Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Общая теория относительности
(М.Ю. Лашкевич)

Коцевич Андрей, группа Б02-920

5 семестр, 2021

Содержание

1 Геометрия и физика специальной теории относительности

В решении задач лекции 1 положим скорость света $c = 1$.

1.1. Покажите, что прямой мировой линии отвечает именно минимум (а не максимум) действия $S = -m\int\limits_A^B ds$, то есть максимум собственного времени $s = \int\limits_A^B ds$. Приведите примеры мировых линий, отвечающих наименьшему собственному времени. Чему равно это время?
Решение.
Будем считать, что все элементы ds вдоль мировых линий времениподобны. Прямая мировая линия соответствует равномерному прямолинейному движению. Перейдём в инерциальную систему отсчёта, движущуюся с такой скоростью, чтобы ось времени прошла через AB (это возможно, если A и B разделены времениподобным интервалом). При движении по прямой тело будет неподвижным, а по кривой будет двигаться ненулевой промежуток времени. Покоящиеся часы показывают всегда больший промежуток времени t (в данном случае оно является собственным вдоль прямой), чем движущиеся τ:

$$\tau = \int\limits_A^B dt\sqrt{1 - v(t)^2} \tag{1}$$

Таким образом, действие $S = -m\int\limits_A^B ds$ имеет минимальное значение, если оно берётся по прямой мировой линии, соединяющей A и B.
Наименьшее собственное время достигается на световой мировой линии ($|\vec{r}_B - \vec{r}_A| = t_{AB}$):

$$s = \sqrt{t_{AB}^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2} = \sqrt{t_{AB}^2 - |\vec{r}_B - \vec{r}_A|^2} = 0 \tag{2}$$

Перейдём в какую-либо плоскость, содержащую A и B. Существует траектория, собственное время движения по которой 0: движение по ломаной, состоящей из 2 отрезков, скорость движения по которым 1 и -1. Любые 2 точки можно соединить этими 2 отрезками, поскольку векторы, параллельные им, образуют ортогональный базис на плоскости. Меньшего собственного времени быть не может, поскольку оно неотрицательно.

1.2. В случае системы нескольких свободных частиц момент импульса равен сумме их моментов:

$$J^{\mu\nu} = \sum_s (x_s^\mu p_s^\nu - x_s^\nu p_s^\mu) \tag{3}$$

Покажите, что сохранение компонент J^{0i} эквивалентно тому, что центр инерции системы

$$\vec{R} = \frac{\sum\limits_s E_s \vec{r}_s}{\sum\limits_s E_s} \tag{4}$$

движется с постоянной скоростью.
Решение.
Компоненты J^{0i} сохраняются ($i \in \{1, 2, 3\}$, поскольку $J^{ii} = 0$ из кососимметричности):

$$J^{0i} = \sum_s (x_s^0 p_s^i - x_s^i p_s^0) = \sum_s (t_s p_s^i - x_s^i E_s) \tag{5}$$

Очень жаль, что это конец демо-версии данного файла! Для получения полной версии перейдите по секретной ссылке.