Зимняя школа ИТМФ-2023
Модель Изинга и конформная теория поля.
Тема 7. Интегрируемые возмущения минимальных моделей двумерной конформной теории поля

Андрей Коцевич, 4 курс ЛФИ МФТИ

1 Воспоминания о некоторых разделах CFT

1.1 ~~Вспомним~~ Узнаем про радиальное квантование

Иногда удобно работать в гамильтоновом формализме. В евклидовом пространстве это несколько произвольно: можно выбрать одну из декартовых координат, например, y как евклидово время, а другую x как пространственную координату. Есть много других вариантов, связанных с предыдущим поворотом.

В CFT обычно рассматривают другой выбор «пространства» и «времени» – формализм так называемого *радиального квантования*. В этом случае равные моменты времени соответствуют концентрическим окружностям с центром в некоторой точке $z_0 = 0$, а время «идёт» в радиальном направлении. Чтобы сделать эту картину более естественной, рассмотрим теорию, живущую на цилиндре $\mathbb{R} \times S^1$, описываемом координатами $\tau \in [-\infty, \infty]$ и $\sigma \in [0, R]$. Мы можем отобразить этот цилиндр на комплексную плоскость при помощи экспоненциального отображения

$$z = e^{-2\pi i \frac{u}{R}}, \quad u = \sigma + i\tau \tag{1}$$

Это отображение конформное, но не глобально определенное. Он имеет две особые точки $z = z_0 = 0$ и $z = \infty$, соответствующие $\tau = -\infty$ и $\tau = \infty$.

В гамильтоновом формализме изучаются функции Грина – матричные элементы между вакуумными состояниями. Словарь между подходами интеграла по путям и гамильтоновым подходом выглядит следующим образом. Каждому локальному полю $\mathcal{O}(z, \bar{z})$ ставится в соответствие оператор Гейзенберга

$$\mathcal{O}(z, \bar{z}) \to \widehat{\mathcal{O}}(z, \bar{z}), \tag{2}$$

а корреляционные функции соответствуют функциям Грина

$$\langle \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1)...\mathcal{O}_N(z_N, \bar{z}_N)\rangle = \langle 0|\mathcal{T}[\widehat{\mathcal{O}}_1(z_1, \bar{z}_1)...\widehat{\mathcal{O}}_N(z_N, \bar{z}_N)]|0\rangle\,, \tag{3}$$

где $|0\rangle$ соответсвует вакууму, а $\mathcal{T}$ соответствует хронологическому (радиальному) упорядочиванию

$$\mathcal{T}(\widehat{\mathcal{O}}_1(z_1, \bar{z}_1)\widehat{\mathcal{O}}_2(z_2, \bar{z}_2)) = \begin{cases} \widehat{\mathcal{O}}_1(z_1, \bar{z}_1)\widehat{\mathcal{O}}_2(z_2, \bar{z}_2), & |z_1| > |z_2| \\ \widehat{\mathcal{O}}_2(z_2, \bar{z}_2)\widehat{\mathcal{O}}_1(z_1, \bar{z}_1), & |z_1| < |z_2| \end{cases} \tag{4}$$

В CFT любому конформному полю $\mathcal{O}(z,\bar z)$ с конформной размерностью $(\Delta,\bar\Delta)$ соответствует оператор $\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar z)$, который может быть разложен на моды на плоскости

$$\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar z) = \sum_{n,\bar n\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{\mathcal{O}}_{n,\bar n}}{z^{n+\Delta}\bar z^{\bar n+\bar\Delta}} \tag{5}$$

или на цилиндре

$$\widehat{\mathcal{O}}(u,\bar u) = \sum_{n,\bar n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{cyl}}_{n,\bar n} e^{-2\pi i n\frac{u}{R}} e^{2\pi i \bar n\frac{u}{R}} \tag{6}$$

Моды $\mathcal{O}_{n,\bar n}$ и $\mathcal{O}^{\mathrm{cyl}}_{n,\bar n}$ нетривиально связаны. Для примарных операторов

$$\widehat{\Phi}(u,\bar u) = \left(\frac{dz}{du}\right)^{\Delta}\left(\frac{d\bar z}{d\bar u}\right)^{\bar\Delta}\widehat{\Phi}(z,\bar z) = \left(-\frac{2\pi i}{R}\right)^{\Delta}\left(\frac{2\pi i}{R}\right)^{\bar\Delta} z^{\Delta+\bar\Delta}\widehat{\Phi}(z,\bar z) \tag{7}$$

$$\widehat{\Phi}^{\mathrm{cyl}}_{n,\bar n} = \left(-\frac{2\pi i}{R}\right)^{\Delta}\left(\frac{2\pi i}{R}\right)^{\bar\Delta}\widehat{\Phi}_{n,\bar n} \tag{8}$$

Для потомков примарных полей соотношение более сложное.
Разложение на моды для тензора энергии-импульса:

$$\widehat{T}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\widehat{L}_n}{z^{n+2}}, \quad \widehat{T}(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{L}^{\mathrm{cyl}}_n e^{-2\pi i n\frac{u}{R}} \tag{9}$$

Обратное преобразование:

$$\widehat{L}_n = \int\limits_{C_\perp}\frac{dz}{2\pi i}z^{n+1}\widehat{T}(z), \quad \widehat{L}^{\mathrm{cyl}}_n = \frac{1}{R}\int du e^{2\pi i n\frac{u}{R}}\widehat{T}(u) \tag{10}$$

Оператор $\widehat{T}(z)$ представляет собой компоненту тензора энергии-импульса в плоскости $(z,\bar z)$. Далее, воспользуемся формулой для конформного преобразования тензора энергии-импульса:

$$\widehat{T}(u) = (z'(u))^2\widehat{T}(z) + \frac{c}{12}\{z(u),u\} \tag{11}$$

Производная Шварца:

$$\{z(u),u\} = \frac{z'''(u)}{z'(u)} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''(u)}{z'(u)}\right)^2 \tag{12}$$

$$\{z,u\} = \frac{2\pi^2}{R^2} \tag{13}$$

Связь между тензором энергии-импульса на плоскости и на цилиндре:

$$\widehat{T}(u) = -\frac{4\pi^2}{R^2}\left(z^2\widehat{T}(z) - \frac{c}{24}\right) \tag{14}$$

Потомок $L_{-k}\mathcal{O}(z,\bar z)$ соответствует оператору

$$L_{-k}\mathcal{O}(z,\bar z) \to \widehat{L_{-k}\mathcal{O}}(z,\bar z) \tag{15}$$

Связь оператора $\widehat{L_{-k}\mathcal{O}}(z,\bar{z})$ с $\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar{z})$ и $\widehat{L}_n$ следующая. По определению имеем

$$\begin{aligned} L_{-k}\mathcal{O}(z,\bar{z}) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_z}(\xi-z)^{1-k}T(\xi)\mathcal{O}(z,\bar{z})d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\xi|>|z|}(\xi-z)^{1-k}T(\xi)\mathcal{O}(z,\bar{z})d\xi - \int_{|\xi|<|z|}(\xi-z)^{1-k}T(\xi)\mathcal{O}(z,\bar{z})d\xi\right) \end{aligned} \tag{16}$$

На гамильтоновом языке это записывается как

$$\widehat{L_{-k}}\mathcal{O}(z,\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\xi|>|z|}(\xi-z)^{1-k}\widehat{T}(\xi)\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar{z})d\xi - \int_{|\xi|<|z|}(\xi-z)^{1-k}\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar{z})\widehat{T}(\xi)d\xi\right) \tag{17}$$

