Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Семинары по квантовой механике – II
(И.В. Побойко, Н.А. Степанов)

Коцевич Андрей Витальевич, группа Б02-920

6 семестр, 2022

Содержание

1 Задача рассеяния, функции Грина и формула Борна.

Упражнения (30 баллов)

Упражнение 1. Борновское приближение (20 баллов)
В рамках Борновского приближения, рассмотрите рассеяние на следующих потенциалах:

1. **(10 баллов)** $V(\mathbf{r}) = V_0 \frac{a^n}{r^n + a^n}$, $n > 3$, случай медленных частиц $ka \ll 1$. Рассмотрите также предел $n \to \infty$, когда потенциал превращается в сферическую прямоугольную яму.

2. **(10 баллов)** $V(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} e^{-\kappa r}$ (потенциал Юкавы). Рассмотрите также предельный переход $\kappa \to 0$ (закон Кулона).

Решение. Амплитуда рассеяния в борновском приближении:

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \tag{1}$$

В сферически-симметричном случае:

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r}\, V(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = -\frac{m}{\hbar^2} \int\limits_0^\infty dr r^2 V(r) \int\limits_0^\pi e^{-i|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|r\cos\varphi} \sin\varphi d\varphi \tag{2}$$

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 |\mathbf{k}-\mathbf{k}'|} \int\limits_0^\infty dr r \sin(|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|r) V(r) = -\frac{2m}{2k\hbar^2 \sin\frac{\theta}{2}} \int\limits_0^\infty dr r \sin\left(2kr\sin\frac{\theta}{2}\right) V(r) \tag{3}$$

1. $V(\mathbf{r}) = V_0 \frac{a^n}{r^n + a^n}$.

$$f(\theta) = -\frac{2ma^n V_0}{2k\hbar^2 \sin\frac{\theta}{2}} \int\limits_0^\infty dr \frac{r \sin\left(2kr\sin\frac{\theta}{2}\right)}{r^n + a^n} \approx -\frac{2ma^n V_0}{2k\hbar^2 \sin\frac{\theta}{2}} \int\limits_0^\infty dr \frac{2kr^2 \sin\frac{\theta}{2}}{r^n + a^n} = -\frac{2\pi m a^3 V_0}{\hbar^2 n \sin\frac{3\pi}{n}} \tag{4}$$

$$\boxed{\sigma = 2\pi \int\limits_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta = \frac{16\pi^3 m^2 a^6 V_0^2}{\hbar^4 n^2 \sin^2\frac{3\pi}{n}}} \tag{5}$$

При $n \to \infty$ (сферическая прямоугольная яма):

$$f(\theta) = -\frac{2ma^3 V_0}{3\hbar^2} \to \boxed{\sigma = \frac{16\pi m^2 a^6 V_0^2}{9\hbar^4}} \tag{6}$$

2. Потенциал Юкавы: $V(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} e^{-\kappa r}$.

$$f(\theta) = -\frac{2m\alpha}{2k\hbar^2 \sin\frac{\theta}{2}} \int\limits_0^\infty dr \sin\left(2kr\sin\frac{\theta}{2}\right) e^{-\kappa r} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2(4k^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \kappa^2)} \tag{7}$$

$$\boxed{\sigma = 2\pi \int\limits_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta = \frac{8\pi m^2\alpha^2}{\hbar^4} \int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(4k^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \kappa^2)^2} = \frac{16\pi m^2\alpha^2}{\hbar^4\kappa^2(4k^2+\kappa^2)}} \tag{8}$$

Кулоновский потенциал: $\kappa \to 0$:

$$f(\theta) = -\frac{m\alpha}{2\hbar^2 k^2 \sin^2\frac{\theta}{2}} \to \boxed{\sigma = \frac{\pi m^2\alpha^2}{2\hbar^4 k^4}\int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \to \infty} \tag{9}$$

Упражнение 2. Соотношение унитарности (10 баллов)
Исходя из соотношения унитарности на языке T-матрицы, полученного на семинаре

$$\hat{T}_E - \hat{T}_E^\dagger = -2\pi i \hat{T}_E^\dagger \delta(E - \hat{H}_0)\hat{T}_E \tag{10}$$

получите соотношение унитарности на языке амплитуды рассеяния (результат также был предъявлен на семинаре):

$$f(\mathbf{n},\mathbf{n}') - f^*(\mathbf{n}',\mathbf{n}) = i\frac{k}{2\pi}\int d\mathbf{n}'' f(\mathbf{n},\mathbf{n}'')f^*(\mathbf{n}',\mathbf{n}'') \tag{11}$$

Решение.
Связь T-матрицы и амплитуды рассеяния:

$$f(\mathbf{n},\mathbf{n}') = -\frac{m}{2\pi}\langle \mathbf{k}'|\hat{T}_E|\mathbf{k}\rangle \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{n},\mathbf{n}') - f^*(\mathbf{n}',\mathbf{n}) = -\frac{m}{2\pi}(\langle \mathbf{k}'|\hat{T}_E|\mathbf{k}\rangle - \langle \mathbf{k}'|\hat{T}_E^\dagger|\mathbf{k}\rangle) = -\frac{m}{2\pi}\langle \mathbf{k}'|(\hat{T}_E - \hat{T}_E^\dagger)|\mathbf{k}\rangle = \\ = im\langle \mathbf{k}'|\hat{T}_E^\dagger \delta(E-\hat{H}_0)\hat{T}_E|\mathbf{k}\rangle \end{aligned} \tag{13}$$

Вставим единицу:

$$\mathbb{I} = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}|\mathbf{q}\rangle\langle\mathbf{q}| \tag{14}$$

$$f(\mathbf{n},\mathbf{n}') - f^*(\mathbf{n}',\mathbf{n}) = im\int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\langle \mathbf{k}'|\hat{T}_E^\dagger|\mathbf{q}\rangle\langle\mathbf{q}|\hat{T}_E|\mathbf{k}\rangle\delta(E-E_\mathbf{q}) \tag{15}$$

$$E = \frac{k^2}{2m} \to \delta(E - E_\mathbf{q}) = \frac{m}{k}\delta(k - |\mathbf{q}|) \tag{16}$$

$$f(\mathbf{n},\mathbf{n}') - f^*(\mathbf{n}',\mathbf{n}) = im\frac{4\pi^2}{(2\pi)^3 m^2}\frac{m}{k}k^2\int d\mathbf{n}'' f(\mathbf{n},\mathbf{n}'')f^*(\mathbf{n}',\mathbf{n}'') \tag{17}$$

$$\boxed{f(\mathbf{n},\mathbf{n}') - f^*(\mathbf{n}',\mathbf{n}) = \frac{ik}{2\pi}\int d\mathbf{n}'' f(\mathbf{n},\mathbf{n}'')f^*(\mathbf{n}',\mathbf{n}'')} \tag{18}$$

Задачи (70 баллов)

Задача 1. Welcome to Flatland! (40 баллов)
Одномерие (15 баллов)
Выведите формулы Борновского приближения для одномерного пространства. Амплитуда рассеяния определяется согласно:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + f(\mathbf{n},\mathbf{n}')ie^{ik|\mathbf{r}|} \tag{19}$$

Что из себя представляет величина f и как она связана с амплитудами прохождения и отражения t, r? Что из себя представляет сечение рассеяния в одномерии?

Двумерие (25 баллов)

А теперь повторите вывод для двумерного пространства. В двумерии амплитуда определяется согласно:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + f(\mathbf{n}, \mathbf{n}')e^{\frac{i\pi}{4}}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \tag{20}$$

Указание: функция Грина свободного движения выражается через какие-то из модифицированных функций Бесселя.

Решение.

Пусть $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ – оператор Гамильтона для свободной частицы, $|\mathbf{k}\rangle$ – падающая плоская волна, $|\chi\rangle$ – рассеянная.

$$|\psi\rangle = |\mathbf{k}\rangle + |\chi\rangle\,, \quad \hat{H}_0\,|\mathbf{k}\rangle = E\,|\mathbf{k}\rangle \tag{21}$$

$$(\hat{H}_0 + \hat{V})(|\mathbf{k}\rangle + |\chi\rangle) = E(|\mathbf{k}\rangle + |\chi\rangle) \to (E - \hat{H})\,|\chi\rangle = \hat{V}\,|\mathbf{k}\rangle \tag{22}$$

$$|\chi\rangle = (E - \hat{H})^{-1}\hat{V}\,|\mathbf{k}\rangle \tag{23}$$

Резольвента оператора $\hat{H}$:

$$(E - \hat{H})\hat{G}_E = \hat{\mathbb{I}} \tag{24}$$

Представление резольвенты в координатном представлении – функция Грина $G_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle\mathbf{r}|\hat{G}_E|\mathbf{r}'\rangle$, удовлетворяющая уравнению

$$(E - \hat{H})G_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{25}$$

Пусть $\hat{G}_E^{(0)} = (E - \hat{H}_0)^{-1}$, тогда

$$G_E^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{E - \frac{k^2}{2m}}, \quad G_E^{(0,R)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{E + i0 - \frac{k^2}{2m}} \tag{26}$$

$$\hat{G}_E = (E - \hat{H})^{-1} = (E - \hat{H}_0 - \hat{V})^{-1} = \hat{G}_E^{(0)} + \hat{G}_E^{(0)}\hat{V}\hat{G}_E^{(0)} + \ldots \tag{27}$$

$$\begin{aligned} |\chi\rangle = (E - \hat{H} + i0)^{-1}\hat{V}\,|\mathbf{k}\rangle &= (\hat{G}_E^{(0,R)}\hat{V} + \hat{G}_E^{(0,R)}\hat{V}\hat{G}_E^{(0,R)}\hat{V} + \ldots)\,|\mathbf{k}\rangle = \\ &= \hat{G}_E^{(0,R)}(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_E^{(0,R)}\hat{V} + \ldots)\,|\mathbf{k}\rangle = \hat{G}_E^{(0,R)}\hat{T}_E\,|\mathbf{k}\rangle \end{aligned} \tag{28}$$

T-матрица:

$$\hat{T}_E = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_E^{(0,R)}\hat{V} + \ldots = \hat{V}(1 - \hat{G}_E^{(0,R)}V)^{-1} \tag{29}$$

Запишем $|\chi\rangle$ в координатном представлении:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|\chi\rangle = \langle\mathbf{r}|\hat{G}_E^{(0,R)}\hat{T}_E|\mathbf{k}\rangle &= \int d\mathbf{r}'\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^d}\,\langle\mathbf{r}|\hat{G}_E^{(0,R)}|\mathbf{r}'\rangle\,\langle\mathbf{r}'|\mathbf{k}'\rangle\,\langle\mathbf{k}'|\hat{T}_E|\mathbf{k}\rangle = \\ &= \int d\mathbf{r}'\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^d}\hat{G}_E^{(0,R)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}\hat{T}_E(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \end{aligned} \tag{30}$$

В борновском приближении $\hat{T}_E \approx \hat{V}$.

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^d}\hat{G}_E^{(0,R)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}\,\langle\mathbf{k}'|\hat{V}|\mathbf{k}\rangle \tag{31}$$

1. Рассмотрим одномерный случай. Запаздывающая функция Грина:

$$G_E^{(0,R)}(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{E + i0 - \frac{k^2}{2m}} = \frac{m}{\pi} \int dk \frac{e^{ikx}}{2mE - k^2 + i0} =$$

$$= \frac{m}{\pi} 2\pi i \mathrm{res}_{k=\pm\sqrt{2mE}} \left(\frac{e^{ikx}}{2mE - k^2} \right) = -i\sqrt{\frac{m}{2E}} e^{i\sqrt{2mE}x} \quad (32)$$

$$G_E^{(0,R)}(x, x') = -\frac{im}{k_E} e^{ik_E|x-x'|}, \quad k_E = \sqrt{2mE} = k \quad (33)$$

$$\chi_k(x) = \int dx' \frac{dk'}{2\pi} \hat{G}_E^{(0,R)}(x, x') e^{ik'x'} \langle k'|\hat{V}|k\rangle = -\frac{im}{k} \int dx' \frac{dk'}{2\pi} e^{ik|x-x'|} e^{ik'x'} \tilde{V}_{k-k'} \quad (34)$$

$$|x - x'| \approx x - n_x x', \quad x \to \infty \quad (35)$$

$$\chi_k(x) = -\frac{im}{k} \int dx' \frac{dk'}{2\pi} e^{ik(x-n_x x')} e^{ik'x'} \tilde{V}_{k-k'} = -\frac{im}{k} \int dx' \delta(x') e^{ik(x-n_x x')} \tilde{V}_{k-k'} =$$

$$= -\frac{im}{k} e^{ikx} \tilde{V}_{k-k'} \quad (36)$$

$$\boxed{f(n, n') = -\frac{m}{k} \tilde{V}_{k-k'} = \begin{cases} r = -\frac{m}{k} \int V(x) dx, & \mathbf{n} \uparrow\uparrow \mathbf{n}' \\ t = -\frac{m}{k} \int V(x) e^{2kx} dx, & \mathbf{n} \uparrow\downarrow \mathbf{n}' \end{cases}} \quad (37)$$

$$\boxed{\sigma = r^2 + t^2} \quad (38)$$

2. Рассмотрим двумерный случай. Запаздывающая функция Грина:

$$G_E^{(0,R)}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{E + i0 - \frac{k^2}{2m}} = \int\limits_0^\infty \frac{dkk}{4\pi^2} \frac{1}{E + i0 - \frac{k^2}{2m}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi e^{ikr\cos\varphi} \quad (39)$$

Воспользумкся методом стационарной фазы:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi e^{ikr\cos\varphi} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} (e^{ikr - i\frac{\pi}{4}} + e^{-ikr + i\frac{\pi}{4}}) = 2\sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right), \quad kr \gg 1 \quad (40)$$

$$G_E^{(0,R)}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi^2\sqrt{r}} \int\limits_0^\infty \frac{dk\sqrt{k}\cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}{E + i0 - \frac{k^2}{2m}} \quad (41)$$

Сделав разрез по положительной части окружности, получаем

$$G_E^{(0,R)}(\mathbf{r}) = \frac{m}{\sqrt{2\pi k_E r}} e^{ik_E r + i\frac{\pi}{4}} \to G_E^{(0,R)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{m}{\sqrt{2\pi k_E r}} e^{ik_E|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + i\frac{\pi}{4}} \quad (42)$$

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \hat{G}_E^{(0,R)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \langle \mathbf{k}'|\hat{V}|\mathbf{k}\rangle =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{2\pi kr}} \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + i\frac{\pi}{4}} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \tilde{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = \frac{m}{\sqrt{2\pi kr}} e^{ikr + i\frac{\pi}{4}} \tilde{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \quad (43)$$

$$\boxed{f(\mathbf{n},\mathbf{n}') = \frac{m}{\sqrt{2\pi k}}\tilde{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}} \tag{44}$$

Дифференциальное сечение рассеяния:

$$\boxed{d\sigma = |f(\mathbf{n},\mathbf{n}')|^2 d\theta} \tag{45}$$

Задача 2. Глубокий мелкий рассеиватель? (15 баллов)
Рассмотрите рассеяние медленных частиц на одномерном потенциале $V(x) = -V_0\frac{a}{a+|x|}$. Используя результат предыдущей задачи, вычислите коэффициент прохождения частиц в ведущем Борновском приближении.
Решение.
Если воспользоваться формулой из предыдущей задачи, то

$$t = -\frac{m}{k}\int V(x)dx = -\frac{m}{k}V_0\int\frac{adx}{a+|x|} \tag{46}$$

Интеграл расходится. Воспользуемся предыдущей формулой, при этом обрезав интеграл по $[-R;R]$, для какого-то $R > 0$.

