Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Алгебры и группы Ли, теория представлений алгебр Ли I (Б.Л. Фейгин)

Коцевич Андрей Витальевич, Б02-920с

6 семестр, 2022

Содержание

1 Теоретический минимум

1.1 Основные сведения из теории групп

Определение 1. *Группой* называется множество G с бинарной операцией $\cdot: G \times G \to G$, если выполнены следующие аксиомы:

1. (Ассоциативность) $\forall a, b, c \in G \hookrightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

2. ($\exists$ единицы) $\exists e \in G : \forall a \in G \hookrightarrow a \cdot e = e \cdot a = a$.

3. ($\exists$ обратного элемента) $\forall a \in G \hookrightarrow \exists b$: $a \cdot b = e$.

Из аксиом группы следует, что а) единичный элемент единственный, б) обратный элемент удовлетворяет также свойству $a^{-1} \cdot a = e$.
Примеры:

1. Группа целых чисел $\mathbb{Z}$ операцией сложения. Аналогично, группа вещественных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел с операцией сложения.
   Все ненулевые вещественные (или комплексные) числа с операцией умножения.

2. Циклическая группа из n элементов $C_n = \{e, r, ..., r^{n-1}\}$, где $r^n = e$. Элементы группы можно представлять как повороты на угол $\frac{2\pi k}{n}$ вокруг начала координат.

3. Группа перестановок S_n.

Элементами группы могут быть матрицы. Перечислим основные матричные группы:

1. Полная линейная группа $GL_n(\mathbb{R})$ – группа всех невырожденных матриц с ненулевым определителем. ДОПИСАТЬ!!!

Определение 2. Группа называется *коммутативной* (или *абелевой*), если дополнительно выполнена аксиома: $\forall a, b \in G \hookrightarrow a \cdot b = b \cdot a$.

Определение 3. *Порядком элемента* $g \in G$ называют наименьшее натуральное n: $g^n = e$. Если такого n не существует, то говорят что порядок равен бесконечности.
Количество элементов в группе называется *порядком группы*. Обозначение: $|G|$.

Определение 4. Множество элементов $s_1, ..., s_k \in G$ навается *образующими группы* G, если любой элемент $g \in G$ может быть представлен в виде $g = s_{i_1}^{\pm 1} ... s_{i_l}^{\pm 1}$. Здесь среди индексов $i_1, ...i_l$ могут быть одинаковые.

Определение 5. Подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой*, если $\forall a, b \in H \hookrightarrow a \cdot b \in H$ и $a^{-1} \in H$.

Так как аксиомы группы выполняются в G, то они выполняются и в H, т.е. любая подгруппа является группой.

Определение 6. *Гомоморфизм групп* из $(G, \cdot)$ в $(H, *)$ – функция $\varphi : G \to H : \forall u, v \in G \hookrightarrow \varphi(u \cdot v) = \varphi(u) * \varphi(v)$.

Отсюда можно вывести, что φ отображает нейтральный элемент e_G группы G в нейтральный элемент e_H группы H, а также отображает обратные элементы в обратные:

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} \tag{1}$$

Можно сказать, что φ сохраняет групповую структуру.

Определение 7. Две группы $(G, \cdot)$ и $(H, *)$ называются *изоморфными*, если $\exists$ биекция $\varphi : G \to H : \forall a, b \in G \hookrightarrow \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.

Определение 8. *Прямым произведением* групп G и H называется множество пар $G \times H = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$ с операцией $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$.

Теорема 9. *Любая абелева группа с конечным числом образующих изоморфна произведению циклических групп* $G \simeq \mathbb{Z}^n \times C_{n_1} \times ... \times C_{n_l}$.

Теорема в частности утверждает, что любая конечная абелева группа изоморфна произведению конечных циклических групп $G \simeq C_{n_1} \times ... \times C_{n_l}$. При этом порядок группы G равен $|G| = n_1 \cdot ... \cdot n_l$.
Пользуясь этой теоремой, можно перечислить абелевы группы данного порядка. Ясно, что существует ровно одна абелева группа порядка 1, так же для групп порядка 2 и порядка 3. Существует две неизоморфныее абелевы группы порядка 4: $C_2 \times C_2$ и C_4 (в группе $C_2 \times C_2$ любой элемент в квадрате равен 1, а в группе C_4 нет). Для порядка 5 абелева группа одна: C_5, для порядка 6 есть уже два кандидата $C_2 \times C_3$ и C_6, но они изоморфны.

Предложение 10. *Группы* $C_m \times C_n$ *и* C_{mn} *изоморфны* $\Leftrightarrow$ m *и* n *взаимно просты.*

Определение 11. *Действие группы* G *на множестве* X – отображение $\rho : G \times X \to X$:

1. $\forall g, h \in G, x \in X \hookrightarrow \rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x)$.

2. $\forall x \in X \hookrightarrow \rho(e, x) = x$.

Для упрощения обозначений обычно действие группы записывается как умножение слева $\rho(g, x) = gx$. Тогда первое свойство – это просто ассоциативность, а второе это свойство единичного элемента.
Пример: группа S_n действует на множестве $\{1, 2, ..., n\}$, переставляя его элементы.

Определение 12. Пусть группа G действует на множестве X.
Орбита элемента $x \in X$ – множество $Gx = \{y \in X | \exists g \in G, y = \rho(g, x)\}$. Множество всех орбит обозначается X/G.
Стабилизатор элемента $x \in X$ – множество $G_x = \{g \in G | \rho(g, x) = x\}$.

Примеры:

1. Группа S_n действует на множестве $\{1, 2, ..., n\}$. Тогда орбита любой точки i совпадает со всем множеством $\{1, 2, ..., n\}$, а стабилизатор изоморфен S_{n-1}.

2. Группа C_n действует на $\mathbb{R}^2$ поворотами на угол $2\pi/n$. Тогда орбитой точки будут вершины правильного n-угольника. Множество орбит можно отождествить с точками угла $2\pi/n$, в котором стороны угла между собой склеены. Таким образом, множество орбит – это конус.

Предложение 13. $\forall$ *точки* $x \in X$ *стабилизатор* G_x *являетя подгруппой в* G.

Предложение 14. *Любые две орбиты* Gx *и* Gy *или не пересекаются, или совпадают.*

Можно ввести отношение $x \sim y$, если $x \in Gy$ и проверить, что оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Т.е. является отношением эквивалентности.

