
Metodi di ottimizzazione su varietà differenziabili per la media di Fréchet su disco di Poincaré

Relatore: Bruno Iannazzo.

Candidato: Luca Moroni; Mat: 311279.

Anno accademico: 2020/2021.

Introduzione

Tratteremo metodi di ottimizzazione su varietà, ovvero tecniche di ottimizzazione di funzioni non lineari definite su spazi topologici chiamati varietà differenziabili, i quali rappresentano una generalizzazione dello spazio euclideo.

... Introduzione

Ambiti applicativi:

- Allenamento di reti neurali (caso euclideo)
 - Autospazi di una matrice (minimizzare: quoziente di Rayleigh)
 - Decomposizione SVD
 - Independent Component Analysis (ICA)
 - Centroide di p-punti (Fréchet Mean, caso non euclideo)
-

... Introduzione

Parleremo nello specifico delle tecniche di ottimizzazione utilizzate per trovare il centroide di p punti in una varietà differenziabile chiamata **disco di Poincaré**.

... Introduzione

Applicheremo vari algoritmi di ottimizzazione per la risoluzione del problema, confronteremo i risultati ottenuti.

Faremo vedere anche che è possibile trasferire il problema della ricerca del centroide dalla varietà disco alla varietà conforme iperboloide confrontando il comportamento dei vari algoritmi implementati.

Ottimizzazione euclidea

Data $f: R^n \rightarrow R$, cercheremo di trovare un punto di minimo di f .

Le condizioni necessarie per far sì che un punto x sia di minimo locale è che $\nabla f(x) = 0$ e che $\nabla^2 f(x)$ è una matrice definita positiva.

I metodi di ottimizzazione trattati sono del tipo *iterative descent*, ovvero partono da un vettore iniziale x^0 creano una sequenza (x^1, x^2, \dots) , tale per cui $f(x^{k+1}) < f(x^k)$, la quale sperabilmente converga ad un punto di minimo.

Ottimizzazione euclidea

I metodi iterative descent hanno bisogno di due informazioni per poter essere eseguiti:

- **direzione di discesa:** dato $g = \nabla f(x)$ allora ogni vettore direzione d tale che $g'd < 0$ è una direzione di discesa
- **selezione del passo α .**

I metodi di ottimizzazione iterativi possono essere generalizzati nella seguente:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k D^k \nabla f(x^k)$$

con D^k matrice definita positiva.

Metodo a passo fisso

Metodo a passo fisso: fissato $\alpha \in (0,1]$ la formula di iterazione è la seguente:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k)$$

Non è garantita per ogni α la convergenza.

Metodo di Armijo

Tale metodo seleziona α^k garantendo una decrescita necessaria per la convergenza globale del metodo sotto opportune ipotesi, siano fissati s , γ e σ , con $0 < \gamma < 1$, $0 < \sigma < 1$ e $s > 0$, allora $\alpha^k = \sigma^m s$, dove m è il naturale più piccolo per cui vale:

$$f(x^k) - f(x^k + \sigma^m s d^k) \geq -\gamma \sigma^m s \nabla f(x^k)' d^k$$

Metodi di quasi-Newton

I metodi di quasi newton sono una famiglia di metodi i quali agiscono nella scelta della matrice D^k tale che approssima la matrice hessiana.

Definiti $p^k = x^{k+1} - x^k$ e $q^k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$ allora D^{k+1} deve soddisfare $D^{k+1}p^k = q^k$ la quale prende il nome di *equazione delle secanti*.

Ottimizzazione su varietà

La funzione da ottimizzare è $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Dove M è una varietà differenziabile.