$$\chi_k(x) = -i\frac{m}{k}\int\limits_{-R}^{R} e^{ik|x-x'|}V(x')e^{ikx'}dx', \quad x > R \tag{47}$$

$$\chi_k(x) = 2iV_0ae^{ikx}\frac{m}{k}\int\limits_0^R\frac{dx'}{x'+a} = 2iV_0ae^{ikx}\frac{m}{k}\ln\frac{a+R}{a} = 2iV_0ae^{ikx}\frac{m}{k}(\ln(ka+kR)-\ln ka) \tag{48}$$

Частицы медленные, поэтому $ka \ll 1$.

$$R \sim \frac{1}{k} \gg a, \quad \ln(ka+kR) \approx \ln ka \tag{49}$$

$$\chi_k(x) = -2iV_0ae^{ikx}\frac{m}{k}\ln ka \tag{50}$$

$$\boxed{t = -2V_0a\sqrt{\frac{m}{2E}}\ln ka = -\frac{V_0}{E}ka\ln ka} \tag{51}$$

Задача 3. Двухатомная молекула (15 баллов)
Смоделируем двухатомную полярную молекулу потенциалом вида $V(\mathbf{r}) = V_0(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{R}}{2})+V_0(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{R}}{2})$ (вектор $\mathbf{R}$ соединяет два атома, а $V_0(\mathbf{r})$ представляет собой потенциал рассеяния на отдельном атоме). В рамках Борновского приближения, свяжите дифференциальное сечение рассеяния на такой молекуле с сечением на отдельном атоме. Считая различные ориентации молекулы равновероятными, усредните по ним результат. Как связаны полные сечения рассеяния для случая медленных ($kR \ll 1$) и достаточно быстрых ($ka \sim 1$, но $R \gg a$, где a – характерный масштаб потенциала $V_0(r)$) частиц.
Решение.
Амплитуды рассеяния в борновском приближении:

$$f(\mathbf{n},\mathbf{n}') = -\frac{m}{2\pi\hbar}\tilde{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}, \quad f_0(\mathbf{n},\mathbf{n}') = -\frac{m}{2\pi}\tilde{V}_{0\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \tag{52}$$

$$f_0(\mathbf{n},\mathbf{n}') = -\frac{m}{2\pi}\int d^3\mathbf{r} V_0(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} \tag{53}$$

$$f(\mathbf{n},\mathbf{n}') = -\frac{m}{2\pi}\int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = -\frac{m}{2\pi}\int d^3\mathbf{r}\left(V_0\left(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{R}}{2}\right)+V_0\left(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{R}}{2}\right)\right)e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} =$$
$$= -\frac{m}{2\pi}\int d^3\mathbf{r}\left(V_0(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\frac{\mathbf{R}}{2}} + V_0(\mathbf{r})e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\frac{\mathbf{R}}{2}}\right)e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = 2f_0(\mathbf{n},\mathbf{n}')\cos\left(\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{R}}{2}\right) \tag{54}$$

Дифференциальное сечение рассеяния:

$$d\sigma = |f(\mathbf{n},\mathbf{n}')|^2 d\Omega_{\mathbf{n}'}, \quad d\sigma_0 = |f_0(\mathbf{n},\mathbf{n}')|^2 d\Omega_{\mathbf{n}'} \tag{55}$$

Связь между дифференциальными сечениями:

$$\boxed{d\sigma = 4\cos^2\left(\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{R}}{2}\right)d\sigma_0} \tag{56}$$

Усредним величину $\frac{d\sigma}{d\sigma_0}$ по различным ориентациям молекулы.

$$\left\langle\frac{d\sigma}{d\sigma_0}\right\rangle = \frac{1}{4\pi}\int 4\cos^2\left(\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{R}}{2}\right)d\Omega = \frac{4\cdot 2\pi}{4\pi}\int\limits_0^\pi \cos^2\left(\frac{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|R\cos\theta}{2}\right)\sin\theta d\theta \tag{57}$$

$$\left\langle\frac{d\sigma}{d\sigma_0}\right\rangle = 2\left(1+\frac{\sin(|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|R)}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|R}\right) \tag{58}$$

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| \to |\mathbf{k}-\mathbf{k}'| = \sqrt{k^2+k'^2-2kk'\cos\alpha} = \sqrt{2k^2(1-\cos\alpha)} = 2k\sin\frac{\alpha}{2} \tag{59}$$

$$\boxed{\left\langle\frac{d\sigma}{d\sigma_0}\right\rangle = 2\left(1+\frac{\sin(2k\sin\frac{\alpha}{2}R)}{2k\sin\frac{\alpha}{2}R}\right)} \tag{60}$$

Найдём связь между полными сечениями:

$$\langle\sigma\rangle = \int 2\left(1+\frac{\sin(2k\sin\frac{\alpha}{2}R)}{2k\sin\frac{\alpha}{2}R}\right)|f_0(\mathbf{n},\mathbf{n}')|^2\sin\alpha d\alpha d\varphi =$$
$$= 2\left(\langle\sigma_0\rangle + \int\frac{\sin(2k\sin\frac{\alpha}{2}R)}{2k\sin\frac{\alpha}{2}R}|f_0(\mathbf{n},\mathbf{n}')|^2\sin\alpha d\alpha d\varphi\right) \tag{61}$$

- Случай медленных частиц ($kR \ll 1$).

$$\boxed{\langle\sigma\rangle \approx 2\left(\langle\sigma_0\rangle + \int|f_0(\mathbf{n},\mathbf{n}')|^2\sin\alpha d\alpha d\varphi\right) = 4\langle\sigma_0\rangle} \tag{62}$$

- Случай достаточно быстрых частиц ($ka \sim 1$, $R \gg a$). Подынтегральное выражение быстро осциллирует, поэтому
$$\boxed{\langle\sigma\rangle \approx 2\langle\sigma_0\rangle} \tag{63}$$

2 Фазовая теория рассеяния

Задача 1. Flatland, you again? (20 баллов)
Постройте фазовую теорию рассеяния в двумерии для случая осесимметричных потенциалов. А именно, выразите через фазовые сдвиги δ_m амплитуду рассеяния $f(\varphi)$, парциальные сечения рассеяния σ_m и полное сечение σ, и выведите оптическую теорему. Напомним, амплитуда рассеяния в двумерие выражается через асимптотику волновых функций следующим образом:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikr\cos\varphi} + f(\varphi)e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \tag{64}$$

Решение.
Двумерное уравнение Шрёдингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \tag{65}$$

Разложим волновую функцию свободного движения по функциям с определённой проекцией m углового момента на ось y, имеющим вид $Q_m(\rho)e^{im\varphi}$ ($p_y = 0$).

$$e^{ikz} \equiv e^{ikr\cos\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_m^{\text{free}}(r)e^{im\varphi} \tag{66}$$

$$Q_m^{\text{free}}(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp(i(kr\cos\varphi - m\varphi)) = i^m J_m(kr) \tag{67}$$

где J_m – функция Бесселя. При $kr \gg 1$ для Q_m справедливо асимптотическое выражение:

$$Q_m^{\text{free}}(r) \approx i^m\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)\right) \tag{68}$$

В случае наличия потенциала нужно добавить фазовый сдвиг:

$$Q_m(r) \approx i^m\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right) + \delta_m\right), \quad \delta_m = \delta_{-m} \tag{69}$$

Разложение волновой функции и $f(\varphi)$:

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m Q_m(r)e^{im\varphi}, \quad f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(\varphi)e^{im\varphi} \tag{70}$$

$$C_m Q_m(r) = Q_m^{\text{free}}(r) + f_m(\varphi)e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{e^{ikr}}{r} \tag{71}$$

$$C_m\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right) + \delta_m\right) = i^m\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)\right) + \\ + f_m(\varphi)e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{e^{ikr}}{r} \tag{72}$$

$$\frac{C_m}{i}\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\left(\exp\left(ikr-\frac{i\pi}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)+i\delta_m\right)-\exp\left(-ikr+\frac{i\pi}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)-i\delta_m\right)\right)=$$
$$=i^{m-1}\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\left(\exp\left(ikr-\frac{i\pi}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)-\exp\left(-ikr+\frac{i\pi}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)\right)+$$
$$+f_m(\varphi)e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \quad (73)$$

Приравнивая коэффиценты при падающих и уходяших волнах, получим

$$\begin{cases} C_m = e^{i\delta_m} i^m, \\ i^{m-1}\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)\left(e^{2i\delta_m}-1\right) = f_m(\varphi)\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{r}} \end{cases} \quad (74)$$

$$f_m(\varphi) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi k}}(e^{2i\delta_m}-1) \quad (75)$$

$$\boxed{f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(\varphi)e^{im\varphi} = \frac{1}{i\sqrt{2\pi k}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(e^{2i\delta_m}-1)e^{im\varphi}} \quad (76)$$

Полное сечение:

$$\sigma = \int_0^{2\pi}|f(\varphi)|^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi k}\sum_{m=-\infty}^{\infty} 4\sin^2\delta_m 2\pi = \frac{4}{k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin^2\delta_m \quad (77)$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{4\sin^2\delta_m}{k}, \quad \sigma = \frac{4}{k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin^2\delta_m} \quad (78)$$

$$\mathrm{Im} f(0) = \mathrm{Im}\frac{1}{i\sqrt{2\pi k}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(e^{2i\delta_m}-1) = \mathrm{Im}\frac{1}{i\sqrt{2\pi k}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\cos(2\delta_m)+i\sin(2\delta_m)-1) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(1-\cos 2\delta_m) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin^2\delta_m \quad (79)$$

Оптическая теорема:

$$\boxed{\mathrm{Im} f(0) = \sqrt{\frac{k}{8\pi}}\sigma} \quad (80)$$

Задача 2. Мистические сокращения (20 баллов)
Используя результат предыдущей задачи, найдите фазовые сдвиги и сечение рассеяния для двумерного потенциала $V(r) = \frac{\hbar^2\beta}{2mr^2}$. Исследуйте предел «слабого» ($\beta \ll 1$, с точностью до членов $O(\beta^2)$, **10 баллов**) и «сильного» ($\beta \gg 1$, **10 баллов**) потенциала.
(Для любознательных) Полученный ответ может вас натолкнуть на некоторую гипотезу, которую, в принципе, можно потом проверить численно. Попробуйте её доказать.
Решение.
Гамильтониан:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{\hbar^2\beta}{2mr^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{\hbar^2\beta}{2mr^2} \quad (81)$$

Разложение воновой функции:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} q_l(r) e^{il\varphi} \tag{82}$$

Стационарное уравнение Шрёдингера:

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \tag{83}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(q_l''(r) + \frac{q_l'(r)}{r} - \frac{l^2}{r^2}q_l(r)\right) + \frac{\beta\hbar^2 q_l(r)}{2mr^2} = Eq_l(r) \tag{84}$$

$$r^2 q_l''(r) + rq_l'(r) + \left(\frac{2mEr^2}{\hbar^2} - l^2 - \beta\right) q_l(r) = 0 \tag{85}$$

Введём замену $z = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} r$.

$$z^2 q_l''(z) + zq_l'(z) + \left(z^2 - l^2 - \beta\right) q_l(z) = 0 \tag{86}$$

Получилось уравнение Бесселя:

$$q_l(z) = J_{\sqrt{l^2+\beta}}(z) \approx \frac{2}{\pi z}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\sqrt{l^2+\beta} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{87}$$

Сравнивая с соответсвующим коэффициентом предыдущей задачи, получим фазовый сдвиг (с учётом $\delta_l = \delta_{-l}$):

$$\boxed{\delta_l = \frac{\pi}{2}(|l| - \sqrt{l^2+\beta})} \tag{88}$$

Сечение рассеяния:

$$\boxed{\sigma = \frac{4}{k}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sin^2\delta_l = \frac{4}{k}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(|l| - \sqrt{l^2+\beta})\right)} \tag{89}$$

Рассмотрим предельные случаи:

- «Слабый» потенциал $\beta \ll 1$.
  Фазовые сдвиги:

$$\delta_l = \frac{\pi}{2}\left(|l| - |l|\sqrt{1+\frac{\beta}{l^2}}\right) \approx -\frac{\pi\beta}{4|l|}, \quad l \neq 0 \tag{90}$$

$$\boxed{\begin{cases} \delta_l = -\frac{\pi\beta}{4|l|}, & l \neq 0 \\ \delta_0 = -\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2} \end{cases}} \tag{91}$$

  Сечение рассеяния:

$$\sigma \approx \frac{4}{k}\left(\sin^2\frac{\pi\sqrt{\beta}}{2} + \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\pi\beta}{4|l|}\right) \approx \frac{4}{k}\left(\frac{\pi^2\beta}{4} - \frac{\pi^4\beta^2}{48} + 2\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\pi\beta}{4l}\right)^2\right) = \frac{\pi^2\beta}{k} \tag{92}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\pi^2\beta}{k} + O(\beta^3)} \tag{93}$$

- «Сильный» потенциал $\beta \gg 1$.
  Фазовые сдвиги:
$$\boxed{\delta_l = \frac{\pi}{2}(|l| - \sqrt{l^2+\beta})} \tag{94}$$
  Сечение рассеяния:
$$\sigma = \frac{4}{k}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(|l| - \sqrt{l^2+\beta})\right) \approx \frac{8}{k}\int\limits_0^{\infty} dl\,\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(l - \sqrt{l^2+\beta})\right) \tag{95}$$
  Пусть $u = \frac{\pi}{2}(l - \sqrt{l^2+\beta})$, тогда
$$\sigma = \frac{8}{k}\int\limits_{-\sqrt{\beta}}^{0} du\left(\frac{1}{\pi} + \frac{\pi\beta}{4u^2}\right)\sin^2 u \approx \frac{8}{k}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\pi} + \frac{\pi\beta}{4}\frac{\pi}{2} + O(1)\right) = \frac{\pi^2\beta}{k} + O(\sqrt{\beta}) \tag{96}$$
$$\boxed{\sigma = \frac{\pi^2\beta}{k} + O(\sqrt{\beta})} \tag{97}$$

В разных предельных случаях получился одинаковый ответ. Возможно, что при любых β ответ
$$\boxed{\sigma = \frac{\pi^2\beta}{k}} \tag{98}$$

Задача 3 (30 баллов)
Найдите точное выражение для произвольного парциального сечения рассеяния на твёрдом шаре σ_l. Исследуйте полученную формулу в следующих предельных случаях:

- **(15 баллов)** Оцените вклад p-канала для рассеяния медленных частиц;
- **(15 баллов)** Определите полное сечение рассеяния для быстрых частиц.

