Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Общая теория относительности
(М.Ю. Лашкевич)

Коцевич Андрей Витальевич, группа Б02-920

5 семестр, 2021

Содержание

1 Геометрия и физика специальной теории относительности

В решении задач лекции 1 положим скорость света $c = 1$.

1.1. Покажите, что прямой мировой линии отвечает именно минимум (а не максимум) действия $S = -m\int\limits_A^B ds$, то есть максимум собственного времени $s = \int\limits_A^B ds$. Приведите примеры мировых линий, отвечающих наименьшему собственному времени. Чему равно это время?
Решение.
Будем считать, что все элементы ds вдоль мировых линий времениподобны. Прямая мировая линия соответствует равномерному прямолинейному движению. Перейдём в инерциальную систему отсчёта, движущуюся с такой скоростью, чтобы ось времени прошла через AB (это возможно, если A и B разделены времениподобным интервалом). При движении по прямой тело будет неподвижным, а по кривой будет двигаться ненулевой промежуток времени. Покоящиеся часы показывают всегда больший промежуток времени t (в данном случае оно является собственным вдоль прямой), чем движущиеся τ:

$$\tau = \int\limits_A^B dt\sqrt{1 - v(t)^2} \tag{1}$$

Таким образом, действие $S = -m\int\limits_A^B ds$ имеет минимальное значение, если оно берётся по прямой мировой линии, соединяющей A и B.
Наименьшее собственное время достигается на световой мировой линии ($|\vec{r}_B - \vec{r}_A| = t_{AB}$):

$$s = \sqrt{t_{AB}^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2} = \sqrt{t_{AB}^2 - |\vec{r}_B - \vec{r}_A|^2} = 0 \tag{2}$$

Перейдём в какую-либо плоскость, содержащую A и B. Существует траектория, собственное время движения по которой 0: движение по ломаной, состоящей из 2 отрезков, скорость движения по которым 1 и -1. Любые 2 точки можно соединить этими 2 отрезками, поскольку векторы, параллельные им, образуют ортогональный базис на плоскости. Меньшего собственного времени быть не может, поскольку оно неотрицательно.

1.2. В случае системы нескольких свободных частиц момент импульса равен сумме их моментов:

$$J^{\mu\nu} = \sum_s (x_s^\mu p_s^\nu - x_s^\nu p_s^\mu) \tag{3}$$

Покажите, что сохранение компонент J^{0i} эквивалентно тому, что центр инерции системы

$$\vec{R} = \frac{\sum\limits_s E_s \vec{r}_s}{\sum\limits_s E_s} \tag{4}$$

движется с постоянной скоростью.
Решение.
Компоненты J^{0i} сохраняются ($i \in \{1, 2, 3\}$, поскольку $J^{ii} = 0$ из кососимметричности):

$$J^{0i} = \sum_s (x_s^0 p_s^i - x_s^i p_s^0) = \sum_s (t_s p_s^i - x_s^i E_s) \tag{5}$$

Следовательно, сохраняется и вектор:

$$\sum_s (t_s\vec{p}_s - \vec{r}_s E_s) = t\sum_s \vec{p}_s - \vec{R}\sum_s E_s = \text{const} \tag{6}$$

Полный импульс $\sum\limits_s \vec{p}_s$ и энергия $\sum\limits_s E_s$ сохраняются, поэтому

$$\sum_s \vec{p}_s - \vec{V}\sum_s E_s = 0 \tag{7}$$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{\sum\limits_s \vec{p}_s}{\sum\limits_s E_s} = \text{const}} \tag{8}$$

1.3. Покажите, что при калибровочном преобразовании

$$A \to A + d\chi \tag{9}$$

где $\chi(x)$ — произвольное скалярное поле, действие $S = \int\limits_A^B (-mds - eA)$ преобразуется как

$$S \to S + e(\chi(x_A) - \chi(x_B)) \tag{10}$$

Объясните, почему отсюда следует, что уравнение движения частицы не меняется при калибровочных преобразованиях.
Решение.

$$S = \int\limits_A^B (-mds - e(A + d\chi)) = \int\limits_A^B (-mds - eA)) + e(\chi(x_A) - \chi(x_B)) \tag{11}$$

Т.е. действие преобразуется как

$$\boxed{S \to S + e(\chi(x_A) - \chi(x_B))} \tag{12}$$

При вариации действия $\delta S = 0$ значения функции χ в точках A и B закреплены:

$$\delta\chi(x_A) = \delta\chi(x_B) = 0 \tag{13}$$

Следовательно, уравнения движения никак не изменятся.

1.4. Выведите уравнение $m\frac{du^\mu}{ds} = eF^\mu{}_\nu u^\nu$.
Решение.
Запишем действие частицы в электромагнитном поле:

$$S[x] = \int\limits_A^B (-mds - eA_\mu dx^\mu) \tag{14}$$

Распишем ds:

$$ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu} = d\tau\sqrt{\frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}} = d\tau\sqrt{u_\mu u^\mu} \tag{15}$$

$$S[x]=-\int\limits_A^B d\tau(m\sqrt{u_\mu u^\mu}+eA_\mu u^\mu)\to L=-(m\sqrt{u_\mu u^\mu}+eA_\mu u^\mu) \tag{16}$$

Действие расписано таким образом, поскольку параметром эволюции является собственное время τ. Выбор параметра эволюции фиксируют в виде определённого условия (связи). В действие необходимо внести вклад с множителем Лагранжа λ:

$$S[x]=-\int\limits_A^B d\tau(m\sqrt{u_\mu u^\mu}+eA_\mu u^\mu)+\lambda\int\limits_A^B d\tau(u_\mu u^\mu-1) \tag{17}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\lambda}=u_\mu u^\mu-1=0 \tag{18}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа (выберем $\lambda=0$):

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu}=\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu}=-m\frac{2u_\mu}{2\sqrt{u_\rho u^\rho}}-eA_\mu(x(\tau))\to\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu}=-m\frac{du_\mu}{\sqrt{u_\rho u^\rho}d\tau}-e\partial_\nu A_\mu\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=-eu^\nu\partial_\mu A_\nu \tag{21}$$

Подставим в (19):

$$m\frac{du_\mu}{ds}=eu^\nu\partial_\mu A_\nu-eu^\nu\partial_\nu A_\mu \tag{22}$$

$$m\frac{du_\mu}{ds}=eu^\nu(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)=eu^\nu F_{\mu\nu} \tag{23}$$

$$\boxed{m\frac{du^\mu}{ds}=eF^\mu{}_\nu u^\nu} \tag{24}$$

1.5. * Рассмотрите незаряженную частицу во внешнем скалярном поле, которое описывается зависящей от точки массой $m(x)$ в действии $S[x^\mu(\tau)]=\int\limits_A^B(-m(x)ds-eA_\mu dx^\mu)$, зависящей от точки в пространстве-времени. Получите уравнения движения такой частицы. Найдите гамильтониан и обобщенные импульсы. Покажите, что если $m(x)=m_0+U(x)$, $U(x)\ll m_0$ и если $U(x)$ меняется со временем x_0 достаточно (насколько?) медленно, то в нерелятивистском пределе эти уравнения описывают частицу во внешнем потенциальном поле $U(x)$.

Решение.

Поскольку частица не заряжена, то $e=0$ и её действие:

$$S[x]=-\int\limits_A^B m(x)ds=-\int\limits_A^B d\tau m(x)\sqrt{u_\mu u^\mu}\to L=-m(x)\sqrt{u_\mu u^\mu} \tag{25}$$

Действие записано в аналогичном задаче 1.4 виде.

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu}=-\frac{m(x)u_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}}\to\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu}=-m(x)\frac{du_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}d\tau}-\partial_\nu m(x)\frac{dx^\nu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}d\tau}u_\mu \tag{26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -\partial_\mu m(x)\sqrt{u_\mu u^\mu} \tag{27}$$

Подставим в (19) и получим уравнение движения:

$$\boxed{m(x)\frac{du_\mu}{ds} = \partial_\mu m(x) - u_\mu u^\nu \partial_\nu m(x)} \tag{28}$$

Перепишем действие через координатное время:

$$S[x] = -\int_A^B m(\vec{r},t)ds = -\int_A^B dt m(\vec{r},t)\sqrt{1-\vec{v}^2} \to L = -m(\vec{r},t)\sqrt{1-\vec{v}^2} \tag{29}$$

Обобщённый импульс:

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m(\vec{r},t)\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}} \tag{30}$$

Гамильтониан:

$$\boxed{H(\vec{r},\vec{P},t) = \vec{v}\vec{P} - L = \frac{m(\vec{r},t)}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \sqrt{m(\vec{r},t)^2 + P^2}} \tag{31}$$

Подставим $m(x) = m_0 + U(x)$, $U(x) \ll m_0$ в уравнение движения (28):

$$m_0\frac{du_\mu}{ds} = \partial_\mu U(x) - u_\mu u^\nu \partial_\nu U(x) \tag{32}$$

Перейдём к нерелятивистскому пределу. Для временной компоненты $\mu = 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v^2}{2}\right) = \partial_0 U(x) - \frac{1}{1-v^2}(\partial_0 U(x) + v^\alpha \partial_\alpha U(x)), \quad \alpha \in \{1,2,3\} \tag{33}$$

В нерелятивистском пределе все $v^\mu \ll 1$. Получим закон сохранения энергии:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = -v^\alpha \partial_\alpha U(x)} \tag{34}$$

Для пространственной компоненты $\mu \in \{1,2,3\}$:

$$-\frac{m_0}{1-v^2}\frac{dv^\mu}{dt} = \partial^\mu U(x) + \frac{v^\mu}{1-v^2}(\partial_0 U(x) + v^\alpha \partial_\alpha U(x)), \quad \alpha \in \{1,2,3\} \tag{35}$$

Последнее слагаемое $v^\alpha \partial_\alpha U(x)\frac{v^\mu}{1-v^2} \ll \partial^\mu U(x)$. Второе слагаемое можно не учитывать в случае:

$$\boxed{v^\mu \partial_0 U(x) \ll \partial^\mu U(x)} \tag{36}$$

Внешнее поле создают некоторые тела. Условие (36) соответствует тому, что скорость этих тел не должна превышать скорости света. Если оно выполняется во время всего движения, то получим II закон Ньютона:

$$\boxed{m_0\frac{dv^\mu}{dt} = -\partial^\mu U(x)} \tag{37}$$

2 Основные понятия дифференциальной геометрии и пространство-время

2.1. Рассмотрим две системы координат $\{x^\mu\}$ и $\{x'^\nu = f^\nu(x^\mu)\}$ в некоторой области многообразия M. Пусть $a = a^\mu \partial_\mu = a'^\mu \partial'_\mu \in TM_{x_0}$. Получите закон преобразования компонент вектора

$$a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu \tag{38}$$

Частные производные здесь понимаются в следующем смысле: $\partial_\nu x'^\mu = f^\mu{}_{,\nu}(x^\nu)|_{x^\nu = x_0^\nu}$.
Пусть $\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\mu dx'^\mu \in T^*M_{x_0}$. Получите закон преобразования компонент формы

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu \tag{39}$$

Частные производные здесь понимаются в смысле $\partial'_\mu x^\nu = (f^{-1})^\nu{}_{,\mu}(f^\kappa(x^\lambda))|_{x^\lambda = x_0^\lambda}$. Наконец, напишите закон преобразования компонент произвольного тензора $a \in T^m_n M_{x_0}$.
Решение.
Производная сложной функции:

$$\partial_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \partial'_\mu \tag{40}$$

$$a^\nu \partial_\nu = a^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \partial'_\mu = a'^\mu \partial'_\mu \tag{41}$$

$$\boxed{a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu} \tag{42}$$

Посчитаем значение формы на векторе $a = a^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$:

$$\omega(a) = \omega_\nu dx^\nu(a) = \omega_\nu dx^\nu \left(a^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right) = \omega_\nu a^\nu = \omega'_\mu a'^\mu \tag{43}$$

$$\boxed{\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu} \tag{44}$$

Произвольный тензор $a = a^{\kappa_1 \ldots \kappa_m}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \partial_{\kappa_1} \ldots \partial_{\kappa_m} dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_n} = a'^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_n} \partial'_{\mu_1} \ldots \partial'_{\mu_m} d'x^{\nu_1} \ldots d'x^{\nu_n}$. Его закон преобразования:

$$\boxed{a'^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\kappa_1}} \ldots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\kappa_m}} \frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \ldots \frac{\partial x^{\lambda_n}}{\partial x'^{\nu_n}} a^{\kappa_1 \ldots \kappa_m}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}} \tag{45}$$

2.2. Рассмотрим двумерное аффинное пространство. На этом пространстве имеется естественная связность, в которой $\nabla_\mu = \partial_\mu$ в линейных координатах. Найдите символы Кристоффеля этой связности в полярных координатах $r, \varphi : x^1 = r \cos\varphi, x^2 = r \sin\varphi$.
Решение.

$$(\nabla_\sigma a)^\kappa = \partial_\sigma a^\kappa + \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} a^\rho \tag{46}$$

Учтём естественную связность в линейных координатах:

$$\Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} = 0 \tag{47}$$

Частные производные:

$$\frac{\partial x^1}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial x^2}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = r\cos\varphi \tag{48}$$

$$\partial_r = \partial_1 \frac{\partial x^1}{\partial r} + \partial_2 \frac{\partial x^2}{\partial r} = \cos\varphi \partial_1 + \sin\varphi \partial_2, \quad \partial_\varphi = \partial_1 \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \partial_2 \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = r(-\sin\varphi \partial_1 + \cos\varphi \partial_2) \tag{49}$$

$$\partial_1 = \partial_r \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi, \quad \partial_2 = \sin\varphi \partial_r + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi \tag{50}$$

$$\frac{\partial^2 x^1}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x^1}{\partial r \partial \varphi} = -\sin\varphi, \quad \frac{\partial^2 x^1}{\partial \varphi^2} = -r\cos\varphi, \quad \frac{\partial^2 x^2}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x^2}{\partial r \partial \varphi} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial^2 x^2}{\partial \varphi^2} = -r\sin\varphi$$

Определим 8 символов Кристоффеля, используя закон их преобразования при преобразовании координат $x^\mu = x^\mu(x'^\kappa)$:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} = \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} \tag{51}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial r^2}\partial_1 r + \frac{\partial^2 x^2}{\partial r^2}\partial_2 r = 0 \tag{52}$$

$$\Gamma^r_{r\varphi} = \Gamma^r_{\varphi r} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial r \partial \varphi}\partial_1 r + \frac{\partial^2 x^2}{\partial r \partial \varphi}\partial_2 r = -\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi = 0 \tag{53}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial \varphi^2}\partial_1 r + \frac{\partial^2 x^2}{\partial \varphi^2}\partial_2 r = -r\cos^2\varphi - r\sin^2\varphi = -r \tag{54}$$

$$\Gamma^\varphi_{rr} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial r^2}\partial_1 \varphi + \frac{\partial^2 x^2}{\partial r^2}\partial_2 \varphi = 0 \tag{55}$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial r \partial \varphi}\partial_1 \varphi + \frac{\partial^2 x^2}{\partial r \partial \varphi}\partial_2 \varphi = \frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\cos^2\varphi}{r} = \frac{1}{r} \tag{56}$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial \varphi^2}\partial_1 \varphi + \frac{\partial^2 x^2}{\partial \varphi^2}\partial_2 \varphi = \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi = 0 \tag{57}$$

$$\boxed{\Gamma^r_{rr} = \Gamma^r_{r\varphi} = \Gamma^r_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{rr} = \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r, \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}} \tag{58}$$

2.3. Проверьте эквивалентность определений кручения:

$$T(a,b) = \nabla_a b - \nabla_b a - [a,b] \ (\forall a, b \in C^1(TM)) \Leftrightarrow T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{59}$$

Решение.
Разложим a, b и $T(a,b)$ по базису:

$$a = a^\mu \partial_\mu, \quad b = b^\nu \partial_\nu, \quad T(a,b) = a^\mu b^\nu T^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda \tag{60}$$

$$
\begin{aligned}
T(a,b) = \nabla_a b - \nabla_b a - [a,b] = \nabla_{a^\mu \partial_\mu} b - \nabla_{b^\nu \partial_\nu} a - [a^\mu \partial_\mu, b^\nu \partial_\nu] = a^\mu \nabla_\mu b - b^\nu \nabla_\nu a - \\
- a^\mu \partial_\mu (b^\nu \partial_\nu) + b^\nu \partial_\nu (a^\mu \partial_\mu) = a^\mu (\nabla_\mu b)^\lambda \partial_\lambda - b^\nu (\nabla_\nu a)^\lambda \partial_\lambda - a^\mu (\partial_\mu b^\nu) \partial_\nu - a^\mu b^\nu \partial_\mu \partial_\nu + \\
+ b^\nu (\partial_\nu a^\mu) \partial_\mu + b^\nu a^\mu \partial_\nu \partial_\mu = a^\mu (\partial_\mu b^\lambda) \partial_\lambda + a^\mu \Gamma^\lambda_{\nu\mu} b^\nu \partial_\lambda - b^\nu (\partial_\nu a^\lambda) \partial_\lambda - b^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} a^\mu \partial_\lambda - \\
- a^\mu (\partial_\mu b^\nu) \partial_\nu + b^\nu (\partial_\nu a^\mu) \partial_\mu = a^\mu b^\nu (\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) \partial_\lambda \quad (61)
\end{aligned}
$$

Как видно,

$$
\boxed{T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}} \quad (62)
$$

2.4. Получите символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты.
Решение.
Для согласованной со связностью метрикой $g_{\mu\nu}$ выполняется:

$$
(\nabla_\lambda g)_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda} = 0 \quad (63)
$$

$$
\partial_\mu g_{\kappa\nu} = \Gamma_{\nu\kappa\mu} + \Gamma_{\kappa\nu\mu}, \quad \partial_\nu g_{\kappa\mu} = \Gamma_{\mu\kappa\nu} + \Gamma_{\kappa\mu\nu}, \quad \partial_\kappa g_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu\kappa} + \Gamma_{\mu\nu\kappa} \quad (64)
$$

Для связности без кручения выполняется:

$$
\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \to \Gamma_{\lambda\nu\mu} = \Gamma_{\lambda\mu\nu} \quad (65)
$$

$$
\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\kappa\mu} + \Gamma_{\kappa\nu\mu} + \Gamma_{\mu\kappa\nu} + \Gamma_{\kappa\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\kappa} - \Gamma_{\mu\nu\kappa} = 2\Gamma_{\kappa\mu\nu} \quad (66)
$$

$$
\boxed{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\kappa}}{2} (\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})} \quad (67)
$$

