

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»



СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа

прикладной математики и информатики

(ФПМИ)

для студентов 2 курса
на весенний семестр
2024–2025 учебного года

**ПМФ, ИВТ. Математическое моделирование и компьютерные
технологии**

**САУ. Прикладная математика, компьютерные технологии
и математическое моделирование в экономике**

МОСКВА
МФТИ
2025

Сборник программ и заданий для студентов 2 курса на весенний семестр 2024–2025 учебного года. **Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ)**. ПМФ, ИВТ. Математическое моделирование и компьютерные технологии. САУ. Прикладная математика, компьютерные технологии и математическое моделирование в экономике. – Москва : МФТИ, 2025. – 52 с.

Учебное издание

СБОРНИК программ и заданий

**Физтех-школа прикладной математики и информатики
(ФПМИ)**

ПМФ, ИВТ. Математическое моделирование и компьютерные технологии
САУ. Прикладная математика, компьютерные технологии и математическое
моделирование в экономике

**для студентов 2 курса
на весенний семестр
2024–2025 учебного года**

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова, Н.Е. Кобзева*
Компьютерная верстка *В.А. Дружининой, Н.Е. Кобзевой*

Подписано в печать 16.01.2025. Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 3,25. Тираж 150 экз.
Заказ № 33.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
образования «Московский физико-
технический институт (национальный
исследовательский университет)», 2025

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А.А. Воронов
16 января 2025 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: оптика**

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

16.03.01 «Техническая физика»

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,

11.03.04 «Электроника и нанoeлектроника»

27.03.03 «Системный анализ и управление»

физтех-школа: **для всех физтех-школ, кроме ФБВТ, ВШПИ**

кафедра: **общей физики**

курс: 2

семестр: 4

лекции – 30 часов

Экзамен – 4 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

лабораторные занятия – 60 часов

Диф. зачёт – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:

теор. курс – 90 часов

физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. С.В. Виноградов

д.ф.-м.н., проф. С.Л. Клёнов

к.ф.-м.н., доц. К.М. Крымский

к.ф.-м.н., проф. В.А. Петухов

к.ф.-м.н., доц. П.В. Попов

к.ф.-м.н., доц. Ю.Н. Филатов

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 04 декабря 2024 г.

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

А. В. Гавриков

ОПТИКА

1.* Волновое уравнение. Монохроматические волны, комплексная амплитуда, уравнение Гельмгольца, плоские и сферические волны. Показатель преломления, фазовая скорость распространения. Поляризация света: линейная, круговая и эллиптическая. Естественный свет, степень поляризации. Формулы Френеля, угол Брюстера, полное внутреннее отражение. Поток энергии волны, импульс волны, давление света. Эффект Доплера.

2. Основы геометрической оптики. Принцип Ферма, законы преломления и отражения. Тонкая линза. Центрированные оптические системы. Фокусы и главные плоскости оптической системы. Оптические инструменты: телескоп, микроскоп. Понятие о геометрических aberrациях. Элементы фотометрии: яркость источника, освещённость изображения. Теорема о сохранении яркости в оптической системе.

Современные применения геометрической оптики в пределах коротких длин волн (рентгеновская микроскопия, проекционная рентгеновская литография, рентгеновская астрономия, микроанализ с пространственным разрешением).

3. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Видность полос, ширина полосы. Статистическая природа излучения квазимонохроматической волны. Временная когерентность. Функция временной когерентности, её связь со спектральной интенсивностью (теорема Винера – Хинчина) и с видностью интерференции. Ограничение на допустимую разность хода в двухлучевых интерференционных схемах, соотношение неопределённостей.

4. Интерференция при использовании протяжённых источников. Пространственная когерентность, радиус когерентности. Функция пространственной когерентности, её связь с распределением интенсивности излучения по источнику. Ограничения на допустимые размеры источника и апертуру интерференции в двухлучевых схемах.

Лазеры как источники излучения с высокой временной и пространственной когерентностью.

5. Дифракция волн. Принцип Гюйгенса – Френеля. Дифракция на тонком экране. Граничные условия Кирхгофа. Волновой параметр. Дифракция Френеля. Задачи с осевой симметрией, зоны Френеля, спираль Френеля. Зонные пластинки, линза. Использование зонных пластинок для фокусировки рентгеновского излучения. Дифракция на дополнительном экране, пятно Пуассона. Дифракция на системе дополнительных экранов,

* Повторение материала курса «Электричество и магнетизм»

теорема Бабинэ. Дифракция на краю полубесконечного экрана, спираль Корню.

6. Дифракция Фраунгофера. Световое поле в зоне Фраунгофера как преобразование Фурье граничного поля. Дифракция Фраунгофера на щели, дифракционная расходимость. Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа. Поле в фокальной плоскости линзы, поперечные и продольные размеры фокального пятна.

7. Спектральные приборы: призма, дифракционная решётка, интерферометр Фабри – Перо. Характеристики спектральных приборов: разрешающая способность, область дисперсии, угловая дисперсия.

Интерференция в тонких плёнках и многослойных структурах. Просветление оптики. Зеркала с высоким коэффициентом отражения. Искусственные многослойные структуры для отражения мягкого рентгеновского излучения. Радиотехнические аналоги дифракционных решеток.

8. Принципы фурье-оптики. Метод Рэлея решения задачи дифракции: волновое поле как суперпозиция плоских волн разных направлений (пространственное фурье-разложение), соотношение неопределённостей. Дифракция Френеля на периодических структурах (эффект саморепродукции). Теория Аббе формирования оптического изображения, принцип двойной дифракции. Апертура, полоса пропускания пространственных частот оптической системы, связь с разрешающей способностью. Разрешающая способность при когерентном и некогерентном освещении.

9. Принципы голографии. Голограмма Габора. Голограмма с наклонным опорным пучком. Разрешающая способность голограммы. Условие Брэгга – Вульфа. Объёмная голограмма, объёмная решётка в регистрирующей среде.

Представление о голографической микроскопии биообъектов и голографической интерферометрии.

10. Дисперсия показателя преломления, классическая теория дисперсии, нормальная и аномальная дисперсии. Показатель преломления плазмы. Комплексная диэлектрическая проницаемость и комплексный показатель преломления, связь мнимой части с поглощением света средой. Затухающие волны, закон Бугера. Групповая скорость. Уравнение движения волнового пакета в приближении геометрической оптики в неоднородных средах.

Различные диапазоны длин волн, их особенности. Радиоволны в ионосфере и дальняя радиосвязь. Понятие о метаматериалах.

11. Элементы кристаллооптики. Дихроизм, поляриды, закон Малюса. Двойное лучепреломление в одноосных кристаллах, разложение волны на обыкновенную и необыкновенную. Взаимная ориентация векто-

ров k , E , D , B , направление вектора Пойнтинга, боковой снос световых пучков в кристаллах. Интерференционные явления в кристаллических пластинках. Понятие об искусственной анизотропии (наведённое двулучепреломление). Эффекты Фарадея, Керра и Поккельса и их применение.

12. Рассеяние света. Эффективное сечение рассеяния, диаграмма направленности, их зависимость от длины волны и от размера рассеивающих частиц. Рэлеевское рассеяние (рассеяние на флуктуациях плотности). Поляризация рассеянного света. Понятие о комбинационном рассеянии света.

13. Нелинейные оптические явления. Нелинейная поляризация среды. Оценки интенсивности световой волны, при которых наблюдаются нелинейные эффекты. Генерация второй гармоники, фазовый синхронизм, роль симметрии среды. Оптическое выпрямление. Самофокусировка, критическая мощность самофокусировки, мелкомасштабная самофокусировка. Фазовая самомодуляция.

14. * Распространение электромагнитных волн в световодах. Градиентные световоды и световоды с резким изменением показателя преломления. Допустимая угловая апертура. Типы волн. Одномодовые и многомодовые световоды. Рэлеевское рассеяние как причина затухания световой волны в световодах. Применение для высокоскоростной связи. Область нулевой дисперсии. Ультракороткие импульсы.

Список литературы

Основная

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. В 5 т. Т. 4. Оптика. Москва : Физматлит, 2018.
2. *Кириченко Н.А.* Принципы оптики: учебное пособие. – Москва : МФТИ, 2016. URL: <https://books.mipt.ru/book/301793> (дата обращения 19.12.2024)
3. *Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. I. Ч. III. Москва : Физматлит, 2001, 2007.
4. Сборник задач по общему курсу физики. В 3 частях. Часть 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В.А. Овчинкина (7-е изд., испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2021.
5. Лабораторный практикум по общей физике. В 3 т. Том 2. Оптика: учебное пособие / под ред. А. В. Максимычева. — Москва : МФТИ, 2014 г. URL: <https://books.mipt.ru/book/296954> (дата обращения 19.12.2024)

Дополнительная

1. *Бутиков Е.И.* Оптика : учебное пособие. 3-е изд., доп. — СПб. : Издательство «Лань», 2019 г., (электронная версия 2021 г.).
2. *Ахманов С.А. Никитин С.Ю.* Физическая оптика. – Москва : изд. МГУ, 2004 г.
3. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. – Москва : Физматлит, 1959 г., 2007.