Решение.
Уравнение Шрёдингера для радиальной компоненты волновой функции:
$$R''_{kl}(r) + \frac{2}{r}R'_{kl}(r) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R_{kl}(r) = 0 \tag{99}$$
Введём замену $R_{kl}(r) = \frac{Q_{kl}(r)}{\sqrt{r}}$.
$$R'_{kl}(r) = \frac{Q'_{kl}(r)}{\sqrt{r}} - \frac{Q_{kl}(r)}{2r^{\frac{3}{2}}}, \quad R''_{kl}(r) = \frac{Q''_{kl}(r)}{\sqrt{r}} - \frac{Q'_{kl}(r)}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{3Q_{kl}(r)}{4r^{\frac{5}{2}}} \tag{100}$$
$$\frac{Q''_{kl}(r)}{\sqrt{r}} - \frac{Q'_{kl}(r)}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{3Q_{kl}(r)}{4r^{\frac{5}{2}}} + \frac{2Q'_{kl}(r)}{r^{\frac{3}{2}}} - \frac{Q_{kl}(r)}{r^{\frac{5}{2}}} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\frac{Q_{kl}(r)}{\sqrt{r}} = 0 \tag{101}$$
$$Q''_{kl}(r) + \frac{Q'_{kl}(r)}{r} - \frac{Q_{kl}(r)}{4r^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)Q_{kl}(r) = 0 \tag{102}$$
$$Q''_{kl}(kr) + \frac{Q'_{kl}(kr)}{kr} + \left(1 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{(kr)^2}\right)Q_{kl}(kr) = 0 \tag{103}$$

Получилось уравнение Бесселя с положительной энергией.

$$Q_{kl}(kr) = C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(kr) + C_2 Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) \tag{104}$$

Граничное условие:

$$Q_{kl}(ka) = 0 \to \frac{C_2}{C_1} = -\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)} \tag{105}$$

Асимптотика при $kr \gg 1$:

$$J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi(l+\frac{1}{2})}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) \tag{106}$$

$$Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi(l+\frac{1}{2})}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) \tag{107}$$

$$Q_{kl}(kr) \approx C\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right) \tag{108}$$

$$\tan\delta_l = -\frac{C_2}{C_1} = \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)} \tag{109}$$

$$\sin^2\delta_l = \frac{J^2_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J^2_{l+\frac{1}{2}}(ka) + Y^2_{l+\frac{1}{2}}(ka)} \tag{110}$$

$$\boxed{\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l = \frac{4\pi(2l+1)}{k^2}\frac{J^2_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J^2_{l+\frac{1}{2}}(ka) + Y^2_{l+\frac{1}{2}}(ka)}} \tag{111}$$

Рассмотрим предельные случаи:

- Медленные частицы $ka \ll 1$.
  Асимптотика функций Бесселя и Неймана:

$$J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \approx \frac{1}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\left(\frac{ka}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}}, \quad Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) \approx -\frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\pi}\left(\frac{2}{ka}\right)^{l+\frac{1}{2}} \tag{112}$$

  Вклад p-канала:

$$\sigma_1 = \frac{12\pi}{k^2}\frac{\frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})^2}\left(\frac{ka}{2}\right)^3}{\frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})^2}\left(\frac{ka}{2}\right)^3 + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})^2}{\pi^2}\left(\frac{2}{ka}\right)^3} \approx \frac{12\pi}{k^2}\frac{\pi^2}{\Gamma(\frac{3}{2})^2\Gamma(\frac{5}{2})^2}\left(\frac{ka}{2}\right)^6 = \frac{12\pi}{k^2}\frac{\pi^2}{\frac{\pi}{4}\frac{9\pi}{16}2^6}k^6a^6 \tag{113}$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{4\pi}{3}k^4a^6} \tag{114}$$

- Быстрые частицы $ka \gg 1$.
  Граничное условие:

$$Q_{kl}(ka) \approx C\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(ka - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right) = 0 \to ka - \frac{\pi l}{2} + \delta_l = 0 \tag{115}$$

$$\delta_l = \frac{\pi l}{2} - ka \to \sin^2\delta_l = \frac{1-\cos 2\delta_l}{2} = \frac{1-(-1)^l\cos 2ka}{2} \tag{116}$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum(2l+1)\sin^2\delta_l \approx \frac{4\pi}{k^2}\int\limits_0^{ka} dl(2l+1)\frac{1-\cos 2ka}{2} \approx \frac{2\pi}{k^2}\int\limits_0^{ka} dl(2l+1) =$$
$$= \frac{2\pi}{k^2}(k^2a^2+ka) \approx 2\pi a^2 \tag{117}$$

$$\boxed{\sigma = 2\pi a^2} \tag{118}$$

Задача 4 Рассеяние на потенциале $\sim 1/r^3$ (30 баллов).
Используя фазовую теорию, найдите сечение рассеяния достаточно быстрых частиц ($kL \gg 1$) на потенциале $V(r) = \frac{L}{2m(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ при дополнительных предположениях:

1. **(15 баллов)** В случае $kL \ll \frac{L^2}{a^2}$. *Указание*: параметрически главный вклад в сечение приходит с моментов $l \gg (kL)^{1/3}$. Покажите, что вкладом от моментов $l \ll (kL)^{1/3}$ можно пренебречь.

2. **(15 баллов)** В случае $kL \gg \frac{L^2}{a^2}$. *Указание*: вычислите вклад моментов $l \gg (kL)^{1/3}$. Сравните результат с ответом, который получается из Борновского приближения. Применимо ли оно в данном случае?

Решение.

1. Случай $kL \ll \frac{L^2}{a^2}$.
Квазиклассическое выражение для фазовых сдвигов:

$$\delta_l = \int\limits_{r_0}^{\infty} dr\left(\sqrt{k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2mV(r)} - k\right) - kr_0 + \frac{\pi l}{2} + \frac{\pi}{4} \tag{119}$$

Разложение:
$$\delta_l = -\int\limits_{r_0}^{\infty} dr\frac{mV(r)}{\sqrt{k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}}}, \quad r_0 = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} \approx \frac{l}{k} \tag{120}$$

В последнем равенстве использвалось, что $l \gg 1$. Это и то, что $r_0 \gg a$ далее будет показано. При $r \gg a$:
$$V(r) \approx \frac{L}{2mr^3} \tag{121}$$

$$\delta_l = \int\limits_{r_0}^{\infty} dr\frac{L}{2r^3\sqrt{k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}}} = \frac{L}{4l(l+1)}\int\limits_{\frac{l}{k}}^{\infty}\frac{d(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2})}{\sqrt{k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}}} = \frac{Lk}{2l(l+1)} \approx \frac{Lk}{2l^2} \tag{122}$$

$\delta_l \sim 1$ при $kL \sim l^2$. Поскольку частицы достаточно быстрые $kL \gg 1$, то и $l \gg 1$.

$$l^3 \sim lkL \gg kL \to l \gg (kL)^{\frac{1}{3}} \tag{123}$$

Покажем, что $r_0 \gg a$.

$$ka^2 \ll L \to (ka)^2 \ll kL \sim l^2 \to \frac{r_0}{a} = \frac{l}{ka} \gg 1 \tag{124}$$

Сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} \int_0^{\infty} dl 2l \sin^2 \frac{Lk}{2l^2} = \frac{\pi^2 L}{4k} \tag{125}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\pi^2 L}{4k}} \tag{126}$$

2. Случай $kL \gg \frac{L^2}{a^2}$.
   Фазовые сдвиги:

$$\delta_l = \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{L}{2(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}}} = \frac{L}{2al} \int_1^{\sqrt{1+(\frac{ka}{l})^2}} \frac{udu}{u^3 \sqrt{1+(\frac{ka}{l})^2 - u^2}}, \quad u = 1 + \frac{a^2}{r^2} \tag{127}$$

Сделаем замену $v = \frac{1+(\frac{ka}{l})^2}{u^2} - 1$ и получим

$$\delta_l = \frac{L}{4al} \int_0^{\frac{k^2a^2}{l^2}} \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{kL}{2(l^2 + k^2a^2)} \tag{128}$$

В борновском приближении:

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi} \tilde{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = -\frac{m}{k \sin \frac{\theta}{2}} \int_0^{\infty} drr \sin\left(2kr \sin \frac{\theta}{2}\right) V(r) \tag{129}$$

$$f(\theta) = -\frac{L}{2k \sin \frac{\theta}{2}} \int_0^{\infty} \frac{r \sin 2kr \sin \frac{\theta}{2}}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dr \approx L \sqrt{\frac{\pi}{ka \sin \frac{\theta}{2}}} e^{-ka \sin \frac{\theta}{2}} \tag{130}$$

Сечение рассеяния:

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} L^2 \frac{\pi e^{-2ka \sin \frac{\theta}{2}}}{ka \sin \frac{\theta}{2}} \sin\theta d\theta \approx \frac{2\pi^2 L^2}{ka} \int_0^{\pi} \frac{e^{-ka\theta}}{\frac{\theta}{2}} \theta d\theta \tag{131}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{4\pi^2 L^2}{k^2 a^2}} \tag{132}$$

3 Открытые двухуровневые системы

Задачи (100 баллов)

Задача 1. Флуктуационно-диссипационная теорема (15 баллов)

Вне зависимости от происхождения индуцированного окружающей средой шума $\hat{\Phi}(t)$, на его корреляционные функции можно вывести соотношения самого общего вида, использующие лишь следующие общие предположения: гамильтониан $\hat{H}_e$ не зависит от времени; и матрица плотности окружающей среды имеет вид $\hat{\rho}_e = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_e}$.

1. Используя формальное сходство между матрицей плотности и оператором эволюции в мнимом времени, покажите, что имеется связь на корреляционные функции $S_<(t) = S_>(t-i\beta)$. Что это означает для их фурье-образов, $S_<(\omega)$ и $S_>(\omega)$?

2. Определим «спектральную плотность» как $J(\omega) = \frac{1}{2}(S_>(\omega) - S_<(\omega))$, и Келдышевский коррелятор как $S_K(t_1-t_2) = \left\langle \left\{ \hat{\Phi}(t_1), \hat{\Phi}(t_2) \right\} \right\rangle$. Как связаны $S_K(\omega)$ и $J(\omega)$?

Решение.

1.
$$n_B(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega}-1}, \quad n_B(\omega)+1 = -n_B(-\omega) \tag{133}$$

Корреляционные функции:

$$S_>(t) = \int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} J(\omega)((n_B(\omega)+1)e^{-i\omega t} + n_B(\omega)e^{i\omega t}), \quad S_>(\omega) = 2\tilde{J}(\omega)(n_B(\omega)+1) \tag{134}$$

$$S_<(t) = \int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} J(\omega)(n_B(\omega)e^{-i\omega t} + (n_B(\omega)+1)e^{i\omega t}), \quad S_<(\omega) = 2\tilde{J}(\omega)n_B(\omega) \tag{135}$$

где $\tilde{J}(\omega) = J(\omega) - J(-\omega)$.

$$S_>(t-i\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} J(\omega)((n_B(\omega)+1)\exp(-i\omega t - \beta\omega) + n_B(\omega)\exp(i\omega t + \beta\omega)) =$$
$$= \int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} J(\omega) \left(\frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega}-1} e^{-i\omega t - \beta\omega} + \frac{1}{e^{\beta\omega}-1} e^{-i\omega t + \beta\omega} \right) = \int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} J(\omega) \left(\frac{1}{e^{\beta\omega}-1} e^{-i\omega t} + \frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega}-1} e^{-i\omega t} \right) =$$
$$= \int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} J(\omega)(n_B(\omega)e^{-i\omega t} + (n_B(\omega)+1)e^{i\omega t}) = S_<(t) \tag{136}$$

$$\boxed{S_>(t-i\beta) = S_<(t)} \tag{137}$$

Покажем, что это означает для фурье-образов:

$$S_<(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt S_<(t) e^{i\omega t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt S_>(t-i\beta) e^{i\omega(t-i\beta+i\beta)} = S_>(\omega)e^{-\omega\beta} \tag{138}$$

$$\boxed{\frac{S_<(\omega)}{S_>(\omega)} = e^{-\omega\beta}} \tag{139}$$

Это же равенство можно получить и из (134) и (135).

2.
$$J(\omega) = \frac{1}{2}(S_>(\omega) - S_<(\omega)) \tag{140}$$

$$S_K(t) = S_>(t) + S_<(t) \tag{141}$$

$$\frac{S_<(\omega)}{S_>(\omega)} = e^{-\omega\beta} \tag{142}$$

$$\boxed{S_K(\omega) = 2J(\omega)\coth\left(\frac{\omega\beta}{2}\right)} \tag{143}$$

Задача 2. Релаксация (20 баллов)
Полученное на семинаре время релаксации T_1 для спин-бозонной модели, описываемой гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \sum_n \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \hat{\sigma}_x\hat{\Phi}, \quad \hat{\Phi} = \sum_n \lambda_n(\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) \tag{144}$$

можно просто интерпретировать на языке золотого правила Ферми.

1. Считая, что все осцилляторы находятся в квантовом состоянии с фиксированными числами заполнения n_n, вычислите частоту переходов $w_{i\to f} = w_{\uparrow\to\downarrow}$ и $w_{\downarrow\to\uparrow}$.

2. Проведите усреднение полученных величин по Гиббсовскому ансамблю для осцилляторов $\hat{\rho}_e = \frac{1}{Z}e^{-\beta\hat{H}_e}$.

3. Релаксационная динамика, описываемая золотым правилом Ферми, может быть сведена к классическому «кинетическому уравнению»:

$$\begin{cases} \frac{dP_\uparrow(t)}{dt} = -w_{\uparrow\to\downarrow}P_\uparrow(t) + w_{\downarrow\to\uparrow}P_\downarrow(t) \\ \frac{dP_\downarrow(t)}{dt} = -w_{\downarrow\to\uparrow}P_\downarrow(t) + w_{\uparrow\to\downarrow}P_\uparrow(t) \end{cases} \tag{145}$$

   Исходя из такого уравнения, выразите время релаксации системы через величины $w_{\uparrow\to\downarrow}$ и $w_{\downarrow\to\uparrow}$ и сравните со временем релаксации, найденным на семинаре.

Задача 3. Чистая дефазирока (50 баллов)
Исследуйте эволюцию матрицы плотности двухуровневой системы, взаимодействующую с резервуаром (набором осцилляторов). Система описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = -\frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \sum_n \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \hat{\sigma}_z\hat{\Phi}, \quad \hat{\Phi} = \sum_n \lambda_n(\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) \tag{146}$$

1. Перейдите к представлению взаимодействия. Оператор эволюции в представлении взаимодействия записывается при помощи $\mathcal{T}$-упорядоченной экспоненты:

$$\hat{S}(t,t_0) = \hat{\mathcal{T}}\left\{\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}\hat{V}(\tau)d\tau\right)\right\} \tag{147}$$

   Гамильтониан в различные моменты времени не коммутирует сам с собой, поэтому $\mathcal{T}$-упорядочение убрать нельзя. Однако задачу можно значительно упростить, используя тот факт, что гамильтониан в различные моменты времени коммутирует на число:

$$[\hat{V}(t_1), \hat{V}(t_2)] = i\phi(t_1,t_2) \tag{148}$$

   Используя этот факт, покажите, что знак $\mathcal{T}$-упорядочения можно снять ценой дополнительной добавки:

$$\hat{S}(t,t_0) = e^{i\Phi(t,t_0)}\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}\hat{V}(\tau)d\tau\right) \tag{149}$$

Указание: это соотношение можно вывести «по индукции», рассмотрев $\hat{S}(t+\delta t, t_0) = \hat{S}(t+\delta t, t)\hat{S}(t, t_0)$ для $\delta t \to 0$, и объединив экспоненты при помощи формулы **Бейкера-Кэмбелла-Хаусдорфа**:

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp\left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right), \quad [\hat{A}, \hat{B}] = \text{const} \tag{150}$$

2. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ матрица плотности системы имела вид $\hat{\rho}_{tot}(t_0) = \hat{\rho}_s(t_0) \otimes \hat{\rho}_e(t_0)$, и резервуар находится в равновесии при температуре T: $\hat{\rho}_e(t_0) = \frac{1}{Z}e^{-\beta \hat{H}_0^{(e)}}$. Вычислите редуцированную матрицу плотности в произвольный момент времени:

$$\hat{\rho}_s(t) = \mathrm{Tr}_e(\hat{S}(t, t_0)\hat{\rho}_s(t_0)\hat{\rho}_e\hat{S}(t_0, t)) \tag{151}$$

Указание: для усреднения по степеням бани вам может пригодиться тождество из задачи 6.1.

