля φ в конкретных примерах, интегрируя напряжённость $\vec{E}$ по координате:

1. *Потенциал бесконечной равномерно заряженной плоскости.*
   Поверхностная плотность заряда σ. Потенциал:

   $$\boxed{\varphi = \varphi_0 - \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0},\ x \geq 0} \quad \boxed{\varphi = \varphi_0 + \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0},\ x < 0} \tag{1.61}$$

   где φ_0 – потенциал на плоскости ($x = 0$).

2. *Поле бесконечной равномерно заряженной плоскопараллельной пластины.*
   Пусть a – толщина пластинки, ρ – объёмная плотность заряда внутри пластинки. Начало координат O поместим в средней плоскости пластинки, а ось x направим перпендикулярно к ней. Потенциал внутри пластинки:

   $$\boxed{\varphi = \varphi_0 - \frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0},\ x \geq 0} \quad \boxed{\varphi = \varphi_0 + \frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0},\ x < 0} \tag{1.62}$$

где φ_0 – потенциал в средней плоскости пластинки ($x = 0$). Вне пластинки (учтено, что при $x = \pm\frac{a}{2}$ потенциал должен быть определён однозначно $\varphi = \varphi_0 - \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$):

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 - \frac{\rho a(x - a/4)}{2\varepsilon_0},\ x > \frac{a}{2}} \quad \boxed{\varphi = \varphi_0 + \frac{\rho a(x + 3a/4)}{2\varepsilon_0},\ x < -\frac{a}{2}} \tag{1.63}$$

Будем уменьшать толщину пластинки, одновременно увеличивая плотность заряда ρ, чтобы величина ρa оставалась постоянной. В пределе получится бесконечная равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \rho a$, а формулы (50) перейдёт в формулу (48).

3. *Поле равномерно заряженной сферы и шара.*
   Потенциал вне шара (сферы) (потенциал на бесконечности полагается равным 0):

$$\boxed{\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \tag{1.64}$$

   Результат не зависит от того, заряжен ли шар по объёму или по поверхности (как сфера).
   Потенциал внутри шара:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}} \tag{1.65}$$

   где φ_0 – потенциал в центре шара ($r = 0$).
   Внутри сферы $E = 0$, поэтому внутри сферы $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, где R – её радиус.

4. *Потенциал равномерно заряженной бесконечной нити и бесконечно длинного цилиндра.*

$$\boxed{\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) + \varphi_0} \tag{1.66}$$

   где φ_0 – потенциал точки с $r = r_0$.
   Той же формулой определяется потенциал бесконечно длинного кругового цилиндра, равномерно заряженного по объёму или по поверхности, если точка наблюдения находится вне цилиндра. Потенциал цилиндра, равномерно заряженного по объёму (учтено, что при $r = r_0$ потенциал должен быть определён однозначно $\varphi{=}\varphi_0$):

$$\boxed{\varphi = \frac{\rho(R^2 - r^2)}{4\varepsilon_0} + \varphi_0} \tag{1.67}$$

где φ_0 – потенциал точки с $r = 0$.

Если цилиндр полый и равномерно заряжен по поверхности, то потенциал внутри него $\varphi = \varphi_0$.

Подставим $\vec{E}$ из (1.59) в дифференциальную теорему Гаусса:

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.68}$$

Определение 1.1.41. *Оператор Лапласа (лапласиан)*:

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.69}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \tag{1.70}$$

Такое уравнение называется *уравнением Пуассона*. При $\rho = 0$ оно переходит в *уравнение Лапласа*:

$$\boxed{\Delta\varphi = 0} \tag{1.71}$$

Таким образом, если известна хотя бы одна из зависимостей $\rho(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ или $\varphi(\vec{r})$, то сразу известны две остальные (см. табл. 1.1).

Знаем	Находим
$\rho(\vec{r})$	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\vert\vec{r}-\vec{r}\,'\vert^3}dV'$
	$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\vert\vec{r}-\vec{r}\,'\vert}dV'$
$\vec{E}(\vec{r})$	$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E}$
	$\varphi(\vec{r}) = -\int(\vec{E}, d\vec{r}) + C$
$\varphi(\vec{r})$	$\rho(\vec{r}) = -\varepsilon_0\Delta\varphi$
	$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$

Таблица 1.1: Связь между $\rho(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ и $\varphi(\vec{r})$

Общая электростатическая задача сводится к решению дифференциального уравнения Пуассона (или Лапласа), удовлетворяющего некоторым граничным условиям. Такая задача не может иметь более одного решения, это утверждает *теорема единственности*. Формулировка и «физический» способ доказательства приведены в теореме 1.4.1. Т.е. если удалось угадать функцию φ, удовлетворяющую всем условиям задачи, то она и будет её искомым (единственным) решением.

1.1.4 * Решение уравнения Пуассона

Поговорим о том, какими способами всё же можно решать уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.72}$$

1.2 Электрическое поле в веществе

1.2.1 Проводники. Метод изображений для проводников

Определение 1.2.1. *Проводники* – вещества, в которых есть большое количество свободных носителей заряда, значит они способны проводить *электрический ток.*

Понятие электрического тока будет дано позднее.
Типичными представителями проводников являются металлы. Внутренняя структура металлов представляет собой кристаллическую решетку, образованную положительно заряженными ионами. Электроны атомов металлов, находящиеся на внешних электронных оболочках, слабо связаны с ядром. При образовании кристалла они отрываются от своего атома и могут свободно передвигаться по объему всего кристалла, образуя своеобразное облако свободных электронов. Суммарный электрический заряд проводника остается равным нулю, электрическое поле облака свободных электронов компенсируется полем положительных ионов кристаллической решетки.
Проводниками также являются растворы солей, кислот, щелочей. При попадании этих молекул в жидкую среду они распадаются (диссоциируют) на ионы, способные перемещаться по объему раствора и тем самым проводить электрический ток.
При помещении проводника в электрическое поле $\vec{E}_0$ на свободные электроны действуют электрические силы, под действием которых электроны приходят в движение. Электроны скапливаются на одной стороне проводника, с другой стороны проводника образуется недостаток электронов, поэтому положительный заряд ионов решетки оказывается нескомпенсированным. Таким образом, на поверхности проводника появляются электрические заряды, при этом суммарный заряд проводника остается неизменным.

Определение 1.2.2. Явление возникновения электрических зарядов на проводнике под воздействием электрического поля называется *электростатической индукцией*, а возникшие заряды – *индуцированными.*

Теорема 1.2.3. *Напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю:* $\vec{E} = \vec{0}$.

Доказательство. Если бы внутри однородного проводника существовало макроскопическое электрическое поле, то оно бы привело в движение свободные электроны. В проводнике возник бы электрический ток, и равновесие заряда было бы невозможно. □

Теорема 1.2.4. *Все точки проводника имеют одинаковые потенциалы* $\varphi = const$.

Доказательство. Т.к. напряжённость электрического поля во всех точках равна 0, то из связи напряжённости и потенциала получаем, что φ постоянен. □

Теорема 1.2.5. *В состоянии равновесия все заряды располагаются только на поверхности проводника, объемная плотность электрического заряда внутри проводника равна нулю.*

Доказательство. В проводнике $\vec{E} = 0$, значит и $\text{div}\vec{E} = 0$. Из дифференциальной формы теоремы Гаусса: $\rho = \varepsilon_0 \,\text{div}\vec{E} = 0$. □

Задача 1.2.1. Незаряженный проводящий шар вносится в электрическое поле с известным распределением потенциала $\varphi(\vec{r})$. Каким будет потенциал шара?

Ответ. $\varphi = \varphi(\vec{r}_0)$.

Задача 1.2.2. Точечный заряд q расположен на расстоянии r от центра проводящей незаряженной сферы радиуса R. Найдите потенциал сферы, если $r < R$.

Ответ. $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

Теорема 1.2.6. *У поверхности проводника вектор напряженности электрического поля направлен перпендикулярно поверхности проводника.*

Доказательство. Докажем от противного. Тогда под действием касательной составляющей поля $\vec{E}$ заряды пришли бы в движение по поверхности проводника, т.е. равновесия бы не было.
Также это следует из того, что силовые линии нормальны к эквипотенциальным поверхностям. □

Таким образом, силовые линии нормальны к поверхности проводника и оканчиваются (или начинаются) на ней, не проникая внутрь проводника.

Найдём напряжённость электрического поля вблизи поверхности проводника. Для начала рассмотрим какую-то заряженную поверхность S (необязательно проводящую). Полупространство по одну сторону этой поверхности обозначим индексом 1, а по другую – индексом 2. Поверхностная плотность заряда σ может меняться вдоль поверхности S произвольно. Возьмём бесконечно малый цилиндр, основания которого расположены по разные стороны от S. Высота цилиндра должна быть бесконечно мала по сравнению с линейными размерами его оснований. Если площадь основания ΔS, то внутри цилиндра находится заряд $q = \sigma\Delta S$. Сумма потоков вектора $\vec{E}$ через основания цилиндра будет $(E_{n1} + E_{n2})\Delta S$, поток через боковую поверхность пренебрежимо мал. По теореме Гаусса

$$E_{n1} + E_{n2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.73}$$

Здесь $\vec{n}_1$ означает внешнюю нормаль к поверхности S для полупространства 1, а $\vec{n}_2$ – для полупространства 2. Формуле (59) можно придать иной вид, проведя к поверхности S единую нормаль $\vec{n}$. Направим её от полупространства 1 к полупространству 2. Тогда

$$\boxed{E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \tag{1.74}$$

Таким образом, при переходе через заряженную поверхность нормальная составляющая вектора $\vec{E}$ претерпевает разрыв.
В проводнике: $E_{1n} = 0$, $E_{2n} = E$, получим $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, или в векторной форме (нормаль $\vec{n}$ проведена наружу от поверхности проводника):

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}} \tag{1.75}$$

Происхождение скачка нормальной составляющей вектора $\vec{E}$ можно пояснить по-другому. Полное электрическое поле в любой точке пространства складывается из внутреннего поля $\vec{E}_{\text{внутр}}$ (поля, создаваемого зарядами самой площадки ΔS) и внешнего поля $\vec{E}_{\text{внеш}}$ (поля, создаваемого остальными зарядами). При пересечении площадки ΔS внешнее поле меняется непрерывно. Сама же площадка на бесконечно близких расстояниях от неё ведёт себя как бесконечная заряженная плоскость. Создаваемое ею поле $\vec{E}_{\text{внутр}}$ нормально к площадке, $E_{\text{внутр}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Однако направления этого поля по разные стороны площадки противоположны. По одну сторону оно увеличивает, а по другую – уменьшает нормальную составляющую полного поля:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{\text{внеш}} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}_1 \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{\text{внеш}} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}_2 \tag{1.76}$$

Внутреннее поле не имеет тангенциальной составляющей, поэтому тангенциальная составляющая полного поля меняется также непрерывно:

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}} \tag{1.77}$$

В проводнике: $E_{1t} = E_{2t} = 0$.
Из формул (61) получаем:

$$\vec{E}_{\text{внеш}} = \frac{1}{2}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \tag{1.78}$$

Пользуясь этим выражением, легко рассчитать электрические силы, действующие на заряженную поверхность. На площадку ΔS могут действовать только внешние заряды, а не заряды самой площадки. Сила, отнесённая к единице площади площадки ΔS:

$$\vec{f} = \sigma\vec{E}_{\text{внеш}} = \frac{\sigma}{2}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \tag{1.79}$$

Исключим σ при помощи (60):

$$\boxed{\vec{f} = \frac{\varepsilon_0}{2}(E_{2n} - E_{1n})(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)} \tag{1.80}$$

В проводнике: $\vec{E}_1 = \vec{0}$, $E_2 = E$, $\vec{E}_2$ направлена перпендикулярно проводнику.

$$\boxed{\vec{f} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\vec{n}} \tag{1.81}$$

Она всегда направлена наружу, т.е. стремится удалить заряд с поверхности проводника.
Модуль f – давление электростатического поля на поверхность проводника. Таким образом, $f = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$. Далее мы покажем, что этой же формулой определяется и объемная плотность энергии электростатического поля (1.230).

Теорема 1.2.7 (теорема Фарадея)**.** *Пусть в однородном проводнике имеется полость, внутрь которой внесены электрические заряды. Тогда*

1. *Сумма индуцированных зарядов на внутренней поверхности проводящей оболочки равна и противоположна по знаку сумме зарядов, окружённых этой оболочкой.*

2. *Кулоновское поле зарядов на внутренней поверхности проводящей оболочки и зарядов, окружённых этой оболочкой, равно нулю во всём внешнем пространстве.*

3. *Электростатическая защита.*
   Если в полости нет электрических зарядов, то электрическое поле в ней равно 0. Внешние заряды не создают в полости никакого электрического поля.

Доказательство.

1. Проведём замкнутую поверхность S, окружающую полость и целиком находящуюся в проводнике. Т.к. напряжённость электрического поля на поверхности S равна 0, то будет равен 0 и полный заряд, окружённый этой поверхностью.

2. При равновесии индуцированные заряды q' располагаются по внутренней поверхности проводящей оболочки таким образом, чтобы полностью скомпенсировать внутри этой оболочки кулоновское поле зарядов q, окружаемых ею. Докажем, что такая компенсация должна иметь место не только в стенках проводящей оболочки, но и во всём внешнем пространстве. Представим, что всё внешнее пространство заполнено электрически нейтральной проводящей средой. Поле в ней при равновесии равно 0. Но такая среда не будет оказывать никакого влияния на электрическое поле, поскольку положительные и отрицательные заряды в ней скомпенсированы в каждой точке пространства. Поэтому если среду удалить, оставив только проводящую оболочку, то поле от этого нигде не изменится. Оно останется равным 0 во всём пространстве, из которого была удалена среда.

3. Если проводящее тело сплошное, то в нём поля нет. Удалим из тела часть (электрически нейтрального) вещества. От этого, как выяснено выше, поле нигде не изменится, а равновесия зарядов не нарушится. В теле образуется полость, поле в ней равно 0.
   Обоснуем результат строго при помощи теоремы единственности. Потенциал внутри полости удовлетворяет уравнению Лапласа. На стенке полости он должен принимать какое-то постоянное значение φ_0. Решение уравнения можно указать сразу: $\varphi(x, y, z) = \varphi_0$. По теореме единственности других решений быть не может. Таким образом, поле внутри полости $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi = \vec{0}$.

□

В доказательстве была использована теорема единственности, о которой уже упоминалось, она будет точно сформулирована и доказана далее. Однако уже можно сформулировать и доказать некоторый её частный случай.

Теорема 1.2.8 («частная» теорема единственности для проводников). *Электрический заряд распределяется по поверхности проводника единственным образом. Иначе говоря, для любой поверхности S, ограничивающей пространственную область V, существует единственная функция $\sigma(X)$, выражающая зависимость поверхностной плотности заряда σ от точки $X \in S$, при которой напряжённость поля в любой точке области V обращается в нуль.*

Доказательство. Предположим противное: заряд q может распределиться по поверхности проводника двумя способами: $\sigma(X)$ и $\sigma'(X)$. Тогда для заряда $-q$ также имеются два возможных распределения: $-\sigma(X)$ и $-\sigma'(X)$.
Рассмотрим функцию $\sigma''(X) = \sigma(X) - \sigma'(X)$. Она отвечает распределению по поверхности проводника нулевого заряда ($0 = q + (-q)$). Если $\sigma(X) \neq \sigma'(X)$, то поверхностная плотность $\sigma''(X)$ не во всех точках обращается в нуль; стало быть, на поверхности проводника возникают заряды: в одних местах – положительные, в других – отрицательные (ведь суммарный заряд проводника равен нулю). Внутри проводника поля нет, а снаружи оно появляется, и линии электрического поля, начинающиеся на положительных зарядах поверхности проводника, вынуждены заканчиваться на отрицательных зарядах этой же поверхности (а куда им деваться – ведь проводник уединённый, и никаких других зарядов вне проводника у нас нет).
И тут мы приходим к противоречию. С одной стороны, как нам хорошо известно, поверхность проводника является эквипотенциальной. Но с другой стороны, если перемещать пробный заряд вдоль линии поля, начинающейся на положительном заряде в точке A поверхности проводника и заканчивающейся на отрицательном заряде в точке B той же поверхности, то поле совершит ненулевую работу, и тогда потенциал в точке B будет отличаться от потенциала в точке A. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\sigma(X) = \sigma'(X)$, т.е. распределение заряда по поверхности проводника единственно. □

Задача 1.2.3. Два металлических одинаковых полушара радиуса R расположены так, что между ними имеется очень небольшой зазор. Полушары заряжают зарядами $-Q$ и $3Q$ ($Q > 0$). Найти напряжённость электрического поля в зазоре между полушарами.

