

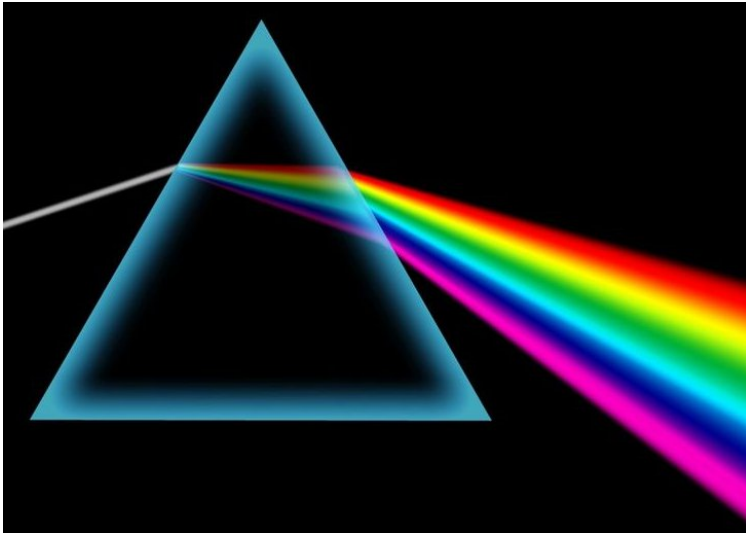


Дисперсия света

ЛЕКЦИЯ 10

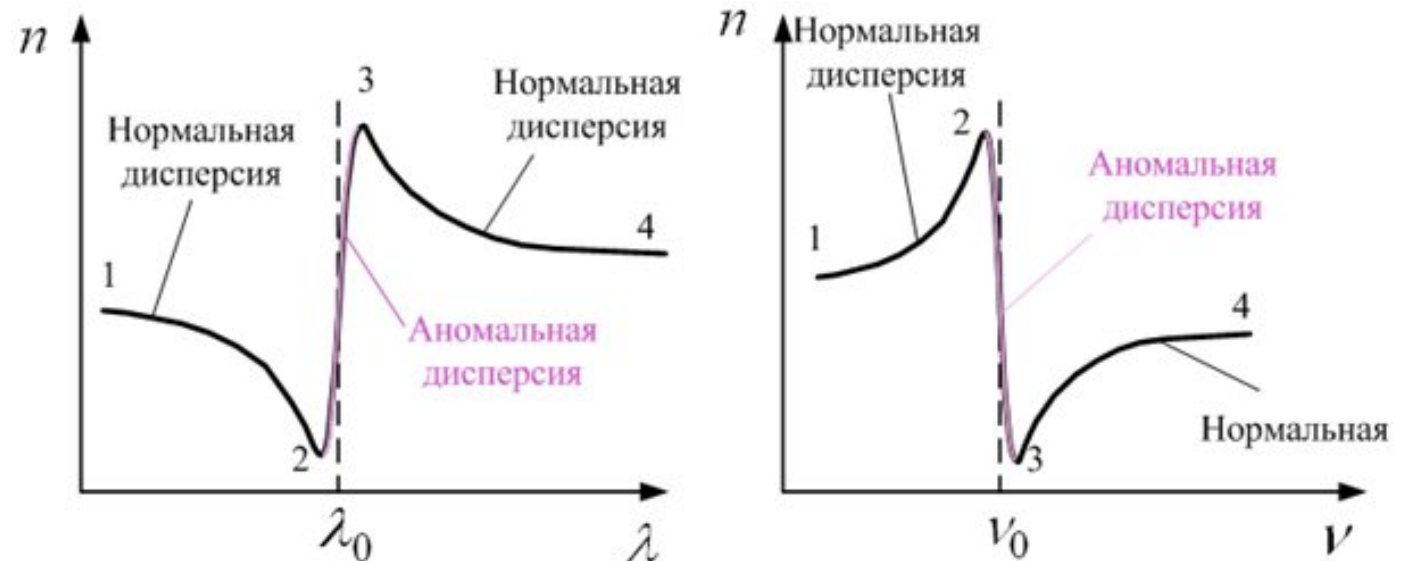
Дисперсия показателя преломления

Дисперсия света в стекле

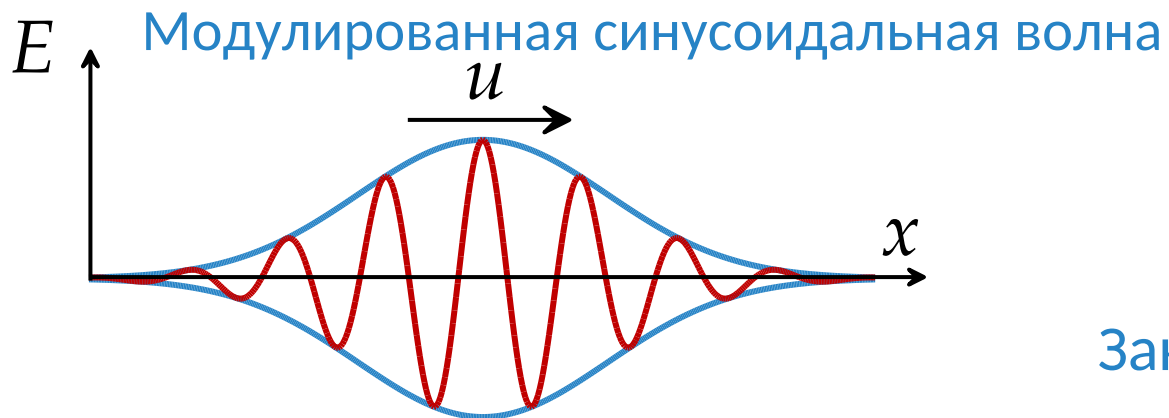
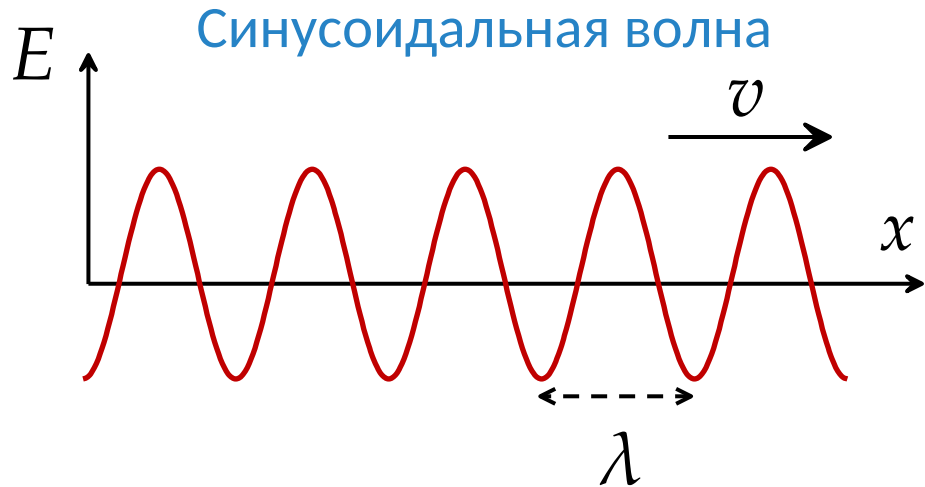


Показатель преломления: $n(\lambda)$ или $n(\omega)$,
где $\omega = 2\pi\nu$, $\nu = c/\lambda$.