2.5. * Выведите закон преобразования символов Кристоффеля.
Решение.
Определение символов Кристоффеля:

$$
\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \quad (68)
$$

Пусть произошло преобразование координат:

$$
x^\mu = x^\mu(x'^\nu) \quad (69)
$$

$$
\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \partial'_\sigma \quad (70)
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu \partial_\nu = \nabla_\mu \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \partial'_\sigma \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \right) \partial_{\sigma'} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \nabla_\mu \partial'_\sigma = \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \partial'_\sigma + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \nabla_{\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \partial'_\rho} \partial'_\sigma = \\
= \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\sigma} \partial_\lambda + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \nabla'_\rho \partial'_\sigma = \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\sigma} \partial_\lambda + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} \partial_\lambda \quad (71)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}} \quad (72)
$$

3 Риманова кривизна. Преобразования тензорных полей

3.1. Выведите $f^{\kappa\mu} = \varepsilon^2(b^\kappa c^\mu - b^\mu c^\kappa)$ и покажите, что тензор $f^{\mu\nu}$ определяет площадь этого параллелограмма.
Решение.

$$f^{\kappa\mu} = \int_0^1 d\tau \delta\varphi^k(\tau)\delta\dot{\varphi}^\mu(\tau) \tag{73}$$

$$\delta\varphi^\kappa = x^\kappa, \quad \delta\dot{\varphi}^\mu d\tau = dx^\mu \tag{74}$$

где x^κ – координаты кривой. По теореме Стокса:

$$f^{\kappa\mu} = \int_{\partial S} x^\kappa dx^\mu = \int_S dx^\kappa \wedge dx^\mu \tag{75}$$

где $S = \{\beta\varepsilon\vec{b} + \gamma\varepsilon\vec{c} : \beta, \gamma \in [0,1]\}$ – параллелограмм со сторонами εb^κ и εc^κ и $f^{\kappa\mu}$ – проекции его площади на соответствуюшие плоскости.

$$x^\kappa = \varepsilon\beta b^\kappa + \varepsilon\gamma c^\kappa \tag{76}$$

$$f^{\kappa\mu} = \varepsilon^2 \int_S (b^\kappa d\beta + c^\kappa d\gamma) \wedge (b^\mu d\beta + c^\mu d\gamma) = \varepsilon^2 \int_S (b^\kappa c^\mu - c^\kappa b^\mu) d\beta \wedge d\gamma = \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^1 (b^\kappa c^\mu - c^\kappa b^\mu) d\beta d\gamma$$

$$\boxed{f^{\kappa\mu} = \varepsilon^2(b^\kappa c^\mu - c^\kappa b^\mu)} \tag{77}$$

3.2. Получите $R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$ из $R(b,c)a = [\nabla_b, \nabla_c]a - \nabla_{[b,c]}a$. Покажите, что риманов тензор кривизны действительно является тензором.
Решение.
Разложим a, b и $R(b,c)a$ по базису:

$$a = a^\lambda \partial_\lambda, \quad b = b^\mu \partial_\mu, \quad c = c^\nu \partial_\nu, \quad R(b,c)a = a^\lambda b^\mu c^\nu R^\kappa_{\lambda\mu\nu} \partial_\kappa \tag{78}$$

$$\begin{aligned} R(b,c)a = [\nabla_b, \nabla_c]a - \nabla_{[b,c]}a = \nabla_{b^\mu\partial_\mu}\nabla_{c^\nu\partial_\nu}a - \nabla_{c^\nu\partial_\nu}\nabla_{b^\mu\partial_\mu}a - \nabla_{[b^\mu\partial_\mu, c^\nu\partial_\nu]}a = \\ = b^\mu\nabla_\mu(c^\nu\nabla_\nu a) - c^\nu\nabla_\nu(b^\mu\nabla_\mu a) - b^\mu(\partial_\mu c^\nu)\nabla_\nu a + c^\nu(\partial_\nu b^\mu)\nabla_\mu a \end{aligned} \tag{79}$$

$$\nabla_\nu a = (\nabla_\nu a)^\kappa \partial_\kappa = (\partial_\nu a^\kappa)\partial_\kappa + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} a^\lambda \partial_\kappa, \quad \nabla_\mu a = (\nabla_\mu a)^\kappa \partial_\kappa = (\partial_\mu a^\kappa)\partial_\kappa + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} a^\lambda \partial_\kappa \tag{80}$$

$$\begin{aligned} b^\mu\nabla_\mu(c^\nu\nabla_\nu a) = b^\mu(\nabla_\mu(c^\nu\nabla_\nu a))^\kappa\partial_\kappa = b^\mu\partial_\mu((c^\nu\nabla_\nu a)^\kappa)\partial_\kappa + b^\mu\Gamma^\kappa_{\rho\mu}(c^\nu\nabla_\nu a)^\rho\partial_\kappa = \\ = b^\mu\partial_\mu c^\nu(\nabla_\nu a)^\kappa\partial_\kappa + b^\mu c^\nu\partial_\mu(\partial_\nu a^\kappa + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}a^\lambda)\partial_\kappa + b^\mu c^\nu\Gamma^\kappa_{\rho\mu}\partial_\nu a^\rho\partial_\kappa + a^\lambda b^\mu c^\nu\Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}\partial_\kappa = \\ = b^\mu\partial_\mu c^\nu(\nabla_\nu a)^\kappa\partial_\kappa + b^\mu c^\nu\partial_\mu(\partial_\nu a^\kappa) + a^\lambda b^\mu c^\nu\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\partial_\kappa + b^\mu c^\nu(\Gamma^\kappa_{\rho\nu}\partial_\mu + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\partial_\nu)a^\rho\partial_\kappa + a^\lambda b^\mu c^\nu\Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}\partial_\kappa \end{aligned}$$

По аналогии запишем $c^\nu\nabla_\nu(b^\mu\nabla_\mu a)$:

$$\begin{aligned} c^\nu\nabla_\nu(b^\mu\nabla_\mu a) = c^\nu\partial_\nu c^\mu(\nabla_\mu a)^\kappa\partial_\kappa + b^\mu c^\nu\partial_\nu(\partial_\mu a^\kappa) + a^\lambda b^\mu c^\nu\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\partial_\kappa + \\ + b^\mu c^\nu(\Gamma^\kappa_{\rho\mu}\partial_\nu + \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\partial_\mu)a^\rho\partial_\kappa + a^\lambda b^\mu c^\nu\Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\partial_\kappa \end{aligned} \tag{81}$$

$$R(b,c)a = a^\lambda b^\mu c^\nu(\partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu})\partial_\kappa \tag{82}$$

Как видно,

$$\boxed{R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}} \tag{83}$$

Риманов тензор по определению зависит только от точки (но не от её окрестности). Для доказательства того, что риманов тензор им является, покажем, что $R(b,c)a$ линеен по a, b и c:

$$\begin{aligned} R(b,c)(fa) = [\nabla_b,\nabla_c](fa) - \nabla_{[b,c]}(fa) = \nabla_b(f\nabla_c a + a\nabla_c f) - \nabla_c(f\nabla_b a + a\nabla_b f) - f\nabla_{[b,c]}a - a\nabla_{[b,c]}f = \\ = (f\nabla_b\nabla_c + \nabla_b f\nabla_c + \nabla_c f\nabla_b + \nabla_b\nabla_c f - f\nabla_c\nabla_b - \nabla_c f\nabla_b - \nabla_b f\nabla_c - \nabla_b\nabla_c f - f\nabla_{[b,c]} - \nabla_{[b,c]})a = \\ = f([\nabla_b,\nabla_c] - \nabla_{[b,c]})a = fR(b,c)a \end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned} R(fb,c)a = [\nabla_{fb},\nabla_c]a - \nabla_{[fb,c]}a = f\nabla_b\nabla_c a - \nabla_c(f\nabla_b a) - \nabla_{f[b,c]-c(f)b}a = (f\nabla_b\nabla_c - f\nabla_c\nabla_b - \\ - \nabla_c f\nabla_b - f\nabla_{[b,c]} + c(f)\nabla_b)a = f([\nabla_b,\nabla_c] - \nabla_{[b,c]})a = fR(b,c)a \end{aligned} \tag{85}$$

Линейность по c проверяется аналогично.

3.3. Выведите алгебраические тождества $R^1_{234} = -R^1_{243}$, $R^1_{234} + R^1_{342} + R^1_{423} = 0$. Докажите, что для связности Леви-Чивиты выполняется тождество $R_{1234} = R_{3412}$.
Решение.

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} = -R^\kappa_{\lambda\nu\mu} \tag{86}$$

$$\boxed{R^1_{234} = -R^1_{243}} \tag{87}$$

$$\begin{aligned} R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + R^\kappa_{\mu\nu\lambda} + R^\kappa_{\nu\lambda\mu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} + \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\kappa_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \\ + \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} + \Gamma^\kappa_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\nu\mu} - \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \end{aligned} \tag{88}$$

В случае связности без кручения:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \tag{89}$$

Таким образом, получаем *алгебраическое тождество Бъянки*:

$$\boxed{R^1_{234} + R^1_{342} + R^1_{423} = 0} \tag{90}$$

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = g_{\alpha\kappa}R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = g_{\alpha\kappa}(\partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}) \tag{91}$$

Для связности Леви-Чивиты выполняется (см. 2.4):

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} = \frac{g^{\kappa\alpha}}{2}(\partial_\lambda g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\lambda\nu}) \tag{92}$$

Символы Кристоффеля I рода:

$$\Gamma_{\mu,\lambda\nu} = g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}) \tag{93}$$

$$\Gamma_{\mu,\lambda\nu} + \Gamma_{\nu,\lambda\mu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}) + \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) = \partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{94}$$

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = \partial_\mu(g_{\alpha\kappa}\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}) - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\partial_\mu g_{\alpha\kappa} - \partial_\nu(g_{\alpha\kappa}\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}) + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\partial_\nu g_{\alpha\kappa} + g_{\alpha\kappa}\Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - g_{\alpha\kappa}\Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} =$$
$$= \partial_\mu\Gamma_{\alpha,\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\Gamma_{\alpha,\mu\kappa} + \Gamma_{\kappa,\mu\alpha}) - \partial_\nu\Gamma_{\alpha,\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}(\Gamma_{\alpha,\nu\kappa} + \Gamma_{\kappa,\nu\alpha}) + \Gamma_{\alpha,\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha,\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} =$$
$$= \partial_\mu\Gamma_{\alpha,\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma_{\alpha,\lambda\mu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\Gamma_{\kappa,\mu\alpha} + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\Gamma_{\kappa,\nu\alpha} \quad (95)$$

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu(\partial_\lambda g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\lambda\nu}) - \frac{1}{2}\partial_\nu(\partial_\lambda g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\lambda\mu}) + g_{\kappa\rho}(\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\Gamma^\rho_{\nu\alpha} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\Gamma^\rho_{\mu\alpha}) \quad (96)$$

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\lambda g_{\alpha\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial_\lambda g_{\alpha\mu} + \partial_\nu\partial_\alpha g_{\lambda\mu}) + g_{\kappa\rho}(\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\Gamma^\rho_{\nu\alpha} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\Gamma^\rho_{\mu\alpha}) \quad (97)$$

Отсюда видно, что

$$\boxed{R_{1234} = R_{3412}} \quad (98)$$

3.4. Покажите, что в случае связности без кручения в окрестности любой точки x_0 многообразия можно выбрать систему координат, в которой все символы Кристоффеля в этой точке обращаются в нуль: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x_0) = 0$. Затем докажите, что в точке x_0 выполняется дифференциальное тождество Бьянки $R^1_{234;5} + R^1_{245;3} + R^1_{253;4} = 0$.

Решение.

Пусть точка x_0 – начало координат и символы Кристоффеля в нём:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x_0) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \quad (99)$$

Выберем в окрестности x_0 систему координат:

$$x'^\lambda = x^\lambda + \frac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \quad (100)$$

$$\frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\delta^\lambda_\kappa = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \quad (101)$$

Из закона преобразования символов Кристоффеля (см. 2.5)

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} \quad (102)$$

следует, что все $\Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} = 0$.

Перейдём в систему координат, в которой все $\Gamma^\kappa_{\rho\sigma} = 0$. Продифференцируем тензор кривизны Римана (см. 3.2):

$$\nabla_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\rho(\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}) \quad (103)$$

$$\nabla_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho} = \partial_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho} = \partial_\mu(\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\rho} - \partial_\rho\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}) \quad (104)$$

$$\nabla_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} = \partial_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} = \partial_\nu(\partial_\rho\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\rho}) \quad (105)$$

$$\nabla_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho} + \nabla_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} = 0 \quad (106)$$

$$\boxed{R^1_{234;5} + R^1_{245;3} + R^1_{253;4} = 0} \quad (107)$$

3.5. * Докажите тождества $\delta_\xi(t\otimes s)=\delta_\xi t\otimes s+t\otimes\delta_\xi s$ и $[\delta_\xi,\delta_\eta]t=\delta_{[\xi,\eta]}t$.
Решение.
Производная Ли:

$$\delta_\xi t=t'(x'^\bullet)-t(x'^\bullet),\quad \delta_\xi s=s'(x'^\bullet)-s(x'^\bullet) \tag{108}$$

$$\begin{gathered}\delta_\xi(t\otimes s)=t'\otimes s'(x'^\bullet)-t\otimes s(x'^\bullet)=t'(x'^\bullet)\otimes s'(x'^\bullet)-t(x'^\bullet)\otimes s'(x'^\bullet)+t(x'^\bullet)\otimes s'(x'^\bullet)-t(x'^\bullet)\otimes s(x'^\bullet)=\\=(t'(x'^\bullet)-t(x'^\bullet))\otimes s'(x'^\bullet)+t(x'^\bullet)\otimes(s'(x'^\bullet)-s(x'^\bullet))=\delta_\xi t\otimes s(x'^\bullet)+t\otimes\delta_\xi s(x'^\bullet)\end{gathered} \tag{109}$$

$$\boxed{\delta_\xi(t\otimes s)=\delta_\xi t\otimes s+t\otimes\delta_\xi s} \tag{110}$$

Покажем выполнение $[\delta_\xi,\delta_\eta]t=\delta_{[\xi,\eta]}t$ для функции $t=f$:

$$\delta_\xi f=\xi^\mu\partial_\mu f,\quad \delta_\eta f=\eta^\mu\partial_\mu f \tag{111}$$

$$\delta_\xi\delta_\eta f=\delta_\xi(\eta^\mu\partial_\mu f)=\xi^\nu\partial_\nu(\eta^\mu\partial_\mu f)=\xi^\nu\partial_\nu\eta^\mu\partial_\mu f+\xi^\nu\eta^\mu\partial_\nu\partial_\mu f \tag{112}$$

$$[\delta_\xi,\delta_\eta]f=(\xi^\nu\partial_\nu\eta^\mu\partial_\mu-\xi^\mu\partial_\mu\eta^\nu\partial_\nu)f=\delta_{[\xi,\eta]}f \tag{113}$$

Покажем выполнение $[\delta_\xi,\delta_\eta]t=\delta_{[\xi,\eta]}t$ для векторного поля $t=a=a^\mu\partial_\mu$:

$$\delta_\xi a^\mu=\partial_\lambda a^\mu\xi^\lambda-a^\lambda\partial_\lambda\xi^\mu\to\delta_\xi a=[\xi,a] \tag{114}$$

$$\begin{gathered}[\delta_\xi,\delta_\eta]a=\delta_\xi[\eta,a]-\delta_\eta[\xi,a]=[\xi,\eta a-a\eta]-[\eta,\xi a-a\xi]=\xi\eta a-\xi a\eta-\eta a\xi+a\eta\xi-\\-\eta\xi a+\eta a\xi+\xi a\eta-a\xi\eta=[\xi,\eta]a-a[\xi,\eta]=[[\xi,\eta],a]=\delta_{[\xi,\eta]}a\end{gathered} \tag{115}$$

Покажем выполнение $[\delta_\xi,\delta_\eta]t=\delta_{[\xi,\eta]}t$ для формы $t=\alpha=\alpha_\mu dx^\mu$:

$$\delta_\xi a_\mu=\partial_\lambda a_\mu\xi^\lambda+a_\lambda\partial_\mu\xi^\lambda \tag{116}$$

$$\begin{gathered}[\delta_\xi,\delta_\eta]\alpha_\mu=\delta_\xi(\partial_\lambda a_\mu\eta^\lambda+\alpha_\lambda\partial_\mu\eta^\lambda)-\delta_\eta(\partial_\lambda a_\mu\xi^\lambda+\alpha_\lambda\partial_\mu\xi^\lambda)=\partial_\kappa(\partial_\lambda a_\mu\eta^\lambda+\alpha_\lambda\partial_\mu\eta^\lambda)\xi^\kappa+\\+(\partial_\lambda a_\kappa\eta^\lambda+\alpha_\lambda\partial_\kappa\eta^\lambda)\partial_\mu\xi^\kappa-\partial_\kappa(\partial_\lambda a_\mu\xi^\lambda+\alpha_\lambda\partial_\mu\xi^\lambda)\eta^\kappa-(\partial_\lambda a_\kappa\xi^\lambda+\alpha_\lambda\partial_\kappa\xi^\lambda)\partial_\mu\eta^\kappa=\\=\partial_\lambda a_\mu\partial_\kappa\eta^\lambda\xi^\kappa+a_\lambda\partial_\kappa\partial_\mu\eta^\lambda\xi^\kappa+a_\lambda\partial_\kappa\eta^\lambda\partial_\mu\xi^\kappa-\partial_\lambda a_\mu\partial_\kappa\xi^\lambda\eta^\kappa-a_\lambda\partial_\kappa\partial_\mu\xi^\lambda\eta^\kappa-a_\lambda\partial_\kappa\xi^\lambda\partial_\mu\eta^\kappa=\\=\partial_\lambda a_\mu(\partial_\kappa\eta^\lambda\xi^\kappa-\partial_\kappa\xi^\lambda\eta^\kappa)+a_\lambda\partial_\mu(\partial_\kappa\eta^\lambda\xi^\kappa-\partial_\kappa\xi^\lambda\eta^\kappa)=\delta_{[\xi,\eta]}a_\mu\end{gathered} \tag{117}$$