4. Ландсберг Г.С. Оптика. – Москва : Физматлит, 2017 г., (электронная версия 2021).

Литература для самостоятельного изучения. Методические пособия

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Москва : Наука, 1973.
2. Кольер Р. Оптическая голография. Москва : Мир, 1973.
3. Матвеев А.Н. Оптика : учебное пособие. Москва : Высшая школа, 1985.
4. Введение в когерентную оптику и голографию: учебно-метод. пособие по курсу : Общая физика / сост. С. М. Козел [и др.] ; Москва : МФТИ, 2000.
5. Крымский К.М. Аберрации центрированных оптических систем — теория и расчёт. Москва : МФТИ, 2015. URL: <https://books.mipt.ru/book/296951> (дата обращения 19.12.2024)
6. Петухов В.А. Оптические волокна : учебно-метод. пособие. Москва : МФТИ, 2019 г.
7. Попов П.В. Рассеяние света : учебно-метод. пособие. Москва : МФТИ, 2024.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

для студентов 2-го курса

на весенний семестр 2024/2025 учебного года

Дата	№ сем	Тема семинарских занятий	Задачи		
			0	I	II
01.02–07.02	1	Законы преломления и отражения. Формулы Френеля. Поток энергии и давление света.	0 ₁ 2.3 11.7	2.1 2.8 2.27 2.33	2.11 2.37 2.45
08.02–14.02	2	Геометрическая оптика. Оптические инструменты. Элементы фотометрии.	0 ₁ 0 ₂ 1.7	1.22 1.29 T1 1.57	1.25 1.41 T2 T3 1.52
15.02–21.02	3	Интерференция монохроматических волн	3.3 0 ₁ 0 ₂	3.18 3.14 3.32 T4	3.16 3.11 3.35 5.23
22.02–28.02	4	Временная и пространственная когерентность	0 ₁ 4.2 5.3 0 ₂	4.10 4.11 5.14 5.20	4.9 T5 5.13 5.30
01.03–07.03	5	Дифракция Френеля. Зонные пластинки	0 ₁	6.15 6.20	6.16 T6

			⁰ ₂ 6.1	6.59 6.43	6.50 6.64
08.03– 14.03	6	Дифракция Фраунго- фера. Разрешающая спо- собность оптических ин- струментов	7.5 ⁰ ₁ ⁰ ₂	7.16 7.48 7.55 7.83	7.10 7.53 7.59 T7
15.03– 21.03	7	Спектральные приборы	8.2 ⁰ ₁ ⁰ ₂	8.39 8.19 8.61 8.78	8.37 8.47 T8 8.87
22.03– 28.03	8	Контрольная работа (по группам).			
29.03– 04.04	9	Сдача 1-го задания			
05.04– 11.04	10	Дифракция на синусои- дальных решётках. Элементы Фурье-оптики	⁰ ₁ ⁰ ₂ ⁰ ₃	9.1 9.15 9.22 9.45	9.11 9.17 9.28 9.66
12.04– 18.04	11	Голография	⁰ ₁ ⁰ ₂ ⁰ ₃	9.32 9.35 9.46 9.52	9.33 9.36 9.51 9.78
19.04– 25.04		Дисперсия волн. Фазовая и групповая скорости	10.5 ^(1,2,5) ⁰ ₁ 10.2	10.4 10.67 10.77 10.75	10.21 10.25 T9 10.36
26.04– 02.05	13	Поляризация света. Элементы кристаллооп- тики	11.12 11.1 11.17	11.9 11.16 T10 11.54	T11 11.60 11.96 T12
03.05– 09.05	14	Рассеяние света. Элементы нелинейной оптики	⁰ ₁ ⁰ ₂ ⁰ ₃	T13 11.89 11.126 T14	11.88 11.128 11.125 11.90
10.05– 23.05	15 16	Сдача 2-го задания			

Примечание

Номера задач указаны по «Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В.А. Овчинкина (7-е изд., испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2021». *Курсивом отмечены задачи, которые необходимо брать из нового издания.*

Все задачи обязательны для сдачи задания, их решения должны быть представлены преподавателю на проверку. В каждой теме семинара задачи разбиты на три группы:

- задачи, которые студент должен решать в течение недели для подготовки к семинару;
- задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);
- задачи для самостоятельного решения.

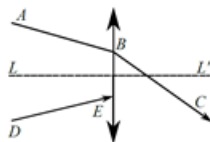
Задачи группы 0

Семинар 1

01. Выразить интенсивность плоской электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде с показателем преломления n , через амплитуду вектора напряженности электрического поля волны E_0 .

Семинар 2

01. На рисунке показаны положение главной оптической оси тонкой линзы LL' и ход проходящего сквозь нее луча ABC . Найдите построением ход произвольного луча DE за линзой.



02. Положительной линзой с фокусным расстоянием F создается изображение объекта на экране. Какому условию должно удовлетворять расстояние от объекта до экрана, чтобы это было возможно?

Семинар 3

01. Концентрация электронов в нижних слоях ионосферы равна $N \sim 1,5 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$. Какие электромагнитные волны будут испытывать отражение при вертикальном радиозондировании ионосферы?

Ответ: $\nu < 10 \text{ МГц}$ ($\lambda > 30 \text{ м}$).

Семинар 4

На экран падают две плоские волны с равными амплитудами A под малыми углами $\varphi_{1,2} = \pm 0,01$ рад. Длина волны $\lambda = 500$ нм, нормаль к экрану и волновые векторы волн лежат в одной плоскости, см. на экране. Определите ширину интерференционных полос (см. рисунок).



Ответ: 25 мкм.

02. На тонкую пленку с показателем преломления n падает пучок белого света под углом θ к нормали. При какой минимальной толщине b_{\min} и в какой цвет будет окрашена пленка в отраженном свете?

Семинар 5

01. В двухлучевом интерференционном опыте используется источник света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и шириной спектра $\Delta\lambda = 10$ нм. Оцените максимально допустимую разность хода лучей Δ_{\max} и максимальное число интерференционных полос m_{\max} , которые можно наблюдать в этом опыте.

Ответ: $\Delta_{\max} \sim 25$ мкм, $m_{\max} \sim 100$.

02. Найдите апертуру интерференции в опыте с бипризмой с преломляющим углом α и показателем преломления n , если источник и плоскость наблюдения расположены на одинаковых расстояниях от бипризмы.

Семинар 6

01. Щель шириной $b = 1$ мм освещается параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Оцените, на каком расстоянии L от щели необходимо разместить экран, чтобы наблюдать на нём дифракцию Френеля.

Ответ: $L \sim 1$ м.

02. На ирисовую диафрагму с переменным радиусом отверстия, расположенную на расстоянии L от экрана, падает свет с длиной волны λ . Диафрагму постепенно открывают, начиная с $R \approx 0$. При каком радиусе R интенсивность света в центре экрана впервые обратится в ноль?

Семинар 7

01. Через маленькое круглое отверстие проходит монохроматический параллельный пучок света и создает на удаленном экране дифракционную картину Фраунгофера. Во сколько раз изменится освещённость в центре экрана, если увеличить диаметр отверстия вдвое?

Ответ: увеличится в 16 раз.

02. Плоская световая волна дифрагирует на щели с шириной $b = 10\lambda$, где λ – длина волны. Оценить отношение интенсивностей нулевого и первого дифракционных максимумов.

Ответ: $I_1/I_0 \approx 0,05$.

Семинар 8

01. На дифракционную решетку, имеющую период $d = 10$ мкм, нормально падает свет от желтого дублета натрия ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$). Оцените угловое расстояние между максимумами $\delta\varphi$ во втором порядке ($m = 2$).

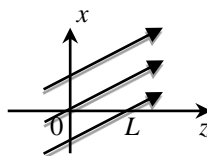
Ответ: $\delta\varphi \approx 1,2 \cdot 10^{-4}$ рад.

02. Дифракционная решётка с периодом d имеет размер $D = 10^3 d$ в направлении, перпендикулярном штрихам. Ширина прозрачных штрихов решётки равна половине периода. Определите максимальную разрешающую способность решётки в спектрах 1-го и 2-го порядков.

Ответ: $R_1 = 10^3$, $R_2 = 0$.

Семинар 11

01. Плоская волна с длиной волны λ распространяется в плоскости xz под углом α к оси z . Запишите распределение комплексной амплитуды волны и интенсивности в плоскости $z = 0$. Найти разность фаз между колебаниями в точках $z = 0$ и $z = L$, лежащих на оси z (см. рисунок).