Теорема 15. *Пусть* G *– конечная группа.* $\forall x \in X \hookrightarrow |G| = |Gx| \cdot |G_x|$.

Определение 16. Группа G действует на себе *умножением слева* по формуле $\rho(g,x) = gx$.

Полезно ограничить это действие на подгруппу $H \subset G$, т.е. рассмотреть действие G на H по формуле $\rho(h,x) = hx$.

Определение 17. Орбиты для этого действия – множества $Hg = \{hg|h \in H\}$ – называются *правыми классами смежности.*

Помимо действия умножения слева можно определить действие справа.

Определение 18. Группа G действует на себе *умножением справа* по формуле $\rho(g,x) = xg^{-1}$.

Определение 19. Группа G действует на себе *сопряжениями* по формуле $\rho(g,x) = gxg^{-1}$. Орбиты для действия группы на себе сопряжениями называются *классами сопряженности.*

Надо проверить корректность определения, т.е. что получается действительно действие:

$$\rho(g_1, \rho(g_2, x)) = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = (g_1 g_2) x (g_1 g_2)^{-1} = \rho(g_1 g_2, x) \tag{2}$$

По аналогии с векторными пространствами естественно хотеть ввести структуру умножения на классах смежности. Для этого надо чтобы $g_1 H \cdot g_2 H = g_1 g_2 H$. Т.е. $\forall h_1, h_2 \in H \hookrightarrow \exists h \in H$: $g_1 h_1 g_2 h_2 = g_1 g_2 h$. Значит, $g_2^{-1} h_1 g_2 = h h_2^{-1}$. Т.е. нужно, чтобы $gHg^{-1} \subset H$.

Определение 20. Подгруппа $N \subset G$ называется *нормальной* (иногда говорят *инвариантной*), если $\forall g \in G \hookrightarrow gNg^{-1} = N$. Это иногда записывают $N \lhd G$.

Свойства нормальных подгрупп:

1. Если $N \lhd G$, то N является объединением каких-то классов сопряжённости.

2. Если $N \lhd G$. то левые и правые смежные классы совпадают $gN = Ng$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $gn \in gN$ левого класса смежности. Тогда $gn = gng^{-1}g \in Ng$, т.к. $gng^{-1} \in N$ в силу нормальности N. □

Оба этих свойства можно было взять в качестве определения нормальной подгруппы.

Предложение 21. *Если $N \lhd G$, то смежные классы по N образуют группу. Эта группа называется факторгруппой и обозначается G/N.*

Операция умножения вводится по формуле

$$g_1 N \cdot g_2 N = g_1 g_2 N \tag{3}$$

Корректность определения следует из нормальности N.

Определение 22. Группа называется *простой*, если в ней нет нетривиальных нормальных подгрупп (отличных от всей группы и единичной подгруппы).

Определение 23. Пусть даны две группы G и H и гомоморфизм ϕ из группы G в группу автоморфизмов H, т.е. $\forall g \in G \hookrightarrow \exists$ биекция $\phi_g : H \to H$:

$$\phi_g(h_1 h_2) = \phi_g(h_1)\phi_g(h_2), \quad \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(h)) = \phi_{g_1 g_2}(h), \quad \forall g, g_1, g_2 \in G, h, h_1, h_2 \in H \tag{4}$$

Полупрямым произведением $G \ltimes H$ называется группа, элементами которой являются всевозможные пары $\{(g,h)\} \in G \times H$ с умножением

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, \phi_{g_2^{-1}}(h_1) h_2) \tag{5}$$

В полупрямом произведении $G \ltimes H$ есть подгруппы изоморфные G и H, но только подгруппа изоморфная H является нормальной. Смысл отображения ϕ_g – это сопряжение H посредством элемента $g \in G$.

Определение 24. *Внутренний автоморфизм*, определённый элементом $a \in G$, – отображение сопряжением:

$$f_a : G \to G, \quad f_a(x) = a^{-1}xa \tag{6}$$

Композиция двух внутренних автоморфизмов снова является внутренним автоморфизмом и набор всех внутренних автоморфизмов группы G сам по себе тоже является группой и обозначается $\mathrm{Inn}(G)$.
$\mathrm{Inn}(G)$ является нормальной подгруппой полной группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$ группы G. Группа внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}(G)$ – это факторгруппа $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$. Группа внешних автоморфизмов отражает, насколько много автоморфизмов G являются внутренними.

Определение 25. Центр группы G – множество элементов группы, коммутирующих со всеми её элементами:

$$Z(G) = \{z \in G | \forall g \in G \hookrightarrow zg = gz\} \tag{7}$$

Центр группы всегда является её подгруппой: всегда содержит нейтральный элемент (т.к. он коммутирует с любым элементом группы по определению), замкнут относительно групповой операции и вместе с входящими элементами содержит их обращения. Центр группы всегда является её нормальной подгруппой, поскольку он замкнут относительно сопряжения.

$$G/Z(G) \simeq \mathrm{Inn}(G) \tag{8}$$

Примеры:

1. Центр абелевой группы G: $Z(G) = G$.
2. Центр неабелевой простой группы G тривиален: $Z(G) = \{e\}$.
3. Центр полной линейной группы $GL_n(\mathbb{F})$ – множество скалярных матриц: $Z(GL_n(\mathbb{F})) = \{sI_n | s \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\}$.
4. Центр ортогональной группы $O(n)$ является $\{-I_n, I_n\}$.

Если у группы G есть нормальная подгруппа N, то по ней можно отфакторизовать G/N и сама группа может оказаться равной

- произведению групп $G = G/N \times N$. Тогда N и G/N – нормальные подгруппы G и изучение G сводится к изучению N и G/N.
- полупрямому произведению групп $G = G/N \ltimes N$.
- ни тому, ни другому. Тогда будем говорить, что группа G получается «склейкой» N и G/N.