3. Поскольку величина $\hat{\sigma}_z$ в данной задаче коммутирует с гамильтонианом, никакой релаксации наблюдаться не будет. Поэтому вся динамика сведётся к следующей временной зависимости матрицы плотности:

$$\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}\exp(-\Gamma(t)) \\ \rho_{21}\exp(-\Gamma(t)) & \rho_{22} \end{pmatrix} \tag{152}$$

Найдите выражение для **функции декогеренции** $\Gamma(t)$.

Решение.

1. Докажем соотношение $\hat{S}(t, t_0) = e^{i\Phi(t,t_0)}\exp\left(-i\int\limits_{t_0}^{t}\hat{V}(\tau)d\tau\right)$ по индукции.

   (a) База индукции. Пусть соотношение верно для $t = t_0 + \delta t, \delta t \to 0$.

$$\hat{S}(t_0 + \delta t, t_0) = e^{i\Phi(t_0+\delta t, t_0)}\exp\left(-i\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta t}\hat{V}(\tau)d\tau\right) = \exp\left(-i\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta t}\hat{V}(\tau)d\tau\right) \tag{153}$$

$$\boxed{\Phi(t_0, t_0) = 0} \tag{154}$$

   (b) Пусть верно для момента t:

$$\hat{S}(t, t_0) = e^{i\Phi(t,t_0)}\exp\left(-i\int\limits_{t_0}^{t}\hat{V}(\tau)d\tau\right) \tag{155}$$

(c) Проверим, что выполняется для момента $t + \delta t$:

$$\hat{S}(t+\delta t, t_0) = e^{i\Phi(t,t_0)} \exp\left(-i \int\limits_{t_0}^{t+\delta t} \hat{V}(\tau) d\tau\right) =$$

$$= e^{i\Phi(t,t_0)} \exp\left(-i\hat{V}(t)\delta t\right) \exp\left(-i\int\limits_{t_0}^{t} \hat{V}(\tau)d\tau\right) =$$

$$= e^{i\Phi(t,t_0)} \exp\left(-i\int\limits_{t_0}^{t+\delta t} \hat{V}(\tau)d\tau - \frac{i}{2}\left[V(t)\delta t, \int\limits_{t_0}^{t} V(\tau)d\tau\right]\right) =$$

$$= e^{i\Phi(t,t_0) - \frac{i\delta t}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)d\tau} \exp\left(-i\int\limits_{t_0}^{t+\delta t} \hat{V}(\tau)d\tau\right) = e^{i\Phi(t+\delta t,t_0)} \exp\left(-i\int\limits_{t_0}^{t+\delta t} \hat{V}(\tau)d\tau\right) \quad (156)$$

$$\Phi(t+\delta t, t_0) = \Phi(t,t_0) - \frac{\delta t}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)d\tau \to \frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = -\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)d\tau \quad (157)$$

$$\boxed{\hat{S}(t,t_0) = e^{i\Phi(t,t_0)} \exp\left(-i\int\limits_{t_0}^{t}\hat{V}(\tau)d\tau\right), \quad \Phi(t,t_0) = -\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\eta}\phi(\eta,\tau)d\tau d\eta} \quad (158)$$

2. Из определения коммутатора:

$$\phi(t_1,t_2) = -\phi(t_2,t_1) \to \Phi(t,0) = \Phi(-t,0) \quad (159)$$

$$\hat{\rho}_s(t) = \mathrm{Tr}_e(\hat{S}(t,t_0)\hat{\rho}_s(t_0)\hat{\rho}_e\hat{S}(t_0,t)) = e^{2i\Phi(t,t_0)}\mathrm{Tr}_e(e^{-i\int_{t_0}^{t}\hat{V}(\tau)d\tau}\hat{\rho}_s(t_0)\hat{\rho}_e e^{i\int_{t_0}^{t}\hat{V}(\tau)d\tau}) \quad (160)$$

$$\hat{V} = \hat{\sigma}_z\sum_n \lambda_n(a_n e^{-i\omega_n t} + a_n^\dagger e^{i\omega_n t}) \quad (161)$$

$$S = -i\int\limits_{t_0}^{t}\hat{V}(\tau)d\tau = \hat{\sigma}_z\sum_n\frac{\lambda_n}{\omega_n}(a_n(e^{-i\omega_n t_0} - e^{-i\omega_n t}) + a_n^\dagger(e^{i\omega_n t} - e^{i\omega_n t_0})) \quad (162)$$

$$\hat{\rho}_s(t) = e^{2i\Phi(t,t_0)}\mathrm{Tr}_e(e^S\hat{\rho}_s(t_0)\hat{\rho}_e e^{-S}) \quad (163)$$

$$\hat{\rho}_s(t_0) = \begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix} = \hat{\rho}_d + \rho_0, \quad \hat{\rho}_d = \begin{pmatrix}\rho_{11} & 0\\ 0 & \rho_{22}\end{pmatrix}, \quad \hat{\rho}_0 = \begin{pmatrix}0 & \rho_{12}\\ \rho_{21} & 0\end{pmatrix} \quad (164)$$

$$[\rho_d, \sigma_z] = 0 \to [\rho_d, e^S] = 0 \quad (165)$$

$$e^{2i\Phi(t,t_0)}\mathrm{Tr}_e(e^S\hat{\rho}_d\hat{\rho}_e e^{-S}) = e^{2i\Phi(t,t_0)}\mathrm{Tr}_e(\hat{\rho}_d e^S\hat{\rho}_e e^{-S}) = \mathrm{Tr}_e(\hat{\rho}_d\hat{S}(t,t_0)\hat{\rho}_e\hat{S}(t_0,t)) =$$
$$= \mathrm{Tr}_e(\hat{\rho}_d\hat{\rho}_e(t)) = \hat{\rho}_d \quad (166)$$

$$\hat{S} = A\hat{\sigma}_z \to e^{\hat{S}} = \sum_n \frac{A^n}{n!}\hat{\sigma}_z^n = \sum_k \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^{-A} \end{pmatrix} \tag{167}$$

$$e^{2i\Phi(t,t_0)}\mathrm{Tr}_e(e^S\hat{\rho}_0(t_0)e^{-S}e^S\hat{\rho}_e(t_0)e^{-S}) = \mathrm{Tr}_e(e^S\hat{\rho}_0(t_0)e^{-S}\hat{\rho}_e(t)) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}e^{2A} \\ \rho_{21}e^{-2A} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\langle e^{2A}\rangle = e^{2\langle A^2\rangle}, \quad \langle a_n^\dagger a_n\rangle = n_B(\omega_n) = \frac{1}{e^{\beta\omega_n}-1} \tag{168}$$

$$\langle e^{2A}\rangle = \langle e^{-2A}\rangle = \exp\left(4\sum_n \frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2} 2\sin^2\frac{\omega_n(t-t_0)}{2}\coth\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \tag{169}$$

$$\boxed{\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}\exp\left(4\sum\limits_n \frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2}2\sin^2\frac{\omega(t-t_0)}{2}\coth\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \\ \rho_{21}\exp\left(4\sum\limits_n \frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2}2\sin^2\frac{\omega(t-t_0)}{2}\coth\frac{\beta\omega_n}{2}\right) & \rho_{22} \end{pmatrix}}$$

3.

$$\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}\exp(-\Gamma(t)) \\ \rho_{21}\exp(-\Gamma(t)) & \rho_{22} \end{pmatrix} \tag{170}$$

Сравнивая с ответом из предыдущего пункта, получим

$$\Gamma(t) = -4\sum_n \frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2}2\sin^2\frac{\omega_n(t-t_0)}{2}\coth\frac{\beta\omega_n}{2} = 4\sum_n \frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2}(\cos\omega_n(t-t_0)-1)\coth\frac{\beta\omega_n}{2} \tag{171}$$

Спектральная плотность среды:

$$J(\omega) = \pi\sum_n \lambda_n^2\delta(\omega-\omega_n) \tag{172}$$

$t_0 = 0$.

$$\boxed{\Gamma(t) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty d\omega J(\omega)\frac{\cos\omega t - 1}{\omega^2}\coth\frac{\omega}{2T}} \tag{173}$$

Задача 4 (15 баллов)

Используя функцию декогеренции из предыдущей задачи:

$$\Gamma(t) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty d\omega J(\omega)\coth\frac{\omega}{2T}\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}, \tag{174}$$

исследуйте декогеренцию для омической бани, с модельной функцией $J(\omega) = \pi\alpha\omega e^{-\omega/\omega_c}$. Тут ω_c выступает в роли экспоненциальной ультрафиолетовой обрезки, и можно считать $\omega_c \gg T$. *Указание:* для вычисления удобно отделить вклад чисто квантовых флуктуаций (при $T = 0$), который зависит от обрезки ω_c; а затем найти «температурный» вклад, для которого обрезку уже можно выбросить.

Решение.

Рассмотрим вклад чисто квантовых флуктуаций ($T = 0$):

$$\Gamma(t)\Big|_{T=0} = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty d\omega\pi\alpha\omega e^{-\omega/\omega_c}\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2} = 2\alpha\log(1+\omega_c^2t^2) \tag{175}$$

Температурный вклад ($T \neq 0$). Рассмотрим 2 случая:

- $Tt \gg 1.$

$$\Gamma(t) = 4\alpha \int\limits_0^\infty d\omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \frac{1-\cos\omega t}{\omega} \approx 4\alpha \int\limits_0^\infty d\omega \frac{2T}{\omega} \frac{1-\cos\omega t}{\omega} = 4\pi\alpha t T \tag{176}$$

$$\boxed{\Gamma(t) = 4\pi\alpha t T} \tag{177}$$

- $Tt \ll 1.$

$$\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2} \approx \frac{t^2}{2} \tag{178}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(t) - \Gamma(t)\Big|_{T=0} &= 4\alpha \int\limits_0^\infty d\omega \left(\coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) - 1\right) e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \frac{1-\cos\omega t}{\omega} \approx \\ &\approx 4\alpha \int\limits_0^\infty d\omega \left(\coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) - 1\right) e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \frac{\omega t^2}{2} = 4\alpha t^2 \left(T^2 \psi'\left(\frac{T}{\omega_c}\right) - \omega_c^2\right) \end{aligned} \tag{179}$$

$$\Gamma(t) - \Gamma(t)\Big|_{T=0} \approx \frac{2\pi^2 \alpha t^2 T^2}{3} \tag{180}$$

$$\boxed{\Gamma(t) = 2\alpha \log(1 + \omega_c^2 t^2) + \frac{2\pi^2 \alpha t^2 T^2}{3}} \tag{181}$$

4 Модель Калдейры-Леггетта

Задачи (100 баллов)

Задача 1. Модель Рубина (25 баллов)

Рассмотрите тяжёлую частицу массы M, которая соединена с баней, моделируемой одномерным полубесконечным кристаллом. В гармоническом приближении, система описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + V(\hat{X}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{p}_n^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n)^2 \right) + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{X} - \hat{u}_1)^2 \tag{182}$$

Вычислите явный вид спектральной плотности $J(\omega)$, а также вид «диссипативного» ядра $\gamma(t)$.

Решение.

$$\hat{H}_{\text{bath}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{p}_n^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n)^2 \right) \tag{183}$$

Пусть $\hat{u}_0 = 0$, $\hat{u}_{-i} = -\hat{u}_i$, тогда

$$\hat{u}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{u}_n \sin kn, \quad \hat{p}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{p}_n \sin kn \tag{184}$$

$$\hat{u}_n = \int\limits_0^\pi \frac{dk}{\pi} \hat{u}_k \sin kn, \quad \hat{p}_n = \int\limits_0^\pi \frac{dk}{\pi} \hat{p}_k \sin kn \tag{185}$$

$$\hat{H}_{\text{bath}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dkdk'}{\pi^2} \left(\frac{\hat{p}_k \hat{p}_{k'} \sin kn \sin k'n}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{u}_k \hat{u}_{k'} \sin kn \sin k'n + \right.$$
$$\left. + \hat{u}_k \hat{u}_{k'} \sin k(n+1) \sin k'(n+1) - 2\hat{u}_k \hat{u}_{k'} \sin k'n \sin k(n+1)) \right) \quad (186)$$

$$\sin kn \sin k'n = \frac{1}{2}(\cos(k-k')n - \cos(k+k')n) \quad (187)$$

$$\sin k'n \sin k(n+1) = \frac{1}{2}(\cos((k'-k)n-k) - \cos((k'+k)n+k)) =$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(k'-k)n \cos k - \sin(k'-k)n \cos k - \cos((k'+k)n+k)) \quad (188)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos kn = \delta(k) \quad (189)$$

$$\hat{H}_{\text{bath}} = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dkdk'}{\pi} \left(\frac{\hat{p}_k \hat{p}_{k'} \delta(k-k')}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} 2\hat{u}_k \hat{u}_{k'} (1-\cos k) \right) =$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{dk}{\pi} \left(\frac{\hat{p}_k^2}{2m} + m\omega_0^2 \hat{u}_k^2 (1-\cos k) \right) \quad (190)$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{m\omega_0^2}{2}(\hat{X}-\hat{u}_1)^2 - \frac{m\omega_0^2 \hat{u}_1^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 \hat{X}}{2}(\hat{X}-2\hat{u}_1) = \int_0^{\pi} \frac{dk}{\pi} \frac{m\omega_0^2 \hat{X}}{2}(\hat{X}-2\hat{u}_k \sin k) \quad (191)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + V(\hat{X}) + \int_0^{\pi} \frac{dk}{\pi} \left(\frac{\hat{p}_k^2}{2m} + m\omega_0^2 \hat{u}_k^2 (1-\cos k) + \frac{m\omega_0^2 \hat{X}}{2}(\hat{X}-2\hat{u}_k \sin k) \right) \quad (192)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + V(\hat{X}) + \frac{m\omega_0^2 \hat{X}^2}{2} + \int_0^{\pi} \frac{dk}{\pi} \left(\frac{\hat{p}_k^2}{2m} + m\omega_0^2 \hat{u}_k^2 (1-\cos k) - m\omega_0^2 \hat{X} \hat{u}_k \sin k \right) \quad (193)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + V(\hat{X}) + \frac{m\omega_0^2 \hat{X}^2}{2} + \int_0^{\pi} \frac{dk}{\pi} \left(\frac{\hat{p}_k^2}{2m} + \frac{m\omega^2(k) \hat{u}_k^2}{2} - c(k) \hat{X} \hat{u}_k \right) \quad (194)$$

$$\omega(k) = 2\omega_0 \sin \frac{k}{2}, \quad c(k) = m\omega_0^2 \sin k \quad (195)$$

Спектральная плотность:

$$J(\omega) = \int_0^{\pi} dk \frac{c^2(k)}{2m\omega(k)} \delta(\omega - \omega(k)) = \frac{m\omega_0^3}{4} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 k}{\sin \frac{k}{2}} \delta\left(\omega - 2\omega_0 \sin \frac{k}{2}\right) dk =$$
$$= \frac{m\omega_0^3}{2} \int_0^{\pi} dk \sin \frac{k}{2} \cos^2 \frac{k}{2} \frac{\delta(k - 2\arcsin \frac{\omega}{2\omega_0})}{|\omega_0 \cos \frac{k}{2}|} \quad (196)$$

$$\boxed{J(\omega) = \frac{m\omega_0\omega}{4}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}}\theta\left(1-\frac{\omega}{2\omega_0}\right)} \tag{197}$$

«Диссипативное ядро»:

$$\gamma(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\omega}J(\omega)\cos\omega t = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\omega_0} d\omega\frac{m\omega_0}{4}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}}\cos\omega t \tag{198}$$

$$\boxed{\gamma(t) = \frac{m\omega_0}{4t}J_1(2\omega_0 t)} \tag{199}$$

Задача 2. Кинетическое уравнение (35 баллов)

Используя приближение Борна-Маркова для омической бани со спектральным весом $J(\omega) = \eta\omega$, выведите уравнение на преобразование Вигнера матрицы плотности $\rho_W(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$.

