

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Образовательная программа «Квантовая теория поля, теория струн и  
математическая физика»

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Возмущённые минимальные модели двумерной  
конформной теории поля

**Автор:**

Студент группы Б02-920с  
Коцевич Андрей

**Научный руководитель:**

\*кандидат наук\*  
Литвинов Алексей Викторович

$$\sum_k \begin{array}{c} \phi_1 \\ \diagdown \\ f_{12k} \\ \diagup \\ \phi_2 \end{array} \begin{array}{c} \phi_k \\ \diagdown \\ f_{34k} \\ \diagup \\ \phi_3 \end{array} \begin{array}{c} \phi_4 \\ \diagup \\ f_{14k} \\ \diagdown \\ \phi_1 \end{array} = \sum_k \begin{array}{c} \phi_1 \\ \diagdown \\ f_{14k} \\ \diagup \\ \phi_2 \end{array} \begin{array}{c} \phi_k \\ \diagdown \\ f_{23k} \\ \diagup \\ \phi_3 \end{array} \begin{array}{c} \phi_4 \\ \diagup \\ f_{14k} \\ \diagdown \\ \phi_1 \end{array}$$



Москва 2023



## Аннотация

Возмущённые минимальные модели двумерной конформной теории  
поля

*Коцевич Андрей*

В данной работе мы будем исследовать минимальные модели двумерной конформной теории поля  $\mathcal{M}_{2,5}$  (Ли-Янга) и  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$ , возмущённые релевантными полями и ренормгрупповой (RG) поток в массивную теорию или в другую CFT. Для этого будет применяться метод усечённого конформного пространства (TCSA). Исследуется точность этого метода, получаемые им результаты сопоставляются с результатами других подходов.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Основы конформной теории поля</b>	<b>3</b>
2.1	Конформные поля на плоскости и на цилиндре . . . . .	3
2.2	Алгебра Вирасоро. Модуль Верма. Теорема Каца . . . . .	4
2.3	$n$ -точечные корреляционные функции . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Минимальные модели</b>	<b>7</b>
3.1	Операторное разложение и правила слияния . . . . .	7
3.2	Размерности примарных полей. Теорема Фриедана-Чу-Шенкера . . . .	8
3.3	Структура вложений подмодулей минимальных моделей . . . . .	8
3.4	Конкретные минимальные модели . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Возмущённые минимальные модели. Потоки ренормализационной группы</b>	<b>14</b>
4.1	Релевантные, иррелевантные и маргинальные поля . . . . .	14
4.2	Потоки ренормализационной группы между моделями . . . . .	14
4.3	Солитоны и бризеры в теории синус-Гордона . . . . .	15
4.4	Возмущение релевантным полем. Матричные элементы . . . . .	17
4.5	Базис из квазипримарных полей . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Интегрируемые возмущения минимальных моделей</b>	<b>20</b>
5.1	Прямолинейный поиск сохраняющихся токов малых спинов . . . . .	20
5.2	Подсчёт числа интегралов движения из соображений размерностей пространств . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Применение TCSA к SLYM</b>	<b>29</b>
6.1	Базис из квазипримарных полей . . . . .	29
6.2	Спектр состояний спина $s = 0$ . . . . .	33
6.3	Спектр состояний спина $s = 1$ . . . . .	33
6.4	Спектр состояний спина $s = 2$ . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Применение TCSA к возмущённой <math>\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}</math></b>	<b>40</b>
7.1	Базис из полей полного спина $s = 0$ . . . . .	40
7.2	Возмущение оператором $\Phi \otimes \Phi$ . . . . .	41
7.3	Возмущение оператором $L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi \otimes \Phi + \Phi \otimes L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi$ . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Заключение</b>	<b>44</b>

# Глава 1

## Введение

Подход усечённого конформного пространства (TCSA) был впервые предложен в статье Юрова и Замолодчикова [1]. Идея подхода состоит в том, чтобы усечь гильбертово пространство до конечного числа конформных состояний, взяв состояния только из первых  $n$  энергетических уровней, сведя задачу поиска спектра гамильтониана  $H$  к численной диагонализации конечной матрицы. Подход даёт *непертурбативный метод* вычисления спектра возмущённого гамильтониана. Юров и Замолодчиков применили этот подход к масштабируемой модели Ли-Янга (SLYM), соответствующей возмущённой полем  $\Phi_{2,1} = \Phi_{3,1}$  минимальной модели  $\mathcal{M}_{2,5}$ . Взяв базис из квази-примарных состояний и их потомков на первых  $n = 5$  энергетических уровней, они смогли достаточно точно описать спектр.

Были поставлены следующие задачи:

- Научиться применять метод TCSA для произвольного уровня или энергии обрезки.
- Применить его для SLYM для большего числа уровней (а значит и состояний) и проверить, как точность подхода зависит от усечения.
- Соотнести полученные из подхода спектры с теорией кинков и бризеров синус-Гордона для возмущённых полем  $\Phi_{3,1}$  моделей  $\mathcal{M}_{2,5}$  и  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$ .
- В статье [2] рассматривались минимальные модели  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$  и  $\mathcal{M}_{3,8}$ . Существует равенство  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6} = \mathcal{M}_{2,5} \otimes \mathcal{M}_{2,5}$ . При возмущении  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$  полем  $L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi \otimes \Phi + \Phi \otimes L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi$  можно попасть в  $\mathcal{M}_{3,8}$ . Исследовать этот ренормгрупповой (RG) поток при помощи TCSA.

Структура текста следующая. В главе 2 выписаны некоторые основные сведения из CFT, в главе 3 – сведения про минимальные модели. В главе 4 рассмотрена теория возмущённых минимальных моделей и основные факты про RG потоки между моделями. В главе 5 рассмотрен поиск интегралов движения спина  $s$  и их подсчёт. В главах 6 и 7 применён TCSA к возмущённым минимальным моделям  $\mathcal{M}_{2,5}$  и  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$ . В главе 8 перечислены полученные результаты.

При написании работы использовались материалы лекций [3] и [4] преподавателей ОП «Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика».

Все неаналитические вычисления и построения графиков в этой работе проводились в системе Wolfram Mathematica 13.0.

# Глава 2

## Основы конформной теории поля

Для начала напомним некоторые основные сведения из конформной теории поля (CFT).

### 2.1 Конформные поля на плоскости и на цилиндре

Будем рассматривать двумерное евклидово пространство. Одна координата отвечает за пространственное измерение, другая – за временное. Есть некоторый произвол: можно выбрать одну из декартовых координат, например,  $y$  как евклидово время, а другую  $x$  как пространственную координату.

В CFT обычно рассматривают другой выбор «пространства» и «времени» (формализм *радиального квантования*). В этом случае равные моменты времени соответствуют концентрическим окружностям с центром в некоторой точке  $z_0 = 0$ , а время «идёт» в радиальном направлении. Чтобы сделать эту картину более естественной, рассмотрим теорию, живущую на цилиндре  $\mathbb{R} \times S^1$ , описываемом координатами  $\tau \in [-\infty, \infty]$  и  $\sigma \in [0, R]$ . Мы можем отобразить этот цилиндр на комплексную плоскость при помощи экспоненциального отображения

$$z = e^{-2\pi i \frac{u}{R}}, \quad u = \sigma + i\tau \quad (2.1)$$

Это отображение конформное, но не глобально определённое. Оно имеет две особые точки  $z = z_0 = 0$  и  $z = \infty$ , соответствующие  $\tau = -\infty$  и  $\tau = \infty$ .

В гамильтоновом формализме любое конформное поле  $\mathcal{O}(z, \bar{z})$  с конформной размерностью  $(\Delta, \bar{\Delta})$  является оператором, который может быть разложен на моды:

- на плоскости

$$\mathcal{O}(z, \bar{z}) = \sum_{n, \bar{n} \in \mathbb{Z}} \frac{\mathcal{O}_{n, \bar{n}}}{z^{n+\Delta} \bar{z}^{\bar{n}+\bar{\Delta}}} \quad (2.2)$$

- на цилиндре

$$\mathcal{O}(u, \bar{u}) = \sum_{n, \bar{n} \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{n, \bar{n}}^{\text{cyl}} e^{-2\pi i n \frac{u}{R}} e^{2\pi i \bar{n} \frac{\bar{u}}{R}} \quad (2.3)$$

Моды  $\mathcal{O}_{n, \bar{n}}$  и  $\mathcal{O}_{n, \bar{n}}^{\text{cyl}}$  связаны. Для *примарных операторов* (которые мы будем обозначать  $\Phi(z, \bar{z})$ ), которые при конформных преобразованиях  $u \rightarrow z(u)$  преобразуются по закону:

$$\Phi(u, \bar{u}) = \left( \frac{dz}{du} \right)^{\Delta} \left( \frac{d\bar{z}}{d\bar{u}} \right)^{\bar{\Delta}} \Phi(z, \bar{z}) \quad (2.4)$$

В случае отображения цилиндра на комплексную плоскость:

$$\Phi(u, \bar{u}) = \left(-\frac{2\pi i}{R}\right)^\Delta \left(\frac{2\pi i}{R}\right)^{\bar{\Delta}} z^{\Delta+\bar{\Delta}} \Phi(z, \bar{z}) \quad (2.5)$$

$$\Phi_{n,\bar{n}}^{\text{cyl}} = \left(-\frac{2\pi i}{R}\right)^\Delta \left(\frac{2\pi i}{R}\right)^{\bar{\Delta}} \Phi_{n,\bar{n}} \quad (2.6)$$

Для потомков примарных полей соотношение более сложное.

## 2.2 Алгебра Вирасоро. Модуль Верма. Теорема Каца

Разложение на моды для тензора энергии-импульса:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad T(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^{\text{cyl}} e^{-2\pi i n \frac{u}{R}} \quad (2.7)$$

Обратное преобразование:

$$L_n = \int \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \quad L_n^{\text{cyl}} = \frac{1}{R} \int du e^{2\pi i n \frac{u}{R}} T(u) \quad (2.8)$$

Оператор  $T(z)$  представляет собой компоненту тензора энергии-импульса в плоскости  $(z, \bar{z})$ . Операторы  $L_n$  удовлетворяют соотношениям *алгебры Вирасоро* (центральное расширение алгебры Витта):

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \delta_{m+n, 0} \quad (2.9)$$

Из выражения

$$L_n \mathcal{O}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} d\xi (\xi - z)^{n+1} T(\xi) \mathcal{O}(z, \bar{z}) \quad (2.10)$$

можно получить, что

$$[L_n, \mathcal{O}(z)] = z^{n+1} \partial \mathcal{O} + \Delta(n+1) z^n \mathcal{O} + \frac{n(n+1)}{2} z^{n-1} L_1 \mathcal{O}(z) + \dots \quad (2.11)$$

Это равенство становится наиболее простым для примарных полей (для них  $L_n \Phi(z) = 0 \ \forall n > 0$ ):

$$[L_n, \Phi_\Delta(z)] = (z^{1+n} \partial + \Delta(n+1) z^n) \Phi_\Delta(z) = \mathcal{L}_n \cdot \Phi_\Delta(z) \quad (2.12)$$

Отметим, что

$$[L_m, [L_n, \Phi_\Delta(z)]] = \mathcal{L}_n \cdot \mathcal{L}_m \cdot \Phi_\Delta(z) \quad (2.13)$$

Далее, воспользуемся формулой для конформного преобразования тензора энергии-импульса:

$$T(u) = (z'(u))^2 T(z) + \frac{c}{12} \{z(u), u\}, \quad (2.14)$$

где *производная Шварца*:

$$\{z(u), u\} = \frac{z'''(u)}{z'(u)} - \frac{3}{2} \left( \frac{z''(u)}{z'(u)} \right)^2 \quad (2.15)$$

$$\{z, u\} = \frac{2\pi^2}{R^2} \quad (2.16)$$

Связь между тензором энергии-импульса на плоскости и на цилиндре:

$$T(u) = -\frac{4\pi^2}{R^2} \left( z^2 T(z) - \frac{c}{24} \right) \quad (2.17)$$

Гамильтониан  $H$  имеет вид:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{\tau\tau} d\sigma = L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \quad (2.18)$$

Вакуумное состояние  $|0\rangle$  является собственным состоянием этого гамильтониана. Оно должно быть инвариантно к глобальным конформным преобразованиями, следовательно

$$L_n |0\rangle = \bar{L}_n |0\rangle = 0, \quad n \geq -1 \quad (2.19)$$

Аналогично,

$$\langle 0| L_n = \langle 0| \bar{L}_n = 0, \quad n \leq 1 \quad (2.20)$$

Примарное поле с размерностью  $\Delta$  порождает бра- и кет-состояния по правилу

$$|\Delta\rangle := \Phi_\Delta(0) |0\rangle, \quad \langle\Delta| := \langle 0| \Phi(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \langle 0| \Phi(z) z^{2L_0} \quad (2.21)$$

Из определения примарных полей следует, что эти состояния удовлетворяют условиям

$$L_n |\Delta\rangle = 0, \quad \langle\Delta| L_{-n} = 0, \quad n > 0 \quad (2.22)$$

Представление (*модуль Верма*)  $\mathcal{V}_\Delta$

$$L_{-\lambda} |\Delta\rangle := L_{-\lambda_1} \dots L_{-\lambda_n} |\Delta\rangle, \quad \lambda = \{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n\}, \quad |\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (2.23)$$

$$L_0 |\Delta\rangle = \Delta |\Delta\rangle, \quad L_n |\Delta\rangle = 0, \quad n > 0 \quad (2.24)$$

разлагается в прямую сумму конечномерных подпространств:

$$\mathcal{V}_\Delta = \bigoplus_N \mathcal{V}_{\Delta, N}, \quad \mathcal{V}_{\Delta, N} = \text{span}\{L_{-\lambda} |\Delta\rangle : |\lambda| = N\}, \quad (2.25)$$

которые являются собственными подпространствами оператора  $L_0$ :

$$L_0 L_{-\lambda} |\Delta\rangle = (\Delta + |\lambda|) L_{-\lambda} |\Delta\rangle \quad (2.26)$$

Размерность подпространства  $\dim \mathcal{V}_{\Delta, N} = p(N)$  – число разбиений числа  $N$ .

Характер – голоморфная часть статистической суммы:

$$\chi_\Delta(x) := \text{Tr}(x^{L_0 - \frac{c}{24}}) \Big|_{\mathcal{V}_\Delta} \quad (2.27)$$

Тогда мы имеем

$$\chi_\Delta(x) = x^{\Delta - \frac{c}{24}} \sum_{N=0}^{\infty} p(N) x^N \quad (2.28)$$

Производящая функция для числа разбиений:

$$\sum_{N=0}^{\infty} p(N)q^N = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \quad (2.29)$$

$$\chi_{\Delta}(q) = q^{\Delta - \frac{c}{24}} \chi(q), \quad \chi(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \quad (2.30)$$

Параметризация Лиувилля:

$$c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + \frac{1}{b}, \quad \Delta(\alpha) = \alpha(Q - \alpha) \quad (2.31)$$

**Теорема 1** (Каца-Фейгина-Фукса). На уровне  $N \forall m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : N = mn \hookrightarrow \exists$  сингулярный вектор

$$|\chi_{m,n}\rangle = D_{m,n} |\Delta_{m,n}\rangle \quad (2.32)$$

$$L_n |\chi_{m,n}\rangle = 0, \quad \forall n > 0 \quad (2.33)$$

$c$

$$\Delta = \Delta_{m,n} = \Delta(\alpha_{m,n}), \quad \alpha_{m,n} = \frac{(m-1)b}{2} - \frac{(n-1)b^{-1}}{2} \quad (2.34)$$

Для общих значений центрального заряда  $c$   $|\chi_{m,n}\rangle$  является единственным сингулярным вектором в модуле Верма  $\mathcal{V}_{\Delta_{m,n}}$  с  $\Delta = \Delta_{m,n} + mn = \Delta_{m,-n}$ . Можно определить факторпространство

$$\mathcal{V}_{\Delta_{m,n}} / \mathcal{V}_{\Delta_{m,-n}} \quad (2.35)$$

без нарушения конформной симметрии. Характер такого факторпространства:

$$\chi'_{m,n}(x) = \frac{x^{\Delta_{m,n} - \frac{c}{24}} (1 - x^{mn})}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)} \quad (2.36)$$

## 2.3 $n$ -точечные корреляционные функции

Введём одноточечную, двухточечную и трёхточечную функцию следующим образом:

- Одноточечная функция:

$$\langle \Phi(z) \rangle = \delta_{\Delta,0} \quad (2.37)$$

- Двухточечная функция:

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1), \Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{\delta_{\Delta_1, \Delta_2} \delta_{\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2}}{(z_1 - z_2)^{2\Delta_1} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{\Delta}_1}} \quad (2.38)$$

- Трёхточечная функция:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1), \Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \Phi_3(z_3, \bar{z}_3) \rangle = \\ = C(\Delta_1, \bar{\Delta}_1, \Delta_2, \bar{\Delta}_2, \Delta_3, \bar{\Delta}_3) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{-\Delta_{ij}} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{-\bar{\Delta}_{ij}}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где  $\Delta_{12} = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3$  и т.д.,  $C(\Delta_1, \bar{\Delta}_1, \Delta_2, \bar{\Delta}_2, \Delta_3, \bar{\Delta}_3)$  – структурные константы («динамическая» величина, содержащая информацию о теории).



# Глава 3

## Минимальные модели

В данной главе кратко опишем основные сведения о *минимальных моделях*. Эти теории характеризуются гильбертовым пространством, состоящим из конечного числа представлений алгебры Вирасоро (модулей Верма), т.е. число конформных семейств является конечным.

### 3.1 Операторное разложение и правила слияния

Простейшее правило слияния вырожденного поля  $\Phi_{2,1}$  с произвольным  $\Phi_\alpha$ :

$$\Phi_{2,1} \otimes \Phi_\alpha = [\Phi_{\alpha+\frac{b}{2}}] \oplus [\Phi_{\alpha-\frac{b}{2}}] \quad (3.1)$$

В частности,

$$\Phi_{2,1} \otimes \Phi_{m,n} = [\Phi_{m+1,n}] \oplus [\Phi_{m-1,n}], \quad \Phi_{1,2} \otimes \Phi_{m,n} = [\Phi_{m,n+1}] \oplus [\Phi_{m,n-1}] \quad (3.2)$$

Оба эти правила слияния можно интерпретировать как правила слияния  $\mathfrak{sl}(2)$ . А именно, произведение двумерного и  $m$ -мерного (или  $n$ -мерного) представлений  $\mathfrak{sl}(2)$  является суммой  $m+1$ -мерного и  $m-1$ -мерного представлений ( $n+1$ -мерного и  $n-1$ -мерного). Тогда, используя ассоциативность ОРЕ, можно получить

$$\Phi_{m,n} \otimes \Phi_\alpha = \bigoplus_{r,s} [\Phi_{\alpha+\frac{rb}{2}+\frac{sb-1}{2}}], \quad (3.3)$$

где  $r \in \{m-1, m-3, \dots, 3-m, 1-m\}$ ,  $s \in \{n-1, n-3, \dots, 3-n, 1-n\}$ .

