

Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и
математическая физика"

Введение в теорию групп
(4 семестр, М.А. Берштейн)

Коцевич Андрей, группа Б02-920

24 октября 2023 г. Версия 12.0

Содержание

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Определение группы. Группа перестановок. | 3 |
| 2 | Абелевы группы. Действие группы на множестве. | 5 |
| 3 | Теорема Лагранжа, классы сопряженности, нормальные подгруппы, прямое произведение. | 8 |
| 4 | Разные конструкции. | 12 |
| 5 | Представления групп. | 14 |
| 6 | Унитарность. Характеры представлений. | 21 |
| 7 | Разные конструкции. Группа $SO(2)$. | 26 |
| 8 | Группы Ли, алгебры Ли. | 36 |
| 9 | Симметричные тензоры. Группы Ли $SO(3)$, $SU(2)$. | 39 |
| 10 | Представления алгебры $\mathfrak{su}(2)$. | 43 |
| 11 | Представления групп $SO(3)$ и $SU(2)$. | 44 |
| 12 | Представления более общих групп Ли. | 61 |

1 Определение группы. Группа перестановок.

Упражнение 1.1. а) $\alpha = (1, 3, 5)(2, 4, 7)$, $\beta = (1, 4, 7)(2, 3, 5, 6)$.

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\boxed{\alpha\beta = (1, 7, 3)(2, 5, 6, 4)} \quad (2)$$

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 5, 2, 6)(3, 4, 7) \quad (3)$$

$$\boxed{\text{ord} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{НОК}(4, 3) = 12} \quad (4)$$

где $\text{ord } \sigma$ – порядок элемента σ .

Задача 1.2. а)

Предложение 1. Любая транспозиция является нечётной перестановкой.

Доказательство. Пусть σ – транспозиция. По определению транспозиции:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ 1 & \dots & b & \dots & a & \dots & n \end{pmatrix} \quad (5)$$

Число инверсий $|\sigma| = 1 + 2(b - a - 1)$, т.к. инверсиями будут следующие пары чисел: первое число из множества чисел между a и b (их $b - a - 1$ штук), второе число из множества $\{a, b\}$ (таких инверсий $2(b - a - 1)$ штук), а также a и b (1 инверсия). Тогда по определению σ является нечётной перестановкой. \square

б) Для начала докажем следующее предложение:

Предложение 2. Умножение на транспозицию меняет чётность перестановки.

Доказательство. Пусть σ – транспозиция. По определению транспозиции:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ 1 & \dots & b & \dots & a & \dots & n \end{pmatrix} \quad (6)$$

Транспозицию σ можно разложить в элементарные транспозиции. Их количество: $1 + 2(b - a - 1)$ ($b - a - 1$ элементарную транспозицию нужно сделать, чтобы a и b стали соседними, потом 1 транспозицию, чтобы поменять их местами, и ещё $b - a - 1$, чтобы вернуть a и b на новое место). Каждая элементарная транспозиция меняет чётность, значит нечётное их число также меняет чётность. \square

Теорема 3. Пусть перестановка разложена в произведение транспозиций. Тогда её чётность равна чётности количества этих транспозиций.

Очень жаль, что это конец демо-версии данного файла! Для получения полной версии перейдите [по секретной ссылке](#).