Задача 3. Расплывание волнового пакета (что, опять?) (40 баллов)

Упражнение. Преамбула (5 баллов)

Как известно из квантовой механики, волновые пакеты имеют обыкновение расплываться. С другой стороны, как известно, электрон имеет массу $m = 9.1\cdot 10^{-28}g$, и его «классический радиус» $x_0 \simeq 10^{-13}\text{cm}$ (определяемый как его комптоновская длина волны). Пусть в начальный момент времени электрон представлял собой ровно такой волновой пакет:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi x_0^2)^{1/4}}e^{-x^2/4x_0^2} \tag{200}$$

Найдите его ширину через время $t = 1\mu s$.

Решение.

Перейдём в импульсное представление:

$$\Psi(p) = \int dx e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\psi(x) = (8\pi x_0^2)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{p^2x_0^2}{\hbar^2}} \tag{201}$$

Нестационарное уравнение Шрёдингера в импульсном представлении:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(p,t)}{\partial t} = \langle p|\,\hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle = \frac{p^2}{2m}\Psi(p,t), \quad \Psi(p,0) = \Psi(p) \tag{202}$$

$$\Psi(p,t) = \Psi(p)\exp\left(-\frac{ip^2}{2m\hbar}t\right) \tag{203}$$

$$\psi(x,t) = \int dx e^{\frac{ipx}{\hbar}}\Psi(p,t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4(x_0^2+\frac{i\hbar}{2m}t)}\right)}{\sqrt{2x_0+\frac{i\hbar t}{mx_0}}} \tag{204}$$

$$\text{Re}\left(\frac{1}{x_0^2+\frac{i\hbar t}{2m}}\right) = \text{Re}\left(\frac{x_0^2-\frac{i\hbar t}{2m}}{x_0^4+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2}}\right) = \frac{1}{x_0^2+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2x_0^2}} \tag{205}$$

$$\Delta x^2(t) = x_0^2 + \frac{\hbar^2t^2}{4m^2x_0^2} \approx \frac{\hbar^2t^2}{4m^2x_0^2} \tag{206}$$

$$\boxed{\Delta x(t) = \frac{\hbar t}{2mx_0} = 5.8\cdot 10^6\text{cm}} \tag{207}$$

Задача (35 баллов)
В предыдущем упражнении вы должны были получить ответ, который должен был вас удивить и насторожить. Рассмотрите теперь движение свободного электрона, взаимодействующего с окружающей средой в рамках модели Калдейры-Леггетта с омической баней. Получите асимптотические выражения для $\langle \hat{x}^2(t) \rangle$ в следующих режимах:

- Классическая диффузия: $Tt \gg 1$
- Квантовая диффузия: $Tt \ll 1$

Чтобы не рассматривать «баллистические» эффекты, оценённые в «преамбуле», можете также считать $\omega_c \gg \gamma \gg t^{-1}$.
Решение.

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} = \zeta(t) \to m\dot{v} + \eta v = \zeta(t) \tag{208}$$

$$v(t) = e^{-\frac{\eta t}{m}} \left(v_0 + \int_0^t d\tau \frac{\zeta(\tau)}{m} e^{\frac{\eta\tau}{m}} \right), \quad v(0) = 0 \tag{209}$$

$$\dot{x}^2(t) = e^{-\frac{2\eta t}{m}} \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \frac{e^{\frac{\eta(\tau_1+\tau_2)}{m}}}{m^2} \zeta(\tau_1)\zeta(\tau_2) \tag{210}$$

5 Функциональный интеграл

Упражнение (10 баллов)
Восстановите координатную зависимость пропагатора квантового гармонического осциллятора $G(x, y, T)$. Исходя из полученного выражения, найдите его спектр.
Решение.
Лагранжиан гармонического осциллятора:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \tag{211}$$

$$G^R(x, y, T) = \int_{x(0)=x}^{x(T)=y} \mathcal{D}[x(t)] e^{\frac{iS[x(t)]}{\hbar}}, \quad \mathcal{D}[x(t)] = \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^{N-1} \int dx_k \tag{212}$$

Сделаем подстановку в функциональный интеграл $x(t) = x_{\text{cl}}(t) + z(t)$, где $x_{\text{cl}}(t)$ – классическая траектория, удовлетворяющая граничным условиям $x_{\text{cl}}(0) = x$, $x_{\text{cl}}(T) = y$, $z(t)$ – произвольная функция (квантовая поправка) с граничными условиями $z(0) = 0$, $z(T) = 0$. Для систем, у которых действие зависит от x квадратично, выполняется

$$S[x(t)] = S[x_{\text{cl}}(t)] + S[z(t)] \tag{213}$$

$$S[x(t)] = \int_0^T dt \frac{m}{2}(\dot{x}(t)^2 - \omega^2 x(t)^2) = \frac{m}{2}\left(x(t)\dot{x}(t)|_0^T - \int_0^T dt x(t)(\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)) \right) \tag{214}$$

Пусть $\hat{L} = -\partial_t^2 - \omega^2$, тогда

$$S[x(t)] = \frac{m}{2}\left(x(t)\dot{x}(t)|_0^T + \int\limits_0^T dt x\hat{L}x\right) \tag{215}$$

Поскольку на классической траектории $\hat{L}x_{\text{cl}}(t) = 0$, то в случае $x = y = 0$ выполняется $S[x_{\text{cl}}(t)] = 0$ и

$$G^R(0,0,T) = \int\limits_{x(0)=0}^{x(T)=0} \mathcal{D}[z(t)]e^{\frac{iS[z(t)]}{\hbar}} \to G^R(x,y,T) = G^R(0,0,T)e^{\frac{iS[x_{\text{cl}}(t)]}{\hbar}} \tag{216}$$

Определим действие на классической траектории:

$$\hat{L}x_{\text{cl}}(t) = 0 \to x_{\text{cl}}(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t \tag{217}$$

$$x_{\text{cl}}(0) = b = x, \quad x_{\text{cl}}(T) = a\sin\omega T + b\cos\omega T = y \tag{218}$$

$$x_{\text{cl}}(t) = \frac{y - x\cos\omega T}{\sin\omega T}\sin\omega t + x\cos\omega t, \quad \dot{x}_{\text{cl}}(t) = \frac{y - x\cos\omega T}{\sin\omega T}\omega\cos\omega t - x\omega\sin\omega t \tag{219}$$

$$\begin{aligned} S[x_{\text{cl}}(t)] = \frac{m}{2}(x_{\text{cl}}(T)\dot{x}_{\text{cl}}(T) - x_{\text{cl}}(0)\dot{x}_{\text{cl}}(0)) = \frac{m}{2}\Bigg(\frac{y - x\cos\omega T}{\sin\omega T}y\omega\cos\omega T - xy\omega\sin\omega T - \\ - \frac{y - x\cos\omega T}{\sin\omega T}x\omega\Bigg) = \frac{m\omega}{2}\frac{y^2\cos\omega T - xy\cos^2\omega T - xy\sin^2\omega T - yx + x^2\cos\omega T}{\sin\omega T} = \\ = \frac{m\omega}{2}\frac{(x^2+y^2)\cos\omega T - 2xy}{\sin\omega T} \end{aligned} \tag{220}$$

Разложим произвольную функцию $z(t)$ по базису собственных функций оператора $\hat{L}$:

$$z(t) = \sum_n c_n z_n(t), \quad \hat{L}z_n(t) = \lambda_n z_n(t) \tag{221}$$

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{\pi n t}{T}, \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \omega^2 \tag{222}$$

$$\mathcal{D}[z(t)] = \mathcal{N}\prod_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dc_n \tag{223}$$

$$S[z(t)] = S\left[\sum_n c_n z_n(t)\right] = \frac{m}{2}\int\limits_0^T dt\left(\sum_n c_n z_n(t)\right)\hat{L}\left(\sum_n c_n z_n(t)\right) \tag{224}$$

В силу ортонормированности набора $z_n(t)$ действие факторизуется:

$$S[z(t)] = \frac{m}{2}\int\limits_0^T dt\left(\sum_n c_n^2\lambda_n z_n^2(t)\right) = \frac{m}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n c_n^2 \tag{225}$$

$$G^R_\omega(0,0,T) = \mathcal{N}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty} dc_n \exp\left(\frac{im}{2\hbar}\lambda_n c_n^2\right) = \mathcal{N}\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\pi i\hbar}{m\left(\frac{\pi^2 n^2}{T^2}-\omega^2\right)}} \tag{226}$$

$$G^R_0(0,0,T) = \mathcal{N}\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\pi i\hbar T^2}{m\pi^2 n^2}} \tag{227}$$

$$\frac{G^R_\omega(0,0,T)}{G^R_0(0,0,T)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega^2T^2}{\pi^2n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\omega T}{\sin\omega T}}, \quad G^R_0(0,0,T) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}} \tag{228}$$

$$G^R_\omega(0,0,T) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}\sqrt{\frac{\omega T}{\sin\omega T}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}} \tag{229}$$

$$\boxed{G^R_\omega(x,y,T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}}\exp\left(\frac{im\omega((x^2+y^2)\cos\omega T - 2xy)}{2\hbar\sin\omega T}\right)} \tag{230}$$

Из знания запаздывающего пропагатора можно извлечь спектр гамильтониана.

$$G^R_\omega(x,y,T) = \langle y|e^{-\frac{i\hat{H}T}{\hbar}}|x\rangle = \sum_n \langle y|n\rangle\, e^{-\frac{iE_nT}{\hbar}}\,\langle n|x\rangle = \sum_n \psi_n^*(x)\psi_n(y)e^{-\frac{iE_nT}{\hbar}} \tag{231}$$

Воспользуемся разложениями:

$$\frac{1}{\sqrt{2i\sin\omega T}} = e^{-\frac{i\omega T}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} C^n_{-\frac{1}{2}} e^{-2ni\omega T}, \quad -\frac{i}{2\sin\omega T} = e^{-i\omega T}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2ni\omega T} \tag{232}$$

$$i\cot\omega T = -\frac{1+e^{-2i\omega T}}{1-e^{-2i\omega T}} = -\left(1+e^{-2i\omega T}\right)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2ni\omega T} = -2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2in\omega T} \tag{233}$$

$$G^R_\omega(x,y,T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C^n_{-\frac{1}{2}} e^{-2i\omega nT}\right)\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^q\left(-(x^2+y^2)\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-2i\omega jT}\right)+\right.$$
$$\left. +2xye^{-i\omega T}\sum_{j=0}^{\infty} e^{-2i\omega jT}\right)^q \tag{234}$$

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} \tag{235}$$

Также получим спектр, рассмотрев следующую величину

$$\mathrm{Tr}\, G^R_\omega(x,y,T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx G^R_\omega(x,x,T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{im\omega x^2}{\hbar\sin\omega T}(\cos\omega T - 1)\right)dx =$$
$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}}\sqrt{\frac{\hbar\sin\omega T}{m\omega(1-\cos\omega T)}}\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4} = \frac{1}{2i}\frac{1}{\sin\frac{\omega T}{2}} = e^{-\frac{i\omega T}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{iE_nT}{\hbar}}$$

Задача 1. Пропагатор свободной частицы (15 баллов)
Вычислите интеграл для запаздывающего пропагатора свободной частицы явно, используя дискретизацию по времени:

$$G(x,y,t>0)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{k=1}^{N-1}dx_k\exp\left(i\epsilon\sum_{k=1}^{N}\frac{m}{2\hbar}\left(\frac{x_k-x_{k-1}}{\epsilon}\right)^2\right),\quad x_0\equiv x,\quad x_N\equiv y \tag{236}$$

Решение. Вычислим интеграл по индукции.

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{mi}{2\hbar\epsilon}((x_2-x_1)^2+(x_1-x_0)^2)\right)dx_1=$$
$$=\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{mi}{2\pi\hbar\epsilon}\left(2\left(x_1-\frac{x_0+x_2}{2}\right)^2+\frac{(x_2-x_0)^2}{2}\right)\right)dx_1=\frac{\exp(\frac{mi}{2\cdot2\hbar\epsilon}(x_2-x_0)^2)}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{2\cdot2\pi\hbar i\epsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{mi}{2\hbar\epsilon}\left((x_3-x_2)^2+\frac{(x_2-x_0)^2}{2}\right)\right)dx_2=$$
$$=\sqrt{\frac{m}{2\cdot2\pi\hbar i\epsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{mi}{2\hbar\epsilon}\left(\frac{3}{2}\left(x_2-\frac{x_0+2x_3}{9}\right)^2+\frac{(x_3-x_0)^2}{3}\right)\right)dx_2=$$
$$=\frac{\exp(\frac{mi}{2\cdot3\hbar\epsilon}(x_3-x_0)^2)}{\sqrt{3}} \tag{237}$$

Для k-го интеграла получим

$$\sqrt{\frac{m}{2k\pi\hbar i\epsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{mi}{2\hbar\epsilon}\left((x_{k+1}-x_k)^2+\frac{(x_k-x_0)^2}{k}\right)\right)dx_k=$$
$$=\sqrt{\frac{m}{2k\pi\hbar i\epsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{mi}{2\hbar\epsilon}\left(\frac{k+1}{k}\left(x_k-\frac{kx_{k+1}+x_0}{k+1}\right)^2+\frac{(x_{k+1}-x_0)^2}{k+1}\right)\right)dx_k=$$
$$=\frac{\exp(\frac{mi}{2(k+1)\hbar\epsilon}(x_{k+1}-x_0)^2)}{\sqrt{k+1}} \tag{238}$$

$$G(x,y,t>0)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon N}}\exp\left(\frac{mi}{2N\hbar\epsilon}(x_N-x_0)^2\right) \tag{239}$$

$$x_0=x,\quad x_N=y,\quad N\epsilon=T \tag{240}$$

$$\boxed{G(x,y,t>0)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}\exp\left(\frac{im(y-x)^2}{2\hbar T}\right)} \tag{241}$$

Задача 2. Частица в магнитном поле (50 баллов)
Вычислите пропагатор квантовой частицы, движущийся в плоскости в постоянном магнитном поле B, перпендикулярном этой плоскости ($\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$):

$$G(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,T)=\int\limits_{\mathbf{r}(0)=\mathbf{R}_1}^{\mathbf{r}(T)=\mathbf{R}_2}\mathcal{D}[\mathbf{r}(t)]\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\int\limits_0^T\left(m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{e}{c}B(x\dot{y}-y\dot{x})\right)dt\right) \tag{242}$$