Рассмотрим случай, когда корреляционная функция состоит только из вырожденных полей, т.е.  $\alpha = \alpha_{m',n'}$ . Тогда есть два способа переписать (3.3):

$$\Phi_{m,n} \otimes \Phi_{m',n'} = \bigoplus_{r,s} [\Phi_{r,s}], \quad \Phi_{m,n} \otimes \Phi_{m',n'} = \bigoplus_{r',s'} [\Phi_{r',s'}], \quad (3.4)$$

где  $r \in \{m'-m+1, \dots, m'+m-1\}$ ,  $s \in \{n'-n+1, \dots, n'+n-1\}$ ,  $r' \in \{m-m'+1, \dots, m'+m-1\}$ ,  $s' \in \{n-n'+1, \dots, n'+n-1\}$ . Условие совместности для справедливости обоих разложений требует, чтобы сумма проходила через пересечение двух множеств:

$$\Phi_{m,n} \otimes \Phi_{m',n'} = \bigoplus_{r,s} [\Phi_{r,s}], \quad (3.5)$$

где  $r \in \{|m'-m|+1, \dots, m'+m-1\}$ ,  $s \in \{|n'-n|+1, \dots, n'+n-1\}$ .

## 3.2 Размерности примарных полей. Теорема Фриедана-Чу-Шенкера

Для минимальной модели  $\mathcal{M}_{p,q}$ :

$$b^2 = -\frac{p}{q}, \quad (3.6)$$

где  $q$  и  $p$  – взаимно простые числа и  $q > p$  (в случае  $q = p$  полей в теории нет).

Центральный заряд:

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \quad (3.7)$$

Размерность примарного поля  $|\Delta_{m,n}\rangle$  в минимальной модели  $\mathcal{M}_{p,q}$ :

$$\Delta_{m,n}^{(p,q)} = \frac{(mp - nq)^2 - (p - q)^2}{4pq} \quad (3.8)$$

Необходимое условие отсутствия отрицательных размерностей:  $q = p + 1$ . Тогда

$$\Delta_{m,n}^{(p,p+1)} = \frac{(mp - n(p+1))^2 - 1}{4p(p+1)} \quad (3.9)$$

**Теорема 2** (Фриедана-Чу-Шенкера). *Модуль Верма  $\mathcal{V}_\Delta$  не имеет векторов отрицательной нормы только в двух случаях:*

- При  $\Delta \geq 0$  и  $c \geq 1$ .
- При унитарных минимальных моделях  $\mathcal{M}_{p,p+1}$ :

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}, \quad \Delta_{m,n} = \frac{(mp - n(p+1))^2 - 1}{4p(p+1)}, \quad 0 < n < m < p+1 \quad (3.10)$$

## 3.3 Структура вложений подмодулей минимальных моделей

Свойство «отражений» размерностей полей:

$$\Delta_{m+kq, n+kp} = \Delta_{-m+kq, -n+kp}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.11)$$

Любой модуль Верма  $\mathcal{V}_{m,n}$  имеет 2 подмодуля:

$$D_{m,n} : \mathcal{V}_{-m,n} \subset \mathcal{V}_{m,n}, \quad D_{q-m, p-n} : \mathcal{V}_{-m+2q, n} \subset \mathcal{V}_{m,n} \quad (3.12)$$

Эти подмодули сами имеют по 2 подмодуля:

$$D_{q+m, p-n} : \mathcal{V}_{-m+2q, n} \subset \mathcal{V}_{-m,n}, \quad D_{q-m, p+n} : \mathcal{V}_{m-2q, n} \subset \mathcal{V}_{-m,n} \quad (3.13)$$

и в то же время

$$D_{m, 2p-n} : \mathcal{V}_{m+2q, n} \subset \mathcal{V}_{-m+2q, n}, \quad D_{q-m, p+n} : \mathcal{V}_{m-2q, n} \subset \mathcal{V}_{-m+2q, n} \quad (3.14)$$

Т.е. существуют следующие соотношения:

$$D_{q+m, p-n} D_{m,n} = D_{m, 2p-n} D_{q-m, p-n}, \quad D_{q-m, p+n} D_{m,n} = D_{2q-m, n} D_{q-m, p-n} \quad (3.15)$$

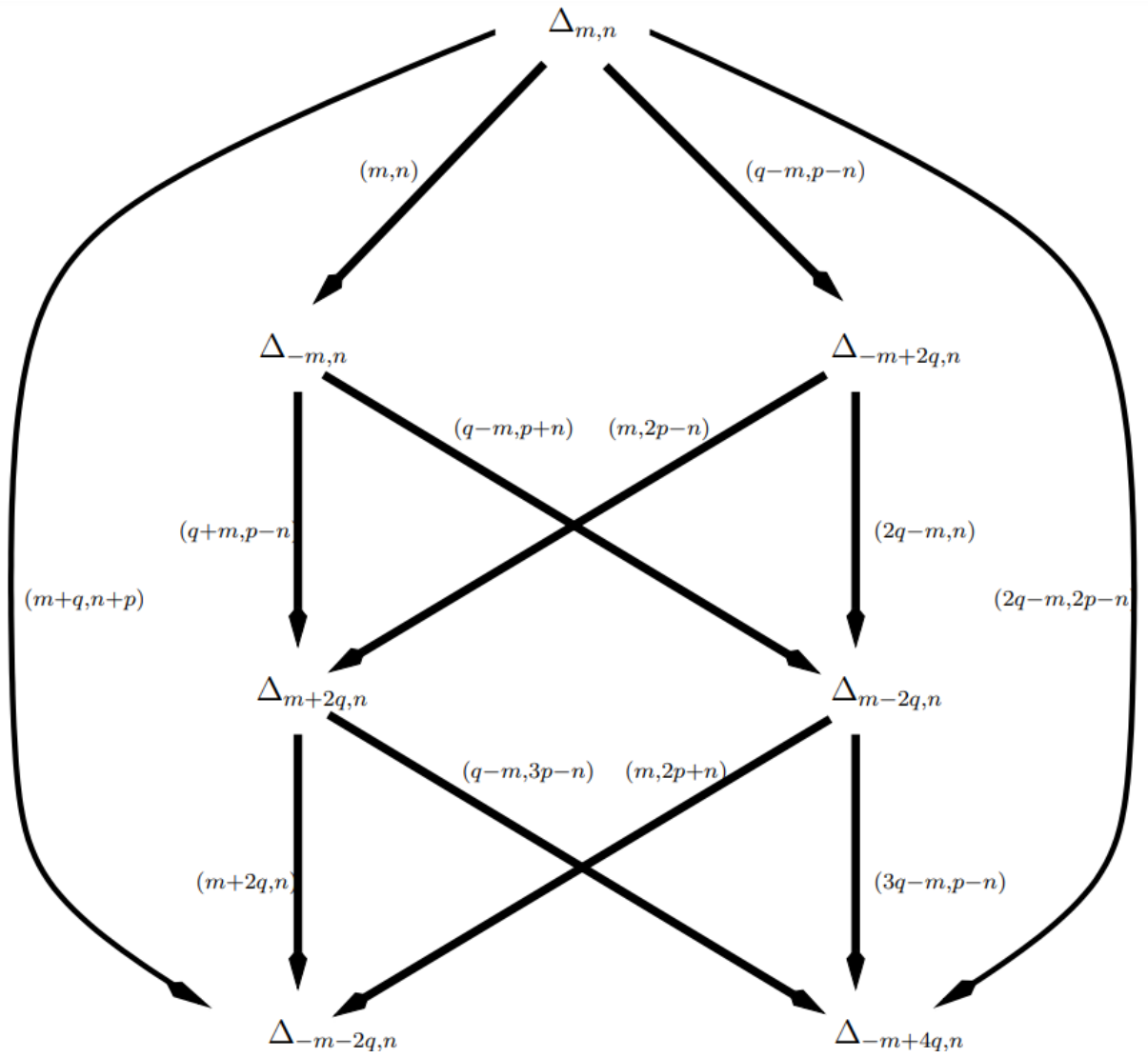


Рис. 3.1: Вложения подмодулей

Все эти вложения изображены на рис. 3.1.

Характер соответствующего неприводимого модуля получается суммированием всех модулей Верма из чётных «этажей» и вычитанием всех модулей с нечётных:

$$\chi_{m,n}^{(p,q)}(x) = x^{-\frac{c}{24}} \chi(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x^{\Delta_{m,n} + 2kq} - x^{\Delta_{m,n} - m + 2kq}), \quad \chi(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \quad (3.16)$$

$$\chi_{m,n}^{(p,q)}(x) = x^{\Delta_{m,n} - \frac{c}{24}} \sum_{N=0}^{\infty} \nu_{\Delta_{m,n}}^{(p,q)}(N) x^N, \quad (3.17)$$

где  $\nu_{\Delta_{m,n}}^{(p,q)}(N)$  – число линейно независимых потомков на уровне  $N$ .

### 3.4 Конкретные минимальные модели

Перейдём к рассмотрению конкретных минимальных моделей  $\mathcal{M}_{p,q}$ .

Начнём с унитарных  $q = p + 1$ .

- $p = 2$ . Минимальная модель  $\mathcal{M}_{2,3}$ .

Центральный заряд:

$$c = 0 \quad (3.18)$$

Модель состоит из всего одного единичного примарного поля  $\Phi_{1,1} = \Phi_{2,1} = I$ .

Таблица Каца изображена на рис. 3.2:

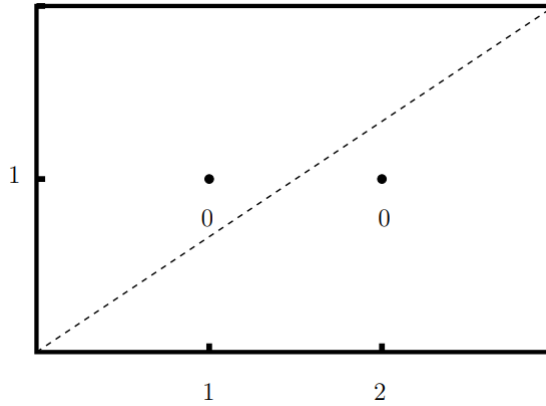


Рис. 3.2: Таблица Каца для  $\mathcal{M}_{2,3}$

$$L_n |I\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.19)$$

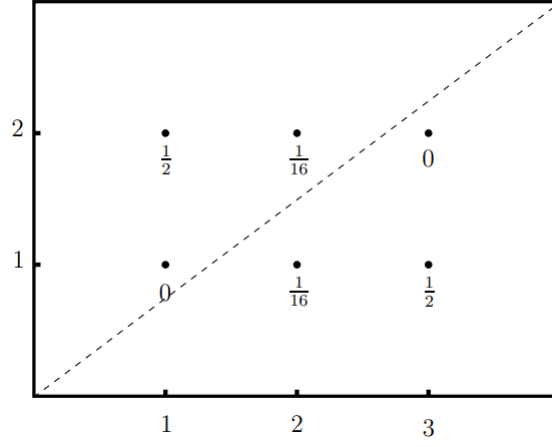
Размерности полей:

$$\Delta_{m,n}^{(2,3)} = \frac{(2m - 3n)^2 - 1}{24} \quad (3.20)$$

$$\Delta_{1,2}^{(2,3)} = \Delta_{2,1}^{(2,3)} = 0 \quad (3.21)$$

Характер:

$$\chi_{1,2}^{(2,3)}(x) = 1 \quad (3.22)$$


 Рис. 3.3: Таблица Каца для  $\mathcal{M}_{3,4}$ 

- $p = 3$ . Минимальная модель  $\mathcal{M}_{3,4}$ , описывающая модель Изинга.

Центральный заряд:

$$c = \frac{1}{2} \quad (3.23)$$

Модель состоит из трёх примарных полей  $I = \Phi_{1,1} = \Phi_{3,2}$ ,  $\sigma = \Phi_{2,1} = \Phi_{2,2}$ ,  $\epsilon = \Phi_{3,1} = \Phi_{1,2}$ . Таблица Каца изображена на рис. 3.3:

Размерности полей:

$$\Delta_{m,n}^{(3,4)} = \frac{(3m - 4n)^2 - 1}{48} \quad (3.24)$$

$$\Delta_{1,1}^{(3,4)} = 0, \quad \Delta_{2,1}^{(3,4)} = \frac{1}{16}, \quad \Delta_{3,1}^{(3,4)} = \frac{1}{2} \quad (3.25)$$

Характеры:

$$\chi_{1,1}^{(3,4)}(x) = x^{-\frac{1}{48}}(1 + x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 5x^9 + \mathcal{O}(x^{10})) \quad (3.26)$$

$$\chi_{2,1}^{(3,4)}(x) = x^{\frac{1}{24}}(1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + \mathcal{O}(x^{10})) \quad (3.27)$$

$$\chi_{3,1}^{(3,4)}(x) = x^{\frac{23}{48}}(1 + x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 6x^9 + \mathcal{O}(x^{10})) \quad (3.28)$$

Рассмотрим некоторые неунитарные модели.

- Минимальная модель  $\mathcal{M}_{2,5}$ , описывающая точку Ли-Янга.

Центральный заряд:

$$c = -\frac{22}{5} \quad (3.29)$$

Модель состоит из двух примарных полей  $I = \Phi_{1,1} = \Phi_{4,1}$ ,  $\Phi = \Phi_{2,1} = \Phi_{3,1}$ . Таблица Каца изображена на рис. 3.4:

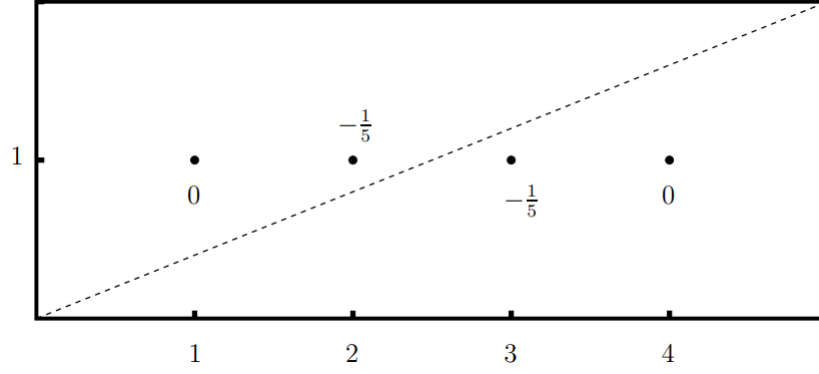
Размерности полей:

$$\Delta_{m,n}^{(2,5)} = \frac{(2m - 5n)^2 - 9}{40} \quad (3.30)$$

$$\Delta_{1,1}^{(2,5)} = 0, \quad \Delta_{2,1}^{(2,5)} = -\frac{1}{5} \quad (3.31)$$

Характеры:

$$\chi_{1,1}^{(2,5)}(x) = x^{\frac{11}{60}}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 3x^9 + \mathcal{O}(x^{10})) \quad (3.32)$$


 Рис. 3.4: Таблица Каца для  $\mathcal{M}_{2,5}$ 

$$\chi_{2,1}^{(2,5)}(x) = x^{-\frac{1}{60}}(1 + x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 5x^9 + \mathcal{O}(x^{10})) \quad (3.33)$$

Структура ОРЕ  $\mathcal{M}_{2,5}$  простая:

$$I \otimes I = [I], \quad (3.34)$$

$$I \otimes \Phi = [\Phi], \quad (3.35)$$

$$\Phi \otimes \Phi = [I] \oplus [\Phi]. \quad (3.36)$$

Единственное нетривиальное операторное разложение (ОРЕ):

$$\Phi(x)\Phi(0) = |x|^{-4\Delta_\Phi}(I + \text{descendants}) + C_{\Phi\Phi}^\Phi |x|^{-2\Delta_\Phi}(\Phi(x) + \text{descendants}), \quad (3.37)$$

с единственной нетривиальной структурной константой

$$C_{\Phi\Phi}^\Phi = i\kappa, \quad \kappa = \frac{1}{5}\gamma^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{5}\right)\gamma^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 1.91131, \quad (3.38)$$

где  $\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}$ .

$$\phi(x)\phi(0) = |x|^{\frac{4}{5}}(I + \text{потомки}) + c_{\phi\phi}^\phi |x|^{\frac{2}{5}}(\phi(x) + \text{потомки}), \quad (3.39)$$

Также  $C_{I\Phi}^\Phi = 1$ .

- Минимальная модель  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$ .

Центральный заряд:

$$c = -\frac{44}{5} \quad (3.40)$$

Статистическая сумма  $D_6$  модулярно-инвариантной минимальной модели  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$ :

$$Z = |\chi_{1,1}^{(3,10)} + \chi_{9,1}^{(3,10)}|^2 + |\chi_{3,1}^{(3,10)} + \chi_{7,1}^{(3,10)}|^2 + 2|\chi_{5,1}^{(3,10)}|^2 \quad (3.41)$$

$$\chi_{1,1}^{(3,10)} = x^{\frac{11}{30}}(1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 7x^8 + 8x^9 + \mathcal{O}(x^{10})) \quad (3.42)$$

$$\chi_{3,1}^{(3,10)} = x^{-\frac{1}{30}}(1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 10x^7 + 15x^8 + 19x^9 + \mathcal{O}(x^{10})) \quad (3.43)$$

$$\chi_{5,1}^{(3,10)} = x^{\frac{1}{6}}(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 13x^7 + 19x^8 + 25x^9 + \mathcal{O}(x^{10})) \quad (3.44)$$

$$\chi_{7,1}^{(3,10)} = x^{\frac{29}{30}}(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 10x^6 + 13x^7 + 19x^8 + 25x^9 + \mathcal{O}(x^{10})) \quad (3.45)$$

$$\chi_{9,1}^{(3,10)} = x^{\frac{71}{30}}(1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 6x^6 + 8x^7 + 11x^8 + 14x^9 + \mathcal{O}(x^{10})) \quad (3.46)$$

Такую модель можно рассматривать как

$$\mathcal{M}_{3,10}^{D_6} = \mathcal{M}_{2,5} \otimes \mathcal{M}_{2,5} \quad (3.47)$$

Это выражается в равенстве

$$|\chi_{1,1}^{(3,10)} + \chi_{9,1}^{(3,10)}|^2 + |\chi_{3,1}^{(3,10)} + \chi_{7,1}^{(3,10)}|^2 + 2|\chi_{5,1}^{(3,10)}|^2 = (|\chi_{1,1}^{(2,5)}|^2 + |\chi_{1,2}^{(2,5)}|^2)^2, \quad (3.48)$$

которое эквивалентно 3 равенствам:

$$\chi_{1,1}^{(3,10)} + \chi_{9,1}^{(3,10)} = (\chi_{1,1}^{(2,5)})^2 \quad (3.49)$$

$$\chi_{3,1}^{(3,10)} + \chi_{7,1}^{(3,10)} = (\chi_{1,2}^{(2,5)})^2 \quad (3.50)$$

$$\chi_{5,1}^{(3,10)} = \chi_{1,1}^{(2,5)} \chi_{1,2}^{(2,5)} \quad (3.51)$$

Размерности полей, участвующих в модели:

$$\Delta_{1,1}^{(3,10)} = 0, \quad \Delta_{3,1}^{(3,10)} = -\frac{2}{5}, \quad \Delta_{5,1}^{(3,10)} = -\frac{1}{5}, \quad \Delta_{7,1}^{(3,10)} = \frac{3}{5}, \quad \Delta_{9,1}^{(3,10)} = 2 \quad (3.52)$$

Запишем примарные поля из  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$  в терминах полей из  $\mathcal{M}_{2,5}$ :

$$\Phi_{1,1} = I \otimes I, \quad \Phi_{3,1} = \Phi \otimes \Phi, \quad \Phi_{5,1} = \langle I \otimes \Phi, \Phi \otimes I \rangle \quad (3.53)$$

$$\Phi_{7,1} = \langle L_{-1} \bar{L}_{-1} \Phi \otimes \Phi, \Phi \otimes L_{-1} \bar{L}_{-1} \Phi \rangle \quad (3.54)$$

$$\Phi_{9,1} = \langle L_{-2} \bar{L}_{-2} I \otimes I, I \otimes L_{-2} \bar{L}_{-2} I \rangle \quad (3.55)$$

Существуют ещё аналогичные тождества:

$$\mathcal{M}_{5,12}^{E_6} = \mathcal{M}_{2,5} \otimes \mathcal{M}_{3,4} \quad (3.56)$$

$$\mathcal{M}_{7,30}^{E_8} = \mathcal{M}_{2,5} \otimes \mathcal{M}_{2,7} \quad (3.57)$$

## Глава 4

# Возмущённые минимальные модели. Потоки ренормализационной группы

### 4.1 Релевантные, иррелевантные и маргинальные поля

Действие возмущённой минимальной модели:

$$S = S_{CFT} + \lambda \int \Phi_{\Delta,\Delta}(x) dx^2 \quad (4.1)$$

Оно является безразмерным, поэтому константу связи можно представить в виде

$$\lambda = \lambda_0 m^{2-2\Delta}, \quad (4.2)$$

где  $\lambda_0$  – безразмерная константа.

