4. D=2 Модель Изинга. Дуальность Крамерса-Ванье

Актуальная версия листика находится тут (последнее обновление: 9 апреля 2023 г.).

Упражнения

Упражнение 1. Я и сам своего рода учёный.

Сформулируйте 5 ключевых утверждений (по Вашему мнению) из лекции.

Задачи

Задача 1. Лучшие друзья матфизиков это ~~бриллианты~~.
Рассматривается $2D$ модель Изинга на квадратной решётке с горизонтальными константами связи K и вертикальными константами связи L.

1. Подробно объясните возникновение суммирования по замкнутым контурам в низкотемпературном пределе.

2. Подробно объясните возникновение суммирования по замкнутым контурам в высокотемпературном пределе.

3. В предположении конечных размеров решётки (и отсутствия граничных условий), объясните в чём заключается отличие данных сумм. Что можно сказать про данные суммы если:

   - присутствуют периодичные граничные условия?
   - рассматривается термодинамический предел $N \to \infty$?

4. Подробно объясните почему параметр беспорядка $\langle \mu \rangle$ «слабо» зависит от выбора контура Γ.

Задача 2. Дуальность KW для 2D неоднородной модели Изинга.
Рассматривается двумерная квадратная неоднородная решётка с $N = n^2$ узлами. Константы

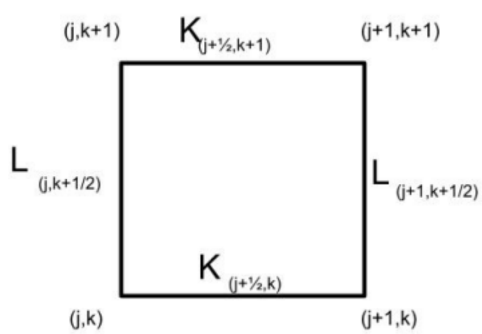

Рис. 1: Обозначения для констант связи в неоднородном случае.

связи изображены на рис. 1 (для каждого ребра в общем случае своя собственная константа). Определим для решётки преобразование KW общего вида следующим образом

$$\operatorname{sh} 2K^*_{j+\frac{1}{2},k} \operatorname{sh} 2L_{j+1,k+\frac{1}{2}} = 1, \quad \operatorname{sh} 2L^*_{j,k+\frac{1}{2}} \operatorname{sh} 2K_{j+\frac{1}{2},k+1} = 1. \tag{1}$$

Для первых двух пунктов считаем, что никаких граничных условий не накладывается (обратите внимание, что теперь число горизонтальных/вертикальных рёбер не равно числу узлов). Для последних двух подразумевается рассмотрение термодинамического предела (то есть $N \to \infty$).

1. Повторяя рассуждения с лекции запишите выражение для низкотемпературного разложения статсуммы. Ответ должен иметь вид $\{smth_1\} \cdot \sum\limits_{smth_2} smth_3$.

2. Повторяя рассуждения с лекции запишите выражение для высокотемпературного разложения статсуммы (в терминах констант исходной решётки). Ответ должен иметь вид $\{smth_1\} \cdot \sum\limits_{smth_2} smth_3$.

3. Используя результаты двух предыдущих пунктов, а так же преобразование KW, запишите выражение, связывающее между собой статсумму зависящую от исходных констант связи K, L с статсуммой зависящей от дуальных констант связи K^*, L^*.

4. Образуем функцию, которая совпадает со статистической суммой неоднородной модели, с точностью до простого множителя

$$Y(\{K,L\}) = Z(\{K,L\}) \left(2^N \prod_{j,k} \cosh 2K_{j+\frac{1}{2},k} \cosh 2L_{j,k+\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

   Проверьте соотношение эквивалентное дуальности Краммерса-Ванье

$$Y(\{K^*,L^*\}) = c \cdot Y(\{K,L\}), \tag{3}$$

   где c – некоторая константа.

Задача 3. Статсумма на d – мерной гиперкубической решётке.
Рассматривается модель Изинга на d – мерной гиперкубической изотропной (все константы связи K) решётке.
Часть 1. Низкотемпературный режим.
На лекции объяснялись первые четыре члена разложения статсуммы в данном режиме.

1. Найдите свободную энергию, энергию и теплоёмкость на узел с точностью до 4-го порядка.

2. Получите 5-ый член в разложении статсуммы.

3. Получите 6-ой член в разложении статсуммы.

Часть 2. Высокотемпературный режим.
На лекции объяснялись первые три члена разложения статсуммы в данном режиме. Но было отмечено что рассуждение для третьего члена не даёт правильный ответ.

1. Найдите свободную энергию, энергию и теплоёмкость на узел с точностью до 3-го порядка (в этом пункте Z до 3-го порядка считается известной).

2. Получите 3-ий член в разложении статсуммы.

3. Получите 4-ый член в разложении статсуммы.

Задача 4. Критическая точка модели Поттса.
Модель Изинга – простейший представитель q-позиционных моделей Поттса. В моделях Поттса спины принимают значения $\sigma_i \in \{1, 2, ..., q\}$. Пусть на квадратной решётке взаимодействуют только ближайшие соседи (символ $\langle ij \rangle$ для соседних по вертикали и горизонтали спинов σ_i, σ_j). Зададим статистическую суммму как

$$Z = \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_N} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K\delta_{\sigma_i,\sigma_j}}. \tag{4}$$

1. Рассматривая пределы высоких и низких температур, попытайтесь вывести уравнение дуальности
$$Z = qe^{2NK}F(e^{-K}) = q^{-N}(e^K + q - 1)^{2N}F\left(\frac{e^K - 1}{e^K + q - 1}\right). \tag{5}$$

2. Предполагая единственность критической точки, найдите критическую точку.

Задача 5. Невзаимодействующие пары.
Ансамбль невзаимодействующих пар спинов находится в магнитном поле h при температуре T. Каждая спиновая переменная s_i^z может принимать только значения $s_i^z = \pm 1$. Два спина внутри каждой пары взаимодействуют в соответствии с гамильтонианом (полной энергией)

$$H = E = -Js_1^z s_2^z - \mu_B h(s_1^z + s_2^z),\ J > 0.$$

1. Перечислите возможные состояния одной пары и вычислите их соответствующие энергии.

2. Выведите выражение для среднего значения спина, $\langle s_i^z \rangle, (i = 1, 2)$ как функции J, T, h.

3. Определите, существует ли температура T_c для которой $\langle s_i^z \rangle$ может быть ненулевым при $h = 0$. Вычислите T_c.