Ответ. $E = \frac{2Q}{\pi\varepsilon_0 R^2}$.
Рассмотрим некоторые задачи на вычисление электростатических полей. Они решаются искусственным методом – *методом электрических изображений.*

Допустим, что в пространстве имеется несколько точечных электрических зарядов. Пусть S – эквипотенциальная поверхность, разделяющая пространство на два полупространства: I и I'. Обозначим через q_1, q_2, ... точечные заряды в полупространстве I, а через q_1', q_2', ... – в полупространстве I'. Точечные заряды можно рассматривать как предельные случаи малых проводящих тел, например металлических шариков. К ним применима теорема единственности. Заданием величины и расположения зарядов q_1, q_2, ..., а также потенциала поверхности S поле в полупространстве I определяется однозначно. Аналогичное утверждение справедливо для полупространства I'. Поэтому если поверхность S сделать проводящей, то поле во всём пространстве не претерпит никаких изменений. Однако поля в полупространствах I и I' сделаются теперь совершенно независимыми друг от друга. В результате мы получаем решение сразу двух задач, аналогичных друг другу. Одна из них состоит в следующем.

В полупространстве I по одну сторону от поверхности проводящего тела S находятся точечные заряды q_1, q_2, ... Найти электрическое поле в этом полупространстве. Это поле векторно складывается из полей зарядов $q_1, q_2, ...$ и зарядов, индуцированных на поверхности тела S. В силу теоремы единственности, поле индуцированных зарядов в полупространстве I эквивалентно полю, создаваемому зарядами $q_1', q_2', ...$ При вычислении искомого поля проводящее тело можно убрать и заменить точечными зарядами $q_1', q_2', ...$ Совокупность этих последних зарядов называется *электрическим изображением* зарядов $q_1, q_2, ...$ в поверхности S. Таким образом, задача об электрическом поле зарядов, расположенных по одну сторону от проводящей поверхности, сводится к отысканию электрических изображений этих зарядов в этой поверхности.

Приведём примеры на метод изображений:

1. *Точечный заряд q над бесконечной плоской проводящей поверхностью*

   Электрическим изображением заряда q в плоскости AB будет заряд противоположного знака $q' = -q$, расположенный по другую сторону плоскости AB на таком же расстоянии от неё, что и заряд q. Потенциал поля точечных зарядов q и q' в какой-либо точке над поверхностью проводника будет

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \tag{1.82}$$

   где r – расстояние от заряда q до точки, r' – от заряда q' до точки. Потенциал обращается в 0 на плоскости, поэтому граничные условия выполняются. Формула (68) определяет потенциал поля в верхнем полупространстве. В нижнем полупространстве поле равно 0. Таким образом, заряд q индуцирует на плоскости такие заряды, которые создают в верхнем полупространстве такое же поле, что и вспомогательный точечный заряд $q' = -q$. Сила притяжения заряда к пластине равна силе взаимодействия двух точечных зарядов q и q':

$$\boxed{F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(2l)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2}} \tag{1.83}$$

где l – расстояние между зарядом q и плоскостью. Знак $-$ означает то, что сила является силой притяжения.

Энергия взаимодействия исходного и индуцированных зарядов равна только половине энергии взаимодействия зарядов q и q'. Две задачи (заряд и пластина – два заряда) эквивалентны только в верхнем полупространстве. Реально поле существует только в верхней половине пространства. Так как энергия взаимодействия есть энергия поля, то энергия взаимодействия будет в два раза меньше:

$$\boxed{W = -\frac{1}{2}\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(2l)} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l}} \tag{1.84}$$

Знак $-$ означает то, что энергия является энергией притяжения. Этот вывод можно пояснить следующим образом: при двух реальных точечных зарядах при перемещении одного из них второй остается неподвижным. Если же уносить заряд от проводящей границы, то его изображение также удаляется, поэтому совершаемая работа будет в 2 раза меньше. Также эту формулу можно получить по определению: $W = \int\limits_l^\infty F dl = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l}$.

Напряженность суммарного поля у границы $\vec{E}_0$ можно рассчитать по принципу суперпозиции как сумму полей, создаваемых исходным зарядом $\vec{E}$ и его изображением $\vec{E}'$:

$$\vec{E}_0 = \vec{E} + \vec{E}' \tag{1.85}$$

Суммарный вектор направлен перпендикулярно границе и равен:

$$E_0 = -2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(l^2+r^2)}\cos\alpha = -\frac{ql}{2\pi\varepsilon_0(l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.86}$$

где r – расстояние от основания перпендикуляра из заряда на плоскость пластины до рассматриваемой точки, α – угол между $\vec{E}_0$ и

$\vec{E}$. Знак – означает то, что поле направлено к плоскости. Поверхностная плотность заряда у поверхности проводника связана с напряженностью поля соотношением $\sigma = \varepsilon_0 E_0$, поэтому распределение поверхностной плотности индуцированных зарядов на пластине осесимметрично и имеет вид:

$$\boxed{\sigma = -\frac{ql}{2\pi(l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{1.87}$$

Полный индуцированный заряд на бесконечной плоскости равен $q_{\text{инд}} = -q$. В этом можно убедиться проинтегрировав выражение для σ:

$$q_{\text{инд}} = \int\limits_0^\infty \sigma(r) 2\pi r dr = -\int\limits_0^\infty \frac{ql}{2(l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d(l^2+r^2) = -q \tag{1.88}$$

Проще воспользоваться теоремой Гаусса. Окружим заряд q и индуцированные заряды бесконечно удалённой сферой. На полусфере, проходящей ниже плоскости, поле и его поток равны 0. На полусфере, проходящей выше плоскости, поле совпадает с полем точечного диполя, а потому обратно пропорционально кубу радиуса. Сама поверхность полусферы возрастает пропорционально квадрату радиуса. Поток вектора напряжённости через неё в пределе $r \to \infty$ обращается в 0. По теореме Гаусса обращается в 0 и полный заряд, окружённый сферой. Но этот заряд равен $q + q_{\text{инд}}$. Значит, $q_{\text{инд}} = -q$.

2. *Точечный заряд q в двугранном проводящем углу*
Пусть точечный заряд q находится на биссектрисе прямого двугранного угла AOB, образованного двумя бесконечными проводящими плоскостями. Построим набор зарядов изображений так, чтобы удовлетворить граничным условиям: на гранях угла потенциал должен быть равен нулю. Прежде всего, зеркально отобразим исходный заряд в двух плоскостях – получим два изображения q'. Но эти три заряда не обеспечивают равенство нулю потенциала на гранях угла. Необходимо еще один раз отобразить изображения в другой грани – тем самым появляется еще один заряд-изображение q''. Этот заряд является одновременно изображением обоих зарядов q'. Однако его величина также равна q (а не $2q$), т.к. единственное и основное правило построения – удовлетворение граничных условий. Поле четырех зарядов имеет нулевой потенциал как на

плоскости OA, так и на плоскости OB. Таким образом, поле, образованное зарядом q и индуцированными на плоскостях зарядами, эквивалентно полю четырех точечных зарядов, причем эта эквивалентность выполняется только в одной четверти угла, содержащей исходный заряд. В оставшихся четвертях поле отсутствует.
Совершенно аналогично можно построить поле заряда, помещенного на биссектрису двугранного угла, величина которого целое число раз укладывается в полном угле, например, в угле $\frac{\pi}{3}$. Шесть зарядов, знаки которых чередуются, расположенных в вершинах правильного шестиугольника, обеспечивают равенство нулю потенциала на гранях угла.

3. *Точечный заряд q вблизи проводящей сферы*
Допустим, что сфера S радиуса R заземлена, т.е. потенциал её равен 0. Расстояние от заряда до центра сферы $r = OA$. По теореме Фарадея, поле внутри сферы равно 0. Найдём поле вне сферы. Выберем на прямой OA такую точку C, чтобф треугольник OBC был подобен треугольнику OBA. Поместим в этой точке вспомогательный заряд q'. Если a и b – длины отрезков BA и BC, то потенциал зарядов q и q' в точке B будет $\varphi_B = \frac{q}{a} + \frac{q'}{b}$. Он обратится в 0, если

$$\boxed{q' = -\frac{b}{a} = -q\frac{R}{l}} \tag{1.89}$$

Величина q' не зависит от положения точки B на сфере S. Следовательно, потенциал, создаваемый зарядами q и q', равен 0 во всех точках сферы S, т.е. q' является электрическим изображением заряда q в сфере S.
Расстояние $x = OC$ найдём из подобия треугольников:

$$\frac{x}{R} = \frac{R}{l} \rightarrow \boxed{x = \frac{R^2}{l}} \tag{1.90}$$

Вне сферы на расстояниях r и r' от зарядов q и q' потенциал определяется выражением:

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \tag{1.91}$$

Силу взаимодействия между сферой и точечным зарядом можно найти как силу взаимодействия между двумя точечными зарядами q, q':

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(l-x)^2} = -\frac{q^2Rl}{4\pi\varepsilon_0(l^2-R^2)^2} \tag{1.92}$$

При $l \gg R$ сила взаимодействия:

$$\boxed{F = -\frac{q^2 R}{4\pi\varepsilon_0 l^3}} \tag{1.93}$$

Такая зависимость может быть качественно объяснена: величина заряда, индуцированного на сфере, обратно пропорциональна расстоянию до исходного заряда, а сила взаимодействия между точечными зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния. Следовательно, сила взаимодействия сферы и заряда обратно пропорциональна кубу расстояния.

Общий заряд $q_{\text{инд}}$, индуцированный на сфере S, равен по абсолютной величине и совпадает по знаку с зарядом q'. Для доказательства возьмём произвольную замкнутую поверхность Σ, окружающую сферу S, но не окружащую заряд q. На поверхности Σ поле $\vec{E}$ совпадает с полем точечных зарядов q и q', из которых q лежит вне Σ. Поэтому поток Φ этого поля через поверхность Σ будет $\Phi = \frac{q'}{\varepsilon_0}$. По теореме Гаусса этот же поток будет равен $\Phi = \frac{q_{\text{инд}}}{\varepsilon_0}$. Следовательно, $q_{\text{инд}} = q'$.

Электрические заряды q и q' обладают *свойством взаимности*. Если q' является электрическим изображением заряда q, то и заряд q является электрическим изображением заряда q'. Это позволяет распространить изложенный метод на случай, когда точечный заряд внесён внутрь сферической полости, сделанной в проводящей среде.

Если потенциал сферы равен φ_0, то для решения задачи нужно ввести ещё один фиктивный заряд $q'' = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi_0$, поместив его в центре O сферы S. Потенциал на S создаётся только зарядом q'', т.к. потенциал зарядов q и q' на сфере равен 0. Поле во внешнем пространстве представится суперпозицией полей трёх зарядов: q, q' и q''.

Допустим, что сфера S изолирована и задан её заряд q_0. В этом случае нужно ввести ещё один фиктивный заряд $q'' = q_0 - q'$ (чтобы в сумме индуцированные заряды по теореме Гаусса были равны q_0), поместив его в центре O сферы S. Рассмотрим частный случай, когда $q_0 = 0$. Тогда $q'' = -q'$, индуцированные заряды возбуждают во внешнем пространстве такое же поле, что и диполь. Сила, действующая на заряд q, вычисляется как сумма сил, действующих со стороны двух изображений:

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 (l-x)^2} + \frac{qq''}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = -\frac{q^2 R^3 (2l^2 - R^2)}{l^3 (l^2 - R^2)^2} \tag{1.94}$$

При $l \gg R$ сила взаимодействия:

$$\boxed{F = -\frac{q^2 R^3}{2\pi\varepsilon_0 l^5}} \tag{1.95}$$

Такая зависимость может быть качественно объяснена: величина индуцированного дипольного момента пропорциональна величине внешнего поля (которое убывает обратно пропорционально квадрату расстояния), а величина поля диполя убывает обратно пропорционально кубу расстояния.
Незаземленная сфера гораздо меньше возмущает поле точечного заряда, чем заземленная, т.к. на ней происходит только перераспределение зарядов.
Потенциал сферы в данном случае (см. задачу 4.1):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \tag{1.96}$$

Индуцированный дипольный момент равен дипольному моменту двух зарядов-изображений:

$$p = q'x = q\frac{R^3}{l^2} \tag{1.97}$$

Перепишем эту формулу в виде:

$$p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\varepsilon_0 4\pi R^3 = 3V\varepsilon_0 E \tag{1.98}$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объём сферы, $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$ – напряженность поля, создаваемого точечным зарядом в центре сферы. Таким образом, индуцированный дипольный момент сферы пропорционален напряженности внешнего поля.

В общем случае связь между напряженностью внешнего поля и величиной индуцированного заряда:

$$\boxed{\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}} \tag{1.99}$$

где $\vec{E}$ – напряженность внешнего электрического поля.

Определение 1.2.9. *Поляризуемость тела* α – коэффициент пропорциональности между индуцированным дипольным моментом $\vec{p}$ и внешним полем с электрической постоянной $\varepsilon_0\vec{E}$.

В СИ: $[\alpha] = 1$ м^3.
Для проводящей сферы (шара) поляризуемость равна её утроенному объёму. В общем случае поляризуемость зависит от формы тела и его электрических свойств, однако по порядку величины она равна объёму тела.
Рассмотрим проводящий шар в однородном поле. Поместим шар посредине между двумя одинаковыми по величине, но противоположными по знаку точечными зарядами Q и ˘Q. Обозначим расстояния от зарядов до центра шара l. Построим изображения каждого заряда в шаре – два заряда, величины которых равны $q' = \mp Q\frac{R}{l}$ соответственно, расположены на расстоянии $x = \frac{R^2}{l}$ от центра шара. Теперь мысленно начнем уносить заряды Q на бесконечность $l \to \infty$. При этом заряды-изображения будут приближаться к центру шара, образуя точечный диполь с дипольным моментом

$$p = 2q'x = 2\frac{QR^3}{l^2} \tag{1.100}$$

При увеличении расстояния между зарядами поле в области шара становится практически однородным с напряженностью

$$E = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \tag{1.101}$$

Выразим индуцированный дипольный момент шара через напряженность поля:

$$p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E \tag{1.102}$$

Опять поляризуемость α равна утроенному объёму.
Дипольный момент не зависит от «придуманных» зарядов Q и расстояния l, поэтому и в однородном поле шар будет иметь такой же дипольный момент. Обратите внимание, что и в данном случае поляризуемость шара равна его утроенному объему. Таким образом, поле индуцированных на поверхности шара зарядов эквивалентно полю точечного диполя, находящегося в центре шара.
Найдём распределение поверхностной плотности индуцированных зарядов на поверхности проводящего шара, помещенного во внешнее электрическое поле. Индуцированные заряды должны создавать внутри шара однородное поле, равное и противоположное внешнему полю $\vec{E}$. Такое поле может создать распределение (см. задачу 2.5, п. б):

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E\cos\alpha \tag{1.103}$$

где α – угол с вершиной в центре шара, проведённый между направлением внешнего поля $\vec{E}$ и направлением от центра к точке. По теореме единственности только это распределение может создавать такое поле, оно как раз и будет в системе.