Покажем выполнение правила Лейбница $[\delta_\xi,\delta_\eta]$ (для $\delta_{[\xi,\eta]}$ равенство уже показано):

$$\begin{gathered}[\delta_\xi,\delta_\eta](t\otimes s)=\delta_\xi\delta_\eta(t\otimes s)-\delta_\eta\delta_\xi(t\otimes s)=\delta_\xi(\delta_\eta t\otimes s+t\otimes\delta_\eta s)-\delta_\eta(\delta_\xi t\otimes s+t\otimes\delta_\xi s)=\\=\delta_\xi\delta_\eta t\otimes s+\delta_\eta t\otimes\delta_\xi s+\delta_\xi t\otimes\delta_\eta s+t\otimes\delta_\xi\delta_\eta s-\delta_\eta\delta_\xi t\otimes s-\delta_\xi t\otimes\delta_\eta s-\delta_\eta t\otimes\delta_\xi s-t\otimes\delta_\eta\delta_\xi s=\\=\delta_\xi\delta_\eta t\otimes s+t\otimes\delta_\xi\delta_\eta s-\delta_\eta\delta_\xi t\otimes s-t\otimes\delta_\eta\delta_\xi s=[\delta_\xi,\delta_\eta]t\otimes s+t\otimes[\delta_\xi,\delta_\eta]s\end{gathered} \tag{118}$$

Любой тензор можно представить как сумму тензорных произведений векторных полей и ковекторных полей и верно правило Лейбница, следовательно утверждение верно для любого тензора t (по индукции).

$$\boxed{[\delta_\xi,\delta_\eta]t=\delta_{[\xi,\eta]}t} \tag{119}$$

4 Частицы в искривленном пространстве-времени

4.1. Получите $\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{e}{m}F^\lambda{}_\kappa\dot{x}^\kappa$ из действия $S[x] = \int\limits_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau(-m\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})} - eA(\dot{x}))$ при условии $\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 0$. В обратную сторону покажите, что на любых решениях уравнения $\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{e}{m}F^\lambda{}_\kappa\dot{x}^\kappa$ выполняется условие $\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 0$.
Решение.
Наложим калибровочное условие

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = C^2 = 1 \tag{120}$$

В действие необходимо внести вклад с множителем Лагранжа λ:

$$S[x] = \int\limits_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau(-m\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} - eA_\mu\dot{x}^\mu) + \lambda\int\limits_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - 1) \tag{121}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\lambda} = \int\limits_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - 1) = 0 \to g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 1 \tag{122}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа (выберем $\lambda = 0$):

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \tag{123}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha} = -m\frac{g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho}} - eA_\alpha = -m\dot{x}_\alpha - eA_\alpha \to \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha} = -m\ddot{x}_\alpha - e\dot{x}^\kappa\partial_\kappa A_\alpha \tag{124}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = -\frac{m\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu}{2\sqrt{g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho}}\partial_\alpha g_{\mu\nu} - e\dot{x}^\kappa\partial_\alpha A_\kappa = -\frac{m\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu} - e\dot{x}^\kappa\partial_\alpha A_\kappa \tag{125}$$

$$m\ddot{x}_\alpha - m\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\frac{\partial_\alpha g_{\mu\nu}}{2} = eF_{\alpha\kappa}\dot{x}^\kappa \tag{126}$$

$$\ddot{x}_\alpha = \frac{d(g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu)}{d\tau} = g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\mu + \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\nu g_{\alpha\mu} \tag{127}$$

$$g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\mu + \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\left(\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \frac{\partial_\alpha g_{\mu\nu}}{2}\right) = \frac{e}{m}F_{\alpha\kappa}\dot{x}^\kappa \tag{128}$$

$$\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\nu g_{\alpha\mu} = \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\mu g_{\alpha\nu} \tag{129}$$

$$\delta^\lambda_\mu\ddot{x}^\mu + \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\frac{g^{\alpha\lambda}}{2}(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) = \frac{e}{m}F^\lambda{}_\kappa\dot{x}^\kappa \tag{130}$$

Для связности Леви-Чивиты выполняется (см. 2.4):

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\kappa}}{2}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \tag{131}$$

$$\boxed{\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{e}{m}F^\lambda{}_\kappa\dot{x}^\kappa} \tag{132}$$

Покажем, что на любых решениях этого уравнения выполняется условие $\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)=0$:

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 2g_{\mu\nu}\ddot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \dot{x}^\lambda\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{133}$$

Подтавим $\ddot{x}^\mu$ из уравнения:

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 2g_{\mu\nu}\left(\frac{e}{m}F^\mu{}_\kappa\dot{x}^\kappa - \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma\right)\dot{x}^\nu + \dot{x}^\lambda\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{134}$$

Заметим, что

$$g_{\mu\nu}F^\mu{}_\kappa\dot{x}^\kappa\dot{x}^\nu = 0 \tag{135}$$

как свёртка симметричного и антисимметричного тензоров.

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = -2g_{\mu\nu}\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma\dot{x}^\nu + \dot{x}^\lambda\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{136}$$

Для связности Леви-Чивиты выполняется (см. 2.4):

$$\Gamma^\mu_{\lambda\sigma} = \frac{g^{\mu\kappa}}{2}(\partial_\lambda g_{\kappa\sigma} + \partial_\sigma g_{\kappa\lambda} - \partial_\kappa g_{\lambda\sigma}) \tag{137}$$

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = -2g_{\mu\nu}\frac{g^{\mu\kappa}}{2}(\partial_\lambda g_{\kappa\sigma} + \partial_\sigma g_{\kappa\lambda} - \partial_\kappa g_{\lambda\sigma})\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma\dot{x}^\nu + \dot{x}^\lambda\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\lambda g_{\mu\nu} =$$
$$= -\delta^\kappa_\nu(\partial_\lambda g_{\kappa\sigma}+\partial_\sigma g_{\kappa\lambda}-\partial_\kappa g_{\lambda\sigma})\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma\dot{x}^\nu+\dot{x}^\lambda\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\lambda g_{\mu\nu} = -(\partial_\lambda g_{\nu\sigma}+\partial_\sigma g_{\nu\lambda}-\partial_\nu g_{\lambda\sigma})\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma\dot{x}^\nu+\dot{x}^\lambda\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\lambda g_{\mu\nu} =$$
$$= (\partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda})\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma\dot{x}^\nu = 0 \tag{138}$$

4.2. Найдите матрицу $A_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\mu\partial\dot{x}^\nu}\right)$ для действия $S[x] = \int\limits_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau(-m\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} - eA_\mu\dot{x}^\mu)$ и покажите, что она вырождена в направлении вектора $\dot{x} : A_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = 0$.
Решение.

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu} = -m\frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho}} - eA_\mu \tag{139}$$

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\mu\partial\dot{x}^\nu} = -m\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho}} + m\frac{g_{\mu\kappa}\dot{x}^\kappa g_{\lambda\nu}\dot{x}^\lambda}{(g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho)^{\frac{3}{2}}} = -m\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho}} + m\frac{\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu}{(g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho)^{\frac{3}{2}}} \tag{140}$$

$$\boxed{A_{\mu\nu} = \frac{m}{(g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho)^{\frac{3}{2}}}(\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu - g_{\mu\nu}\dot{x}_\rho\dot{x}^\rho)} \tag{141}$$

$$A_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = \frac{m}{(g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho)^{\frac{3}{2}}}(\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu\dot{x}^\nu - \dot{x}_\mu\dot{x}_\rho\dot{x}^\rho)) = 0 \tag{142}$$

6 Т.е. матрица $A_{\mu\nu}$ вырождена в направлении вектора $\dot{x}$.

4.3. Покажите, что при $\alpha = \text{const}$ из $\dot{P}_\mu = -\frac{\partial H_\alpha}{\partial x^\mu} = -\alpha(\partial_\mu g^{\lambda\nu}(P_\lambda+eA_\lambda)+2eg^{\lambda\nu}\partial_\mu A_\lambda)(P_\nu+eA_\nu)$, $\dot{x}^\mu = \frac{\partial H_\alpha}{\partial P_\mu} = 2\alpha g^{\mu\nu}(P_\nu+eA_\nu)$ следует уравнение $\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{e}{m}F^\lambda{}_\kappa\dot{x}^\kappa$.
Решение.

$$\ddot{x}^\mu = 2\alpha\dot{x}^\lambda\partial_\lambda g^{\mu\nu}(P_\nu+eA_\nu) + 2\alpha g^{\mu\nu}(\dot{P}_\nu + e\dot{x}^\lambda\partial_\lambda A_\nu) \tag{143}$$

Подставим $\dot{x}^\lambda = 2\alpha(P^\lambda + eA^\lambda)$ и $\dot{P}_\nu = -\alpha(\partial_\nu g^{\lambda\kappa}(P_\lambda+eA_\lambda) + 2eg^{\lambda\kappa}\partial_\nu A_\lambda)(P_\kappa+eA_\kappa)$:

$$\ddot{x}^\mu = \dot{x}_\nu\dot{x}^\lambda\partial_\lambda g^{\mu\nu}+2\alpha g^{\mu\nu}(-\partial_\nu g^{\lambda\kappa}\frac{\dot{x}_\lambda\dot{x}_\kappa}{4\alpha}-eg^{\lambda\kappa}\partial_\nu A_\lambda\dot{x}_\kappa+e\dot{x}^\lambda\partial_\lambda A_\nu) = \dot{x}_\nu\dot{x}^\lambda\partial_\lambda g^{\mu\nu}+2\alpha g^{\mu\nu}(-\partial_\nu g^{\lambda\kappa}\frac{\dot{x}_\lambda\dot{x}_\kappa}{4\alpha}+e\dot{x}^\lambda F_{\lambda\nu}) \tag{144}$$

$$\ddot{x}^\mu = \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda g_{\kappa\nu}\partial_\lambda g^{\mu\nu} - \frac{\dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa}{2} g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{\lambda\kappa} - 2\alpha e \dot{x}^\lambda F^\mu{}_\lambda \tag{145}$$

$$\ddot{x}^\mu = \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \partial_\lambda (g_{\kappa\nu} g^{\mu\nu}) - \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\kappa\nu} - \frac{\dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa}{2} g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{\lambda\kappa} - 2\alpha e g^{\mu\nu} e \dot{x}^\lambda F^\mu{}_\lambda \tag{146}$$

$$\ddot{x}^\mu = -\dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda (-g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\kappa\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{\lambda\kappa}) - 2\alpha e \dot{x}^\lambda F^\mu{}_\lambda \tag{147}$$

$$\ddot{x}^\mu = -\dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \frac{g^{\mu\nu}}{2} (-\partial_\lambda g_{\kappa\nu} - \partial_\nu g_{\kappa\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\kappa}) - 2\alpha e \dot{x}^\lambda F^\mu{}_\lambda \tag{148}$$

Выберем $\alpha = -\frac{1}{2m}$.

$$\boxed{\ddot{x}^\mu = -\dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} + \dot{x}^\lambda F^\mu{}_\lambda \frac{e}{m}} \tag{149}$$

4.4. Рассмотрим двумерную поверхность в пространстве-времени, заданную гладкой функцией $x = \varphi(\tau, \sigma)$ двух вещественных параметров. При каждом данном значении σ функция φ задает кривую $\varphi(\cdot, \sigma)$, а при каждом значении τ – кривую $\varphi(\tau, \cdot)$. Обозначим через $\dot{\varphi}(\tau, \sigma) = \frac{\partial \varphi^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \tau}$, $\varphi'(\tau, \sigma) = \frac{\partial \varphi^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \sigma}\partial_\mu$ касательные к двум семействам кривых – при данных σ и при данных τ. Покажите, что для связности Леви-Чивиты

$$\nabla_{\dot{\varphi}} \varphi' = \nabla_{\varphi'} \dot{\varphi} \tag{150}$$

Решение.
Гладким образом продолжим векторы: выберем в окрестности точки систему координат $x_0 = \tau$, $x_1 = \sigma$, $x_2 = ... = x_{d-1} = 0$. Распишем $\nabla_{\dot{\varphi}} \varphi'$ и $\nabla_{\varphi'} \dot{\varphi}$. Воспользуемся обозначениями в условии:

$$\nabla_{\dot{\varphi}} \varphi' = \nabla_{\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \tau}\partial_\mu} \left(\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma}\partial_\nu \right) = \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \tau} \left(\nabla_\mu \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma} \right) \partial_\nu + \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma} \nabla_\mu \partial_\nu = \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \tau} \partial_\mu \left(\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma} \right) \partial_\nu + \\ + \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \tag{151}$$

$$\nabla_{\varphi'} \dot{\varphi} = \nabla_{\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma}\partial_\nu} \left(\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \tau}\partial_\mu \right) = \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma} \left(\nabla_\nu \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \tau} \right) \partial_\mu + \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \sigma} \nabla_\nu \partial_\mu = \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma} \partial_\nu \left(\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \tau} \right) \partial_\mu + \\ + \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \sigma} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda \tag{152}$$

Покажем, что выражения (151) и (152) равны.

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \tag{153}$$

$$\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma} \partial_\nu \left(\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \tau} \right) \partial_\mu = \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \sigma} \partial_\mu \left(\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \tau} \right) \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \tau} \right) \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma} \right) \partial_\nu = \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \tau} \partial_\mu \left(\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \sigma} \right) \partial_\nu$$

Таким образом,

$$\boxed{\nabla_{\dot{\varphi}} \varphi' = \nabla_{\varphi'} \dot{\varphi}} \tag{154}$$

4.5. * Приливные силы. В условиях предыдущей задачи предположим, что кривые первого сорта являются геодезическими с собственным временем $\tau : \nabla_{\dot\varphi}\dot\varphi = 0$. Можно сказать, что вектор $\varphi'(\tau,\sigma)d\sigma$ соединяет две соседние геодезические в данный момент собственного времени τ. Таким образом, вторая ковариантная производная по τ будет давать относительное ускорение соответствующих материальных точек. Докажите, что

$$\nabla^2_{\dot\varphi}\varphi' = R(\dot\varphi,\varphi')\dot\varphi \tag{155}$$

Решение.
Распишем $R(\dot\varphi,\varphi')\dot\varphi$:

$$R(\dot\varphi,\varphi')\dot\varphi = [\nabla_{\dot\varphi},\nabla_{\varphi'}]\dot\varphi - \nabla_{[\dot\varphi,\varphi']}\dot\varphi = \nabla_{\dot\varphi}\nabla_{\varphi'}\dot\varphi - \nabla_{\varphi'}\nabla_{\dot\varphi}\dot\varphi - \nabla_{[\dot\varphi,\varphi']}\dot\varphi \tag{156}$$

$$[\dot\varphi,\varphi'] = \left[\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\partial_\mu, \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\partial_\nu\right] = 0 \tag{157}$$

Воспользуемся предыдущей задачей:

$$\boxed{R(\dot\varphi,\varphi')\dot\varphi = \nabla^2_{\dot\varphi}\varphi'} \tag{158}$$

5 Поля в гравитационном поле. Тензор энергии-импульса

5.1. Покажите, что из симметричности тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ следует сохранение момента импульса $\dot J^{\mu\nu} = 0$.
Решение.
Момент импульса:

$$J^{\mu\nu} = \int d^{d-1}x(x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) \tag{159}$$

$$\dot J^{\mu\nu} = \partial_0\left(\int d^{d-1}x(x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0})\right) = \int d^{d-1}x(\delta^\mu_0 T^{\nu 0} - \delta^\nu_0 T^{\mu 0} + x^\mu\partial_0 T^{\nu 0} - x^\nu\partial_0 T^{\mu 0}) \tag{160}$$

Рассмотрим несколько случаев:

1. $\mu = 0$, $\nu = 0$:
$$J^{00} = \int d^{d-1}x(x^0 T^{00} - x^0 T^{00}) = 0 \tag{161}$$

2. $\mu \neq 0$, $\nu = 0$:
$$\dot J^{\mu 0} = \int d^{d-1}x(-T^{0\mu} + x^\mu\partial_0 T^{00} - x^0\partial_0 T^{\mu 0}) \tag{162}$$
Воспользуемся тем, что $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$:
$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{0i}, \quad i \in \{x^1, ..., x^{d-1}\} \tag{163}$$

$$-\int d^{d-1}x(x^\mu\partial_i T^{0i}) = -\int d^{d-1}x\partial_i(x^\mu T^{0i}) + \int d^{d-1}x(\partial_i x^\mu T^{0i}) = \int d^{d-1}x T^{0\mu} \tag{164}$$

Первое слагаемое обращается в 0, поскольку на бесконечности тензор энергии-импульса обращается в 0.
$$\dot J^{\mu 0} = -x^0\partial_0 P^\mu = 0 \tag{165}$$
где в последнем равенстве воспользовались законом сохранения импульса.

3. $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$: Воспользуемся тем, что $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$:

$$\partial_0 T^{\nu 0} = -\partial_i T^{\nu i}, \quad i \in \{x^1, ..., x^{d-1}\} \tag{166}$$

$$\dot{J}^{\mu\nu} = -\int d^{d-1}x(x^\mu \partial_i T^{\nu i} - x^\nu \partial_i T^{\mu i}) = -\int d^{d-1}x \partial_i(x^\mu T^{\nu i} - x^\nu T^{\mu i}) + \int d^{d-1}x(\partial_i x^\mu T^{\nu i} - \partial_i x^\nu T^{\mu i}) =$$
$$= \int d^{d-1}x(T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}) = 0 \tag{167}$$

поскольку тензор энергии-импульса симметричен. Таким образом, момент импульса сохраняется

$$\boxed{\dot{J}^{\mu\nu} = 0} \tag{168}$$

5.2. С помощью формулы $T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial S}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + ...\right)$ получите общерелятивистский тензор энергии-импульса для электромагнитного поля и для скалярного поля с $V = 0$.

Решение.