Отметим, что для $|\xi|>|z|$ существует разложение

$$(\xi-z)^{1-k} = \xi^{1-k}+(k-1)z\xi^{-k}+\mathcal{O}(z^2) \tag{18}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|>|z|}(\xi-z)^{1-k}\widehat{T}(\xi)\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar{z})d\xi = \widehat{L}_{-k}\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar{z})+(k-1)z\widehat{L}_{-(k+1)}\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar{z})+\mathcal{O}(z^2) \tag{19}$$

С другой стороны, что для $|z|>|\xi|$ существует разложение

$$(\xi-z)^{1-k} = (-z)^{1-k}-(k-1)\xi(-z)^{-k}+\mathcal{O}(\xi^2) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|<|z|}(\xi-z)^{1-k}\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar{z})\widehat{T}(\xi)d\xi = (-z)^{1-k}\widehat{L}_{-1}\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar{z})-(k-1)(-z)^{-k}\widehat{L}_0\widehat{\mathcal{O}}(z,\bar{z})+ \\ +\mathcal{O}((-z)^{-k-1}) \end{aligned} \tag{21}$$

Посчитаем коммутатор

$$\begin{aligned} &[\widehat{L}_n,\widehat{\mathcal{O}}(z)] \equiv \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\xi|>|z|}\xi^{1+n}\widehat{T}(\xi)\widehat{\mathcal{O}}(z)d\xi - \int_{|\xi|<|z|}\xi^{1+n}\widehat{\mathcal{O}}(z)\widehat{T}(\xi)d\xi\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_z}\xi^{1+n}\mathcal{T}\left[\widehat{T}(\xi)\widehat{O}(z)\right]d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_z}\xi^{1+n}\left(...+\frac{\widehat{L_1\mathcal{O}}(z)}{(\xi-z)^3}+\frac{\Delta\widehat{\mathcal{O}}(z)}{(\xi-z)^2}+\frac{\partial\widehat{\mathcal{O}}}{(\xi-z)^3}+...\right)d\xi = \\ &= z^{1+n}\partial\widehat{\mathcal{O}}+(n+1)\Delta z^n\widehat{\mathcal{O}}+\frac{n(n+1)}{2}z^{n-1}\widehat{L_1\mathcal{O}}(z)+... \end{aligned} \tag{22}$$

Это равенство становится наиболее простым для примарных полей

$$[\widehat{L}_n,\widehat{\Phi}(z)] = (z^{1+n}\partial+\Delta(n+1)z^n)\widehat{\Phi}(z) \tag{23}$$

Далее не будем писать символ $\widehat{\ }$, хотя подразумеваем его.
Гамильтониан H имеет вид:

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}T_{\tau\tau}d\sigma = L_0+\bar{L}_0-\frac{c}{12} \tag{24}$$

Определение 1.1. *Характер* – голоморфная часть статистической суммы:

$$\chi_\Delta(q) \equiv \mathrm{Tr}(q^{L_0-\frac{c}{24}})\Big|_{\mathcal{V}_\Delta} \tag{25}$$

$$\chi_\Delta(q) = q^{\Delta-\frac{c}{24}}\sum_{N=0}^{\infty} p(N)q^N \tag{26}$$

Производящая функция для числа разбиений:

$$\sum_{N=0}^{\infty} p(N)q^N = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^k)} \tag{27}$$

$$\chi_\Delta(q) = \frac{q^{\Delta-\frac{c}{24}}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^k)} = q^{\Delta-\frac{c}{24}}\chi(q), \quad \chi(q) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^k} \tag{28}$$

1.2 Пару слов про минимальные модели

Параметризация Лиувилля:

$$c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + \frac{1}{b}, \quad \Delta = \Delta(\alpha) = \alpha(Q-\alpha) \tag{29}$$

Для минимальных моделей $\mathcal{M}_{p,q}$

$$b^2 = -\frac{p}{q}, \tag{30}$$

где числа q и p взаимно простые и $q > p$.

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \tag{31}$$

$$\Delta_{m,n}^{(p,q)} = \frac{(mp-nq)^2-(p-q)^2}{4pq} \tag{32}$$

Чтобы среди размерностей не было отрицательных, необходимо $q = p+1$ ($q = p$ – теория без полей). Тогда

$$\Delta_{m,n}^{(p,p+1)} = \frac{(mp-n(p+1))^2-1}{4p(p+1)} \tag{33}$$

Свойство «отражений» размерностей полей:

$$\Delta_{m+kq,n+kp} = \Delta_{-m+kq,-n+kp}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{34}$$

Любой модулль Верма $\mathcal{V}_{m,n}$ имеет 2 подмодуля:

$$D_{m,n} : \mathcal{V}_{-m,n} \subset \mathcal{V}_{m,n}, \quad D_{q-m,p-n} : \mathcal{V}_{-m+2q,n} \subset \mathcal{V}_{m,n} \tag{35}$$

Эти подмодули сами имеют по 2 подмодуля:

$$D_{q+m,p-n} : \mathcal{V}_{-m+2q,n} \subset \mathcal{V}_{-m,n}, \quad D_{q-m,p+n} : \mathcal{V}_{m-2q,n} \subset \mathcal{V}_{-m,n} \tag{36}$$

и в то же время

$$D_{m,2p-n} : \mathcal{V}_{m+2q,n} \subset \mathcal{V}_{-m+2q,n}, \quad D_{q-m,p+n} : \mathcal{V}_{m-2q,n} \subset \mathcal{V}_{-m+2q,n} \tag{37}$$

Т.е. существуют следующие соотношения:

$$D_{q+m,p-n}D_{m,n} = D_{m,2p-n}D_{q-m,p-n}, \quad D_{q-m,p+n}D_{m,n} = D_{2q-m,n}D_{q-m,p-n} \tag{38}$$

Все эти вложения изображены на рис. 2.
Характер соответствующего неприводимого модуля получается суммированием всех модулей Верма из чётных «этажей» и вычитанием всех модулей с нечётных. Для избежания конфликта обозначений заменим переменную в характере $q \to x$:

$$\chi_{m,n}(x) = q^{-\frac{c}{24}} \chi(x) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x^{\Delta_{m+2kq,n}} - x^{\Delta_{-m+2kq,n}}), \quad \chi(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \tag{39}$$

Данный характер будет начинаться со слагаемого $q^{\Delta_{m,n}-\frac{c}{24}}$. Далее разделим на это число, чтобы характер начинался с 1 (на 0 уровне находится одно примарное поле $\Phi_{m,n}$):

$$\chi_{m,n}(x) = x^{-\Delta_{m,n}} \chi(x) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x^{\Delta_{m+2kq,n}} - x^{\Delta_{-m+2kq,n}}) \tag{40}$$

Перейдём к рассмотрению конкретных минимальных моделей $\mathcal{M}_{p,q}$. Начнём с унитарных $q = p + 1$:

- $p = 2$. Минимальная модель $\mathcal{M}_{2,3}$.
  Центральный заряд:
  $$c = 0 \tag{41}$$
  Модель состоит из всего одного единичного примарного поля $\Phi_{1,1} = \Phi_{2,1}$.
  Размерность полей:
  $$\Delta^{(2,3)}_{m,n} = \frac{(2m-3n)^2-1}{24} \tag{42}$$
  $$\Delta^{(2,3)}_{1,2} = \Delta^{(2,3)}_{2,1} = 0 \tag{43}$$
  В этой модели
  $$L_n \left|0\right\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{44}$$
  Характер:
  $$\chi(q) = 1 \tag{45}$$