Линейная группа $GL(n, \mathbb{F})$ не является простой, у неё есть нормальная подгруппа (и даже центр) $Z(GL_n(\mathbb{F})) = \{sI_n | s \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\}$. Факторгруппа по ней является простой группой – проективной линейной группой:

$$PGL(n, \mathbb{F}) = GL(n, \mathbb{F})/\{sI_n | s \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\} \tag{9}$$

Специальная линейная группа $SL(2,\mathbb{R})$ не является простой, у неё есть нормальная подгруппа (и даже центр) $Z(SL(2,\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Факторгруппа по ней является простой группой – проективной специальной линейной группой:

$$PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \tag{10}$$

1.2 Однородное пространство

Часто в физике группы возникают как группы симметрий какой-то физической задачи в пространстве. Среди движений пространства можно выделить трансляции и движения сохраняющие некоторую точку, которую удобно считать началом координат. Также движения разделяются на движения сохраняющие ориентацию (они также называются собственными) и несохраняющие ориентацию. Все движения пространства описаны:

- Движения плоскости, сохраняющие начало координат: повороты вокруг R_α начала координат на угол α (сохраняют ориентацию) и симметрии S_l относительно прямых l, проходящих через начало координат (меняют ориентацию).

- Движения трехмерного пространства, сохраняющие начало координат: повороты $R_{l,\alpha}$ вокруг осей, проходящих через начало координат (сохраняют ориентацию) и *зеркальные повороты* $S_{\pi,\alpha}$ – композиции симметрии относительно плоскости π и поворота вокруг перпендикулярной ей оси на угол α, плоскость и ось пересекаются в начале координат, зеркальные повороты меняются ориентацию.

Конечные группы возникают как подгруппы группы симметрий. Примеры:

- Диэдральная группа D_n – группа симметрий правильного n-угольника.

- Группа симметрий правильного многогранника, т.е. группа движений трехмерного пространства переводящих правильный многогранник в себя.

Однородное пространство неформально можно описать как пространство, в котором все точки одинаковы, то есть существует симметрия пространства, переводящая любую точку в другую.

Определение 26. Действие G на X *транзитивно*, если $\forall x, y \in X \hookrightarrow \exists g \in G : \rho(g,x) = y$. Т.е. все элементы X лежат в одной орбите.

Определение 27. *Однородное* пространство – непустое многообразие или топологическое пространство X, на котором G действует транзитивно.

- Элементы X – *точки* однородного пространства.

- Элементы G – *симметрии* пространства, сама группа G – *группа движений* или *основная группа* однородного пространства.

- Если множество X наделено дополнительной структурой, например, метрикой, топологией или гладкой структурой, то обычно предполагается, что действие G сохраняет эту структуру. Например, в случае метрики действие предполагается изометрическим. Аналогично, если X является гладким многообразием, то элементы группы являются диффеоморфизмами.

Однородное пространство с основной группой G можно отождествить со множеством правых классов смежности стабилизатора H: $\mathcal{M} \cong G/H$.
Примеры метрических однородных пространств:

- Евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ с действием группы изометрий; стабилизатор этого действия – группа $O(n)$ ортогональных преобразований.

- Стандартная сфера $\mathbb{S}^n$ со следующими действиями:

  – Группы $O(n)$ ортогональных преобразований; стабилизатор этого действия изоморфен группе $O(n-1)$.
  – Группы $SO(n)$ – специальной ортогональной группы; стабилизатор этого действия изоморфен группе $SO(n-1)$.

1.3 Проективное пространство и преобразование

Понятие проективного пространства возникло из визуального эффекта перспективы, когда кажется, что параллельные линии пересекаются на бесконечности. Его можно рассматривать как расширение евклидова пространства или, в общем случае, аффинного пространства с бесконечно удаленными точками.

Определение 28. Для векторного пространства V над полем K *проективное пространство* $P(V)$ – фактормножество $(V \setminus \{0\})/\sim$ с отношением эквивалентности $x \sim y$, если $\exists \lambda \in K$: $x = \lambda y$. Если $\dim V = n+1$, то $\dim P(V) = n$, а само проективное пространство обозначается KP^n.
Эквивалентно, проективное пространство $P(V)$ – пространство, состоящее из одномерных подпространств (прямых, проходящих через 0) векторного пространства V. Прямые пространства V над K – точки проективного пространства $P(V)$.

Классификация при малых n:

- $n = 0$: пространство состоит из 1 точки.

- $n = 1$: проективная прямая $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty \text{ удал. точка}\}$.
  Вещественная $\mathbb{R}P^1$ диффеоморфна окружности S^1. Комплексная $\mathbb{C}P^1$ (сфера Римана) диффеоморфна двумерной сфере S^2. Кватернионная $\mathbb{H}P^1$ диффеоморфна S^4.

- $n = 2$: проективная плоскость $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}P^1$.
  Проективная плоскость состоит из прямых, проходящих через начало координат. Прямая в проективной плоскости – плоскость, проходящая через начало координат. Из определения следует, что все прямые в $\mathbb{R}P^2$ персекаются.

Определение 29. *Проективное преобразование плоскости* – взаимно-однозначное отображение ϕ: $\pi \to \pi$ проективной плоскости π на себя, при котором для любой прямой $l \in \pi$ образ $\phi(l)$ также является прямой.

1.4 Геометрия Лобачевского

Гиперболическая геометрия является неевклидовой геометрией. Постулат параллельности евклидовой геометрии заменяется следующим: «$\forall$ заданной прямой l и точки P, не лежащей на l, в плоскости, содержащей P и l, $\exists$ по крайней мере 2 различные прямые, проходящие через P, которые не пересекают P».
Отсюда следует, что через P проходит бесконечное число компланарных прямых, не пересекающих l. Эти непересекающиеся линии делятся на два класса:

- Две из прямых являются предельными параллелями: по одной в направлении каждой из идеальных точек на «концах» l, асимптотически приближающихся к l, но не пересекающие её.

- Все остальные непересекающиеся линии имеют точку минимального расстояния и расходятся с обеих сторон этой точки и называются *ультрапараллельными*.

Одиночные линии в гиперболической геометрии обладают точно такими же свойствами, как отдельные прямые в евклидовой геометрии. Например, две точки однозначно определяют линию, а сегменты линии можно удлинять до бесконечности. Две пересекающиеся прямые обладают теми же свойствами, что и две пересекающиеся прямые в евклидовой геометрии. Например, две различные прямые могут пересекаться не более чем в одной точке, пересекающиеся прямые образуют равные противоположные углы.
Когда вводится третья линия, то могут быть свойства пересекающихся линий, отличные от пересекающихся линий в евклидовой геометрии. Например, для данных двух пересекающихся прямых существует бесконечно много прямых, не пересекающих ни одну из данных прямых.
Существуют несколько моделей, используемых для гиперболической геометрии.