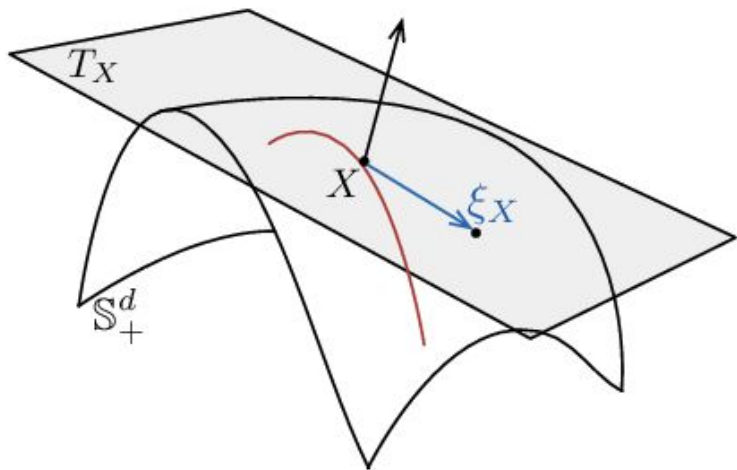
Una **retrazione** R_x su x in M è una mappa che va da $T_x M$ in M , con una condizione di rigidità locale che preserva il gradiente in x .

$T_x M$ rappresentante lo spazio tangente ad x di M .

Ottimizzazione su Varietà

Un caso particolare di retrazione è la **mappa esponenziale** definita su x in M e v in $T_x M$ che ha proprietà di retrazione e rappresenta la curva **geodetica** calcolata nel punto 1 originaria in x con derivata in 0 pari a v .

... Ottimizzazione su varietà



I metodi iterativi trattati nel caso euclideo hanno una controparte per il caso generale su varietà.

$$x^{k+1} = R_{x^k}(t^k \eta^k),$$

dove η^k appartiene a $T_{x^k}M$ e t^k è uno scalare.

I metodi, analogamente al caso euclideo, sono definiti in base alle scelte effettuate per la direzione η^k e la lunghezza del passo t^k , e sono analoghi al caso euclideo.

Disco di Poincaré

Il disco di Poincaré è uno dei modelli più famosi per la descrizione dello spazio iperbolico ed è formalmente definito come segue.

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

Il disco di Poincaré è una **varietà riemanniana**

Lo spazio tangente è rappresentato da \mathbb{R}^n in ogni punto.

La **metrica** nello spazio tangente rispetto a p nel disco:

$$g^{\mathbb{D}} = \lambda_p^2 g^E; \text{ con } \lambda_p = \frac{2}{1 - \|p\|^2} \text{ e con } g^E \text{ la metrica euclidea.}$$

Sono ben note le formule necessarie per effettuare ottimizzazione ovvero, la **distanza** e la **mappa esponenziale**.

Iperboloide

E' un altro modello per la rappresentazione dello spazio iperbolico.

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_{n:1} = -1; \quad x_{n+1} > 0\}.$$

L'iperboloide è una **varietà riemanniana**.

Lo spazio tangente è rappresentato da,

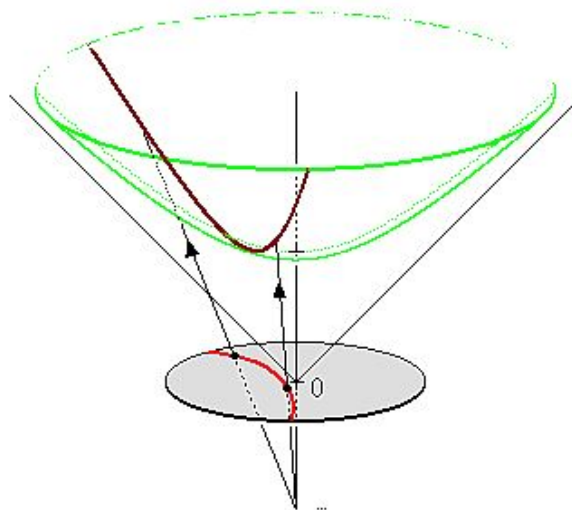
$$T_p \mathbb{H}^n \approx \{x \in \mathbb{R}^{n:1} \mid \langle p, x \rangle_{n:1} = 0\}$$

La **metrica** è definita dal **prodotto di Minkowski**.

$$\langle u, v \rangle_{n:1} = \sum_{i=1}^n u_i v_i - u_{n+1} v_{n+1}; \quad u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Anche in questo caso sono ben noti la **distanza** e la **mappa esponenziale**.