- $p = 3$. Минимальная модель $\mathcal{M}_{3,4}$, описывающая модель Изинга.
  Центральный заряд:
  $$c = \frac{1}{2} \tag{46}$$
  Модель состоит из трёх примарных полей $I = \Phi_{1,1} = \Phi_{3,2}$, $\epsilon = \Phi_{3,1} = \Phi_{1,2}$, $\sigma = \Phi_{2,1} = \Phi_{2,2}$.
  Размерность полей:
  $$\Delta^{(3,4)}_{m,n} = \frac{(3m-4n)^2-1}{48} \tag{47}$$
  $$\Delta^{(3,4)}_{1,1} = 0, \quad \Delta^{(3,4)}_{1,2} = \frac{1}{2}, \quad \Delta^{(3,4)}_{2,1} = \frac{1}{16} \tag{48}$$
  Характер:
  $$\chi(q) = 1 \tag{49}$$

2 Прямолинейный поиск сохраняющихся токов малых спинов

Рассмотрим интегрируемые возмущения конформной теории поля на примере возмущений минимальных конформных моделей. Пусть S_0 – действие минимальной конформной модели с центральным зарядом $c < 1$. Сначала мы будем интересоваться моделями общего положения, а потом обсудим рациональные случаи. Рассмотрим возмущенную модель в евклидовом пространстве с действием

$$S[\phi] = S_0 + \lambda \int d^2\boldsymbol{x}\Phi_\Delta(\boldsymbol{x}) \tag{50}$$

где $\Phi_\Delta(\boldsymbol{x})$ – примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta < 1$. Пока никак более не будем ограничивать допустимые значения размерности возмущающего оператора.

В конформной теории поля имеется бесконечно много интегралов движения. Обозначим через $\mathcal{L}_n$, $\bar{\mathcal{L}}_n$ генераторы двух представлений алгебры Вирасоро, действующих на локальные операторы:

$$(\mathcal{L}_n\Phi_\Delta)(\boldsymbol{x}) = \oint \frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{n+1}T(w)\Phi_\Delta(\boldsymbol{x}), \quad (\bar{\mathcal{L}}_n\Phi_\Delta)(\boldsymbol{x}) = \oint \frac{d\bar{w}}{2\pi i}(\bar{w}-\bar{z})^{n+1}T(\bar{w})\Phi_\Delta(\boldsymbol{x}) \tag{51}$$

где интегралы берутся по маленьким петлям, охватывающим точку $\boldsymbol{x} = (z, \bar{z})$. Тогда для любого элемента Λ подалгебры универсальной обёртывающей алгебры $U(Vir)$ алгебры Вирасоро, порождённой элементами L_{-n} $(n > 0)$, можно определить операторы

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = (\Lambda I)(\boldsymbol{x}), \quad \bar{\Lambda}(\boldsymbol{x}) = (\bar{\Lambda} I)(\boldsymbol{x}) \tag{52}$$

в конформном семействе единичного оператора. Например,

$$(\mathcal{L}_{-1}I)(\boldsymbol{x}) = \partial I = 0, \quad (\mathcal{L}_{-2}I)(\boldsymbol{x}) = T, \quad (\mathcal{L}_{-3}I)(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}I)(\boldsymbol{x}) = \partial T(\boldsymbol{x}) \tag{53}$$

Для этих операторов имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \partial\bar{\Lambda}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{54}$$

Вообще говоря, соответствующие интегралы движения не коммутируют. Но среди них имеются серии коммутирующих интегралов движения, которые обеспечивают интегрируемость минимальных конформных моделей.

Изучим, как меняются тождества (54) под действием возмущения. Наша задача будет состоять в том, чтобы найти такие операторы $T_s(x)$ спина s среди киральных (правых или левых) потомков единичного оператора и такие операторы $\theta_s(x)$ спина s, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\begin{cases} \bar{\partial}T_{s+1} = \partial\theta_{s-1}, & s > 0 \\ \partial T_{s-1} = \bar{\partial}\theta_{s+1}, & s < 0 \end{cases} \tag{55}$$

Тогда мы сможем сказать, что система обладает интегралами движения

$$I_s = \begin{cases} \int dz T_{s-1} + \int d\bar{z}\theta_{s-1}, \\ \int d\bar{z}T_{s+1} + \int dz\theta_{s-1} \end{cases} \tag{56}$$

Интегралы можно брать вдоль любых контуров (комплексно-сопряженных друг другу для z и $\bar{z}$ в евклидовом пространстве), уходящих в обе стороны на пространственную бесконечность.

Продолжение в пространство Минковского очевидно. Коммутативность этих интегралов движения, несомненно, должна проверяться отдельно.

$$\langle\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x})\rangle = \frac{1}{Z}\int[\mathcal{D}\Phi]\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x})e^{-S[\Phi]}, \quad Z = \int[\mathcal{D}\Phi]e^{-S[\Phi]} \tag{57}$$

В первом порядке по теории возмущений имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x}) = -\lambda\int d^2\boldsymbol{y}\Phi_\Delta(\boldsymbol{y})\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x}) \tag{58}$$

Если элемент Λ является элементом градуировки $(-s)$ в $U(Vir)$, операторное разложение для оператора $\Lambda(\boldsymbol{x})$ с примарным оператором $\Phi_\Delta(\boldsymbol{x})$ в конформной теории поля имеет вид

$$\Phi_\Delta(\boldsymbol{y})\Lambda(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}(z-w)^{k-s}(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} = (z,\bar{z}), \quad \boldsymbol{y} = (w,\bar{w}) \tag{59}$$

Здесь $(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)$ – некоторый правый (киральный) потомок оператора Φ_Δ уровня k. Отсюда находим

$$\Phi_\Delta(\boldsymbol{y})\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}\bar{\partial}_z(z-w)^{k-s}(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(\boldsymbol{y}) \underset{k\to s-k-1}{=} \pi\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(-1)^k}{k!}\partial_z^k\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})(\Lambda_{k-s+1}\Phi_\Delta)(\boldsymbol{y}), \tag{60}$$

где мы использовали тождество $\bar{\partial}z^{-1} = \pi\delta(\boldsymbol{x})$. Из формулы (58) находим

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x}) = -\lambda\int d^2\boldsymbol{y}\Phi_\Delta(\boldsymbol{y})\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x}) = -\pi\lambda\int d^2\boldsymbol{y}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(-1)^k}{k!}\partial_z^k\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})(\Lambda_{k-s+1}\Phi_\Delta)(\boldsymbol{y}) = \\ = \pi\lambda\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\partial^k(\Lambda_{k-s+1}\Phi_\Delta)(\boldsymbol{y}) = \pi\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\partial^k(\Lambda_{k-s+1}\Phi_\Delta)(\boldsymbol{y})\end{aligned} \tag{61}$$

Мы продолжили сумму до бесконечности, поскольку члены с $k \geq s$ равны нулю. Используя разложение (59), находим

$$\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x}) = \pi\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\partial^k\oint\frac{dw}{2\pi i}(w-z)^k\Lambda(\boldsymbol{y})\Phi_\Delta(\boldsymbol{x}) \tag{62}$$

Воспользуемся тождеством:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\partial^k\oint\frac{dw}{2\pi i}(w-z)^k f(w,z) \underset{u=z-w}{=} \oint\frac{du}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\partial_z^k f(u-z,z) = \\ = \oint\frac{du}{2\pi i}f(z,z+u) = \oint\frac{dw'}{2\pi i}f(z,w')\end{aligned} \tag{63}$$

