

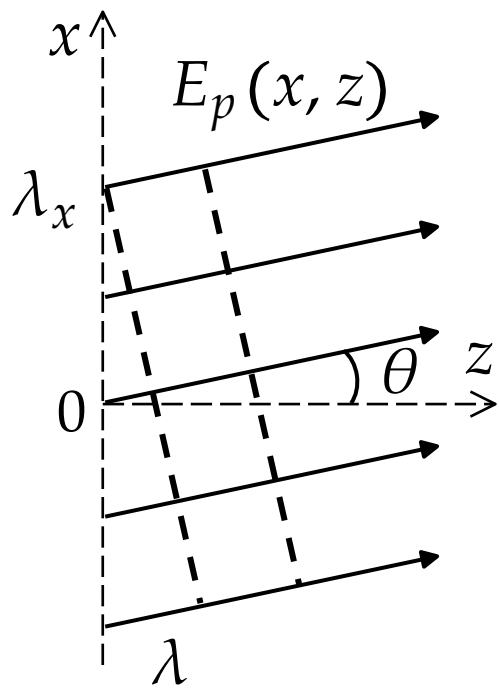


Преобразование Фурье в оптике. Пространственная фильтрация

ЛЕКЦИЯ 8

Метод Релея: Разложение светового поля по плоским волнам

Наклонная плоская волна:



$$E_p(x, z) = Ae^{ik_x x + ik_z z}$$

$$k_x = k \sin \theta,$$

$$k_z = k \cos \theta$$

В плоскости $z = 0$:

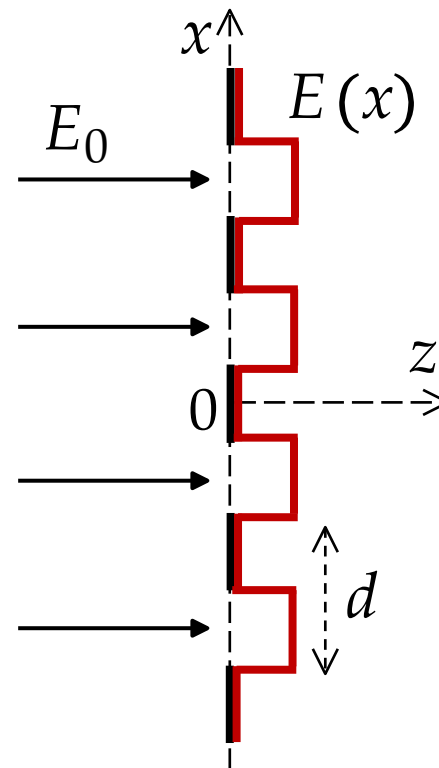
$$E_p(x, 0) = Ae^{ik_x x}$$

Пространственная частота: $u \equiv k_x$

Период по оси x :

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} = \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

Периодический объект (с периодом d)



Световое поле:

$$E(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iu_n x}$$

$$u_n = nu_0, \quad u_0 = \frac{2\pi}{d}$$

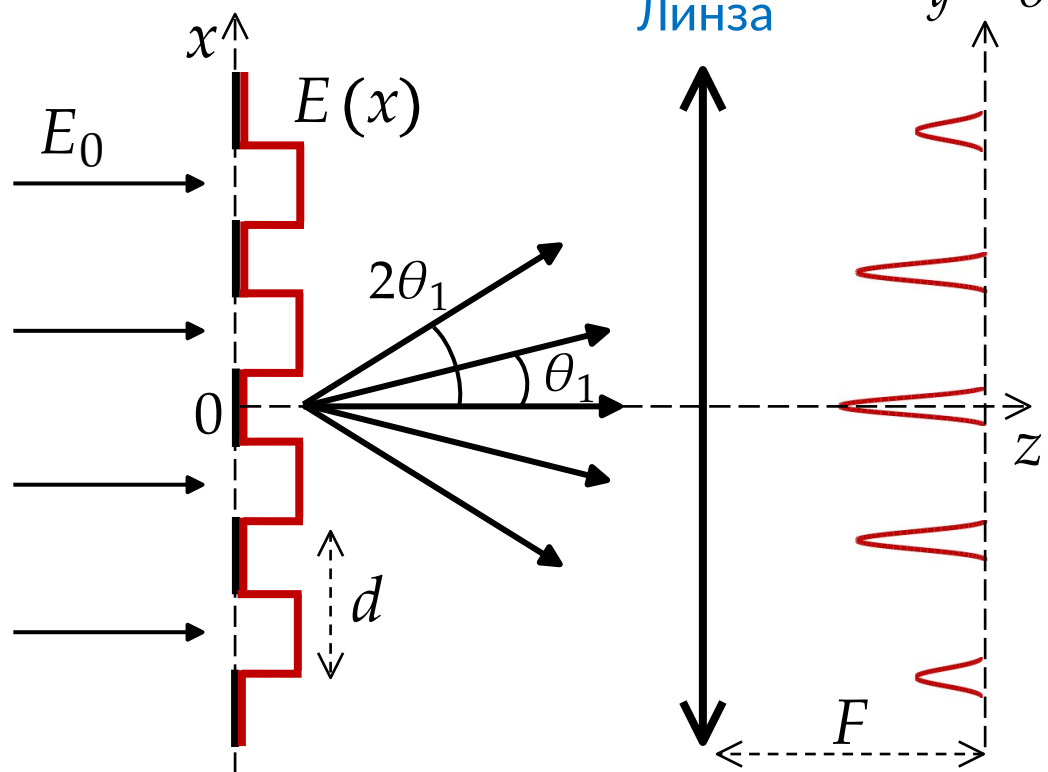
Каждая гармоника $C_n e^{iu_n x}$ отвечает наклонной плоской волне с углом $\theta = \theta_n$:

$$A = C_n, \quad k_x = u_n$$

$$\sin \theta_n = \frac{u_n}{k} = n \frac{\lambda}{d}$$

Преобразование Фурье светового поля с помощью линзы

Периодический объект
(с периодом d)



Фокальная плоскость

Линза

$$y = \theta F = uF/k$$

Световое поле после объекта - это набор плоских волн с углами наклона:

$$\theta = 0, \pm \theta_1, \pm 2\theta_1, \pm 3\theta_1 \dots, \quad \text{где } \theta_1 = \frac{\lambda}{d}$$

$$E(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iu_n x + ik_z z}, \quad \text{где } u_n = \frac{2\pi n}{d}$$

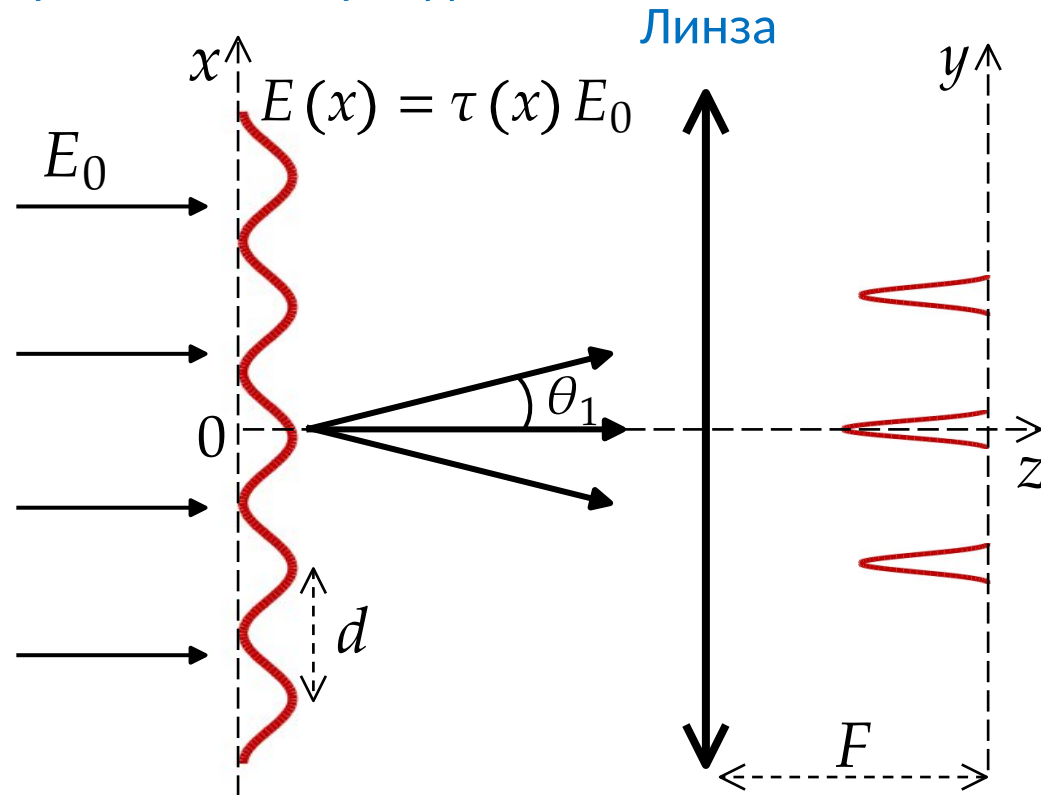
Гармоника $C_n e^{iu_n x}$ с индексом n описывает детали размером $\delta = \frac{d}{n}$.