Нормальная и аномальная дисперсия



Фазовая и групповая скорости электромагнитных волн в среде



Фазовая скорость: $v = \frac{\omega}{k}$ или: $v = \frac{c}{n}$

Групповая скорость: $u = \frac{d\omega}{dk}$ где: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

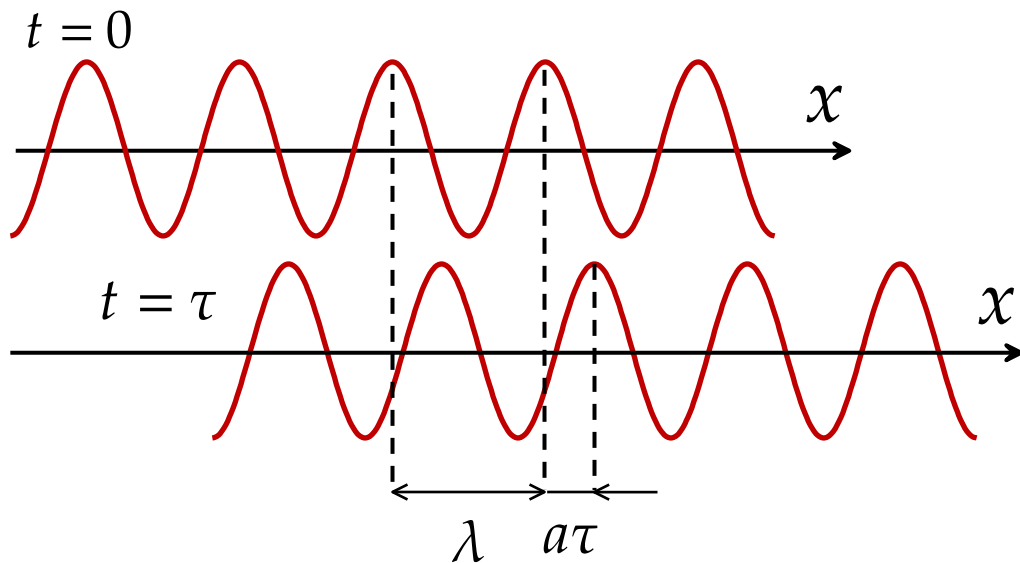
Формула Релея: $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$