Получим общерелятивистский тензор энергии-импульса для электромагнитного поля. Лагранжиан электромагнитного поля:

$$\mathcal{L}_{EM}(A, dA) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\kappa\mu}g^{\lambda\nu}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu} \tag{169}$$

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{EM})}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L}_{EM} - 2\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial g_{\mu\nu}} \tag{170}$$

$$\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\frac{\partial|g|}{\partial g_{\mu\nu}} \tag{171}$$

Запишем определение детерминанта через символ Леви-Чивиты:

$$g = \det g_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu_1...\mu_n} g_{1\mu_1}...g_{n\mu_n} = \frac{1}{n!}\epsilon^{\mu_1...\mu_n}\epsilon^{\nu_1...\nu_n} g_{\nu_1\mu_1}...g_{\nu_n\mu_n} \tag{172}$$

$$dg = dg_{\nu\mu}\frac{n}{n!}\epsilon^{\mu\mu_2...\mu_n}\epsilon^{\nu\nu_2...\nu_n} g_{\nu_2\mu_2}...g_{\nu_n\mu_n} \tag{173}$$

Запишем определение минора – определителя матрицы, получающейся вычеркиванием определённой строки и столбца:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{(n-1)!}\epsilon^{\mu\mu_2...\mu_n}\epsilon^{\nu\nu_2...\nu_n} g_{\nu_2\mu_2}...g_{\nu_n\mu_n} \tag{174}$$

$$dg = dg_{\nu\mu}M^{\mu\nu} \tag{175}$$

$$M^{\mu\nu}g_{\nu\mu'} = \frac{1}{(n-1)!}\epsilon^{\mu\mu_2...\mu_n}\epsilon^{\nu\nu_2...\nu_n} g_{\nu\mu'}g_{\nu_2\mu_2}...g_{\nu_n\mu_n} \tag{176}$$

$$\epsilon_{\mu'\mu_2...\mu_n} g = \frac{1}{n!}\epsilon_{\mu'\mu_2...\mu_n}\epsilon^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_n}\epsilon^{\nu\nu_2...\nu_n} g_{\nu\kappa_1}g_{\nu_2\kappa_2}...g_{\nu_n\kappa_n} = \epsilon^{\nu\nu_2...\nu_n} g_{\nu\mu'}g_{\nu_2\mu_2}...g_{\nu_n\mu_n} \tag{177}$$

$$M^{\mu\nu} g_{\nu\mu'} = \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\mu\mu_2\ldots\mu_n} \epsilon_{\mu'\mu_2\ldots\mu_n} g = \delta^{\mu}_{\mu'} g \tag{178}$$

Мы получили формулу обратной матрицы:

$$(g^{-1})^{\mu\nu} = \frac{M^{\mu\nu}}{g} \tag{179}$$

$$dg = dg_{\nu\mu} g (g^{-1})^{\mu\nu} = dg_{\nu\mu} g g^{\mu\nu} \tag{180}$$

Таким образом, получаем формулу

$$\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \frac{\partial |g|}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{|g| g^{\mu\nu}}{2\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \tag{181}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{4} \frac{\partial (g^{\kappa\rho} g^{\lambda\sigma} F_{\kappa\lambda} F_{\rho\sigma})}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{F_{\kappa\lambda} F_{\rho\sigma}}{4} \frac{\partial (g^{\kappa\rho} g^{\lambda\sigma})}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{F_{\kappa\lambda} F_{\rho\sigma}}{4} \left(g^{\kappa\rho} \frac{\partial g^{\lambda\sigma}}{\partial g_{\mu\nu}} + g^{\lambda\sigma} \frac{\partial g^{\kappa\rho}}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \tag{182}$$

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu} \to \partial g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} + g^{\lambda\mu} \partial g_{\mu\nu} = 0 \to \partial g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} + g^{\lambda\mu} g^{\nu\sigma} \partial g_{\mu\nu} = 0 \tag{183}$$

$$\frac{\partial g^{\lambda\sigma}}{\partial g_{\mu\nu}} = -g^{\lambda\mu} g^{\nu\sigma} \tag{184}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{F_{\kappa\lambda} F_{\rho\sigma}}{4} (g^{\kappa\rho} g^{\lambda\mu} g^{\nu\sigma} + g^{\lambda\sigma} g^{\kappa\mu} g^{\nu\rho}) = \frac{F^{\rho\mu} F^{\nu}_{\rho} + F^{\mu\sigma} F^{\nu}_{\sigma}}{4} = \frac{1}{2} F^{\rho\mu} F^{\nu}_{\rho} \tag{185}$$

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{4} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} - F^{\rho\mu} F^{\nu}_{\rho}} \tag{186}$$

Получим общерелятивистский тензор энергии-импульса для скалярного поля. Лагранжиан скалярного поля с $V = 0$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G_{ab}(\phi) \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b - U(\phi) \tag{187}$$

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} \mathcal{L} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \tag{188}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\kappa\lambda}}{\partial g_{\mu\nu}} G_{ab}(\phi) \partial_\kappa \phi^a \partial_\lambda \phi^b = -\frac{1}{2} g^{\kappa\mu} g^{\nu\lambda} G_{ab}(\phi) \partial_\kappa \phi^a \partial_\lambda \phi^b = -\frac{1}{2} G_{ab}(\phi) \partial^\mu \phi^a \partial^\nu \phi^b \tag{189}$$

$$\boxed{T^{\mu\nu} = G_{ab}(\phi) \partial^\mu \phi^a \partial^\nu \phi^b - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} G_{ab}(\phi) \partial_\kappa \phi^a \partial_\lambda \phi^b - U(\phi) \right)} \tag{190}$$

5.3. Покажите, что величины $\Delta^{\mu\nu} = |g|^{-1/2} \partial_\lambda (|g|^{1/2} \psi^{\mu\nu\lambda})$ с антисимметричным тензором ψ обладают свойством $\Delta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, откуда следует, что канонический тензор энергии импульса для модели с минимальной связью ковариантно сохраняется.
Решение.

$$\Delta^{\mu\nu} = |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_\lambda (|g|^{\frac{1}{2}} \psi^{\mu\nu\lambda}) = |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_\lambda (|g|^{\frac{1}{2}}) \psi^{\mu\nu\lambda} + \partial_\lambda \psi^{\mu\nu\lambda} = \partial_\lambda (\log\sqrt{|g|}) \psi^{\mu\nu\lambda} + \partial_\lambda \psi^{\mu\nu\lambda} \tag{191}$$

$$\Delta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_\nu\left(\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\nu\lambda}\right) + \Gamma^\mu_{\kappa\nu}\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\kappa\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu}\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\kappa\lambda} + \\ + \partial_\nu\partial_\lambda\psi^{\mu\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu}\partial_\lambda\psi^{\kappa\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu}\partial_\lambda\psi^{\mu\kappa\lambda} \quad (192)$$

$$\partial_\nu\left(\partial_\lambda(\log|g|)\psi^{\mu\nu\lambda}\right) = \partial_\nu\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\nu\lambda} + \partial_\lambda\log\sqrt{|g|}\partial_\nu\psi^{\mu\nu\lambda} = \partial_\lambda\log\sqrt{|g|}\partial_\nu\psi^{\mu\nu\lambda} \quad (193)$$

поскольку первое слагаемое – свёртка симметричного тензора с антисимметричным.

$$\Gamma^\mu_{\kappa\nu}\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\kappa\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu}\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\kappa\lambda} = \partial_\kappa(\log\sqrt{|g|})\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\kappa\lambda} = 0 \quad (194)$$

поскольку слагаемые – свёртки симметричного тензора с антисимметричным.

$$\partial_\nu\partial_\lambda\psi^{\mu\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu}\partial_\lambda\psi^{\kappa\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu}\partial_\lambda\psi^{\mu\kappa\lambda} = \partial_\kappa(\log\sqrt{|g|})\partial_\lambda\psi^{\mu\kappa\lambda} \quad (195)$$

$$\boxed{\Delta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\partial_\nu\psi^{\mu\nu\lambda} + \partial_\nu(\log\sqrt{|g|})\partial_\lambda\psi^{\mu\nu\lambda} = 0} \quad (196)$$

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu} \quad (197)$$

Поскольку $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, то

$$\boxed{\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0} \quad (198)$$

5.4. На концы тонкого стержня длиной $2a$ нулевой массы насажены точечные массы m. Центр стержня неподвижен с лабораторной системе отсчета, а сам стержень вращается с угловой скоростью ω, причем скорость концов ωa не предполагается малой. Найдите тензор энергии-импульса для стержня и точечных масс.

Решение.

Пусть стержень вращается в плоскости $\cos\theta = 0$ в сферических координатах и в плоскости xy в декартовых. Получим распределение плотности системы в сферических координатах:

$$2m = \int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^1\int\limits_0^{2\pi}\rho(r,\theta,\varphi)r^2 dr d(\cos\theta)d\varphi \quad (199)$$

Поскольку вся масса сосредоточена в точечных объектах с координатами $(a, \frac{\pi}{2}, \pm\omega t)$, то плотность

$$\rho = \frac{m\delta(r-a)\delta(\cos\theta)(\delta(\varphi-\omega t) + \delta(\varphi - \omega t + \pi))}{r^2} \quad (200)$$

ТЭИ в собственной системе отсчёта стержня в декартовых координатах:

$$T'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (201)$$

Чтобы перейти в ЛСО, применим к нему лоренцев буст вдоль y:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^2\rho & 0 & \gamma^2\beta\rho & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ \gamma^2\beta\rho & 0 & -\gamma^2\beta^2\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (202)$$

Перепишем тензор в сферических координатах (r, φ, θ):

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^2\rho & 0 & 0 & \frac{\gamma^2\beta\rho}{r} \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma^2\beta\rho}{r} & 0 & 0 & \frac{\gamma^2\beta^2\rho}{r^2} \end{pmatrix} \tag{203}$$

Я бы дописал решение, а смысл? Ведь нужно решить это ещё и в декартовых координатах.

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{m}{1-\omega^2 a^2}\delta(\cos\theta)(\delta(\varphi-\omega t)+\delta(\varphi-\omega t-\pi)) \begin{pmatrix} \frac{\delta(r-a)}{a^2} & 0 & 0 & \frac{\omega\delta(r-a)}{a^2} \\ 0 & -\frac{\omega^2 a}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega\delta(r-a)}{a^2} & 0 & 0 & \frac{\omega^2\delta(r-a)}{a^2} \end{pmatrix}} \tag{204}$$

5.5. * Для действия, зависящего от одного векторного поля материи $\varphi = \varphi^\mu\partial_\mu$, минимально связанного с гравитацией, докажите $\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + |g|^{-1/2}\partial_\lambda(|g|^{1/2}\psi^{\mu\nu\lambda})$.
Решение.
За всю историю эту задачу сдали всего пару раз. Пару задач этой недели можно и не сдать.

6 Уравнения гравитационного поля и законы сохранения

6.1. Докажите $\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda(\sqrt{|g|}w^\lambda) = \sqrt{|g|}w^\lambda_{;\lambda}$, где $w^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\mu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}$.
Решение.
$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ является тензором, поскольку второе слагаемое в преобразовании символов Кристоффеля $\frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}$ не зависит от метрики и сокращается при взятии разности. Перейдём в систему координат, в которой все символы Кристоффеля равны 0 в данной точке. В ней частные производные можно поменять на ковариантные. Тензор Римана:

$$R^\kappa_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \to \delta R^\kappa_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \tag{205}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\kappa\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\kappa_{\kappa\mu} \tag{206}$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\kappa g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \nabla_\nu g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\kappa\mu} = \nabla_\kappa(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - g^{\mu\kappa}\delta\Gamma^\nu_{\nu\mu}) \tag{207}$$

$$\boxed{g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = w^\lambda_{;\lambda}, \qquad w^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\mu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}} \tag{208}$$

6.2. Проверьте формулы $R_{00} = -\frac{1}{2}g^{ij}\ddot{g}_{ij} + \overline{R}_{00}$, $R_{0i} = \frac{1}{2}g^{0j}\ddot{g}_{ij} + \overline{R}_{0i}$, $R_{ij} = -\frac{1}{2}g^{00}\ddot{g}_{ij} + \overline{R}_{ij}$, $R^0_0 - \frac{1}{2}R = \overline{R}^0_0 - \frac{1}{2}\overline{R}$, $R^0_i = \overline{R}^0_i$, $R^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}R = \frac{1}{2}(g^{0k}g^{0l} - g^{00}g^{kl})(\delta^i_k\ddot{g}_{jl} - \delta^i_j\ddot{g}_{kl}) + \overline{R}^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}\overline{R}$.
Решение.
Воспользуемся результатом задачи 3.3:

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\lambda g_{\alpha\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial_\lambda g_{\alpha\mu} + \partial_\nu\partial_\alpha g_{\lambda\mu}) + g_{\kappa\rho}(\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\Gamma^\rho_{\nu\alpha} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\Gamma^\rho_{\mu\alpha}) \tag{209}$$

Два последних слагаемых не дают вкладов, содержащих вторую производную по времени.

$$R_{00} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha 0\mu 0} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(\partial_\mu\partial_0 g_{\alpha 0} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{\alpha\mu} + \partial_0\partial_\alpha g_{0\mu}) + \overline{R}_{00} \tag{210}$$

$$g^{\alpha\mu}(\partial_\mu\partial_0 g_{\alpha 0} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{\alpha\mu} + \partial_0\partial_\alpha g_{0\mu}) = g^{00}(\partial_0\partial_0 g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{00} + \partial_0\partial_0 g_{00}) + \\ + g^{0j}(\partial_j\partial_0 g_{00} - \partial_j\partial_0 g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{0j} + \partial_0\partial_0 g_{0j}) + g^{i0}(\partial_0\partial_0 g_{i0} - \partial_0\partial_i g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{i0} + \partial_0\partial_i g_{00}) + \\ + g^{ij}(\partial_j\partial_0 g_{i0} - \partial_j\partial_i g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{ij} + \partial_0\partial_i g_{0j}) \quad (211)$$

Выделим члены со второй производной по времени:

$$\boxed{R_{00} = -\frac{1}{2}g^{ij}\ddot{g}_{ij} + \bar{R}_{00}} \quad (212)$$

$$R_{0i} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha 0\mu i} = \frac{g^{\alpha\mu}}{2}(\partial_\mu\partial_0 g_{\alpha i} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{\alpha\mu} + \partial_i\partial_\alpha g_{0\mu}) + \overline{R}_{0i} \quad (213)$$

$$g^{\alpha\mu}(\partial_\mu\partial_0 g_{\alpha i} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{\alpha\mu} + \partial_i\partial_\alpha g_{0\mu}) = g^{00}(\partial_0\partial_0 g_{0i} - \partial_0\partial_0 g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{00} + \partial_i\partial_0 g_{00}) + \\ + g^{0k}(\partial_k\partial_0 g_{0i} - \partial_k\partial_0 g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{0k} + \partial_i\partial_0 g_{0k}) + g^{j0}(\partial_0\partial_0 g_{ji} - \partial_0\partial_j g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{j0} + \partial_i\partial_j g_{00}) + \\ + g^{jk}(\partial_k\partial_0 g_{ji} - \partial_k\partial_j g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{jk} + \partial_i\partial_j g_{0k}) \quad (214)$$

Выделим члены со второй производной по времени:

$$\boxed{R_{0i} = \frac{1}{2}g^{j0}\ddot{g}_{ji} + \bar{R}_{0i}} \quad (215)$$

$$R_{ij} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha i\mu j} = \frac{g^{\alpha\mu}}{2}(\partial_\mu\partial_i g_{\alpha j} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{\alpha\mu} + \partial_j\partial_\alpha g_{i\mu}) + \overline{R}_{ij} \quad (216)$$

$$g^{\alpha\mu}(\partial_\mu\partial_i g_{\alpha j} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{\alpha\mu} + \partial_j\partial_\alpha g_{i\mu}) = g^{00}(\partial_0\partial_i g_{0j} - \partial_0\partial_0 g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{00} + \partial_j\partial_0 g_{i0}) + \\ g^{0l}(\partial_l\partial_i g_{0j} - \partial_l\partial_0 g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{0l} + \partial_j\partial_0 g_{il}) + g^{k0}(\partial_0\partial_i g_{kj} - \partial_0\partial_k g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{k0} + \partial_j\partial_k g_{i0}) + \\ + g^{kl}(\partial_l\partial_i g_{kj} - \partial_l\partial_k g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{kl} + \partial_j\partial_k g_{il}) \quad (217)$$

Выделим члены со второй производной по времени:

$$\boxed{R_{ij} = -\frac{1}{2}g^{00}\ddot{g}_{ij} + \bar{R}_{ij}} \quad (218)$$

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = g^{0\nu}R_{\nu 0} - \frac{1}{2}R = g^{0\nu}R_{\nu 0} - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{0i}R_{i0} - \frac{1}{2}(R_{00}g^{00} + R_{ij}g^{ij}) - R_{0i}g^{0i} = \\ = \frac{1}{2}g^{00}R_{00} - \frac{1}{2}g^{ij}R_{ij} = -\frac{1}{4}g^{00}g^{ij}\ddot{g}_{ij} + \frac{1}{2}g^{00}\overline{R}_{00} + \frac{1}{4}g^{ij}g^{00}\ddot{g}_{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}\overline{R}_{ij} = \overline{R}^0_0 - \frac{1}{2}\overline{R} \quad (219)$$

$$\boxed{R^0_0 - \frac{1}{2}R = \overline{R}^0_0 - \frac{1}{2}\overline{R}} \quad (220)$$

$$R^0_i = g^{\nu 0}R_{\nu i} = g^{00}R_{0i} + g^{j0}R_{ji} = \frac{1}{2}g^{00}g^{j0}\ddot{g}_{ji} + g^{00}\overline{R}_{00} - \frac{1}{2}g^{j0}g^{00}\ddot{g}_{ij} + g^{j0}\overline{R}_{ij} = \overline{R}^0_i \quad (221)$$

$$\boxed{R^0_i = \overline{R}^0_i} \quad (222)$$

$$R^i_j-\frac{\delta^i_j}{2}R=g^{i0}R_{0j}+g^{ik}R_{kj}-\frac{\delta^i_j}{2}(g^{00}R_{00}+2g^{0k}R_{k0}+g^{kl}R_{kl})+\overline{R}^i_j-\frac{\delta^i_j}{2}\overline{R}=\frac{1}{2}g^{i0}g^{k0}\ddot{g}_{kj}-\frac{1}{2}g^{ik}g^{00}\ddot{g}_{kj}+$$
$$+\frac{\delta^i_j}{4}g^{00}g^{kl}\ddot{g}_{kl}-\frac{\delta^i_j}{2}g^{0k}g^{l0}\ddot{g}_{lk}+\frac{\delta^i_j}{4}g^{kl}g^{00}\ddot{g}_{kl}+\overline{R}^i_j-\frac{\delta^i_j}{2}\overline{R}=\frac{1}{2}(g^{i0}g^{k0}-g^{ik}g^{00})\ddot{g}_{kj}+\frac{\delta^i_j}{2}(g^{00}g^{kl}-g^{0k}g^{l0})\ddot{g}_{kl}+$$
$$+\overline{R}^i_j-\frac{\delta^i_j}{2}\overline{R}=\frac{1}{2}(\delta^i_l\ddot{g}_{kj}-\delta^i_j\ddot{g}_{kl})(g^{k0}g^{l0}-g^{kl}g^{00})+\overline{R}^i_j-\frac{\delta^i_j}{2}\overline{R} \quad (223)$$

$$\boxed{R^i_j-\frac{\delta^i_j}{2}R=\frac{1}{2}(g^{0k}g^{0l}-g^{00}g^{kl})(\delta^i_k\ddot{g}_{jl}-\delta^i_j\ddot{g}_{kl})+\overline{R}^i_j-\frac{\delta^i_j}{2}\overline{R}} \quad (224)$$

6.3. Покажите, что в асимптотически плоском пространстве, где метрика ведет себя как $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+O(r^{3-d})$ вдали от гравитирующих тел (r — пространственное расстояние от источника гравитации), векторы энергии-импульса Эйнштейна и Ландау—Лифшица совпадают. Покажите, что при преобразованиях Лоренца в асимптотической области величины P^μ преобразуются как компоненты вектора.