Интеграл по $w' = z+u$ берётся по маленькой окружности вокруг нуля. Окончательно находим

$$\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x}) = \pi\lambda\oint\frac{dw}{2\pi i}\Phi_\Delta(w,\bar{z})\Lambda(z,\bar{w}) \tag{64}$$

Получаем

$$\bar{\partial}\Lambda(\boldsymbol{x}) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(\boldsymbol{x}), \tag{65}$$

где

$$(\mathcal{D}_n\Lambda)(\boldsymbol{x}) = \oint \frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{n-1}\Phi_\Delta(w,\bar{z})\Lambda(z,\bar{z}) \tag{66}$$

Эту формулу мы будем использовать в дальнейшем.

$$L_n\Phi_\Delta(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathcal{C}_z} \frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{n+1}T(w)\Phi_\Delta(\boldsymbol{x}) \tag{67}$$

Воспользуемся равенством (23):

$$[L_n, \Phi_\Delta(\boldsymbol{x})] = \int_{\mathcal{C}_z} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1}T(w)\Phi_\Delta(\boldsymbol{x}) = z^{n+1}\partial\Phi_\Delta(\boldsymbol{x}) + (n+1)z^n\Delta\Phi_\Delta(\boldsymbol{x}) \tag{68}$$

Вычислим коммутатор $[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n]$, считая $r_1 > r_2$:

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n]\Phi_\Delta(z) = \left(\oint_{\mathcal{C}_z^{r_1}} \frac{d\zeta}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_z^{r_2}} \frac{d\omega}{2\pi i} - \oint_{\mathcal{C}_z^{r_2}} \frac{d\omega}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_z^{r_1}} \frac{d\zeta}{2\pi i}\right)(\zeta-z)^{m+1}(\omega-z)^{n-1}T(\zeta)\Phi_\Delta(z) \tag{69}$$

Для первого выражения точка ω лежит внутри контура по ξ, а во втором – снаружи. Тогда такой коммутатор можно представить в виде

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n]\Phi_\Delta(z) &= \oint_{\mathcal{C}_z^{r}} \frac{d\omega}{2\pi i}(\omega-z)^{n-1}\oint_{\mathcal{C}_\omega^{r_0}} \frac{d\zeta}{2\pi i}(\zeta-z)^{m+1}T(\zeta)\Phi_\Delta(\omega) = \\
&= \oint_{\mathcal{C}_z^{r}} \frac{d\omega}{2\pi i}(\omega-z)^{n-1}((\omega-z)^{m+1}\partial\Phi_\Delta(\omega) + (m+1)(\omega-z)^m\Delta\Phi_\Delta(\omega)) = \\
&= -\oint_{\mathcal{C}_z^{r}} \frac{d\omega}{2\pi i}(m+n-\Delta(m+1))(\omega-z)^{m+n-1}\Phi_\Delta(\omega)
\end{aligned} \tag{70}$$

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n] = -((1-\Delta)(m+1)+n-1)\mathcal{D}_{m+n} \tag{71}$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathcal{D}_{-n}I)(\boldsymbol{x}) = \oint \frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{-n-1}\Phi_\Delta(w,\bar{z}) \tag{72}$$

Разложим поле Φ_Δ в ряд Тейлора:

$$\Phi_\Delta(w,\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathcal{L}_{-1}^n\Phi_\Delta)(\boldsymbol{x})(w-z)^n \tag{73}$$

$$(\mathcal{D}_{-n}I)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n!}(\mathcal{L}_{-1}^n\Phi_\Delta)(\boldsymbol{x}) \tag{74}$$

Применим теперь (71) и (74) к вычислению правых частей нескольких первых операторов Λ. Для $\Lambda(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{L}_{-2}I)(\boldsymbol{x})$ имеем

$$\bar{\partial}T = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}I = -\pi\lambda(1-\Delta)\mathcal{D}_{-1}I = -\pi\lambda(1-\Delta)\mathcal{L}_{-1}\Phi_\Delta = -\pi\lambda(1-\Delta)\partial\Phi_\Delta \tag{75}$$

Отсюда получаем

$$T_2 = \mathcal{L}_{-2}I, \quad \Theta_0 = -\pi\lambda(1-\Delta)\Phi_\Delta \tag{76}$$

Для $\Lambda(\boldsymbol{x}) = \mathcal{L}_{-2}^2 I(\boldsymbol{x})$ имеем

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^2 I = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 I = \pi\lambda(-(1-\Delta)\mathcal{D}_{-1}\mathcal{L}_{-2}I + \mathcal{L}_{-2}\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}I) = \\ = \pi\lambda((1-\Delta)(3-\Delta)\mathcal{D}_{-3}I - 2(1-\Delta)\mathcal{L}_{-2}\mathcal{D}_{-1}I + \mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{D}_1 I) = \\ = -\pi\lambda(1-\Delta)\left(2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3-\Delta}{6}\right)\Phi_\Delta(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \quad (77)$$

Для $\Lambda(\boldsymbol{x}) = \mathcal{L}_{-2}^3 I(\boldsymbol{x})$ имеем

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^3 I = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^3 I = \pi\lambda(-(1-\Delta)\mathcal{D}_{-1}\mathcal{L}_{-2}^2 I + \mathcal{L}_{-2}\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 I) = \\ = \pi\lambda((1-\Delta)(3-\Delta)\mathcal{D}_{-3}\mathcal{L}_{-2}I - 2(1-\Delta)\mathcal{L}_{-2}\mathcal{D}_{-1}\mathcal{L}_{-2}I + \mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}I) = \\ = \pi\lambda((1-\Delta)(3-\Delta)\mathcal{L}_{-2}\mathcal{D}_{-3}I + (1-\Delta)(3-\Delta)(\Delta-5)\mathcal{D}_{-5}I - 2(1-\Delta)\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{D}_{-1}I - \\ - 2(1-\Delta)(\Delta-3)\mathcal{D}_{-3}I + \mathcal{L}_{-2}^3\mathcal{D}_1 I + (\Delta-1)\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{D}_{-1}I) = \pi\lambda\left(3(1-\Delta)(3-\Delta)\frac{1}{6}\mathcal{L}_{-1}^3\Phi_\Delta - \right. \\ \left. - \frac{(1-\Delta)(3-\Delta)(5-\Delta)}{120}\mathcal{L}_{-1}^5\Phi_\Delta - 3(1-\Delta)\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1}\Phi_\Delta\right) = \\ = -\pi\lambda(1-\Delta)\left(3\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1} - \frac{3-\Delta}{2}\mathcal{L}_{-1}^3 + \frac{(3-\Delta)(5-\Delta)}{120}\mathcal{L}_{-1}^5\right)\Phi_\Delta \end{aligned} \quad (78)$$

Для $\Lambda(\boldsymbol{x}) = \mathcal{L}_{-3}^2 I(\boldsymbol{x})$ имеем

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\mathcal{L}_{-3}^2 I = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-3}^2 I = \pi\lambda(\mathcal{L}_{-3}\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-3}I - 2(1-\Delta)\mathcal{D}_{-2}\mathcal{L}_{-3}I) = \\ = \pi\lambda(\mathcal{L}_{-3}^2\mathcal{D}_1 I - 4(1-\Delta)\mathcal{L}_{-3}\mathcal{D}_{-2}I - 2(1-\Delta)(2\Delta-5)\mathcal{D}_{-5}I) = \\ = -2\pi\lambda(1-\Delta)\left(\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{5-2\Delta}{120}\mathcal{L}_{-1}^5\right)\Phi_\Delta \end{aligned} \quad (79)$$