Рассмотрим случаи:

- $\Delta < 1$ : при  $m \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  и при  $m \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ .  
В этом случае поле является *релевантным*.
- $\Delta > 1$ : при  $m \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  и при  $m \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  (*полюс Ландау*).  
В этом случае поле является *иррелевантным*.
- $\Delta = 1$ . В этом случае поле является *маргинальным*.

Для сходимости в 0 нужно потребовать  $\Delta < \frac{1}{2}$ .

### 4.2 Потоки ренормализационной группы между моделями

Ультрафиолетовый (UV) предел интегрируемых теорий поля IFT описывается при помощи CFT, поэтому интегрируемые КТП в двумерном пространстве могут рассматриваться как CFT, возмущённые некоторым релевантным оператором. Простейшим примером является предел  $T \rightarrow T_c$  в модели Изинга с нулевым магнитным полем  $h = 0$ . Это интегрируемая теория свободных массивных майорановских фермионов. Она может рассматриваться как CFT  $\mathcal{M}_{3,4}$  с  $c = \frac{1}{2}$ , возмущённая бесспиновым примарным полем  $\Phi_{3,1} = \varepsilon$  с  $\Delta_{3,1}^{(3,4)} = \frac{1}{2}$ .

При рассмотрении возмущения конкретной минимальной модели некоторым релевантным оператором и действии ренормализационной группы (RG) возникают две возможности:



1. Полученная теория является массивной, то есть в спектре появляется некоторый разрыв между уровнями энергии, который можно интерпретировать как массу частицы.

Примером такого будет служить возмущённая  $\mathcal{M}_{2,5}$  релевантным полем  $\Phi_{2,1} = \Phi_{3,1}$ . Такая IFT называется масштабируемой моделью Ли-Янга (SLYM).

2. Поток RG приводит к новой неподвижной точке, т.е. к другой минимальной модели.

Примером такого является возмущённая  $\mathcal{M}_{3,4}$ , которая приводит к  $\mathcal{M}_{2,5}$ . В этой работе будет рассматриваться поток RG от  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$  к  $\mathcal{M}_{3,8}$ .

Существуют некоторые результаты для таких потоков. Один из таких результатов относится к унитарным минимальным моделям  $\mathcal{M}_p \equiv \mathcal{M}_{p,p+1}$ . Для них показано, что существует поток RG:

$$\mathcal{M}_p + \lambda \Phi_{3,1} \rightarrow \mathcal{M}A_p^\pm, \quad (4.3)$$

где знак  $\pm$  совпадает со знаком  $\lambda$ . Если знак возмущения отрицательный, то возмущённая CFT  $\mathcal{M}A_p^-$  описывается теорией рассеяния массивных частиц, называемых *кинками*. Более интересным является случай  $\mathcal{M}A_p^+$ , который порождает RG потоки из UV CFT  $\mathcal{M}_p$  в  $\mathcal{M}_{p-1}$ . Впервые это было замечено с помощью пертурбативных вычислений для случая  $p \gg 1$  и доказано позднее с помощью термодинамического анзаца Бете (ТБА), основанного на  $S$ -матрице безмассовых кинков [5].

Подобные RG потоки, сохраняющие индекс неунитарности  $n = q - p$ , были обнаружены и для неунитарных моделей, что обобщает предыдущий результат. Например, в [6] показано, что существует RG поток

$$\mathcal{M}_{p,q} + \lambda \Phi_{3,1} \rightarrow \mathcal{M}_{p-n,q-n} \quad (4.4)$$

В статье Карди и Муссардо [7] было показано, что SLYM – IFT, т.е. содержит бесконечное число коммутирующих интегралов движения. Спектр этой теории содержит одну нейтральную частицу массы  $m$ . В статье [8] была применена теория рассеяния для изучения конечно-температурных эффектов в SLYM при помощи метода термодинамического анзаца Бете (ТБА). Это эквивалентно изучению основного состояния релятивистской теории поля в пространстве с конечным объёмом с периодическими граничными условиями (на круге). Численное интегрирование уравнений движения ТБА дало очень точную информацию об основном состоянии системы.

К сожалению, остаётся неясным, как использовать подход ТБА к изучению возмущённых состояний. В этой работе мы будем использовать метод, который поможет в этом.

### 4.3 Солитоны и бризеры в теории синус-Гордона

В статье [9] изучена связь между теорией синус-Гордона и возмущённой оператором  $\Phi_{3,1}$  минимальной модели  $\mathcal{M}_{2,2N+1}$ .

Рассмотрим модель синус-Гордона с действием

$$S = \int d^2x \left( \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \mu \cos \beta \phi \right) \quad (4.5)$$

Разобьём действие следующим образом:

$$S = S_0 + S_1, \quad (4.6)$$

$$S_0 = \int d^2x \left( \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S_1 = \frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi} \quad (4.7)$$

Первый член описывает (в общем случае неунитарную) CFT с центральным зарядом

$$c = 1 - 6 \left( \frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1 - \frac{3(1-2N)^2}{1+2N} \rightarrow \beta^2 = \frac{4}{1+2N} < 1 \quad (4.8)$$

Второй член – возмущение. Конформная размерность оператора возмущения:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta \left( \beta - \frac{1}{\beta} \right) = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left( \frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\beta} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{3\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^2 = \Delta_{31} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Гипотеза состоит в том, что некоторые редукции модели синус-Гордона описывают  $\Phi_{3,1}$ -возмущения минимальных моделей. Теория синус-Гордона содержит частицы: *солитоны* или *бризеры* – связанные состояния кинка (односолитонного решения) с анти-кинком. В моделях  $\mathcal{M}_{2,2N+1}$  кинков нет, остаются только бризеры с массами:

$$m_n = 2m_{\text{kin}} \sin \frac{\pi p n}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \cap \left[ 0, \frac{1}{p} \right), \quad \beta^2 = \frac{2p}{p+1} \quad (4.10)$$

- Применим эту теорию к минимальной модели  $\mathcal{M}_{2,5}$  ( $N = 2$ ).

$$\beta^2 = \frac{4}{1+2N} = \frac{4}{5} \quad (4.11)$$

С другой стороны,

$$\beta^2 = \frac{2p}{p+1} = \frac{4}{5} \rightarrow p = \frac{2}{3} \quad (4.12)$$

Таким образом, данная модель обладает 1 частицей с массой:

$$m_1 = 2m_{\text{kin}} \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}m_{\text{kin}} \quad (4.13)$$

- Применим эту теорию к минимальной модели  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$ . Излагаемая теория верна для  $A$ -серий минимальных моделей. Гипотезой в данной статье будет предположение о том, что в нашем случае  $D$ -серии теория тоже верна, что мы проверим далее.

$$c = 1 - 6 \left( \frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^2 = -\frac{44}{5} \rightarrow \beta^2 = \frac{3}{5} \quad (4.14)$$

С другой стороны,

$$\beta^2 = \frac{2p}{p+1} = \frac{3}{5} \rightarrow p = \frac{3}{7} \quad (4.15)$$

Таким образом, данная модель обладает 2 бризерами с массами:

$$m_1 = 2m_{\text{kin}} \sin \frac{3\pi}{14} = 1.247m_{\text{kin}} \quad (4.16)$$

$$m_2 = 2m_{\text{kin}} \sin \frac{3\pi}{7} = 1.950m_{\text{kin}} \quad (4.17)$$

## 4.4 Возмущение релевантным полем. Матричные элементы

Полный гамильтониан  $H$  возмущённой модели состоит из невозмущенной части  $H_{CFT}$  и соответствующего возмущения  $V$ :

$$H = H_{CFT} + V \quad (4.18)$$

Невозмущённая часть  $H_{CFT}$  для CFT на цилиндре радиуса  $R$ :

$$H_{CFT} = \frac{2\pi}{R} \left( L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right) \quad (4.19)$$

Релевантное возмущение  $V$ :

$$V = \lambda \int_0^R \Phi_{\Delta, \Delta}(x) dx, \quad (4.20)$$

где  $\lambda$  – константа связи и  $\Phi_{\Delta, \Delta}$  – одно из релевантных полей ультрафиолетовой CFT с конформной размерностью  $\Delta = \bar{\Delta}$ . В общем случае возмущение может содержать произвольное число релевантных полей. В случае  $\mathcal{M}_{2,5}$ :  $\Delta_{1,2}^{(2,5)} = -\frac{1}{5}$  и  $\Phi_{1,2} = \Phi$  – релевантное поле.

Поскольку гамильтониан (4.18) коммутирует с оператором импульса

$$P = \frac{2\pi}{R} (L_0 - \bar{L}_0), \quad (4.21)$$

то гильбертово пространство факторизуется на секторы с заданным импульсом  $P = \frac{2\pi}{R}s$ , где  $s = L_0 - \bar{L}_0 \in \mathbb{Z}$  – спин.

Интегрирование по пространству в (4.20) даёт сохранение спина в матричных элементах возмущения  $V$ :

$$\begin{aligned} \langle \Delta_\beta | V | \Delta_\alpha \rangle &= \lambda \int_0^R \langle \Delta_\beta | \Phi(x) | \Delta_\alpha \rangle dx = \lambda \langle \Delta_\beta | \Phi(0) | \Delta_\alpha \rangle \int_0^R e^{2\pi i (S_\beta - S_\alpha) \frac{x}{R}} dx = \\ &= \lambda R \delta_{S_\alpha, S_\beta} \langle \Delta_\beta | \Phi(0) | \Delta_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (4.22)$$

Введём матричный элемент следующим образом:

$$\langle \Delta_\beta | V | \Delta_\alpha \rangle = \langle \Phi_\beta | L_\mu \Phi_k(z) L_{-\lambda} | \Phi_\alpha \rangle := \lim_{\zeta \rightarrow \infty} |\zeta|^{2\Delta_\beta} \langle \Phi_\alpha^\lambda(1,1) \Phi_k(z, \bar{z}) \Phi_\beta^\mu(\zeta, \bar{\zeta}) \rangle, \quad (4.23)$$

где

$$\Phi_{\alpha, \beta}^\lambda = L_{-\lambda} \Phi_{\alpha, \beta} = L_{-\lambda_1} L_{-\lambda_2} \dots \Phi_{\alpha, \beta} \quad (4.24)$$

Трёхточечная функция между примарными полями  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ :

$$\langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \Phi_3(z_3) \rangle = C_{\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{-\Delta_{ij}}, \quad (4.25)$$

где  $\Delta_{12} = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3$ ,  $\Delta_{13} = \Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2$ ,  $\Delta_{23} = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1$  и  $C_{\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3}$  – структурные константы.

Матричные элементы между двумя примарными полями пропорциональны структурным константам:

$$\langle \Phi_\beta | \Phi(0) | \Phi_\alpha \rangle = \left( \frac{2\pi}{R} \right)^{2\Delta} C_{\Phi_\beta \Phi \Phi_\alpha} \quad (4.26)$$

Произвольным матричный элемент вычисляется при помощи коммутационных соотношений алгебры Вирасоро и

$$[L_n, \Phi_k(z)] = (z^{n+1} \partial_z + \Delta_k(n+1)z^n) \Phi_k(z) \equiv \mathcal{L}_n \Phi_k(z) \quad (4.27)$$

$$[L_{\lambda_n}, [L_{\lambda_{n-1}}, \dots, [L_{\lambda_1}, \Phi_k(z)]]] = \mathcal{L}_{\lambda} \Phi_k(z) \quad (4.28)$$

$$\langle \Delta_\beta | \Phi(0) | \Delta_\alpha \rangle = \left( \frac{2\pi}{R} \right)^{2\Delta} B_{\alpha\beta}, \quad (4.29)$$

где  $B_{\alpha\beta} \propto C_{\Phi_\beta \Phi \Phi_\alpha}$  – безразмерный коэффициент.

Матричный элемент полного гамильтониана  $H$ :

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} = \langle \Delta_\beta | H | \Delta_\alpha \rangle &= \langle \Delta_\beta | H_{CFT} | \Delta_\alpha \rangle + \langle \Delta_\beta | V | \Delta_\alpha \rangle = \frac{2\pi}{R} \left( 2\Delta_\alpha - \frac{c}{12} \right) \delta_{\alpha\beta} + \\ &+ \lambda R \delta_{S_\beta, S_\alpha} \left( \frac{2\pi}{R} \right)^{2\Delta} B_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{R} \left( \left( 2\Delta_\alpha - \frac{c}{12} \right) \delta_{\alpha\beta} + G \delta_{S_\alpha, S_\beta} B_{\alpha\beta} \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

где  $G = \frac{\lambda}{2\pi} \left( \frac{2\pi}{R} \right)^{2\Delta-2} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \left( \frac{2\pi r}{R} \right)^{2\Delta-2}$  – безразмерная эффективная константа связи.

Возмущённый гамильтониан в конкретном модуле Верма ( $S_\alpha = S_\beta$ ):

$$H = \frac{2\pi}{R} \left( 2\Delta - \frac{c}{12} \right) \mathbf{1} + \frac{2\pi G}{R} B \quad (4.31)$$

## 4.5 Базис из квазипримарных полей

*Квазипримарное поле* – поле  $|\Delta\rangle$ , удовлетворяющее условию

$$L_1 |\Delta\rangle = 0 \quad (4.32)$$

Все примарные поля являются квазипримарными. Из определения следует, что квазипримарное поле не может быть записано как производная поля из предыдущего уровня.

Модуль Верма  $\mathcal{V}_{\Delta, N}$  может быть разложен на 2 ортогональных подпространства (это разложение удобно для вычисления матричных элементов). Первое подпространство состоит из квазипримарных состояний на уровне  $N$ , второе – из производных  $L_{-1}^m |\Delta\rangle$ , где  $|\Delta\rangle$  – квазипримарное поле на уровне  $N - m$ . Поэтому число линейно независимых квазипримарных состояний на уровне  $N$  равно

$$Q_\Delta(N) = \nu_\Delta(N) - \nu_\Delta(N-1) \quad (4.33)$$

Выразим матричный элемент между производными от квазипримарных полей  $\langle \Delta_\beta | L_1^k \Phi_\Delta(0) L_{-1}^n | \Delta_\alpha \rangle$  через матричный элемент между квазипримарными полями  $\langle \Delta_\beta | \Phi_\Delta(0) | \Delta_\alpha \rangle$ . Зададим матричный элемент на плоскости следующим образом:

$$\langle \Delta_\beta | L_1^k \Phi_\Delta(1) L_{-1}^n | \Delta_\alpha \rangle = \lim_{\xi \rightarrow 0} \partial_\xi^k \partial_x^n |\xi|^{2\Delta_\alpha} \left\langle \Phi_{\Delta_\alpha} \left( \frac{1}{\xi} \right) \Phi_\Delta(1) \Phi_{\Delta_\beta}(x) \right\rangle \quad (4.34)$$

$$\left\langle \Phi_{\Delta_\alpha} \left( \frac{1}{\xi} \right) \Phi_\Delta(1) \Phi_{\Delta_\beta}(x) \right\rangle = \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right)^{\Delta_\beta - \Delta_\alpha - \Delta} \left( \frac{1}{\xi} - x \right)^{\Delta - \Delta_\beta - \Delta_\alpha} (1-x)^{\Delta_\alpha - \Delta - \Delta_\beta} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta_\beta | L_1^k \Phi_\Delta(1) L_{-1}^n | \Delta_\alpha \rangle &= \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \partial_\xi^k \partial_x^n (1-x)^{\Delta_\beta - \Delta_\alpha - \Delta} (1-\xi x)^{\Delta - \Delta_\beta - \Delta_\alpha} (1-x)^{\Delta_\alpha - \Delta - \Delta_\beta} \langle \Delta_\beta | \Phi_\Delta(1) | \Delta_\alpha \rangle = \\
 &= \sum_{l_1, l_2} \partial_\xi^{l_1} (1-\xi x)^{\Delta - \Delta_\beta - \Delta_\alpha} \partial_\xi^{k-l_1} \partial_x^{k-l_2} (1-\xi x)^{\Delta - \Delta_\beta - \Delta_\alpha} \partial_x^{n-k+l_2} (1-x)^{\Delta_\alpha - \Delta - \Delta_\beta} \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta_\beta | L_1^k \Phi_\Delta(0) L_{-1}^n | \Delta_\alpha \rangle &= \\
 &= k!n! \sum_{l=0}^{\min(k,n)} \frac{(\Delta_\beta + \Delta_\alpha - \Delta)_l (\Delta + \Delta_\alpha - \Delta_\beta)_{n-l} (\Delta + \Delta_\beta - \Delta_\alpha)_{k-l}}{l!(k-l)!(n-l)!} \langle \Delta_\beta | \Phi_\Delta(0) | \Delta_\alpha \rangle \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Вычислим норму состояния  $L_{-1}^n |\Delta\rangle$ . Для этого сначала вычислим коммутатор по правилу Лейбница:

$$[L_1, L_{-1}^n] = \sum_{j=0}^{n-1} L_{-1}^j [L_1, L_{-1}] L_{-1}^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} L_{-1}^j 2L_0 L_{-1}^{n-1-j} \quad (4.38)$$

$$[L_0, L_{-1}^{n-1-j}] = (n-1-j) L_{-1}^{n-1-j} \quad (4.39)$$

$$[L_1, L_{-1}^n] = 2 \sum_{j=0}^{n-1} L_{-1}^{n-1} (L_0 + n-1-j) = L_{-1}^{n-1} (2nL_0 + n(n-1)) \quad (4.40)$$

$$\langle \Delta | L_1^n L_{-1}^n | \Delta \rangle = (2n\Delta + n(n-1)) \langle \Delta | L_1^{n-1} L_{-1}^{n-1} | \Delta \rangle \quad (4.41)$$

$$\langle \Delta | L_1^n L_{-1}^n | \Delta \rangle = n! \prod_{j=0}^{n-1} (2\Delta + j) = n! (2\Delta)_n, \quad (4.42)$$

где  $(2\Delta)_n = \frac{\Gamma(2\Delta+n)}{\Gamma(2\Delta)}$  – символ Похгаммера.