Решение.

Вектор энергии-импульса Эйнштейна:

$$P^E_\mu=\frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}\tau^{E\nu\lambda}_\mu \quad (225)$$

Вдали от гравитирующих тел:

$$P^\mu_E=\eta^{\mu\kappa}P^E_\kappa=\frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}\oint df_{\nu\lambda}\tau^{E\nu\lambda}_\sigma \quad (226)$$

Суперпотенциал $\tau^{E\nu\lambda}_\mu$:

$$\tau^{E\nu\lambda}_\sigma=|g|^{-\frac{1}{2}}g_{\sigma\kappa}\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}_{,\rho} \quad (227)$$

$$P^\mu_E=\frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}\oint df_{\nu\lambda}|g|^{-\frac{1}{2}}g_{\sigma\kappa}\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}_{,\rho}=\frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}\oint df_{\nu\lambda}|g|^{-\frac{1}{2}}(\eta_{\sigma\kappa}+O(r^{3-d})_{\sigma\kappa})\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}_{,\rho}=$$
$$=\frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}|g|^{-\frac{1}{2}}\chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{,\rho}+\frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}\oint df_{\nu\lambda}|g|^{-\frac{1}{2}}O(r^{3-d})_{\sigma\kappa}\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}_{,\rho} \quad (228)$$

$$|g|=|\det(\eta_{\mu\nu}+O(r^{3-d})_{\mu\nu})|=1+O(r^{3-d})\to|g|^{-\frac{1}{2}}=1+O(r^{3-d}) \quad (229)$$

$$\chi^{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{|g|}{16\pi G}(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}-g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho})=\frac{1}{16\pi G}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}-\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho})+O(r^{3-d})^{\mu\nu\lambda\rho}\to\chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{,\rho}=O(r^{2-d})^{\mu\nu\lambda}$$

$$P^\mu_E=\frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}\chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{,\rho}+\frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}O(r^{3-d})O(r^{2-d})^{\mu\nu\lambda}+\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\oint df_{\nu\lambda}O(r^{2-d})^{\kappa\nu\lambda}O(r^{3-d})_{\sigma\kappa} \quad (230)$$

Вектор энергии-импульса Ландау-Лившица:

$$P^\mu=\frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}\tau^{\mu\nu\lambda}=\frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}\chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{,\rho} \quad (231)$$

$$P^\mu_E-P^\mu=\frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}O(r^{3-d})O(r^{2-d})^{\mu\nu\lambda}+\frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}O(r^{2-d})^{\kappa\nu\lambda}O(r^{3-d})^\mu_\kappa \quad (232)$$

$$\boxed{P^\mu_E-P^\mu=O(r^{3-d})O(r^{2-d})^{\mu\nu\lambda}O(r^{d-2})_{\nu\lambda}=O(r^{3-d})} \quad (233)$$

Таким образом, вдали от гравитирующих тел векторы энергии-импульса Эйнштейна и Ландау-Лившица совпадают.
Преобразование Лоренца:
$$\chi^{\mu'\nu'\lambda'\rho'}_{,\rho'} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{,\rho}\Lambda^{\mu'}_{\mu}\Lambda^{\nu'}_{\nu}\Lambda^{\lambda'}_{\lambda} \tag{234}$$
$df_{\nu\lambda}$ также преобразуется как тензор. Поэтому P^μ преобразуется как вектор.

6.4. Выведите выражение $J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\oint df_{\alpha\beta}(x^\mu\tau^{\nu\alpha\beta} - x^\nu\tau^{\mu\alpha\beta} + \chi^{\mu\alpha\beta\nu})$ для момента импульса через интеграл по поверхности.
Решение.
Момент импульса:
$$J^{\mu\nu} = \int df_\lambda |g|(x^\mu(T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) - x^\nu(T^{\mu\lambda} + t^{\mu\lambda})) \tag{235}$$
На решениях уравнения Эйнштейна:
$$|g|(T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) = \tau^{\nu\lambda\kappa}{}_{,\kappa} \tag{236}$$

$$J^{\mu\nu} = \int df_\lambda(x^\mu\tau^{\nu\lambda\kappa}{}_{,\kappa} - x^\nu\tau^{\mu\lambda\kappa}{}_{,\kappa}) = \int df_\lambda((x^\mu\tau^{\nu\lambda\kappa} - x^\nu\tau^{\mu\lambda\kappa})_{,\kappa} - \tau^{\nu\lambda\mu} + \tau^{\mu\lambda\nu}) \tag{237}$$

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}{}_{,\rho} \tag{238}$$

$$J^{\mu\nu} = \int df_\lambda(x^\mu\tau^{\nu\lambda\kappa} - x^\nu\tau^{\mu\lambda\kappa} - \chi^{\nu\lambda\mu\kappa} + \chi^{\mu\lambda\nu\kappa})_{,\kappa} \tag{239}$$

$$\chi^{\mu\lambda\nu\kappa} - \chi^{\nu\lambda\mu\kappa} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\kappa} - g^{\nu\lambda}g^{\mu\kappa} + g^{\nu\mu}g^{\lambda\kappa}) = \chi^{\mu\lambda\kappa\nu} \tag{240}$$

$$J^{\mu\nu} = \int df_\lambda(x^\mu\tau^{\nu\lambda\kappa} - x^\nu\tau^{\mu\lambda\kappa} + \chi^{\mu\lambda\kappa\nu})_{,\kappa} \tag{241}$$
По формуле Стокса
$$\boxed{J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\oint df_{\lambda\kappa}(x^\mu\tau^{\nu\lambda\kappa} - x^\nu\tau^{\mu\lambda\kappa} + \chi^{\mu\lambda\kappa\nu})} \tag{242}$$

6.5. * Покажите, что действие Эйнштейна—Гильберта $S_{\text{грав}} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\sqrt{|g|}(R + 2\Lambda)$ (с $\Lambda = 0$, как мы условились) можно привести к виду $S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\sqrt{|g|}\mathcal{R}(g, \partial_\bullet g)$ с лагранжианом $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda})$.
Решение.
Распишем кривизну:
$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\partial_\kappa\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\mu\kappa} + \Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\kappa}) \tag{243}$$

$$\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\kappa\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \partial_\kappa(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}) - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) \tag{244}$$

$$\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\mu\kappa} = \partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa_{\mu\kappa}) - \Gamma^\kappa_{\mu\kappa}\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) \tag{245}$$
Добавлением члена с полной дивергенцией лагранжиан можно привести к виду
$$\sqrt{|g|}\mathcal{R} = \Gamma^\kappa_{\mu\kappa}\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\kappa}) \tag{246}$$

$$\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\partial_\nu(\sqrt{|g|}) + \sqrt{|g|}\partial_\nu g^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2\sqrt{|g|}}\partial_\nu |g| - \sqrt{|g|}\partial_\nu g_{\rho\lambda} g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} =$$
$$= \frac{g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda}\sqrt{|g|}}{2}\partial_\nu g_{\rho\lambda} - \sqrt{|g|} g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}\partial_\nu g_{\rho\lambda} \quad (247)$$

где в равенствах были использованы равенства из задачи 5.2. Проверим, чему равно выражение

$$g^{\rho\lambda}\Gamma^\mu_{\rho\lambda} = \frac{g^{\rho\lambda}g^{\mu\nu}}{2}(\partial_\rho g_{\lambda\nu} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\lambda}) = g^{\rho\lambda}g^{\mu\nu}\left(\partial_\rho g_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\rho\lambda}\right) = -\frac{\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu})}{\sqrt{|g|}} \quad (248)$$

$$\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) = -\sqrt{|g|}g^{\rho\lambda}\Gamma^\mu_{\rho\lambda} \quad (249)$$

$$\partial_\kappa(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{|g|}) + \sqrt{|g|}\partial_\kappa g^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2\sqrt{|g|}}\partial_\kappa |g| - \sqrt{|g|}\partial_\kappa g_{\rho\lambda} g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} =$$
$$= \frac{g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda}\sqrt{|g|}}{2}\partial_\kappa g_{\rho\lambda} - \sqrt{|g|} g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}\partial_\kappa g_{\rho\lambda} \quad (250)$$

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\partial_\kappa(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) = \Gamma^\kappa_{\mu\nu}(g^{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{|g|}) + \sqrt{|g|}\partial_\kappa g^{\mu\nu}) = \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\left(\sqrt{|g|}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda\rho}}\frac{g_{\lambda\rho}}{\partial x^\kappa}g^{\mu\nu}\right) =$$
$$= -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\sqrt{|g|}(\Gamma^\mu_{\lambda\kappa}g^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\kappa}g^{\lambda\mu}) + \frac{\sqrt{|g|}g^{\lambda\rho}}{2}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(g_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\kappa} + g_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\kappa}) \quad (251)$$

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) = -\sqrt{|g|}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(2g^{\lambda\nu}\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}) \quad (252)$$

$$\sqrt{|g|}\mathcal{R} = \sqrt{|g|}(2g^{\lambda\nu}\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda})\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\mu\kappa}\sqrt{|g|}g^{\rho\lambda}\Gamma^\mu_{\rho\lambda} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\kappa}) \quad (253)$$

$$\mathcal{R} = 2(g^{\lambda\nu}\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda})\Gamma^\kappa_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\kappa}) \quad (254)$$

$$\boxed{\mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda})} \quad (255)$$

7 Слабое гравитационное поле

7.1. Покажите, что для оператора $K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}(-\delta^\lambda_\mu\delta^\kappa_\nu\Box + \delta^\lambda_\mu\eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu + \delta^\kappa_\nu\eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu)$ $Kh = 0$, если $h_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$.
Решение.

$$Kh = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa}h_{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}(-\delta^\lambda_\mu\delta^\kappa_\nu\Box + \delta^\lambda_\mu\eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu + \delta^\kappa_\nu\eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu)(\varphi_{\lambda,\kappa} + \varphi_{\kappa,\lambda}) \quad (256)$$

Рассмотрим 1 слагаемое:

$$\delta^\lambda_\mu\delta^\kappa_\nu\Box(\varphi_{\lambda,\kappa} + \varphi_{\kappa,\lambda}) = \delta^\lambda_\mu\delta^\kappa_\nu\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma(\varphi_{\lambda,\kappa} + \varphi_{\kappa,\lambda}) = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa(\varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}) \quad (257)$$

Рассмотрим 2 и 3 слагаемые:

$$\delta^\lambda_\mu \eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu(\varphi_{\lambda,\kappa}+\varphi_{\kappa,\lambda}) = \eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu(\varphi_{\mu,\kappa}+\varphi_{\kappa,\mu}),\ \delta^\kappa_\nu \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu(\varphi_{\lambda,\kappa}+\varphi_{\kappa,\lambda}) = \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu(\varphi_{\lambda,\nu}+\varphi_{\nu,\lambda})$$

Их сумма:

$$\eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu(\varphi_{\mu,\kappa}+\varphi_{\kappa,\mu}) + \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu(\varphi_{\lambda,\nu}+\varphi_{\nu,\lambda}) = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\kappa(\partial_\nu\varphi_{\mu,\lambda}+\partial_\nu\varphi_{\lambda,\mu}+\partial_\mu\varphi_{\lambda,\nu}+\partial_\mu\varphi_{\nu,\lambda}) \quad (258)$$

Преобразуем все 4 слагемые, чтобы стало видно, что всё сокращается:

$$\eta^{\lambda\kappa}\partial_\kappa\partial_\nu\varphi_{\mu,\lambda} = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa\varphi_{\mu,\nu}, \quad \eta^{\lambda\kappa}\partial_\kappa\partial_\nu\varphi_{\lambda,\mu} = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_{\lambda,\kappa}, \quad (259)$$

$$\eta^{\lambda\kappa}\partial_\kappa\partial_\mu\varphi_{\lambda,\nu} = \eta^{\kappa\lambda}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_{\lambda,\kappa} = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_{\kappa,\lambda}, \quad \eta^{\lambda\kappa}\partial_\kappa\partial_\mu\varphi_{\nu,\lambda} = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa\varphi_{\nu,\mu} \quad (260)$$

Собирая все слагаемые вместе, получим

$$Kh = -\eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa(\varphi_{\mu,\nu}+\varphi_{\nu,\mu}) + \eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa\varphi_{\mu,\nu} + \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_{\lambda,\kappa} + \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_{\kappa,\lambda} + \eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa\varphi_{\nu,\mu} - \\ - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu(\varphi_{\lambda,\kappa}+\varphi_{\kappa,\lambda}) \quad (261)$$

Таким образом, все слагаемые сокращаются и

$$\boxed{Kh = 0} \quad (262)$$

8 Гравитационные волны

8.1.

8.2.

8.3. Выведите формулы $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\eta^{\lambda\kappa}}{2}(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) + \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha}$, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{ab} = -\frac{1}{2}h^{(1),\lambda}_{ab}$, $R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu}$, $\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(h^{(1)}h^{(1)}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta})$, $\tilde{R}_{\alpha b} = 0$, $\tilde{R}_{ab} = \frac{1}{2}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})_{ab}$, $\tilde{R} = \frac{3}{4}\mathrm{tr}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})$ со всеми подробностями. Покажите, что уравнения $\Box h^{(2)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta} - \mathrm{tr}h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta}\right)$, $\Box h^{(2)}_{\alpha b} = 0$, $\Box h^{(2)}_{ab} = \frac{1}{2}\Box(h^{(1)2})_{ab}$ совместны с калибровочным условием $\psi^{(2)\overline{\mu\nu}}_{,\nu} = 0$, $\psi^{(2)}_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\mathrm{tr}h^{(2)}$.

Решение.

Связность Леви-Чивиты:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\kappa}}{2}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \quad (263)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + ..., \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{(1)\overline{\mu\nu}} - h^{(2)\overline{\mu\nu}} + (h^{(1)2})^{\overline{\mu\nu}} + ... \quad (264)$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}} - h^{(2)\overline{\lambda\kappa}} + (h^{(1)2})^{\overline{\lambda\kappa}})(h^{(1)}_{\kappa\nu,\mu} + h^{(2)}_{\kappa\nu,\mu} + h^{(1)}_{\kappa\mu,\nu} + h^{(2)}_{\kappa\mu,\nu} - h^{(1)}_{\mu\nu,\kappa} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) = \\ = \frac{\eta^{\lambda\kappa}}{2}(h^{(2)}_{\kappa\nu,\mu} + h^{(2)}_{\kappa\mu,\nu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) + \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})(h^{(1)}_{\kappa\nu,\mu} + h^{(1)}_{\kappa\mu,\nu} - h^{(1)}_{\mu\nu,\kappa}) \quad (265)$$

$$\boxed{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\eta^{\lambda\kappa}}{2}(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) + \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}, \quad \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})(h^{(1)}_{\kappa\nu,\mu} + h^{(1)}_{\kappa\mu,\nu} - h^{(1)}_{\mu\nu,\kappa})} \quad (266)$$

$$\alpha, \beta, ... = 0, 1; \quad a, b, ... = 2, ..., d-1 \tag{267}$$

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})(h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha} + h^{(1)}_{\kappa\alpha,\nu} - h^{(1)}_{\alpha\nu,\kappa}) \tag{268}$$

$$h^{(1)}_{\alpha\nu} = 0 \tag{269}$$

$$\boxed{\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha}} \tag{270}$$

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{ab} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})(h^{(1)}_{\kappa b,a} + h^{(1)}_{\kappa a,b} - h^{(1)}_{ab,\kappa}) \tag{271}$$

$$h^{(1)}_{ab} = h^{(1)}_{ab}(x^0, x^1) \to h^{(1)}_{ab,c} = 0 \tag{272}$$

$$\boxed{\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{ab} = -\frac{1}{2}h^{(1),\lambda}_{ab}} \tag{273}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} = \frac{\eta^{\lambda\kappa}}{2}(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu\lambda} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu\lambda} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} -$$
$$- h^{(2)}_{\mu\kappa,\lambda\nu} - h^{(2)}_{\lambda\kappa,\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\lambda,\kappa\nu}) + \tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\eta^{\lambda\kappa}h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} + h^{(2)\overline{\kappa}}_{\nu,\mu\kappa} + h^{(2)\overline{\kappa}}_{\mu,\nu\kappa} - \mathrm{tr}h^{(2)}_{,\mu}) + \tilde{R}_{\mu\nu} \tag{274}$$

Калибровочное условие:

$$\psi^{(2)\overline{\mu\nu}}_{,\nu} = 0, \quad \psi^{(2)}_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathrm{tr}h^{(2)} \tag{275}$$

Воспользуемся калибровочным условием и получим:

$$\boxed{R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu}} \tag{276}$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\lambda}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\nu}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\lambda} \tag{277}$$

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta,\lambda} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\lambda,\beta} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\lambda}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\beta}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\lambda} = -\tilde{\Gamma}^{b}_{\alpha b,\beta} - \tilde{\Gamma}^{b}_{c\beta}\tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha b} = -\frac{1}{2}((\eta^{b\lambda} - h^{(1)\overline{b\lambda}})h^{(1)}_{\lambda b,\alpha})_{,\beta} -$$
$$- \frac{1}{4}(\eta^{b\lambda} - h^{(1)\overline{b\lambda}})h^{(1)}_{\lambda c,\beta}(\eta^{c\rho} - h^{(1)\overline{c\rho}})h^{(1)}_{\rho b,\alpha} = \frac{1}{2}(-\mathrm{tr}h^{(1)}_{,\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda}h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda}h^{(1)}_{\lambda\mu,\beta}h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha}) -$$
$$- \frac{1}{4}\eta^{b\lambda}\eta^{c\rho}h^{(1)}_{\lambda c,\beta}\eta^{(1)}_{\rho b,\alpha} + (h^{(1)})^3 = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{(1)\lambda}_{\mu}h^{(1)}_{\lambda\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\rho c}h^{(1)\lambda}_{\rho,\alpha}h^{(1)}_{\lambda c,\beta} \tag{278}$$

$$\boxed{\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(h^{(1)}h^{(1)}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta})} \tag{279}$$

$$\tilde{R}_{\alpha b} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha b,\lambda} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\lambda,b} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\lambda}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\alpha b} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho b}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\lambda} = \tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha b,c} - \tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha c,b} \tag{280}$$

$$\boxed{\tilde{R}_{\alpha b} = 0} \tag{281}$$

$$\tilde{R}_{ab}=\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{ab,\lambda}-\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{a\lambda,b}+\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\lambda}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{ab}-\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho b}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{a\lambda}=\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{ab,\alpha}+\tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha c}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{ab}-\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{cb}\tilde{\Gamma}^{c}_{a\alpha}-\tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha b}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{ac}=-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h^{(1)}_{ab,\beta\alpha}-$$
$$-\frac{1}{4}(\eta^{c\kappa}-h^{(1)\overline{c\kappa}}h^{(1)}_{\kappa c,\alpha})\eta^{\alpha\beta}h^{(1)}_{\kappa c,\alpha}h^{(1)}_{ab,\beta}+\frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}h^{(1)}_{cb,\beta}(\eta^{c\lambda}-h^{(1)\overline{c\lambda}})h^{(1)}_{\lambda a,\alpha}+$$
$$+\frac{1}{4}(\eta^{c\lambda}-h^{(1)\overline{c\lambda}})h^{(1)}_{\lambda b,\alpha}\eta^{\alpha\beta}h^{(1)}_{ac,\beta} \quad (282)$$