1.2.2 Диэлектрики. Метод изображений для диэлектриков

Определение 1.2.10. *Диэлектрики (изоляторы)* – вещества, в которых мало (или отсутствуют) свободные носители заряда, значит они плохо проводят электрический ток.

К диэлектрикам относятся различные виды пластмасс, стекол, керамики, кристаллы солей, сухая древесина, многие чистые жидкости (дистиллированная вода, масла, бензины), газы при не очень сильных внешних полях. Все заряженные частицы, образующие данное непроводящее вещество, связаны между собой и не способны передвигаться по объему тела.
Резкой границы между проводниками и изоляторами нет, так как все вещества в той или иной степени способны проводить электрический ток, однако во многих случаях слабой проводимостью веществ можно пренебречь и считать их идеальными изоляторами. Применимость модели идеального изолятора определяется временем протекания рассматриваемых процессов.
Т.к. все вещества состоят из электрически заряженных частиц, то все вещества взаимодействуют с электрическим полем. В диэлектриках под действием электрического поля заряды могут смещаться на незначительное расстояние, величина этого смещения меньше размеров атомов и молекул. Тем не менее, эти смещения могут приводить к появлению индуцированных зарядов.

Определение 1.2.11. Явление возникновения зарядов под действием внешнего поля называется *поляризацией диэлектрика*, а сами возникающие заряды называются *поляризационными (связанными)*.

Последним термином хотят подчеркнуть, что свобода перемещения связанных зарядов ограничена. В объёме диэлектрика происходит компенсация положительных и отрицательных зарядов молекул, и не каких макроскопических поляризационных зарядов не появляется. Это справедливо только тогда, когда поляризация однородна, т.е. когда все молекулы диэлектрика одинаково поляризованы и ориентированы. Если же поляризация неоднородна, то компенсации нет, и в диэлектрики могут появиться объёмные поляризованные заряды. На поверхности же компенсации не происходит и там появляются поверхностные заряды.

Существуют несколько механизмов поляризации диэлектрика, соответственно с которыми различают несколько типов диэлектриков:

1. Неполярные диэлектрики.

   К этому классу диэлектриков относятся вещества, состоящие из атомов и молекул, не обладающих собственными дипольными моментами в отсутствии поля. Типичными примерами таких веществ являются одноатомные благородные газы; газы, состоящие из симметричных двухатомных молекул – кислород, водород, азот; различные органические жидкости: масла, бензины; из твердых тел – пластмассы.

   В молекулах этих веществ центры положительных зарядов ядер и отрицательных зарядов электронных облаков совпадают. Под действием внешнего электрического поля происходит незначительное смещение центров этих зарядов, благодаря чему каждый атом приобретает индуцированный дипольный момент, направление которого совпадает с направлением внешнего приложенного электрического поля. Величина этого дипольного момента сложным образом зависит от напряженности внешнего поля. Однако в полях слабых по сравнению с внутриатомными полями величина индуцированного дипольного момента оказывается пропорциональной напряженности внешнего поля

   $$\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E} \tag{1.104}$$

   где коэффициент пропорциональности α называется *поляризуемостью молекулы.*

   Справедливость такой записи обосновывается малостью смещения центров положительных и отрицательных зарядов, а на малых изменениях любая функция может быть приближенно заменена на линейную.

   Так как каждая молекула приобретает дипольный момент, то и весь диэлектрик в целом приобретает дипольный момент. Величина этого дипольного момента может служить характеристикой степени поляризации диэлектрика. Однако более удобно ввести «точечную» характеристику воздействия электрического поля на диэлектрик.

   Определение 1.2.12. *Вектором поляризации (поляризацией)* $\vec{P}$ называется дипольный момент единицы объёма диэлектрика, возникающий при его поляризации.

   $$\vec{P} = \frac{\sum\limits_i \vec{p}_i}{\Delta V} \tag{1.105}$$

Данная характеристика становится «точечной» при объеме выделенной части, стремящейся к нулю ($\Delta V \to 0$).
Если индуцированный дипольный момент каждой молекулы пропорционален напряженности внешнего поля, то и дипольный момент каждой части диэлектрика также пропорционален напряженности внешнего поля. Поэтому связь между вектором поляризации и напряженностью внешнего поля принято записывать в виде

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} \tag{1.106}$$

Определение 1.2.13. *Поляризуемость (восприимчивость) вещества* χ – коэффициент пропорциональности между вектором поляризации $\vec{P}$ и внешним полем с электрической постоянной $\varepsilon_0\vec{E}$.

В СИ: $[\chi] = 1$. Поляризуемость вещества, в отличие от поляризуемости тела и молекулы, является безразмерной величиной, характеризующей данное вещество.
В отличие от проводников, где воздействие поля характеризуется величиной индуцированных зарядов, для диэлектриков такой характеристикой является вектор поляризации.

Определение 1.2.14. Рассмотренный механизм поляризации неполярных диэлектриков называется *индукционным.*

Из сравнения формул (90) и (91) следует, что поляризуемость вещества связана с поляризуемостью отдельной молекулы соотношением

$$\boxed{\chi = \alpha n} \tag{1.107}$$

где n – концентрация. Однако такое простое соотношение справедливо только для разреженных газов, где можно пренебречь взаимодействием молекул. В жидких и твердых телах каждая молекула находится в поле, которое создается не только внешними источниками, но и дипольными моментами других молекул.

Задача 1.2.4. Считая, что поляризуемость молекулы равна ее объему, оцените поляризуемость молекул газов. Оцените также поляризуемость воздуха при н.у. Для проведения оценок примите, что диаметр молекулы примерно равен 1 ангстрему.

2. Полярные диэлектрики.
Некоторые молекулы обладают собственным дипольным моментом даже в отсутствие внешнего электрического поля. Такие молекулы называются полярными, и диэлектрики, образованные такими

молекулами, – полярными. Полярные молекулы несимметричны, электронные плотности в них смещены к одному из атомов.
Типичным примером такой молекулы служит молекула воды H_2O, в которой электронные облака смещены к атому кислорода, вследствие чего центры положительных и отрицательных зарядов смещены друг относительно друга, поэтому молекула обладает собственным дипольным моментом.
Механизм поляризации полярных диэлектриков иной, чем неполярных. В отсутствие внешнего поля дипольные моменты молекул ориентированы хаотически, поэтому в любом объеме диэлектрика, содержащем достаточно много молекул, суммарный дипольный момент равен нулю. Во внешнем электрическом поле на молекулы действует вращающий момент, поэтому молекулы начинают ориентироваться так, что вектор дипольного момента выстраивается вдоль вектора напряженности внешнего поля. Тем самым диэлектрик и каждая его часть приобретает индуцированный дипольный момент.

Определение 1.2.15. Рассмотренный механизм поляризации неполярных диэлектриков называется *ориентационным.*

Полной ориентации всех молекул препятствует хаотическое тепловое движение, поэтому молекулы диэлектрика лишь частично ориентируются по внешнему полю. В очень сильных полях подавляющая часть молекул выстроится вдоль вектора напряженности внешнего поля. Однако при комнатных температурах степень ориентации молекул является незначительной, поэтому и в случае полярных диэлектриков можно приближенно считать, что вектор поляризации диэлектрика пропорционален напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} \tag{1.108}$$

Поляризуемость полярных диэлектриков на несколько порядков превышает поляризуемость неполярных. Индукционный механизм поляризации присутствует и в полярных диэлектриках. То есть под действием электрического поля происходит смещение зарядов в молекулах, однако эффект ориентации на несколько порядков превосходит индукционный эффект, поэтому последним часто пренебрегают

3. Электреты
Интересный класс веществ образуют диэлектрики, способные дли-

тельное время сохранять наэлектризованное состояние и создающие собственное электрическое поле в окружающем пространстве. Такие вещества называются электретами, они аналогичны постоянным магнитам, сохраняющим состояние намагниченности.
Стабильные электреты можно получить, нагревая диэлектрик до температуры плавления, а затем охлаждая их в сильном электрическом поле. В жидком состоянии полярные молекулы, находящиеся в электрическом поле, ориентируются, при отвердевании подвижность молекул исчезает, поэтому ориентированное состояние молекул может сохраняться длительное время. Изготавливают электреты из органических (воск, парафин, нафталин, эбонит) и неорганических (сера, некоторые виды стекол) полярных диэлектриков.
Приближённо поведение электретов и аналогичных им диэлектриков в электрическом поле можно описать соотношением

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \chi\varepsilon_0\vec{E} \tag{1.109}$$

где величины $\vec{P}_0$ и χ от напряжённости поля $\vec{E}$ не зависят.

Более подробно неполярные и полярные будут рассмотрены в разделе 1.7.
Рассмотрим однородный изотропный диэлектрик, имеющий форму наклонного параллелепипеда. Поместим его в однородное электрическое поле, направленное параллельно боковым рёбрам. На основаниях параллелепипеда появятся поляризационные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пол}}$. На боковых гранях поверхностных зарядов не возникнет, т.к. смещение зарядов внутри диэлектрика происходит параллельно этим граням. Если S – площадь основания параллелепипеда, то диэлектрик приобретёт дипольный момент $\sigma_{\text{пол}}S\vec{l}$, где $\vec{l}$ проведён от отрицательного основания параллелепипеда к положительному параллельно боковым рёбрам. Вектор поляризации диэлектрика будет

$$\vec{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}}S}{V}\vec{l} \tag{1.110}$$

где V – объём параллелепипеда. Эта формула справедлива и для однородного анизотропного диэлектрика (кристалла), когда направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{P}$ могут не совпадать.
Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к основанию параллелепипеда, заряженному положительно. Тогда $V = S(\vec{l}, \vec{n})$. Подставив это выражение в формулу и скалярно домножив его на $\vec{n}$, получим

$$\boxed{\sigma_{\text{пол}} = (\vec{P}, \vec{n}) = P_n} \tag{1.111}$$

В частности, если параллелепипед прямоугольный, то $\sigma_{\text{пол}} = P$. Данная формула была выведена применительно к положительно заряженному основанию. Но она верна и для отрицательно заряженного основания, т.к. на нём внешняя нормаль $\vec{n}$ направлена в противоположную сторону, а потому проекция P_n отрицательна. Формула справедлива и на боковой поверхности параллелепипеда, т.к. на ней $\sigma_{\text{пол}} = 0$, что согласуется с формулой. Таким образом, она справедлива в общем случае.

Нормальная составляющая P_n представляет по величине заряд, смещаемый при поляризации через единичную площадку в направлении нормали $\vec{n}$ к ней. Эта интерпретация применима и в случае неоднородной поляризации, т.е. такой, при которой вектор $\vec{P}$ меняется от точки к точке. Чтобы убедиться в этом, достаточно мысленно разделить диэлектрик на малые объёмы, в пределах каждого из которых поляризация может считаться однородной.

При неоднородной поляризации поляризационные заряды могут появляться не только на поверхности, но и в объёме диэлектрика. Вычислим плотность объёмных поляризационных зарядов. Выделим мысленно в диэлектрике объём V, ограниченный замкнутой поверхностью S. Заряд, смещённый при поляризации через площадку dS в отрицательном направлении нормали $\vec{n}$, равен $-P_n dS$. Через всю поверхность S внутрь объёма V при поляризации поступает поляризационный заряд

$$q_{\text{пол}} = -\oint P_n dS = -\oint (\vec{P}, d\vec{S}) \tag{1.112}$$

Если поляризация однородна, то $q_{\text{пол}} = 0$.

Применим к диэлектрикам теорему Гаусса, добавив к свободным зарядам q поляризационные заряды $q_{\text{пол}}$:

$$\oint E_n dS = \frac{q + q_{\text{пол}}}{\varepsilon_0} \tag{1.113}$$

Подставив сюда значение $q_{\text{пол}}$, получим

$$\oint (\varepsilon_0 E_n + P_n) dS = q \tag{1.114}$$

Определение 1.2.16. Вектор $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ называется *вектором электрической индукции (электрического смещения).*

$$\boxed{\oint D_n dS = q} \tag{1.115}$$

Это *теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике*. Поток вектора $\vec{D}$ через замкнутую поверхность определяется *только свободными зарядами*. Этим и оправдывается введение вектора $\vec{D}$.
В дифференциальной форме теорема Гаусса для диэлектрика имеет вид:

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{D} = \rho} \tag{1.116}$$

где ρ – объёмная плотность свободных зарядов. Напомним, что теоремы Гаусса справедливы не только в электростатике. Они постулируются также и для переменных во времени полей и входят в систему фундаментальных электродинамических уравнений Максвелла.
Подставив в (101) определение вектора $\vec{D}$:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \mathrm{div}\vec{P}) \tag{1.117}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_{\text{пол}}) \tag{1.118}$$

Следовательно,

$$\boxed{\rho_{\text{пол}} = -\mathrm{div}\vec{P}} \tag{1.119}$$

Теорема Гаусса для вектора электрического смещения в диэлектрике имеет такой же вид, как и для напряжённости электрического поля в вакууме. Поэтому все математические соотношения, полученные для неё для вакуума, сохраняют силу и для однородного диэлектрика. Надо только вектор $\vec{E}$ заменить вектором $\vec{D}$.
Электрическое смещение точечного заряда в однородном диэлектрике определяется соотношением

$$\vec{D} = \frac{q\vec{r}}{4\pi r^3} \tag{1.120}$$

Подставим в определение $\vec{D}$ вектор $\vec{P}$ через $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\varepsilon_0\vec{E} = (1+\chi)\varepsilon_0\vec{E} \tag{1.121}$$

Определение 1.2.17. Величина $\varepsilon = 1 + \chi$ называется *диэлектрической проницаемостью диэлектрика*.

Этой величиной обычно и характеризуются индивидуальные свойства диэлектриков. Для вакуума $\chi = 0$, $\varepsilon = 1$.
Диэлектрическая проницаемость веществ может изменяться в широких пределах:

- для газов она отличается от единицы на величину порядка 10^{-4} – 10^{-6} (поэтому часто диэлектрическими свойствами газов пренебрегают);
- для жидких и твердых неполярных диэлектриков она составляет несколько единиц (например, для керосина $\varepsilon = 2$);
- для полярных диэлектриков – несколько десятков единиц (например, для воды $\varepsilon = 81$);
- для сегнетоэлектриков диэлектрическая проницаемость составляет величины порядка десятков и сотен тысяч.

Задача 1.2.5. Среда составлена из проводящих шариков радиуса r. Шарики распределены равномерно по всей среде. Их число в единице объема n. Найдите диэлектрическую проницаемость такой среды.

Ответ. $\varepsilon = 1 + 4\pi r^3 n$.