$$u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

Законы дисперсии: $n(\lambda)$, $n(\omega)$, $v(\lambda)$, $v(\omega)$, $\omega(k)$

Групповая скорость в среде с линейной дисперсией

Синусоидальная волна



Фазовая скорость: $v = a + b\lambda$, где a и b - константы

Смещение волны за время $t_b = \frac{1}{b}$: $\Delta x = vt_b = at_b + \lambda$

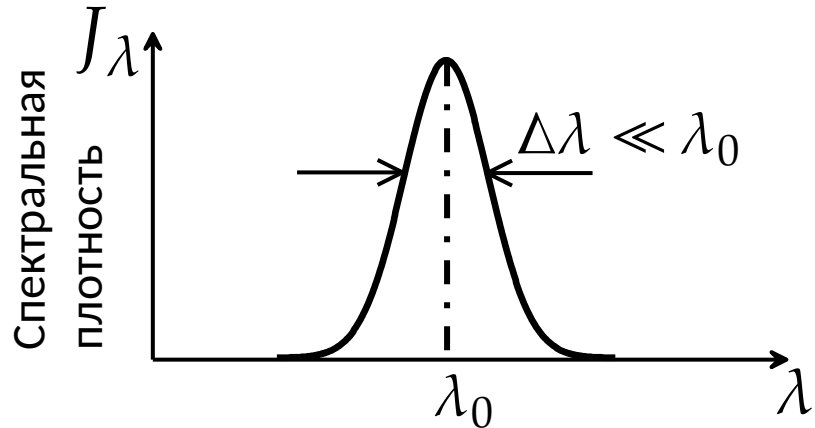
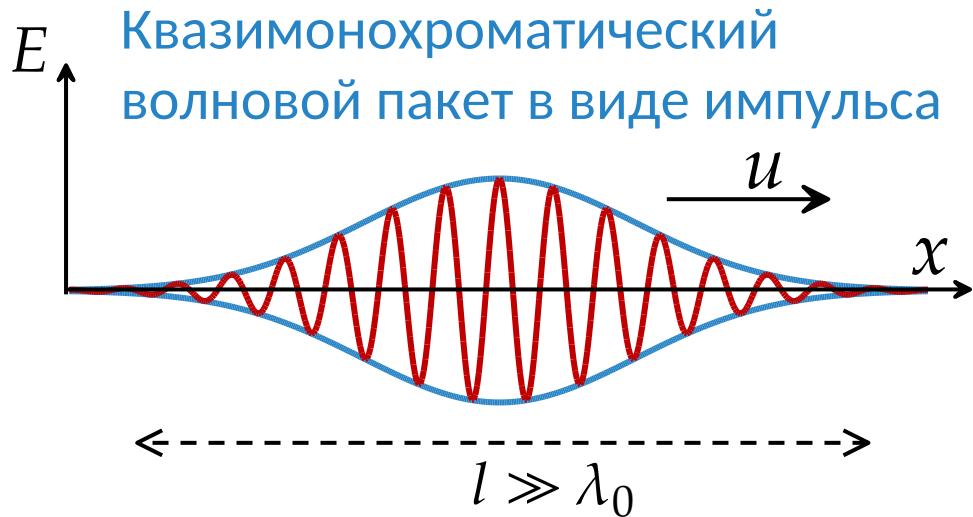
Синусоидальная волна за время $\tau = \frac{1}{b}$ смещается на длину волны λ плюс постоянная величина $a\tau$.

Соответственно, модулированная волна через время τ полностью восстанавливает свою форму и смещается как целое на величину $a\tau$.