(сперва убедившись, что данное действие действительно описывает именно эту систему). Используя функцию Грина, найдите спектр соответствующей квантовой задачи (решение которой, напомним, даётся макроскопически вырожденными *уровнями Ландау*).
Подсказка: хотя этот интеграл можно вычислить и непосредственно, может оказаться удобным переход во «вращающуюся систему отсчёта» – провести следующую замену в функциональном интеграле:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\cos\Omega t + y(t)\sin\Omega t, \\ y'(t) = -x(t)\sin\Omega t + y(t)\cos\Omega t \end{cases} \tag{243}$$

и при правильном выборе частоты Ω задача значительно упрощается. Не забудьте о модификации граничных условий из-за такой замены!
Решение.
Сделаем замену:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\cos\Omega t + y(t)\sin\Omega t, \\ y'(t) = -x(t)\sin\Omega t + y(t)\cos\Omega t \end{cases} \tag{244}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t)\cos\Omega t - y'(t)\sin\Omega t, \\ y(t) = x'(t)\sin\Omega t + y'(t)\cos\Omega t \end{cases} \tag{245}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (\dot{x}'(t) - \Omega y'[t])\cos\Omega t - (\dot{y}'(t) + \Omega x'(t))\sin\Omega t, \\ \dot{y}(t) = (\dot{x}'(t) - \Omega y'[t])\sin\Omega t + (\dot{y}'(t) + \Omega x'(t))\cos\Omega t \end{cases} \tag{246}$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = \dot{x}'^2(t) + \dot{y}'^2(t) + \Omega^2(x'^2(t) + y'^2(t)) + 2\Omega(x'(t)\dot{y}'(t) - y'(t)\dot{x}'(t)) \tag{247}$$

$$x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t) = \Omega(x'^2(t) + y'^2(t)) + x'(t)\dot{y}'(t) - \dot{x}'(t)y'(t) \tag{248}$$

$$m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{e}{c}B(x\dot{y} - y\dot{x}) = m(\dot{x}'^2(t) + \dot{y}'^2(t)) + \left(m\Omega^2 + \frac{eB\Omega}{c}\right)(x'^2(t) + y'^2(t)) + \\ + \left(2m\Omega + \frac{eB}{c}\right)(x'(t)\dot{y}'(t) - \dot{x}'(t)y'(t)) \tag{249}$$

Пусть $\Omega = -\frac{eB}{2mc}$, тогда

$$m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{e}{c}B(x\dot{y} - y\dot{x}) = m(\dot{x}'^2(t) + \dot{y}'^2(t)) + \Omega\frac{eB}{2c}(x'^2(t) + y'^2(t)) = m(\dot{x}'^2(t) + \dot{y}'^2(t)) - \\ - \frac{e^2B^2}{4mc^2}(x'^2(t) + y'^2(t)) \tag{250}$$

$$G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, T) = \int\limits_{\mathbf{r}'(0)=\mathbf{R}_1}^{\mathbf{r}'(T)=\mathbf{R}_2} \mathcal{D}[\mathbf{r}'(t)] \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\int\limits_0^T \left(m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) - \frac{e^2B^2}{4mc^2}(x'^2 + y'^2)\right) dt\right) \tag{251}$$

Получился пропагатор с лагранжианом:

$$L = \frac{m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2)}{2} - \frac{e^2B^2}{8mc^2}(x'^2 + y'^2) \tag{252}$$

Получившийся потенциал $V(\mathbf{r}\,') = \frac{e^2B^2}{8mc^2}(x'^2+y'^2)$ – гармонический осциллятор в 2D с частотой $\omega = \frac{eB}{2mc} = \Omega$.

$$G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, T) = \int\limits_{\mathbf{r}\,'(0)=\mathbf{R}_1'}^{\mathbf{r}\,'(T)=\mathbf{R}_2'} \mathcal{D}[\mathbf{r}\,'(t)] e^{\frac{iS[\mathbf{r}'_{\mathrm{cl}}(t)]}{\hbar}} \tag{253}$$

$$\int\limits_{\mathbf{r}'(0)=\mathbf{R}_1'}^{\mathbf{r}'(T)=\mathbf{R}_2'} \mathcal{D}[\mathbf{r}'(t)] = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega T}}\right)^2 = \frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T} \tag{254}$$

$$S[\mathbf{r}'_{\mathrm{cl}}(t)] = \frac{m\omega}{2}\frac{(r'^2(0) + r'^2(T))\cos\omega T - 2\mathbf{r}'(0)\cdot\mathbf{r}'(T)}{\sin\omega T} \tag{255}$$

$$r'^2(0) = x^2(0) + y^2(0) = r^2(0) = R_1^2, \quad r'^2(T) = x^2(T) + y^2(T) = r^2(T) = R_2^2 \tag{256}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(0)\cdot\mathbf{r}'(T) = (x(0)x(T) + y(0)y(T))\cos\Omega T + (x(0)y(T) - x(T)y(0))\sin\Omega T = \\ = (R_{1x}R_{2x} + R_{1y}R_{2y})\cos\Omega T + (R_{1x}R_{2y} - R_{2x}R_{1y})\sin\Omega T\end{aligned} \tag{257}$$

$$S[\mathbf{r}'_{\mathrm{cl}}(t)] = \frac{m\Omega}{2}((R_1^2 + R_2^2)\,\mathrm{ctg}\,\Omega T - 2((R_{1x}R_{2x} + R_{1y}R_{2y})\,\mathrm{ctg}\,\Omega T + (R_{1x}R_{2y} - R_{2x}R_{1y}))) \tag{258}$$

$$S[\mathbf{r}'_{\mathrm{cl}}(t)] = \frac{m\Omega}{2}(((R_{1x} - R_{2x})^2 + (R_{1y} - R_{2y})^2)\,\mathrm{ctg}\,\Omega T - 2(R_{1x}R_{2y} - R_{2x}R_{1y})) \tag{259}$$

$$\boxed{G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, T) = \frac{m\Omega}{2\pi i\hbar\sin\Omega T}\exp\left(\frac{im\Omega}{2\hbar}(((R_{1x} - R_{2x})^2 + (R_{1y} - R_{2y})^2)\,\mathrm{ctg}\,\Omega T - 2(R_{1x}R_{2y} - R_{2x}R_{1y}))\right)}$$

$$\frac{1}{2i\sin\omega T} = e^{-i\omega T}\sum_{l=0}^{\infty} e^{-2i\omega l T}, \quad i\cot\omega T = -\frac{1 + e^{-2i\omega T}}{1 - e^{-2i\omega T}} = -\left(1 + e^{-2i\omega T}\right)\sum_{l=0}^{\infty} e^{-2i\omega l T} = -2\sum_{l=0}^{\infty} e^{-2i\omega l T}$$

Уровни энергии:

$$E_{n_x,n_y} = \frac{eB\hbar}{mc}(n_x + n_y + 1), \quad n_x, n_y \in \mathbb{N}_0 \tag{260}$$

Задача 3. «Мацубаровский» функциональный интеграл (25 баллов)

Рассмотрите квантовую частицу, описываемую гамильтонианом $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$. Если такая частица находится в равновесии при температуре $T = \beta^{-1}$, её матрица плотности имеет вид $\hat{\rho} = \frac{1}{Z}e^{-\beta\hat{H}}$, и её статсумма

$$Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}) \tag{261}$$

Используя аналогию между равновесной матрицей плотности и оператором эволюции в мнимом времени $t = -i\tau \Rightarrow \hat{U}(t) = e^{-\hat{H}\tau}$, постройте представление функционального интеграла для статсуммы Z. Покажите, что интегрирование должно проводиться по всем траекториям в мнимом времени $x(\tau)$, которые периодичны в мнимом времени: $x(\tau+\beta) \equiv x(\tau)$. Полученное выражение при этом должно получаться формальной заменой $t = -i\tau$ в исходном выражении (такая формальная замена носит название *Виковского поворота*).

Решение.

Запаздывающая функция Грина – аплитуда распространения квантовомеханической частицы из точки $\mathbf{x}$ в точку $\mathbf{y}$ за время β:

$$G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \beta) = \langle\mathbf{y}|\hat{U}(\beta)|\mathbf{x}\rangle \tag{262}$$

В гамильтониане импульс и координата разделяются. Разобъём отрезок времени длины β на $N \to \infty$ одинаковых кусочков размера $\epsilon = \frac{\beta}{N} \to 0$ и представим оператор эволюции в виде $\hat{U}(\beta) = \prod_{i=1}^{N} \hat{U}(\epsilon)$. Эволюцию на бесконечно малое время ϵ можно записать в виде $\hat{U}(\epsilon \to 0) = e^{-\hat{H}\epsilon} \approx e^{-\hat{V}\epsilon}e^{-\hat{K}\epsilon}$. Получаем выражение для оператора эволюции в виде произведения $2N$ множителей (удобно каждому приписать своё время $\tau_k = k\epsilon$):

$$\hat{U}(\tau) = e^{-\hat{V}\epsilon}e^{-\hat{K}\epsilon}...e^{-\hat{V}\epsilon}e^{-\hat{K}\epsilon} \tag{263}$$

Вставим после каждого члена $e^{-\hat{K}\epsilon}$ (при $\tau = \tau_k$) единицу в виде разложения по координатному базису $\mathbb{I} = \int d\mathbf{x}_k \left|\mathbf{x}_k\right\rangle \left\langle\mathbf{x}_k\right|$, а после членов $e^{-\hat{V}\epsilon}$ – по импульсному $\hat{I} = \int (d\mathbf{p}_k) \left|\mathbf{p}_k\right\rangle \left\langle\mathbf{p}_k\right|$

$$G^R(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta) = \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mathbf{x}_k \int \prod_{k=1}^{N} (d\mathbf{p}_k) \left\langle\mathbf{y}\right|e^{-\hat{V}\epsilon}\left|\mathbf{p}_N\right\rangle \left\langle\mathbf{p}_N\right|e^{-i\hat{K}\epsilon}\left|\mathbf{x}_{N-1}\right\rangle ... \left\langle\mathbf{x}_1\right|e^{-\hat{V}\epsilon}\left|\mathbf{p}_1\right\rangle \left\langle\mathbf{p}_1\right|e^{-i\hat{K}\epsilon}\left|\mathbf{x}\right\rangle$$

Поскольку операторы $e^{-\hat{V}\epsilon}$ – собственные для координаты, а $e^{-\hat{K}\epsilon}$ – для импульса, то блоки вычисляются:

$$\left\langle\mathbf{x}_k\right|e^{-\hat{V}\epsilon}\left|\mathbf{p}_k\right\rangle \left\langle\mathbf{p}_k\right|e^{-\hat{K}\epsilon}\left|\mathbf{x}_{k-1}\right\rangle = e^{-V(\mathbf{x}_k)\epsilon}e^{i\mathbf{p}_k\mathbf{x}_k}e^{-K(\mathbf{p}_k)\epsilon}e^{-i\mathbf{p}_k\mathbf{x}_{k-1}} \tag{264}$$

$$G^R(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta) = \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mathbf{x}_k \int \prod_{k=1}^{N} (d\mathbf{p}_k) \exp\left(\epsilon \sum_{k=1}^{N}\left(i\mathbf{p}_k \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\epsilon} - \hat{H}(\mathbf{x}_k,\mathbf{p}_k)\right)\right) \tag{265}$$

Возьмём интеграл по импульсам. Кинетическая энергия $K(p) = \frac{p^2}{2m}$, поэтому

$$\int (d\mathbf{p}_k) \exp\left(\epsilon \sum_{k=1}^{N}\left(i\mathbf{p}_k \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\epsilon} - \frac{\mathbf{p}_k^2}{2m}\right)\right) = \left(\frac{m}{2\pi\epsilon}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(-\epsilon\frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\epsilon}\right)^2\right) \tag{266}$$

$$G^R(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta) = \left(\frac{m}{2\pi\epsilon}\right)^{\frac{Nd}{2}} \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mathbf{x}_k \exp\left(-\epsilon \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\epsilon}\right)^2 + V(\mathbf{x}_k)\right)\right) \tag{267}$$

В экспоненте стоит конечная аппроксимация интеграла:

$$\sum_{k=1}^{N} \epsilon \left(\frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\epsilon}\right)^2 + V(\mathbf{x}_k)\right) \approx \int_0^\beta d\tau \left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}(\tau)^2 + V(\mathbf{x}(\tau))\right) \tag{268}$$

Выберем меру интегрирования:

$$\mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] = \left(\frac{m}{2\pi\epsilon}\right)^{\frac{Nd}{2}} \prod_{k=1}^{N-1} d\mathbf{x}_k \tag{269}$$

$$G^R(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta) = \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}}^{\mathbf{x}(\beta)=\mathbf{y}} \mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}(\tau)^2 + V(\mathbf{x}(\tau))\right)\right) \tag{270}$$

Матрица плотности в координатном представлении:

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta) = \left\langle\mathbf{y}\right|\hat{\rho}\left|\mathbf{x}\right\rangle = \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}}^{\mathbf{x}(\beta)=\mathbf{y}} \mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}(\tau)^2 + V(\mathbf{x}(\tau))\right)\right) \tag{271}$$

Статистическая сумма:

$$\boxed{Z = \mathrm{Tr}\rho(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta) = \int d\mathbf{x}\rho(\mathbf{x},\mathbf{x},\beta) = \int d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}}^{\mathbf{x}(\beta)=\mathbf{x}} \mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] \exp\left(-\int\limits_0^\beta d\tau \left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}(\tau)^2 + V(\mathbf{x}(\tau))\right)\right)}$$

Как видно, интегрирование идёт по периодическим траекториям $x(\tau) = x(\tau+\beta)$. Заметим, что полученное выражение получается из исходного при помощи Виковского поворота $t = -i\tau$.