1.4.1 Модель диска Пуанкаре

Модель диска Пуанкаре представляет собой модель двумерной гиперболической геометрии, в которой все точки находятся внутри единичного диска, а прямые линии представляют собой либо дуги окружности, содержащиеся внутри диска, которые ортогональны окружности, либо диаметры единичного круга.
Группа сохраняющих ориентацию изометрий модели диска задается проективной специальной унитарной группой $PSU(1,1) = SU(1,1)/\{\pm I\}$.

1.4.2 Модель полуплоскости Пуанкаре

Модель полуплоскости Пуанкаре – половина евклидовой плоскости $H = \{(x,y)|y > 0; x, y \in \mathbb{R}\}$. Модель полуплоскости является пределом модели диска Пуанкаре, граница которого касается оси абсцисс в той же точке, а радиус модели диска стремится к бесконечности.
Гиперболические линии представляют собой либо полуокружности, ортогональные оси абсцисс, либо лучи, перпендикулярные оси абсцисс. Длина интервала на луче задается логарифмической мерой, поэтому она инвариантна относительно гомотетий $(x,y) \to (\lambda x, \lambda y), \lambda > 0$.
Эта модель является конформной, т.е. углы, измеренные в точке в модели такие же, как и в реальной гиперболической плоскости. Все изометрии в рамках этой модели – преобразования Мёбиуса плоскости $(z = x + iy)$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc > 0 \tag{11}$$

$\forall$ преобразованию $f(z)$ соответствует матрица

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \tag{12}$$

Композиции отображений $f_2(f_1(z))$ соответствует матричное умножение M_2M_1:

$$f_2(f_1(z)) = \frac{a_2(\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}) + b_2}{c_2(\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}) + d_2} = \frac{(a_1a_2 + b_2c_1)z + a_2b_1 + b_2d_1}{(a_1c_2 + c_1d_2)z + c_2b_1 + d_2d_1} \tag{13}$$

$$M_2M_1 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ a_1c_2 + c_1d_2 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Также сущестует симметрия $(a, b, c, d) \to (-a, -b, -c, -d)$, не меняющая $f(z)$, т.е. группа изометрий – $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ – проективная специальная линейная группа.

1.4.3 Модель Бельтрами-Клейна

Модель Бельтрами-Клейна – модель гиперболической геометрии, в которой точки представлены точками внутри единичного диска, а прямые изображаются хордами.
Эта модель не является конформной, что означает, что углы искажены, а окружности на гиперболической плоскости в модели вообще не являются круглыми. Только круги, центр которых находится в центре граничного круга, не искажаются.

1.4.4 Модель полушария

Модель полушария использует верхнюю половину единичной сферы $\{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$. Гиперболические линии представляют собой полуокружности, ортогональные границе полусферы.
Модель полусферы является частью сферы Римана и разные проекции дают разные модели гиперболической плоскости:

- Стереографическая проекция из $(0, 0, -1)$ на плоскость $z = 0$ проецирует соответствующие точки на модель диска Пуанкаре.

- Стереографическая проекция из $(-1, 0, 0)$ на плоскость $x = 1$ проецирует соответствующие точки на модель полуплоскости Пуанкаре.

- Ортогональная проекция на плоскость $z = C$ проецирует соответствующие точки на модель Бельтрами–Клейна.

1.5 Группы Ли

Определение 30. *Группой Ли* называется группа G со структурой гладкого многообразия, совместной с групповыми операциями. Это означает, что

1. отображение умножения $m : G \times G \to G,\ m(g, h) := gh$ гладко;

2. отображение обращения $s : G \to G,\ s(g) := g^{-1}$ гладко.

Определение означает, что элементы группы должны быть представлены как функции $g(\alpha_1, ..., \alpha_d)$ от какого-то набора вещественных параметров $\alpha_1, ..., \alpha_d$. Требуется, чтобы матричные элементы как функции от $\alpha_1, ..., \alpha_d$ были гладкими. Также требуется, чтобы функции $\gamma_i(\alpha_1, ..., \alpha_d, \beta_1, ..., \beta_d)$, определенные при помощи умножения в группе

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_d)g(\beta_1, ..., \beta_d) = g(\gamma_1, ..., \gamma_d) \tag{15}$$

были гладкими. Аналогично, требуется, чтобы функции $\delta_i(\alpha_1, ..., \alpha_d)$, определённые при помощи операции взятия обратного элемента в группе

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_d)^{-1} = g(\delta_1, ..., \delta_d) \tag{16}$$

были гладкими.
Правильно думать, что параметры $\alpha_1, ..., \alpha_d$ принадлежат некоторому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^d$ и g осуществляет гладкую биекцию между этим открытым множеством и окрестностью единицы в группе G.

Определение 31. *Размерностью* группы Ли называется число параметров d.

Примеры:

1. любая дискретная (в частности, конечная) группа;
2. группа $\mathbb{R}$ по сложению;
3. группа $\mathbb{R}_+$ положительных вещественных чисел по умножению;
4. группа S^1 комплексных чисел, по модулю равных 1, по умножению.

Определение 32. *Подгруппой Ли* в группе Ли называется замкнутое гладкое подмногообразие, замкнутое относительно операции умножения.

Примеры:

1. Подгруппа $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ или $SL_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$;
2. Подгруппа $N_+(n) \subset GL_n$, состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали;
3. Подгруппа $B_+(n) \subset GL_n$, состоящая из обратимых верхнетреугольных матриц;
4. Подгруппа $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$, состоящая из операторов, сохраняющих евклидово скалярное произведение (т.е. A: $A^{-1} = A^T$), а также $SO_n(\mathbb{R}) := O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$;
5. Более общо, $O_{n,k}(\mathbb{R}) \subset GL_{n+k}(\mathbb{R})$ – подгруппа, сохраняющая квадратичную форму сигнатуры (n, k).