Групповая скорость: $u = \frac{a\tau}{\tau} = a$

Из формулы Релея: $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = a + b\lambda - b\lambda = a$

Групповая скорость волнового пакета в среде с дисперсией



Фазовая скорость: $v = v(\lambda)$

Разложение в ряд вблизи $\lambda = \lambda_0$ до 1-го порядка:

$$v = v(\lambda_0) + \frac{dv}{d\lambda}(\lambda - \lambda_0) = \underbrace{v(\lambda_0)}_a - \lambda_0 \underbrace{\frac{dv}{d\lambda}}_b + \frac{dv}{d\lambda} \lambda$$

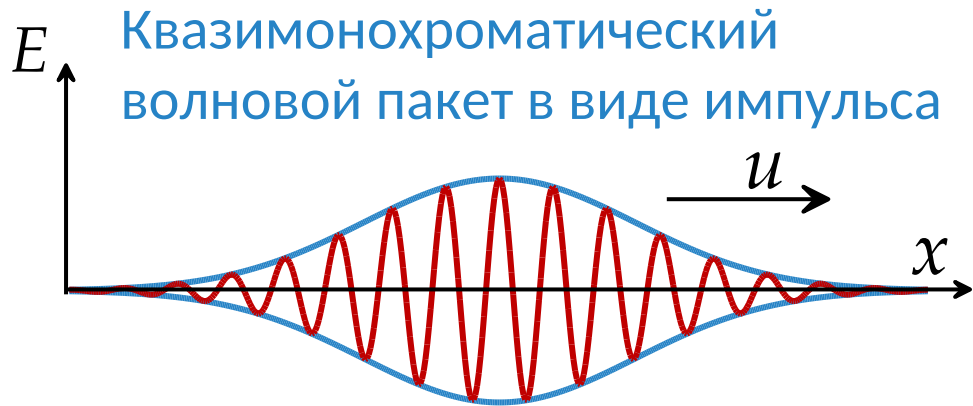
Групповая скорость: $u = v(\lambda_0) - \lambda_0 \frac{dv}{d\lambda}$

Расплывание волнового пакета происходит за время τ и на расстоянии $L = u\tau$.

Условие расплывания: $\Delta v_2 \tau \cong \lambda_0/2$, $\Delta v_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{d\lambda^2} (\lambda - \lambda_0)^2$

Время расплывания: $\tau = \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda^2} \left(\frac{d^2 v}{d\lambda^2} \right)^{-1}$

Распространение волнового пакета в среде с дисперсией



Распределение при $t = 0$: $E(x, 0) = A(x) e^{ik_0 x}$

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(q) e^{iqx} dq \quad \text{где } q = k - k_0$$

Волна при $t > 0$: $E(x, t) = e^{ik_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} G(q) e^{-i\omega t + iqx} dq$

Разложение частоты $\omega(k)$ в ряд вблизи $k = k_0$: $\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk} (k - k_0) = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk} q$

Волновое поле: $E(x, t) = e^{-i\omega_0 t + ik_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} G(q) e^{iq \left(x - \frac{d\omega}{dk} t \right)} dq$

$$E(x, t) = A(x - ut) e^{ik_0(x - vt)}$$

где $u = \frac{d\omega}{dk}$ - групповая скорость, $v = \frac{\omega_0}{k_0}$ - фазовая скорость

Дисперсия в плазме

Движение свободного электрона

в плазме: $m\ddot{x} = eE(t), \quad E = E_0 e^{-i\omega t}$

$$\begin{array}{c} \vec{E} \\ \longleftrightarrow \ominus \end{array} \quad x = -\frac{eE}{m\omega^2}$$

Поляризация плазмы: $P = exN = -\frac{e^2 N}{m\omega^2} E$

Поляризуемость: $\alpha = -\frac{e^2 N}{m\omega^2}$

Диэлектрическая проницаемость плазмы:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \text{где} \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$$

где ω_p - плазменная частота, N - концентрация

Показатель преломления плазмы:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

Фазовая скорость электромагнитных волн

в плазме: $v = \frac{c}{n} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

Групповая скорость:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = c \left(\frac{d(\omega n)}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