Воспользуемся тем, что $\Box h^{(1)}_{\mu\nu}=0$, и получим

$$\tilde{R}_{ab}=-\frac{1}{4}\eta^{c\lambda}\eta^{\alpha\beta}h^{(1)}_{\lambda c,\alpha}h^{(1)}_{ab,\beta}+\frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta^{c\lambda}h^{(1)}_{cb,\beta}h^{(1)}_{\lambda a,\alpha}+\frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta^{c\lambda}h^{(1)}_{ac,\beta}h^{(1)}_{\lambda b,\alpha} \quad (283)$$

Воспользуемся тем, что $\eta^{c\lambda}h^{(1)}_{c\lambda}=0$, и получим

$$\tilde{R}_{ab}=\frac{1}{4}h^{(1)\overline{\alpha}}_{cb}h^{(1)c}_{a,\alpha}+\frac{1}{4}h^{(1)\overline{\alpha}}_{c\alpha}h^{(1)c}_{b,\alpha} \quad (284)$$

$$\boxed{\tilde{R}_{ab}=\frac{1}{2}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})_{ab}} \quad (285)$$

$$\tilde{R}=\eta^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu}=\eta^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta}+\eta^{ab}\tilde{R}_{ab}=\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)}h^{(1)}_{,\alpha\beta})+\frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta})+\frac{1}{2}\eta^{ab}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})_{ab} \quad (286)$$

Опять воспользуемся тем, что $\Box h^{(1)}_{\mu\nu}=0$, и получим

$$\tilde{R}=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha}) \quad (287)$$

$$\boxed{\tilde{R}=\frac{3}{4}\mathrm{tr}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})} \quad (288)$$

Покажем, что уравнения $\Box h^{(2)}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta}-\mathrm{tr}h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta}\right)$, $\Box h^{(2)}_{\alpha b}=0$, $\Box h^{(2)}_{ab}=\frac{1}{2}\Box(h^{(1)2})_{ab}$ совместны с калибровочным условием. Вычислим $\Box\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h^{(2)}_{\lambda\rho,\nu}$ (с учётом 272):

$$\Box\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h^{(2)}_{\lambda\rho,\nu}=\Box\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h^{(2)}_{\alpha\beta,\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(\mathrm{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta}-\mathrm{tr}h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta})_{,\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta\nu}-$$
$$-\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathrm{tr}h^{(1)}_{,\alpha\nu}h^{(1)}_{,\beta}-\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta\nu})=\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\Box(h^{(1)2})_{,\alpha}-\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha\nu}h^{(1)}_{,\beta}) \quad (289)$$

Покажем, что вычитаемое меньше уменьшаемого в 4 раза:

$$\eta^{\mu\alpha}\Box(h^{(1)2})_{,\alpha}=\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(\mathrm{tr}h^{(1)2})_{,\alpha\beta\nu}=\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(2\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta}+h^{(1)}_{,\alpha\beta}h^{(1)}))_{,\nu}=$$
$$=\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(2\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha\nu}h^{(1)}_{,\beta}+h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta\nu}+h^{(1)}_{,\alpha\beta\nu}h^{(1)}+h^{(1)}_{,\alpha\beta}h^{(1)}_{,\nu}))=4\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha\nu}h^{(1)}_{,\beta}) \quad (290)$$

$$\Box\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h^{(2)}_{\lambda\rho,\nu}=\frac{3}{8}\eta^{\mu\nu}\Box(\mathrm{tr}h^{(1)2})_{,\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\mathrm{tr}h^{(2)}_{,\nu} \quad (291)$$

$$\Box\psi^{(2)\mu\nu}_{,\nu}=\Box\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}(h^{(2)}_{\lambda\rho}-\frac{1}{2}\eta_{\lambda\rho}\mathrm{tr}h^{(2)})_{,\nu}=\Box\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h^{(2)}_{\lambda\rho,\nu}-\frac{1}{2}\Box\eta^{\mu\nu}\mathrm{tr}h^{(2)}_{,\nu}=0 \quad (292)$$

9 Излучение гравитационных волн

9.1. Покажите, что функция $G^R(x)$, определённая формулой $G^R(t,\vec{r}) = \frac{\delta(t-r)}{4\pi r}$, удовлетворяет уравнению $\Box G^R(t,\vec{r}) = \delta(t)\delta(\vec{r})$.
Решение.

$$\Box G^R(t,\vec{r}) = \frac{\ddot{\delta}(t-r)}{4\pi r} - \Delta\frac{\delta(t-r)}{4\pi r} \tag{293}$$

$$\frac{\ddot{\delta}(t-r)}{4\pi r} = \frac{\delta''(t-r)}{4\pi r} \tag{294}$$

$$\Delta\frac{\delta(t-r)}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi}\left(\delta(t-r)\Delta\frac{1}{r} + 2\nabla\delta(t-r)\cdot\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\Delta\delta(t-r)\right) \tag{295}$$

Найдём $\nabla\frac{1}{r}$:

$$\left(\nabla\frac{1}{r}\right)_\alpha = \partial_\alpha\frac{1}{\sqrt{r^\beta r_\beta}} = -\frac{2r_\gamma\delta^\gamma_\alpha}{2(r^\beta r_\beta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r_\alpha}{(r^\beta r_\beta)^{\frac{3}{2}}} \to \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{296}$$

Найдём $\Delta\frac{1}{r}$:

$$\forall r \neq 0 \hookrightarrow \Delta\frac{1}{r} = -\partial_\alpha\frac{r_\alpha}{(r^\beta r_\beta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{(r^\beta r_\beta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\cdot 2r_\alpha r_\gamma\delta^\gamma_\alpha}{2(r^\beta r_\beta)^{\frac{5}{2}}} = 0 \tag{297}$$

По теореме Гаусса

$$\int_V \Delta\frac{1}{r}dV = \int_{\partial V}\nabla\frac{1}{r}\cdot d\vec{S} = -\int_{\partial V}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{S} = -\int_{\partial V} do = -4\pi \tag{298}$$

где интегрирование проводится по любому объёму V, окружающему начало координат. Таким образом,

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \tag{299}$$

Найдём ∇r:

$$(\nabla r)_\alpha = \partial_\alpha\sqrt{r^\beta r_\beta} = \frac{2r_\gamma\delta^\gamma_\alpha}{2\sqrt{r^\beta r_\beta}} = \frac{r_\alpha}{\sqrt{r^\beta r_\beta}} \to \nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \tag{300}$$

$$\nabla\delta(t-r) = -\delta'(t-r)\nabla r = -\delta'(t-r)\frac{\vec{r}}{r} \tag{301}$$

Найдём Δr:

$$\Delta r = \partial_\alpha\frac{r_\alpha}{\sqrt{r^\beta r_\beta}} = \frac{3}{\sqrt{r^\beta r_\beta}} - \frac{2r_\alpha r_\gamma\delta^\gamma_\alpha}{2(r^\beta r_\beta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{r} \tag{302}$$

$$\Delta\delta(t-r) = \delta''(t-r)(\nabla r)^2 - \delta'(t-r)\Delta r = \delta''(t-r) - \delta'(t-r)\frac{2}{r} \tag{303}$$

$$\Delta\frac{\delta(t-r)}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi}\left(-4\pi\delta(t-r)\delta(\vec{r}) + 2\delta'(t-r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{r}\left(\delta''(t-r) - \delta'(t-r)\frac{2}{r}\right)\right) \tag{304}$$

$$\Box G^R(t,\vec{r}) = \delta(t-r)\delta(\vec{r}) \tag{305}$$

Проверим, что $= \delta(t-r)\delta(\vec{r}) == \delta(t)\delta(\vec{r})$:

$$\int_t \int_V \delta(t-r)\delta(\vec{r})dVdt = \int_t \delta(t)dt = 1 = \int_t \int_V \delta(t)\delta(\vec{r})dVdt \to \delta(t-r)\delta(\vec{r}) = \delta(t)\delta(\vec{r}) \qquad (306)$$

где интегрирование проводится по любым V и t, содержащим 0.

$$\boxed{\Box G^R(t,\vec{r}) = \delta(t)\delta(\vec{r})} \qquad (307)$$

9.2.

9.3.

9.4. Выведите $E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}$, $dI(\vec{n}) = \frac{G}{36\pi}\left(\frac{1}{4}(\dddot{D}_{ij}n_in_j)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{ij}^2 - \dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik}n_jn_k\right)do$. Затем проинтегрируйте $dI(\vec{n}) = \frac{G}{36\pi}\left(\frac{1}{4}(\dddot{D}_{ij}n_in_j)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{ij}^2 - \dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik}n_jn_k\right)do$ по углам и получите $-\frac{d\varepsilon}{dt} = I = \frac{G}{45}\dddot{D}_{ij}^2$.

Решение.

$$E_{ijkl} = E_1n_in_jn_kn_l + E_2(n_in_j\delta_{kl} + n_kn_l\delta_{ij}) + E_3(n_in_k\delta_{jl} + n_jn_k\delta_{il} + n_in_l\delta_{jk} + n_jn_l\delta_{ik}) + \\ + E_4\delta_{ij}\delta_{kl} + E_5(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (308)$$

$$E_{iikl} = E_1n_kn_l + E_2(\delta_{kl} + 3n_kn_l) + 4E_3n_kn_l + 3E_4\delta_{kl} + 2E_5\delta_{kl} = 0 \qquad (309)$$

где использовано, что $n_in_i = \vec{n}^2 = 1$ и $\delta_{ii} = 3$. Поскольку n_kn_l и δ_{kl} в общем случае линейно независимы, то

$$\begin{cases} E_1 + 3E_2 + 4E_3 = 0, \\ E_2 + 3E_4 + 2E_5 = 0. \end{cases} \qquad (310)$$

$$E_{ijkl}n_i = E_1n_jn_kn_l + E_2(n_j\delta_{kl} + n_jn_kn_l) + E_3(n_k\delta_{jl} + n_ln_jn_k + n_l\delta_{jk} + n_kn_jn_l) + E_4n_j\delta_{kl} + \\ + E_5(n_k\delta_{jl} + n_l\delta_{jk}) = 0 \qquad (311)$$

$$\begin{cases} E_1 + E_2 + 2E_3 = 0, \\ E_2 + E_4 = 0, \\ E_3 + E_5 = 0, \end{cases} \qquad (312)$$

Из систем уравнений (310) и (312) следует, что

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 \qquad (313)$$

$$E_{2222}(\partial_1) = E_1n_2^4 + 2E_2n_2^2 + 4E_3n_2^2 + E_4 + 2E_5 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2} \qquad (314)$$

Таким образом,

$$\boxed{E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}} \qquad (315)$$

$$dI(\vec{n}) = \frac{G}{72\pi}\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{kl}E_{ijkl}(\vec{n})do = \frac{G}{148\pi}\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{kl}(n_in_jn_kn_l + (n_in_j\delta_{kl} + n_kn_l\delta_{ij}) - (n_in_k\delta_{jl} + n_jn_k\delta_{il} + \\ + n_in_l\delta_{jk} + n_jn_l\delta_{ik}) - \delta_{ij}\delta_{kl} + (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}))do \qquad (316)$$

$$\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{kl}(n_in_jn_kn_l+n_in_j\delta_{kl}+n_kn_l\delta_{ij}-n_in_k\delta_{jl}-n_jn_k\delta_{il}-n_in_l\delta_{jk}-n_jn_l\delta_{ik}-\delta_{ij}\delta_{kl}+$$
$$+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})=\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{kl}n_in_jn_kn_l-\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{jk}n_in_k-\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik}n_jn_k-\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{jl}n_in_l-\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{il}n_jn_l+2\dddot{D}_{ij}^2$$

Таким образом,

$$\boxed{dI(\vec{n})=\frac{G}{36\pi}\left(\frac{1}{4}(\dddot{D}_{ij}n_in_j)^2+\frac{1}{2}\dddot{D}_{ij}^2-\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik}n_jn_k\right)do} \tag{317}$$

Воспользуемся формулой

$$\langle f(\vec{n})\rangle=\frac{1}{4\pi}\int f(\vec{n})do \tag{318}$$

Для вычисления $\langle n_jn_k\rangle$ воспользуемся соображениями симметрии: результат усреднения должен быть симметричным, инвариантным относительно вращений тензором II ранга. Единственная возможность:

$$\langle n_jn_k\rangle=A\delta_{jk} \tag{319}$$

Определим A:

$$\langle n_jn_j\rangle=3A=1\rightarrow A=\frac{1}{3} \tag{320}$$

$$\langle n_jn_k\rangle=\frac{1}{3}\delta_{jk} \tag{321}$$

Для усреднения $\langle n_in_jn_kn_l\rangle$ симметризуем индексы в тензоре IV ранга $\delta_{ij}\delta_{kl}$:

$$\langle n_in_jn_kn_l\rangle=B(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{322}$$

Определим B:

$$\langle n_in_in_kn_l\rangle=B(\delta_{ii}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{il}+\delta_{il}\delta_{ik})=B(3+1+1)\delta_{kl}=\langle n_kn_l\rangle \tag{323}$$

$$\langle n_kn_k\rangle=3\cdot5B=1\rightarrow B=\frac{1}{15} \tag{324}$$

$$\langle n_in_jn_kn_l\rangle=\frac{1}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{325}$$

$$I=\frac{G}{9}\left(\frac{1}{60}\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{kl}(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\frac{1}{2}\dddot{D}_{ij}^2-\frac{1}{3}\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik}\delta_{jk}\right)=\frac{G}{9}\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\dddot{D}_{ij}^2 \tag{326}$$

$$\boxed{-\frac{d\varepsilon}{dt}=I=\frac{G}{45}\dddot{D}_{ij}^2} \tag{327}$$

9.5. * Две частицы массами m_1 и m_2 вращаются вокруг общего центра масс с нерелятивистскими скоростями по круговым орбитам на расстоянии r друг от друга. Найдите потери энергии системой на гравитационное излучение и приближенную зависимость $r(t)$ в предположении, что взаимодействие частиц можно считать ньютоновским.

Решение.

Выберем начало координат в центре масс системы. Пусть r_1 и r_2 – расстояния от центра масс до частиц.

$$m_1\vec{r}_1=-m_2\vec{r}_2 \tag{328}$$

Радиус-векторы частиц:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{329}$$

Пусть $M = m_1 + m_2$ – масса системы, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ – приведённая масса. Квадрупольный момент:

$$D_{ij}(t) = \int d^3x \rho(t, \vec{r}')(3x_i x_j - r'^2\delta_{ij}) \tag{330}$$

Пусть ω – угловая частота частиц, $\varphi = \omega t$ – угол между прямой, соединяющей частицы и осью x. Направим ось z вдоль оси вращения системы. Компоненты квадрупольного момента:

$$D_{xx}(t) = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)(3\cos^2\omega t - 1) = \mu r^2(3\cos^2\omega t - 1) = \frac{3\mu r^2}{2}\cos 2\omega t + \bar{D}_{xx} \tag{331}$$

$$D_{yy}(t) = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)(3\sin^2\omega t - 1) = \mu r^2(3\sin^2\omega t - 1) = -\frac{3\mu r^2}{2}\cos 2\omega t + \bar{D}_{yy} \tag{332}$$

$$D_{xy}(t) = D_{yx}(t) = 3(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\sin\omega t\cos\omega t = \frac{3\mu r^2}{2}\sin 2\omega t \tag{333}$$

$$D_{zz}(t) = -(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = -\mu r^2 = \bar{D}_{zz}, \quad D_{xz}(t) = D_{zx}(t) = D_{yz}(t) = D_{zy}(t) = 0 \tag{334}$$

где сверху подчёркнуты слагаемые, не зависящие от времени. Усреднённые за период потери энергии:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = I = \frac{G}{45}\langle \dddot{D}_{ij}^2 \rangle = \frac{G}{45}\left(\frac{3\mu r^2}{2}\right)^2 (2\omega)^6 \langle (2\sin^2 2\omega t + 2\cos^2 2\omega t) \rangle = \frac{32 G\mu^2 r^4 \omega^6}{5} \tag{335}$$

$$\varepsilon = T + \Pi = \frac{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r} = \frac{\mu r^2 \omega^2}{2} - \frac{G\mu M}{r} \tag{336}$$

По теореме вириала для $\Pi \propto \frac{1}{r}$:

$$\Pi = -2T \to \omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}, \quad \varepsilon = -\frac{G\mu M}{2r} \tag{337}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{32 G^4 M^3 \mu^2}{5r^5} \tag{338}$$

Вернёмся к обозначениям:

$$\boxed{\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{32 G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{5r^5}} \tag{339}$$

Связь между производными энергии и расстояния:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{G m_1 m_2}{2r^2}\frac{dr}{dt} \tag{340}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64 G^3 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{5r^3}, \quad r(0) = r_0 \tag{341}$$

Приближённая зависимость $r(t)$:

$$\boxed{r(t) = \sqrt[4]{r_0^4 - \frac{256}{5}G^3 m_1 m_2 (m_1+m_2)t}} \tag{342}$$

10 Решение Шварцшильда

10.1. Покажите, что векторные поля J_i, определенные как $J_x = z\partial_y - y\partial_z$, $J_y = x\partial_z - z\partial_x$, $J_z = y\partial_x - x\partial_y$, являются векторами Киллинга в плоском пространстве-времени и удовлетворяют соотношениям $[J_i, J_j] = \sum\limits_{k=x}^{z} \epsilon^{ijk} J_k$ алгебры $so(3)$.