Вообще говоря, правые части этих уравнений нельзя представить в виде $\mathcal{L}_{-1}(...)$, поэтому при произвольном возмущении интегралов движения спинов 3 и 5 нет.
Рассмотрим сначала правую часть (77). Выражение может быть представлено в виде $\mathcal{L}_{-1}(...)$, только если имеется соотношение на третьем уровне, позволяющее выразить действие L_{-3} как комбинацию действий $L_{-1}L_{-2}$ и L_{-1}^3. Вспомним, что такого рода соотношения возникают для вырожденных неприводимых представлениях алгебры Вирасоро, старшие веса которых даются формулой Каца:

$$\Delta_{mn} = \frac{1}{4}((\alpha_+ m + \alpha_- n)^2 - (\alpha_+ + \alpha_-)^2), \quad \alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}, \quad c = 1 - 24\alpha_0^2 \quad (80)$$

Представление со старшим весом Δ_{mn} имеет соотношение на уровне mn. Таким образом, нужное соотношение имеет место, если $\Delta = \Delta_{13}$ или $\Delta = \Delta_{31}$:

$$\left(\mathcal{L}_{-3} - \frac{2}{\Delta+2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta+1)(\Delta+2)}\mathcal{L}_{-1}^3\right)\Phi_\Delta(x) = 0, \quad \Delta = \Delta_{1,3}, \Delta_{3,1} \quad (81)$$

Поскольку $\Delta_{31} > 1$, только для $\Delta = \Delta_{13}$ возмущение будет релевантным. В этом случае получаем

$$T_4 = \mathcal{L}_{-2}^2 I, \quad \Theta_2 = -\pi\lambda\frac{1-\Delta_{13}}{2+\Delta_{13}}\left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1-\Delta_{13})(2-\Delta_{13})(3+\Delta_{13})}{6(1+\Delta_{13})}\mathcal{L}_{-1}^2\right) \quad (82)$$

Теперь будем искать ток спина 6 в виде

$$T_6 = A\mathcal{L}_{-2}^3 I + B\mathcal{L}_{-3}^2 I \quad (83)$$

Выделим в $\bar{\partial}T_6$ слагаемые, не имеющие вид $\mathcal{L}_{-1}(...)$:

$$\bar{\partial}T_6 = -\pi\lambda(1-\Delta_{13})(A(3\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1} - \alpha\mathcal{L}_{-1}^3) + 2B\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}^2 + \mathcal{L}_{-1}(...))\Phi_\Delta, \quad \alpha = \frac{3-\Delta_{13}}{2} \tag{84}$$

Коммутируя генераторы алгебры Вирасоро, нетрудно привести выражение в скобках к виду

$$\Lambda = 6A\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-3} + \left(3A - \frac{A\alpha - B}{6}\right)\mathcal{L}_{-5} + \mathcal{L}_{-1}(...) \tag{85}$$

Далее, из условия нулевого вектора получаем

$$\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-3} = \beta\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \gamma\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}^3 = \beta L_{-5} - \beta\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-3} - \frac{\gamma}{6}\mathcal{L}_{-5} + \mathcal{L}_{-1}(...), \tag{86}$$

где $\beta = \frac{2}{2+\Delta_{13}}$, $\gamma = -\frac{1}{(1+\Delta_{13})(2+\Delta_{13})}$. Отсюда выражаем $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-3}$ через $\mathcal{L}_{-5}$. После этого, приравняв коэффициент при $\mathcal{L}_{-5}$ к нулю, можно получить, что ток

$$T_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 I + \frac{c+2}{2}\mathcal{L}_{-3}^2 I \tag{87}$$

порождает сохраняющийся заряд.
На шестом уровнем также существует интеграл движения с током

$$T_6' = \mathcal{L}_{-2}^3 I + \left(\frac{18}{2\Delta+1} + \Delta - 2\right)\mathcal{L}_{-3}^2, \quad \Delta = \Delta_{12}, \Delta_{21} \tag{88}$$

Таким образом, при $c < 1$ интегрируемость можно ожидать для

$$\Delta = \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{21} \tag{89}$$

3 Подсчет числа интегралов движения из соображений размерностей пространств

Однако с ростом спина вычисления становятся все сложнее и сложнее. Использовать явные формулы становится затруднительно. Чтобы продвинуться дальше, А. Замолодчиков предложил такой прием. Сначала найдем число потомков на каждом уровне, претендующих на то, чтобы давать ток. Пусть $\mathcal{H}_{mn}$ – неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn}, а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ – подпространство уровня s. Размерности этих подпространств даются характерами

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \tag{90}$$

вид которых известен из конформной теории поля. Тогда размерность таких пространств подходящих операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0} \tag{91}$$

Вычитание $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$ нужно для того, чтобы исключить операторы вида $L_{-1}(...)$, а прибавление символа Кронекера – чтобы скомпенсировать тот факт, что производная от единичного оператора равна нулю (т.е. $k_0 = 0$). Учитывая, что в $\mathcal{H}_{11}$ существует нулевой вектор $\mathcal{L}_{-1}$ на уровне 1, то

$$\chi_{11}(q) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^k}(1-q) = \prod_{k=2}^{\infty}\frac{1}{1-q^k} = 1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 4q^6 + 4q^7 + \mathcal{O}(q^8) \tag{92}$$

Для величин k_s имеем характер

$$\chi_0(q) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} k_s q^s = \sum_{s=0}^{\infty} (\dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}) q^s = q^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{11})_s - $$
$$- \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{11})_s + 1 = (q^{-1} - 1)(\chi_{11}(q) - 1) = q + q^3 + 2q^5 + 3q^7 + q^8 + 4q^9 + \mathcal{O}(q^{10}) \quad (93)$$

Теперь найдем количество уравнений, которые накладываются на коэффициенты в операторе T_s:

$$l_s = \dim(\mathcal{H}_\Delta)_s - \dim(\mathcal{H}_\Delta)_{s-1} \quad (94)$$

Здесь мы снова вычли из количества всех линейно-независимых операторов количество операторов вида $L_{-1}(...)$. Для соответствующего характера имеем

$$\chi_{1,\Delta}(q) = \sum_{s=1}^{\infty} l_s q^s = \sum_{s=1}^{\infty} (\dim(\mathcal{H}_\Delta)_s - \dim(\mathcal{H}_\Delta)_{s-1}) q^s = (1-q)\chi_\Delta(q) \quad (95)$$

Вычитая одно из другого, получаем нижнюю границу $\delta_s = k_s - l_s$ количества решений на каждом уровне. В частности, в точках общего положения по c имеем

$$\chi_{mn}(q) = (1 - q^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k} \quad (96)$$

Для $\Phi_\Delta = \Phi_{13}$ получаем

$$\chi_0(q) - \chi_{1,13}(q) = -1 + q - q^2 + q^3 - 2q^4 + q^5 - 3q^6 + q^7 - 4q^8 - 6q^{10} - 10q^{12} - 2q^{13} + \mathcal{O}(q^{14}) \quad (97)$$