## Глава 5

# Интегрируемые возмущения минимальных моделей

### 5.1 Прямолинейный поиск сохраняющихся токов малых спинов

Рассмотрим интегрируемые возмущения конформной теории поля на примере возмущений минимальных конформных моделей. Пусть  $S_0$  – действие минимальной конформной модели с центральным зарядом  $c < 1$ . Сначала рассмотрим модели общего положения, а потом уже минимальные. Рассмотрим возмущённую модель в евклидовом пространстве с действием

$$S[\Phi] = S_0 + \lambda \int d^2 \mathbf{x} \Phi_\Delta(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

где  $\Phi_\Delta(\mathbf{x})$  – примарный оператор нулевого спина и размерности  $\Delta < 1$ . Пока никак более не будем ограничивать допустимые значения размерности возмущающего оператора.

В конформной теории поля имеется бесконечно много интегралов движения. Обозначим через  $L_n$ ,  $\bar{L}_n$  генераторы двух представлений алгебры Вирасоро, действующих на локальные операторы:

$$(L_n \Phi_\Delta)(\mathbf{x}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^{n+1} T(w) \Phi_\Delta(\mathbf{x}), \quad (5.2)$$

$$(\bar{L}_n \Phi_\Delta)(\mathbf{x}) = \oint \frac{d\bar{w}}{2\pi i} (\bar{w} - \bar{z})^{n+1} T(\bar{w}) \Phi_\Delta(\mathbf{x}), \quad (5.3)$$

где интегралы берутся по маленьким петлям, охватывающим точку  $\mathbf{x} = (z, \bar{z})$ . Тогда для любого элемента  $\Lambda$  подалгебры универсальной обёртывающей алгебры  $U(Vir)$  алгебры Вирасоро, порождённой элементами  $L_{-n}$  ( $n > 0$ ), можно определить операторы

$$\Lambda(\mathbf{x}) = (\Lambda I)(\mathbf{x}), \quad \bar{\Lambda}(\mathbf{x}) = (\bar{\Lambda} I)(\mathbf{x}) \quad (5.4)$$

в конформном семействе единичного оператора. Например,

$$(L_{-1} I)(\mathbf{x}) = \partial I = 0, \quad (L_{-2} I)(\mathbf{x}) = T, \quad (L_{-3} I)(\mathbf{x}) = (L_{-1} L_{-2} I)(\mathbf{x}) = \partial T(\mathbf{x}) \quad (5.5)$$

Для этих операторов имеем

$$\bar{\partial} \Lambda(\mathbf{x}) = 0, \quad \partial \bar{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.6)$$

Вообще говоря, соответствующие интегралы движения не коммутируют. Но среди них имеются серии коммутирующих интегралов движения, которые обеспечивают интегрируемость минимальных конформных моделей.

Изучим, как меняются тождества (5.6) под действием возмущения. Наша задача будет состоять в том, чтобы найти такие операторы  $T_s(x)$  спина  $s$  среди киральных (правых или левых) потомков единичного оператора и такие операторы  $\theta_s(x)$  спина  $s$ , чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\begin{cases} \bar{\partial}T_{s+1} = \partial\theta_{s-1}, & s > 0 \\ \partial T_{s-1} = \bar{\partial}\theta_{s+1}, & s < 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Тогда мы сможем сказать, что система обладает интегралами движения

$$I_s = \begin{cases} \int dz T_{s-1} + \int d\bar{z} \theta_{s-1}, \\ \int d\bar{z} T_{s+1} + \int dz \theta_{s-1} \end{cases} \quad (5.8)$$

Интегралы можно брать вдоль любых контуров (комплексно-сопряженных друг другу для  $z$  и  $\bar{z}$  в евклидовом пространстве), уходящих в обе стороны на пространственную бесконечность. Продолжение в пространство Минковского очевидно. Коммутативность этих интегралов движения, несомненно, должна проверяться отдельно.

$$\langle \bar{\partial}\Lambda(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{Z} \int [\mathcal{D}\Phi] \bar{\partial}\Lambda(\mathbf{x}) e^{-S[\Phi]}, \quad Z = \int [\mathcal{D}\Phi] e^{-S[\Phi]} \quad (5.9)$$

В первом порядке по теории возмущений имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(\mathbf{x}) = -\lambda \int d^2\mathbf{y} \Phi_{\Delta}(\mathbf{y}) \bar{\partial}\Lambda(\mathbf{x}) \quad (5.10)$$

Если элемент  $\Lambda$  является элементом градуировки  $(-s)$  в  $U(Vir)$ , операторное разложение для оператора  $\Lambda(\mathbf{x})$  с примарным оператором  $\Phi_{\Delta}(\mathbf{x})$  в конформной теории поля имеет вид

$$\Phi_{\Delta}(\mathbf{y}) \Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-w)^{k-s} (\Lambda_{-k} \Phi_{\Delta})(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} = (z, \bar{z}), \quad \mathbf{y} = (w, \bar{w}) \quad (5.11)$$

Здесь  $(\Lambda_{-k} \Phi_{\Delta})$  – некоторый правый (киральный) потомок оператора  $\Phi_{\Delta}$  уровня  $k$ . Отсюда находим

$$\Phi_{\Delta}(\mathbf{y}) \bar{\partial}\Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\partial}_z (z-w)^{k-s} (\Lambda_{-k} \Phi_{\Delta})(\mathbf{y}) \underset{k \rightarrow s-k-1}{=} \pi \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_z^k \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) (\Lambda_{k-s+1} \Phi_{\Delta})(\mathbf{y}), \quad (5.12)$$

где мы использовали тождество  $\bar{\partial}z^{-1} = \pi\delta(\mathbf{x})$ . Из формулы (5.10) находим

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\Lambda(\mathbf{x}) &= -\lambda \int d^2\mathbf{y} \Phi_{\Delta}(\mathbf{y}) \bar{\partial}\Lambda(\mathbf{x}) = -\pi\lambda \int d^2\mathbf{y} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_z^k \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) (\Lambda_{k-s+1} \Phi_{\Delta})(\mathbf{y}) = \\ &= \pi\lambda \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k (\Lambda_{k-s+1} \Phi_{\Delta})(\mathbf{y}) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k (\Lambda_{k-s+1} \Phi_{\Delta})(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Мы продолжили сумму до бесконечности, поскольку члены с  $k \geq s$  равны нулю. Используя разложение (5.11), находим

$$\bar{\partial}\Lambda(\mathbf{x}) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^k \Lambda(\mathbf{y}) \Phi_{\Delta}(\mathbf{x}) \quad (5.14)$$

Воспользуемся тождеством:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^k f(w, z) & \underset{u=z-w}{=} \oint \frac{du}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \partial_z^k f(u-z, z) = \\ & = \oint \frac{du}{2\pi i} f(z, z+u) = \oint \frac{dw'}{2\pi i} f(z, w') \end{aligned} \quad (5.15)$$

Интеграл по  $w' = z+u$  берётся по маленькой окружности вокруг нуля. Окончательно находим

$$\bar{\partial}\Lambda(\mathbf{x}) = \pi\lambda \oint \frac{dw}{2\pi i} \Phi_{\Delta}(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{w}) \quad (5.16)$$

Получаем

$$\bar{\partial}\Lambda(\mathbf{x}) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(\mathbf{x}), \quad (5.17)$$

где

$$(\mathcal{D}_n\Lambda)(\mathbf{x}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n-1} \Phi_{\Delta}(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{z}) \quad (5.18)$$

Эту формулу мы будем использовать в дальнейшем.

$$L_n\Phi_{\Delta}(\mathbf{x}) = \int_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n+1} T(w) \Phi_{\Delta}(\mathbf{x}) \quad (5.19)$$

Воспользуемся равенством (4.27):

$$[L_n, \Phi_{\Delta}(\mathbf{x})] = \int_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w) \Phi_{\Delta}(\mathbf{x}) = z^{n+1} \partial \Phi_{\Delta}(\mathbf{x}) + (n+1)z^n \Delta \Phi_{\Delta}(\mathbf{x}) \quad (5.20)$$

Вычислим коммутатор  $[L_m, \mathcal{D}_n]$ , считая  $r_1 > r_2$ :

$$\begin{aligned} [L_m, \mathcal{D}_n]\Phi_{\Delta}(z) &= \left( \oint_{C_z^{r_1}} \frac{d\zeta}{2\pi i} \oint_{C_z^{r_2}} \frac{d\omega}{2\pi i} - \oint_{C_z^{r_2}} \frac{d\omega}{2\pi i} \oint_{C_z^{r_1}} \frac{d\zeta}{2\pi i} \right) \times \\ &\quad \times (\zeta-z)^{m+1} (\omega-z)^{n-1} T(\zeta) \Phi_{\Delta}(z) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Для первого выражения точка  $\omega$  лежит внутри контура по  $\zeta$ , а во втором – снаружи. Тогда такой коммутатор можно представить в виде

$$\begin{aligned} [L_m, \mathcal{D}_n]\Phi_{\Delta}(z) &= \oint_{C_z^r} \frac{d\omega}{2\pi i} (\omega-z)^{n-1} \oint_{C_{\omega}^{r_0}} \frac{d\zeta}{2\pi i} (\zeta-z)^{m+1} T(\zeta) \Phi_{\Delta}(\omega) = \\ &= \oint_{C_z^r} \frac{d\omega}{2\pi i} (\omega-z)^{n-1} ((\omega-z)^{m+1} \partial \Phi_{\Delta}(\omega) + (m+1)(\omega-z)^m \Delta \Phi_{\Delta}(\omega)) = \\ &= - \oint_{C_z^r} \frac{d\omega}{2\pi i} (m+n-\Delta(m+1)) (\omega-z)^{m+n-1} \Phi_{\Delta}(\omega) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$[L_m, \mathcal{D}_n] = -((1-\Delta)(m+1) + n-1) \mathcal{D}_{m+n} \quad (5.23)$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathcal{D}_{-n}I)(\mathbf{x}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{-n-1} \Phi_{\Delta}(w, \bar{z}) \quad (5.24)$$

Разложим поле  $\Phi_{\Delta}$  в ряд Тейлора:

$$\Phi_{\Delta}(w, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (L_{-1}^n \Phi_{\Delta})(\mathbf{x}) (w-z)^n \quad (5.25)$$



$$(\mathcal{D}_{-n}I)(\mathbf{x}) = \frac{1}{n!}(L_{-1}^n\Phi_\Delta)(\mathbf{x}) \quad (5.26)$$

Применим теперь (5.23) и (5.26) к вычислению правых частей нескольких первых операторов  $\Lambda$ . Для  $\Lambda(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) = (L_{-2}I)(\mathbf{x})$  имеем

$$\bar{\partial}T = \pi\lambda\mathcal{D}_1L_{-2}I = -\pi\lambda(1-\Delta)\mathcal{D}_{-1}I = -\pi\lambda(1-\Delta)L_{-1}\Phi_\Delta = -\pi\lambda(1-\Delta)\partial\Phi_\Delta \quad (5.27)$$

Отсюда получаем

$$T_2 = L_{-2}I, \quad \Theta_0 = -\pi\lambda(1-\Delta)\Phi_\Delta \quad (5.28)$$

Для  $\Lambda(\mathbf{x}) = L_{-2}^2I(\mathbf{x})$  имеем

$$\begin{aligned} \bar{\partial}L_{-2}^2I &= \pi\lambda\mathcal{D}_1L_{-2}^2I = \pi\lambda(-(1-\Delta)\mathcal{D}_{-1}L_{-2}I + L_{-2}\mathcal{D}_1L_{-2}I) = \\ &= \pi\lambda((1-\Delta)(3-\Delta)\mathcal{D}_{-3}I - 2(1-\Delta)L_{-2}\mathcal{D}_{-1}I + L_{-2}^2\mathcal{D}_1I) = \\ &= -\pi\lambda(1-\Delta)\left(2L_{-2}L_{-1} - \frac{3-\Delta}{6}\right)\Phi_\Delta(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Для  $\Lambda(\mathbf{x}) = L_{-2}^3I(\mathbf{x})$  имеем

$$\begin{aligned} \bar{\partial}L_{-2}^3I &= \pi\lambda\mathcal{D}_1L_{-2}^3I = \pi\lambda(-(1-\Delta)\mathcal{D}_{-1}L_{-2}^2I + L_{-2}\mathcal{D}_1L_{-2}^2I) = \\ &= \pi\lambda((1-\Delta)(3-\Delta)\mathcal{D}_{-3}L_{-2}I - 2(1-\Delta)L_{-2}\mathcal{D}_{-1}L_{-2}I + L_{-2}^2\mathcal{D}_1L_{-2}I) = \\ &= \pi\lambda((1-\Delta)(3-\Delta)L_{-2}\mathcal{D}_{-3}I + (1-\Delta)(3-\Delta)(\Delta-5)\mathcal{D}_{-5}I - 2(1-\Delta)L_{-2}^2\mathcal{D}_{-1}I - \\ &- 2(1-\Delta)(\Delta-3)\mathcal{D}_{-3}I + L_{-2}^3\mathcal{D}_1I + (\Delta-1)L_{-2}^2\mathcal{D}_{-1}I) = \pi\lambda\left(3(1-\Delta)(3-\Delta)\frac{1}{6}L_{-1}^3\Phi_\Delta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-\Delta)(3-\Delta)(5-\Delta)}{120}L_{-1}^5\Phi_\Delta - 3(1-\Delta)L_{-2}^2L_{-1}\Phi_\Delta\right) = \\ &= -\pi\lambda(1-\Delta)\left(3L_{-2}^2L_{-1} - \frac{3-\Delta}{2}L_{-1}^3 + \frac{(3-\Delta)(5-\Delta)}{120}L_{-1}^5\right)\Phi_\Delta \end{aligned} \quad (5.30)$$

Для  $\Lambda(\mathbf{x}) = L_{-3}^2I(\mathbf{x})$  имеем

$$\begin{aligned} \bar{\partial}L_{-3}^2I &= \pi\lambda\mathcal{D}_1L_{-3}^2I = \pi\lambda(L_{-3}\mathcal{D}_1L_{-3}I - 2(1-\Delta)\mathcal{D}_{-2}L_{-3}I) = \\ &= \pi\lambda(L_{-3}^2\mathcal{D}_1I - 4(1-\Delta)L_{-3}\mathcal{D}_{-2}I - 2(1-\Delta)(2\Delta-5)\mathcal{D}_{-5}I) = \\ &= -2\pi\lambda(1-\Delta)\left(L_{-3}L_{-1}^2 - \frac{5-2\Delta}{120}L_{-1}^5\right)\Phi_\Delta \end{aligned} \quad (5.31)$$

Вообще говоря, правые части этих уравнений нельзя представить в виде  $L_{-1}(\dots)$ , поэтому при произвольном возмущении интегралов движения спинов 3 и 5 нет.

Рассмотрим сначала правую часть (5.29). Выражение может быть представлено в виде  $L_{-1}(\dots)$ , если имеется соотношение на третьем уровне, позволяющее выразить действие  $L_{-3}$  как комбинацию действий  $L_{-1}L_{-2}$  и  $L_{-1}^3$ .

Представление со старшим весом  $\Delta_{mn}$  имеет соотношение на уровне  $mn$ . Таким образом, нужное соотношение имеет место, если  $\Delta = \Delta_{13}$  или  $\Delta = \Delta_{31}$ :

$$\left(L_{-3} - \frac{2}{\Delta+2}L_{-1}L_{-2} + \frac{1}{(\Delta+1)(\Delta+2)}L_{-1}^3\right)\Phi_\Delta(x) = 0, \quad \Delta = \Delta_{1,3}, \Delta_{3,1} \quad (5.32)$$

Поскольку  $\Delta_{31} > 1$ , только для  $\Delta = \Delta_{13}$  возмущение будет релевантным. В этом случае получаем

$$T_4 = L_{-2}^2I, \quad \Theta_2 = -\pi\lambda\frac{1-\Delta_{13}}{2+\Delta_{13}}\left(2\Delta_{13}L_{-2} + \frac{(1-\Delta_{13})(2-\Delta_{13})(3+\Delta_{13})}{6(1+\Delta_{13})}L_{-1}^2\right) \quad (5.33)$$

Теперь будем искать ток спина 6 в виде

$$T_6 = AL_{-2}^3 I + BL_{-3}^2 I \quad (5.34)$$

Выделим в  $\bar{\partial}T_6$  слагаемые, не имеющие вид  $L_{-1}(\dots)$ :

$$\bar{\partial}T_6 = -\pi\lambda(1 - \Delta_{13})(A(3L_{-2}^2 L_{-1} - \alpha L_{-1}^3) + 2BL_{-3}L_{-1}^2 + L_{-1}(\dots))\Phi_\Delta, \quad \alpha = \frac{3 - \Delta_{13}}{2} \quad (5.35)$$

Коммутируя генераторы алгебры Вирасоро, можно получить

$$\Lambda = 6AL_{-2}L_{-3} + \left(3A - \frac{A\alpha - B}{6}\right)L_{-5} + L_{-1}(\dots) \quad (5.36)$$

Из условия нулевого вектора получаем

$$L_{-2}L_{-3} = \beta L_{-2}L_{-1}L_{-2} + \gamma L_{-2}L_{-1}^3 = \beta L_{-5} - \beta L_{-2}L_{-3} - \frac{\gamma}{6}L_{-5} + L_{-1}(\dots), \quad (5.37)$$

где  $\beta = \frac{2}{2+\Delta_{13}}$ ,  $\gamma = -\frac{1}{(1+\Delta_{13})(2+\Delta_{13})}$ . Отсюда выражаем  $L_{-2}L_{-3}$  через  $L_{-5}$ . После этого, приравняв коэффициент при  $L_{-5}$  к нулю, можно получить, что ток

$$T_6 = L_{-2}^3 I + \frac{c+2}{2}L_{-3}^2 I \quad (5.38)$$

порождает сохраняющийся заряд.