В кристаллах направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ не совпадают. Линейное соотношение $\vec{P}$ через $\vec{E}$ заменяется более общей линейной однородной зависимостью:

$$\begin{cases} P_x = \chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{zz}E_z, \\ P_y = \chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z, \\ P_z = \chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z. \end{cases} \tag{1.122}$$

Сокращённо:

$$P_i = \sum_j \chi_{ij}E_j \quad (i, j = x, y, z) \tag{1.123}$$

где χ_{ij} – безразмерные коэффициенты, зависящие от выбора координатных осей. Совокупность этих 9 коэффициентов называется *тензором поляризуемости диэлектрика.* Аналогично,

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij}E_j \quad (i, j = x, y, z) \tag{1.124}$$

где ε_{ij} – безразмерные коэффициенты, зависящие от выбора координатных осей. Совокупность этих 9 коэффициентов называется *тензором диэлектрической проницаемости.* Они связаны с коэффициентами χ_{ij} соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij} \tag{1.125}$$

где δ_{ij} – единичный тензор, определяемый условиями: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Тензоры χ_{ij} и ε_{ij} симметричны (теорема 1.3.16):

$$\chi_{ij} = \chi_{ji}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \tag{1.126}$$

Из теоремы Гаусса мы получили граничное условие (60), которому должны удовлетворять нормальные составляющие вектора $\vec{E}$ на заряженной поверхности. Поступая также, из теоремы Гаусса для диэлектриков получаем следующее условие на границе раздела двух диэлектриков:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{1.127}$$

В частности, вектор электрического смещения в диэлектрике на границе с проводником определяется выражением

$$\vec{D} = \sigma\vec{n} \tag{1.128}$$

где единичная нормаль $\vec{n}$ проведена от проводника к диэлектрику.
Если на границе раздела нет свободных зарядов, то

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n}} \tag{1.129}$$

Таким образом, при переходе через незаряженную границу двух диэлектриков нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ остаётся непрерывной. На любой границе остаются непрерывными его тангенциальные составляющие:

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}} \tag{1.130}$$

Рассмотрим поведение силовых линий при прохождении через границу раздела двух диэлектриков. Если на границе диэлектрика нет свободных зарядов, то должны выполняться граничные условия

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \tag{1.131}$$

Если ввести углы β_1 и β_2 между силовыми линиями и нормалью к границе раздела, то эти условия можно записать в виде

$$E_1 \sin\beta_1 = E_2 \sin\beta_2, \quad \varepsilon_1 E_1 \cos\beta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\beta_2 \tag{1.132}$$

Из них получаем

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \tag{1.133}$$

При переходе через границу раздела двух диэлектриков силовые линии испытывают *преломление*. При переходе из диэлектрика с меньшей ε в диэлектрик с большей угол β увеличивается, т.е. силовая линия удаляется от нормали к границе раздела. С этим связана концентрация (сгущение) силовых линий в диэлектрике с большей диэлектрической проницаемостью.

Если полый диэлектрик с большой диэлектрической проницаемостью внести в электрическое поле, то из-за преломления силовые линии сконцентрируются преимущественно в стенках диэлектрика. Внутри полости они располагаются редко. Полость внутри диэлектрика обладает *экранирующим действием.* Она ведёт себя аналогично полости в проводнике, только экранирование не полное. Чем больше ε, тем больше экранирование.

Выразим модуль вектора напряженности поля внутри диэлектрика. Пусть внешнее поле E_0, оно направлено под углом α к нормали. Тогда

$$E = \sqrt{\left(\frac{E_0 \cos\alpha}{\varepsilon}\right)^2 + (E_0 \sin\alpha)^2} = \frac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha + \varepsilon^2 \sin^2\alpha} \qquad (1.134)$$

Если силовые линии электрического поля перпендикулярны границе диэлектрика во всех точках его поверхности, то диэлектрик не изменяет структуру поля (картину силовых линий), но уменьшает напряженность поля в ε раз.

Если проводящее тело находится внутри диэлектрика, то на границе проводника и диэлектрика возникают поляризационные заряды, которые уменьшают поле внутри диэлектрика. Найдём поверхностную плотность этих зарядов. Пусть в некоторой точке поверхности проводника поверхностная плотность заряда равна σ_0, тогда напряженность поля, создаваемого зарядами на проводнике, определяется выражением $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$. Это поле выступает в качестве внешнего по отношению к диэлектрику и направлено перпендикулярно границе диэлектрика. Поэтому поверхностная плотность поляризационных зарядов на диэлектрике равна

$$\sigma' = \chi\varepsilon_0 \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_0 \qquad (1.135)$$

Рассмотрим применение метода изображений для диэлектриков:

1. Пусть два однородных диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 граничат друг с другом вдоль плоскости. В первый диэлектрик помещён точечный заряд q. Найдём электрическое поле в каждом из диэлектриков. Введём предположение, оправдываемое последующими вычислениями, что поле поляризационных зарядов в первом диэлектрике эквивалентно полю какого-то точечного заряда q', помещённого в точке, зеркально симметричной с точкой, в которой находится заряд q. Тогда для поля в первом диэлектрике можно написать
$$\vec{E}_1 = \frac{q\vec{r}}{\varepsilon_1 r^3} + \frac{q'\vec{r}\,'}{\varepsilon_1 r'^3} \qquad (1.136)$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ – радиусы-векторы, проведённые из зарядов q и q' в рассматриваемую точку.
Введём второе предположение, также оправдываемое последующими вычислениями, что поле внутри диэлектрика представляется выражением

$$\vec{E}_2 = \frac{q''\vec{r}}{\varepsilon_2 r^3} \tag{1.137}$$

Второй заряд-изображение q'' находится в точке, в которой находится заряд q. На границе раздела диэлектриков должны удовлетворяться граничные условия: непрерывность касательных компонент вектора $\vec{E}$ и нормальных компонент вектора $\vec{D}$. Первое условие имеет вид:

$$\frac{q+q'}{\varepsilon_1}\sin\varphi = \frac{q''}{\varepsilon_2}\sin\varphi \tag{1.138}$$

А второе –

$$(q-q')\cos\varphi = q''\cos\varphi \tag{1.139}$$

Оба уравнения не зависят от точки плоскости. Поэтому если q' и q'' определить из этих уравнений, то граничные условия будут удовлетворены во всех точках границы раздела.

$$q' = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q, \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \tag{1.140}$$

Напряжённости:

$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{\varepsilon_1 r^3}\vec{r} + \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{kq}{r'^3}\vec{r}\,', \quad \vec{E}_2 = \frac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{kq}{r^3}\vec{r} \tag{1.141}$$

Потенциалы:

$$\varphi_1 = \frac{kq}{\varepsilon_1 r} + \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{kq}{r'}, \quad \varphi_2 = \frac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{kq}{r} \tag{1.142}$$

Эти выражения удовлетворяют всем условиям задачи и, в силу теоремы единственности, дают решение.
Найдём силу, действующую на заряд q. Для этого умножим заряд q на напряжённость, создаваемую всеми зарядами, кроме заряда q:

$$\boxed{F = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 h^2}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \tag{1.143}$$

где h – расстояние от границы раздела до заряда q. При $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ заряд притягивается к плоскости, при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ – отталкивается.

На границе раздела нет свободных зарядов, поэтому плотность связанных зарядов пропорциональна скачку нормальной составляющей поля $\vec{E}$:

$$\sigma_{\text{пол}} = \varepsilon_0(E_{2n} - E_{1n}) \tag{1.144}$$

$$E_{1n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left[\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right)_n + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\left(\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right)_n\right] = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{qh}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_{2n} = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right)_n = \frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{qh}{2\pi\varepsilon_0(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

где r – расстояние от основания перпендикуляра из заряда на плоскость до рассматриваемой точки. Тогда

$$\boxed{\sigma_{\text{пол}} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{qh}{2\pi\varepsilon_1(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{1.145}$$

При $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 \to \infty$ формулы переходят в соответствующие выражения для поля точечного заряда над проводящей плоскостью.

2. Поле равномерно поляризованного шара.
До поляризации в шаре была однородная смесь положительных и отрицательных зарядов с объёмными плотностями ρ и $-\rho$. Сдвинем все положительные заряды относительно отрицательных на расстояние $\delta\vec{l}$. Шар равномерно поляризуется, вектор поляризации $\vec{P} = \rho\delta\vec{l}$. Поле $\vec{E}$ равномерно поляризованного шара есть векторная сумма полей двух равномерно и разноимённо заряженных шаров, смещённых друг относительно друга.
Найдём поле внутри равномерно поляризованного шара. Пусть O И O' – центры отрицательно и положительно заряженных шаров, а $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ – радиус-векторы, проведённые из этих центров. Поля этих шаров равны соответственно:

$$\vec{E}_1 = -\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}, \quad \vec{E}_2 = \frac{\rho\vec{r}\,'}{3\varepsilon_0} \tag{1.146}$$

$$\vec{E}_{\text{внутр}} = -\frac{\rho\delta\vec{l}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{1.147}$$

Найдём поле равномерно поляризованного шара во внешнем пространстве. Пусть q – заряд положительного шара. Каждый шар возбуждает во внешнем пространстве такое поле, как заряд в центре шара. Поэтому поле равномерно поляризованного шара во внешнем пространстве будет совпадать с полем точечного диполя с дипольным моментом $\vec{p} = q\delta\vec{l} = V\vec{P}$, где V – объём шара. Следовательно, вне шара:

$$\vec{E}_{\text{внеш}} = kV\left[\frac{3(\vec{P},\vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{P}}{r^3}\right] \tag{1.148}$$

Подставим $V = \frac{4\pi r^3}{3}$:

$$\vec{E}_{\text{внеш}} = \frac{(\vec{P},\vec{n})}{\varepsilon_0}\vec{n} - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{1.149}$$

Теорема 1.2.18. *Равномерную поляризацию шара можно получить, поместив его во внешнее однородное электрическое поле $\vec{E}_0$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что при этом будут удовлетворены граничные условия на поверхности шара. Они требуют, чтобы по разные стороны поверхности шара были одинаковы касательные составляющие векторов $\vec{E}$ и нормальные составляющие векторов $\vec{D}$. Полное поле $\vec{E}$ слагается из внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля поляризованного шара. Внутри шара $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{внутр}}$, вне шара $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{внеш}}$. Касательные составляющие обоих полей на поверхности шара одинаковы. Внутри шара электрическое смещение равно $\vec{D}_1 = \varepsilon_0(\vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{внутр}}) + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E}_0 + \frac{2\vec{P}}{3}$, вне шара – $\vec{D}_2 = \varepsilon_0(\vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{внеш}}) = \varepsilon_0\vec{E}_0 + (\vec{P},\vec{n}) - \frac{\vec{P}}{3}$. Нормальные составляющие этих векторов одинаковы. □

Полное поле внутри шара:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\chi\vec{E}}{3} \tag{1.150}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\vec{E}_0} \tag{1.151}$$

Вектор поляризации внутри шара:

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} = 3\varepsilon_0\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\vec{E}_0 \tag{1.152}$$

В результате во внешнем однородном поле $\vec{E}_0$ шар радиуса r приобретёт дипольный момент $\vec{p} = V\vec{P}$:

$$\boxed{\vec{p} = 4\pi r^3\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\varepsilon_0\vec{E}_0} \tag{1.153}$$

При $\varepsilon \to \infty$ формулы перейдут в аналогичные для проводящего шара в однородном поле.

Рассчитаем теперь напряжённость поля $\vec{E}'$ в сферической полости, вырезанной внутри равномерно поляризованного диэлектрика в предположении, что поляризация вне полости всюду однородна. Тогда и внешнее в диэлектрике поле $\vec{E}$ будет также однородно. Если полость заполнить тем же равномерно поляризованным диэлектриком, то к полю в полости $\vec{E}'$ добавится поле равномерно поляризованного шара $-\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$. В результате должно получиться поле $\vec{E}$:

$$\vec{E}' = E + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{1.154}$$

$$\boxed{\vec{E}' = \frac{\varepsilon + 2}{3}\vec{E}} \tag{1.155}$$

1.2.3 * Электронная теория поляризации

В данной части будет подробна рассмотрена поляризация некоторых диэлектриков (неполярный разреженный газ, неполярная плотная среда, полярные газообразные диэлектрики).

Неполярный разреженный газ

Рассмотрим макроскопические тела, построенные из множества молекул. Будем предполагать, что молекулы сферически симметричны. Пусть $\vec{E}$ – среднее макроскопическое электрическое поле. Примем, что оно совпадает с полем $\vec{E}'$, действующим на каждую молекулу диэлектрика. Равенство этих полей может быть только приближённым. Поле, действующее на молекулу, создаётся внешними зарядами и всеми молекулами, за исключением рассматриваемой. Если соседние молекулы расположены близко одна к другой (твёрдые тела и жидкости), то действующее поле $\vec{E}'$ неоднородно (заметно меняется на протяжении молекулы). В этом случае предположение $\vec{E}' = \vec{E}$ не оправдывается. Оно может выполняться в газах, где среднее расстояние между соседними велики по сравнению с размерами последних. Индуцированный дипольный момент молекулы $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, вектор поляризаци среды:

$$\vec{P} = n\vec{p} = \chi\vec{E}, \quad \chi = n\alpha \tag{1.156}$$

где α – поляризуемость единицы объёма диэлектрика.
Диэлектрическая проницаемость:

$$\boxed{\varepsilon = 1 + n\alpha} \tag{1.157}$$

Концентрация газа может быть выражена через плотность:

$$n = \frac{\rho N_A}{\mu} \tag{1.158}$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{\rho N_A \alpha}{\mu} \tag{1.159}$$

Таким образом, при изохорном процессе изменения температуры диэлектрическая проницаемость ε не зависит от температуры.

Неполярная плотная среда

Распространение изложенной теории на случай плотных сред (жидкостей и твёрдых тел) испытывает трудности. Рассмотрим способ, которым это может быть сделано. Пренебрежём размерами молекул и будем считать их «точечными» (линейные размеры очень малы по сравнению со средними расстояниями между ними). Тогда можно пренебречь изменениями поля в пределах молекулы, т.е. считать, что поле $\vec{E}'$ относится к центру молекулы, на которую оно действует. Дипольный момент молекулы

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}' \tag{1.160}$$

Вычислим $\vec{E}'$. Возьмём в диэлектрике произвольную молекулу A и опишем вокруг неё физически бесконечно малую сферу S с центром O (сферу Лоренца, см. рис. 1.3), совпадающем с центром этой молекулы. Поле $\vec{E}'$ в точке O возбуждается всеми источниками, за исключением зарядов самой молекулы A. Электрическое поле $\vec{E}_{\text{внеш}}$ внутри сферы S, создаваемое зарядами, расположенными вне её, можно вычислить, предполагая, что эти заряды распределены в пространстве непрерывно. Поляризацию диэлектрика в окрестности S можно считать однородной.
Найдём поле внутри равномерно поляризованного шара. До поляризации в шаре была однородная смесь положительных и отрицательных зарядов с объёмными плотностями ρ и $-\rho$. Сдвинем все положительные заряды относительно отрицательных на расстояние $\delta\vec{l}$. Шар равномерно поляризуется, вектор поляризации $\vec{P} = \rho\delta\vec{l}$. Поле $\vec{E}$ равномерно поляризованного шара есть векторная сумма полей двух равномерно и разноимённо заряженных шаров, смещённых друг относительно друга.