Мы видим, что $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = 1$, а все остальные $\delta_s \leq 0$. Это значит, что, по крайней мере, для спинов ± 1, ± 3, ± 5, ± 7 имеются решения. На более высоких уровнях на самом деле уравнения избыточны.
Для случаев $\Phi_\Delta = \Phi_{12}, \Phi_{21}$ имеем

$$\chi_0(q) - \chi_{1,13}(q) = -1 + q - q^4 + q^5 - 2q^6 + q^7 - 2q^8 - 3q^{10} + q^{11} - 6q^{12} - 6q^{14} - 3q^{15} + \mathcal{O}(q^{16}) \quad (98)$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1$, т.е., по крайней мере, имеется 8 интегралов движения.
Применим этот приём к некоторым минимальным моделям $\mathcal{M}_{p,q}$ с характером

$$\chi_{mn}^{(p,q)}(x) = \chi(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x^{\Delta_{m+2kq,n}} - x^{\Delta_{-m+2kq,n}}), \quad \chi(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} \quad (99)$$

Для некоторых унитарных минимальных моделей $\mathcal{M}_{p,p+1}$:

- $p = 3$ – минимальная модель $\mathcal{M}_{3,4}$, описывающая модель Изинга. Характер:

$$\chi_{11}^{(3,4)}(x) = \chi(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x^{\Delta_{1+8k,1}} - x^{\Delta_{-1+8k,1}}) = 1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + \mathcal{O}(x^8) \quad (100)$$

$$\chi_0^{(3,4)}(x) = (x^{-1} - 1)(\chi_{11}^{(3,4)}(x) - 1) = x + x^3 + x^5 + 2x^7 + 2x^9 + x^{10} + 3x^{11} + x^{12} + 4x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (101)$$

$$\chi_{1,\Delta}^{(3,4)}(x) = (1 - x)\chi_\Delta^{(3,4)}(x) \quad (102)$$

Для $\Phi_\Delta = \Phi_{21} = \Phi_{22}$ (возмущение оператором σ) получаем

$$\chi_{21}^{(3,4)}(x) = x^{-\frac{1}{16}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{2+8k,1}} - x^{\Delta_{-2+8k,1}}) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (103)$$

$$\chi_{1,21}^{(3,4)}(x) = 1 + x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + 3x^{12} + 3x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (104)$$

$$\chi_0^{(3,4)}(x) - \chi_{1,21}^{(3,4)}(x) = -1 + x - x^6 + x^7 - x^8 - x^{10} + x^{11} - 2x^{12} + x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (105)$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_7 = \delta_{11} = \delta_{13} = \delta_{17} = \delta_{19} = 1$. Т.е., по крайней мере, имеется 6 интегралов движения.
Для $\Phi_\Delta = \Phi_{12} = \Phi_{31}$ (возмущение оператором ϵ) получаем

$$\chi_{12}^{(3,4)}(x) = x^{-\frac{1}{2}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{1+8k,2}} - x^{\Delta_{-1+8k,2}}) = 1 + x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (106)$$

$$\chi_{1,12}^{(3,4)}(x) = 1 + x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + 2x^{10} + x^{11} + 3x^{12} + 2x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (107)$$

$$\chi_0^{(3,4)}(x) - \chi_{1,12}^{(3,4)}(x) = -1 + x + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + x^7 - x^8 + x^9 - x^{10} + 2x^{11} - 2x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (108)$$

Мы получаем $\delta_{2k+1} > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}$, т.е. интеграл есть на каждом нечётном спине.

- $p = 4$ – минимальная модель $\mathcal{M}_{4,5}$, описывающая трикритическую модель Изинга. Характер:

$$\chi_{11}^{(4,5)} = \chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{1+10k,1}} - x^{\Delta_{-1+10k,1}}) = 1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \mathcal{O}(x^8) \quad (109)$$

$$\chi_0^{(4,5)}(x) = (x^{-1} - 1)(\chi_{11}^{(4,5)}(x) - 1) = x + x^3 + 2x^5 + 3x^7 + x^8 + 4x^9 + 2x^{10} + 6x^{11} + \mathcal{O}(x^{12}) \quad (110)$$

$$\chi_{1,\Delta}^{(4,5)}(x) = (1 - x)\chi_\Delta^{(4,5)}(x) \quad (111)$$

Для $\Phi_\Delta = \Phi_{21} = \Phi_{33}$ получаем

$$\chi_{21}^{(4,5)}(x) = x^{-\frac{1}{10}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{2+10k,1}} - x^{\Delta_{-2+10k,1}}) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (112)$$

$$\chi_{1,21}^{(4,5)}(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 5x^{11} + 8x^{12} + 8x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (113)$$

$$\chi_0^{(4,5)}(x) - \chi_{1,21}^{(4,5)}(x) = -1 + x - x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 - 2x^8 + x^9 - 3x^{10} + x^{11} - 5x^{12} + x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (114)$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_9 = \delta_{11} = \delta_{13} = 1$. Т.е., по крайней мере имеется 6 интегралов движения.
Для $\Phi_\Delta = \Phi_{12} = \Phi_{42}$ получаем

$$\chi_{12}^{(4,5)}(x) = x^{-\frac{7}{16}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{1+10k,2}} - x^{\Delta_{-1+10k,2}}) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (115)$$

$$\chi_{1,12}^{(4,5)}(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (116)$$

$$\chi_0^{(4,5)}(x) - \chi_{1,12}^{(4,5)}(x) = -1 + x - x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 - x^8 - 2x^{10} + x^{11} - 4x^{12} + x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (117)$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = \delta_{13} = 1 > 0$. Т.е., по крайней мере, имеется 5 интегралов движения.
Для $\Phi_\Delta = \Phi_{31} = \Phi_{23}$ получаем

$$\chi_{31}^{(4,5)}(x) = x^{-\frac{3}{5}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{3+10k,1}} - x^{\Delta_{-3+10k,1}}) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (118)$$

$$\chi^{(4,5)}_{1,31}(x) = 1+x^2+2x^4+x^5+2x^6+2x^7+4x^8+3x^9+6x^{10}+5x^{11}+9x^{12}+9x^{13}+\mathcal{O}(x^{14}) \quad (119)$$

$$\chi^{(4,5)}_{0}(x)-\chi^{(4,5)}_{1,12}(x) = -1+x-x^2+x^3-2x^4+x^5-2x^6+x^7-3x^8+x^9-4x^{10}+x^{11}+\mathcal{O}(x^{12}) \quad (120)$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_9 = \delta_{11} = 1 > 0$. Т.е., по крайней мере, имеется 5 интегралов движения.

- $p = 5$ – минимальная модель $\mathcal{M}_{5,6}$, описывающая $\mathbb{Z}_3$ модель Поттса. Характер:

$$\chi^{(5,6)}_{11} = \chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{1+12k,1}} - x^{\Delta_{-1+12k,1}}) = 1+x^2+x^3+2x^4+2x^5+4x^6+4x^7+\mathcal{O}(x^8) \quad (121)$$

$$\chi^{(5,6)}_{0}(x) = (x^{-1}-1)(\chi^{(5,6)}_{11}(x)-1) = x+x^3+2x^5+3x^7+x^8+4x^9+2x^{10}+7x^{11}+\mathcal{O}(x^{12}) \quad (122)$$

$$\chi^{(4,5)}_{1,\Delta}(x) = (1-x)\chi^{(4,5)}_{\Delta}(x) \quad (123)$$

Для $\Phi_\Delta = \Phi_{21} = \Phi_{44}$ получаем

$$\chi^{(5,6)}_{21}(x) = x^{-\frac{1}{8}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{2+12k,1}} - x^{\Delta_{-2+12k,1}}) = 1+x+x^2+2x^3+3x^4+4x^5+\mathcal{O}(x^6) \quad (124)$$