6 Инстантоны и туннелирование

Упражнение. Квазиклассика (30 баллов)
Для двухъямного потенциала, что разбирался на семинаре, вычислите расщепление уровней в квазиклассическом приближении. Насколько квазиклассическое приближение отличается от правильного ответа, даваемого инстантонным вычислением?
Указание: стандартная формула в квазиклассическом приближении гарантирует правильный численный фактор в предэкспоненте; поэтому именно с такой точностью необходимо вычислить и квазиклассическое действие. Обратите внимание, что действие необходимо считать на энергии, отличной от минимума в соответствующей яме; поправка от этого отличия существенна, поскольку она стоит в экспоненте, и имеется серия неравенств $S(0) \gg |S(E) - S(0)| \gg 1$. Несложно убедиться, что эта поправка логарифмическая; причём **вычисление необходимо проводить с точностью до числа под логарифмом** (поскольку это число в конечном итоге модифицирует численный префактор в конечном ответе!).
Сделать это можно следующим образом. Во-первых, технически чуть проще вычислять не само действие $S(E)$, а его производную $\partial S/\partial E$, которая логарифмически расходится при $E \to 0$. Для вычисления численного фактора под логарифмом, предлагается ввести произвольный промежуточный пространственный масштаб Λ, удовлетворяющий серии неравенств $|x_1 + \eta| \ll \Lambda \ll \eta$ (где x_1 – положение левой точки остановки, которая близка к минимуму $-\eta$), и разбить интеграл на два интервала $\int\limits_{x_1}^{\Lambda} + \int\limits_{\Lambda}^{0}$. В первом интеграле первое же неравенство позволяет использовать осцилляторное приближение для потенциала; а во втором интеграле второе неравенство позволяет использовать разложение в ряд Тейлора по энергии. После соответствующих вычислений (с необходимой точностью!), промежуточный масштаб Λ, в силу своей произвольности, из ответа должен сократиться.
Решение.
Гамильтониан:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \lambda(x^2 - \eta^2)^2 \tag{272}$$

Действие в квазиклассическом приближении:

$$S = 2\sqrt{2} \int\limits_{-\eta+\delta\eta}^{0} \sqrt{\lambda(x^2-\eta^2)^2 - E}dx, \quad E = 4\lambda\eta^2\delta\eta^2 \tag{273}$$

Разобьём пределы интегрирования на 2:

$$S=2\sqrt{2}\int\limits_{-\eta+\delta\eta}^{-\eta+\Lambda}\sqrt{\lambda(x^2-\eta^2)^2-E}dx+2\sqrt{2}\int\limits_{-\eta+\Lambda}^{0}\sqrt{\lambda(x^2-\eta^2)^2-E}dx=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_{\delta\eta}^{\Lambda}\sqrt{4\lambda\eta^2y^2-E}dy+2\sqrt{2}\int\limits_{-\eta+\Lambda}^{0}\sqrt{\lambda(x^2-\eta^2)^2-E}dx \quad (274)$$

В 1 интеграле (S_1) работает осцилляторное приближение, поскольку $\Lambda\ll\eta$. Вычислим его, воспользовавшись уазанием:

$$\frac{\partial S_1}{\partial E}=-2\sqrt{2}\int\limits_{\delta\eta}^{\Lambda}\frac{dy}{2\sqrt{4\lambda\eta^2y^2-E}}=-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\lambda}\eta}\int\limits_{1}^{\frac{\Lambda}{\delta\eta}}\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\lambda}\eta}\log\left(\frac{\Lambda}{\delta\eta}+\sqrt{\left(\frac{\Lambda}{\delta\eta}\right)^2-1}\right)$$

$$S_1=-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\lambda}\eta}\int\log\left(\frac{\Lambda}{\delta\eta}+\sqrt{\left(\frac{\Lambda}{\delta\eta}\right)^2-1}\right)dE,\quad dE=8\lambda\eta^2\delta\eta d(\delta\eta) \quad (275)$$

$$S_1=-4\sqrt{2\lambda}\eta\int\limits_{0}^{\delta\eta}\delta\eta\log\left(\frac{\Lambda}{\delta\eta}+\sqrt{\left(\frac{\Lambda}{\delta\eta}\right)^2-1}\right)d(\delta\eta)=-2\sqrt{2\lambda}\eta\Big(\Lambda(\Lambda-\sqrt{\Lambda^2-(d\eta)^2})+$$

$$+(\delta\eta)^2\log\left(\frac{\Lambda}{\delta\eta}+\sqrt{\left(\frac{\Lambda}{\delta\eta}\right)^2-1}\right)\Bigg)\approx 2\sqrt{2\lambda}\eta^2-\sqrt{2\lambda}\eta(\delta\eta)^2\left(1+2\log\left(\frac{2\Lambda}{\delta\eta}\right)\right) \quad (276)$$

Во 2 интеграле (S_2) будет раскладывать в ряд по степеням $\frac{E}{\lambda(\eta^2-x^2)^2}$.

$$S_2=2\sqrt{2}\int\limits_{-\eta+\Lambda}^{0}\sqrt{\lambda(x^2-\eta^2)^2-E}dx\approx 2\sqrt{2\lambda}\int\limits_{-\eta+\Lambda}^{0}|x^2-\eta^2|\left(1-\frac{E}{4(\eta^2-x^2)^2}\right)dx=$$

$$=2\sqrt{2\lambda}\left(\eta^2(\Lambda-\eta)-\frac{(\Lambda-\eta)^3}{3}-\frac{E\sqrt{\lambda}}{2}\int\limits_{-\eta+\Lambda}^{0}\frac{dx}{\lambda(\eta^2-x^2)}\right)=$$

$$=2\sqrt{2\lambda}\left(\frac{2}{3}\eta^3-\eta\Lambda^2+\frac{\Lambda^3}{3}-\frac{E\log\left(-1+\frac{2\eta}{\Lambda}\right)}{4\eta\lambda}\right)=2\sqrt{2\lambda}\left(\frac{2}{3}\eta^3-\eta\Lambda^2+\frac{\Lambda^3}{3}\right)-$$

$$-\frac{E\sqrt{2}\left(\log\left(\frac{2\eta}{\Lambda}\right)-\frac{\Lambda}{2\eta}\right)}{2\eta\sqrt{\lambda}}=2\sqrt{2\lambda}\left(\frac{2\eta^3}{3}-\eta\Lambda^2+\frac{\Lambda^3}{3}-\eta(\delta\eta)^2\left(\log\left(\frac{2\eta}{\Lambda}\right)-\frac{\Lambda}{2\eta}\right)\right)$$

$$S=S_1+S_2=\frac{2}{3}\omega\eta^2-\log\left(\frac{4\eta}{\delta\eta}\right)-\frac{1}{2},\quad \omega=8\lambda\eta^2(\delta\eta)^2 \quad (277)$$

Расщепление уровней:

$$E=\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega}{2\pi}e^{-S}=\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega}{2\pi}e^{-S}=\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega}{2\pi}\exp\left(-\frac{2\omega\eta^2}{3}\right)\frac{4\eta}{\delta\eta}e^{\frac{1}{2}} \quad (278)$$

$$\boxed{\Delta = \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\omega^{\frac{3}{2}}\eta e^{-\frac{2\omega\eta^2}{3}}} \tag{279}$$

Ответ отличается от инстантонного в $\sqrt{\frac{e}{\pi}}$ раз.

Задача. «Математический маятник» (70 баллов)

Рассмотрите движение частицы массы $m = 1$ в периодическом потенциале $U(x) = \lambda(1-\cos\frac{x}{\eta})$. Вычислите одноинстантонный вклад в амплитуду перехода между двумя минимумами $0 \to 2\pi\eta$ за большое мнимое время β – Евклидову функцию Грина $G_E(2\pi\eta, 0, \beta)$.

1. **(5 баллов)** Найдите инстантонную траекторию, соответствующую такому переходу, вычислите действие на ней. Вычислите явно оператор, определяющий квадратичные флуктуации в окрестности инстантона.

2. **(10 баллов)** Исследуйте спектр полученного оператора. Вычислите фазовые сдвиги непрерывного спектра и уровни энергии связанных состояний.

3. **(10 баллов)** Рассмотрите отнормированный на осциллятор пропагатор. Идентифицируйте нулевую моду, выполните интегрирование по ней.

4. **(35 баллов)** Вычислите вклад в отношение определителей от дискретного и непрерывного спектра.

5. **(10 баллов)** Просуммируйте инстантонный газ для искомой амплитуды перехода. Сравнив полученный ответ с ответом для соответствующей модели сильной связи, извлеките из полученного ответа ширину зоны непрерывного спектра соответствующей квантомеханической задачи.

Решение.

1. Потенциал имеет минимумы в точках $x = 2\pi\eta n, n \in \mathbb{Z}$, вблизи которых он имеет осцилляторное разложение $U(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ с частотами $\omega^2 = \frac{\lambda}{\eta^2}$. Евклидово действие:

$$S_E[x(\tau)] = \int \left(\frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 + U(x(\tau))\right) d\tau \tag{280}$$

Нужно найти экстремум действия с граничными условиями $x(\tau \to -\infty) = 0$, $x(\tau \to \infty) = 2\pi\eta$.

$$\frac{\delta S_E}{\delta x(\tau)} = 0 \to \partial_\tau^2 x = U'(x(\tau)) \tag{281}$$

Закон сохранения энергии:

$$E = \frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 - U(x(\tau)) = \text{const} \tag{282}$$

На нашей траектории $E = 0$, поэтому

$$\frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 = U(x(\tau)) \to \frac{dx}{\sqrt{1-\cos\frac{x}{\eta}}} = \sqrt{2\lambda}d\tau \tag{283}$$

$$\sqrt{2}\eta \ln\left(\tan\frac{x}{4\eta}\right) = \sqrt{2\lambda}\tau \to \boxed{x_{\text{cl}}(\tau) = 4\eta\arctan\left(e^{\omega\tau}\right)} \tag{284}$$

Действие на инстантоне:

$$S_0 = S_E[x_{\rm cl}(\tau)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\partial_\tau x_{\rm cl})^2 d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{4\lambda}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{\lambda}\tau}{\eta}\right)} d\tau \tag{285}$$

$$\boxed{S_0 = 8\eta\sqrt{\lambda} = 8\eta^2\omega} \tag{286}$$

Квадратичное разложение вблизи потенциала:

$$S_E[x_{\rm cl}(\tau) + z(\tau)] \approx S_0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta d\tau((\partial_\tau z)^2 + U''(x_{\rm cl}(\tau))z^2(\tau)) \tag{287}$$

$$U''(x_{\rm cl}(\tau)) = \frac{\lambda}{\eta^2}\cos\frac{x_{\rm cl}}{\eta} = \omega^2\cos\left(4\arctan\left(e^{\omega\tau}\right)\right) \tag{288}$$

В квадратичном разложении действия стоит линейный оператор:

$$\hat{L} = -\partial_\tau^2 + U''(x_{\rm cl}(\tau)) = -\partial_\tau^2 + \omega^2\cos\left(4\arctan\left(e^{\omega\tau}\right)\right) \tag{289}$$

$$\boxed{\hat{L} = -\partial_\tau^2 + \omega^2\left(1 - \frac{2}{\cosh^2\omega\tau}\right)} \tag{290}$$

2. Уравнение на спектр оператора $\hat{L}$:

$$\left(-\partial_\tau^2 - \frac{2\omega^2}{\cosh^2\omega\tau}\right)\psi_n(\tau) = (\epsilon_n - \omega^2)\psi_n(\tau) \tag{291}$$

Данное уравнение – уравнение Шрёдингера в потенциале $\frac{1}{\cosh^2 x}$, которое было разобрано в семинаре 4. Воспользуемся ответами из того семинара, в которые нужно подставить следующие значения параметров:

$$m = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{\omega}, \quad U_0 = 2\omega^2 \tag{292}$$

$$u = \frac{U_0}{1/2ma^2} = 2, \quad s = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4u} - 1) = 1 \tag{293}$$

Энергии связанных состояний:

$$E_n = -\frac{(s-n)^2}{2ma^2} = -\omega^2(s-n)^2 \to E_0 = -\omega^2 \tag{294}$$

$$\boxed{\epsilon_0 = E_0 + \omega^2 = 0} \tag{295}$$

Волновая функция нулевой моды:

$$\psi_0(\tau) = \frac{C_0}{\cosh\omega\tau} \tag{296}$$

При целом $s=1$ рассеяние оказывается безотражательным. Непрерывный спектр характеризуется волновым вектором k, так что энергия $E_k = \frac{k^2}{2m} = k^2 \to \epsilon_k = \omega^2 + k^2$. Волновые функции:

$$\psi_k(x) \approx \begin{cases} \frac{\Gamma(1-ika)\Gamma(-ika)}{\Gamma(-ika-1)\Gamma(-ika+2)} e^{ikx} \equiv e^{ikx+i\delta(k)}, & x \to -\infty \\ e^{ikx}, & x \to +\infty \end{cases} \tag{297}$$

$$e^{-i\delta(k)} = \frac{\Gamma(-ika-1)\Gamma(-ika+2)}{\Gamma(1-ika)\Gamma(-ika)} = \frac{1-ika}{-1-ika} = -\frac{1-ika}{1+ika} = e^{-i\pi-2i\arctan ka} \tag{298}$$

$$\boxed{\delta(k) = 2\arctan ka - \pi = \begin{cases} \pi, & k=0 \\ 0, & k \to \infty \end{cases}} \tag{299}$$

Дискретизация непрерывного спектра. Волновая функция имеет вид $\psi_n(x) = A\psi_k(x) + B\psi_k^*(x)$, тогда граничные условия:

$$\begin{cases} A\psi_k(0) + B\psi_k^*(0) = 0, \\ A\psi_k(\beta) + B\psi_k^*(\beta) = 0 \end{cases} \tag{300}$$

Условие совместности системы:

$$\det \begin{pmatrix} \psi_k(0) & \psi_k^*(0) \\ \psi_k(\beta) & \psi_k^*(\beta) \end{pmatrix} = 0 \tag{301}$$

Подставляем асимптотики:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{ik\beta - i\delta(k)} & e^{-ik\beta+i\delta(k)} \end{pmatrix} = 0 \to k_n\beta - \delta(k_n) = \pi n \tag{302}$$

Решим трансцендентное уравнение по теории возмущений:

$$k_n^{(0)} \approx p_n = \frac{\pi n}{\beta} \to k_n^{(1)} \approx p_n + \frac{\delta(p_n)}{\beta} \tag{303}$$

3. Функция Грина гармонического осциллятора:

$$G_0(\beta) = \int\limits_{z(0)=0}^{z(\beta)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\beta ((\partial_\tau z)^2 + \omega^2 z^2)\right) \tag{304}$$

Отношение функций Грина:

$$\frac{G(2\pi\eta, 0, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0} \frac{\int\limits_{z(0)=0}^{z(\beta)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\beta d\tau((\partial_\tau z)^2 + U''(x_{\text{cl}}(\tau))z^2(\tau))\right)}{\int\limits_{z(0)=0}^{z(\beta)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\beta d\tau((\partial_\tau z)^2 + \omega^2 z^2(\tau))\right)} \tag{305}$$

Спектр гармонического осциллятора:

$$\epsilon_p^{(0)} = \omega^2 + p^2, \quad p = p_n = \frac{\pi n}{\beta} \tag{306}$$

Разложене в числителе $z(\tau) = \sum\limits_n c_n \psi_n(\tau)$ и в знаменателе $z(\tau) = \sum\limits_n c_n \psi_n^{(0)}(\tau)$. Интеграл по нулевой моде:

$$\int dc_0 = \int d\tau_c \frac{dc_0}{d\tau_c} = \sqrt{S_0}\beta \tag{307}$$

$$\int dc_1 e^{-\frac{1}{2}\epsilon_1^{(0)} c_1^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon_1^{(0)}}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega^2 + \frac{\pi^2}{\beta^2}}} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} \tag{308}$$

$$\boxed{\frac{G(2\pi\eta, 0, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0}\omega\beta\sqrt{\frac{S_0}{2\pi}}\left(\frac{\det'(-\partial_\tau^2 + U''(x_{\text{cl}}(\tau)))}{\det'(-\partial_\tau^2 + \omega^2)}\right)^{-\frac{1}{2}}} \tag{309}$$

4.

$$\frac{\det'}{\det'} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 + k_n^2}{\omega^2 + p_{n+1}^2} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{\omega^2 + k_n^2}{\omega^2 + p_{n+1}^2}\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{k_n^2 - p_{n+1}^2}{\omega^2 + p_{n+1}^2}\right)\right) \approx$$
$$\approx \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p_{n+1}(k_n - p_{n+1})}{\omega^2 + p_{n+1}^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p_{n+1}(\delta(p_n) - \pi)}{\omega^2 + p_{n+1}^2}\right) \tag{310}$$

Для суммирования плавной функции заменим сумму на интеграл $\sum\limits_n = \int\limits_0^\infty \frac{\beta dp}{\pi}$:

$$\frac{\det'}{\det'} = \exp\left(\int\limits_0^\infty \frac{dp 2p(\delta(p) - \pi)}{\pi(\omega^2 + p^2)}\right) = \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dp \frac{d\delta}{dp} \log\frac{\omega^2 + p^2}{\omega^2}\right) \tag{311}$$

$$\boxed{\frac{\det'}{\det'} = \frac{1}{4}} \tag{312}$$

Одноинстантонный ответ:

$$\boxed{\frac{G(2\pi\eta, 0, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0}\omega\beta\sqrt{\frac{S_0}{2\pi}}\sqrt{4} = \sqrt{\frac{S_0}{\pi}}\omega\beta e^{-S_0} = \sqrt{\frac{8\eta^2\omega}{\pi}}\omega\beta e^{-8\eta^2\omega}} \tag{313}$$

5. В случае n инстантонов вклад $S_n = nS_0$, полная фаза рассеяния $\delta^{(n)}(p) = n\delta(p)$. С каждым из инстантонов связана нулевая мода

$$\int\limits_{0<\tau_1<\ldots<\tau_n<\beta} d\tau_1 \ldots d\tau_n = \frac{\beta^n}{n!} \tag{314}$$

Для перехода $0 \to 2\pi\eta$ только конфигурации с нечётным количеством интсантонов дают вклад.

$$\boxed{\frac{G(2\pi\eta, 0, \beta)}{G_0(\beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{C}_{2n+1}^n}{(2n+1)!}\left(\sqrt{\frac{8\eta^2\omega}{\pi}}\omega\beta e^{-8\eta^2\omega}\right)^{2n+1}} \tag{315}$$

7 Формализм Гельфанда-Яглома

Упражнение. «Математический маятник», продолжение (10 баллов)
Вычислите функциональный детерминант, возникающий при исследовании задачи из предыдущего семинара, и сравните его с полученным непосредственным вычислением.
Решение.
Задача 1. Модификации Гельфанда-Яглома (50 баллов) Покажите, как нужно модифицировать теорему Гельфанда-Яглома для вычисления следующих определителей типа уравнения Шрёдингера:

1. **(30 баллов)** Одномерный оператор $\hat{H} = -\partial_x^2 + U(x)$, но для случая периодических граничных условий $\psi(x) \equiv \psi(x+L)$. Вычислите отношение определителей $\frac{\det(-\partial_x^2+k_1^2)}{\det(-\partial_x^2+k_2^2)}$.