Modelli conformi



Le due varietà appena definite sono legate da un **diffeomorfismo conforme** (mantiene gli angoli ma non le distanze), la mappa stereografica ρ , definita come segue.

$$\rho : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{D}^n \mid x \rightarrow \frac{1}{x_{n+1} + 1}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\rho^{-1} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{H}^n \mid y \rightarrow \frac{2}{1-r}(y_1, \dots, y_n, \frac{1+r}{2}) ; \text{ con } r = \|y\|^2,$$

... Modelli conformi

In funzione della mappa conforme che lega le due varietà presentate verifichiamo che vale $d_{\mathbb{D}^n}(a, b) = d_{\mathbb{H}^n}(\rho^{-1}(a), \rho^{-1}(b))$, per a a b appartenenti al disco.

$$d_{\mathbb{D}^n}(a, b) = \operatorname{arccosh}\left(1 + 2 \frac{\|a - b\|^2}{(1 - \|a\|^2)(1 - \|b\|^2)}\right)$$

$$d_{\mathbb{H}^n}(\rho^{-1}(a), \rho^{-1}(b)) = \operatorname{arccosh}(-\langle \rho^{-1}(a), \rho^{-1}(b) \rangle_{n:1})$$

Facciamo vedere che vale l'uguaglianza per gli argomenti della funzione *arccosh* (arcocoseno iperbolico).

... Modelli conformi

$$\begin{aligned} -\langle \rho^{-1}(a), \rho^{-1}(b) \rangle_{n:1} &= -\left\langle \frac{2}{1 - \|a\|^2} \left[\frac{a}{\frac{1+\|a\|^2}{2}} \right], \frac{2}{1 - \|b\|^2} \left[\frac{b}{\frac{1+\|b\|^2}{2}} \right] \right\rangle_{n:1} \\ &= -\frac{4}{(1 - \|a\|^2)(1 - \|b\|^2)} \left(a'b - \frac{(1 + \|a\|^2)(1 + \|b\|^2)}{4} \right) \\ &= \frac{-4a'b + 1 + \|a\|^2 + \|b\|^2 + \|a\|^2\|b\|^2}{(1 - \|a\|^2)(1 - \|b\|^2)} \\ &= \frac{-4a'b + 1 + 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 + \|a\|^2\|b\|^2}{(1 - \|a\|^2)(1 - \|b\|^2)} \\ &= 1 + 2 \frac{\|a - b\|^2}{(1 - \|a\|^2)(1 - \|b\|^2)} \end{aligned}$$

Media di Fréchet, problema del centroide

Dati p punti in una varietà la media di Fréchet dei punti è l'argomento che minimizza la funzione **somma delle distanze al quadrato**.

$$f(\Theta) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p d^2(\Theta, x^{(i)})$$

Definendo la funzione f su disco se esiste un valore di minimo allora esiste un valore di minimo anche per la medesima funzione \hat{f} definita su iperboloide.

Essendo inoltre $f(x) = \hat{f}(\rho^{-1}(x))$ allora cercare il minimo di f equivale a cercare il minimo di $\hat{f} \circ \rho^{-1}$.

Possiamo perciò trasportare il problema del calcolo della media di Fréchet definito su disco di Poincaré nella varietà iperboloide e viceversa.

Algoritmi

Gli esperimenti che descriveremo si basano sull'utilizzo di tre differenti algoritmi, implementati nella versione riemanniana sia su disco che su iperboloide.

Gli algoritmi implementati sono:

- Algoritmo a **passo fisso**
 - Algoritmo che si basa sul metodo di **Armijo**
 - Algoritmo di **Barzilai-Borwein**: metodo di **quasi-Newton**.
-

Esperimenti

Capiremo se le due varietà sono equivalenti, non solo da un punto di vista geometrico ma anche da un punto di vista computazionale.