Рассмотрим подробнее некоторые матричные группы Ли:

1. $SO(2)$ – группа ортогональных преобразований плоскости с определителем 1. Геометрически элементы группы $SO(2)$ – повороты на углы $0 \leq \alpha < 2\pi$, матрица имеет вид
$$g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{17}$$
Матрицы $g(\alpha)$ удовлетворяют соотношению $g(\alpha+\beta) = g(\alpha)g(\beta)$. Если продифференцировать последнее равенство по β и положить $\beta = 0$, то получаем
$$g'(\alpha) = g(\alpha)g'(0) = g(\alpha) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$
Единственным решение этого уравнения, удовлетворяющим начальному условию $g(0) = E$, является матричная экспонента
$$g(\alpha) = \exp\left(\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{19}$$
В данном случае матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ является инфинитезимальным генератором группы $SO(2)$, т.к. имеем соотношение $g(\alpha) = \exp(\alpha g'(0))$. При этом $g'(0)$ должна удовлетворять соотношению $\exp(2\pi g'(0)) = E$, поэтому её собственные значения равны $ik_1, ..., ik_N$, где $k_1, ..., k_N \in \mathbb{Z}$.

2. Группа всех невырожденных матриц $GL_n(\mathbb{R})$. В качестве параметров $\alpha_1, ..., \alpha_d$ можно взять все матричные элементы. Размерность группы равна n^2. Аналогично, группа всех невырожденных комплексных матриц $GL_n(\mathbb{C})$ имеет вдвое большую размерность $2n^2$.

3. Группа матриц с единичным определителем $SL_n(\mathbb{R})$. Она задается одним уравнением $\det(g) - 1 = 0$. По теореме о неявной функции можно взять $n^2 - 1$ матричных элементов и тогда оставшийся выражается через них при помощи гладкой функции. Эти $n^2 - 1$ элементов и можно взять в качестве локальных параметров, размерность группы равна $n^2 - 1$. Единственное, что надо проверить, что дифференциал не равен нулю. На более конкретном языке это означает, что есть ненулевая частная производная.
   Проверим это сначала для случая $n = 2$. Тогда
$$\delta(\det g - 1) = g_{11}\delta g_{22} + g_{22}\delta g_{11} - g_{12}\delta g_{21} - g_{21}\delta g_{12} \tag{20}$$
   Мы видим, что $\delta(\det g - 1) = 0$ только если все матричные элементы g равны нулю, но такая матрица не лежит в $SL_2(\mathbb{R})$.
   Для произвольной матрицы g легко видеть, что $\delta \det g = \sum\limits_{i,j} G^{ij}\delta g_{ij}$, где G^{ij} – алгебраическое дополнение к матричному элементу g_{ij}. Т.к. $\det g = 1$, то одно из этих дополнений не равно 0, значит дифференциал невырожден.
   В частности в точке $g = E$, мы имеем
$$\delta \det g = \delta g_{11} + ... + \delta g_{nn} = \mathrm{Tr}\delta g \tag{21}$$
   Т.е. мы получили, что частные производные по координатам g_{ii} не равны нулю, в качестве локальных координат можно взять все координаты, кроме любой из них.

4. Через $O(n)$ обозначается группа всех ортогональных матриц. Ортогональные матрицы задаются уравнением $gg^T = E$. Т.к. матрица gg^T – симметрична, то уравнение $gg^T = E$ являет собой $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений на матричные элементы матрицы g, которых всего n^2. По теореме о неявной функции матрицы из $O(n)$ могут локально быть выражены через $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ параметров.
   Но для того, чтобы применить теорему о неявной функции надо проверить, что дифференциалы этих уравнений линейно независимы. Рассмотрим малое приращение $g = E + t\delta g + o(t)$. Подставляя это в уравнение на g, мы получаем, что в первом порядке $\delta g + \delta g^T = 0$. Это система линейных уравнений на δg, её решения это кососимметричные матрицы, которые образуют пространство размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Значит ранг системы равен $\frac{n(n+1)}{2}$ и совпадает с количеством уравнений, что и требовалось показать.

5. Через $SO(n)$ обозначается подгруппа $O(n)$, состоящая из ортогональных матриц с определителем 1. Соотношение $gg^T = E$ означает, что $\det g = \pm 1$. Поэтому условие единичного детерминанта исключает матрицы с детерминантом -1, но не уменьшает число параметров $\frac{n(n-1)}{2}$, которые требуются для характеристики матрицы g. Другими словами, $\dim SO(n) = \dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

6. Через $U(n)$ обозначается группа всех унитарных матриц. Унитарные матрицы задаются уравнением $gg^* = E$. Т.к. матрица gg^* – эрмитова, то уравнение $gg^* = E$ являет собой n^2 уравнений на матричные элементы матрицы g, которых всего n^2. По теореме о неявной функции матрицы из $U(n)$ могут локально быть выражены через $2n^2 - n^2 = n^2$ параметров.
   Но для того, чтобы применить теорему о неявной функции надо проверить, что дифференциалы этих уравнений линейно независимы. Рассмотрим малое приращение $g =$

$E + t\delta g + o(t)$. Подставляя это в уравнение на g, мы получаем, $gg^* = (E + t\delta g + o(t))(E + t\delta g^* + o(t)) = E + t(\delta g + \delta g^*) + o(t) = E$ что в первом порядке даёт $\delta g + \delta g^* = 0$. Это система линейных уравнений на δg, её решения это антиэрмитовы матрицы, которые образуют пространство размерности n^2. Значит ранг системы равен n^2 и совпадает с количеством уравнений, что и требовалось показать.

7. Через $SU(n)$ обозначается подгруппа $U(n)$, состоящая из унитарных матриц с определителем 1. Соотношение $gg^* = E$ означает, что $|\det g| = 1$. Поэтому условие единичного детерминанта накладывает одно дополнительное ограничение на матрицу g. Вычитая 1 из числа n^2 параметров унитарной матрицы, находим, что унитарная матрица с 1 детерминантом характеризуется $n^2 - 1$ параметрами. Другими словами, $\dim SU(n) = \dim U(n) - 1 = n^2 - 1$.