На шестом уровне также существует интеграл движения с током

$$T'_6 = L_{-2}^3 I + \left(\frac{18}{2\Delta + 1} + \Delta - 2\right)L_{-3}^2, \quad \Delta = \Delta_{12}, \Delta_{21} \quad (5.39)$$

Таким образом, при  $c < 1$  интегрируемость можно ожидать для

$$\Delta = \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{21} \quad (5.40)$$

## 5.2 Подсчёт числа интегралов движения из соображений размерностей пространств

Однако с ростом спина вычисления становятся все сложнее и сложнее. А. Замолдчиков в статье [10] предложил такой прием. Сначала найдём число потомков на каждом уровне, претендующих на то, чтобы давать ток. Пусть  $\mathcal{H}_{mn}$  – неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом  $\Delta_{mn}$ , а  $(\mathcal{H}_{mn})_s$  – подпространство уровня  $s$ . Размерности этих подпространств даются характеристиками

$$\chi_{mn}(x) = \sum_{s=0} x^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \quad (5.41)$$

вид которых известен из конформной теории поля. Тогда размерность таких пространств подходящих операторов, из которых мы можем построить  $T_{s+1}$  есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0} \quad (5.42)$$

Вычитание  $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$  нужно для того, чтобы исключить операторы вида  $L_{-1}(\dots)$ , а прибавление символа Кронекера – чтобы компенсировать тот факт, что производная

от единичного оператора равна нулю (т.е.  $k_0 = 0$ ). Учитывая, что в  $\mathcal{H}_{11}$  существует нулевой вектор  $L_{-1}$  на уровне 1, то

$$\chi_{11}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} (1-x) = \prod_{k=2}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = 1+x^2+x^3+2x^4+2x^5+4x^6+4x^7+\mathcal{O}(x^8) \quad (5.43)$$

Для величин  $k_s$  имеем характер

$$\begin{aligned} \chi_0(x) &\equiv \sum_{s=0}^{\infty} k_s x^s = \sum_{s=0}^{\infty} (\dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}) x^s = \\ &= x^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} x^s \dim(\mathcal{H}_{11})_s - \sum_{s=0}^{\infty} x^s \dim(\mathcal{H}_{11})_s + 1 \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\chi_0(x) = (x^{-1} - 1)(\chi_{11}(x) - 1) = x + x^3 + 2x^5 + 3x^7 + x^8 + 4x^9 + \mathcal{O}(x^{10}) \quad (5.45)$$

Теперь найдем количество уравнений, которые накладываются на коэффициенты в операторе  $T_s$ :

$$l_s = \dim(\mathcal{H}_{\Delta})_s - \dim(\mathcal{H}_{\Delta})_{s-1} \quad (5.46)$$

Здесь мы снова вычли из количества всех линейно-независимых операторов количество операторов вида  $L_{-1}(\dots)$ . Для соответствующего характера имеем

$$\chi_{1,\Delta}(x) = \sum_{s=1}^{\infty} l_s x^s = \sum_{s=1}^{\infty} (\dim(\mathcal{H}_{\Delta})_s - \dim(\mathcal{H}_{\Delta})_{s-1}) x^s = (1-x)\chi_{\Delta}(x) \quad (5.47)$$

Вычитая одно из другого, получаем нижнюю границу  $\delta_s = k_s - l_s$  количества решений на каждом уровне. Если  $\delta_s > 0$ , то на уровне  $s$  точно находятся  $\delta_s$  интегралов движения. Это условие достаточное, но не необходимое для существования интегралов.

В частности, в точках общего положения по  $s$  имеем

$$\chi_{mn}(x) = (1-x^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \quad (5.48)$$

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{13}$  получаем

$$\chi_0(x) - \chi_{1,13}(x) = -1 + x - x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5 - 3x^6 + x^7 - 4x^8 - 6x^{10} - 10x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.49)$$

Мы видим, что  $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = 1$ , а все остальные  $\delta_s \leq 0$ . Это значит, что, по крайней мере, для спинов  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$  имеются решения. На более высоких уровнях на самом деле уравнения избыточны.

Для случаев  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{12}, \Phi_{21}$  имеем

$$\chi_0(x) - \chi_{1,13}(x) = -1 + x - x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 - 2x^8 - 3x^{10} + x^{11} - 6x^{12} - 6x^{14} + \mathcal{O}(x^{15}) \quad (5.50)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1$ , т.е., по крайней мере, имеется 8 интегралов движения.

Применим этот приём к некоторым минимальным моделям  $\mathcal{M}_{p,q}$  с характером (здесь мы домножим характер на  $x^{-\Delta_{mn} + \frac{c}{24}}$ , чтобы он начинался с 1)

$$\chi_{mn}^{(p,q)}(x) = x^{-\Delta_{mn}} \chi(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x^{\Delta_{m+2kq,n}} - x^{\Delta_{-m+2kq,n}}), \quad \chi(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \quad (5.51)$$

Для некоторых унитарных минимальных моделей  $\mathcal{M}_{p,p+1}$ :

- $p = 3$  – минимальная модель  $\mathcal{M}_{3,4}$ , описывающая модель Изинга. Характер:

$$\chi_{11}^{(3,4)}(x) = 1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + \mathcal{O}(x^8) \quad (5.52)$$

$$\chi_0^{(3,4)}(x) = x + x^3 + x^5 + 2x^7 + 2x^9 + x^{10} + 3x^{11} + x^{12} + 4x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (5.53)$$

$$\chi_{1,\Delta}^{(3,4)}(x) = (1 - x)\chi_{\Delta}^{(3,4)}(x) \quad (5.54)$$

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{21} = \Phi_{22}$  (возмущение оператором  $\sigma$ ) получаем

$$\chi_{21}^{(3,4)}(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.55)$$

$$\chi_{1,21}^{(3,4)}(x) = 1 + x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + 3x^{12} + 3x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (5.56)$$

$$\chi_0^{(3,4)}(x) - \chi_{1,21}^{(3,4)}(x) = -1 + x - x^6 + x^7 - x^8 - x^{10} + x^{11} - 2x^{12} + x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (5.57)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_7 = \delta_{11} = \delta_{13} = \delta_{17} = \delta_{19} = 1$ . Т.е., по крайней мере, имеется 6 интегралов движения.

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{12} = \Phi_{31}$  (возмущение оператором  $\epsilon$ ) получаем

$$\chi_{12}^{(3,4)}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.58)$$

$$\chi_{1,12}^{(3,4)}(x) = 1 + x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + 2x^{10} + x^{11} + 3x^{12} + 2x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (5.59)$$

$$\chi_0^{(3,4)}(x) - \chi_{1,12}^{(3,4)}(x) = -1 + x + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + x^7 - x^8 + x^9 - x^{10} + 2x^{11} + \mathcal{O}(x^{12}) \quad (5.60)$$

Мы получаем  $\delta_{2k+1} > 0 \forall k \in \mathbb{Z}$ , т.е. интеграл есть на каждом нечётном спине.

- $p = 4$  – минимальная модель  $\mathcal{M}_{4,5}$ , описывающая трикритическую модель Изинга. Характер:

$$\chi_{11}^{(4,5)} = 1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \mathcal{O}(x^8) \quad (5.61)$$

$$\chi_0^{(4,5)}(x) = (x^{-1} - 1)(\chi_{11}^{(4,5)}(x) - 1) = x + x^3 + 2x^5 + 3x^7 + x^8 + 4x^9 + 2x^{10} + \mathcal{O}(x^{11}) \quad (5.62)$$

$$\chi_{1,\Delta}^{(4,5)}(x) = (1 - x)\chi_{\Delta}^{(4,5)}(x) \quad (5.63)$$

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{21} = \Phi_{33}$  получаем

$$\chi_{21}^{(4,5)}(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.64)$$

$$\chi_{1,21}^{(4,5)}(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 5x^{11} + 8x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.65)$$

$$\chi_0^{(4,5)}(x) - \chi_{1,21}^{(4,5)}(x) = -1 + x - x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 - 2x^8 + x^9 - 3x^{10} + x^{11} + \mathcal{O}(x^{12}) \quad (5.66)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_9 = \delta_{11} = \delta_{13} = 1$ . Т.е., по крайней мере имеется 6 интегралов движения.

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{12} = \Phi_{42}$  получаем

$$\chi_{12}^{(4,5)}(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.67)$$

$$\chi_{1,12}^{(4,5)}(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.68)$$

$$\chi_0^{(4,5)}(x) - \chi_{1,12}^{(4,5)}(x) = -1 + x - x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 - x^8 - 2x^{10} + x^{11} - 4x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.69)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = \delta_{13} = 1 > 0$ . Т.е., по крайней мере, имеется 5 интегралов движения.

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{31} = \Phi_{23}$  получаем

$$\chi_{31}^{(4,5)}(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.70)$$

$$\chi_{1,31}^{(4,5)}(x) = 1 + x^2 + 2x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 4x^8 + 3x^9 + 6x^{10} + 5x^{11} + 9x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.71)$$

$$\chi_0^{(4,5)}(x) - \chi_{1,12}^{(4,5)}(x) = -1 + x - x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 - 3x^8 + x^9 + \mathcal{O}(x^{10}) \quad (5.72)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_9 = \delta_{11} = 1 > 0$ . Т.е., по крайней мере, имеется 5 интегралов движения.

- $p = 5$  – минимальная модель  $\mathcal{M}_{5,6}$ , описывающая  $\mathbb{Z}_3$  модель Поттса. Характер:

$$\chi_{11}^{(5,6)} = 1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \mathcal{O}(x^8) \quad (5.73)$$

$$\chi_0^{(5,6)}(x) = (x^{-1} - 1)(\chi_{11}^{(5,6)}(x) - 1) = x + x^3 + 2x^5 + 3x^7 + x^8 + 4x^9 + 2x^{10} + \mathcal{O}(x^{11}) \quad (5.74)$$

$$\chi_{1,\Delta}^{(4,5)}(x) = (1 - x)\chi_{\Delta}^{(4,5)}(x) \quad (5.75)$$

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{21} = \Phi_{44}$  получаем

$$\chi_{21}^{(5,6)}(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.76)$$

$$\chi_{1,21}^{(5,6)}(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 5x^{10} + 6x^{11} + 9x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.77)$$

$$\chi_0^{(5,6)}(x) - \chi_{1,12}^{(5,6)}(x) = -1 + x - x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 - 2x^8 - 3x^{10} + x^{11} + \mathcal{O}(x^{12}) \quad (5.78)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1$ . Т.е., по крайней мере имеется 4 интеграла движения.

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{12} = \Phi_{53}$  получаем

$$\chi_{12}^{(5,6)}(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.79)$$

$$\chi_{1,12}^{(5,6)}(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 4x^9 + 5x^{10} + 6x^{11} + 9x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.80)$$

$$\chi_0^{(5,6)}(x) - \chi_{1,12}^{(5,6)}(x) = -1 + x - x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 - 2x^8 - 3x^{10} + x^{11} + \mathcal{O}(x^{12}) \quad (5.81)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1 > 0$ . Т.е., по крайней мере, имеется 4 интеграла движения.

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{31} = \Phi_{34}$  получаем

$$\chi_{31}^{(5,6)}(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.82)$$

$$\chi_{1,31}^{(5,6)}(x) = 1 + x^2 + 2x^4 + x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 8x^{10} + 7x^{11} + 12x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.83)$$

$$\chi_0^{(4,5)}(x) - \chi_{1,31}^{(4,5)}(x) = -1 + x - x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5 - 3x^6 + x^7 - 4x^8 - 6x^{10} + \mathcal{O}(x^{12}) \quad (5.84)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = 1 > 0$ . Т.е., по крайней мере, имеется 3 интеграла движения.

Для некоторых неунитарных минимальных моделей  $\mathcal{M}_{2,2N+1}$ :

- $N = 2$  – минимальная модель  $\mathcal{M}_{2,5}$ , описывающая модель Ли-Янга. Характер:

$$\chi_{11}^{(2,5)}(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + \mathcal{O}(x^8) \quad (5.85)$$

$$\chi_0^{(2,5)}(x) = (x^{-1} - 1)(\chi_{11}^{(2,5)}(x) - 1) = x + x^5 + x^7 + x^9 + 2x^{11} + 2x^{13} + x^{14} + \mathcal{O}(x^{15}) \quad (5.86)$$

$$\chi_{1,\Delta}^{(2,5)}(x) = (1 - x)\chi_{\Delta}^{(2,5)}(x) \quad (5.87)$$

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{21} = \Phi_{31}$  получаем

$$\chi_{21}^{(2,5)}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.88)$$

$$\chi_{1,21}^{(2,5)}(x) = 1 + x^4 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (5.89)$$

$$\chi_0^{(2,5)}(x) - \chi_{1,21}^{(2,5)}(x) = -1 + x - x^4 + x^5 - x^6 + x^7 - x^8 - x^{10} + x^{11} - 2x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.90)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = \delta_{13} = \delta_{17} = \delta_{19} = \delta_{23} = 1$ . Т.е., по крайней мере, имеется 8 интегралов движения.

- $N = 3$  – минимальная модель  $\mathcal{M}_{2,7}$ . Характер:

$$\chi_{11}^{(2,7)}(x) = 1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + \mathcal{O}(x^7) \quad (5.91)$$

$$\chi_0^{(2,7)}(x) = (x^{-1} - 1)(\chi_{11}^{(2,7)}(x) - 1) = x + x^3 + x^5 + 2x^7 + x^8 + 2x^9 + x^{10} + \mathcal{O}(x^{11}) \quad (5.92)$$

$$\chi_{1,\Delta}^{(2,7)}(x) = (1 - x)\chi_{\Delta}^{(2,7)}(x) \quad (5.93)$$

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{21} = \Phi_{51}$  получаем

$$\chi_{21}^{(2,7)}(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.94)$$

$$\chi_{1,21}^{(2,7)}(x) = 1 + x^3 + x^4 + 2x^6 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 3x^{11} + 5x^{12} + 4x^{13} + \mathcal{O}(x^{14}) \quad (5.95)$$

$$\chi_0^{(2,7)}(x) - \chi_{1,21}^{(2,7)}(x) = -1 + x - x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 - x^8 - 2x^{10} + x^{11} - 4x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.96)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = \delta_{13} = 1$ . Т.е., по крайней мере, имеется 5 интегралов движения.

Для  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{31} = \Phi_{41}$  получаем

$$\chi_{31}^{(2,7)}(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \mathcal{O}(x^6) \quad (5.97)$$

$$\chi_{1,31}^{(2,7)}(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7 + 3x^8 + 2x^9 + 4x^{10} + 3x^{11} + 6x^{12} + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (5.98)$$

$$\chi_0^{(3,7)}(x) - \chi_{1,31}^{(3,7)}(x) = -1 + x - x^2 + x^3 - x^4 - 2x^6 + x^7 - 2x^8 - 3x^{10} + x^{11} + \mathcal{O}(x^{12}) \quad (5.99)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_3 = \delta_7 = \delta_{11} = 1$ . Т.е., по крайней мере, имеется 4 интеграла движения.

В общих точках минимальных моделей с  $c < 1$  имеется по одному интегралу движения для следующих спинов:

$$\Phi_{\Delta} = \Phi_{31} : s = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.100)$$

$$\Phi_{\Delta} = \Phi_{21}, \Phi_{12} : s = 6n \pm 1, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.101)$$

В частности, эти ответы верны для унитарных моделей с  $c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}$  для  $p \geq 3$  в случае возмущения  $\Phi_{31}$  и для  $p \geq 6$  в случае возмущений  $\Phi_{21}, \Phi_{12}$ . В случае  $\Phi_{\Delta} = \Phi_{21}$  для моделей с  $p = 3, 4, 5$  имеется особый набор интегралов движения:

$$p = 3 : s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30} \rightarrow E_8 \quad (5.102)$$

$$p = 4 : s = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17 \pmod{18} \rightarrow E_7 \quad (5.103)$$

$$p = 5 : s = 1, 4, 5, 7, 8, 11 \pmod{12} \rightarrow E_6 \quad (5.104)$$

Для неунитарных минимальных моделей  $\mathcal{M}_{2,2N+1}$ :

$$c = 1 - \frac{3(2N - 1)^2}{2N + 1} \quad (5.105)$$

$$\Phi_{\Delta} = \Phi_{31} : s \in (2\mathbb{Z} + 1) \setminus ((2N - 1)\mathbb{Z}) \quad (5.106)$$

В случае  $N = 2$  ( $c = -\frac{22}{5}$ ), отвечающем модели Ли—Янга  $\mathcal{M}_{2,5}$ ,  $\Phi_{31} = \Phi_{21}$  и спектр спинов  $s$  является пересечением двух серий (5.100) и (5.101).

# Глава 6

## Применение TCSA к SLYM

Существует, по крайней мере, два способа реализации этой идеи:

- Усечение по уровню.

Первый метод – усекать пространство до уровня  $n$  в каждом модуле Верма гильбертова пространства. Это означает, что максимальное значение  $L_0 + \bar{L}_0$  в каждом представлении  $\Delta + \bar{\Delta} + 2n$ . Это может повлечь проблемы, если гильбертово пространство содержит модули Верма с большими значениями  $\Delta$ , т.к. эти состояния вызовут отчётливые изменения в спектре.

- Усечение по полной энергии.

Второй метод – усекать так, чтобы  $L_0 + \bar{L}_0 \leq 2n$ . Это означает, что максимальное значение  $L_0 + \bar{L}_0$  в каждом представлении равно  $2n$  и если у представления  $\Delta > n$ , то оно полностью исключается усечением до энергии  $2n$ . Этот метод имеет преимущество, что представления с большим весом не оказывают чрезмерного влияния, но имеет тот недостаток, что с влиянием усечения труднее разобраться аналитически.

Эти два метода дадут очень близкие результаты при  $n \gg \Delta$  для любой  $\Delta$  в модели. Будем использовать усечение по уровню для модели  $\mathcal{M}_{2,5}$  и усечение по энергии для  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$ . Гильбертово пространство со спином  $s$ , усечённое до уровня  $n$ , имеет размерность:

$$\mathcal{N}^{(p,q)}(n,s) = \sum_{\Delta} \sum_{N=0}^{n-s} \nu_{\Delta}^{(p,q)}(N) \nu_{\Delta}^{(p,q)}(N+s), \quad (6.1)$$

где  $\Delta$  перечисляет конформные семейства в модели.

Например, для модели Ли-Янга  $\mathcal{M}_{2,5}$ :

$$\mathcal{N}^{(2,5)}(5,0) = 5 + 12 = 17 \quad (6.2)$$

$$\mathcal{N}^{(2,5)}(15,0) = 280 + 677 = 957 \quad (6.3)$$

### 6.1 Базис из квазипримарных полей

Будем делать усечение до уровня  $N = 15$ .