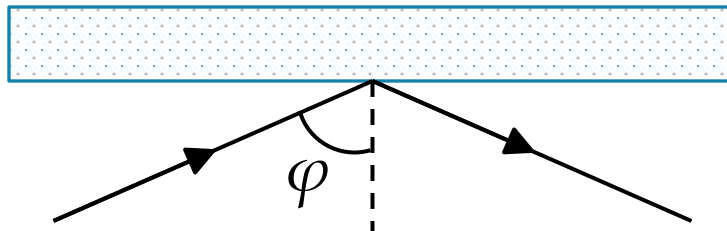
$$u = cn$$

Соотношение между v и u :

$$vu = c^2$$

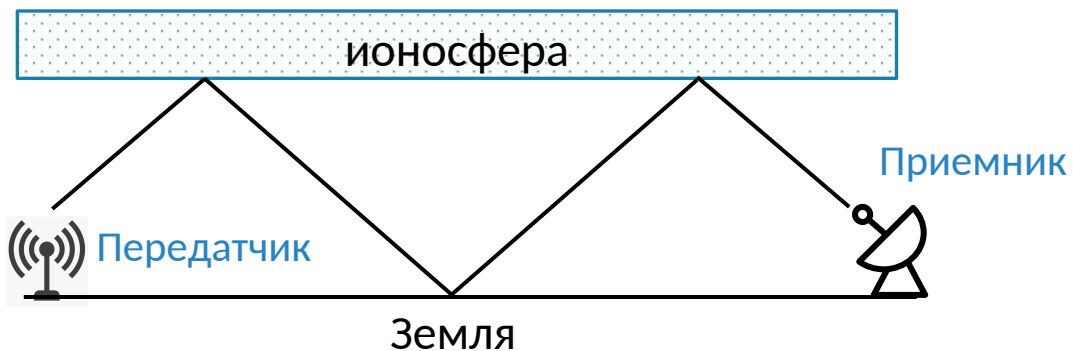
Отражение электромагнитных волн от плазменного слоя. Затухание в плазме

Полное внутреннее отражение от плазменного слоя при $\omega > \omega_p$:



Угол отражения: $\sin \varphi = n$

Дальняя радиосвязь $\lambda \geq 1$ м:



Частота меньше плазменной $\omega < \omega_p$:

$$n = i\gamma, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$$

Коэффициент отражения от плазмы:

$$r = -\frac{1-n}{1+n} = -\frac{1-i\gamma}{1+i\gamma}, \quad |r| = 1$$

Затухание волны внутри плазмы:

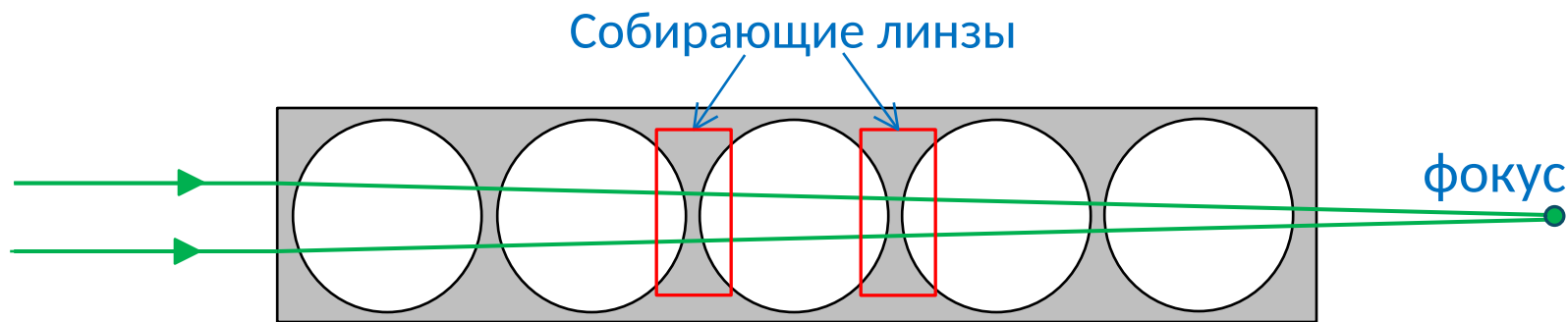
Волновое число при $\omega < \omega_p$: $k = \frac{\omega n}{c} = i \frac{\gamma \omega}{c}$

$$E = E_0 e^{ikx} = E_0 e^{-\frac{\gamma \omega}{c} x} = \underbrace{E_0 e^{-\alpha x}}_{\text{Закон Бугера}}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\gamma \omega}{c}$$

Закон Бугера

Фокусировка рентгеновских лучей. Линза Снигирева

Рентгеновское излучение в диапазоне $5 \div 40$ кэВ ($0.03 \div 0.25$ нм)