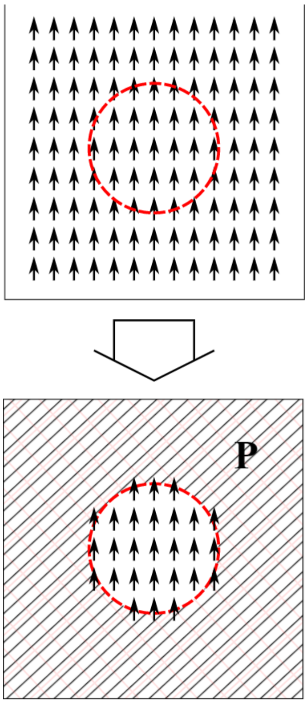

Рис. 1.3: Сфера Лоренца

Пусть O И O' – центры отрицательно и положительно заряженных шаров, а $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ – радиус-векторы, проведённые из этих центров. Поля этих шаров равны соответственно:

$$\vec{E}_1 = -\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}, \quad \vec{E}_2 = \frac{\rho\vec{r}\,'}{3\varepsilon_0} \tag{1.161}$$

$$\vec{E}_{\text{внутр}} = -\frac{\rho\delta\vec{l}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{1.162}$$

Рассчитаем теперь напряжённость поля $\vec{E}'$ в сферической полости, вырезанной внутри равномерно поляризованного диэлектрика в предположении, что поляризация вне полости всюду однородна. Тогда и внешнее в диэлектрике поле $\vec{E}$ будет также однородно. Если полость заполнить тем же равномерно поляризованным диэлектриком, то к полю в полости $\vec{E}_{\text{внеш}}$ добавится поле равномерно поляризованного шара $-\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$. В результате должно получиться поле $\vec{E}$:

$$\vec{E}_{\text{внеш}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{1.163}$$

Такое поле будут создавать внешние источники в центре O сферы S. Чтобы получить действующее поле $\vec{E}'$, к вектору $\vec{E}_{\text{внеш}}$ нужно добавить поле $\vec{E}_1$, которое создаётся в точке O всеми зарядами, находящимися внутри сферы S (за исключением зарядов молекулы A). Это применимо для кубических кристаллов, построенных из электрически нейтральных и изотропных точечных молекул. Такие молекулы возбуждают электрические поля, как точечные диполи с индуцированными дипольными моментами $\vec{p}$, ориентированными вдоль среднего поля $\vec{E}$. Если $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, проведённый из центра O к одному из диполей, то поле $\vec{E}_1$ в точке O будет суммой

$$\vec{E}_1 = k\sum_i \left(\frac{3(\vec{p},\vec{r}_i)\vec{r}_i}{r_i^5} - \frac{\vec{p}}{r_i^3}\right) \tag{1.164}$$

где суммирование ведётся по всем диполям сферы S, за исключением диполя, находящегося в её центре. Поскольку сфера S физически бесконечно мала, индуцированные дипольные моменты $\vec{p}$ всех молекул внутри неё одинаковы и их можно вынести из-под знака суммы. Воспользуемся соотношением $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ для x-составляющей вектора $\vec{E}_1$:

$$E_{1x} = k\left(p_x\sum_i \frac{2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2}{r_i^5} + 3p_y\sum_i \frac{x_i y_i}{r_i^5} + 3p_z\sum_i \frac{x_i z_i}{r_i^5}\right) \tag{1.165}$$

В силу кубической симметрии:

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \frac{1}{3}\sum_i r_i^2, \quad \sum_i x_i y_i = \sum_i y_i z_i = \sum_i z_i x_i = 0$$

Следовательно, $E_{1x} = 0$. По аналогии, $E_{1y} = E_{1z} = 0$. Значит $\vec{E}_1 = 0$. Таким образом, всё действующее поле сводится к $\vec{E}_{\text{внеш}}$:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{1.166}$$

Эту формулу получил Х.А. Лоренц. Её можно применять не только для кристаллов кубической системы, но и для плотных газов, построенных из точечных неполярных молекул, если под $\vec{E}'$ поле, усреднённое по времени. Молекулы газа распределены в пространстве хаотически, причём положение каждой из них практически не зависит от других. Поэтому после усреднения вектора $\vec{E}_1$ по времени рассуждения, с помощью которых было получено равенство $\vec{E}_1 = 0$, применимы и в этом случае. Эта формула неприменима для диэлектриков, построенных из полярных молекул. Между направлениями дипольных моментов соседних молекул

существует определённая корреляция, мало изменяющаяся при наложении внешнего электрического поля.
Применим формулу (1.166) для расчёта поляризации диэлектрика:

$$\vec{P} = \alpha\varepsilon_0 n\vec{E}' = \alpha\varepsilon_0 n\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) \tag{1.167}$$

$$\vec{P} = \frac{\alpha\varepsilon_0 n}{1 - \frac{\alpha n}{3}}\vec{E} \tag{1.168}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \frac{1 + \frac{2\alpha n}{3}}{1 - \frac{\alpha n}{3}}\varepsilon_0\vec{E} \tag{1.169}$$

$$\boxed{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{\alpha n}{3}} \tag{1.170}$$

Это соотношение называется *формулой Клаузиуса-Моссотти*. Подставим концентрацию газа по формуле (1.158):

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{\rho N_A\alpha}{3\mu} \tag{1.171}$$

Таким образом, при изохорном процессе изменения температуры диэлектрическая проницаемость ε не зависит от температуры.
Заметим, что при $\varepsilon \to 1$ формула (1.170) переходит в (1.157). Если вещество состоит из частиц нескольких сортов с поляризуемостями α_i и концентрациями n_i, то формула (1.170) принимает вид:

$$\boxed{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}\sum_i n_i\alpha_i} \tag{1.172}$$

Формула Клаузиуса-Моссотти согласуется с опытом для жидких и газообразных диэлектриков с неполярными молекулами, хотя в случае жидкостей и не выполняется условие точечности молекул, использованное при выводе формулы.
Для газообразного сероуглерода (CS_2) при температуре 0°C и нормальном атмосферном давлении измеренное $\varepsilon = 1,0029$. По формуле (1.157): $4\pi n_{\text{газ}}\alpha = 0,0029$. Плотность жидкого сероуглерода в 381 раз больше плотности газообразного. Если верно, что поляризуемость молекулы α не меняется при переходе из газообразного состояния в жидкое, то для жидкого сероуглерода $4\pi n_{\text{жидк}}\alpha = 0,0029 \cdot 381 = 1,11$. По формуле (1.170) этому значению соответствует $\varepsilon = 2,76$, что достаточно хорошо согласуется с экспериментально найденнной величиной $\varepsilon_{\text{эксп}} = 2,64$.

Для диэлектриков с полярными молекулами (вода, спирты, эфиры и т.д.) формула Клаузиуса-Моссотти не подтверждается опытом. Если для воды провести такие же вычисления, то получается $4\pi n_{\text{жидк}}\alpha = 13,2$. По формуле (1.170) этому значению соответствует $\varepsilon = -2,88 < 0$. Экспериментальное значение для воды – $\varepsilon_{\text{эксп}} = 81$.
Отметим «катастрофу Моссотти». При $\frac{4}{3}\pi n\alpha \to 1$ поляризация $P \to \infty$. Такое поведение поляризации не наблюдается экспериментально, следовательно формула Клаузиуса-Моссотти является неточной.

Полярные газообразные диэлектрики

Перейдём к рассмотрению ориентационной поляризации. Пусть мы имеем точечный диполь $\vec{p}_0$, который может свободно вращаться. Среднее значение дипольного момента на конкректное направление при этом равно 0. Для типичных полярных молекул (H_2O, HCl, HBr, HI, CO, спирты, эфиры и т.д.) дипольные моменты p_0 порядка 10^{-18} ед. СГСЭ. Пусть на диполь действует поле $\vec{E}$. Потенциальная энергия диполя во внешнем поле:

$$u = -(\vec{p}_0, \vec{E}) = -p_0 E\cos\theta \tag{1.173}$$

где θ – угол между диполем и внешним полем. Если не учитывать межмолекулярного взаимодействия (например, идеальный газ), то функция распределения того, что угол между $\vec{p}_0$ и $\vec{E}$ равен θ, $f(\theta)$ определяется распределением Больцмана:

$$f(\theta) = C\exp\left(-\frac{u(\theta)}{kT}\right) = C\exp\left(\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right) \tag{1.174}$$

Число молекул dn, дипольные моменты которых расположены в телесном угле $d\Omega$, равно

$$dn = f(\theta)d\Omega = C\exp\left(\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right)\sin\theta d\theta d\varphi \tag{1.175}$$

Средняя проекция дипольного момента $p_z = p_0\cos\theta$ на направление поля (пусть $\beta = \frac{p_0 E}{kT}$):

$$\langle p_{0z}\rangle = p_0\frac{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi} C\exp(\beta\cos\theta)\sin\theta\cos\theta d\theta}{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi} C\exp(\beta\cos\theta)\sin\theta d\theta} \tag{1.176}$$

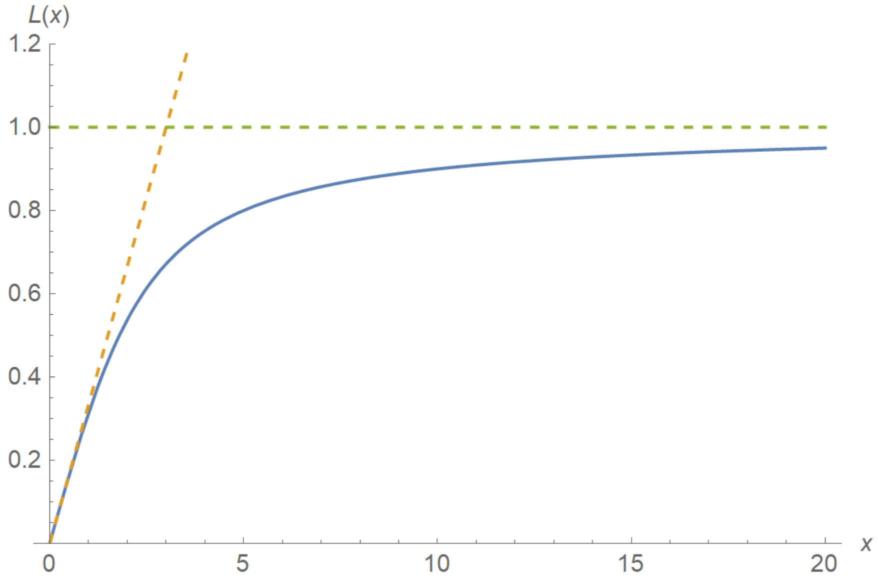

Рис. 1.4: Функция Ланжевена $L(x)$ (синяя), $\frac{x}{3}$ (жёлтая), 1 (зелёная)

$$\int_0^\pi \exp(\beta\cos\theta)\sin\theta d\theta = -\frac{1}{\beta}\exp(\beta\cos\theta)|_0^\pi = \frac{2}{\beta}\operatorname{sh}\beta \tag{1.177}$$

$$\int_0^\pi \exp(\beta\cos\theta)\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\int_0^\pi \exp(\beta\cos\theta)\sin\theta d\theta\right) = \frac{2}{\beta}\left(\operatorname{ch}\beta - \frac{1}{\beta}\operatorname{sh}\beta\right)$$

$$\langle p_{0z}\rangle = p_0\left(\operatorname{cth}\beta - \frac{1}{\beta}\right) \tag{1.178}$$

$L(\beta) = \operatorname{cth}\beta - \frac{1}{\beta}$ – *функция Ланжевена* (её график см. на рис. 1.4).
Исследуем эту функцию:

1. Случай малого поля ($\beta \ll 1$).
   Разложение гиперболического тангенса в ряд Тейлора:

$$\operatorname{th}(\beta) = \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{3} + \mathcal{O}(\beta^3) \tag{1.179}$$

$$L(\beta) = \frac{\beta}{3} + \mathcal{O}(\beta^3) \tag{1.180}$$

$$\langle p_{0z}\rangle \approx \frac{p_0^2}{3kT}E \tag{1.181}$$

Поляризация, обусловленная ориентацией, имеет вид

$$\vec{P} = \frac{np_0^2}{3kT}\vec{E} \to \chi = \frac{np_0^2}{3kT} \tag{1.182}$$

Полярные молекулы в электрическом поле не только поворачиваются, но и деформируются. Поляризуемость диэлектрика состоит из деформационной части $n\alpha$ и ориентационной части $\frac{np_0^2}{3kT}$. Таким образом, формула (1.170) может быть уточнена:

$$\boxed{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n}{3}\left(\alpha + \frac{p_0^2}{3kT}\right)} \tag{1.183}$$

Это соотношение называется *формулой Ланжевена-Дебая*. Оно подтверждается экспериментально для полярных газов и разбавленных растворов. Разрешим уравнение относительно ε:

$$\varepsilon = \frac{27kT}{9kT - n(p_0^2 + 3kT\alpha)} - 2 \tag{1.184}$$

Следовательно, должна существовать критическая температура

$$T_c = \frac{np_0^2}{3k(3 - n\alpha)} \tag{1.185}$$

при которой должен наблюдаться эффект неограниченного возрастания диэлектрической проницаемости (при $T \to T_c$, $\varepsilon \to \infty$). Ниже температуры T_c вещество должно обладать спонтанной поляризацией, т.е. проявлять свойства сегнетоэлектрика. Для воды T_c равна комнатной. Эксперимент не подтверждает этот вывод. Если учесть следующие члены в разложении функции Ланжевена, то вместо стремления к бесконечности получится состояние диэлектрического насыщения.

2. Случай насыщения поля ($\beta \gg 1$).
С увеличением напряжённости поля дипольные всё более интенсивно ориентируются в направлении напряжённости. При $\beta \to \infty,\ L \to 1$ и

$$\langle p_{0z} \rangle = p_0 \tag{1.186}$$

Достигается максимально возможная поляризуемость и дальнейшее увеличение напряжённости поля не приводит к её увеличению. Напряжённость поля, при которой достигается максимально возможная поляризуемость, называется *напряжённостью поля насыщения*.

При $\beta = 1$, $T = 300$ К: $E = \frac{kT}{p_0} = 4,2 \cdot 10^8$ $\frac{\text{В}}{\text{м}}$. Отсюда видно, что в большинстве практически важных случаях напряжённость поля насыщения не достигается и можно пользоваться формулой (1.183).

1.3 Конденсаторы. Энергия электрического поля

1.3.1 Конденсаторы. Ёмкостные и потенциальные коэффициенты

Рассмотрим заряженный уединённый проводник, погружённый в неподвижный диэлектрик. Потенциал создаваемого им электрического поля на бесконечности условимся считать равным 0.

Утверждение 1.3.1. *Между зарядом проводника q и его проводником φ существует прямая пропорциональность:*

$$q = C\varphi \tag{1.187}$$

Коэффициент C зависит только от размеров и формы проводника, а также от диэлектрической проницаемости окружающего диэлектрика и её распределения в пространстве.

Определение 1.3.2. Коэффициент C называется *ёмкостью уединённого проводника.*

В СИ: $[C] = 1$ Ф (фарад).

Задача 1.3.1. Найти ёмкость уединённого шара радиуса R в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε.

Ответ. $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$.

Определение 1.3.3. *Конденсатор* – устройство, состоящее их двух проводников (обкладок), отделённых друг от друга слоем диэлектрика (вакуум тоже можно считать диэлектриком с $\varepsilon = 1$).

Пусть обкладками являются две замкнутые проводящие оболочки: наружная и внутренняя, причём внутренняя целиком окружена наружной. Тогда поле между обкладками не будет зависеть от внешних электрических полей. Заряды на поверхностях обкладок по теореме Фарадея равны по величине и противоположны по знаку. В реальном конденсаторе, поскольку его обкладки не являются полностью замкнутыми, это верно только приближённо. Практическая независимость внутреннего поля конденсатора от внешнего достигается тем, что обкладки располагаются очень близко. В этом случае заряды будут почти целиком сосредоточены на внутренних поверхностях обкладок. Если q – заряд одной из обкладок, а $U \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов (напряжение) между обкладками, то

$$\boxed{q = CU} \tag{1.188}$$

Определение 1.3.4. Постоянная C называется *ёмкостью конденсатора.*

Она зависит только от размеров и устройства конденсатора.