Размерность  $\nu_I(N)$  (из характера  $\chi_{1,1}^{(2,5)}(x)$  (3.32)) и число квазипримарных состояний (4.33)

$$Q_I(N) = \nu_I(N) - \nu_I(N-1) + \delta_{N,1} \quad (6.4)$$

$N$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\nu_I(N)$	1	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	6	6	8	9
$Q_I(N)$	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	2	0	2	1

 Таблица 6.1: Размерность и число квазипримарных полей для модуля Верма поля  $I$ 

на каждом уровне для модуля Верма поля  $I$  записаны в табл. 6.1 (считаем  $\nu_I(-1) = 0$ , а  $\delta_{N,1}$  добавлена с учётом того, что  $L_{-1}I = 0$ ).

Размерность  $\nu_\Phi(N)$  (из характера  $\chi_{2,1}^{(2,5)}(x)$  в (3.33)) и число квазипримарных состояний (4.33)

$$Q_\Phi(N) = \nu_\Phi(N) - \nu_\Phi(N-1) \quad (6.5)$$

на каждом уровне для модуля Верма поля  $\Phi$  записаны в табл. 6.2 (считаем  $\nu_\Phi(-1) = 0$ ).

$N$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\nu_\Phi(N)$	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	6	7	9	10	12	14
$Q_\Phi(N)$	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2

 Таблица 6.2: Размерность и число квазипримарных полей для модуля Верма поля  $\Phi$ 

Выпишем нормированный базис из квазипримарных полей (сначала идут поля из модуля Верма поля  $I$ , затем  $\Phi$ ):

$$\Delta_1 = I \quad (6.6)$$

$$\Delta_2 = i\sqrt{\frac{5}{11}}L_{-2}I \quad (6.7)$$

$$\Delta_3 = \sqrt{\frac{162}{11935}} \left( L_{-6} - \frac{35}{36}L_{-3}^2 \right) I \quad (6.8)$$

$$\Delta_4 = \sqrt{\frac{25}{70356}} \left( L_{-8} - 3L_{-5}L_{-3} + \frac{3}{5}L_{-4}^2 \right) I \quad (6.9)$$

$$\Delta_5 = \sqrt{\frac{18}{63767}} \left( L_{-10} - \frac{11}{12}L_{-7}L_{-3} + \frac{11}{15}L_{-6}L_{-4} - \frac{11}{15}L_{-5}^2 \right) I \quad (6.10)$$

$$\Delta_6 = \frac{25}{2} \sqrt{\frac{35}{4559131434}} \left( -\frac{39}{10}L_{-9}L_{-3} + \frac{117}{25}L_{-8}L_{-4} - \frac{481}{50}L_{-7}L_{-5} + \right. \\ \left. + \frac{767}{175}L_{-6}^2 + L_{-12} \right) I \quad (6.11)$$

$$\Delta_7 = i\frac{153671}{10} \sqrt{\frac{3}{140300872910}} \left( -\frac{430729}{922026}L_{-9}L_{-3} - \frac{110065}{461013}L_{-8}L_{-4} - \right. \\ \left. - \frac{264043}{922026}L_{-7}L_{-5} - \frac{33601}{65859}L_{-6}^2 + \frac{164510}{461013}L_{-6}L_{-3}^2 + L_{-12} \right) I \quad (6.12)$$

$$\Delta_8 = 18\sqrt{\frac{5}{173998979}} \left( -\frac{7}{18}L_{-11}L_{-3} + \frac{28}{45}L_{-10}L_{-4} - \frac{7}{5}L_{-9}L_{-5} + \frac{16}{9}L_{-8}L_{-6} - \right. \\ \left. - \frac{79}{72}L_{-7}^2 + L_{-14} \right) I \quad (6.13)$$



$$\Delta_9 = i \frac{247416}{25} \sqrt{\frac{2}{25664991605}} \left( -\frac{20987}{76128} L_{-11} L_{-3} - \frac{7301}{30927} L_{-10} L_{-4} - \frac{31321}{164944} L_{-9} L_{-5} - \frac{58289}{247416} L_{-8} L_{-6} - \frac{71525}{247416} L_{-7}^2 + \frac{25855}{989664} L_{-8} L_{-3}^2 + \frac{77565}{329888} L_{-7} L_{-4} L_{-3} + L_{-14} \right) I \quad (6.14)$$

$$\Delta_{10} = i \frac{1153}{22} \sqrt{\frac{3}{535990}} \left( -\frac{365}{1153} L_{-12} L_{-3} - \frac{179}{1153} L_{-11} L_{-4} - \frac{252}{1153} L_{-10} L_{-5} - \frac{306}{1153} L_{-9} L_{-6} - \frac{1160}{3459} L_{-8} L_{-7} + \frac{165}{2306} L_{-9} L_{-3}^2 + \frac{275}{3459} L_{-8} L_{-4} L_{-3} + \frac{275}{2306} L_{-7} L_{-5} L_{-3} + L_{-15} \right) I \quad (6.15)$$

$$\Delta_{11} = \Phi \quad (6.16)$$

$$\Delta_{12} = \sqrt{\frac{5}{1482}} \left( L_{-4} - \frac{25}{2} L_{-3} L_{-1} \right) \Phi \quad (6.17)$$

$$\Delta_{13} = 62 \sqrt{\frac{5}{1634817}} \left( -\frac{35}{31} L_{-5} L_{-1} - \frac{525}{124} L_{-3} L_{-2} L_{-1} + L_{-6} \right) \Phi \quad (6.18)$$

$$\Delta_{14} = \frac{25}{\sqrt{236698}} \left( -\frac{5}{2} L_{-7} L_{-1} - \frac{6}{5} L_{-4}^2 + 5 L_{-4} L_{-3} L_{-1} + L_{-8} \right) \Phi \quad (6.19)$$

$$\Delta_{15} = i \frac{7}{2} \sqrt{\frac{5}{4018443}} \left( -\frac{25}{2} L_{-8} L_{-1} - \frac{5}{7} L_{-5} L_{-4} - \frac{125}{7} L_{-5} L_{-3} L_{-1} + \frac{225}{14} L_{-4}^2 L_{-1} + L_{-9} \right) \Phi \quad (6.20)$$

$$\Delta_{16} = 47 \sqrt{\frac{2}{4950203}} \left( -\frac{605}{188} L_{-9} L_{-1} - \frac{385}{282} L_{-6} L_{-4} - \frac{55}{564} L_{-5}^2 + \frac{1375}{564} L_{-6} L_{-3} L_{-1} + \frac{1375}{564} L_{-5} L_{-4} L_{-1} + L_{-10} \right) \Phi \quad (6.21)$$

$$\Delta_{17} = \frac{1}{11} i \sqrt{\frac{5}{13702}} \left( -10 L_{-10} L_{-1} - \frac{15}{7} L_{-7} L_{-4} + \frac{100}{7} L_{-7} L_{-3} L_{-1} - \frac{125}{7} L_{-6} L_{-4} L_{-1} + \frac{25}{2} L_{-5}^2 L_{-1} + L_{-11} \right) \Phi \quad (6.22)$$

$$\Delta_{18} = 40 \sqrt{\frac{105}{698596813}} \left( -\frac{35}{16} L_{-11} L_{-1} - \frac{113}{48} L_{-8} L_{-4} - \frac{41}{56} L_{-6}^2 + \frac{95}{96} L_{-8} L_{-3} L_{-1} + \frac{55}{32} L_{-7} L_{-4} L_{-1} + \frac{5}{8} L_{-6} L_{-5} L_{-1} + \frac{7}{24} L_{-4}^3 + L_{-12} \right) \Phi \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{19} = i \frac{6172859615}{14} \sqrt{\frac{3}{46573185837240060252974}} & \left( -\frac{34566275425}{11111147307} L_{-11} L_{-1} + \right. \\ & + \frac{144867739664}{11111147307} L_{-8} L_{-4} + \frac{698596813}{854703639} L_{-7} L_{-5} + \frac{23089835417}{11111147307} L_{-6}^2 + \\ & + \frac{10231315925}{11111147307} L_{-8} L_{-3} L_{-1} - \frac{17975971225}{3703715769} L_{-7} L_{-4} L_{-1} + \frac{4701214525}{1234571923} L_{-6} L_{-5} L_{-1} - \\ & \left. - \frac{25663691840}{11111147307} L_{-4}^3 + L_{-12} \right) \Phi \quad (6.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{20} = i \frac{200}{3} \sqrt{\frac{2}{1533403333}} & \left( -\frac{7}{16} L_{-12} L_{-1} - \frac{63}{80} L_{-9} L_{-4} + \frac{7}{40} L_{-8} L_{-5} - \frac{41}{80} L_{-7} L_{-6} + \right. \\ & + \frac{105}{32} L_{-9} L_{-3} L_{-1} - \frac{63}{16} L_{-8} L_{-4} L_{-1} + \frac{259}{32} L_{-7} L_{-5} L_{-1} - \frac{59}{16} L_{-6}^2 L_{-1} + L_{-13} \left. \right) \Phi \quad (6.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{21} = i \frac{3872}{3} \sqrt{\frac{5}{79528560713}} & \left( \frac{925}{704} L_{-13} L_{-1} - \frac{13195}{7744} L_{-10} L_{-4} + \frac{35}{64} L_{-9} L_{-5} - \frac{3175}{1408} L_{-8} L_{-6} + \right. \\ & + \frac{25}{1408} L_{-7}^2 - \frac{875}{1936} L_{-10} L_{-3} L_{-1} + \frac{175}{352} L_{-9} L_{-4} L_{-1} - \frac{875}{704} L_{-8} L_{-5} L_{-1} + \frac{1225}{1408} L_{-6} L_{-4}^2 - \\ & \left. - \frac{175}{704} L_{-5}^2 L_{-4} + L_{-14} \right) \Phi \quad (6.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{22} = \frac{373623381}{2} \sqrt{\frac{5}{1312291077602220331861}} & \left( -\frac{4516340575}{8966961144} L_{-13} L_{-1} - \frac{3871710367}{2988987048} L_{-10} L_{-4} + \right. \\ & + \frac{4020247525}{8966961144} L_{-9} L_{-5} - \frac{33119831795}{17933922288} L_{-8} L_{-6} + \frac{31951075}{221406448} L_{-7}^2 + \frac{104326075}{1120870143} L_{-10} L_{-3} L_{-1} + \\ & + \frac{2993011105}{4483480572} L_{-9} L_{-4} L_{-1} - \frac{3458236075}{8966961144} L_{-8} L_{-5} L_{-1} + \frac{821915675}{2241740286} L_{-7} L_{-6} L_{-1} + \\ & \left. + \frac{3148086095}{5977974096} L_{-6} L_{-4}^2 - \frac{449726585}{2988987048} L_{-5}^2 L_{-4} + L_{-14} \right) \Phi \quad (6.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{23} = i \frac{165}{2\sqrt{4835683438}} & \left( -\frac{60}{11} L_{-14} L_{-1} - \frac{61}{99} L_{-11} L_{-4} + \frac{10}{33} L_{-10} L_{-5} - \frac{74}{99} L_{-9} L_{-6} - \right. \\ & - \frac{5}{198} L_{-8} L_{-7} + \frac{200}{99} L_{-11} L_{-3} L_{-1} - \frac{85}{33} L_{-10} L_{-4} L_{-1} + \frac{655}{99} L_{-9} L_{-5} L_{-1} - \frac{775}{99} L_{-8} L_{-6} L_{-1} + \\ & \left. + \frac{225}{44} L_{-7}^2 L_{-1} + L_{-15} \right) \Phi \quad (6.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{24} = i \frac{587458735}{7392} \sqrt{\frac{19}{33706398798538143}} & \left( \frac{2636446870}{2232343193} L_{-14} L_{-1} - \frac{1351061546}{2232343193} L_{-11} L_{-4} + \right. \\ & + \frac{1033250602}{2232343193} L_{-10} L_{-5} + \frac{3954958994}{2232343193} L_{-9} L_{-6} - \frac{5570049565}{2232343193} L_{-8} L_{-7} - \frac{1171135050}{2232343193} L_{-11} L_{-3} L_{-1} + \\ & + \frac{573366100}{2232343193} L_{-10} L_{-4} L_{-1} - \frac{2915636200}{2232343193} L_{-9} L_{-5} L_{-1} - \frac{2689095950}{2232343193} L_{-8} L_{-6} L_{-1} + \\ & + \frac{1798975400}{2232343193} L_{-7}^2 L_{-1} + \frac{3679324355}{2232343193} L_{-7} L_{-4}^2 - \frac{3153706590}{2232343193} L_{-6} L_{-5} L_{-4} + \\ & \left. + \frac{1051235530}{6697029579} L_{-5}^3 + L_{-15} \right) \Phi \quad (6.29) \end{aligned}$$

Базис из квазипримарных полей спина  $s$  будут составлять поля:

$$L_{-1}^{k_1} \bar{L}_{-1}^{k_2} \Delta_\alpha, \quad s = k_1 - k_2 \quad (6.30)$$

Такое поле нужно не забыть отнормировать, используя (4.42)

## 6.2 Спектр состояний спина $s = 0$

Рассмотрим гильбертово пространство из состояний спина  $s = 0$ . Будем усекать его до уровней  $n = 5, 7, 9, 11, 13$ .

Вычислив матричные элементы между квазипримарными полями и их производными при помощи (4.28), а затем матрицу  $H$  при помощи (4.31) и (4.37), получим спектры (см. рис. 6.2 и 6.3) в относительных единицах. Размеры матрицы  $H$  в зависимости от уровня усечения  $n$  вычислены по формуле (6.1) и представлены в табл. 6.3.

$n$	5	7	9	11	13
$\mathcal{N}^{(2,5)}(n,0)$	17	43	102	219	472

Таблица 6.3: Размерность пространства со спином 0, усечённого до уровня  $n$

График зависимости  $\mathcal{N}^{(2,5)}(n,0)$  от  $n$  изображён на рис. 6.1.

Для проверки изменим  $\kappa \rightarrow \kappa(1 + 0.1)$ . Получим спектр на рис. 6.4. Как видно, при изменении  $\kappa$  интегрируемость нарушается.

Вычислим массы в полученном спектре. Для этого удобно построить зависимость  $E_k - E_1$  (см. рис. 6.5), где  $E_k$  –  $k$ -ый уровень энергии и выбирать точку, в которой график касается горизонтальной прямой. Полученные массы представлены в табл. 6.4.

$i$	0	1	2
$m_i$	0	1.23	2.51

Таблица 6.4: Масса  $m_i$   $i$ -го уровня энергии

Сравнивая с теорией, что в этой теории будет 1 бризер (см. раздел 4.3), получаем с точностью 2%, что  $m_1 = m_1^{\text{br}}$  – бризер, а  $m_2 = 2m_1^{\text{br}}$  – 2 бризера, а некоторые следующие уровни к нему стремятся, образуя непрерывный спектр, что соответствует ненулевым импульсу бризеров, направленных друг к другу, так что полный импульс  $P = \frac{2\pi}{R}s = 0$ . Таким образом, теория подтверждается.

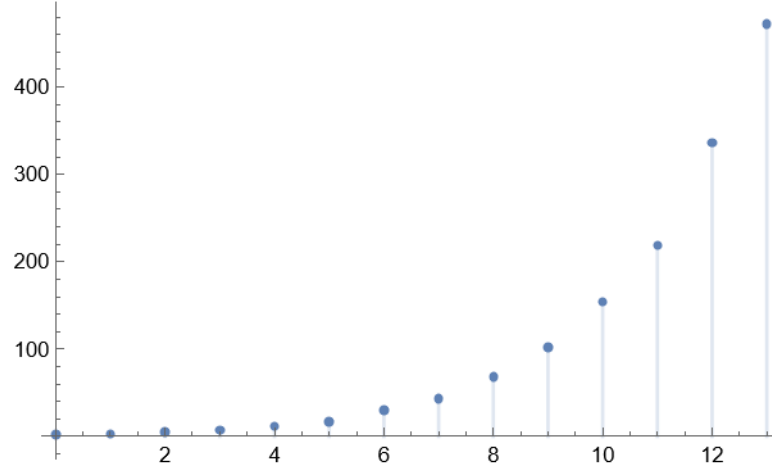
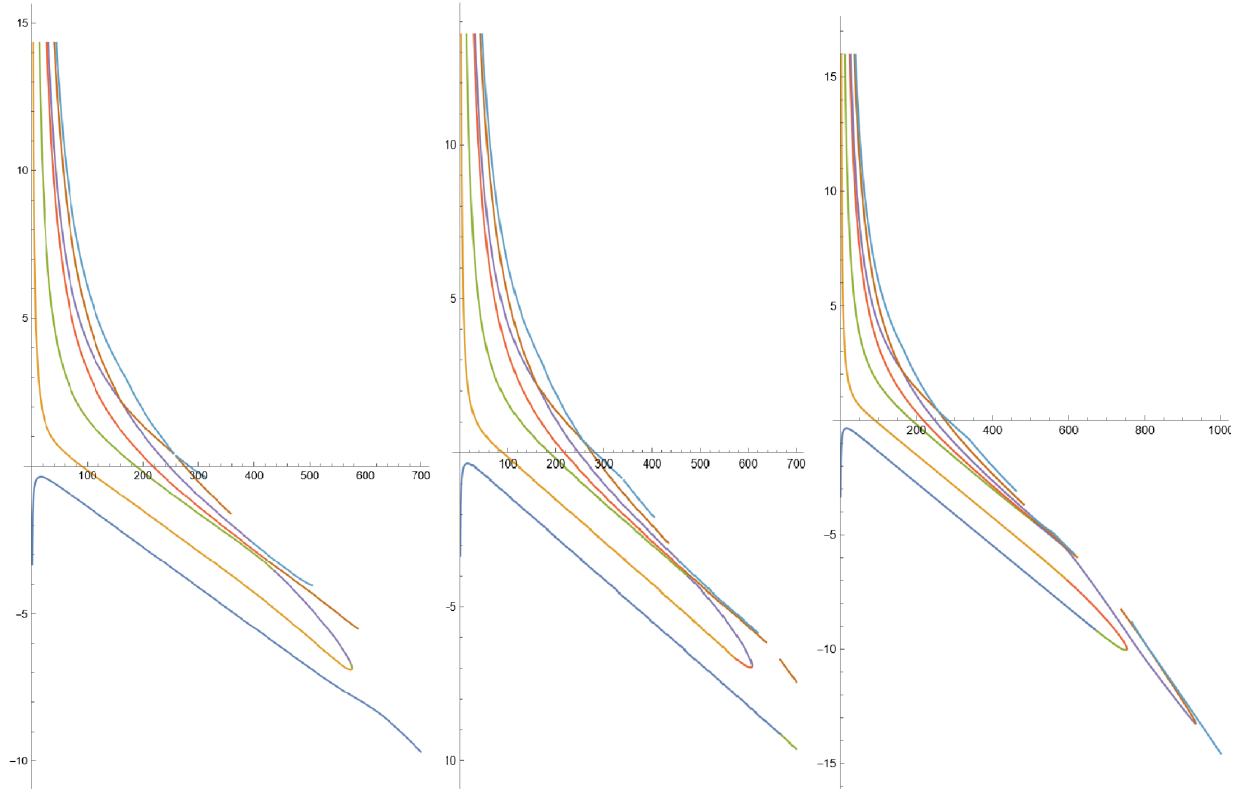
Исследуем точность метода в зависимости от числа уровней  $n$ . При обрезании до конечного числа уровней при удалении от конформной точки в инфракрасную (IR) область метод перестаёт работать: ветви спектра искривляются и пересекаются, образуя «клюв», или заканчиваются. В обоих случаях далее соответствующие собственные значения матрицы становятся мнимыми.