$$\chi^{(5,6)}_{1,21}(x) = 1+x^3+x^4+x^5+2x^6+2x^7+3x^8+4x^9+5x^{10}+6x^{11}+9x^{12}+10x^{13}+\mathcal{O}(x^{14}) \quad (125)$$

$$\chi^{(5,6)}_{0}(x)-\chi^{(5,6)}_{1,12}(x) = -1+x-x^4+x^5-2x^6+x^7-2x^8-3x^{10}+x^{11}-6x^{12}-6x^{14}+\mathcal{O}(x^{15}) \quad (126)$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1$. Т.е., по крайней мере имеется 4 интеграла движения.
Для $\Phi_\Delta = \Phi_{12} = \Phi_{53}$ получаем

$$\chi^{(5,6)}_{12}(x) = x^{-\frac{2}{5}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{1+12k,2}} - x^{\Delta_{-1+12k,2}}) = 1+x+x^2+2x^3+3x^4+4x^5+\mathcal{O}(x^6) \quad (127)$$

$$\chi^{(5,6)}_{1,12}(x) = 1+x^3+x^4+x^5+2x^6+2x^7+2x^8+4x^9+5x^{10}+6x^{11}+9x^{12}+10x^{13}+\mathcal{O}(x^{14}) \quad (128)$$

$$\chi^{(5,6)}_{0}(x)-\chi^{(5,6)}_{1,12}(x) = -1+x-x^4+x^5-2x^6+x^7-2x^8-3x^{10}+x^{11}-6x^{12}-6x^{14}+\mathcal{O}(x^{15}) \quad (129)$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1 > 0$. Т.е., по крайней мере, имеется 4 интеграла движения.
Для $\Phi_\Delta = \Phi_{31} = \Phi_{34}$ получаем

$$\chi^{(5,6)}_{31}(x) = x^{-\frac{2}{3}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{3+12k,1}} - x^{\Delta_{-3+12k,1}}) = 1+x+2x^2+2x^3+4x^4+5x^5+\mathcal{O}(x^6) \quad (130)$$

$$\chi^{(5,6)}_{1,31}(x) = 1+x^2+2x^4+x^5+3x^6+2x^7+5x^8+4x^9+8x^{10}+7x^{11}+12x^{12}+12x^{13}+\mathcal{O}(x^{14}) \quad (131)$$

$$\chi^{(4,5)}_{0}(x)-\chi^{(4,5)}_{1,31}(x) = -1+x-x^2+x^3-2x^4+x^5-3x^6+x^7-4x^8-6x^{10}-9x^{12}+\mathcal{O}(x^{13}) \quad (132)$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = 1 > 0$. Т.е., по крайней мере, имеется 3 интеграла движения.

Для некоторых неунитарных минимальных моделей $\mathcal{M}_{2,2N+1}$:'

- $N=2$ – минимальная модель $\mathcal{M}_{2,5}$, описывающая модель Ли-Янга. Характер:

$$\chi_{11}^{(2,5)}(x)=\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{1+10k,1}}-x^{\Delta_{-1+10k,1}})=1+x^2+x^3+x^4+x^5+2x^6+2x^7+\mathcal{O}(x^8) \quad (133)$$

$$\chi_{0}^{(2,5)}(x)=(x^{-1}-1)(\chi_{11}^{(2,5)}(x)-1)=x+x^5+x^7+x^9+2x^{11}+2x^{13}+x^{14}+2x^{15}+\mathcal{O}(x^{16}) \quad (134)$$

$$\chi_{1,\Delta}^{(2,5)}(x)=(1-x)\chi_{\Delta}^{(2,5)}(x) \quad (135)$$

Для $\Phi_\Delta=\Phi_{21}=\Phi_{31}$ получаем

$$\chi_{21}^{(2,5)}(x)=x^{\frac{1}{5}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{2+10k,1}}-x^{\Delta_{-2+10k,1}})=1+x+x^2+x^3+2x^4+2x^5+\mathcal{O}(x^6) \quad (136)$$

$$\chi_{1,21}^{(2,5)}(x)=1+x^4+x^6+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+2x^{12}+x^{13}+\mathcal{O}(x^{14}) \quad (137)$$

$$\chi_{0}^{(2,5)}(x)-\chi_{1,21}^{(2,5)}(x)=-1+x-x^4+x^5-x^6+x^7-x^8-x^{10}+x^{11}-2x^{12}+x^{13}+\mathcal{O}(x^{14}) \quad (138)$$

Мы получаем $\delta_1=\delta_5=\delta_7=\delta_{11}=\delta_{13}=\delta_{17}=\delta_{19}=\delta_{23}=1$. Т.е., по крайней мере, имеется 8 интегралов движения.

- $N=3$ – минимальная модель $\mathcal{M}_{2,7}$, описывающая модель ???. Характер:

$$\chi_{11}^{(2,7)}(x)=\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{1+14k,1}}-x^{\Delta_{-1+14k,1}})=1+x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+3x^7+\mathcal{O}(x^8) \quad (139)$$

$$\chi_{0}^{(2,7)}(x)=(x^{-1}-1)(\chi_{11}^{(2,7)}(x)-1)=x+x^3+x^5+2x^7+x^8+2x^9+x^{10}+4x^{11}+x^{12}+\mathcal{O}(x^{13}) \quad (140)$$

$$\chi_{1,\Delta}^{(2,7)}(x)=(1-x)\chi_{\Delta}^{(2,7)}(x) \quad (141)$$

Для $\Phi_\Delta=\Phi_{21}=\Phi_{51}$ получаем

$$\chi_{21}^{(2,7)}(x)=x^{\frac{2}{7}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{2+14k,1}}-x^{\Delta_{-2+14k,1}})=1+x+x^2+2x^3+3x^4+3x^5+\mathcal{O}(x^6) \quad (142)$$

$$\chi_{1,21}^{(2,7)}(x)=1+x^3+x^4+2x^6+x^7+2x^8+2x^9+3x^{10}+3x^{11}+5x^{12}+4x^{13}+\mathcal{O}(x^{14}) \quad (143)$$

$$\chi_{0}^{(2,7)}(x)-\chi_{1,21}^{(2,7)}(x)=-1+x-x^4+x^5-2x^6+x^7-x^8-2x^{10}+x^{11}-4x^{12}+x^{13}+\mathcal{O}(x^{14}) \quad (144)$$

Мы получаем $\delta_1=\delta_5=\delta_7=\delta_{11}=\delta_{13}=1$. Т.е., по крайней мере, имеется 5 интегралов движения.
Для $\Phi_\Delta=\Phi_{31}=\Phi_{41}$ получаем

$$\chi_{31}^{(2,7)}(x)=x^{\frac{3}{7}}\chi(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x^{\Delta_{3+14k,1}}-x^{\Delta_{-3+14k,1}})=1+x+2x^2+2x^3+3x^4+4x^5+\mathcal{O}(x^6) \quad (145)$$

$$\chi_{1,31}^{(2,7)}(x)=1+x^2+x^4+x^5+2x^6+x^7+3x^8+2x^9+4x^{10}+3x^{11}+6x^{12}+5x^{13}+\mathcal{O}(x^{14}) \quad (146)$$

$$\chi_{0}^{(3,7)}(x)-\chi_{1,31}^{(3,7)}(x)=-1+x-x^2+x^3-x^4-2x^6+x^7-2x^8-3x^{10}+x^{11}-5x^{12}+\mathcal{O}(x^{14}) \quad (147)$$

Мы получаем $\delta_1=\delta_3=\delta_7=\delta_{11}=1$. Т.е., по крайней мере, имеется 4 интеграла движения.