02. Решётка освещается нормально падающей плоской монохроматической волной с амплитудой A . Укажите пространственные частоты и амплитуды плоских волн за дифракционной решёткой, прозрачность которой $\tau(x) = \cos^2(\Omega x)$.

03. Оцените ширину пространственного спектра плоских волн Δk_x при дифракции плоской монохроматической волны на щели шириной b .

Семинар 12

01. Точечный источник с длиной волны λ расположен в начале координат. Пользуясь параболическим приближением, найти распределение комплексной амплитуды и интенсивности в плоскости $x = L$.

02. Гол로그램 точечного источника, находящегося на расстоянии L от фотопластины, записали по схеме Габора на длине волны λ . Где будут находиться мнимое и действительное изображения, если восстановление голограммы производить светом с длиной волны 2λ ?

03. Почему при получении голографических изображений объёмных объектов практический интерес представляют только мнимые изображения? Поясните ответ с помощью схематического рисунка.

Семинар 14

01. Почему небо голубое, закат красный, а облака белые?

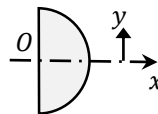
02. Убывание интенсивности пучка света при рассеянии аналогично убыванию плотности потока направленного пучка частиц, движущегося в газе. Считая известной формулу сечения рассеяния Рэлея $\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4}{c^4} \left(\frac{n-1}{2\pi N} \right)^2$, где N – концентрация рассеивающих центров, оцените «длину свободного пробега» света в воздухе для $\lambda = 400$ нм (фиолетовый свет). Показатель преломления воздуха $n \approx 1 + 3 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: $l \sim 20$ км.

03. Лазерный пучок проходит сквозь поглощающую жидкость (интенсивность пучка максимальна на его оси). Каков знак возникающей в жидкости линзы?

Текстовые задачи

T1. (2A-2024) Половинка стеклянного шарика радиусом $R = 2$ см с показателем преломления $n = 5/3$ используется в качестве лупы. Определите оптическую силу такой лупы и её увеличение при наблюдении предмета с расстояния наилучшего зрения $L = 25$ см.



Ответ: а) $f = 3$ см, $D \approx 33,3$ дптр, б) $\Gamma = 3$.

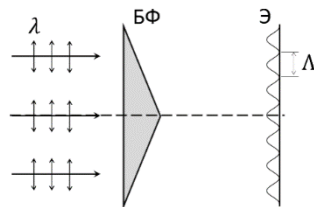
T2. а) У некоторого близорукого человека дальняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_d от глаза. Очки какой оптической силы D ему следует носить, чтобы эта граница переместилась в бесконечность? Провести расчет для $L_d = 0,5$ м.

б) У некоторого дальноруккого человека ближняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_b от глаза. Очки какой оптической силы ему следует надеть, чтобы эта граница переместилась в «положение наилучшего зрения» $L_0 = 25$ см. Провести расчет для $L_b = 1$ м.

Ответ: а) $D = -2$ дптр, б) $D = +3$ дптр.

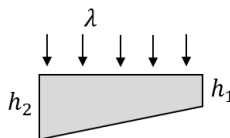
T3. Найти тип идеальной формы поверхности плоско-выпуклой линзы для фокусировки параллельного пучка в точку (сфера, гипербола, парабола или др). Линза расположена плоской поверхностью к плоскому волновому фронту.

Т4. (2019) Падающая на бипризму Френеля (БФ) плоская монохроматическая линейно поляризованная волна создает на плоском экране Э интерференционную картину с шириной полосы Λ . Плоскость падения перпендикулярна плоскости экрана. Поле E волны колеблется параллельно плоскости падения. Длина волны λ . Определите видность V интерференционной картины.



Ответ: $V = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^2$.

Т5. (2023) Толщина клиновидной стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1,5$ изменяется от величины $h_1 = 0,358$ мм у одного края до $h_2 = 0,398$ мм у другого. Сколько интерференционных полос будет фиксироваться на поверхности клина при наблюдении под прямым углом в отражённом свете длины волны $\lambda = 655$ нм и степенью монохроматичности $\lambda/\Delta\lambda = 500$?



Ответ: 0.

Т6. (2023) На пути плоского волнового фронта интенсивности I_0 оказался прозрачный экран, на котором непрозрачной краской нарисован знак, предупреждающий о радиоактивной опасности (см. рис). Определите интенсивность в точке, расположенной на оси симметрии за знаком на таком расстоянии, что радиус «кружка» совпадает с радиусом 1-й зоны Френеля, а внутренний и внешний радиусы «лепестков» равны радиусам 2-й и 9-й зон Френеля соответственно. Углы между радиальными сторонами «лепестков» равны 60° .



Ответ: $I_k = 4I_0$.

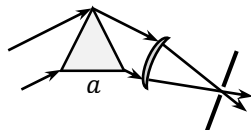
Т7. Заметив свет от маяка с расстояния 20 км невооруженным глазом, моряк затем рассматривает его через подзорную трубу с 12-кратным увеличением. Оценить, во сколько раз при этом меняется кажущаяся яркость маяка. Диаметр зрачка $d = 3$ мм, длина волны $\lambda = 0,5$ мкм, радиус линзы маяка считать равным $R = 0,5$ м. *Примечание:* зрительное ощущение "яркости" определяется освещенностью сетчатки глаза.

Ответ: Увеличится в 64 раза.

Т8. Спектральная линия H_α атомарного водорода ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$) имеет тонкую структуру в виде двух «сублиний» в интервале длин волн $\delta\lambda \approx 0,16 \text{ \AA}$. Какой должна быть минимальная база интерферометра Фабри–Перо L с коэффициентом отражения зеркал по интенсивности $\rho = 0,9$, чтобы с его помощью можно было обнаружить тонкую структуру линии? Определите также для такого интерферометра: дисперсионную область $\Delta\lambda$, направление на ближайший к центру максимум θ_1 и угловую дисперсию $d\theta/d\lambda$ вблизи него. В центре картины – светлое пятно.

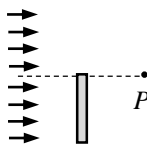
Ответ: $L = 0,4 \text{ мм}$, $\Delta\lambda = 5 \text{ \AA}$, $\theta_1 = 2,3^\circ$, $D = 4 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}$.

Т9. Параллельный пучок света ультракороткой длительности $\tau_0 = 50 \text{ фс}$ падает на стеклянную призму и после фокусируется тонкой линзой на очень узкую щель (ширина щели меньше размера дифракционного пятна). Длина волны излучения $\lambda = 600 \text{ нм}$, дисперсия материала призмы $dn/d\lambda = -10^3 \text{ см}^{-1}$, длина основания призмы $a = 3 \text{ см}$, пучок заполняет всю призму. Оцените длительность τ и спектральную ширину $\Delta\nu$ прошедшего через щель импульса. Дисперсией в линзе пренебречь.

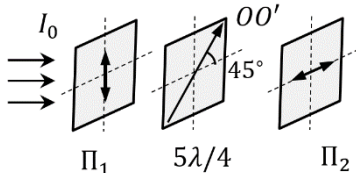


Ответ: $\tau \approx -\frac{a\lambda}{c} \frac{dn}{d\lambda} \approx 6 \text{ пс}$.

Т10. Плоская волна круговой поляризации (длина волны λ) падает на полубесконечный экран, изготовленный из поляроида с показателем преломления для разрешенного направления n ($n - 1 \ll 1$) и толщиной $a = \lambda/[4(n - 1)]$. Найти отношение полуосей эллипса поляризации света в точке наблюдения P .



Т11. Двоякопреломляющая пластинка в $5\lambda/4$ для зеленого света $\lambda = 540 \text{ нм}$ помещена между скрещенными поляроидами, при этом оптическая ось пластинки лежит в плоскости поляроидов и повернута на угол 45° относительно их осей пропускания. Падающий на систему свет состоит из трёх узких спектральных компонент с длинами волн $\lambda_1 = 540 \text{ нм}$, $\lambda_2 = 675 \text{ нм}$ и $\lambda_3 = 450 \text{ нм}$, имеющих одинаковую интенсивность I_0 и круговую поляризацию. Найдите интенсивности на выходе для всех трёх компонент.



Ответ: $I_1 = I_0/4$, $I_2 = 0$, $I_3 = I_0/2$.

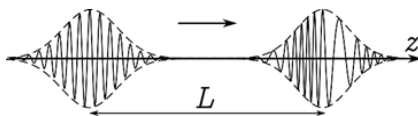
T12. Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией нормально падает на экран с двумя узкими параллельными щелями. Одну из щелей перекрыли пластинкой $\lambda/4$, а другую — поляроидом. Разрешённое направление поляроида и оптическая ось пластинки параллельны щелям. Определите видность V интерференционной картины на экране за щелями.