Abbiamo creato un dataset contenente varie (duecento) istanze del problema della media di Fréchet su disco di Poincaré per una dimensione fissata ($n=2$) calcolandone il limite tramite l'algoritmo a passo fisso con passo molto piccolo e come guardia d'arresto l'annullamento del gradiente.

... Esperimenti

Abbiamo utilizzato un sottoinsieme del dataset per definire i parametri “liberi” degli algoritmi, ovvero quei parametri che non hanno un range di valori consigliato, valido generalmente.

- α : dell'algoritmo a passo fisso
 - s : per l'algoritmo di Armijo.
-

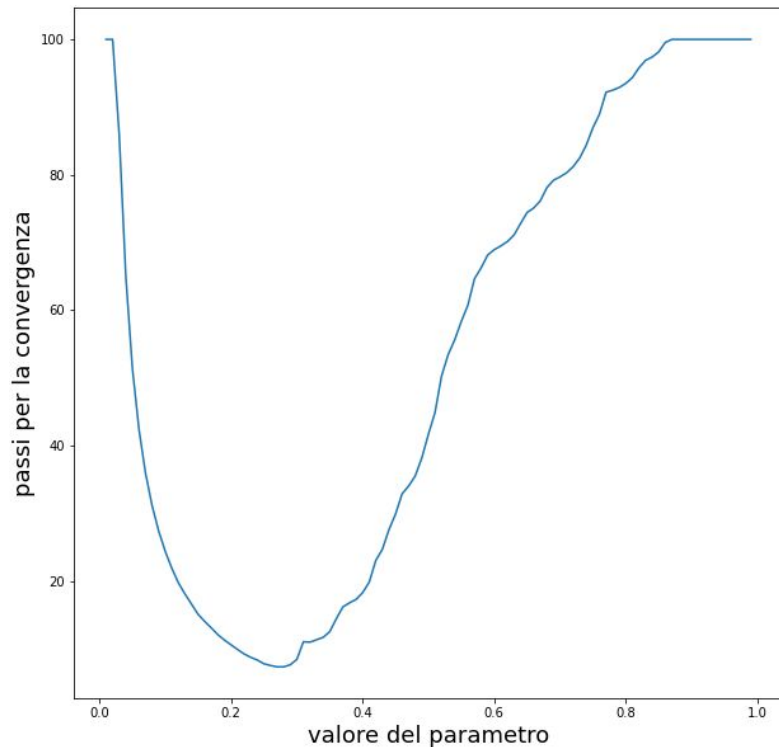
... Esperimenti

Abbiamo applicato gli algoritmi con un parametro incrementale su ogni istanza del sotto-dataset.

Per ogni esecuzione abbiamo calcolato il numero di passi per la convergenza, generando per ogni istanza una sequenza ed alla fine ne abbiamo calcolato una media.

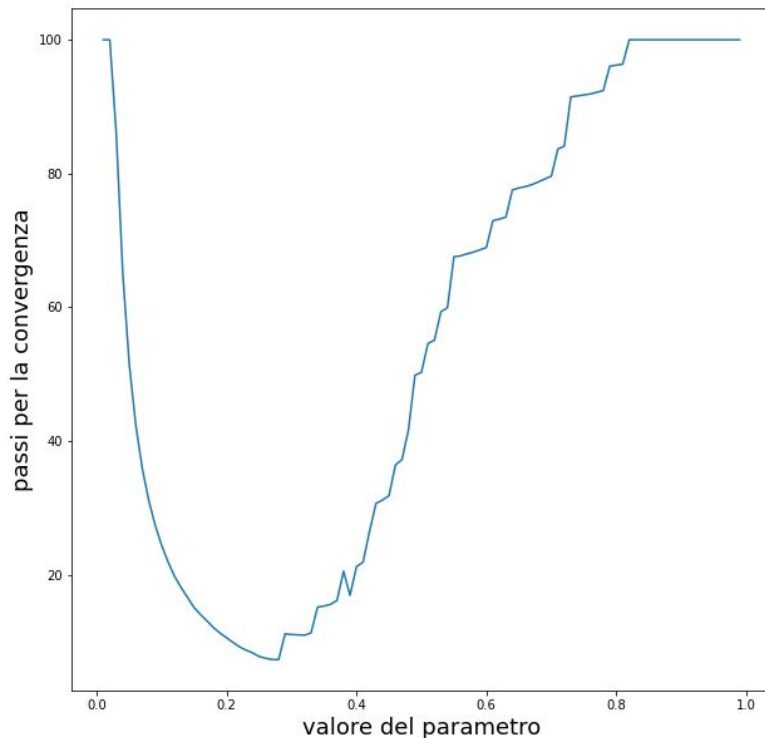
Abbiamo selezionato i parametri che minimizzano le sequenze medie sia per l'implementazione su disco che su iperboloide.

