Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Введение в теорию групп
(4 семестр, М.А. Берштейн)

Коцевич Андрей, группа Б02-920

24 октября 2023 г. Версия 12.0

Содержание

1 Определение группы. Группа перестановок.

Упражнение 1.1. а) $\alpha = (1,3,5)(2,4,7)$, $\beta = (1,4,7)(2,3,5,6)$.

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\boxed{\alpha\beta = (1,7,3)(2,5,6,4)} \tag{2}$$

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,5,2,6)(3,4,7) \tag{3}$$

$$\boxed{\operatorname{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{НОК}(4,3) = 12} \tag{4}$$

где $\operatorname{ord}\sigma$ – порядок элемента σ.

Задача 1.2. а)

Предложение 1. *Любая транспозиция является нечётной перестановкой.*

Доказательство. Пусть σ – транспозиция. По определению транспозиции:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ 1 & \dots & b & \dots & a & \dots & n \end{pmatrix} \tag{5}$$

Число инверсий $|\sigma| = 1 + 2(b-a-1)$, т.к. инверсиями будут следующие пары чисел: первое число из множества чисел между a и b (их $b-a-1$ штук), второе число из множества $\{a,b\}$ (таких инверсий $2(b-a-1)$ штук), а также a и b (1 инверсия). Тогда по определению σ является нечётной перестановкой. □

б) Для начала докажем следующее предложение:

Предложение 2. *Умножение на транспозицию меняет чётность перестановки.*

Доказательство. Пусть σ – транспозиция. По определению транспозиции:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ 1 & \dots & b & \dots & a & \dots & n \end{pmatrix} \tag{6}$$

Транспозицию σ можно разложить в элементарные транспозиции. Их количество: $1 + 2(b-a-1)$ ($b-a-1$ элементарную транспозицию нужно сделать, чтобы a и b стали соседними, потом 1 транспозицию, чтобы поменять их местами, и ещё $b-a-1$, чтобы вернуть a и b на новое место). Каждая элементарная транспозиция меняет чётность, значит нечётное их число также меняет чётность. □

Теорема 3. *Пусть перестановка разложена в произведение транспозиций. Тогда её чётность равна чётности количества этих транспозиций.*

Очень жаль, что это конец демо-версии данного файла! Для получения полной версии перейдите по секретной ссылке.