Решение заданий
ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика"

Семинары по квантовой механике – II
(И.В. Побойко, Н.А. Степанов)

Коцевич Андрей Витальевич, группа Б02-920

6 семестр, 2022

Содержание

1 Задача рассеяния, функции Грина и формула Борна.

Упражнения (30 баллов)

Упражнение 1. Борновское приближение (20 баллов)
В рамках Борновского приближения, рассмотрите рассеяние на следующих потенциалах:

1. **(10 баллов)** $V(\mathbf{r}) = V_0 \frac{a^n}{r^n + a^n}$, $n > 3$, случай медленных частиц $ka \ll 1$. Рассмотрите также предел $n \to \infty$, когда потенциал превращается в сферическую прямоугольную яму.

2. **(10 баллов)** $V(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} e^{-\kappa r}$ (потенциал Юкавы). Рассмотрите также предельный переход $\kappa \to 0$ (закон Кулона).

Решение. Амплитуда рассеяния в борновском приближении:

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \tag{1}$$

В сферически-симметричном случае:

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r}\, V(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = -\frac{m}{\hbar^2} \int\limits_0^\infty dr r^2 V(r) \int\limits_0^\pi e^{-i|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|r\cos\varphi} \sin\varphi d\varphi \tag{2}$$

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 |\mathbf{k}-\mathbf{k}'|} \int\limits_0^\infty dr r \sin(|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|r) V(r) = -\frac{2m}{2k\hbar^2 \sin\frac{\theta}{2}} \int\limits_0^\infty dr r \sin\left(2kr\sin\frac{\theta}{2}\right) V(r) \tag{3}$$

1. $V(\mathbf{r}) = V_0 \frac{a^n}{r^n + a^n}$.

$$f(\theta) = -\frac{2ma^nV_0}{2k\hbar^2 \sin\frac{\theta}{2}} \int\limits_0^\infty dr \frac{r\sin\left(2kr\sin\frac{\theta}{2}\right)}{r^n + a^n} \approx -\frac{2ma^nV_0}{2k\hbar^2 \sin\frac{\theta}{2}} \int\limits_0^\infty dr \frac{2kr^2\sin\frac{\theta}{2}}{r^n + a^n} = -\frac{2\pi m a^3 V_0}{\hbar^2 n \sin\frac{3\pi}{n}} \tag{4}$$

$$\boxed{\sigma = 2\pi \int\limits_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta = \frac{16\pi^3 m^2 a^6 V_0^2}{\hbar^4 n^2 \sin^2\frac{3\pi}{n}}} \tag{5}$$

При $n \to \infty$ (сферическая прямоугольная яма):

$$f(\theta) = -\frac{2ma^3V_0}{3\hbar^2} \to \boxed{\sigma = \frac{16\pi m^2 a^6 V_0^2}{9\hbar^4}} \tag{6}$$

2. Потенциал Юкавы: $V(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} e^{-\kappa r}$.

$$f(\theta) = -\frac{2m\alpha}{2k\hbar^2 \sin\frac{\theta}{2}} \int\limits_0^\infty dr \sin\left(2kr\sin\frac{\theta}{2}\right) e^{-\kappa r} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2(4k^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \kappa^2)} \tag{7}$$

$$\boxed{\sigma = 2\pi \int\limits_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta = \frac{8\pi m^2\alpha^2}{\hbar^4} \int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(4k^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \kappa^2)^2} = \frac{16\pi m^2\alpha^2}{\hbar^4\kappa^2(4k^2 + \kappa^2)}} \tag{8}$$

Очень жаль, что это конец демо-версии данного файла! Для получения полной версии перейдите по секретной ссылке.