... Esperimenti



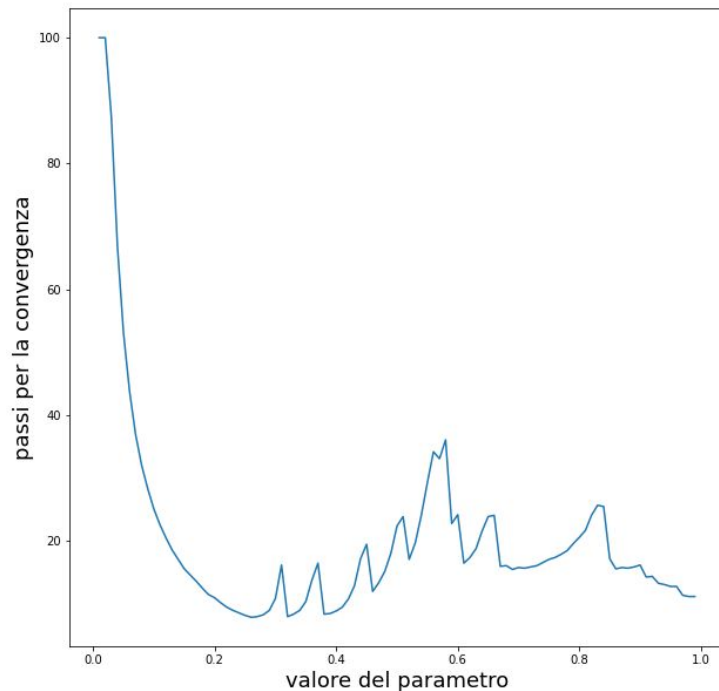
Sequenza relativa alla convergenza dell'algoritmo a passo fisso implementato su disco. Punto di minimo: 0.27, valore di convergenza minimo: 7.35.

... Esperimenti



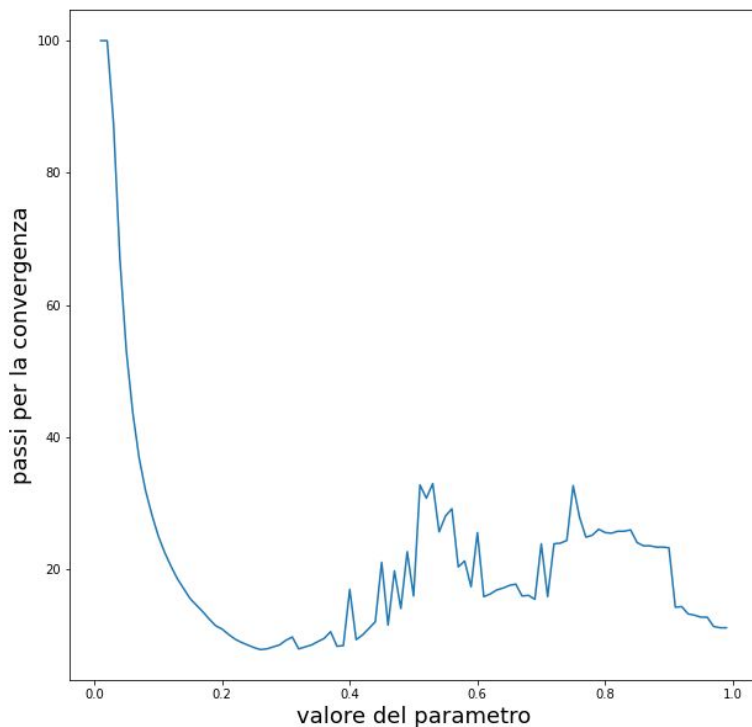
Sequenza relativa alla convergenza dell'algoritmo a passo fisso implementato su iperboloide. Punto di minimo: 0.27, valore di convergenza minimo: 7.35.