Выпишем отдельно размерности групп Ли:

Группа Ли над $\mathbb{R}$	Размерность	Группа Ли над $\mathbb{C}$	Размерность
$GL(n, \mathbb{R})$	n^2	$GL(n, \mathbb{C})$	$2n^2$
$SL(n, \mathbb{R})$	$n^2 - 1$	$SL(n, \mathbb{C})$	$2n^2 - 2$
$O(n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$		
$SO(n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$		
		$U(n)$	n^2
		$SU(n)$	$n^2 - 1$

Таблица 1: Размерности групп Ли

Определение 33. *Гомоморфизмом* групп Ли называется гладкий гомоморфизм групп. Биективный гомоморфизм называется *изоморфизмом.*

Примеры:

1. Отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $t \to e^t$ – изоморфизм групп Ли.
2. Отображение $\mathbb{R} \to S^1$, $t \to e^{2\pi i t}$ – гомоморфизм групп Ли с ядром $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.
3. Отображение $\det\colon GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – гомоморфизм групп Ли с ядром $SL(n, \mathbb{R})$.

Рассмотрим все возможные гладкие кривые $g(t)$, где $g(0) = E$. При малых t эта кривая имеет вид $g(t) = E + At + o(t)$, где $A = g'(0)$.

Определение 34. Множество таких A называется *касательным пространством* к G в точке E и обозначается $T_E G$.

Заметим, что $T_E G$ является векторным пространством. Действительно, если есть две кривые $g_1(t) = E + A_1 t + o(t)$ и $g_2(t) = E + A_2 t + o(t)$, то их прозведение имеет вид $g_1(t) g_2(t) = E + (A_1 + A_2)t + o(t)$. Значит, если $A_1, A_2 \in T_E G$, то $A_1 + A_2 \in T_E G$. Кроме того, если рескалироть параметр t, т.е. взять кривую $g_3(t) = g_1(\lambda t) = E + \lambda A_1 t + o(t)$, то мы получаем, что если $A_1 \in T_E G$, то $\lambda A_1 \in T_E G$.
Укажем, что это за векторные пространства для примеров выше. В случае группы $G = SO(2)$ оно порождено матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. В случае группы $G = SL(n, \mathbb{R})$ мы нашли, что матрица A должна удовлетворять условию $\mathrm{Tr} A = 0$. В случае $G = SO(n)$ матрица A антисимметрична $A = -A^T$. В случае $G = SU(n)$ матрица A антиэрмитова $A = -A^*$.

Аналогично можно определить касательное пространство к любой точке $g \in G$ (подобно тому как есть касательное пространство к сфере в любой её точке). Это касательное пространство обозначается $T_g G$, оно всегда будет векторным пространством, для этого структура группы на самом деле не нужна. Но для следующих свойств $T_E G$ структура группы уже является необходимой.

Рассмотрим гладкую кривую $g(t) = E + At + o(t)$. Тогда $\forall h \in G$ кривая $\tilde{g}(t) = hg(t)h^{-1} = E + hAh^{-1}t + o(t)$ тоже является гладкой и $\tilde{g}(0) = E$. То есть, мы доказали, что если $A \in T_E G$ и $h \in G$, то элемент $hAh^{-1} \in T_E G$. Значит, пространство $T_E G$ имеет структуру представления группы G. Такое представление есть для любой группы Ли G, оно называется *присоединенным представлением.*

Пусть теперь элемент h также зависит от параметра, другими словами, рассмотрим кривую $h(s) = E + Bs + o(s)$. Тогда $\forall s \hookrightarrow h(s)Ah(s)^{-1} \in T_E G$.

$$h(s)Ah(s)^{-1} = (E + Bs + o(s))A(E - Bs + o(s)) = A + (BA - AB)s + o(s) \tag{22}$$

Дифференцируя по s, мы получаем, что $BA - AB \in T_E G$. Это выражение называется коммутатором матриц B, A и обозначается $[B, A]$.

Резюмируя, мы получили, что векторное пространство $T_E G$ является замкнутым относительно действия группы G сопряжениями и взятия коммутатора.

Определение 35. *Представлением* группы Ли G в векторном пространстве V называется гомоморфизм групп Ли $\rho : G \to GL(V)$.

Примеры:

1. *Тавтологическое* представление $GL_n(\mathbb{R})$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.
2. *Присоединенное* представление $GL_n(\mathbb{R})$ в пространстве $n \times n$-матриц сопряжениями.
3. Ограничение этих представлений на какую-либо подгруппу Ли в $GL_n(\mathbb{R})$.

Определение 36. Пусть G – группа Ли. $\forall a \in G$ рассмотрим

$$\mathrm{Ad}_a(\xi) = \frac{d}{dt}(ae^{\xi t}a^{-1})|_{t=0} \tag{23}$$

Полученное действие

$$\mathrm{Ad} : G \to Gl(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{Ad}(a) = \mathrm{Ad}_a \tag{24}$$

называется *присоединённым представлением.* Образ группы Ли G при присоединённом представлении называется *присоединённой группой группы* G и обозначается $\mathrm{Ad}\, G$.

Если $G \subset GL(V)$ – линейная группа в пространстве V, то

$$\mathrm{Ad}_a X = aXa^{-1} \tag{25}$$

Предложение 37. *Всякая одномерная группа Ли изоморфна $\mathbb{R}$ по сложению или S^1 по умножению.*

1.6 Алгебры Ли

Определение 38. Пусть A – векторное пространство над полем K, снабжённое билинейной операцией $\cdot : A \times A \to A$ (умножением), т.е. $\forall x, y, z \in A, a, b \in K$

1. $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
2. $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$
3. $(ax) \cdot (by) = ab(x \cdot y)$

Тогда A называется *алгеброй над* K.

Определение 39. Алгебра называется *ассоциативной*, если операция умножения в ней ассоциативна.

Определение 40. *Алгеброй Ли* называется векторное пространство с билинейной операцией (коммутатором) $[\cdot, \cdot]$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

1. (кососимметричность или антикоммутативность) $[x, y] = -[y, x]$.
2. (тождество Якоби) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Например, коммутатор матриц $[A, B] = AB - BA$ удовлетворяет антикоммутативности и тождеству Якоби.

Определение 41. *Дифференцированием* алгебры A называется линейный оператор $D : A \to A$, для которого выполнено тождество Лейбница: $D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$.

Все дифференцирования алгебры А образуют векторное пространство.