Ответ: $V = 2/3$.

T13. Найти коэффициент пропускания атмосферой солнечного излучения во время восхода. Сделать расчет для красного ($\lambda = 700$ нм) и фиолетового ($\lambda = 400$ нм) цветов. Атмосферу считать изотермической, потери, не связанные с рэлеевским рассеянием (пыль, облака), не учитывать. Показатель преломления атмосферы вблизи поверхности Земли равен $n = 1 + 3 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: для $\lambda = 400$ нм $I_{\text{пр}}/I_0 = 5,3 \cdot 10^{-6}$, для $\lambda = 700$ нм $I_{\text{пр}}/I_0 = 0,27$.

T14. (2021) Нелинейный эффект «фазовая самомодуляция» обусловлен уменьшением фазовой скорости в окрестности пика интенсивности светового импульса, из-за чего частота сигнала уменьшается на переднем фронте импульса и увеличивается за ним (см. рисунок). Оцените спектральную ширину $\Delta\nu$ импульса длительностью $\tau_0 = 10$ пс после прохождения $L = 50$ м кварцевого оптоволокна, если пиковая интенсивность составляет $J_0 = 2$ ГВт/см². Длина волны света $\lambda = 1$ мкм (в вакууме). Показатель преломления кварца имеет вид $n = n_0 + n_2 J$, где $n_2 = 1,6 \cdot 10^{-16}$ см²/Вт. Считать, что огибающая импульса имеет форму симметричного «колокола», а начальная спектральная ширина минимальна (спектрально ограниченный импульс). Дисперсией и изменением формы огибающей пренебречь.



Ответ: $\Delta\nu \sim \frac{4Ln_2J}{\lambda\tau} \approx 6 \cdot 10^{12}$ Гц.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Гармонический анализ
по направлению: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»,
подготовки: 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»

физтех-школа: ФПМИ
кафедра: высшей математики
курс: 2
семестр: 4

лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 90 часов

Программу составил

д. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 октября 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Пространства L_p , $p \in [1, \infty]$, их полнота. Пространства RL_p , $p \in [1, \infty)$, их неполнота. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами.
2. Лемма Римана об осцилляции. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. Стремление к нулю коэффициентов Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации.
3. Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке: признак Дини, признак Дирихле–Жордана.
4. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.
5. Контрпример Шварца непрерывной периодической функции, ряд Фурье которой расходится в нуле.
6. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Фейера и Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
7. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, банаховы пространства. Сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы и базисы Шаудера в линейных нормированных пространствах.
8. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.
9. Тригонометрические ряды Фурье в $L_2([-\pi, \pi])$. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля.
10. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Интегра-

лы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера – гамма- и бета- функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

11. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: равномерная непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
12. Пространства основных функций \mathcal{D} и \mathcal{S} . Пространства обобщенных функций \mathcal{D}' и \mathcal{S}' . Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Дифференцирование обобщенных функций. Сходимость в пространствах обобщенных функций. Преобразование Фурье в пространствах \mathcal{S} и \mathcal{S}' .

Основная

1. Макаров Б. М., Поджорытов А. Н. Лекции по вещественному анализу. — Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011.
2. Иванов Г. Е. Лекции по математическому анализу Ч.2 — Москва : МФТИ, 2011.
3. Бесов О. В. Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2020
4. Карасёв Р. Н. Отдельные темы математического анализа. — https://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf.

Дополнительная

5. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. В 3 Т. Т 2. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2021. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. В 3 Т. Т 3. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003, 2012. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

I. Пространства L_p . Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции

1. Докажите, что для абсолютно интегрируемой $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\int_0^1 e^{f(x)} dx \geq e^{\int_0^1 f(x) dx}.$$

2. Докажите для измеримой $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, и положительных $s < t$ неравенство

$$\left(\int_0^1 f(x)^s dx \right)^{1/s} \leq \left(\int_0^1 f(x)^t dx \right)^{1/t}.$$

3. Докажите, что $L_2[0, 1] \subseteq L_1[0, 1]$, но $L_2(\mathbb{R}) \not\subseteq L_1(\mathbb{R})$. Проверьте, что в первом случае вложение строгое.

4. Имеет ли ограниченную вариацию на интервале $(0, 1)$ функция:

- а) $x \sin \frac{1}{x}$;
б) $x^2 \sin \frac{1}{x}$?

5. Докажите, что абсолютно непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке ограниченную вариацию.

II. Тригонометрические ряды Фурье

C.2. §22: 1(2); 9; 10; 12; 30; 32; 41; 45. В каждом примере постройте график суммы ряда Фурье и исследуйте ряд на равномерную сходимость на \mathbb{R} .

C.2. §22: 23*; 64; 65; 67; 72; 110; 111(4, 3).

6. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функции $f(x) = \operatorname{sh} x$, $x \in [0; \pi/2]$ по системам:

а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$;

в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?

Постройте графики сумм этих рядов.

7. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определите порядок их убывания, а также порядок убывания остатка ряда для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$:

а) x^7 ; б) x^{12} ; в) $(x^2 - \pi^2) \sin x$; г) $(x^2 - \pi^2)|x|$.

C.2. §22: 115; 121. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы

$$\text{рядов: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

C.2. §16: 47*(2); 48(1, 3).

8. Пусть непрерывная 2π -периодическая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет коэффициенты Фурье $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$, где $n \in \mathbb{Z}$.

а) Докажите, что $c_n = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right) e^{-inx} dx$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;

б) Пусть f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1)$. Докажите, что $c_n = O(1/|n|^\alpha)$ при $n \rightarrow \infty$.

в) Пусть существует $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $c_n = O(1/|n|^{1+\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α .

9. Разложите функцию $f(x) = e^{\cos x} \sin(\sin x)$ в ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе на $[-\pi, \pi]$.

10*. Для всех $\omega \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}$ вычислите $S(\omega, t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\omega k} \text{sinc}(t - k)$, где

$$\text{sinc}(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}, \text{ если } z \neq 0 \text{ и } \text{sinc}(0) = 1.$$

11. Дана непрерывная 2π -периодическая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Известно, что $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что f — чётная.

III. Функциональные пространства

12. Докажите, что если $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет условию Липшица, то для любой $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ функция $f * g$ также удовлетворяет условию Липшица.

13. Докажите, что для любой липшицевой функции $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такая, что $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

14. Докажите, что а) ℓ_1 всюду плотно в ℓ_2 ; б) $L^2(\mathbb{R})$ всюду плотно в $L^1(\mathbb{R})$.

15. Докажите, что множество $M = \{x \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{\infty} (x(k)/(1+1/k))^2 = 1\}$ ограничено и замкнуто в пространстве ℓ_2 . Докажите, что $\rho(0, M) = 1$, но не существует $x \in M$ такого, что $\rho(0, x) = 1$. Укажите последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$, из которой нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся в ℓ_2 .

16. В пространстве ℓ_2 найдите $\rho(0, M)$, где $M = \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{\infty} x(k) = 1\}$.

- 17.** Постройте пример неполного евклидова пространства, в котором существует замкнутая, но неполная система.

С.3. §18: 97; 98.

- 18.** Докажите, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах $C[a, b]$, $L^1[a, b]$, $L^2[a, b]$.

С.3. §19: 116; 121(2) (вместо $RL_2[0, \pi/2]$ рассмотрите $L^2[0, \pi/2]$).

- 19.** Полна ли система функций $\{x^{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве

а) $C([1; 2])$; б) $C([-3; 0])$?

- 20.** Полна ли система функций $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве

а) $C[0; \pi/4]$; б) $C[\pi/4; \pi/2]$; в) $C[-\pi/8; \pi/8]$?

С.3. §20: 33; 41.

- 21*.** Исследуйте на полноту пространство ℓ_c^2 финитных числовых последовательностей, наделённое скалярным произведением пространства ℓ^2 . Систему $\{(1, -1, 0, 0, 0, \dots), (1, 1, -2, 0, 0, \dots), (1, 1, 1, -3, 0, \dots), \dots\}$ исследуйте на ортогональность, замкнутость и полноту в ℓ_c^2 .

49 + 5*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: 2(3); 4; 14(2); 17; 18(2, 3*).

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: 1(3) — исследуйте также при $\alpha \in (1; +\infty)$;

1(2) — исследуйте также при $\alpha \in (0; 1)$.

С.3. §14: 6(2, 6); 7(3, 4, 6); 8(5).

С.3. §15: 1(3) (вместо формулы Фруллани можно применить теорему Фубини); 3(1); 4(1); 5*(2); 6(2, 3, 5); 13(5); 15(5).

- 1.** Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

С.3. §16: 1(4); 7(3); 13(6); 14(5); 10(3)*.

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

С.2. §12: 248; 249; 255.

С.3. §17: 1(3); 2(3); 3(1); 5(1); 6(2).