... Esperimenti



Sequenza relativa alla convergenza
dell'algoritmo di Armijo
implementato su disco. Punto di
minimo: 0.26, valore di
convergenza minimo: 7.9.

... Esperimenti



Sequenza relativa alla
convergenza dell'algoritmo di
Armijo implementato su
iperboloide. Punto di minimo: 0.26,
valore di convergenza minimo: 7.9.

... Esperimenti

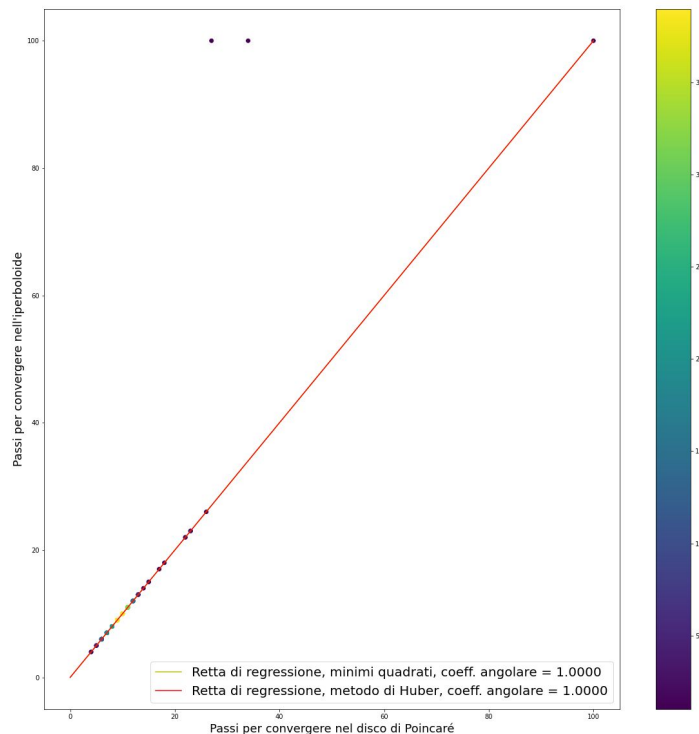
Per ogni algoritmo lo abbiamo eseguito su ogni istanza del dataset totale creando una serie di punti $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- a : numero di passi per la convergenza su disco
- b : il numero di passi per la convergenza su iperboloide.

Dalla nuvola di punti si sono eliminati quei punti con una molteplicità bassa.

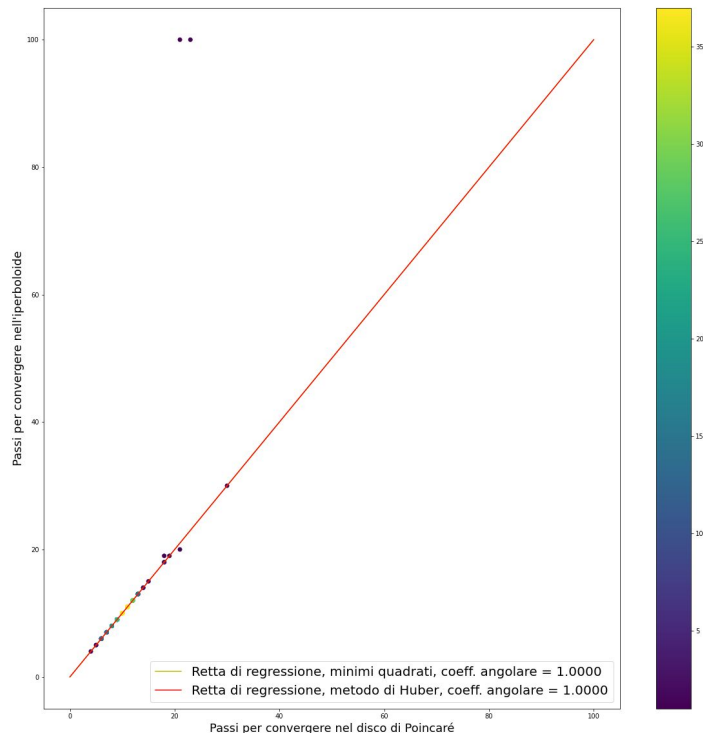
Si sono calcolate due rette di regressione, la prima tramite il **metodo dei minimi quadrati**, la seconda tramite l'algoritmo di *Huber*.