Предложение 42. *Пусть D_1, D_2 – дифференцирования алгебры A. Тогда $D_1D_2 - D_2D_1$ – тоже дифференцирование алгебры A.*

Определение 43. *Центром алгебры* Ли $\mathfrak{g}$ называется подпространство $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$, состоящее из элементов $x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}$.

Определение 44. Пусть $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ – алгебры Ли. Линейное отображение $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ называется *гомоморфизмом алгебр Ли*, если $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \ \forall x, y \in \mathfrak{g}_1$. *Ядром* гомоморфизма $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ называется подпространство $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{x \in \mathfrak{g}_1 | \varphi(x) = 0\}$. *Образом* гомоморфизма $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ называется подпространство $\mathrm{Im}\ \varphi = \{\varphi(x) | x \in \mathfrak{g}_1\} \subset \mathfrak{g}_2$. Взаимно однозначный гомоморфизм алгебр Ли называется *изоморфизмом алгебр Ли*.

Определение 45. С каждым элементом x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно связать присоединенный оператор $ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, переводящий $y \in \mathfrak{g}$ в $[x, y] \in \mathfrak{g}$ для всевозможных $y \in \mathfrak{g}$.

1.7 Представления алгебр Ли

Определение 46. *Представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V называется пара (V, ρ), где гомоморфизм алгебр Ли $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ (т.е. $\forall x, y \in \mathfrak{g} \hookrightarrow \rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)]$).

Определение 47. *Подпредставлением* представления (V, ρ) называется подпространство $V' \subset V$, инвариантное относительно всех операторов $\rho(x)$, $x \in \mathfrak{g}$.

Определение 48. Представление называется *неприводимым*, если любое его подпредставление есть либо V, либо 0.

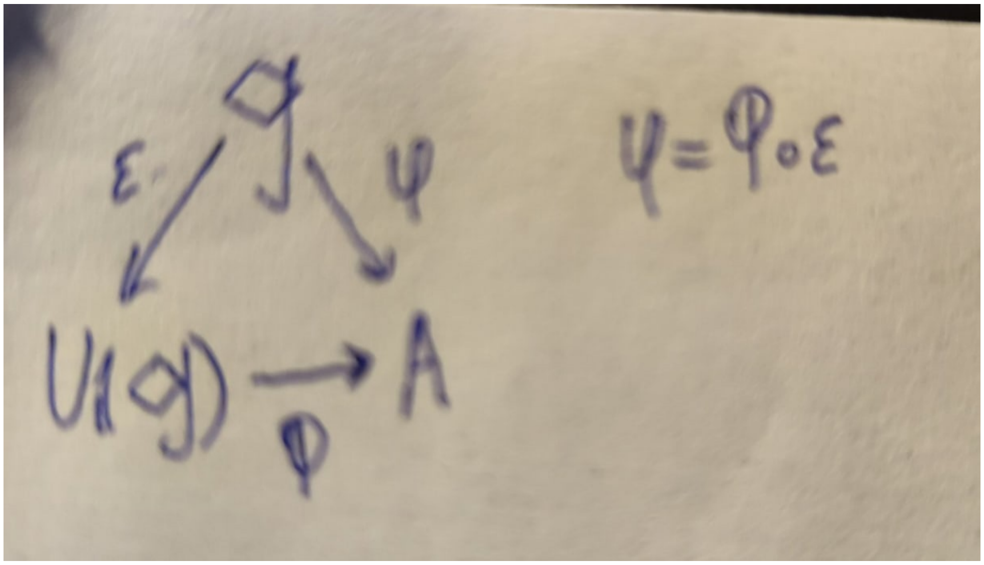

Рис. 1: Универсальное свойство

Определение 49. Пусть (V_1, ρ_1) и (V_2, ρ_2) – представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. *Прямая сумма* этих представлений – это представление в пространстве $V_1 \oplus V_2 : \rho(x)(v_1 \oplus v_2) = \rho_1(x)v_1 \oplus \rho_2(x)v_2$.

Определение 50. Представление называется *неразложимым*, если оно не представляется в виде прямой суммы собственных подпредставлений.

Определение 51. Представление называется *вполне приводимым*, если каждое его подпредставление выделяется прямым слагаемым (т.е. для любого подпредставления $V' \subset V$ существует подпредставление $V'' \subset V$ такое, что $V = V' \oplus V''$).

Примеры представлений:

Определение 52. Пусть (V_1, ρ_1) и (V_2, ρ_2) – представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тензорное произведение этих представлений – это представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $V_1 \otimes V_2$, в котором элементы алгебры Ли действуют по правилу Лейбница

$$\rho(x) = \rho_1(x) \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2(x) \quad \forall x \in \mathfrak{g} \tag{26}$$

1.8 Универсальная обёртывающая алгебра

Построение универсальной обёртывающей алгебры пытается процесс построения A_L из A: для данной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над K находят «наиболее общую» ассоциативную K-алгебру $U(\mathfrak{g})$: алгебра Ли $U_L(\mathfrak{g})$ содержит $\mathfrak{g}$. Важное ограничение – сохранение теории представлений: представления $\mathfrak{g}$ соотносятся точь-в-точь так же как и модули над $U(\mathfrak{g})$. В типичном контексте, где $\mathfrak{g}$ задаётся инфинитезимальными преобразованиями, элементы $U(\mathfrak{g})$ действуют как дифференциальные операторы всех порядков.

Определение 53. *Универсальной обертывающей алгеброй* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется пара $(U(\mathfrak{g}), \varepsilon)$, где $U(\mathfrak{g})$ – ассоциативная алгебра с единицей, $\varepsilon : \mathfrak{g} \to U_L(\mathfrak{g})$ – гомоморфизм алгебр Ли (т.е. $\varepsilon([x, y]) = [\varepsilon(x), \varepsilon(y)]$), обладающий следующим *универсальным свойством*: $\forall$ ассоциативной алгебры A и гомоморфизма алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{g} \to A_L$ (т.е. $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$) $\exists!$ гомоморфизм ассоциативных алгебр $\Phi : U(\mathfrak{g}) \to A : \varphi = \Phi \circ \varepsilon$ (рис. 1).