Показатель преломления
рентгенопрозрачного материала:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} = 1 - \delta$$

Отличие n от единицы: $\delta = \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \ll 1$

Фокусное расстояние:

$$F = \frac{R}{2N\delta}$$

R - радиус полости, N - их число

Характерные параметры линзы:

материал: бериллий, алюминий, кремний, фторопласт

радиус отверстий $R \approx 0.3 \div 0.5$ мм

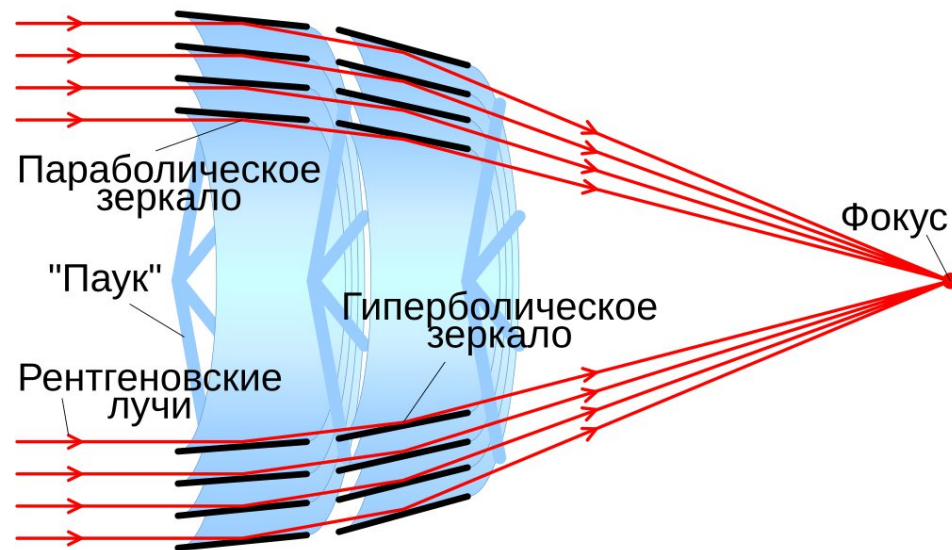
число отверстий $N \sim 30$

фокусное расстояние $F \sim 1$ м

Коэффициент сжатия потока фотонов $10 \div 40$

Рентгеновский телескоп

Ход лучей в рентгеновском телескопе



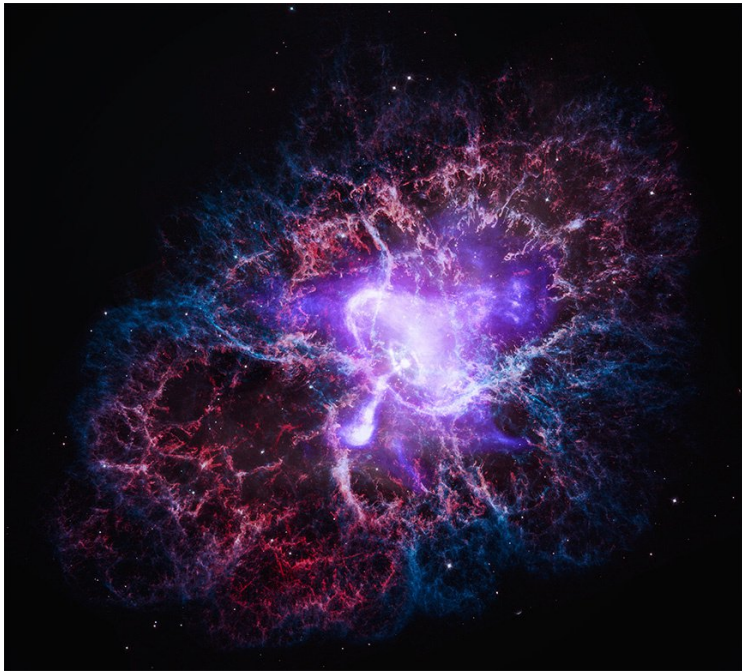
Рентгеновский телескоп «Чандра»



Рентгеновские лучи отражаются от зеркал за счет полного внутреннего отражения при почти скользящем падении ($1^\circ \div 2^\circ$)

Фотографии звезд и галактик, полученные с помощью рентгеновского телескопа

Крабовидная туманность на месте взрыва сверхновой звезды в 1054г.



Скопление галактик в созвездии Девы



Скопление звезд среднего возраста около 300 млн лет