1. *Ёмкость плоского конденсатора.*
   Поле между обкладками конденсатора почти всюду однородно. Однородность поля нарушается только вблизи краёв конденсатора. Краевыми эффектами при вычислении ёмкости конденсатора мы пренебрежём. Это можно делать, когда расстояние d между обкладками очень мало по сравнению с их линейными размерами. Если σ – поверхностная плотность заряда на положительной обкладке, а S – площадь последней, то $q = \sigma S$. Напряжённость поля $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, разность потенциалов $U = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_0}$, ёмкость конденсатора

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}} \tag{1.189}$$

2. *Ёмкость цилиндрического конденсатора.*
   Цилиндрический конденсатор состоит из коаксиальных цилиндрический обкладок, разделённых слоем диэлектрика. Пусть R_1 и R_2 – радиусы внутренней и наружной обкладок, а l – длина конденсатора. Напряжённость поля $E = \frac{q}{2\pi l\varepsilon\varepsilon_0 r}$, разность потенциалов $U = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_2}{R_1}$, ёмкость конденсатора

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}} \tag{1.190}$$

   При $d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \tag{1.191}$$

   где $S = 2\pi Rl$ – площадь обкладок конденсатора.

3. *Ёмкость сферического конденсатора.*
   Сферический конденсатор состоит из коаксиальных сферических обкладок, разделённых слоем диэлектрика. Пусть R_1 и R_2 – радиусы внутренней и наружной обкладок. Разность потенциалов между ними $U = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Ёмкость конденсатора:

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}} \tag{1.192}$$

   При $d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \tag{1.193}$$

   где $S = 4\pi R^2$ – площадь обкладок конденсатора.

Конденсаторы часто соединяют в батареи. Соединение может быть *параллельным* или *последовательным*. При параллельном соединении двух конденсаторов напряжения на обоих конденсаторах одинаковы, а заряды обкладок складываются: $q = q_1 + q_2$. Делением на общее напряжение $U = \varphi_1 - \varphi_2$ находим ёмкость батареи:

$$\boxed{C = C_1 + C_2} \tag{1.194}$$

При последовательном соединении средние пластины, соединённые между собой, электризуются через влияние, а потому их заряды равны и противоположны по знаку. Таким образом, заряды на обоих конденсаторах одинаковы. Разности потенциалов складываются:

$$U = U_1 + U_2 \tag{1.195}$$

Т.к. $U = \frac{q}{C}$, $U_1 = \frac{q}{C_1}$, $U_2 = \frac{q}{C_2}$, то

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \tag{1.196}$$

Обобщение этих формул тривиально на случай нескольких конденсаторов. Параллельное соединение применяется для увеличения ёмкости конденсатора. Последовательное применяют тогда, когда во избежание пробоя большую разность потенциалов требуется распределить между несколькими конденсаторами.

Определение 1.3.5. *Слоистым плоским конденсатором* называется конденсатор, состоящий из двух параллельных проводящих обкладок, разделённых плоскими слоями из диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями.

Рассчитаем ёмкость слоистого конденсатора. Представим, что между слоями диэлектриков введены бесконечно тонкие проводники. От этого заряды на обкладках конденсатора, напряжённости полей в его слоях, разность потенциалов между обкладками, а значит и ёмкость. Однако введение проводников превращает слоистый конденсатор в батарею последовательно соединённых конденсаторов, значит

$$\frac{1}{C} = \frac{\varepsilon_0}{S}\sum_i \frac{d_i}{\varepsilon_i} \tag{1.197}$$

Определение 1.3.6. *Сложным конденсатором* называется произвольная система n заряженных неподвижных проводников, пространство между которыми заполнено неподвижным диэлектриком – однородным или неоднородным.

Докажем теорему взаимности Грина, полезную для нахождения зарядов на заземлённых проводниках.

Теорема 1.3.7 (взаимности Грина). *Если проводники при зарядах на них Q_1, Q_2, ..., Q_n имеют потенциалы φ_1, φ_2, ..., φ_n, а при зарядах Q'_1, Q'_2, ..., Q'_n – потенциалы φ'_1, φ'_2, ..., φ'_n, то справедливо следующее соотношение:*

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi'_i = \sum_{i=1}^{n} Q'_i\varphi_i \tag{1.198}$$

Доказательство. Рассмотрим систему точечных зарядов и напишем для неё матрицу, состоящую из N^2 членов, каждый из которых представляет собой произведение величины одного точечного заряда на потенциал другого точечного заряда:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{q'_2q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}} & \frac{q'_3q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{31}} & \dots & \frac{q'_nq_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{n1}} \\ \frac{q'_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} & 0 & \frac{q'_3q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{32}} & \dots & \frac{q'_Nq_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{N2}} \\ \frac{q'_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} & \frac{q'_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} & 0 & \dots & \frac{q'_Nq_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{N3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q'_1q_N}{4\pi\varepsilon_0 r_{1N}} & \frac{q'_2q_N}{4\pi\varepsilon_0 r_{2N}} & \frac{q'_3q_N}{4\pi\varepsilon_0 r_{3N}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.199}$$

Т.к. порядок суммирования произволен, то складывая все члены по строкам и столбцам, мы должны получить одинаковые результаты

$$\sum_{j=1}^{N} q'_j \varphi_j = \sum_{j=1}^{N} q_j \varphi'_j \tag{1.200}$$

Величина φ_j является потенциалом, создаваемым в точке расположения заряда q_j. Все заряды, расположенные на 1 проводнике, должны быть умножены на один и тот же потенциал, что позволяет просуммировать эти заряды

$$\sum_k q'_k \varphi_i = \varphi_i \sum_k q'_k = Q'_i \varphi_i, \quad \sum_k q_k \varphi'_i = \varphi'_i \sum_k q_k = Q_i \varphi'_i \tag{1.201}$$

Отсюда следует требуемая формула. □

Рассмотрим важный частный случай этой теоремы. Если положить $Q'_1 = Q'_3 = ... = Q'_n = Q_2 = Q_3 = ... = Q_n = 0$, а $Q_1 = Q'_2$, то $\varphi'_1 = \varphi_2$. При помещении заряда Q на проводник B потенциал незаряженного проводника A меняется точно на такую же величину, на какую изменился бы потенциал незаряженного проводника B при помещении заряда Q на проводник A.
Перейдём к рассмотрению ёмкостных и потенциальных коэффициентов.

Теорема 1.3.8. *Предположим, что свободных зарядов в диэлектрике нет. При этом условии потенциалы проводников будут линейными однородными функциями их зарядов, а заряды – линейными однородными функциями потенциалов.*

Доказательство. Предположим сначала, что все проводники не заряжены. Сообщим одному i-му проводнику единичный заряд. Этим однозначно (по теореме единственности) определится электрическое поле $\vec{E}_i(\vec{r})$ во всём пространстве и соответствующие ему потенциал $V_i(\vec{r})$ и индукция $\vec{D}_i = \varepsilon(\vec{r})\vec{E}_i(\vec{r})$. По теореме Гаусса поток вектора $\vec{D}_i$ через поверхность i-го проводника будет равен 1, а через поверхности остальных проводников – 0. Значение потенциала $V_i(\vec{r})$ в месте нахождения j-го проводника обозначим V_{ji}.

Определение 1.3.9. Коэффициенты V_{ji} называются *потенциальными коэффициентами.*

Они зависят только от формы и расположения проводников. Ввиду линейности и однородности уравнений электростатики произвольная линейная комбинация векторов $\vec{E}_i(\vec{r})$ и $\vec{D}_i(\vec{r})$ с постоянными коэффициентами q_i, т.е.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{E}_i(\vec{r}) \tag{1.202}$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{D}_i(\vec{r}) \tag{1.203}$$

удовлетворяет этим уравнениям. Действительно, вектор $\vec{E}(\vec{r})$ потенциальный, т.к. все поля $\vec{E}_i(\vec{r})$ потенциальны. В диэлектрике вектор $\vec{D}$ удовлетворяет уравнению $\vec{D} = \vec{0}$, т.к. $\mathrm{div}\vec{D}_i = 0$. В проводниках $\vec{E} = \vec{0}$. Таким образом, выражения $\vec{E}$ и $\vec{D}$ могут рассматриваться как напряжённость и индукция какого-то электростатического поля. Заряды, возбуждающие такое поле, не могут находиться внутри диэлектрика, т.к. $\rho = \mathrm{div}\vec{D} = 0$. Выясним физический смысл постоянных коэффициентов q_i, введённых выше чисто формально. По теореме Гаусса, заряд на поверхности i-го проводника равен

$$Q_i = \oint\limits_{S_i} (\vec{D}, d\vec{S}) = \sum_j q_j \oint\limits_{S_i} (\vec{D}_j, d\vec{S}) = q_i \oint\limits_{S_i} (\vec{D}_i, d\vec{S}) = q_i \tag{1.204}$$

На основании теоремы единственности можно сказать, что выражение (152) определяет электростатическое поле системы n проводников, заряды которых равны соответственно $q_1, q_2, ..., q_n$. Потенциал поля (152) определяется выражения

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{n} q_j V_j(\vec{r}) \tag{1.205}$$

Поместив точку $\vec{r}$ на поверхности i-го проводника, находим его потенциал

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} q_j \tag{1.206}$$

Разрешив эти уравнения относительно q_i, получим

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \varphi_j \tag{1.207}$$

Определение 1.3.10. Постоянные C_{ij} называются *ёмкостными коэффициентами.*

Как и потенциальные коэффициенты, они определяются только величиной, формой и расположением проводников, а также диэлектрической проницаемостью промежуточной среды. □

Если диэлектрик между проводниками однороден, то все ёмкостные коэффициенты C_{ik} будут пропорциональны его диэлектрической проницаемости ε.
В конденсаторе 2 проводника (обкладки). В этом случае

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2, \quad q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2, \quad q_2 = -q_1 \tag{1.208}$$

Решив эти уравнения относительно φ_1 и φ_2, найдём разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ и ёмкость конденсатора:

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}{C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}} \tag{1.209}$$

Отметим некоторые свойства потенциальных и ёмкостных коэффициентов.

Теорема 1.3.11. *Все потенциальные коэффициенты V_{ij} положительны.*

Доказательство. Если j-му проводнику сообщить положительный заряд q, а остальные проводники оставить незаряженными, то потенциал во всех точках пространства будет положителен. При этом $\varphi_{ii} = V_{ij}q$. Из положительности φ_i следует требуемое. □

Теорема 1.3.12. $V_{jj} > V_{ij}$ $(i \neq j)$.

Доказательство. Максимальным будет потенциал проводника, которому сообщён заряд, т.е. $\varphi_j > \varphi_i$. Отсюда следует требуемое. □

Теорема 1.3.13. *Ёмкостные коэффициенты C_{ij} с одинаковыми индексами положительны, с разными – отрицательны.*

Доказательство. Заземлим все проводники, за исключением i-го. Тогда $q_i = C_{ii}\varphi_i$. Величины q_i и φ_i будут иметь одинаковые знаки, поэтому $C_{ii} > 0$. Теперь заземлим все проводники, за исключением i-го и j-го, i-му проводнику сообщим положительный заряд q_i, j-й проводник оставим незаряженным. Тогда потенциалы φ_i и φ_j будут положительны, причём $q_j = C_{ji}\varphi_i + C_{jj}\varphi_j = 0$. Это равенство может быть верным только при $C_{ji} < 0$. □

Теорема 1.3.14. $\sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij} \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что i-й проводник, которому сообщён положительный заряд q_i, окружён со всех сторон заземлённой замкнутой проводящей оболочкой произвольной формы. По теореме Фарадея на оболочке индуцируется отрицательный заряд $q' = -q$. Удалим в бесконечность некоторые части оболочки, чтобы из оставшихся частей образовалось $n-1$ заземлённых проводников с зарядами $q_1, ..., q_{i-1}, q_{i+1}, ..., q_n$. Сумма этих зарядов по модулю будет меньше q_i. С учётом знаков можно записать $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j \geq 0$. Подставив сюда $q_j = C_{ji}\varphi_i$ и учитывая, что $\varphi_i > 0$, получим требуемое. □

Задача 1.3.2. Проводник заряжается от электрофорной машины путём повторяющихся поднесений к пластинке, которая после каждого поднесения снова заряжается от той же электрофорной пластины до заряда Q. Пусть q_1 – заряд на проводнике после первой операции. Определить заряд q на проводнике после очень большого числа операций.

Ответ. $q = \frac{Qq_1}{Q-q_1}$.

1.3.2 Энергия электрического поля. Локализация энергии в пространстве

Электрическая энергия зависит только от *состояния системы*, но не зависит от способа, каким система была приведена в это состояние. Вычислим электрическую энергию заряженного конденсатора. Она однозначно определяется зарядами обкладок или разностью потенциалов между ними. Способ зарядки на величину энергии не влияет. Применим такой способ зарядки, чтобы вычисления были простыми. Если конденсатор не заряжен, то на каждой из его обкладок имеется смесь одинаковых положительных и отрицательных зарядов. Будем переносить положительный заряд бесконечно малыми порциями dq с отрицательной обкладки на положительную. Для переноса заряда dq необходимо совершить работу против электрического поля:

$$\delta A_{\text{внеш}} = \varphi dq \tag{1.210}$$

где φ – мгновенное значение разности потенциалов между обкладками. Работа самого конденсатора будет такой же по величине, но противоположной по знаку:

$$\delta A = -\varphi dq \tag{1.211}$$

Увеличение потенциальной энергии конденсатора:

$$dW = \varphi dq = \frac{qdq}{C} \tag{1.212}$$

Энергия конденсатора:

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}q\varphi = \frac{1}{2}C\varphi^2} \tag{1.213}$$

Вычислим электрическую энергию в общем виде. Рассмотрим несколько тел с зарядами $q_1, q_2, ...$ и потенциалами $\varphi_1, \varphi_2, ...$, пространство между которыми заполнено неподвижным диэлектриком (однородным или нет). Под $q_1, q_2, ...$ здесь следует понимать только *свободные*, а не поляризационные заряды. Тела, на которых они находятся могут быть как проводниками, так и диэлектриками. Проводники могут быть любых размеров. Размеры диэлектриков должны быть настолько малы, чтобы потенциал каждого тела мог с достаточной точностью считаться одинаковым во всех его точках. Этого всегда можно достигнуть, мысленно разделяя диэлектрик на достаточно малые части и считая каждую из них за отдельный диэлектрик. Примем за начальное такое состояние, в котором все тела не заряжены. Будем переносить заряд из бесконечности на эти тела бесконечно малыми порциями. Рассуждая также, как и в случае конденсатора, запишем

$$W = \int \sum_i \varphi_i' dq_i' \tag{1.214}$$

где суммирование проводится по всем заряженным телам. Штрихи над φ_i и q_i поставлены для того, чтобы указать, что эти величины переменные (меняются во время зарядки). Значение интеграла не зависит от способа зарядки. Пусть φ_i и q_i – потенциал и заряд i-го тела в конечном состоянии. Осуществим зарядку так, чтобы в любой момент времени переменные заряды q_i' были пропорциональны их конечным значениям q_i:

$$q_i' = kq_i, \quad dq_i' = q_i dk \tag{1.215}$$

где k – переменная величина, одинаковая для всех зарядов q_i. Во время зарядки она возрастает от начального значения $k = 0$ до конечного $k = 1$. Поскольку связь между $\vec{D}$ и $\vec{E}$ линейная ($\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$), увеличение всех зарядов в несколько раз ведёт к увеличению всех потенциалов в такое же число раз. Поэтому

$$\varphi_i' = k\varphi_i \tag{1.216}$$

Величина k определяет мгновенные значения зарядов и потенциалов. По ней мы и будем интегрировать:

$$W = \sum_i \varphi_i q_i \int\limits_0^1 k dk \tag{1.217}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i} \tag{1.218}$$

Ограничение, касающееся размеров тел, можно снять:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int \varphi \sigma dS} \tag{1.219}$$

где ρ – объёмная, а σ – поверхностная плотности свободных зарядов. В таком виде формула справедлива при любом распределении проводящих и диэлектрических сред в пространстве. Интегрирование должно проводиться по всем свободным зарядам.