2. Найдите преобразование Фурье:

а) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$; б) $f(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$, $\alpha > 0$; в) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

С.3. §17: 8(2, 6); 13; 14(1,3); 17*(1).

3. Даны функции $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ такие, что $|f(x+t) - f(x)| \leq g(x) \cdot |t|^\alpha$ для всех $t, x \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\widehat{f}(y) = O(1/|y|^\alpha)$ при $y \rightarrow \infty$.

4. Для измеримой функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ существуют константы $\alpha \in (0, 1)$ и $C > 0$ такие, что $|f(x)| \leq C/(1 + |x|^{1+\alpha})$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что преобразование Фурье функции f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α .

5*. Докажите, что если функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно непрерывно дифференцируема и имеет компактный носитель, то $\underbrace{f * \dots * f}_{k+2 \text{ раз}}$ будет k раз непрерывно дифференцируема.

IV. Обобщенные функции

С.3. §21: 58; 60.

6. Докажите, что в \mathcal{D}' справедливы равенства:

а) $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{a^2 + x^2} = \pi \delta(x)$; б) $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{a} = \pi \delta(x)$.

С.3. §21: 72; 73; 75*; 77*; 84.

7. Найдите в \mathcal{D}'

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^2}.$$

8. Упростите в \mathcal{D}' выражения:

а) $(e^{\sin(x)} + 3x \cos^2 x) \delta(x)$;

б) $(\sin \sin x + 3 \operatorname{arctg} e^x) \delta'(x)$;

в) $xe^x \delta''(x)$.

9. Найдите первые и вторые производные в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ для следующих обобщённых функций:

а) $|x|$;

б) $\theta(x) \sin x$;

в) $|x| \sin x$.

10. Найдите преобразование Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ для следующих обобщённых функций:

а) $\sin x + x \cos x$;

б) $\frac{\sin x}{x}$;

в) $(xe^x)\delta''(x)$.

11*. Решите относительно $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ уравнение $-u''(x) + u(x) = e^{-|x|}$.

$61 + 8^*$

Задания составили:

ассистент И.В. Воронин
доцент Н.А. Гусев

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Дифференциальные уравнения
по направлению: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»,
подготовки: 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: ФПМИ
кафедра: высшей математики
курс: 2
семестр: 4

лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 90 часов

Программу составил

к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 октября 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

Программа (годовой курс)

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n -го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.
3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера. Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства). Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n -го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее. Теорема Кнезера.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).

Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2023.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : URSS : Ленанд, 2022, <http://bookfi.org/book/791964>.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : URSS, 2022.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2020.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва : URSS, 2023.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2021, <http://www.umnov.ru>.

Дополнительная

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, <http://techlibrary.ru/bookpage.htm>.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 2005.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2015.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : ЮНИМЕДИАСТАЙЛ : Физматлит, 2002, 2006. (цитируется — С)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : ЛКИ, 2008; — Москва : ЛИБРОКОМ, 2011, 2013. (цитируется — Ф)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

I. Вариационное исчисление

С. §19: 12; 33; 75; 102.

С. §20.1: 2; 9; 14.

С. §20.2: 4.

С. §20.3: 5.

С. §21: 7.

1. Исследовать на экстремум при всех значениях вещественного параметра a :

а) $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - ay^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$;

б)* $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - ay^2) dx$, $y(0) = 0$.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: 667; 668; 677.

С. §9: 6; 16; 53; 47*; 73 (найти общее решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, используя формулу Лиувилля–Остроградского).

Ф. §22: 47.

2. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, где $\nu = \text{const}$ на $(0; \infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

- 3*. Доказать, что для решения задачи Коши $y'' + e^{\frac{2}{x+1}} y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ выполнено неравенство: $|y(x)| \leq e^{\frac{x}{x+1}}$ при $x \geq 0$.

III. Теорема сравнения Штурма

Ф.: 723; 726.

С. §10: 2; 3; 6.

4. Пусть функция $q(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $q(x) \leq 0$. Доказать, что краевая задача $y'' + q(x)y = 0$, $y(x_1) = a$, $y(x_2) = b$, при любых $a, b, x_1 \neq x_2$ имеет решение и это решение единственно.

5. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения

$$y'' + 2x^2 y' + (2x + 1)y = 0$$

имеет на действительной оси не более трех нулей.

6. Доказать, что для любого решения уравнения

$$y'' + (2 + \cos 3x)y = 0$$

существует точка $\xi \in [-1; 6]$ такая, что $y'(\xi) = 0$.

7. Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0, +\infty)$;

б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1} - x_n|$ любого указанного выше решения стремится к π при $n \rightarrow +\infty$.

29+4*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

I. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах изобразить фазовые траектории, для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: 971; 972; 973; 974; 975; 976*.

С. §13: 39; 48; 57.

Ф. §25: 161.

II. Устойчивость по Ляпунову

Ф.: 894; 920; 889*.

III. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 2; 12.

Ф.: 1164.

1. Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2 + 2y + 3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2 + y + z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

2. Найти все первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

$$\text{а) } \ddot{x} + \sin x = 0; \quad \text{б) } \ddot{x} - x + x^2 = 0; \quad \text{в) } \begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$$

С. §16: 6; 26.

- 3*. Дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x^5 = 0$ описывает колебания, период T которых зависит от начальных значений: $T = T(x(0); \dot{x}(0))$. Найти отношение $T(1, 1)/T(2, 2)$.

IV. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 4; 16; 45; 79; 85.

4. Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;

б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;

в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

- 5*. Найти поверхность, проходящую через кривую $y = x, z = 2y + y^3$ и обладающую свойством, что любая касательная плоскость пересекает ось Ox в точке с абсциссой, вдвое меньшей абсциссы точки касания.

V. Зависимость решений от параметра и начальных условий

Ф.: 1064 1068; 1070*.

VI. Повторение

С. §6: 35.

С. §7: 56.

С. §8: 126.

С. §9: 34.

С. §11: 55.

С. §13: 49.

С. §17: 84.

С. §20.1: 8.

38+5*

Задания составили:

к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов

к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: Аналитическая механика

по направлениям подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

27.03.03 «Системный анализ и управление»

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

физтех-школа: ФПМИ

кафедра: теоретической механики

курс: 2

семестр: 4

лекции – 30 часов

Экзамен – 4 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа
– 45 часов

Программу и задания составил:

к.ф.-м.н., доцент Д. А. Притыкин

к.ф.-м.н., ст. преп. А. С. Дробышева

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
25 сентября 2024 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н.

С. В. Соколов

1. Равновесие, устойчивость, движение вблизи устойчивого положения равновесия

Определение положения равновесия. Условия равновесия системы с идеальными связями (принцип виртуальных перемещений). Условия равновесия голономных систем (в терминах обобщенных сил). Случай потенциальных сил

Определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Теоремы прямого метода Ляпунова для автономных систем: теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости, теорема Четаева о неустойчивости, теорема Барбашина – Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Теорема Лагранжа – Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Условия неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии. Понятие о бифуркации. Основные типы бифуркаций для систем с потенциалом, зависящим от параметра. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Теорема об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем.

Первый метод Ляпунова исследования устойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Критерий Рауса – Гурвица (без доказательства). Два сценария потери устойчивости: дивергенция и флаттер.

Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот. Главные (нормальные) координаты. Общее решение. Случай кратных корней.

Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Частотные характеристики. Явление резонанса. Реакция линейной стационарной системы на негармоническое периодическое воздействие.

2. Уравнения Гамильтона, вариационные принципы, интегральные инварианты

Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Преобразование Лежандра уравнений Лагранжа в уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона для консервативной и обобщенно-консервативной системы.

Первые интегралы гамильтоновых систем. Скобки Пуассона. Теорема Якоби – Пуассона. Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат и для обобщенно-консервативных систем. Уравнения Рауса и Уиттекера.

Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. Теорема Эмми Нётер.

Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону. Вариационный принцип Гамильтона.

Интегральные инварианты Пуанкаре – Картана и Пуанкаре. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема. Теорема Ли Хуачжуня об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.

3. Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона – Якоби

Канонические преобразования. Локальный критерий каноничности. Критерий каноничности в терминах производящих функций.

Свободное каноническое преобразование и его производящая функция. Другие типы производящих функций. Правила преобразования гамильтонианов при канонических преобразованиях. Фазовый поток гамильтоновых систем как однопараметрическое семейство канонических преобразований.

Уравнение Гамильтона – Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных.

Теорема Лиувилля об интегрируемых системах. Переменные действие-угол. Элементы КАМ-теории.

Список литературы

1. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.
2. *Журавлёв В. Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.

3. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика : учебник для высших учебных заведений. — Изд. 5-е, испр. и доп. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» ; Институт компьютерных исследований, 2024.
4. *Амелькин Н. И.* Курс аналитической механики : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2023.
5. *Яковенко Г. Н.* Краткий курс теоретической механики. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010, 2012, 2014.
6. *Яковенко Г. Н.* Краткий курс аналитической динамики. — Москва : БИНОМ, 2009, 2010, 2012, 2014.
7. *Трухан Н. М.* Теоретическая механика. Методика решения задач: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

ЗАДАНИЯ

Первое задание

(срок сдачи с 17 по 22 марта 2025 г.)

Контрольная работа с 10 марта по 15 марта 2025 г.

1. **Равновесие. Принцип виртуальных перемещений**
14.10, 14.20, 14.29, 14.40
2. **Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости движения**
17.8

Исследуйте на устойчивость нулевое решение с помощью прямого метода Ляпунова:

T1.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^3 + xy^3, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - x^4. \end{cases}$$

T2.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + x^3, \\ \dot{y} = x - y - y^3. \end{cases}$$

ТЗ.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$$

Примечание к задаче ТЗ

Функцию Ляпунова искать в виде $V = (ax + by)^2 + cx^4$.

3. Устойчивость равновесия консервативных систем

15.2, 15.13, 15.26

Т4. Материальная точка находится в однородном поле тяжести на гладкой поверхности, определяемой уравнением (ось Oz направлена вертикально вверх):

$$z = \sin(x + y) - \cos y.$$

Найдите все положения равновесия материальной точки и исследуйте их устойчивость.

4. Малые колебания консервативных систем

16.6, 16.17, 16.30, 16.51, 16.70

5. Асимптотическая устойчивость диссипативных систем

17.1, 17.26, 17.30

Т5. Исследуйте на устойчивость все положения равновесия системы при всех значениях параметра a :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$$

6. Вынужденные колебания

18.3, 18.26, 18.38, 18.43(д)

Второе задание

(срок сдачи с 12 по 17 мая 2025 г.)

Контрольная работа с 5 по 10 мая 2025 г.

7. Функция Гамильтона и канонические уравнения

19.12, 19.21, 19.23 (найти решение в квадратурах), 19.47, 19.51

8. Первые интегралы. Скобки Пуассона

20.2, 20.14, 20.24, 20.34, 20.36

- 9. **Принцип Гамильтона**
21.10, 21.13, 21.23, 21.32
- 10. **Интегральные инварианты**
22.6, 22.20, 22.29, 22.31
- 11. **Канонические преобразования**
23.7, 23.20, 23.29, 23.48, 23.71, 23.97
- 12. **Уравнение Гамильтона – Якоби**
24.9, 24.18, 24.43, 24.66, 24.87

Номера задач взяты из сборника Пятницкий Е. С., Трухан Н. М., Ханукаев Ю. И., Яковенко Г. Н. Сборник задач по аналитической механике. — 4-е изд. — Москва : МФТИ, 2018.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Теория поля

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

27.03.03 «Системный анализ и управление»

физтех-школа: ФПМИ

кафедра: теоретической физики им. Л.Д. Ландау

курс: 2

семестр: 4

лекции – 30 часов

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

Дифф. зачет – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа
– 30 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц.
М. А. Андрейчиков

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики им Л.Д. Ландау
21 декабря 2024 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н.

Э. Т. Ахмедов

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Введение. Принцип относительности. Механика Ньютона и преобразования Галилея. Электродинамика Максвелла и преобразования Лоренца. Существование максимальной скорости распространения сигналов.

2. Преобразования Лоренца. Инерциальные системы отсчёта. Группа преобразований Лоренца и их геометрическая интерпретация. Диаграммы Минковского. Мировая точка (событие) и мировая линия. Интервал. Причинно связанные события. Относительность одновременности. Релятивистское сокращение длины и замедление времени. Релятивистский закон сложения скоростей. Последовательные неколлинеарные бусты и прецессия Томаса.

3. Некоторые сведения из геометрии. Группа поворотов в трехмерном евклидовом пространстве. Понятие тензора. Контра- и ковариантные векторы. Метрический тензор и скалярное произведение векторов. Группа преобразований Лоренца в псевдоевклидовом пространстве Минковского. Инвариантные тензоры. Дуальные тензоры. Ротор и дивергенция в тензорных обозначениях. Криволинейные и поверхностные интегралы в пространстве Минковского.

4. Действие для частицы. Понятие точечной частицы. Траектория частицы в пространстве Минковского и концепция собственного времени. 4-скорость, 4-ускорение и 4-сила. Ковариантная форма принципа наименьшего действия. Уравнения движения. Функции Лагранжа и Гамильтона. 4-импульс и закон его сохранения для замкнутой системы как следствие однородности пространства-времени. Движение под действием постоянной силы.

Релятивистская кинематика. Лабораторная система отсчёта и система центра инерции. Инвариантная масса. Массовая поверхность и преобразование распределений. Упругие и неупругие столкновения частиц. Порог реакции. Фотоны, эффект Доплера и абберация света.

5. Описание электромагнитного поля. Закон сохранения электрического заряда. Уравнение непрерывности. 4-вектор плотности тока для заряженной частицы. 4-вектор потенциала электромагнитного поля. Уравнения Максвелла в релятивистских обозначениях.

6. Движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Действие для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Обобщенный и кинематический импульсы. Функции Лагранжа и Гамильтона. Уравнения движения и сила

Лоренца. Электрическое и магнитное поля. Движение в постоянных электрическом и магнитном полях. Дрейф в скрещенных полях.

Движение заряда в слабонеоднородном магнитных полях. Магнитный дипольный момент. Гиромангнитное отношение. Энергия магнитного момента в магнитном поле. Адиабатический инвариант. Движение ведущего центра орбиты. Продольный и поперечный дрейф заряженных частиц в неоднородном магнитном поле. Магнитные зеркала.

7. Лагранжев подход к описанию электромагнитного поля. Электромагнитное поле как распределенная механическая система. Связи и калибровочная инвариантность. Тензор электромагнитного поля и инварианты поля. Преобразования Лоренца для электрических и магнитных полей. Действие для свободного электромагнитного поля. Закон сохранения заряда как следствие калибровочной инвариантности действия. Вторая пара уравнений Максвелла. Энергия и импульс электромагнитного поля. Закон сохранения для тензора энергии-импульса.

8. Свободное электромагнитное поле. Необходимость фиксации калибровки. Уравнения для 4-потенциалов в кулоновской калибровке и калибровке Лоренца. Остаточные калибровочные преобразования. Плоские монохроматические волны. Волновой 4-вектор. Линейная и круговая поляризации. Электромагнитное поле как набор гармонических осцилляторов.

9. Электро- и магнитостатика. Метод функции Грина для уравнения Пуассона. Мультипольное разложение: электрический и магнитный дипольные моменты. Электрический квадруполь. Энергия взаимодействия системы зарядов и токов.

10. Излучение электромагнитных волн. Запаздывающая функция Грина. Запаздывающие потенциалы. Дипольное приближение и условия его применимости. Поля электрического диполя в квазистационарной (ближней) и волновой (дальней) зонах. Интенсивность излучения в дипольном приближении и его угловое распределение. Излучение магнитного диполя и электрического квадруполя. Сила радиационного трения.

11. Классическая теория рассеяния электромагнитных волн. Дифференциальное и полное сечения рассеяния. Рассеяние на свободном заряде, формула Томсона. Поляризация рассеянного света. Рассеяние электромагнитных волн в дипольном приближении. Резонансы в рассеянии.

12. Излучение релятивистских частиц. Потенциалы Лие-нара–Вихерта. Синхротронное излучение в ультрарелятивистском случае. Полная интенсивность излучения. Угловое и спектральное распределения (качественно). Оценка длины когерентности.

Список литературы

Основная

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 2. Теория поля. — Москва : Физматлит, 2014, 536 с.
2. Белоусов Ю.М., Бурмистров С.П., Тернов А.И. Задачи по теоретической физике. — Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2013, 584 с.
3. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. 3-е изд., испр. — Москва : Регулярная и хаотическая динамика, 2002, 640 с.

Дополнительная

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — Москва : Мир, 1965.
2. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. — Москва : Наука, 1987.
3. Излучение заряженных частиц в вакууме : учебно-методическое пособие / составители С. В. Фомичев, С. В. Толоконников ; МФТИ, Кафедра теоретической физики. - Москва : МФТИ, 2003.
4. Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П. Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. 2-е изд. — Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2009, 176 с.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ

1. Тензорные обозначения и векторный анализ

В евклидовом пространстве в декартовых координатах можно не различать верхние и нижние индексы, базис — $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, координаты — $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$. Правило Эйнштейна: по дважды повторяющимся индексам производится суммирование. $\delta_{\alpha\beta}$ — символ

Кroneckera, абсолютно симметричный тензор второго ранга. $e_{\alpha\beta\gamma}$ — абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга.