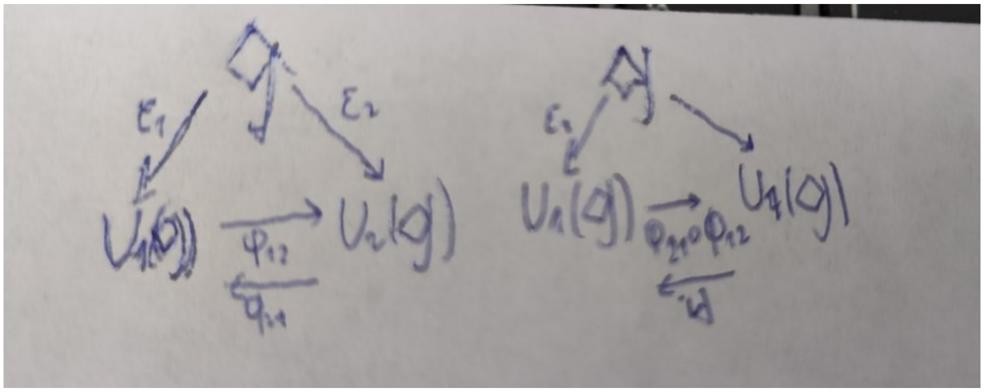

Рис. 2: Единственность универсальной обёртывающей

Из универсального свойства, в частности, следует, что любое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ несет структуру представления ассоциативной алгебры $U(\mathfrak{g})$, причем любой гомоморфизм представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть также и гомоморфизм представлений $U(\mathfrak{g})$. Для этого нужно в качестве ассоциативной алгебры взять $A = \mathrm{End}(V)$.

Предложение 54. *Универсальная обёртывающая алгебра единственна с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. От противного, пусть $\exists$ две универсальные обёртывающие алгебры $(U_1(\mathfrak{g}), \varepsilon_1)$ и $(U_2(\mathfrak{g}), \varepsilon_2)$. Тогда из универсального свойства (рис. 2) следует единственность. $\square$

Предложение 55. *Универсальная обёртывающая алгебра $\exists$ $\forall$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Зададим алгебру $U(\mathfrak{g})$ явно образующими и соотношениями. Пусть $T(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \oplus ...$ – тензорная алгебра пространства $\mathfrak{g}$ (т.е. свободная ассоциативная алгебра, порождённая пространством $\mathfrak{g}$) и пусть $J \subset T(\mathfrak{g})$ – двусторонний идеал, порождённый элементами $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ $\forall x, y \in \mathfrak{g}$. Тогда ассоциативная алгебра $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J$ с тождественным отображением $\epsilon : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \subset T(\mathfrak{g})$ обладает требуемым универсальным свойством. Иначе говоря, пусть $x_1, ..., x_n$ – базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и пусть $[x_i, x_j] = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$. Тогда $U(\mathfrak{g})$ – ассоциативная алгебра с образующими $x_1, ..., x_n$ и определяющими соотношениями $x_i x_j - x_j x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$, причём $\epsilon(x_i) = x_i$: $U(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\left\langle x_1, ..., x_n \right\rangle / (x_i x_j - x_j x_i - \sum\limits_{k} c_{ij}^k x_k)$. $\square$

Пример. Для абелевой группы Ли L с базисом $x_1, ..., x_n$ универсальная обёртывающая алгебра $U(L)$ – симметрическая алгебра $S(L) := T(L)/(x_i x_j - x_j x_i)$, т.е. алгебра многочленов $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$.

Предложение 56. *Пусть $x_1, ..., x_n$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Элементы вида $x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$ образуют полную систему в универсальной обёртывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ (любой элемент $U(\mathfrak{g})$ может быть линейно выражен через такие упорядоченные мономы).*

Доказательство. Мономы вида $x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_N}$ образуют полную систему в универсальной обёртывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = N$ – степень упорядоченного монома. Докажем утверждение по индукции.

- База индукции: $N = 1$, верно.

- Пусть верно для всех $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i < N$.
- Докажем, что верно для $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = N$. Если в какой-то части монома $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N}$ индексы расположены не по возрастанию, то их можно переставить, используя коммутационное соотношение $x_{i_1}x_{i_2} = x_{i_2}x_{i_1} + [x_{i_1}, x_{i_2}]$. При этом получится упорядоченный моном и мономы меньшего размера, для которых утверждение доказано.

$\square$

Теорема 57 (Пуанкаре-Биркгофа-Витта)**.** *Если $x_1, ..., x_n$ – базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то мономы $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ образуют базис в пространстве $U(\mathfrak{g})$.*
Эквивалентная формулировка. Пусть $i : S(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})$ – вложение (симметризация):

$$i(v_1 \cdot v_2 \cdot ... \cdot v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)} \tag{27}$$

Пусть $\tau : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ – отображение факторизации. Тогда $\sigma = \tau \circ i$ – отображение симметризации – является изоморфизмом векторных пространств и представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. рис. 3). На самом деле это изоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей относительно присоединённого действия.

2 Задачи к зачёту

1. Постройте сюрьективный гомоморфизм $SL(2, \mathbb{R})$ на $SO(2, 1)$. Найдите ядро.
2. То же для групп $SL(2, \mathbb{C})$ и $SO(3, 1)$.
3. Найдите максимальную компактную подгруппу в $SL(2, \mathbb{C})$ и покажите,что факторпространство изоморфно пространству Лобачевского.
4. Покажите, что на факторпространстве из предыдущей задачи имеестя единственная инвариантная метрика. Найдите все инвариантные дифференциальные операторы (метрика единственна с точностью до константы). Найдите геодезические.
5. Найдите все подмодули в тензорном произведении двумерного представления $\mathfrak{sl}(2)$ на модуль Верма (ответ зависит от старшего веса модуля Верма).
6. Докажите что квадратичный казимир порождает центр универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{sl}(2)$.
7. Найдите кубический центральный элемент в универсальной обертывающей для $\mathfrak{sl}(3)$.
8. Найдите 2 модуля Верма для $\mathfrak{sl}(2)$, тензорное произведение которых не вполне приводимо.
9. Покажите, что на группе $SU(2)$ имеется биинвариантная метрика. Найдите геодезические.
10. Функции на группе $SU(2)$ – представление той же группы, которая действует сопряжением. Разложить его на неприводимые.
11. Универсальная обертывающая $\mathfrak{sl}(2)$ – представление $\mathfrak{sl}(2)$, которое действует посредством коммутатора. Разложить его на неприводимые.