Будем характеризовать точность обрезки на уровне  $n$  абсциссой  $t(n)$ , на которой заканчивается 6 предпоследний (на рис. коричневый) уровень. Данные представлены в табл. 6.5. График зависимости  $t(n)$  см. на рис. 6.6.

## 6.3 Спектр состояний спина $s = 1$

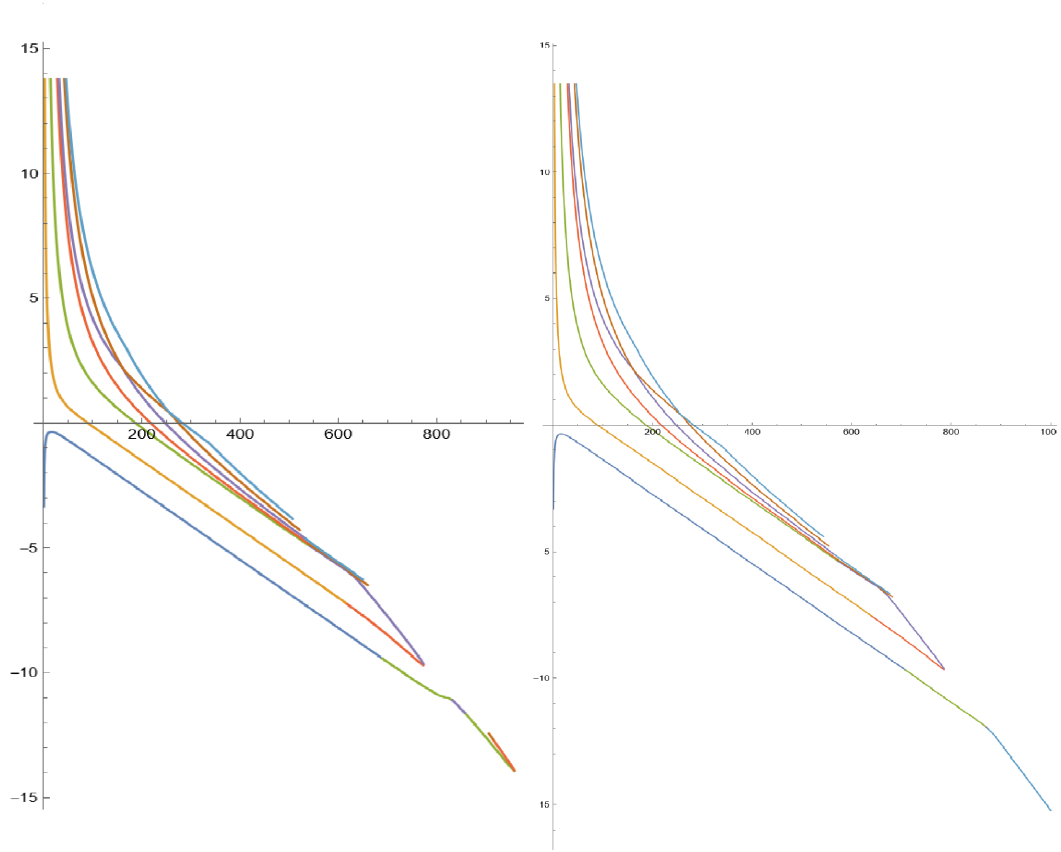
Рассмотрим гильбертово пространство из состояний спина  $s = 1$ . Будем усекать его до уровней  $n = 5, 7, 9$ .

$n$	5	7	9	11	13
$t(n)$	358	433	482	520	555

 Таблица 6.5: Точность метода  $t(n)$  от уровня обрезки  $n$ 

 Рис. 6.1: Размерность пространства со спином 0, усечённого до уровня  $n$ 

 Рис. 6.2: Первые 7 уровней спина  $s = 0$  для  $n = 5, 7, 9$ 

Вычислив матричные элементы между квазипримарными полями и их производными при помощи (4.28), а затем матрицу  $H$  при помощи (4.31) и (4.37), получим спектры (см. рис. 6.8) в относительных единицах. Размеры матрицы  $H$  в зависимости от уровня усечения  $n$  вычислены по формуле (6.1) и представлены в табл. 6.6.

График зависимости  $\mathcal{N}^{(2,5)}(n,1)$  от  $n$  изображён на рис. 6.7.


 Рис. 6.3: Первые 7 уровней спина  $s = 0$  для  $n = 11, 13$ 

$n$	5	7	9	11	13
$\mathcal{N}^{(2,5)}(n, 1)$	12	33	80	180	393

 Таблица 6.6: Размерность пространства со спином  $s = 1$ , усечённого до уровня  $n$ 

## 6.4 Спектр состояний спина $s = 2$

Рассмотрим гильбертово пространство из состояний спина  $s = 2$ . Будем усекать его до уровней  $n = 5, 7, 9$ .

Вычислив матричные элементы между квазипримарными полями и их производными при помощи (4.28), а затем матрицу  $H$  при помощи (4.31) и (4.37), получим спектры (см. рис. 6.10) в относительных единицах. Размеры матрицы  $H$  в зависимости от уровня усечения  $n$  вычислены по формуле (6.1) и представлены в табл. 6.7.

$n$	5	7	9	11	13
$\mathcal{N}^{(2,5)}(n, 2)$	9	25	64	147	319

 Таблица 6.7: Размерность пространства со спином  $s = 2$ , усечённого до уровня  $n$ 

График зависимости  $\mathcal{N}^{(2,5)}(n, 2)$  от  $n$  изображён на рис. 6.9.

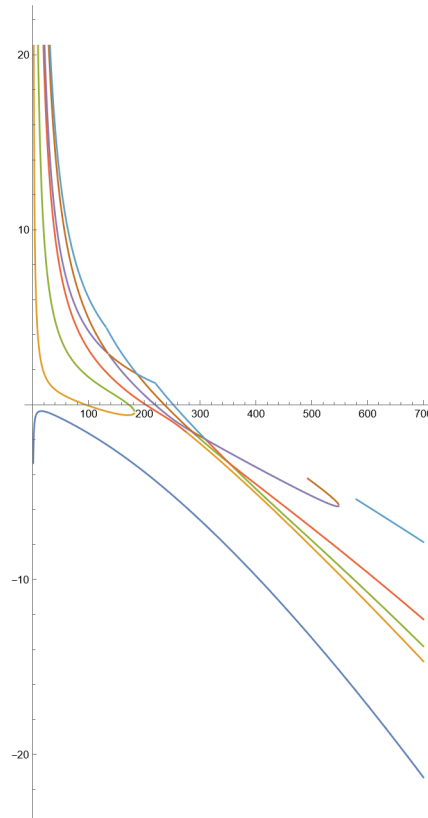


Рис. 6.4: Первые 7 уровней спина  $s = 0$  для  $n = 5$  с изменённым  $\kappa$  на 10%

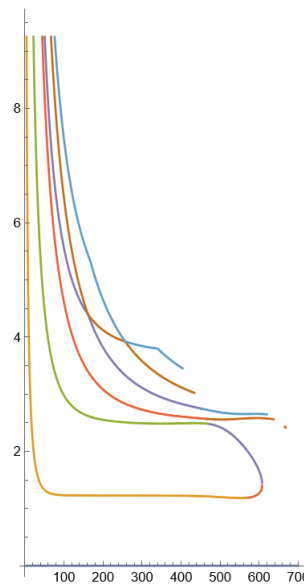


Рис. 6.5: Зависимость  $E_k - E_1$  для  $n = 7$

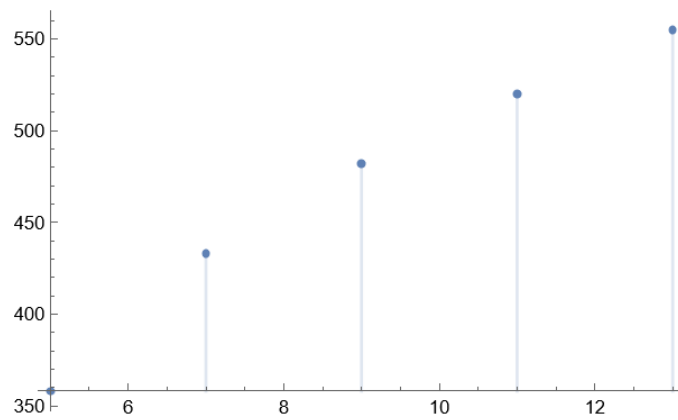


Рис. 6.6: Точность метода  $t(n)$  от уровня обрезки  $n$

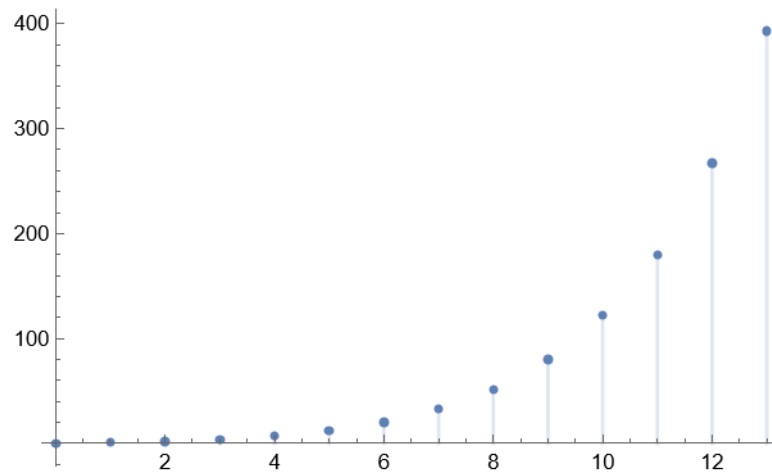


Рис. 6.7: Размерность пространства со спином  $s = 1$ , усечённого до уровня  $n$

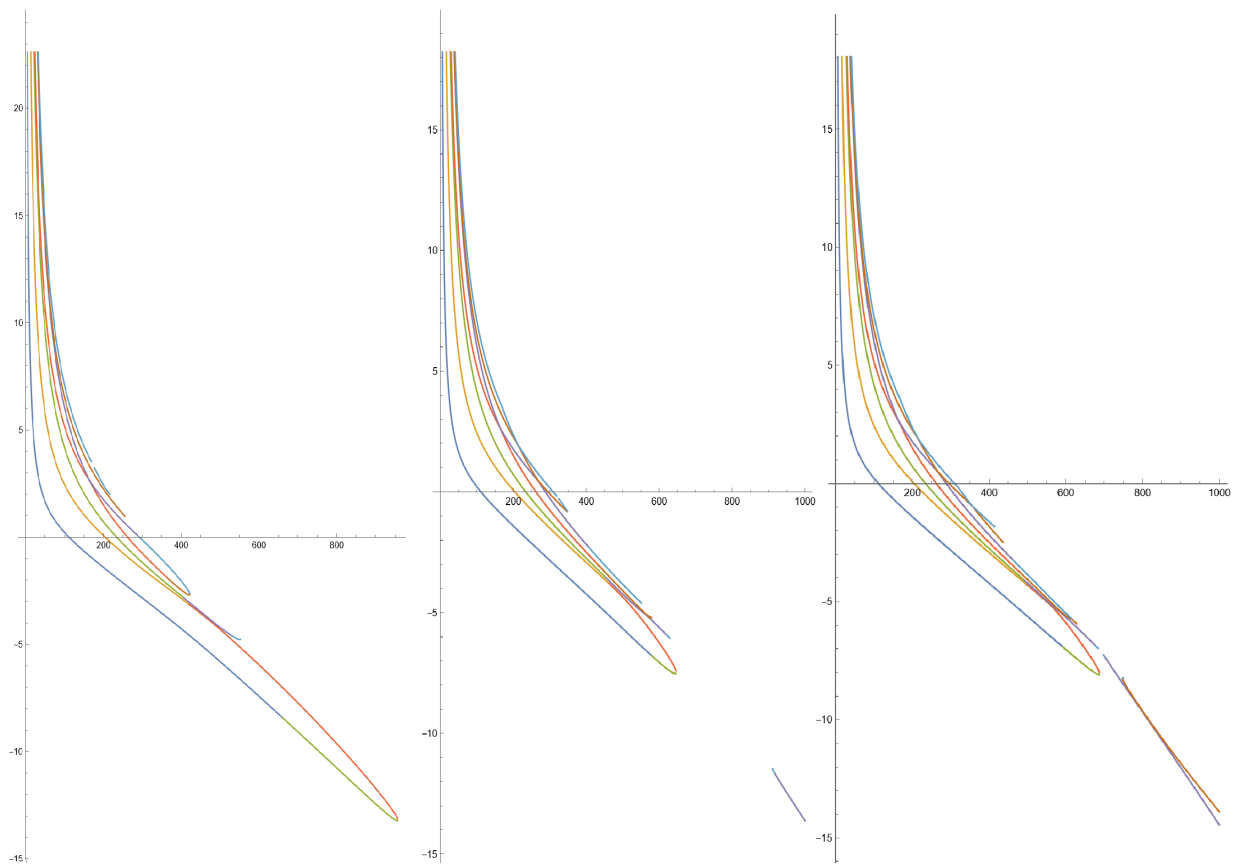


Рис. 6.8: Первые 7 уровней спина  $s = 1$  для  $n = 5, 7, 9$

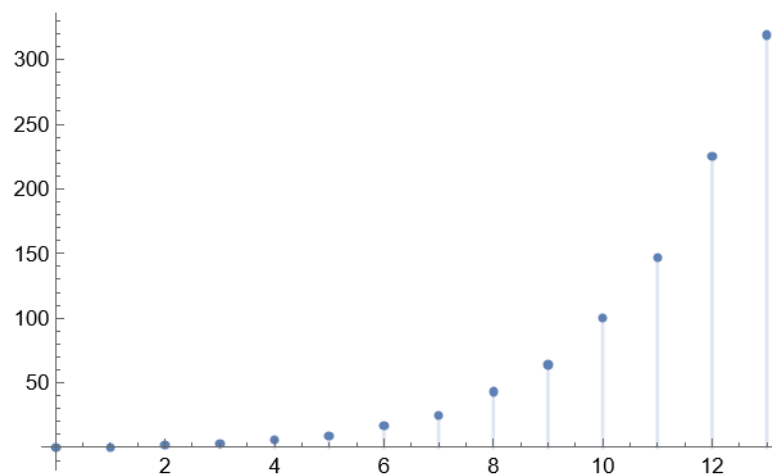


Рис. 6.9: Размерность пространства со спином  $s = 2$ , усечённого до уровня  $n$



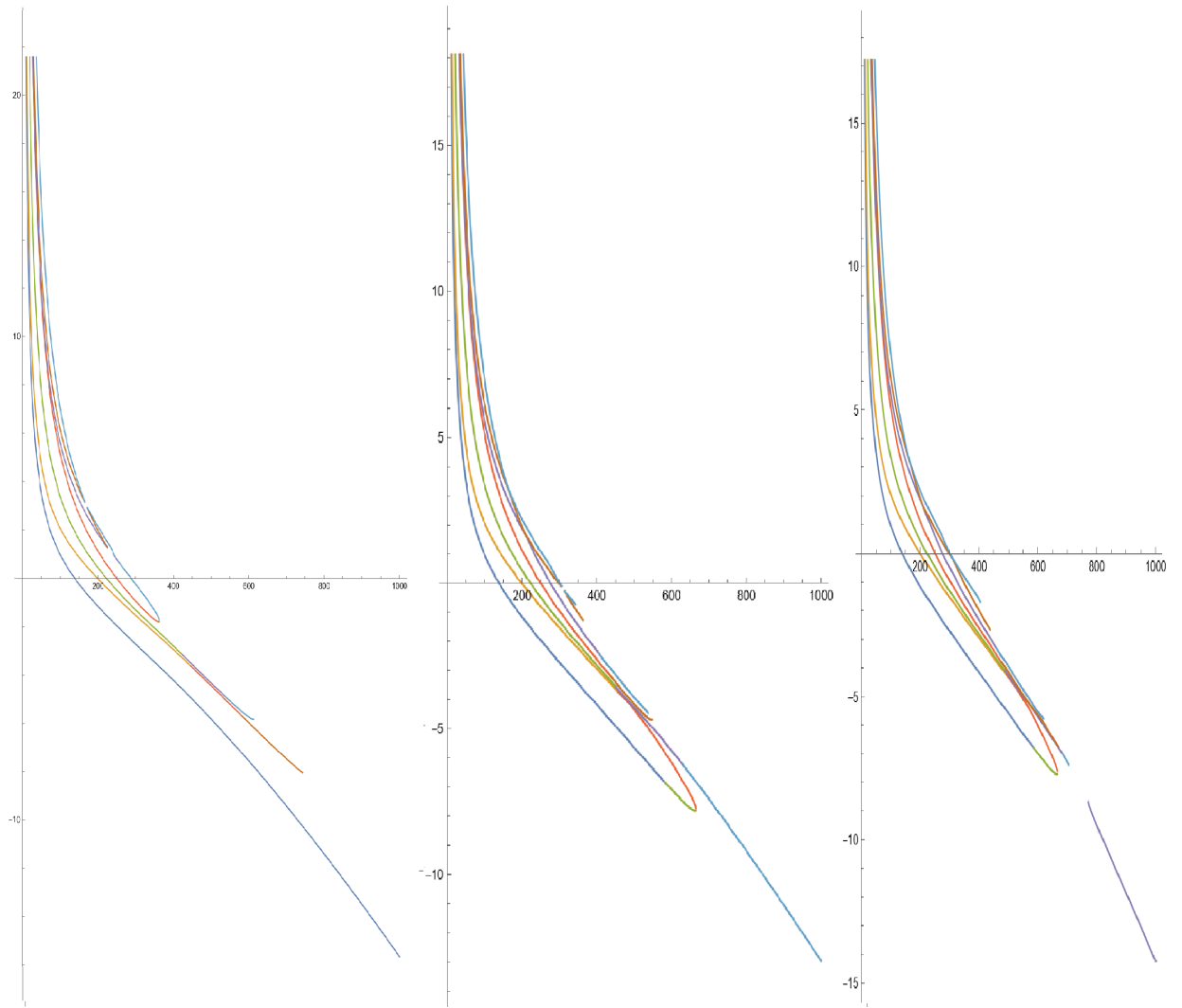


Рис. 6.10: Первые 7 уровней спина  $s = 2$  для  $n = 5, 7, 9$

# Глава 7

## Применение TCSA к возмущённой $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$

### 7.1 Базис из полей полного спина $s = 0$

Построим базис из состояний со спином  $s = 0$ . Будем пользоваться фактом

$$\mathcal{M}_{3,10}^{D_6} = \mathcal{M}_{2,5} \otimes \mathcal{M}_{2,5} \quad (7.1)$$

Поэтому базис состоит из

$$L_{-1}^{k_1} \bar{L}_{-1}^{k_2} |\Delta_\alpha\rangle \otimes L_{-1}^{l_1} \bar{L}_{-1}^{l_2} |\Delta_\beta\rangle, \quad s = k_1 - k_2 + l_1 - l_2 = 0 \quad (7.2)$$

$$H_{CFT} = \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}\right) \otimes 1 + 1 \otimes \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}\right) \quad (7.3)$$

Энергия такого состояния:

$$H_{CFT}(L_{-1}^{k_1} \bar{L}_{-1}^{k_2} |\Delta_\alpha\rangle \otimes L_{-1}^{l_1} \bar{L}_{-1}^{l_2} |\Delta_\beta\rangle) = 2\Delta_\alpha + k_1 + k_2 + 2\Delta_\beta + l_1 + l_2 - \frac{c}{6} \quad (7.4)$$

Также нужно не забыть отнормировать это состояние. Матрица  $H_{CFT}$  будет диагональной со значениями:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Delta_\alpha | L_1^{k_1} \bar{L}_1^{k_2} \otimes \langle \Delta_\beta | L_1^{l_1} \bar{L}_1^{l_2} | H_{CFT} | L_{-1}^{k_1} \bar{L}_{-1}^{k_2} |\Delta_\alpha\rangle \otimes L_{-1}^{l_1} \bar{L}_{-1}^{l_2} |\Delta_\beta\rangle}{\langle \Delta_\alpha | L_1^{k_1} \bar{L}_1^{k_2} \otimes \langle \Delta_\beta | L_1^{l_1} \bar{L}_1^{l_2} | L_{-1}^{k_1} \bar{L}_{-1}^{k_2} |\Delta_\alpha\rangle \otimes L_{-1}^{l_1} \bar{L}_{-1}^{l_2} |\Delta_\beta\rangle} = \\ = 2\Delta_\alpha + k_1 + k_2 + 2\Delta_\beta + l_1 + l_2 - \frac{c}{6} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Будем делать усечение по энергии.