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\beta\gamma\alpha}, \quad e_{xyz} = e_{123} = 1,$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\rho} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} \end{pmatrix},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}, \\ e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}.$$

Векторный оператор дифференцирования (набла):

$$\nabla = \left\{ \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right\} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$\Delta = (\nabla \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}, \quad \text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha},$$

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv (\nabla \mathbf{a}) = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad \text{rot } \mathbf{a} \equiv [\nabla \times \mathbf{a}] = \mathbf{e}_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\beta}.$$

Разложение в ряд Тейлора:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{a} \nabla)^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \nabla)^n \mathbf{F}(\mathbf{r}) = e^{(\mathbf{a} \nabla)} \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

2. Преобразование Фурье

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} dt,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \frac{d^3\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4}.$$

3. Разложение плоской волны и кулоновского потенциала

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta),$$

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta),$$

где $r < R$. Здесь $P_l(x)$ — полиномы Лежандра, $j_l(z)$ — сферические функции Бесселя:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z).$$

Ортогональность полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2\delta_{ll'}}{(2l+1)}, \quad P_l(1) = 1.$$

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

4. Дельта-функция

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b, \\ 0, & x_0 < a, x_0 > b; \end{cases}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}, \quad \delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}, \quad f(x_n) = 0,$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}.$$

Формула Сохотского: $\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{x - i\delta} = \mathcal{P} \frac{1}{x} + i\pi\delta(x).$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

0. Тензорные обозначения

Для произвольной метрики:

Элемент интервала (или длины), обратная метрика

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k.$$

Поднимание и опускание индексов

$$V_n g^{nm} = V^m, \quad V^j g_{jk} = V_k,$$

$$F_{sp} g^{mp} = F_s^m, \quad F^{ij} g_{mj} = F^i_m, \quad F^{ij} g_{ni} g_{mj} = F_{nm}.$$

Для метрики Минковского:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{ij}.$$

Контравариантный 4-вектор $A^i \equiv (A^0, \mathbf{A}) \equiv (A^0, A^\alpha)$.

Ковариантный 4-вектор $A_i \equiv (A^0, -\mathbf{A}) \equiv (A^0, -A^\alpha)$.

Скалярное произведение векторов

$$A^i B_i = A^0 B^0 - \mathbf{A}\mathbf{B} = A^0 B^0 - A^\alpha B^\alpha.$$

4-вектор координаты $x^i = (ct, \mathbf{r})$.

Интервал $ds = cd\tau = \sqrt{dx^i dx_i} = \sqrt{(cdt)^2 - (d\mathbf{r})^2} = cdt\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Преобразование Лоренца (буст), скорость направлена параллельно оси x , матрица перехода от новых координат к старым:

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \text{th } \vartheta, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \text{ch } \vartheta, \quad \beta\gamma = \text{sh } \vartheta.$$

1. Кинематика релятивистской частицы

4-скорость частицы

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right), \quad u^i u_i = 1.$$

4-импульс

$$p^i = m c u^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right), \quad \mathbf{p} = \frac{\mathcal{E} \mathbf{v}}{c^2}, \quad p^i p_i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2,$$

m — масса, \mathcal{E} — энергия, \mathbf{p} — импульс частицы.

2. Уравнения электромагнитного поля

4-потенциал $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, где φ — скалярный, а \mathbf{A} — векторный потенциалы. Электрическое и магнитное поля:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Тензор электромагнитного поля:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & -e_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma \end{pmatrix}.$$

Калибровочное (градиентное) преобразование:

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i} \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla f.$$

Дуальный тензор:

$$\tilde{F}_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} F^{lm}, \quad e^{0123} = -e_{0123} = 1.$$

Инварианты электромагнитного поля:

$$F^{ik} F_{ik} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2), \quad F^{ik} \tilde{F}_{ik} = -4(\mathbf{E}\mathbf{H}),$$

$$S[A] = \int_{ct_A}^{ct_B} \int \int \int d^4x \left[\frac{-F^{ik} F_{ik}}{16\pi c} - \frac{1}{c^2} j^i A_i \right].$$

Уравнения движения заряженной частицы:

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v}.$$

Уравнения Максвелла:

1-я пара

$$\frac{\partial \tilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0 \Leftrightarrow (dF)_{ijk} \equiv \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

2-я пара

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \Rightarrow$$

Уравнение непрерывности:

$$\Rightarrow \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad j^i = (c\rho, \mathbf{j}).$$

Микроскопические плотности заряда и тока:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t));$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \delta(\mathbf{r}) = \iiint e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

3. Постоянное электромагнитное поле

Дипольный момент системы зарядов:

$$\text{электрический } \mathbf{d} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a,$$

$$\text{магнитный } \mathbf{M} = \frac{1}{2c} \sum_a e_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a].$$

Тензор квадрупольного момента:

$$D_{\alpha\beta} = \sum_a e_a (3x_{a\alpha}x_{a\beta} - (\mathbf{r}_a)^2 \delta_{\alpha\beta}).$$

Разложение потенциалов по мультипольным моментам:

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{(\mathbf{d}\mathbf{n})}{r^2} + \frac{D_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{2r^3} + \dots$$

Поле магнитного диполя (усреднённое по времени):

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{M} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{M}}{r^3}.$$

Система зарядов во внешнем поле:

$$U_e = e\varphi - (\mathbf{d}\mathbf{E}) + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} D_{\alpha\beta} + \dots;$$

$$U_m = -(\mathbf{M}\mathbf{H}), \quad \mathbf{F} = (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H}.$$

4. Волновые уравнения

$$-\square A^i \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^i}{\partial t^2} - \Delta A^i = \frac{4\pi}{c} j^i.$$

Калибровка (калибровочное условие) Лоренца:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Запаздывающие потенциалы:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'; \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Плотность W и поток \mathbf{S} энергии электромагнитного поля:

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

Плотность импульса \mathbf{g} и тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ электромагнитного поля:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{\mathbf{S}}{c^2}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = W\delta_{\alpha\beta} - \frac{E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta}{4\pi}.$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$\begin{aligned} T^{ik} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} - F^{il} F^{kl} \right); \\ T^{ik} &= \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & \mathbf{S}/c \\ \mathbf{S}/c & \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Баланс энергии-импульса электромагнитного поля:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} F^{ik} j_k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) = 0, \\ \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_\alpha = 0. \end{cases}$$

5. Плоская монохроматическая волна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{-ik^m x_m} \right\},$$

$$k^m = (\omega/c, \mathbf{k}), \quad k_m k^m \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 = 0.$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (\mathbf{nH}) = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Вектор поляризации:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|} = e_1 \mathbf{e}^{(1)} + e_2 \mathbf{e}^{(2)}, \quad \left((\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)*}) = 0, \quad (\mathbf{e}^{(1,2)} \mathbf{n}) = 0 \right).$$

Линейный базис: $\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(x)}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(y)}, \quad (\mathbf{n} \parallel z),$

циркулярный базис:

$$\mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{e}^{(x)} + i \mathbf{e}^{(y)} \right), \quad \mathbf{e}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{e}^{(x)} - i \mathbf{e}^{(y)} \right).$$

Усреднение по времени:

$$\overline{\text{Re} \{ \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} \} \text{Re} \{ \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} \}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^*).$$

Усреднение по поляризации: $\langle e_\alpha e_\beta^* \rangle = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta).$

6. Разложение поля на осцилляторы

Вектор-потенциал (в ящике с периодическими граничными условиями) раскладывается на плоские волны (в ряд Фурье):

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}).$$

Гамильтониан

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}j} \mathcal{H}_{\mathbf{k}j}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}j} = \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}j}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}j}^2),$$

где $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ — волновой вектор, $\omega_k = |\mathbf{k}|/c$, $j = 1, 2$ — номер поляризации, $V = L^3$ — объём ящика,

$$Q_{\mathbf{k}j} = \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \cdot \mathbf{e}^{(j)},$$

$$P_{\mathbf{k}j} = -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \cdot \mathbf{e}^{(j)} = \dot{Q}_{\mathbf{k}j}.$$

7. Излучение и рассеяние электромагнитных волн

Интенсивность мультипольного излучения:

$$dI_d = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

$$I_d = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2; \quad I_m = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{M}}^2; \quad I_D = \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\beta}.$$

Сила радиационного трения:

$$\mathbf{F}_{fr} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}.$$

«Классический радиус», сечение рассеяния э.м. волны на свободной частице (σ_T) и осцилляторе:

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}; \quad \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2; \quad \sigma = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

ЗАДАНИЕ

УПРАЖНЕНИЯ

Задание 1

1. В трёхмерном евклидовом пространстве вычислить свертки:

$$\delta_{\alpha\alpha}, \quad \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma}, \quad \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{\gamma\alpha};$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\gamma}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\beta\gamma}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\nu\gamma},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha 1} A_{\beta 2} A_{\gamma 3}.$$

2. Проверить, что скалярное произведение (\mathbf{a}, \mathbf{b}) равно $a_\alpha b_\alpha$, что компоненты векторного произведения $\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ равны $c_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$. Показать (используя результат предыдущего упражнения), что

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}][\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}][[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] \times [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]] = (\mathbf{a}, [\mathbf{b} \times \mathbf{c}])^2.$$

3. Используя тензорные обозначения:

(а) раскрыть выражения: $\text{rot rot } \mathbf{A}$, $\text{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$, $\text{rot}(f\mathbf{A})$, $\text{div}(f\mathbf{A})$, $\text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$, где \mathbf{A} , \mathbf{a} , \mathbf{b} и f — функции координат \mathbf{r} ;

(б) вычислить: $\text{rot}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$, $\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{a} — постоянные векторы;

(в) вычислить: $\text{grad } r$, $\text{div } \mathbf{r}$, $(\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{r}$, $\text{grad } f(r)$, $\text{rot } \mathbf{a}(r)$, $\text{div } \mathbf{a}(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$;

(г) вычислить: $\text{grad} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, $\text{div}(\mathbf{a} \exp(ikr))$, $\text{grad}(f(t - r/c))$.