2. **(10 баллов)** Двумерный оператор $\hat{H} = -\nabla^2 + U(r)$ для сферически-симметричного потенциала.

3. **(10 баллов)** Аналогично, трёхмерный случай.

Решение.

1.

2. Двумерный оператор:

$$\hat{H} = -\nabla^2 + U(r) = -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + U(r) \tag{316}$$

Уравнение на собственные значения:

$$\hat{H}\psi = \lambda\psi \tag{317}$$

Сведём уравнение к одномерному. Разложим волновую функцию по базису $\psi(r,\varphi) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r)e^{im\varphi}$ и получим

$$-\partial_r^2 f_m(r) - \frac{1}{r}\partial_r f_m(r) + \left(\frac{m^2}{r^2} + U(r) - \lambda\right) f_m(r) = 0 \tag{318}$$

Модификация Гельфанда-Яглома для двумерного сферически-симметричного потенциала:

$$\boxed{\frac{\det(\hat{H}_1 - \lambda)}{\det(\hat{H}_2 - \lambda)} = \prod_{m=-\infty}^{\infty} \frac{f_m^1(R|\lambda)}{f_m^2(R|\lambda)} = \frac{f_0^1(R|\lambda)}{f_0^2(R|\lambda)} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{f_m^1(R|\lambda)}{f_m^2(R|\lambda)}\right)^2} \tag{319}$$

где $f_m^{1,2}(r|\lambda)$ – решения задачи

$$-\partial_r^2 f_m^{1,2}(r|\lambda) - \frac{1}{r}\partial_r f_m^{1,2}(r|\lambda) + \left(\frac{m^2}{r^2} + U_{1,2}(r) - \lambda\right) f_m^{1,2}(r|\lambda) = 0 \tag{320}$$

с граничными условиями $f_m^{1,2}(0|\lambda) = 0$, $\partial_r f_m^{1,2}(0|\lambda) = 1$.

3. Трёхмерный оператор:
$$\hat{H} = -\nabla^2 + U(r) \tag{321}$$
Уравнение на собственные значения:
$$\hat{H}\psi = \lambda\psi \tag{322}$$
Сведём уравнение к одномерному. Разложим волновую функцию по базису $\psi(r,\theta,\varphi) = \sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{l} R_l(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ и получим
$$-\partial_r^2 R_l(r) - \frac{2}{r}\partial_r R_l + \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + U(r) - \lambda\right) R_l(r) = 0 \tag{323}$$
Модификация Гельфанда-Яглома для трёхмерного сферически-симметричного потенциала:
$$\boxed{\frac{\det(\hat{H}_1 - \lambda)}{\det(\hat{H}_2 - \lambda)} = \prod_{l=0}^{\infty}\prod_{m=-l}^{l}\frac{R_l^1(R|\lambda)}{R_l^2(R|\lambda)} = \prod_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R_l^1(R|\lambda)}{R_l^2(R|\lambda)}\right)^{2l+1}} \tag{324}$$
где $R_l^{1,2}(r|\lambda)$ – решения задачи
$$-\partial_r^2 R_l^{1,2}(r) - \frac{2}{r}\partial_r R_l^{1,2} + \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + U_{1,2}(r) - \lambda\right) R_l^{1,2}(r) = 0 \tag{325}$$
с граничными условиями $R_l^{1,2}(0|\lambda) = 0$, $\partial_r R_l^{1,2}(0|\lambda) = 1$.

Задача 2. Дзета-функция Бесселя? (40 баллов)

1. Вычислите следующее бесконечное произведение, в котором $\mu_n^{(m)}$ – n-тый нуль m-той функции Бесселя $J_m(z)$ (очевидным образом $J_{m>0}(0) = 0$; и этот тривиальный нуль в произведении не участвует):
$$P_m(R) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1 + (\mu_n^{(m)}/R)^2}{(\mu_n^{(m)}/R)^2} \tag{326}$$
Для этого найдите операторы, которые дают соответствующие собственные числа, а затем вычислите их отношения, используя теорему Гельфанда-Яглома.

2. Пусть λ_n – все собственные числа эрмитового оператора $\hat{H}$. Покажите, что «дзета-функцию» оператора $\hat{H}$, которую мы определим следующим образом:
$$\zeta_H(s) = \sum_{n=0}\frac{1}{\lambda_n^s} \tag{327}$$
для натурального аргумента $s \in \mathbb{N}$ можно сосчитать следующим образом:
$$\zeta_H(s) = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left(\log\frac{\det(\hat{H}+\lambda)}{\det\hat{H}}\right)\bigg|_{\lambda=0} \tag{328}$$

3. Докажите следующие равенства:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2} = \frac{1}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_n^{(0)})^4} = \frac{1}{32}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_n^{(1)})^2} = \frac{1}{8} \tag{329}$$

Решение.

1. Рассмотрим гамильтониан:

$$\hat{H}_m = -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r + \frac{m^2}{r^2} \tag{330}$$

Уравнение на собственные значения:

$$\hat{H}_m\psi_m = \lambda\psi_m, \quad \psi_m(0) = \psi_m(R) = 0 \tag{331}$$

$$-\partial_r^2\psi_m - \frac{1}{r}\partial_r\psi_m + \frac{m^2}{r^2}\psi_m = \lambda\psi_m \tag{332}$$

Пусть $z = \sqrt{\lambda}r$ и $f(z) = \psi(z(r))$, тогда

$$z^2\partial_z^2 f_m + z\partial_z f_m + (z^2 - m^2)f_m = 0 \tag{333}$$

Получилась функция Бесселя (функция Неймана сингулярна в 0):

$$f_m(r|\lambda_m) = C_1 J_m(z) \to \psi_m(r|\lambda_m) = C_1 J_m(\sqrt{\lambda_m}r) \tag{334}$$

$$\psi_m(0|\lambda) = 0, \quad \psi_m(R|\lambda) = 0 \to \sqrt{\lambda_n}R = \mu_n^{(m)} \tag{335}$$

$$\lambda_n = \frac{(\mu_n^{(m)})^2}{R^2} \tag{336}$$

$$P_m(R) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (\mu_n^{(m)}/R)^2}{(\mu_n^{(m)}/R)^2} = \frac{\det(\hat{H}_m + 1)}{\det(\hat{H}_m)} \tag{337}$$

По теореме Гельфанда-Яглома:

$$P_m(R) = \frac{\det(\hat{H}_m + 1)}{\det(\hat{H}_m)} = \frac{\psi_m^{(1)}(R|\lambda_0)}{\psi_m(R|\lambda_0)}, \quad \lambda_0 \to 0 \tag{338}$$

где $\psi_m(r|\lambda_0) = CJ_m(\sqrt{\lambda_0}r)$, а $\psi_m^{(1)}(r|\lambda_0)$ – решение задачи

$$-\partial_r^2\psi_m^{(1)} - \frac{1}{r}\partial_r\psi_m^{(1)} + \frac{m^2}{r^2}\psi_m^{(1)} + \psi_m^{(1)} = \lambda_0\psi_m^{(1)} \tag{339}$$

Пусть $z = \sqrt{1-\lambda_0}r$ и $f^{(1)}(z) = \psi^{(1)}(z(r))$, тогда

$$z^2\partial_z^2 f_m^{(1)} + z\partial_z f_m^{(1)} - (z^2 + m^2)f_m^{(1)} = 0 \tag{340}$$

Получилась функция Инфильда (функция Макдональда сингулярна в 0):

$$\psi_m^{(1)}(r|\lambda_0) = C_2 I_m(\sqrt{1-\lambda_0}r) \tag{341}$$

Асимптотики функций Бесселя и Инфильда:

$$\begin{cases} J_m(\sqrt{\lambda_0}r) \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}r}{2}\right)^m \\ I_m(\sqrt{1-\lambda_0}r) \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{\sqrt{1-\lambda_0}r}{2}\right)^m \end{cases}, \quad r \to 0 \tag{342}$$

Для того, чтобы $\psi_m^{(1)}(r) \sim \psi_m(r)$, выберем $\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\right)^{\frac{m}{2}}$.

$$P_m(R) = \lim_{\lambda_0 \to 0} \left(\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{I_m(\sqrt{1-\lambda_0}R)}{J_m(\sqrt{\lambda_0}R)} = \frac{I_m(R)2^m m!}{R^m} \tag{343}$$

$$\boxed{P_m(R) = \frac{2^m m!}{R^m} I_m(R)} \tag{344}$$

2.

$$\frac{\det(\hat{H}+\lambda)}{\det \hat{H}} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n + \lambda}{\lambda_n} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \tag{345}$$

$$\log\left(\frac{\det(\hat{H}+\lambda)}{\det \hat{H}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \log\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^k \tag{346}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s}\left(\log\left(\frac{\det(\hat{H}+\lambda)}{\det \hat{H}}\right)\right)\Bigg|_{\lambda=0} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=s}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{\lambda^{k-s}}{\lambda_n^k} \prod_{m=0}^{s-1}(k-m)\Bigg|_{\lambda=0} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \frac{1}{\lambda_n^s} s! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\lambda_n^s}(s-1)! \end{aligned} \tag{347}$$

$$\boxed{\zeta_H(s) = \sum_{n=0} \frac{1}{\lambda_n^s} = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s}\left(\log\left(\frac{\det(\hat{H}+\lambda)}{\det \hat{H}}\right)\right)\Bigg|_{\lambda=0}} \tag{348}$$

3.

$$\frac{\det(\hat{H}_m+\lambda)}{\det(\hat{H}_m)} = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \quad \lambda_n = \frac{(\mu_n^{(m)})^2}{R^2} \tag{349}$$

Положим $R = 1$, тогда из 2 пункта:

$$\sum_{n=0} \frac{1}{(\mu_n^{(m)})^{2s}} = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s}\left(\log\left(\frac{\det(\hat{H}_m+\lambda)}{\det \hat{H}_m}\right)\right)\Bigg|_{\lambda=0} \tag{350}$$

Повторяя рассуждения пункта 1, получим выражение (R=1):

$$\frac{\det(\hat{H}_m+\lambda)}{\det(\hat{H}_m)} = \frac{2^m m!}{\lambda^{\frac{m}{2}}} I_m(\sqrt{\lambda}) \tag{351}$$

$$\sum_{n=0} \frac{1}{(\mu_n^{(m)})^{2s}} = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s}\left(\log\left(\frac{2^m m!}{\lambda^{\frac{m}{2}}} I_m(\sqrt{\lambda})\right)\right)\Bigg|_{\lambda=0} \tag{352}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_n^{(0)}\right)^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\log\left(I_0(\sqrt{\lambda})\right)\right)\Bigg|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\log\left(1+\frac{\lambda}{4}+...\right)\right)\Bigg|_{\lambda=0} \tag{353}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_n^{(0)}\right)^2} = \frac{1}{4}} \tag{354}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_n^{(0)}\right)^4} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left(\log \left(I_0(\sqrt{\lambda}) \right) \right) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left(\log \left(1 + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^2}{2^6} ... \right) \right) \Big|_{\lambda=0} \tag{355}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_n^{(0)}\right)^4} = \frac{1}{32}} \tag{356}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_n^{(1)}\right)^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \log \left(I_1(\sqrt{\lambda}) \right) \right) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\log \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{2^4} + ... \right) \right) \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_n^{(1)}\right)^2} = \frac{1}{8}} \tag{357}$$

8 Распад метастабильного состояния

Упражнения (50 баллов)

Упражнение 1 (30 баллов)
В этом упражнении мы будем работать с потенциалом, рассматриваемом на семинаре

1. **(10 баллов)** Вычислите соответствующее отношение функциональных определителей.

2. **(20 баллов)** Найдите ширину уровней энергии для рассматриваемого на семинаре потенциале в квазиклассическом приближении. Сравните квазиклассическое приближение для основного состояния с найденным на семинаре ответом (см. комментарий к упражнению из семинара про двухъямный потенциал).

Упражнение 2 (20 баллов)
Рассмотрите следующий интеграл, сходящийся при $\mathrm{Re}g > 0$:

$$I(g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - gx^4 \right) \tag{358}$$

1. Постройте аналитическое продолжение этого интеграла на всю комплексную плоскость (включая область $\mathrm{Reg} < 0$, где этот интеграл буквально расходится).

2. Считая $g \ll 1$, найдите линии Стокса для построенного аналитического продолжения. Найдите асимпотическое поведение интеграла в различных секторах комплексной плоскости. Что можно сказать про вклады на самой линии Стокса?

Задача (50 баллов)

Рассмотрите распад метастабильного состояния частицы массы $m = 1$ в потенциале $U(x) = \lambda x^2(\eta^2 - x^2)$. Рассматривая Евклидову функцию Грина $G_E(0, 0, \beta)$, найдите ширину уровня основного метастабильного состояния.

1. **(20 баллов)** Найдите одноинстантонные траектории, соответствующую такому переходу, вычислите действия на них. Вычислите явно оператор, определяющий квадратичные флуктуации в окрестности инстантона.

2. **(20 баллов)** Вычислите интегралы по нулевым модам, найдите соответствующий флуктуационный детерминант (используя метод Гельфанда-Яглома).

3. **(10 баллов)** Просуммируйте разреженный инстантонный газ, найдите ответ.