Рассмотрим случай, когда все заряды находятся на проводниках. Размеры проводников и их распределение в пространстве могут быть какими угодно. Если заряды на проводниках получат бесконечно малые приращения dq_i, то изменятся и потенциалы φ_i. Изменение электрической энергии:

$$dW = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i + \frac{1}{2} \sum_i q_i d\varphi_i \tag{1.220}$$

Эта же величина равна $\delta A_{\text{внеш}} = \sum\limits_i \varphi_i dq_i$. Приравняем оба выражения:

$$\sum_i \varphi_i dq_i = \sum_i q_i d\varphi_i \tag{1.221}$$

Теорема 1.3.15. *Ёмкостные и потенциальные коэффициенты симметричны:* $C_{ij} = C_{ji}$, $V_{ij} = V_{ji}$.

Доказательство. Для упрощения доказательства допустим, что заряженными являются только i-й и j-й проводники, причём потенциал φ_j поддерживается постоянным. Тогда

$$\varphi_i dq_i + \varphi_j dq_j = q_i d\varphi_i \tag{1.222}$$

$$q_i = C_{ii}\varphi_i + C_{ij}\varphi_j, \quad q_j = C_{ji}\varphi_i + C_{jj}\varphi_j \tag{1.223}$$

Ввиду постоянства φ_j:

$$dq_i = C_{ii} d\varphi_i, \quad dq_j = C_{ji} d\varphi_i \tag{1.224}$$

Подставляя это в уравнение (1.222), получим $C_{ij} = C_{ji}$. Отсюда также следует, что $V_{ij} = V_{ji}$. □

Электрическую энергию можно выразить через векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$, что более адекватно соответствует духу теории поля. Вычислим элементарную работу $\delta A_{\text{внеш}}$, которую производят внешние силы при электризации диэлектрика. Возьмём в изотропном диэлектрике две бесконечно малые плоские площадки AB и CD, перпендикулярные к электрическому полю E. Расстояние между ними dl предполагается бесконечно малым высшего порядка по сравнению с их линейными размерами. При этом условии площадки AB и CD могут рассматриваться как бесконечные плоскости, краевые эффекты на них можно не учитывать. Пусть внешние силы, направленные против поля $\vec{E}$, переносят с площадки AB на площадку CD электрический заряд $dq = Sd\sigma$, где S – площадь одной площадки, $d\sigma$ – приращение поверхностной плотности на CD. Работа внешних сил при таком переносе:

$$\delta^2 A_{\text{внеш}} = dqEdl = d\sigma SEdl = d\sigma EdV \tag{1.225}$$

где dV – бесконечно малый объём между AB и CD. В силу теоремы Гаусса в результате такого переноса электрическое поле изменяется только между площадками, а вне их всюду остаётся неизменным. Проекция вектора $\vec{D}$ на направление поля $\vec{E}$ меняется на $dD_{\vec{E}} = d\sigma$.

$$\delta^2 A_{\text{внеш}} = EdD_{\vec{E}} dV = (\vec{E}, d\vec{D})dV \tag{1.226}$$

Отметим универсальность этой формулы (её применимость для любых диэлектриков), поскольку никакая конкретная связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$ при выводе не использовалась.
Допустим, что кроме работы по электризации диэлектрика никаких других работ не производится. Тогда приращение электрической энергии:

$$d^2 W = (\vec{E}, d\vec{D})dV \tag{1.227}$$

Если известна зависимость вектора $\vec{D}$ от вектора $\vec{E}$, то сама энергия найдётся интегрированием этого выражения по процессу:

$$dW = \int (\vec{E}, d\vec{D})dV \tag{1.228}$$

Объёмная плотность электрической энергии:

$$w = \frac{dW}{dV} = \int(\vec{E}, d\vec{D}) \tag{1.229}$$

В частности, если $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ и во время процесса электризации $\varepsilon = \text{const}$:

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}} \tag{1.230}$$

Как видно, объёмная плотность энергии совпадает с давлением поля на поверхность проводника. В разделе 1.7.1 будет показано, почему этот так.

Аналогичное вычисление энергии можно провести и для кристаллов. В этом случае вместо скаляра ε надо пользоваться тензором диэлектрической проницаемости ε_{ij}. Сначала докажем следующее утверждение:

Теорема 1.3.16. *Тензор диэлектрической проницаемости ε_{ij} симметричен: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.*

Доказательство. Величина w является функцией состояния, а следовательно дифференциал dw является полным. Для него можно записать:

$$dw = (\vec{E}, d\vec{D}) = \sum_i E_i dD_i = \sum_i E_i d \sum_j \varepsilon_{ij} E_j = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} E_i dE_j \tag{1.231}$$

Чтобы это выражение было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial(\varepsilon_{ij} E_i)}{\partial E_i} = \frac{\partial(\varepsilon_{ji} E_j)}{\partial E_j} \tag{1.232}$$

Т.к. тензор ε_{ij} не зависит от напряжённости поля, то $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. □

Теорема 1.3.17. *Формула (1.230) справедлива и для кристаллических сред.*

Доказательство. Заметим, что значение суммы не зависит от того, какими буквами обозначены индексы суммирования:

$$dw = \sum_j \sum_i \varepsilon_{ji} E_j dE_i \tag{1.233}$$

Переставим суммы и воспользуемся тем, что $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$:

$$dw = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ji} E_j dE_i = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} E_j dE_i \tag{1.234}$$

$$dw = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \varepsilon_{ij}(E_i dE_j + E_j dE_i) = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \varepsilon_{ij} d(E_i E_j) \tag{1.235}$$

Ввиду независимости тензора ε_{ij} от напряжённости поля интегрирование даёт

$$w = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \varepsilon_{ij} E_i E_j = \frac{1}{2}\sum_i E_i D_i = \frac{1}{2}(\vec{E}, \vec{D}) \tag{1.236}$$

□

Таким образом, и для кристаллов мы приходим к прежней формуле плотности энергии.
Электрическая энергия выражается формулой:

$$\boxed{W = \int \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2} dV = \int \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} dV} \tag{1.237}$$

где интегрирование проводится по всему пространству.
Для той же величины ранее была получена формула (1.219). С чисто математической точки зрения формулы (1.219) и (1.237) эквивалентны и отличаются только по форме. Однако за формальным различием этих формул стоит и различие в физической интерпретации электрической энергии. Уравнение (1.237) можно понимать в том смысле, что *носителем электрической энергии является эктрическое поле*, причём энергия поля локализована в пространстве и характеризуется объёмной плотностью электрической энергии (1.230). Напротив, выражение (1.219) может быть формально истолковано как *потенциальная энергия взаимодействия электрических зарядов*, и притом *взаимодействия на расстоянии.* Такое истолкование исключает представление о локализации энергии в определённых участках пространства.
Какому же из этих двух представлений об электрической энергии следует отдать предпочтение? В рамках электростатики *принципиально невозможно* указать ни одного опыта, который бы позволил сделать выбор между ними. Дело в том, что в электростатике электрическое поле неотделимо от зарядов, являющихся его источниками. Величиной и распределением зарядов однозначно определяется электростатическое поле. Обратно, заданием поля во всем пространстве также однозначно определяется плотность электрических зарядов. Не так обстоит дело в случае переменных полей. Переменные электромагнитные поля могут существовать *самостоятельно, независимо от возбудивших их электрических зарядов.* Заряды могут нейтрализоваться, а поле, которое они возбудили, может продолжать существовать в виде электромагнитных волн, которым присущ определенный запас энергии. Эта энергия не может быть

представлена как потенциальная энергия зарядов, взаимодействующих на расстоянии, поскольку самих зарядов уже нет. Формула (1.219) теряет смысл. Но формулы (1.230) и (1.237) сохраняют смысл и для переменных электромагнитных полей. Таким образом, если электростатику рассматривать как предельный случай электродинамики, то *даже в электростатике* следует отдать предпочтение теории поля с ее представлением о локализации электрической энергии в пространстве.

Упражнение 1.3.3. Докажите математическую эквивалентность выражений (1.219) и (1.237), используя формулу Гаусса-Остроградского.

Таким образом, можно выделить 3 способа нахождения электрической энергии:

1. По определению энергия равна работе электрического поля по переносу всех заряженных тел на бесконечность:
$$W = \sum_i A_{i\to\infty} = \int \delta A_{i\to\infty}$$
2. По формулам:
$$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i, \quad W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho dV + \frac{1}{2}\int \varphi\sigma dS$$
3. По формуле:
$$W = \int \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int \frac{(\vec{E},\vec{D})}{2} dV = \int \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} dV$$

Конечно, два последних способа выводятся из первого. Решите этими способами следующие задачи:

Задача 1.3.4. Определите энергию электрического поля равномерно заряженной сферы радиуса R. Полный заряд сферы Q.

Ответ. $W = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

Задача 1.3.5. Определите энергию электрического поля равномерно заряженного шара радиуса R. Полный заряд шара Q.

Ответ. $W = \frac{3Q}{20\pi\varepsilon_0 R}$.

Рассмотрим еще раз взаимодействие двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга. Мы показали, что энергия их взаимодействия рассчитывается по формуле
$$U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1.238}$$

Для нескольких точечных зарядов:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \tag{1.239}$$

Коэффициент 1/2 поставлен потому, что при суммировании потенциальная энерргия каждой пары зарядов учитывается дважды: в виде слагаемого $q_i q_j/r_{ij}$ и в виде ему равного $q_j q_i/r_{ji}$. Формулу (1.239) можно представить в виде

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i}\varphi_i q_i \tag{1.240}$$

где φ_i – потенциал в точке нахождения i-го заряда, создаваемый всеми остальными зарядами:

$$\varphi_i = \sum_{i\neq j}\frac{q_j}{r_{ij}} \tag{1.241}$$

По внешнему виду формула (1.240) совпадает с аналогичной формулой (1.218) для электрической энергии заряженных проводников. На самом деле между обеими формулами имеется глубокое различие. Это видно уже того, что выражение (1.218) может быть преобразовано в объёмный интеграл (1.237), который всегда положителен. Выражение (1.240) не допускает такого преобразования, т.к. оно может быть и положительным, и отрицательным. Например, оно отрицательно для двух точечных зарядов противоположных знаков. Каждый заряд q_i, взятый в отдельности, обладает электрической энергией.

Определение 1.3.18. Такая энергия называется *собственной энергией* заряда и представляет собой энергию взаимодействия бесконечно малых частей, на которые его можно мысленно разбить.

Эта энергия учитывалась при выводе формулы (1.218), но не учитывалась при выводе формулы (1.240). При получении формулы (1.240) каждый заряд q_i рассматривался как нечто целое и неизменное. Учитывалась только работа, затрачиваемая на *сближение* таких неизменных зарядов, но не на их *образование*. Напротив, при выводе формулы (1.218) учитывалась также работа, затрачиваемая на образование зарядов q_i путём конденсации их из бесконечно малых порций электричества, переносимых из бесконечности. В соответствии с этим формула (1.218) определяет *полную электрическую энергию системы зарядов*, а формула (1.240) – только их *взаимную потениальную энергию*. В формуле (1.218) φ_i означат потенциал проводника, создаваемый всеми зарядами, а в формуле (1.240) – всеми зарядами, за исключением i-го.

Рассмотрим два точечных заряда. Пусть сначала шарики не заряжены, бесонечно далеко находятся друг от друга, а заряд распределён по всему бесконечному пространству с бесконечно малой плотностью. Соберём весь заряд на зарядах. Т.к. расстояние между ними бесконечно велико, то они не будут оказывать никакого влияния друг на друга. Вся работа пойдёт на увеличение собственных энергий зарядов:

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_1^2 dV, \quad W_2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_2^2 dV \tag{1.242}$$

Затем сблизим их, для чего потребуется совершить работу $U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$. Полная электрическая энергия шариков:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_1^2 dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_2^2 dV + U \tag{1.243}$$

Но ту же энергию можно выразить иначе. Пока шарики не заряжены, сблизим их до расстояния r_{12}, а затем будем собирать на них заряд. Потребуется работа

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_1^2 dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_2^2 dV + \varepsilon_0 \int (\vec{E}_1, \vec{E}_2) dV$$

Сравнивая оба выражения, получаем

$$\varepsilon_0 \int (\vec{E}_1, \vec{E}_2) dV = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \tag{1.244}$$

Упражнение 1.3.6. Убедитесь в справедливости (1.244) непосредственным интегрированием.

Энергия заряженной сферы (и шара тоже) обратно пропорциональна ее радиусу (см. задачи 1.3.4 и 1.3.5). Точечный заряд можно рассматривать как заряженную сферу бесконечно малого радиуса. При стремлении радиуса сферы к нулю (при сохранении ее заряда) энергия поля стремится к бесконечности, значит энергия поля точечного заряда бесконечно велика. Конечно, можно утверждать, что точечный заряд является математической абстракцией. Однако до настоящего времени нет никаких экспериментальных данных о том, что электрон имеет конечные размеры, поэтому должен рассматриваться как реально существующий точечный заряд. Эта серьезная проблема современной физики еще ждет своего разрешения.

Аналогичным образом можно рассчитать энергию электрического поля, создаваемого несколькими точечными зарядами $q_1, q_2, q_3, \ldots$:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left(\sum_i \vec{E}_i \right)^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_i \int E_i^2 dV + \varepsilon_0 \sum_{i \neq j} \int (\vec{E}_i, \vec{E}_j) dV \tag{1.245}$$

$$\boxed{W = \sum_i W_i + \sum_{i \neq j} U_{ij}} \tag{1.246}$$

Обратите внимание, *для энергии электрического поля принцип суперпозиции не выполняется: энергия системы зарядов не равна сумме собственных энергий зарядов*. Энергия является суммой собственных энергий зарядов W_i и энергий всех парных взаимодействий U_{ij}.
Вот почему энергия взаимодействия зарядов может быть представлена как сумма энергий парных взаимодействий. Если бы плотность энергии зависела от напряженности не квадратично, а по более сложному закону, то в полной энергии появились бы слагаемые, учитывающие тройные и другие взаимодействия.

1.3.3 Пондермоторные силы

При помещении диэлектрической пластинки внутрь конденстатора она начинает «втягиваться» в него.

Определение 1.3.19. Силы, действующие на проводники и диэлектрики в электрическом поле, называются *пондермоторными силами.*

Первопричиной возникновения пондермоторных сил являются электрические заряды, сообщаемые телам. Однако сообщение зарядов телам осложняется появлением поляризационных зарядов. Вычисление пондермоторных сил с одновременным исследованием механизма их возникновения в общем случае довольно затруднительно. Существует общий метод вычисления пондермоторных сил, отвлекаясь от такого механизма.
Поясним этот метод на примере плоского конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком. Зарядим конденсатор, а затем отключим его от источника, поддерживая тем самым заряды на пластинах постоянными. Между пластинами возникнут силы притяжения. Обозначим через $\vec{F}$ одну из них, например силу, действующую на положительно заряженную пластину. Пластину, заряженную отрицательно, закрепим, а к положительно заряженной пластине приложим внешнюю силу $\vec{F}'$, уравновешивающую силу $\vec{F}$. Если нарушить равновесие, бесконечно мало изменив силу $\vec{F}'$, то положительная пластина начнёт бесконечно медленно перемещаться. С точностью до бесконечно малых высшего порядка работы этих сил равны по величине и противоположны по знаку: $\delta A' = -\delta A$. Работа внешней силы $\vec{F}'$ пойдёт на приращение энергии системы: $\delta A' = dW$:

$$\delta A + (dW)_q = 0 \tag{1.247}$$

Значок q указывает на то, что приращение энергии должно быть вычислено при постоянном q. Вычислив по этой формуле δA, можно найти и искомую силу $\vec{F}$.
Формула (1.247) носит общий характер. Она применима к любым системам, а не только к плоскому конденсатору. Под δA нужно понимать работу всех сил, действующих в системе при произвольных бесконечно малых смещениях входящих в неё тел и диэлектрической среды между ними.