Такие рассуждения не решают полностью задачу подсчета интегралов движения, но все же расширяют наши возможности.

4 Другой подход к задаче

Опишем другой подход к задаче. Пусть T_s – сохраняющийся ток, удовлетворяющий уравнению непрерывности (55). Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int\limits_{C_\perp} du T_{s+1}(u) \tag{148}$$

Будем рассматривать систему не на плоскости, а на цилиндре радиуса R: $\sigma \sim \sigma + R$ и брать интеграл в (148) по замкнутому контуру $C_\perp$ вокруг цилиндра. Интеграл по контуру $\tau = \text{const}$ от Φ_Δ даёт гамильтониан возмущения

$$H_\Delta = \lambda \int\limits_0^R d\tau \Phi_\Delta(u) \tag{149}$$

Однако нам сейчас понадобится формальный гамильтониан в координатах светового конуса, где переменная τ играет роль времени. В этом случае фиксируем $\tau = \tau_0$:

$$H_\Delta^+(\tau_0) = \lambda \int\limits_0^R d\sigma \Phi_\Delta(\sigma, \tau_0) \tag{150}$$

Тогда условие, что $\mathcal{D}_1 T_s = \partial(...)$ эквивалентно тому, что

$$[I_s^{(0)}, H_\Delta^+] = 0 \tag{151}$$

Важно, что это уравнение можно решать в рамках одной (правой) киральности в конформной теории поля. Давайте перепишем первые сохраняющиеся токи в этом виде. Для этого нужно ввести алгебру Вирасоро на цилиндре. Отобразим цилиндр на плоскость заменой переменных

$$z = e^{-2\pi i \frac{u}{R}} \tag{152}$$

Разложение тензора энергии-импульса по модам на плоскости и цилиндре:

$$\widehat{T}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{L}_n}{z^{n+2}}, \quad \widehat{T}(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{L}_n^{\text{cyl}} e^{-2\pi i n \frac{u}{R}} \tag{153}$$

Обратное преобразование:

$$\widehat{L}_n = \int\limits_{C_\perp} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \widehat{T}(z), \quad \widehat{L}_n^{\text{cyl}} = \frac{1}{R} \int du e^{2\pi i n \frac{u}{R}} \widehat{T}(u) \tag{154}$$

Связь между тензором энергии-импульса на плоскости и на цилиндре:

$$\widehat{T}(u) = -\frac{4\pi^2}{R^2} \left(z^2 \widehat{T}(z) - \frac{c}{24} \right) \tag{155}$$

$$\widehat{T}_n \equiv \int\limits_{C_\perp} du e^{-2\pi i n \frac{u}{R}} \widehat{T}(u) = -\frac{4\pi^2}{R} \int\limits_{C_\perp} \frac{dz}{2\pi i} z^{n-1} \left(z^2 \widehat{T}(z) - \frac{c}{24} \right) = -\frac{4\pi^2}{R} \left(\widehat{L}_n - \frac{c}{24} \delta_{n0} \right) \tag{156}$$

Воспользуемся соотношением (68) на плоскости:

$$[\widehat{L}_n, \widehat{\Phi}_\Delta(z)] = z^{n+1}\partial_z\widehat{\Phi}_\Delta(z) + (n+1)z^n\Delta\widehat{\Phi}_\Delta(z) \tag{157}$$

Получим аналогичное соотношение на цилиндре. Преобразование голоморфного примарного поля:

$$\widehat{\Phi}_\Delta(u) = \left(\frac{dz}{du}\right)^\Delta \widehat{\Phi}_\Delta(z) = \left(-\frac{2\pi i}{R}\right)^\Delta z^\Delta\widehat{\Phi}_\Delta(z) \to \widehat{\Phi}_\Delta(z) = \widehat{\Phi}_\Delta(u)\left(-\frac{2\pi i}{R}\right)^{-\Delta} z^{-\Delta} \tag{158}$$

$$[\widehat{L}_n, \widehat{\Phi}_\Delta(u)]z^{-\Delta} = z^{n+1}\partial_z(z^{-\Delta}\widehat{\Phi}_\Delta(u)) + (n+1)z^{n-\Delta}\Delta\widehat{\Phi}_\Delta(u) \tag{159}$$

$$\partial_z(z^{-\Delta}\widehat{\Phi}_\Delta(u)) = -\Delta z^{-\Delta-1}\widehat{\Phi}_\Delta(u) + z^{-\Delta}\frac{du}{dz}\partial_u\widehat{\Phi}_\Delta(u) = -\Delta z^{-\Delta-1}\widehat{\Phi}_\Delta(u) - \frac{R}{2\pi i}z^{-\Delta}\partial_u\widehat{\Phi}_\Delta(u) \tag{160}$$

$$[\widehat{L}_n, \widehat{\Phi}_\Delta(u)] = z^n\left(\frac{iR}{2\pi}\partial_u\widehat{\Phi}_\Delta(u) + n\Delta\widehat{\Phi}_\Delta(u)\right) \tag{161}$$

Из (156) легко получить первый невозмущенный интеграл движения

$$I_1^{(0)} = \widehat{T}_0 = -\frac{4\pi^2}{R}\left(\widehat{L}_0 - \frac{c}{24}\right) \tag{162}$$

Применяя (157), получаем

$$[I_1^{(0)}, H_\Delta^+] = -\frac{4\pi^2\lambda}{R}\int_{C^\perp} du[\widehat{L}_0, \Phi_\Delta(\sigma,\tau_0)] = -2\pi i\lambda\int\limits_0^R d\sigma\partial_u\Phi_\Delta(\sigma,\tau_0) = 0 \tag{163}$$

Рассмотрим теперь случай $\Phi_\Delta = \Phi_{13}$ и запишем оператор $I_3^{(0)}$ через алгебру Вирасоро:

$$I_3^{(0)} = \mathcal{L}_{-2}^2 I = \int_{C_\perp} dz\mathcal{L}_{-2}T(z) = \int_{C_\perp} dz\oint_{\mathcal{C}_z}\frac{dw}{2\pi i}\frac{T(w)T(z)}{w-z} \tag{164}$$

Контур $\mathcal{C}_z$ обходит точку z против часовой стрелки. Далее надо записать выражение в периодическом по z и w виде и разложить его по степеням $e^{-2\pi i(w-z)/R}$. После утомительных вычислений получим

$$\begin{aligned} I_3^{(0)} &= \frac{1}{R}\left(\mathbb{T}_0^2 + 2\sum_{n=1}^\infty \mathbb{T}_{-n}\mathbb{T}_n\right) + \frac{2\pi}{3R^2}\mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3} = \\ &= \frac{(2\pi)^4}{R^3}\left(\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^\infty \mathbb{L}_{-n}\mathbb{L}_n - \frac{1}{6}\left(\mathcal{L}_0 - \frac{c}{24}\right) + \frac{c}{1440}\right) \end{aligned} \tag{165}$$

5 Полезные ссылки и литература

- A.B. Zamolodchikov. Integrable Field Theory from Conformal Field Theory. 1989.
- Курс М.Ю. Лашкевича «Интегрируемые модели квантовой теории поля».
- Курс лекций А.А. Белавина и С.Е. Пархоменко по КТП.
- Курс лекций А.В. Литвинова «Конформная теория поля».
- Сайт ОП «Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика».
- YouTube-канал ОП.