4. Усреднение по направлениям в 3D и 2D. Используя свойства инвариантных тензоров, найти средние значения произведений компонент единичного вектора n_α на единичной сфере $n_\alpha n_\alpha = 1$, а также на единичной окружности, плоскость которой ортогональна вектору m_α :

$$\langle n_\alpha \rangle, \langle n_\alpha n_\beta \rangle, \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma \rangle, \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu \rangle, \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu n_\nu \rangle.$$

Задание 2

5. Показать, что однородное магнитное поле \mathbf{H} , направленное по оси z , может быть описано векторным потенциалом $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$ (калибровка Ландау). Найти вид калибровочного преобразования, реализующего переход из калибровки Ландау к аксиальной калибровке $\mathbf{A}' = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}]$.

6. Найти 4-потенциал, создаваемый точечным покоящимся зарядом в калибровке Вейля $\varphi = 0$.

7. Для потенциала $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ найти калибровочные преобразования, после которых будут выполнены калибровочные условия:
а) $\partial_\mu A^\mu = 0$ (калибровка Лоренца), б) $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$ (калибровка Кулона), в) $\varphi = 0$ (калибровка Вейля).

ЗАДАЧИ

Задание 1

1. Начало координат системы K' движется со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ относительно системы K , а оси координат составляют со скоростью \mathbf{v} те же самые углы, что и оси системы K . Записать матрицу преобразований Лоренца от системы K к системе K' , а также обратного преобразования. Определить положение осей (x', y') в системе K в момент времени $t = 0$ по часам системы K .

2. Два источника, движущиеся к наблюдателю по одной прямой с релятивистской скоростью V , одновременно (в собственной системе координат) испускают световой сигнал. Какова разность времен прихода обоих сигналов к наблюдателю, если расстояние между источниками (в их системе координат) равно l ?

3. Прецессия Томаса. На частицу, движущуюся со скоростью \mathbf{v} , действует сила, сообщающая ей ускорение $\dot{\mathbf{v}}$. Определить, с какой угловой скоростью будет поворачиваться спин частицы относительно лабораторной системы отсчета, если сила, действующая на

частицу, не действует на ее спин. *Указание:* использовать результат задачи 2. *Ответ:*

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\gamma^2}{(\gamma + 1)c^2} [\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}].$$

4. Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ. Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью?

5. Пучок π^+ -мезонов с начальным импульсом $p_0 = 200$ МэВ/с вводится в линейный ускоритель. Какова должна быть напряженность ускоряющего поля E , чтобы, по крайней мере, половину пионов удалось ускорить до энергии $\mathcal{E} = 200$ ГэВ? Какую длину должен при этом иметь ускоритель? (Масса π^+ -мезона $m_{\pi^+} = 140$ МэВ. Время жизни π^+ -мезона равно $\tau_{\pi^+} = 2,6 \cdot 10^{-8}$ с, а время полураспада $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ равно $\tau_{1/2} = \tau_{\pi^+} \ln 2$.)

6. Плоское зеркало движется со скоростью v в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна под углом θ к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения. *Указание:* использовать преобразование Лоренца 4-волнового вектора.

7. В ускорителе на встречных пучках идет реакция

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-.$$

Зная энергию каждого из пучков e^+ и e^- , найти энергию и импульсы μ^+ и μ^- . Каков энергетический порог этой реакции? Сравнить с порогом в случае, когда ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.

8. Для получения γ -квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $E = 200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon = 2$ эВ (эффект Комптона). Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Какие малые безразмерные параметры присутствуют в задаче? Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния. Обсудить предельные случаи «очень маленького» и «достаточно большого» угла рассеяния. Каков критерий малости угла?

9. Для нейтрино, образующихся при распаде π -мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π -мезона ≈ 140 МэВ, масса мюона ≈ 105 МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя π -мезона распад $\pi \rightarrow \mu + \nu$ происходит изотропно.

10. Неподвижное ядро массы M с энергией возбуждения W испускает γ -квант.

1. Какую энергию может сообщить испущенный γ -квант ядру с такой же массой, находящемуся в основном состоянии?

2. С какой скоростью должно двигаться возбужденное ядро, чтобы испущенный γ -квант мог возбудить (передать энергию возбуждения W) такое же ядро, находящееся в основном состоянии?

11. Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в перпендикулярных электрическом и магнитном полях \mathbf{E} и \mathbf{H} . Определить скорость дрейфа в нерелятивистском случае. *Указание:* записать уравнение движения в 4-мерной форме, решить через матричную экспоненту.

12. Релятивистская частица с массой m и зарядом e движется в магнитном поле. Определить изменение энергии частицы за один оборот в случае, когда магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим полем). Доказать, что величина p_{\perp}^2/H остается постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2 .

13. Магнитное поле, направленное по оси z вдоль этой оси, убывает с постоянным градиентом $\partial H_z/\partial z = -h = \text{const}$. Может ли поле во всем пространстве оставаться параллельным оси z ? Найти радиальные компоненты поля вне оси z . Найти выражения для силовых линий магнитного поля.

14. Получить формулу $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}, \nabla)\mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле. Найти в нерелятивистском случае уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы, если поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты.

15. На больших расстояниях поле Земли представляет поле диполя с магнитным моментом $\mathbf{m} = 8,1 \cdot 10^{25}$ гаусс·см³. (а) Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии. (б) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол α с плоскостью экватора, определить максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей. Найти угол α , при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости, значительно больше радиуса Земли. (в) Используя результат задачи 13, найти период дрейфа вокруг Земли протона с энергией 10 МэВ, движущегося в экватори-

альной плоскости на расстоянии 30 000 км от Земли.

Задание 2

16 Определить потенциальную энергию взаимодействия двух диполей с моментами \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 .

17. Найти тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида относительно его центра. Найти электрическое поле на больших расстояниях.

18. Определить электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях r , много больших размеров диполя a , но необязательно больших длины волны λ .

19.* Гармонически колеблющийся диполь помещен на высоте L над идеально проводящей металлической плоскостью. Для случаев $L \ll \lambda$ и $L \gg \lambda$ найти интенсивность излучения диполя в зависимости от угла наблюдения и угла между диполем и нормалью к плоскости.

20. Два разноименных заряда (e_1, m_1) и (e_2, m_2) обращаются один вокруг другого под действием кулоновского притяжения по круговой орбите радиуса R . Определить энергию, теряемую на излучение за один оборот. Найти зависимость расстояния между зарядами от времени. Определить время, за которое один заряд упадет на другой (время жизни классического атома).

21. Два одноименных заряда (e_1, m_1) и (e_2, m_2) испытывают лобовое столкновение. Определить полную излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть дипольный ($e_1/m_1 \neq e_2/m_2$) и квадрупольный ($e_1/m_1 = e_2/m_2$) случаи.

22. Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот. Найти полную мощность (в мегаваттах) синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце $5 \cdot 10^{12}$. Оценить характерную длину волны излучения.

23.* Пучок релятивистских электронов пролетает через плоский конденсатор, к которому приложено переменное напряжение с частотой ω_0 (ондулятор). Найти частоту излучения электронов в зависимости от угла θ между наблюдателем и направлением движения пучка.

24. Найти дифференциальные и полные сечения рассеяния линейно поляризованного и «естественного» (неполяризованного) света заряженным осциллятором с резонансной частотой ω_0 и затуханием γ .

1-я контрольная и сдача 1-го задания: 20.03 – 25.03.2025 г.

2-я контрольная и сдача 2-го задания: 15.05 – 20.05.2025 г.