Решение.

$$J_x = z\partial_y - y\partial_z, \quad J_y = x\partial_z - z\partial_x, \quad J_z = y\partial_x - x\partial_y \tag{343}$$

Векторы Киллинга удовлетворяют равенствам:

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0 \tag{344}$$

$$J_{xy;z} + J_{xz;y} = 1 - 1 = 0, \quad J_{yz;x} + J_{yx;z} = 1 - 1 = 0, \quad J_{zx;y} + J_{zy;x} = 1 - 1 = 0 \tag{345}$$

Остальные компоненты равны 0.

Проверим соотношения $[J_i, J_j] = \sum\limits_{k=x}^{z} \epsilon^{ijk} J_k$:

$$\begin{multline}[J_x, J_y] = (z\partial_y - y\partial_z)(x\partial_z - z\partial_x) - (x\partial_z - z\partial_x)(z\partial_y - y\partial_z) = zx\partial_y\partial_z - yx\partial_z^2 - z^2\partial_y\partial_x + yz\partial_z\partial_x + y\partial_x - \\ - xz\partial_z\partial_y - x\partial_y + z^2\partial_x\partial_y + xy\partial_z^2 - yz\partial_x\partial_z = J_z\end{multline} \tag{346}$$

$$\begin{multline}[J_x, J_z] = (z\partial_y - y\partial_z)(y\partial_x - x\partial_y) - (y\partial_x - x\partial_y)(z\partial_y - y\partial_z) = zy\partial_y\partial_x + z\partial_x - zx\partial_y^2 - y^2\partial_z\partial_x + yx\partial_z\partial_y - \\ - yz\partial_x\partial_y + y^2\partial_x\partial_z + xz\partial_y^2 - xy\partial_y\partial_z - x\partial_z = -J_y\end{multline} \tag{347}$$

$$\begin{multline}[J_y, J_z] = (x\partial_z - z\partial_x)(y\partial_x - x\partial_y) - (y\partial_x - x\partial_y)(x\partial_z - z\partial_x) = xy\partial_z\partial_x - zy\partial_x^2 - x^2\partial_z\partial_y + zx\partial_x\partial_y + z\partial_y - \\ - yx\partial_x\partial_z - y\partial_z + x^2\partial_y\partial_z + yz\partial_x^2 - xz\partial_y\partial_z = J_x\end{multline} \tag{348}$$

$$\boxed{[J_i, J_j] = \sum_{k=x}^{z} \epsilon^{ijk} J_k} \tag{349}$$

10.2. Завершите доказательство формул.

Решение.

$$J_x = \sin\varphi\partial_\theta + \cot\theta\cos\varphi\partial_\varphi, \quad J_y = -\cos\varphi \tag{350}$$

10.3. Проверьте формулы.

Решение.

Сферически-симметричная метрика:

$$ds^2 = e^{2k(t,r)}dt^2 - e^{2h(t,r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{351}$$

Обратная метрика:

$$g^{\bullet\bullet} = e^{-2k(t,r)}\partial_t \otimes \partial_t - e^{-2h(t,r)}\partial_r \otimes \partial_r - r^{-2}(\partial_\theta \otimes \partial_\theta + \sin^{-2}\theta\partial_\varphi \otimes \partial_\varphi) \tag{352}$$

Для связности Леви-Чивиты:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\kappa}}{2}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \tag{353}$$

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{g^{t\kappa}}{2}(2\partial_t g_{\kappa t} - \partial_\kappa g_{tt}) = \frac{g^{tt}}{2}\partial_t g_{tt} = \frac{e^{-2k}}{2}2\dot{k}e^{2k} = \dot{k} \tag{354}$$

$$\Gamma^t_{rt} = \frac{g^{t\kappa}}{2}(\partial_r g_{\kappa t} + \partial_t g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{rt}) = \frac{g^{tt}}{2}\partial_r g_{tt} = e^{-2k}e^{2k}k' = k' \tag{355}$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{g^{r\kappa}}{2}(2\partial_t g_{\kappa t} - \partial_\kappa g_{tt}) = -\frac{g^{rr}}{2}\partial_r g_{tt} = \frac{1}{2}e^{-2h}2k'e^{2k} = k'e^{2k-2h} \tag{356}$$

$$\Gamma^r_{rt} = \frac{g^{r\kappa}}{2}(\partial_r g_{\kappa t} + \partial_t g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{rt}) = \frac{g^{rr}}{2}\partial_t g_{rr} = -\frac{1}{2}e^{-2h}2\dot{h}e^{2h} = \dot{h} \tag{357}$$

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{g^{t\kappa}}{2}(2\partial_r g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{rr}) = -\frac{g^{tt}}{2}\partial_t g_{rr} = \frac{1}{2}e^{-2k}2\dot{h}e^{2h} = \dot{h}e^{2(h-k)} \tag{358}$$

Все остальные $\Gamma^t_{\mu\nu} = 0$, поскольку из-за диагональности обратной метрики из $g^{t\kappa} \neq 0$ только g^{tt} (первый множитель в (353)), а из $g_{t\mu} \neq 0$ только g_{tt}, который от углов не зависит (первые 2 слагаемых 2 множителя в (353)), $\partial_t g_{\mu\nu} \neq 0$ только для g_{tt} и g_{rr} (последнее слагаемое 2 множителя в (353)). Т.е. все ненулевые случаи уже были рассмотрены.

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{g^{r\kappa}}{2}(2\partial_r g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{rr}) = \frac{g^{rr}}{2}\partial_r g_{rr} = \frac{1}{2}e^{-2h}2h'e^{2h} = h' \tag{359}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{g^{\theta\kappa}}{2}(\partial_r g_{\kappa\theta} + \partial_\theta g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{r\theta}) = \frac{g^{\theta\theta}}{2}\partial_r g_{\theta\theta} = \frac{1}{2}r^{-2}2r = r^{-1} \tag{360}$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{g^{\varphi\kappa}}{2}(\partial_r g_{\kappa\varphi} + \partial_\varphi g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{r\varphi}) = \frac{g^{\varphi\varphi}}{2}\partial_r g_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}r^{-2}2r = r^{-1} \tag{361}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{g^{r\kappa}}{2}(2\partial_\theta g_{\kappa\theta} - \partial_\kappa g_{\theta\theta}) = -\frac{g^{rr}}{2}\partial_r g_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}e^{-2h}2r = -re^{-2h} \tag{362}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{g^{r\kappa}}{2}(2\partial_\varphi g_{\kappa\varphi} - \partial_\kappa g_{\varphi\varphi}) = -\frac{g^{rr}}{2}\partial_r g_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}e^{-2h}2r\sin^2\theta = -re^{-2h}\sin^2\theta \tag{363}$$

Все остальные $\Gamma^r_{\mu\nu} = 0$, поскольку из-за диагональности обратной метрики из $g^{r\kappa} \neq 0$ только g^{rr} (первый множитель в (353)), а из $g_{r\mu} \neq 0$ только g_{rr}, который от углов не зависит (первые 2 слагаемых 2 множителя в (353)), $\partial_r g_{\mu\nu} \neq 0$ только при $\mu = \nu$ (последнее слагаемое 2 множителя в (353)). Т.е. все ненулевые случаи уже были рассмотрены.

$$\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{g^{\varphi\kappa}}{2}(\partial_\theta g_{\kappa\varphi} + \partial_\varphi g_{\kappa\theta} - \partial_\kappa g_{\theta\varphi}) = \frac{g^{\varphi\varphi}}{2}\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}2r^2\sin\theta\cos\theta = \cot\theta \tag{364}$$

Все остальные $\Gamma^\varphi_{\mu\nu} = 0$, поскольку из-за диагональности обратной метрики $g^{\varphi\kappa} \neq 0$ только $g^{\varphi\varphi}$ (первый множитель в (353)), а из $g_{\varphi\mu} \neq 0$ только $g_{\varphi\varphi}$, который от t и φ не зависит (первые 2 слагаемых 2 множителя в (353)), $\partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0\ \forall \mu, \nu$ (последнее слагаемое 2 множителя в (353)). Т.е. все ненулевые случаи уже были рассмотрены.

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{g^{\theta\kappa}}{2}(2\partial_\varphi g_{\kappa\varphi} - \partial_\kappa g_{\varphi\varphi}) = -\frac{g^{\theta\theta}}{2}\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \tag{365}$$

Все остальные $\Gamma^\theta_{\mu\nu} = 0$, поскольку из из-за диагональности обратной метрики $g^{\theta\kappa} \neq 0$ только $g^{\theta\theta}$ (первый множитель в (353)), а из $g_{\theta\mu} \neq 0$ только $g_{\theta\theta}$, который от t, θ и φ не зависит (первые 2 слагаемых 2 множителя в (353)), $\partial_\theta g_{\mu\nu} \neq 0$ только для $g_{\varphi\varphi}$ (первые 2 слагаемых 2 множителя в (353)). Т.е. все ненулевые случаи уже были рассмотрены.

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} \to R_{\lambda\nu} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} \tag{366}$$

$$R^t_t = g^{tt}R_{tt} = g^{tt}(\partial_\mu \Gamma^\mu_{tt} - \partial_t \Gamma^\mu_{t\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{tt} - \Gamma^\mu_{\rho t}\Gamma^\rho_{t\mu}) = g^{tt}(\partial_t \Gamma^t_{tt} + \partial_r \Gamma^r_{tt} - \partial_t \Gamma^t_{tt} - \partial_r \Gamma^r_{tr} + \\ + \Gamma^t_{tt}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{tr}) + \Gamma^r_{tt}(\Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) - (\Gamma^t_{tt})^2 - 2\Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{tr} - (\Gamma^r_{tr})^2) \tag{367}$$

$$R^t_t = e^{-2k}(\ddot{k} + k'' e^{2(k-h)} + 2k'(k'-h')e^{2(k-h)} - \ddot{k} - \ddot{h} + \dot{k}(\dot{k}+\dot{h}) + k'e^{2(k-h)}(k'+h'+2r^{-1}) - \\ - \dot{k}^2 - 2k'^2 e^{2(k-h)} + \dot{h}^2) \tag{368}$$

$$\boxed{R^t_t = e^{-2k}(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2) + e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')} \tag{369}$$

$$R^r_r = g^{rr}R_{rr} = g^{rr}(\partial_\mu \Gamma^\mu_{rr} - \partial_r \Gamma^\mu_{r\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{rr} - \Gamma^\mu_{\rho r}\Gamma^\rho_{r\mu}) = g^{rr}(\partial_t \Gamma^t_{rr} + \partial_r \Gamma^r_{rr} - \partial_r \Gamma^t_{rt} - \partial_r \Gamma^r_{rr} - \\ - \partial_r \Gamma^\theta_{r\theta} - \partial_r \Gamma^\varphi_{r\varphi} + \Gamma^t_{rr}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{tr}) + \Gamma^r_{rr}(\Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) - (\Gamma^t_{rt})^2 - 2\Gamma^t_{rr}\Gamma^r_{tr} - (\Gamma^r_{rr})^2 - (\Gamma^\theta_{\theta r})^2 - (\Gamma^\varphi_{\varphi r})^2)$$

$$R^r_r = e^{-2h}(-\ddot{h}e^{2(h-k)} - 2\dot{h}(\dot{h}-\dot{k})e^{2(h-k)} - h'' + k'' + h'' - 2r^{-1} - \dot{h}(\dot{h}+\dot{k})e^{2(h-k)} - e^{-2h}h'(k'+h'+2r^{-1}) + \\ + k'^2 + 2\dot{h}^2 e^{2(h-k)} + h'^2 + 2r^{-2}) \tag{370}$$

$$\boxed{R^r_r = e^{-2k}(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2) + e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}h')} \tag{371}$$

$$R^t_r = g^{tt}R_{tr} = g^{tt}(\partial_\mu \Gamma^\mu_{tr} - \partial_r \Gamma^\mu_{t\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{tr} - \Gamma^\mu_{\rho r}\Gamma^\rho_{t\mu}) = g^{tt}(\partial_t \Gamma^t_{tr} + \partial_r \Gamma^r_{tr} - \partial_r \Gamma^t_{tt} - \partial_r \Gamma^r_{tr} + \Gamma^t_{tr}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{tr}) + \\ + \Gamma^r_{tr}(\Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) - \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{tr} - \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{rr} - \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tr} - \Gamma^r_{rt}\Gamma^r_{rr}) \tag{372}$$

$$\boxed{R^t_r = 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}} \tag{373}$$

$$R^\theta_\theta = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} = g^{\theta\theta}(\partial_\mu \Gamma^\mu_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^\mu_{\theta\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\theta\theta} - \Gamma^\mu_{\rho\theta}\Gamma^\rho_{\theta\mu}) = g^{\theta\theta}(\partial_r \Gamma^r_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} + \Gamma^r_{\theta\theta}(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr} + \\ + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) - \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{r\theta} + (\Gamma^\varphi_{\theta\varphi})^2) \tag{374}$$

$$R^\theta_\theta = r^{-2}e^{-2h}(1 - 2h'r) - r^{-2}\sin^{-2}\theta + r^{-1}e^{-2h}(k' + h' + r^{-1}) - r^{-2}e^{-2h} + r^{-2}\cot^2\theta \tag{375}$$

$$\boxed{R^\theta_\theta = -r^{-2}(1 + e^{-2h}(rh' - rk' - 1))} \tag{376}$$

$$R^\varphi_\varphi = g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} = g^{\varphi\varphi}(\partial_\mu \Gamma^\mu_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi \Gamma^\mu_{\varphi\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\varphi\varphi} - \Gamma^\mu_{\rho\varphi}\Gamma^\rho_{\varphi\mu}) = g^{\varphi\varphi}(\partial_r \Gamma^r_{\varphi\varphi} + \partial_\theta \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} + \\ + \Gamma^r_{\varphi\varphi}(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\varphi_{\varphi r}) - \Gamma^\varphi_{\varphi r}\Gamma^r_{\varphi\varphi} - \Gamma^r_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{r\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} - \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}) \tag{377}$$

$$R^{\varphi}_{\varphi} = r^{-2}\sin^{-2}\theta(e^{-2h}\sin^2\theta - 2h're^{-2h}\sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta + re^{-2h}(k'+h'+r^{-1})\sin^2\theta - \\ - e^{-2h}\sin^2\theta - \cos^2\theta) \quad (378)$$

$$\boxed{R^{\varphi}_{\varphi} = -r^{-2}(1 + e^{-2h}(rh' - rk' - 1))} \quad (379)$$

Проверим, что остальные $R^{\mu}_{\nu} = 0$.

$$R^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\kappa}R_{\kappa\nu} = g^{\mu\mu}R_{\mu\nu} \quad (380)$$

$$R_{t\varphi} = \partial_\kappa\Gamma^{\kappa}_{t\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^{\kappa}_{t\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\kappa}\Gamma^{\rho}_{t\varphi} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\varphi}\Gamma^{\rho}_{t\kappa} \quad (381)$$

Первые 3 слагаемые равны 0. Выпишем слагемые $\Gamma^{\kappa}_{\rho\varphi}\Gamma^{\rho}_{t\kappa}$ с $\Gamma^{\kappa}_{\rho\varphi} \neq 0$:

$$R_{t\varphi} = -\Gamma^{\kappa}_{\rho\varphi}\Gamma^{\rho}_{t\kappa} = -\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}\Gamma^{r}_{t\varphi} - \Gamma^{r}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{tr} - \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}_{t\varphi} - \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{t\theta} = 0 \quad (382)$$

$$R_{t\theta} = \partial_\kappa\Gamma^{\kappa}_{t\theta} - \partial_\theta\Gamma^{\kappa}_{t\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\kappa}\Gamma^{\rho}_{t\theta} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\theta}\Gamma^{\rho}_{t\kappa} \quad (383)$$

Первые 3 слагаемые равны 0. Выпишем слагемые $\Gamma^{\kappa}_{\rho\theta}\Gamma^{\rho}_{t\kappa}$ с $\Gamma^{\kappa}_{\rho\theta} \neq 0$:

$$R_{t\theta} = -\Gamma^{\kappa}_{\rho\theta}\Gamma^{\rho}_{t\kappa} = -\Gamma^{\theta}_{r\theta}\Gamma^{r}_{t\theta} - \Gamma^{r}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{tr} - \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{t\varphi} = 0 \quad (384)$$

$$R_{r\varphi} = \partial_\kappa\Gamma^{\kappa}_{r\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^{\kappa}_{r\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\kappa}\Gamma^{\rho}_{r\varphi} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\varphi}\Gamma^{\rho}_{r\kappa} \quad (385)$$

Первые 3 слагаемые равны 0. Выпишем слагемые $\Gamma^{\kappa}_{\rho\varphi}\Gamma^{\rho}_{r\kappa}$ с $\Gamma^{\kappa}_{\rho\varphi} \neq 0$:

$$R_{r\varphi} = -\Gamma^{\kappa}_{\rho\varphi}\Gamma^{\rho}_{r\kappa} = -\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}\Gamma^{r}_{r\varphi} - \Gamma^{r}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{rr} - \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}_{r\varphi} - \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{r\theta} = 0 \quad (386)$$

$$R_{r\theta} = \partial_\kappa\Gamma^{\kappa}_{r\theta} - \partial_\theta\Gamma^{\kappa}_{r\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\kappa}\Gamma^{\rho}_{r\theta} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\theta}\Gamma^{\rho}_{r\kappa} = \partial_\theta\Gamma^{\theta}_{r\theta} + \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}_{r\theta} - \Gamma^{\theta}_{r\theta}\Gamma^{r}_{r\theta} - \Gamma^{r}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{rr} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \\ = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}_{r\theta} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}(r^{-1} - r^{-1}) = 0 \quad (387)$$

$$R_{\varphi\theta} = \partial_\kappa\Gamma^{\kappa}_{\varphi\theta} - \partial_\theta\Gamma^{\kappa}_{\varphi\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\kappa}\Gamma^{\rho}_{\varphi\theta} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\theta}\Gamma^{\rho}_{\varphi\kappa} = \partial_\varphi\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} + \Gamma^{\kappa}_{\varphi\kappa}\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} - \Gamma^{\theta}_{r\theta}\Gamma^{r}_{\varphi\theta} - \Gamma^{r}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{\varphi r} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = 0 \quad (388)$$

11 Движение частицы в метрике Шварцшильда

11.1. Второй закон Кеплера утверждает, что угловая скорость частицы в ньютоновском гравитационном поле (и, на самом деле, в любом статическом центральном потенциальном поле в нерелятивистской механике) обратно пропорциональна квадрату расстояния до центрального тела. Найдите аналог второго закона Кеплера для тела, движущегося в метрике Шварцшильда.

Решение.

$$t = t_0 \pm E\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{(1-\frac{r_g}{r})\sqrt{F(E,J,r)}}, \quad \varphi = \varphi_0 \pm J\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}} \quad (389)$$

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{J(r-r_g)}{Er^3}} \quad (390)$$

11.2. Напишите и решите уравнение Гамильтона—Якоби в координатах Эддингтона—Финкельштейна $ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(dx^+)^2 - 2dx^+dr - r^2 d\Omega^2$. Найдите связь с решением $t = t_0 \pm E\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{(1-\frac{r_g}{r})\sqrt{F(E,J,r)}}$, $\varphi = \varphi_0 \pm J\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}}$.