... Esperimenti



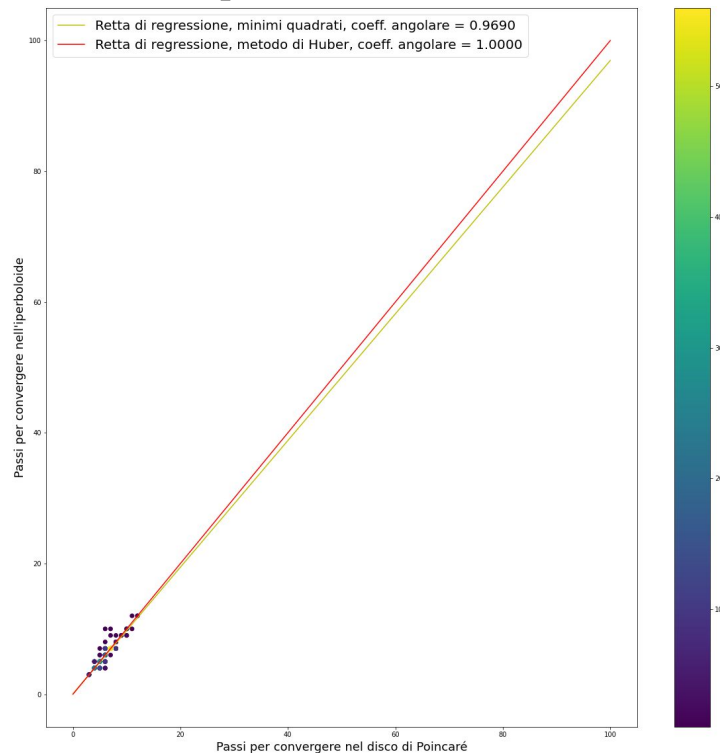
Nuvola di punti relativa all'algoritmo a passo fisso. Notiamo che i punti generati tendono a giacere sulla bisettrice e ciò indica un'equivalenza tra le due implementazioni. Valore medio di convergenza sul disco 10.5, valore medio di convergenza su iperboloide 11.2.

... Esperimenti



Nuvola di punti relativa all'algoritmo di Armijo. Notiamo che i punti generati tendono a giacere sulla bisettrice e ciò indica un'equivalenza tra le due implementazioni. Valore medio di convergenza sul disco 10.4, valore medio di convergenza su iperboloide 11.2.

... Esperimenti



Nuvola di punti relativa all'algoritmo di Barzilai-Borwein. Notiamo un'equivalenza tra le due implementazioni data dal coefficiente angolare tendente ad 1 delle rette di regressione. Valore medio di convergenza sul disco 6.13, valore medio di convergenza su iperboloide 6.8.

Conclusioni

I risultati di tali sperimentazioni ci portano a congetturare che dato un problema di ottimizzazione su varietà, è possibile trasferire il problema da tale varietà ad una varietà conforme tenendo presente che deve essere preservata l'esistenza di una soluzione ottima per la funzione costo.

Dai risultati è inoltre possibile notare come l'algoritmo di Barzilai-Borwein si comporta meglio rispetto agli algoritmi a passo fisso e di ricerca lineare (Armijo).

Grazie per l'attenzione.
