Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Точно-решаемые модели статистической механики
(Я.П. Пугай)

Коцевич Андрей, группа Б02-920с

6 семестр, 2022

Содержание

1 Основные определения.

Обобщёнаня модель Изинга.
Рассмотрим модель Изинга общего вида. Пусть на решётке из N узлов переменные ассоциированы с узлами и принимают значения $\sigma_i = \pm 1$. Состояние системы определяется набором $\sigma = \{\sigma_1, ..., \sigma_N\}$, а энергия состояния задаётся как $E(\sigma)$. Определим статистическую сумму Z_N, свободную энергию F_N и ожидаемое значение оператора X (со значением $X(\sigma)$ в состоянии σ) как

$$Z_N = \sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}} \exp\left(-\frac{E(\sigma)}{kT}\right), \quad F_N = -kT \log Z_N, \quad \langle X \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}} X(\sigma) \exp\left(-\frac{E(\sigma)}{kT}\right) \tag{1}$$

Пусть энергия состояния записывается в следующем виде

$$E(\sigma) = E_{\text{int}}(\sigma) - H \sum_i \sigma_i \tag{2}$$

где H – магнитное поле и предполагается, что вещественная функция $E_{\text{int}}(\sigma)$, описывающая взаимодействие между узлами, является чётной функцией $E_{\text{int}}(\sigma) = E_{\text{int}}(-\sigma)$.

1. Намагниченность на узел $M(H, T)$ выражается как

$$M(H, T) = -\frac{\partial f(H, T)}{\partial H} = \frac{\langle \mathcal{M} \rangle}{N} \tag{3}$$

Здесь $f(H, T) = \frac{F_N(H,T)}{N}$ – свободная энергия на узел и $\mathcal{M} = \sum\limits_i \sigma_i$. Проверьте, что при фиксированной температуре T намагниченность является ограниченной, нечётной и неубывающей функцией от магнитного поля H

$$-1 \leq M(H, T) \leq 1, \quad M(H.T) = -M(-H, T), \quad \chi(H, T) = \frac{\partial M(H, T)}{\partial H} \geq 0 \tag{4}$$

В частности, найдите, что восприимчивость χ выражается через среднее от оператора $\mathcal{M}$ как

$$\chi(H, T) = \frac{\partial M(H, T)}{\partial H} = \frac{\langle (\mathcal{M} - \langle \mathcal{M} \rangle)^2 \rangle}{NkT}, \tag{5}$$

а значит выражается через двухточечные корреляционные функции. Нарисуйте схематически поведение восприимчивости χ как функцию от H для различных температур; χ как функцию от T для различных значений поля.

Решение.
Для проверки ограниченности воспользуемся определением:

$$M(H, T) = \frac{\langle \mathcal{M} \rangle}{N} = \frac{\langle \sum\limits_i \sigma_i \rangle}{N} = \frac{\sum\limits_{\{\sigma_i=\pm 1\}} \sum\limits_i \sigma_i \exp\left(-\frac{E(\sigma)}{kT}\right)}{N Z_N} \tag{6}$$

Среднее при любых весах ограничено минимальным и максимальным элементом.

$$\frac{(\sum\limits_i \sigma_i)_{\min}}{N} \leq M(H, T) \leq \frac{(\sum\limits_i \sigma_i)_{\max}}{N} \tag{7}$$

$$(\sum_i \sigma_i)_{\max} = N, \quad (\sum_i \sigma_i)_{\min} = -N \tag{8}$$

Очень жаль, что это конец демо-версии данного файла! Для получения полной версии перейдите по секретной ссылке.