Решение.

Метрика при $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$g^{\bullet\bullet} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\partial_r \otimes \partial_r - 2\partial_{x^+} \otimes \partial_r - r^{-2}\partial_\varphi \otimes \partial_\varphi \tag{391}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби:

$$-2\frac{\partial S}{\partial x^+}\frac{\partial S}{\partial r} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = m^2 \tag{392}$$

Переменные x^+, φ не входят явно в уравнение. Поэтому мы можем положить соответствующие производные постоянными:

$$\frac{\partial S}{\partial x^+} = -E', \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J \tag{393}$$

$$S(E', J, x^+, r, \varphi) = -E'x^+ + J\varphi + S_r(E', J, r) \tag{394}$$

$$2E'\frac{\partial S_r}{\partial r} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 - \frac{J^2}{r^2} = m^2 \tag{395}$$

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 - 2E'\frac{\partial S_r}{\partial r} + m^2 + \frac{J^2}{r^2} = 0 \tag{396}$$

Решения квадратного уравнения:

$$\frac{\partial S_r}{\partial r} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(E' \pm \sqrt{E'^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)}\right) \tag{397}$$

$$S_r = \int\limits_{r_0}^{r}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(E' \pm \sqrt{F(E', J, r)}\right)dr, \quad F(E', J, r) = E'^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right) \tag{398}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial E'} = -x_0^+, \quad \frac{\partial S_r}{\partial J} = \varphi_0 \tag{399}$$

$$\boxed{x^+ = x_0^+ + \int\limits_{r_0}^{r}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(1 \pm \frac{E'}{\sqrt{F(E', J, r)}}\right)dr} \tag{400}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \pm J\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{F(E', J, r)}}} \tag{401}$$

$$x^+ = x_0^+ + \left(r + r_g \ln\left|\frac{r}{r_g} - 1\right|\right)\Bigg|_{r_0}^{r} \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{E' dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{E'^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)}} \tag{402}$$

Получилась особенность при $r = r_g$, хотя в метрике Эддингтона-Финкельштейна её не было.

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{E' dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{E'^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)}} = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{m^2 + \frac{J^2}{r_g^2}}{2E'^2} + \mathcal{O}(r - r_g)\right)} =$$

$$= \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr\left(1 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{m^2 + \frac{J^2}{r_g^2}}{2E'^2} + \mathcal{O}(r - r_g)\right)}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} = \left(r + r_g \ln\left|\frac{r}{r_g} - 1\right|\right)\Bigg|_{r_0}^{r} + \left(\frac{m^2 + \frac{J^2}{r_g^2}}{2E'^2} + \mathcal{O}(1)\right)(r - r_0)$$

При выборе знака – нерегулярная часть сокращается:

$$x^+ = -\left(\frac{m^2 + \frac{J^2}{r_g^2}}{2E'^2} + \mathcal{O}(1)\right)(r - r_0) \tag{403}$$

При выборе знака + она остаётся. Зато в координатах (x^-, φ) при таком выборе нерегулярной части нет. И, наоборот, нерегулярная часть есть в в координатах (x^-, φ), когда её нет в координатах (x^+, φ).

11.3. Выведите $\tau = \tau_0 \pm m \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{F(E,J,r)}}$ и покажите, что в случае свободного падения на черную дыру частица достигает горизонта $\mathcal{H}^+$, а затем и сингулярности за конечное собственное время и при ненулевых значениях момента импульса.

Решение.

Собственное время:

$$d\tau = ds = -\frac{dS}{m} = \frac{E' dx^+ - J d\varphi - dS_r}{m} \tag{404}$$

$$\frac{d\tau}{dr} = -\frac{dS}{mdr} = \frac{E' dx^+ - J d\varphi - dS_r(E', J, r)}{mdr} \tag{405}$$

$$\frac{dx^+}{dr} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(1 \pm \frac{E'}{\sqrt{F(E', J, r)}}\right), \quad \frac{d\varphi}{dr} = \pm\frac{J}{r^2\sqrt{F(E', J, r)}} \tag{406}$$

$$\frac{dS_r}{dr} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(E' \pm \sqrt{F(E', J, r)}\right) \tag{407}$$

$$\frac{d\tau}{dr} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(E' \pm \frac{E'^2}{\sqrt{F(E', J, r)}} - E' \mp \sqrt{F(E', J, r)}\right) \mp \frac{J^2}{r^2\sqrt{F(E', J, r)}} \tag{408}$$

$$\frac{d\tau}{dr} = \mp\frac{1}{m}\left(\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\sqrt{F} - \frac{E'^2}{\sqrt{F}}\right) + \frac{J^2}{\sqrt{F}r^2}\right) = \mp\frac{1}{m\sqrt{F}}\left(\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(F - E'^2\right) + \frac{J^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{d\tau}{dr} = \mp\frac{1}{m\sqrt{F}}\left(\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(F - E'^2\right) + \frac{J^2}{r^2}\right) = \mp\frac{1}{m\sqrt{F}}\left(-\left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right) + \frac{J^2}{r^2}\right) = \pm\frac{m}{\sqrt{F}} \tag{409}$$

$$\boxed{\tau = \tau_0 \pm m \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{F(E', J, r)}}} \tag{410}$$

Для ответа на второй вопрос нужно рассмотреть сходимость интегралов:

$$\tau - \tau_0 = \pm m \int\limits_{r_0}^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{F(E', J, r)}}, \quad \tau - \tau_0 = \pm m \int\limits_{r_0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{F(E', J, r)}} \tag{411}$$

При $r_0 \leq \frac{J^2 + \sqrt{J^4 - 3J^2 m^2 r_g^2}}{m^2 r_g}$ подыинтегральное выражение 1 интеграла ограничено: $\frac{1}{\sqrt{F(E', J, r)}} \leq \frac{1}{\sqrt{F(E', J, r_0)}}$, а значит при конечном интервале интегрирования интеграл сходится. Для исследования сходимости 2 интеграла введём замену $u = \frac{1}{r}$:

$$\tau - \tau_0 = \pm m \int\limits_{r_0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{F(E', J, r)}} = \mp m \int\limits_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u^2 \sqrt{F(E', J, \frac{1}{u})}} \sim \int\limits_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{7}{2}}} \tag{412}$$

Последний интеграл сходится.

11.4. Найдите все устойчивые круговые орбиты в метрике Шварцшильда, их энергии, моменты импульса и сидерические периоды в зависимости от радиуса орбиты. Найдите наименьший возможный радиус устойчивой орбиты.

Решение.

Круговая траектория соответствует тому, что во время движения расстояние до чёрной дыры меняться не будет.

$$r_\circ = r_-(J_\circ) = 3r_g \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3m^2r_g^2}{J_\circ^2}}\right)^{-1} = \text{const} \tag{413}$$

Функция $r_\circ(J_\circ)$ является непрерывной на всей области определения $J_\circ \in [\sqrt{3}mr_g, \infty)$. При увеличении $J_\circ$ подкорневое выражение также увеличивается, а значит увеличивается и $r_\circ$. Значит, $r^\circ_{\text{мин}} = r_\circ(\sqrt{3}mr_g)$.

$$\boxed{r^\circ_{\text{мин}} = 3r_g} \tag{414}$$

Это же можно получить, если заметить, что производная $r'_\circ(J_\circ)$ положительна при $J_\circ \in [\sqrt{3}mr_g, \infty)$:

$$r'_\circ(J_\circ) = \frac{9m^2r_g^3}{\sqrt{J^2 - 3m^2r_g^2}(J - \sqrt{J^2 - 3m^2r_g^2})^2} \tag{415}$$

Выразим момент импульса:

$$\boxed{J_\circ = mr_\circ\sqrt{\frac{r_g}{2r_\circ - 3r_g}}} \tag{416}$$

Энергия находится в локальном минимуме $E_\circ = E_-(J_\circ)$:

$$E_\circ = E_-(J_\circ) = \left(\frac{2m^2}{3} + \frac{2J_\circ^2}{27r_g^2}\left(1 - \left(1 - \frac{3m^2r_g^2}{J_\circ^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{417}$$

$$\boxed{E_\circ = \frac{\sqrt{2}m(r_\circ - r_g)}{\sqrt{r_\circ(2r_\circ - 3r_g)}}} \tag{418}$$

Для расчёта сидерического перида воспользуемся аналогом второго закона Кеплера, полученном в задаче 11.1 (движение по окружности будет равномерным):

$$\omega = \frac{J(r - r_g)}{Er^3} \tag{419}$$

$$T^\circ_{\text{сид}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi E_\circ r_\circ^3}{J_\circ(r_\circ - r_g)} \tag{420}$$

$$\boxed{T^\circ_{\text{сид}} = 2\sqrt{2}\pi r_\circ\sqrt{\frac{r_\circ}{r_g}}} \tag{421}$$

12 Движение в относительно слабом гравитационном поле и экспериментальная проверка ОТО

12.1. Выведите отклонение луча света гравитационным полем, исходя из решения линеаризованных уравнений Эйнштейна: $\psi_{00} = -2r_g/r$, $\psi_{0i} = 0$, $\psi_{ik} = 0$.

Решение.
Метрика:
$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{422}$$

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \quad \psi = \psi_{\mu}^{\bar{\mu}} \tag{423}$$

Размерность $d = 4$:

$$h_{00} = \psi_{00} - \frac{\eta_{00}}{2}\psi = \psi_{00} - \frac{\eta_{00}}{2}\eta^{00}\psi_{00} = \frac{\psi_{00}}{2} = -\frac{r_g}{r} \tag{424}$$

$$h_{0i} = \psi_{0i} - \frac{\eta_{0i}}{2}\psi = 0 \tag{425}$$

$$h_{ii} = \psi_{ii} - \frac{\eta_{ii}}{2}\psi = \frac{1}{2}\eta^{00}\psi_{00} = -\frac{r_g}{r} \tag{426}$$

Метрика:
$$g = \begin{pmatrix} 1-\frac{r_g}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{r_g}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\left(1+\frac{r_g}{r}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta\left(1+\frac{r_g}{r}\right) \end{pmatrix} \tag{427}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для безмассовой частицы ($\theta = \frac{\pi}{2}$):

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1+\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(1+\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 0 \tag{428}$$

Переменные t, φ не входят явно в уравнение. поэтому можно положить соответствубющие производные постоянными:
$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J \tag{429}$$

$$S(E, J, t, r, \varphi) = -Et + Jr + S_r(E, J, r) \tag{430}$$

$$S_r(E, J, r) = \pm \int dr\sqrt{F(E, J, r)}, \quad F(E, J, r) = E^2\frac{r+r_g}{r-r_g} - \frac{J^2}{r^2} \tag{431}$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm J\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{F(E, J, r)}} = \varphi_0 \pm J\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{E^2\frac{r+r_g}{r-r_g} - \frac{J^2}{r^2}}} \tag{432}$$

Момент импульса J выражается через прицельный параметр ρ:

$$J = E\rho \tag{433}$$

Полный угол, заметаемый лучом

$$\Phi = 2\int_{R_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{f(\rho, r)}}, \quad f(\rho, r) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{r+r_g}{r-r_g}\right) - \frac{1}{r^2} \tag{434}$$

где $R_{\min}$ – решение уравнения
$$f(\rho, R_{\min}) = 0 \tag{435}$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{R_{\min}+r_g}{R_{\min}-r_g}-\frac{1}{R_{\min}^2}=0\to\frac{1+\frac{r_g}{R_{\min}}}{1-\frac{r_g}{R_{\min}}}=\frac{\rho^2}{R_{\min}^2} \tag{436}$$

$$1+\frac{r}{r_g}=\frac{\rho}{R_{\min}} \tag{437}$$

$$R_{\min}=\rho-r_g \tag{438}$$

В случае плоского пространства ($r_g=0$) этот угол равен

$$\Phi_0=2\int_\rho^\infty\frac{dr}{r^2\sqrt{\rho^{-2}-r^{-2}}}=\pi \tag{439}$$

Для вычисления отклонения луча от прямой введём замену координат $r=\tilde{r}-r_g$:

$$\theta=\Phi-\Phi_0=2\int_{\rho-r_g}^\infty\frac{dr}{r^2\sqrt{f(\rho,r)}}-\pi=2\int_\rho^\infty\frac{d\tilde{r}}{(\tilde{r}-r_g)^2\sqrt{f(\rho,\tilde{r}-r_g)}}-\pi=$$
$$=2\int_\rho^\infty\frac{d\tilde{r}}{(\tilde{r}-r_g)^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}-2r_g}\right)-\frac{1}{(\tilde{r}-r_g)^2}}}-\pi=2\int_\rho^\infty\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2(1-\frac{2r_g}{\tilde{r}})\sqrt{(\rho^{-2}-\tilde{r}^{-2})\left(1+\frac{2r_g}{\tilde{r}}\right)}}-\pi=$$
$$=2\int_\rho^\infty\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2\sqrt{\rho^{-2}-\tilde{r}^{-2}}}\left(1+\frac{r_g}{\tilde{r}}\right)-2\int_\rho^\infty\frac{dr}{\tilde{r}^2\sqrt{\rho^{-2}-\tilde{r}^{-2}}}=2r_g\int_\rho^\infty\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^3\sqrt{\rho^{-2}-\tilde{r}^{-2}}}=$$
$$=\frac{2r_g}{\rho}\int\limits_0^1\frac{\xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{2r_g}{\rho} \tag{440}$$

$$\boxed{\theta=\frac{4GM}{\rho}} \tag{441}$$

13 Заряженные и вращающиеся чёрные дыры

13.1.

13.2. Решив уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса $T^t_t = T^r_r = -T^\theta_\theta = -T^\varphi_\varphi = \frac{Q^2}{32\pi^2 r^4}$, получите метрику Рейснера—Нордстрема $ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$, где $r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi}$.
Решение.
Уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{d-2} T\right) = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{442}$$

$$R^\mu_\nu = 8\pi G T^\mu_\nu \tag{443}$$

$$R^t_t = 8\pi G T^t_t = \frac{GQ^2}{4\pi r^4}, \quad R^r_r = 8\pi G T^r_r = \frac{GQ^2}{4\pi r^4}, \quad R^t_r = 8\pi G T^r_t = 0, \quad R^\theta_\theta = 8\pi G T^\theta_\theta = -\frac{GQ^2}{4\pi r^4}$$

$$\begin{cases} R^t_t = e^{-2k}(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2) + e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k') = \frac{r_Q^2}{r^4}, \\ R^r_r = e^{-2k}(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2) + e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h') = \frac{r_Q^2}{r^4}, \\ R^t_r = 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h} = 0, \\ R^\theta_\theta = -r^{-2}(1 + e^{-2h}(rh' - rk' - 1)) = -\frac{r_Q^2}{r^4}; \end{cases} \tag{444}$$

$$\dot{h} = 0 \tag{445}$$

$$\begin{cases} e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k') = \frac{r_Q^2}{r^4}, \\ e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h') = \frac{r_Q^2}{r^4}, \\ r^{-2}(1 + e^{-2h}(rh' - rk' - 1)) = \frac{r_Q^2}{r^4}; \end{cases} \tag{446}$$

Вычтем из 1 уравнения 2 и получим:

$$k' + h' = 0 \to k' = -h' \to k(t, r) = F(t) - h(r) \tag{447}$$

Избавимся от $F(t)$ при помощи замены $t' = \int dt e^{F(t)}$.

$$\begin{cases} e^{-2h}(-h'' + 2h'^2 - 2r^{-1}h') = \frac{r_Q^2}{r^4}, \\ r^{-2}(1 + e^{-2h}(2rh' - 1)) = \frac{r_Q^2}{r^4}. \end{cases} \tag{448}$$

$$1 - r(e^{-2h})' - e^{-2h} = \frac{r_Q^2}{r^2} \tag{449}$$

$$e^{-2h} = 1 + \frac{r_Q^2}{r^2} + \frac{C}{r} = e^{2k} \tag{450}$$

Проверим, что это решение удовлетворяет 1 уравнению системы (448):

$$h = -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{r_Q^2}{r^2} + \frac{C}{r}\right), \quad h' = \frac{Cr + 2r_Q^2}{2r(Cr + r^2 + r_Q^2)} \tag{451}$$

$$h'' = -\frac{C^2r^2 + 2Cr^3 + 4Crr_Q^2 + 6r^2r_Q^2 + 2r_Q^4}{2r^2(Cr + r^2 + r_Q^2)^2} \tag{452}$$

$$\left(1 + \frac{r_Q^2}{r^2} + \frac{C}{r}\right)\left(\frac{C^2r^2 + 2Cr^3 + 4Crr_Q^2 + 6r^2r_Q^2 + 2r_Q^4}{2r^2(Cr + r^2 + r_Q^2)^2} + \frac{(Cr + 2r_Q^2)^2}{2r^2(Cr + r^2 + r_Q^2)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{Cr + 2r_Q^2}{r^2(Cr + r^2 + r_Q^2)}\right) = \frac{r_Q^2}{r^4} \tag{453}$$

В метрике Шварцшильда:

$$e^{2k} = 1 - \frac{r_g}{r} \tag{454}$$

При $r \to \infty$ метрика Рейснера-Нордстрема должна асимптотически переходить в метрику Шварцшильда, поэтому

$$C = r_g \tag{455}$$

Таким образом, метрика Рейснера-Нордстрема:

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2} \tag{456}$$

14 Космологические решения. Модели Фридмана

14.1.

14.2.

14.3. Получите уравнение $\frac{d\rho}{\rho+p} + 3d\log a = 0$ прямым интегрированием уравнения движения $2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2+k}{a^2} = -8\pi Gp$ с использованием уравнения Фридмана $\frac{3(\dot{a}^2+k)}{a^2} = 8\pi G\rho$.
Решение.
Вычтем из уравнения Фридмана уравнение движения:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = -8\pi G(p + \rho) \tag{457}$$

$$\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k}{a^2} = -4\pi G(p + \rho) \tag{458}$$

Продифференцируем по времени уравнение Фридмана:

$$\frac{6\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{3(\dot{a}^2 + k)2\dot{a}}{a^3} = 8\pi G\dot{\rho} \tag{459}$$

$$\frac{3\dot{a}(a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k)}{a^3} = 4\pi G\dot{\rho} \tag{460}$$

Разделим (460) на (458):

$$-\frac{\dot{\rho}}{p + \rho} = \frac{3\dot{a}}{a} \tag{461}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{p + \rho} + 3d\log a = 0} \tag{462}$$