Определение 1.3.20. Такие смещения являются *виртуальными* (*возможными*). Метод, в котором они используются, называется *методом виртуальных перемещений.*

Продолжим решать задачу про притяжение между пластинами конденсатора. Пусть проницаемость диэлектрика ε. Направим ось Ox от отрицательной пластины к положительной и сместим положительную пластину в направлении оси на величину dx. При неизменных зарядах сохраняется электрическая индукция $\vec{D}$, а с ним и объёмная плотность энергии

$$w = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \tag{1.248}$$

При смещении объём конденсатора увеличится на $dV = Sdx$, где S – площадь пластины. Энергия увеличится на $dW = wdV = wSdx$. Виртуальная работа, совершённая силой $\vec{F}$, будет $\delta A = Fdx = fSdx$. Подставляя эти значения в формулу (1.247), получим

$$f = -w = -\frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \tag{1.249}$$

Таким образом, давление f численно равно плотности энергии. Сила получилась отрицательной (направлена против оси Ox), т.е. является силой притяжения.

Упражнение 1.3.7. Получить выражение для силы притяжения между пластинами плоского конденсатора, рассматривая эту силу как результат взаимодействия электрических зарядов.

При виртуальных перемещениях обкладок конденсатора или диэлектрической среды между ними меняется ёмкость конденсатора C. Если конденсатор отключён от источника заряда ($q = \text{const}$), то приращение энергии $W = \frac{q^2}{2C}$ будет

$$(dW)_q = \frac{1}{2}q^2 d\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{q^2}{2C^2}dC = -\frac{\varphi^2}{2}dC \tag{1.250}$$

По формуле (1.247), виртуальная работа $\delta A = -(dW)_q = \frac{\varphi^2}{2} dC$.
Если конденсатор подключён к батарее ($\varphi = \text{const}$), то получим

$$(dW)_\varphi = \frac{\varphi^2}{2} dC \tag{1.251}$$

Эта величина отличается от предыдущего выражения знаком. Различие это обусловлено тем, что во втором случае батарея поставляет конденсатору дополнительный заряд $dq = \varphi dC$, совершая при этом работу $\delta A_{\text{бат}} = \varphi dq = \varphi^2 dC$. Приращение энергии определяется работой:

$$\delta A = \delta A_{\text{бат}} - \delta A_{\text{эл}} = \varphi^2 dC - \frac{\varphi^2}{2} dC = \frac{\varphi^2}{2} dC \tag{1.252}$$

Таким образом, выполняются соотношения:

$$(dW)_q = -(dW)_\varphi \tag{1.253}$$

$$\delta A = (dW)_\varphi \tag{1.254}$$

Применимость полученных формул не ограничивается случаем конденсатора:

Теорема 1.3.21. *Формулы (1.253) и (1.254) носят общий характер.*

1.4 Основная задача электростатики. Теорема единственности

Сформулируем *общую задачу электростатики*:
В диэлектрической среде заданы расположение и форма всех проводников. Известна диэлектрическая проницаемость среды ε между проводниками и объёмная плотность свободных электрических зарядов во всех точках диэлектриков. Кроме того, известны:

а) либо потенциалы всех проводников;

б) либо заряды всех проводников;

в) либо заряды некоторых проводников и потенциалы всех остальных проводников.

Требуется определить напряжённость электрического поля во всех точках пространства и распределение заряда по поверхностям проводников. Задача сводится к решению уравнения Пуассона, удовлетворяющего всем граничным условиям.

Теорема 1.4.1 (теорема единственности)**.** *Основная задача электростатики не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что задача допускает несколько решений. Возьмём два из них: 1) $\vec{E}_1 = -\text{grad}\,\varphi_1$, $\vec{D}_1 = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}_1$, 1) $\vec{E}_2 = -\text{grad}\,\varphi_2$, $\vec{D}_2 = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}_2$. Оба решения могут отличаться значениями плотности связанных электрических зарядов. Но плотности свободных электрических зарядов ρ_1 и ρ_2 должны быть одинаковы, т.к. они заданы. Если во втором решении изменить знаки всех свободных и поляризационных зарядов, то возникшее при этом поле будет равно $\vec{E}_2' = -\vec{E}_2$, т.к. свободными и поляризационными зарядами электростатическое поле определяется однозначно. В силу принципа суперпозиции вектор $\vec{E} \equiv \vec{E}_1 + \vec{E}_2' = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ будет представлять также какое-то электростатическое поле. Этому полю соответствует объёмная плотность свободных зарядов $\rho = \rho_1 - \rho_2$ и потенциал $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Потенциал φ не может обращаться в тождественный нуль, т.к. по нашему предположению соответствующее поле $\vec{E}$ во всех точках пространства не обращается в нуль. Ввиду эквивалентности формул (1.219) и (1.237) можно написать

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV = \frac{1}{2}\int \varphi\rho dV + \frac{1}{2}\int \varphi\sigma dS \tag{1.255}$$

Первый интеграл в правой части равен нулю, т.к. $\rho = 0$. Поверхнстный интеграл достаточно взять только по поверхностям проводников, т.к. на всякой поверхности, проходящей в диэлектрике $\sigma \equiv \sigma_1 - \sigma_2 = 0$. Поскольку потенциал каждого проводника $\varphi^{(i)}$ постоянен, поверхностный интеграл можно представить в виде

$$\int \varphi\sigma dS = \sum_i \varphi_i \oint\limits_{S^{(i)}} \sigma dS = \sum_i \varphi^{(i)} q^{(i)} \tag{1.256}$$

где $q_i = q_1^{(i)} - q_2^{(i)}$ – полный заряд i-го проводника. Если задан потенциал i-го проводника, то $\varphi^{(i)} = 0$, а если задан заряд, то $q^{(i)} = 0$. В обоих случаях $\varphi^{(i)} q^{(i)} = 0$. Таким образом, получим

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV = 0 \tag{1.257}$$

Ввиду положительности ε отсюда следует, что $E^2 = 0$. Следовательно, $\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$, т.е. введённое нами предположение неверно. Это и доказывает единственность решения электростатической задачи. □

Доказательство использует эквивалентность двух формул для энергии: (1.219) и (1.237). Конечно, строгим математическим доказательством теоремы единственности является решение дифференциального уравнения Пуассона с данными граничными условиями.
Нахождение самого решения является очень сложной задачей. Аналитические решения известны лишь для немногих частных случаев. Однако если удалось угадать функцию φ, удовлетворяющую всем условиям задачи, то можно утверждать, что она и будет искомым (единственным) решением задачи.
Не всегда требуется задавать заряды или потенциалы тел во всём пространстве (например, задачи, решаемые при помощи метода изображений). Если требуется найти электрическое поле в полости, окружённой проводящей оболочкой, то это достаточно сделать только для тел, заключённых внутри самой полости. Наоборот, если требуется найти внешнее поле, то надо задать заряды и потенциалы только тел вне проводящей оболочки, а также общий заряд или потенциал на внешней поверхности этой оболочки. Теорема единственности распространяется и на эти случаи.

Глава 2

Постоянный электрический ток

2.1 Плотность тока. Закон сохранения электрического заряда

Определение 2.1.1. *Электрическим током* называется направленное движение заряженных частиц. Эти частицы называются *носителями тока.*

В металлах и полупроводниках носителями тока являются *электроны*, в электролитах и ионизационных газах – *положительные и отрицательные ионы.*
Рассмотрим простейший случай, когда все носители тока одинаковы (например, электроны в металлах). Мысленно выделим в среде, по которой течёт ток, произвольный физически бесконечно малый объём и обозначим через $\vec{u}$ средний вектор скорости рассматриваемых носителей в этом объёме.

Определение 2.1.2. Вектор $\vec{u}$ называется *дрейфовой (средней или упорядоченной)* скоростью движения носителей тока.

Пусть n – концентрация носителей тока. Проведём бесконечно малую площадку dS, перпендикулярную к скорости $\vec{u}$. Построим на ней бесконечно короткий прямой цилиндр с высотой udt. Все частицы, заключённые внутри этого цилиндра, за время dt пройдут через площадку dS, перенеся через неё в направлении скорости $\vec{u}$ заряд $dq = neudSdt$, где e – заряд отдельной частицы. Таким образом, через единицу площади за единицу времени переносится заряд $j = neu$.

Определение 2.1.3. Вектор $\vec{j} = ne\vec{u}$ называется *плотностью электрического тока.*

Направление вектора $\vec{j}$ совпадает с направлением упорядоченного течения положительного заряда. В случае нескольких типов зарядов, создающих ток, плотность тока определяется выражением

$$\vec{j} = \sum_i n_i e_i \vec{u}_i \tag{2.1}$$

где суммирование ведётся по всем типам носителей тока ($n_i, e_i, \vec{u}_i$ означает концентрацию, заряд и упорядоченную скорость i-го носителя). Установим произвольно положительное направление нормали к площадке dS и проведём в этом направлении единичный вектор $\vec{n}$. Если частицы положительные, то переносимый заряд в направлении нормали $\vec{n}$ будет положительным или отрицательным в зависимости от того, движутся ли частицы в направлении вектора $\vec{n}$ или в противоположном направлении. Для отрицательных частиц соотношение будет обратным. Количество переносимого в единицу времени заряда можно написать в виде

$$dq = (\vec{j}, \vec{n})dS = j_n dS \tag{2.2}$$

Данная формула остаётся верной и в случае, когда площадка dS не перпендикулярна вектору $\vec{j}$, т.к. составляющая вектора $\vec{j}$, перпендикулярная вектору $\vec{n}$, через площадку dS заряда не переносит.

Теорема 2.1.4 (закон сохранения заряда в интегральной форме)**.** *Возьмём в среде произвольную замкнутую поверхность S, ограничивающую объём V. Пусть q – заряд, содержащийся в объёме V. Тогда*

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint\limits_S j_n dS} \tag{2.3}$$

Доказательство. Заряд, вытекающий за единицу времени из объёма V через поверхность S, представляется интегралом $\oint j_n dS$. □

Подставим q в виде $q = \int \rho dV$ и преобразовав поверхностный интеграл в объёмный $\mathrm{div}\vec{j}dV$, придём к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\int \mathrm{div}\vec{j}dV \tag{2.4}$$

Это соотношение должно выполняться для произвольного объёма V, а потому

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0} \tag{2.5}$$

Эта формула является *законом сохранения заряда в дифференциальной форме*. Также последняя формула называется *уравнением непрерывности (неразрывности)*. Закон сохранения заряда неявно входит в уравнения Максвелла.
Если токи стационарны, то закон сохранения заряда:

$$\oint j_n dS = 0, \quad \mathrm{div}\vec{j} = 0 \tag{2.6}$$

2.2 Законы Ома и Джоуля-Ленца

Одним из главных способов возбуждения электрического тока в телах является создание и поддержание в них электрического поля.

Утверждение 2.2.1 (закон Ома)**.** *Для многих тел (например, металлов) в широких пределах плотность электрического тока $\vec{j}$ пропорциональна напряжённости электрического поля $\vec{E}$:*

$$\boxed{\vec{j} = \lambda\vec{E}} \tag{2.7}$$

Определение 2.2.2. Постоянная λ называется *удельной электрической проводимостью.*

В СИ: $[\lambda] = 1\ \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$.
Она зависит от физического состояния тела. Закон Ома справедлив лишь для *физически однородных* тел.

Определение 2.2.3. Величина, обратная электрической проводимости, называется *удельным сопротивлением материала*:

$$\rho = \frac{1}{\lambda} \tag{2.8}$$

В СИ: $[\lambda] = 1$ Ом $\cdot$ м.

Теорема 2.2.4. *В случае стационарных токов макроскопические заряды могут находиться только на поверхности или в местах неоднородности проводящей среды.*

Доказательство. Для стационарных токов справедливо:

$$\mathrm{div}\lambda\vec{E} = \mathrm{div}\frac{\lambda\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0} = 0 \tag{2.9}$$

Т.к. $\frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0} = \mathrm{const}$, то $\mathrm{div}\vec{D} = 0$. Отсюда по теореме Гаусса $\rho = 0$. □

В этом отношении электрическое поле стационарных токов аналогично электростатическому.

Теорема 2.2.5. *Электрическое поле стационарных токов потенциально.*

Доказательство. Если точки стационарны, то плотность электрических зарядов в каждой точке пространства не меняется во времени, хотя и происходит движение заряда: на место уходящих зарядов непрерывно поступают новые. Такие заряды создают в окружающем пространстве такое же кулоновское поле, что и неподвижные заряды той же плотности. □

Тем не менее электрическое поле стационарных токов существенно отличается от электростатического. Внутри проводников при равновесии зарядов оно равно нулю. Электрическое поле стационарных токов также является кулоновским, однако заряды, его возбуждающие, находятся в движении. Поэтому поле стационарных токов существует и внутри проводников. Если бы это было не так, то в проводниках не было и электрических токов. Силовые линии электростатического поля всегда нормальны к поверхности проводника. Для электрического поля стационарных токов это необязательно.

Задача 2.2.1. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен последовательно двумя диэлектрическими слоями 1 и 2 толщиной d_1 и d_2 с проницаемостями ε_1 и ε_2 и удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2. Конденсатор находится под постоянным напряжением U, причем электрическое поле направлено от слоя 1 к слою 2. Найти σ – поверхностную плотность сторонних зарядов на границе раздела диэлектрических слоев и условие, при котором $\sigma = 0$.

Ответ. $\sigma = \frac{\varepsilon_2\rho_2-\varepsilon_1\rho_1}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}\varepsilon_0 U$, $\sigma = 0$ при $\varepsilon_1\rho_1 = \varepsilon_2\rho_2$.
Выведем закон Ома для металлов. В металлах носителями тока являются свободные электроны. В отстутствие электрического поля или других регулярных сил, действующих на электроны, все направления движения последних равновероятны. В этом отношении движение электронов в металле напоминает тепловое движение молекул газа. Назовём такое движение *беспорядочным*, а соответствующую ему скорость электронов будем обозначать через $\vec{v}_б$. При наличии регулярной силы на беспорядочное движение электронов накладывается систематическое *дрейфовое* движение. Если поле регулярных сил однородно, то все свободные электроны движутся с одной и той же дрейфовой скоростью $\vec{u}$. Полная ско-

рость электрона: $\vec{v} = \vec{v}_б + \vec{u}$. Движение электрона описывается уравнением:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv m\frac{d}{dt}(\vec{v}_б + \vec{u}) = \vec{F} + \vec{F}_{ст} \qquad (2.10)$$

где $\vec{F}$ – регулярная сила, действующая на электрон со стороны внешнего силового поля, а $\vec{F}_{ст}$ – сила, которую он испытывает при столкновении с ионами или другими электронами.

2.3 Правила Кирхгофа

2.4 Стационарные токи в массивных проводниках

Литература

[1] Сивухин Д.В. Курс общей физики. Том 3. Электричество. 2016.

[2] Слободянюк А.И. Физика для любознательных. Электростатика. Постоянный электрический ток. 2015.

[3] David J. Morin. Electricity and magnetism. 2013.

[4] Савченко О.Я. Задачи по физике. 2008.