Размеры матрицы  $H_{CFT}$  (а значит и  $H$ ) в зависимости от энергии усечения  $E$  вычислены представлены в табл. 7.1.

$n$	5	7	9	11
$\mathcal{N}^{(3,10)}(E, 0)$	27	59	151	317

Таблица 7.1: Размерность пространства со спином  $s = 0$ , усечённого до энергии  $E$

## 7.2 Возмущение оператором $\Phi \otimes \Phi$

Для начала возмутим теорию оператором  $\Phi_{3,1} = \Phi \otimes \Phi$ . Соответствующий матричный элемент:

$$\langle \mathcal{O}_\gamma | \otimes \langle \mathcal{O}_\delta | \Phi \otimes \Phi | \mathcal{O}_\alpha \rangle \otimes | \mathcal{O}_\beta \rangle = \langle \mathcal{O}_\gamma | \Phi | \mathcal{O}_\alpha \rangle \langle \mathcal{O}_\delta | \Phi | \mathcal{O}_\beta \rangle, \quad (7.6)$$

где  $|\mathcal{O}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\rangle$  – производные квазипримарных  $|\Delta_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\rangle$ .

Вычислив матричные элементы между квазипримарными полями и их производными при помощи перемножения соответствующих элементов из предыдущей главы, а затем матрицу  $H$ , получим спектры (см. рис. (см. рис. 7.1 и 7.2) в относительных единицах.

Вычислим массы в полученном спектре. Для этого удобно построить зависимость  $E_k - E_1$  (см. рис. 7.3), где  $E_k$  –  $k$ -ый уровень энергии и выбирать точку, в которой график касается горизонтальной прямой. Полученные массы представлены в табл. 7.2.

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$m_i$	0	1.18	1.47	2.33	2.50	2.77	3.04

Таблица 7.2: Масса  $m_i$   $i$ -го уровня энергии

Сравнивая с гипотезой, что в этой теории будут 2 бризера и кинк (см. раздел 4.3), получаем с точностью 2%, что  $m_1 = m_{\text{kin}} - \text{кинк}$ , а  $m_2 = m_1^{\text{br}}$  и  $m_4 = m_2 = m_2^{\text{br}}$  – бризеры. Таким образом, гипотеза подтверждается.

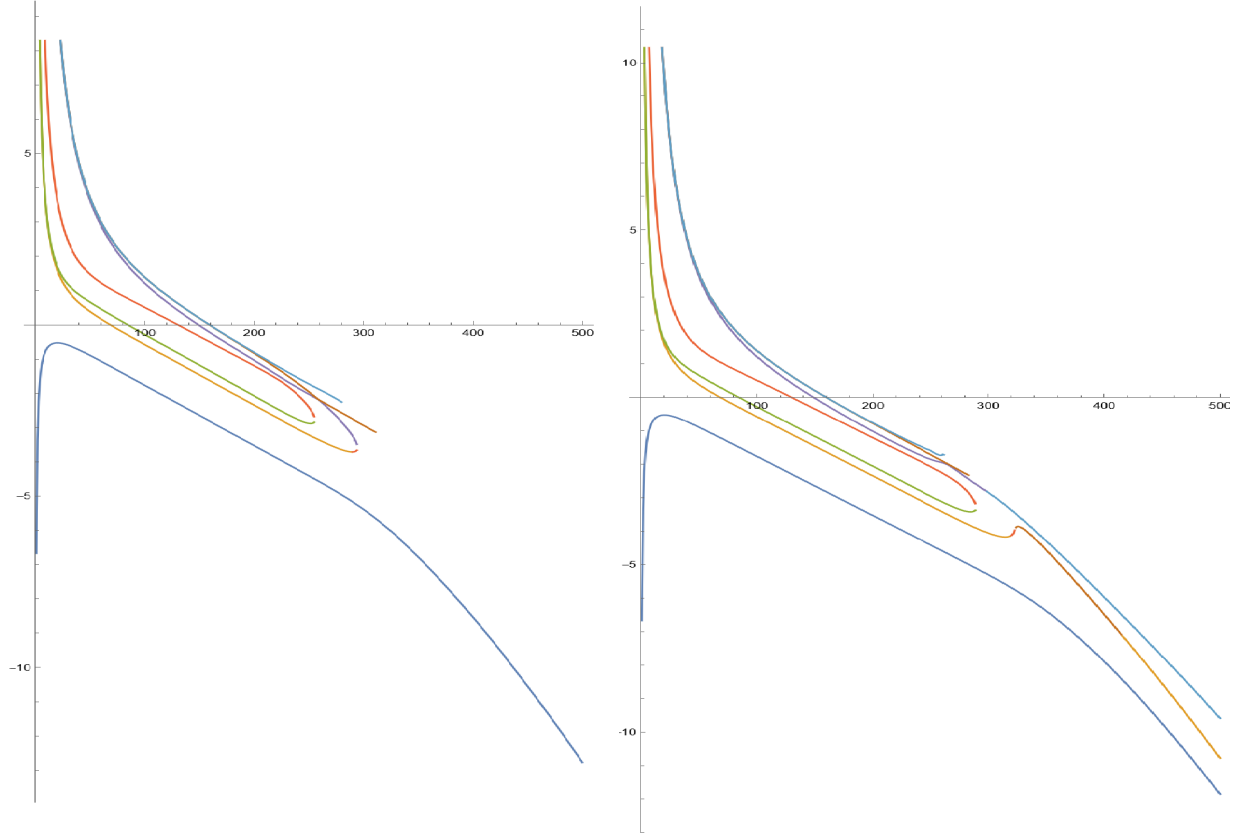


Рис. 7.1: Первые 7 уровней спина  $s = 0$  для  $E = 5, 7$

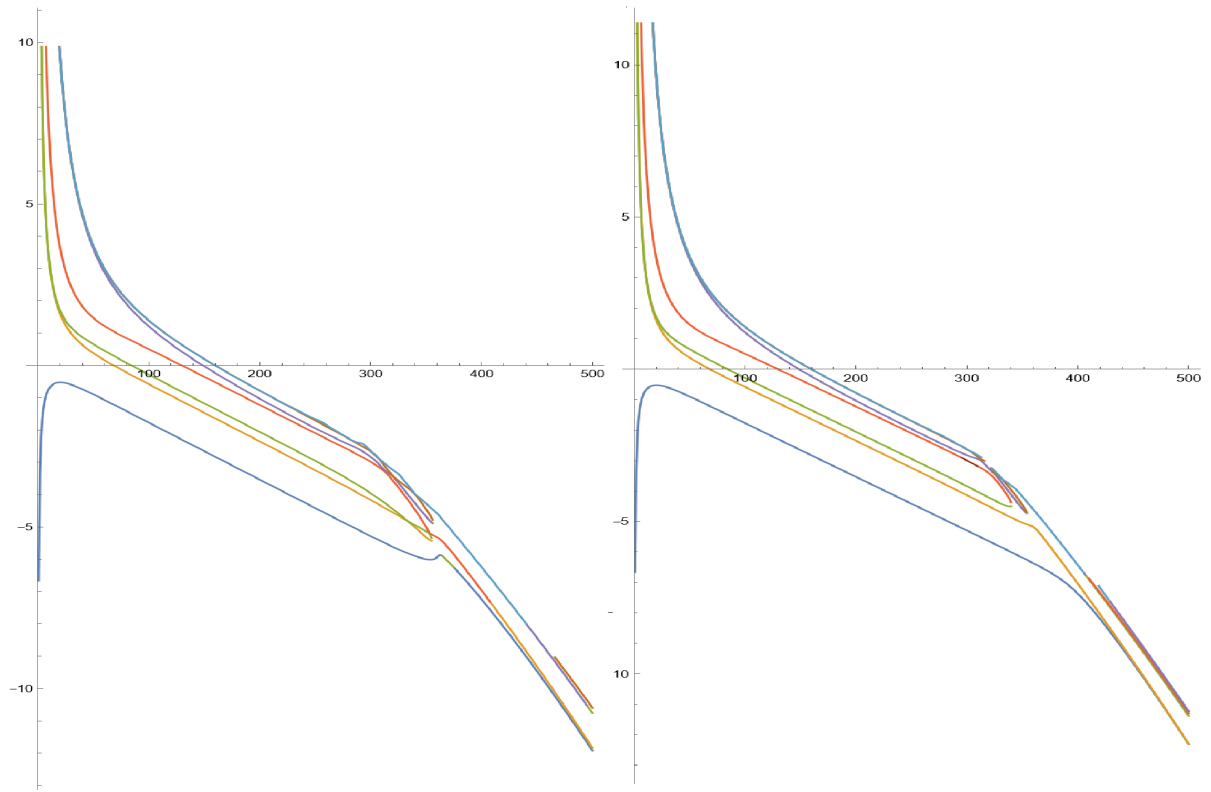


Рис. 7.2: Первые 7 уровней спина  $s = 0$  для  $E = 9, 11$

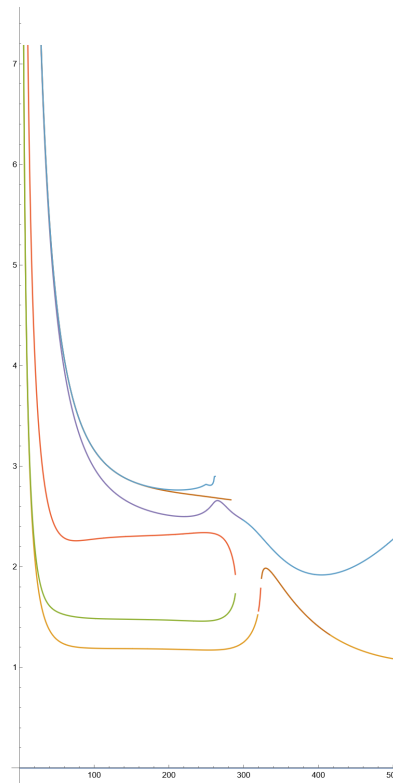


Рис. 7.3: Зависимость  $E_k - E_1$  для  $E = 7$

### 7.3 Возмущение оператором $L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi \otimes \Phi + \Phi \otimes L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi$

Рассмотрим возмущение  $\Phi_{7,1} = L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi \otimes \Phi + \Phi \otimes L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi$ . Соответствующий матричный элемент:

$$\langle \mathcal{O}_\gamma | \otimes \langle \mathcal{O}_\delta | L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi \otimes \Phi | \mathcal{O}_\alpha \rangle \otimes | \mathcal{O}_\beta \rangle = (\Delta + \Delta_\gamma - \Delta_\alpha) \langle \mathcal{O}_\gamma | \Phi | \mathcal{O}_\alpha \rangle \langle \mathcal{O}_\delta | \Phi | \mathcal{O}_\beta \rangle, \quad (7.7)$$

где  $|\mathcal{O}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\rangle$  – производные квазипримарных  $|\Delta_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\rangle$ .

$$\Delta = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{если } |\Delta_\gamma\rangle, |\Delta_\alpha\rangle \text{ из модуля Верма поля } \Phi \\ \frac{2}{5}, & \text{если } |\Delta_\gamma\rangle, |\Delta_\alpha\rangle \text{ из разных модулей Верма} \end{cases} \quad (7.8)$$

Вычислив матричные элементы между квазипримарными полями и их производными при помощи перемножения соответствующих элементов из предыдущей главы, а затем матрицу  $H$ , получим спектры (см. рис. 7.4) в относительных единицах.

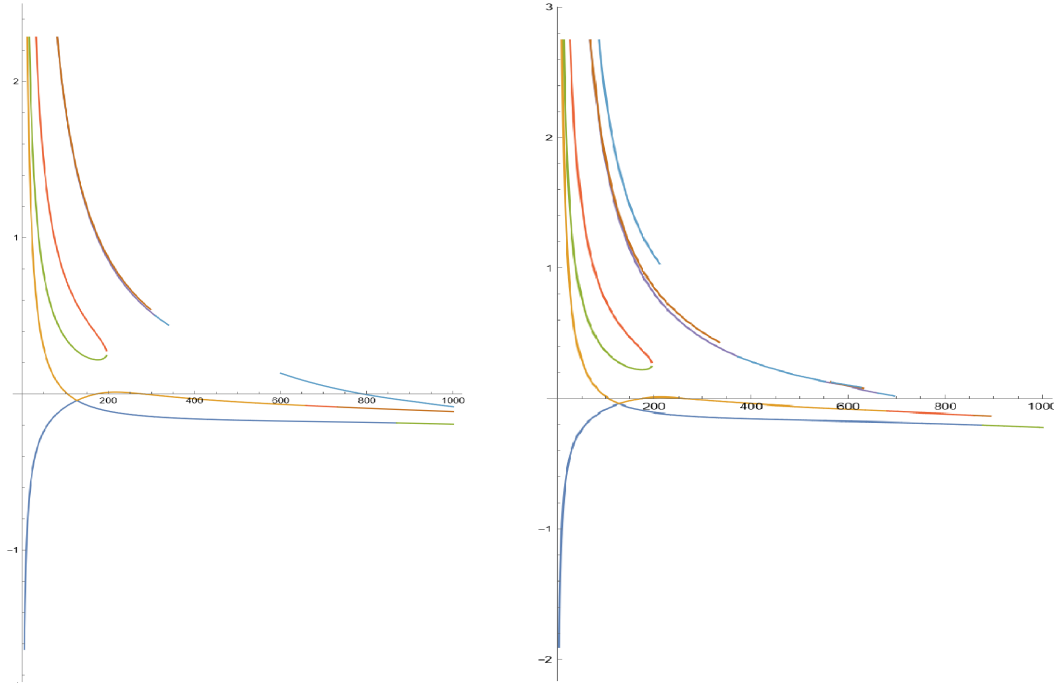


Рис. 7.4: Первые 7 уровней спина  $s = 0$  для  $E = 5, 7$

Как видно, эти графики соответствуют тому, что массивных частиц в теории не будет и RG поток донесёт до другой CFT  $\mathcal{M}_{3,8}$  в IR пределе.

# Глава 8

## Заключение

Таким образом, нам удалось выполнить следующие задачи и получить результаты:

- Научиться применять метод TCSCA для произвольного уровня или энергии обреза.
- Применить его для SLYM для большего числа уровней и проверить, как точность подхода зависит от усечения.
- Полученные из TCSCA спектры совпали с теорией кинков и бризеров синус-Гордона для возмущённых полем  $\Phi_{3,1}$  моделей  $\mathcal{M}_{2,5}$  и  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$ .
- TCSCA подтвердил существование RG потока при возмущении  $\mathcal{M}_{3,10}^{D_6}$  полем  $L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi \otimes \Phi + \Phi \otimes L_{-1}\bar{L}_{-1}\Phi$  в  $\mathcal{M}_{3,8}$ .

Далее планирую продолжать изучать применение TCSCA к различным минимальным моделям, разобраться со связью с теорией рассеяния с  $S$ -матрицами. Полезно будет разобраться с другими подходами к изучению возмущённых минимальных моделей: описанием Гинзбурга-Ландау и ТВА.

# Литература

- [1] Yurov, V.P. Truncated Conformal Space Approach to Scaling Lee-Yang Model / V.P. Yurov, Al. B. Zamolodchikov // *International Journal of Modern Physics A*. — 1990. — Vol. 05, no. 16. — Pp. 3221–3245. <https://doi.org/10.1142/S0217751X9000218X>.
- [2] Ginzburg-Landau description and emergent supersymmetry of the (3, 8) minimal model / Igor R. Klebanov, Vladimir Narovlansky, Zimo Sun, Grigory Tarnopolsky // *Journal of High Energy Physics*. — 2023. — feb. — Vol. 2023, no. 2. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.07029>.
- [3] Litvinov, A.V. Lecture notes on CFT / A.V. Litvinov.
- [4] Lashkevich, M.Yu. Integrable models of quantum field theory / M.Yu. Lashkevich.
- [5] Zamolodchikov, Al.B. Thermodynamic Bethe ansatz for RSOS scattering theories / Al.B. Zamolodchikov // *Nuclear Physics B*. — 1991. — Vol. 358, no. 3. — Pp. 497–523. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139190422T>.
- [6] Lässig, Michael. New hierarchies of multicriticality in two-dimensional field theory / Michael Lässig // *Physics Letters B*. — 1992. — Vol. 278, no. 4. — Pp. 439–442. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939290581N>.
- [7] Cardy, J.L. / J.L. Cardy, G. Mussardo // *Santa Barbara preprint 93106*. — 1989.
- [8] Zamolodchikov, Al.B. / Al.B. Zamolodchikov // *ITEP preprint*. — 1989. — Pp. 144–89.
- [9] Smirnov, F.A. Reductions of the sine-Gordon model as a perturbation of minimal models of conformal field theory / F.A. Smirnov // *Nuclear Physics B*. — 1990. — Vol. 337, no. 1. — Pp. 156–180. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090255C>.
- [10] Zamolodchikov, Alexander B. Integrable field theory from conformal field theory / Alexander B Zamolodchikov // *Integrable Sys Quantum Field Theory*. — Elsevier, 1989. — Pp. 641–674.