Ограничение: $u_n \leq k$, поэтому $\delta \geq \lambda$.

Амплитуда светового поля в фокальной плоскости линзы - это пространственный спектр поля $E(x)$:
 $G(u_n) = |C_n|$, где $u = u_n$ - пространственная частота.

Амплитудная синусоидальная решетка

Амплитудная синусоидальная
решетка (с периодом d)



Функция пропускания: $\tau(x) = 1 + m \cos \Omega x$, где $\Omega = \frac{2\pi}{d}$

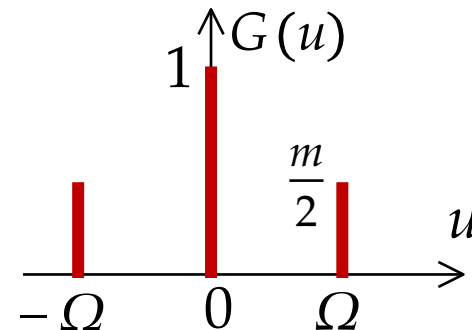
Световое поле сразу за решеткой:

$$E(x) = E_0 (1 + m \cos \Omega x) = E_0 \left(1 + \frac{m}{2} e^{i\Omega x} + \frac{m}{2} e^{-i\Omega x} \right)$$

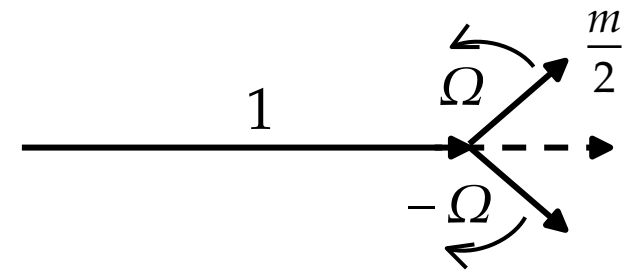
Световое поле после решетки содержит 3 плоские волны:

$$E(x, z) = E_0 \left(e^{ikz} + \frac{m}{2} e^{i\Omega x + ik_z z} + \frac{m}{2} e^{-i\Omega x + ik_z z} \right), \quad k_z = \sqrt{k^2 - \Omega^2}$$

Пространственный спектр:



Векторная диаграмма АМ:

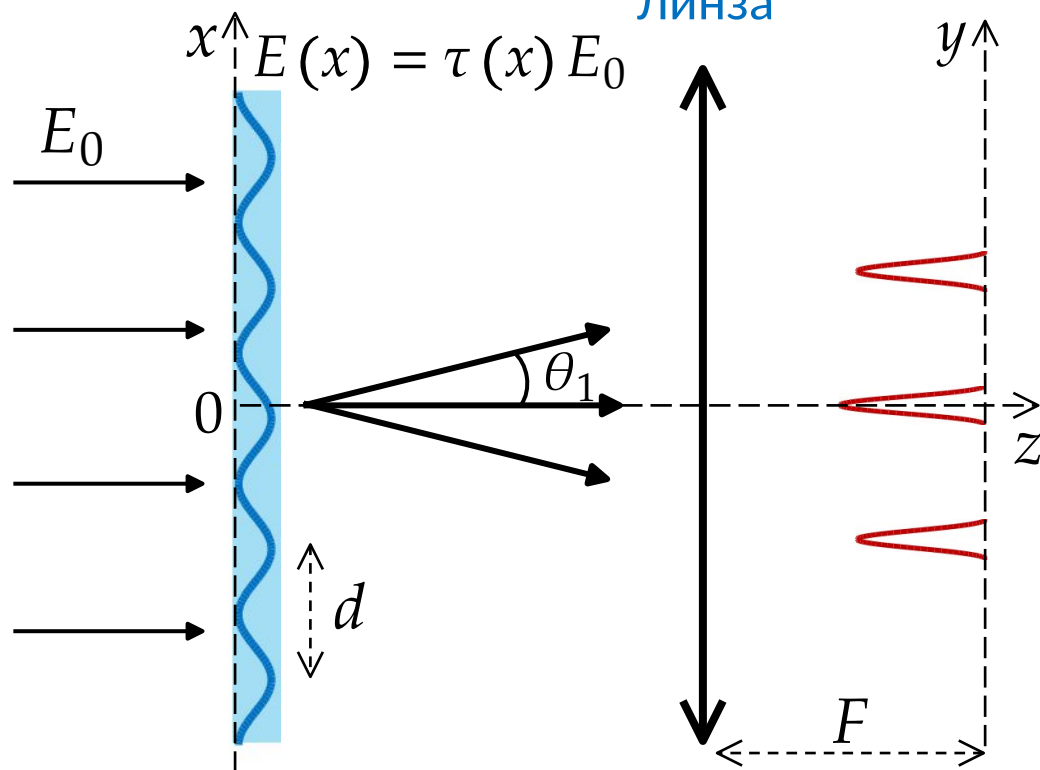


Фазовая синусоидальная решетка

Фазовая синусоидальная
решетка (с периодом d)

Функция пропускания: $\tau(x) = \exp(im \cos \Omega x) \approx 1 + im \cos \Omega x$, где $m \ll 1$

Линза



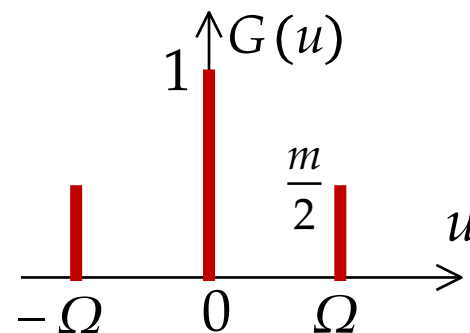
Световое поле сразу за решеткой:

$$E(x) = E_0(1 + im \cos \Omega x) = E_0 \left(1 + \frac{im}{2} e^{i\Omega x} + \frac{im}{2} e^{-i\Omega x} \right)$$

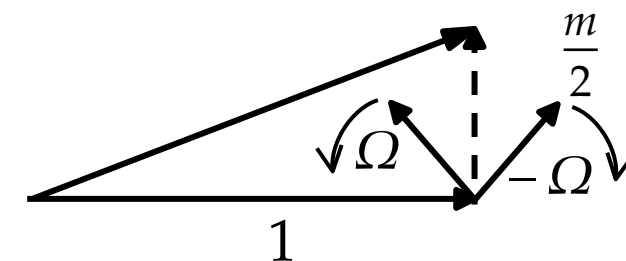
Световое поле после решетки содержит 3 плоские волны:

$$E(x, z) = E_0 \left(e^{ikz} + \frac{im}{2} e^{i\Omega x + ik_z z} + \frac{im}{2} e^{-i\Omega x + ik_z z} \right), \quad k_z = \sqrt{k^2 - \Omega^2}$$

Пространственный спектр:

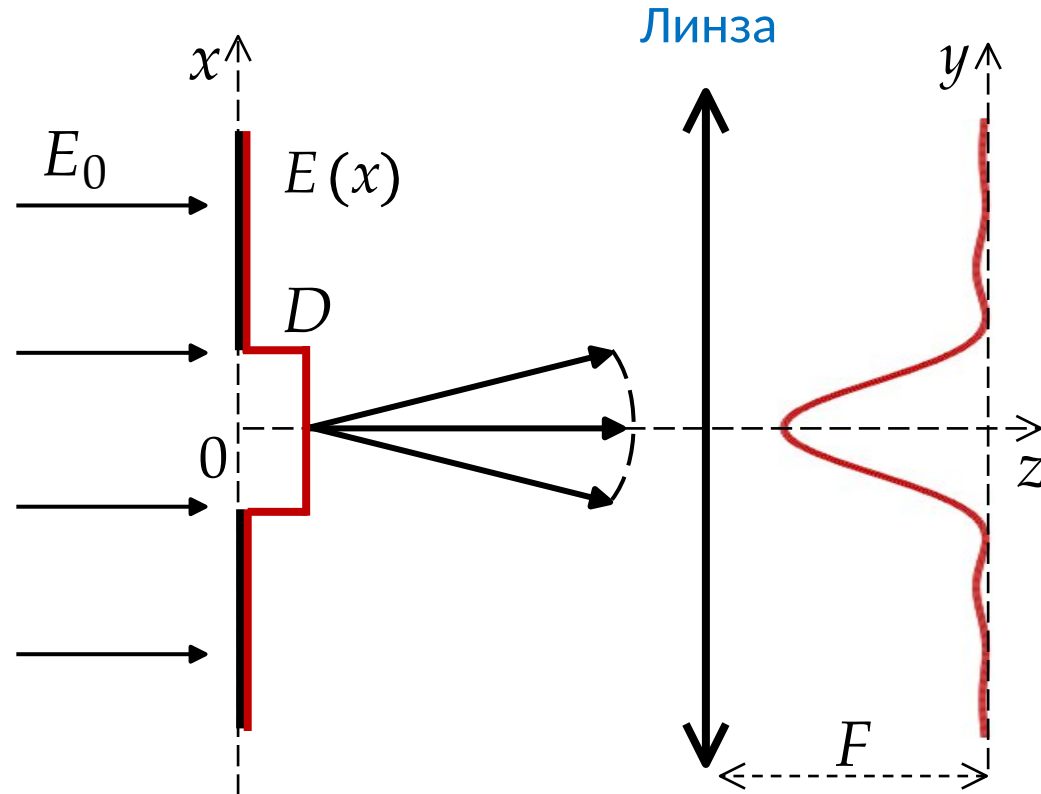


Векторная диаграмма ФМ:



Пространственный спектр при дифракции на щели

Щелевая диафрагма
(шириной D)



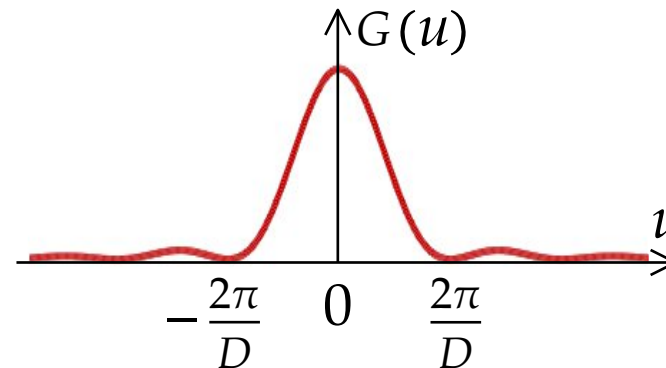
Световое поле сразу за диафрагмой:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(u) e^{iux} du, \quad \text{где } C(u) = E_0 \frac{\sin(uD/2)}{uD/2}$$

Световое поле после диафрагмы:

$$E(x, z) = \int_{-k}^k C(u) e^{iux + ik_z z} du, \quad \text{где } k_z = \sqrt{k^2 - u^2}$$

Пространственный спектр ($G = C$):



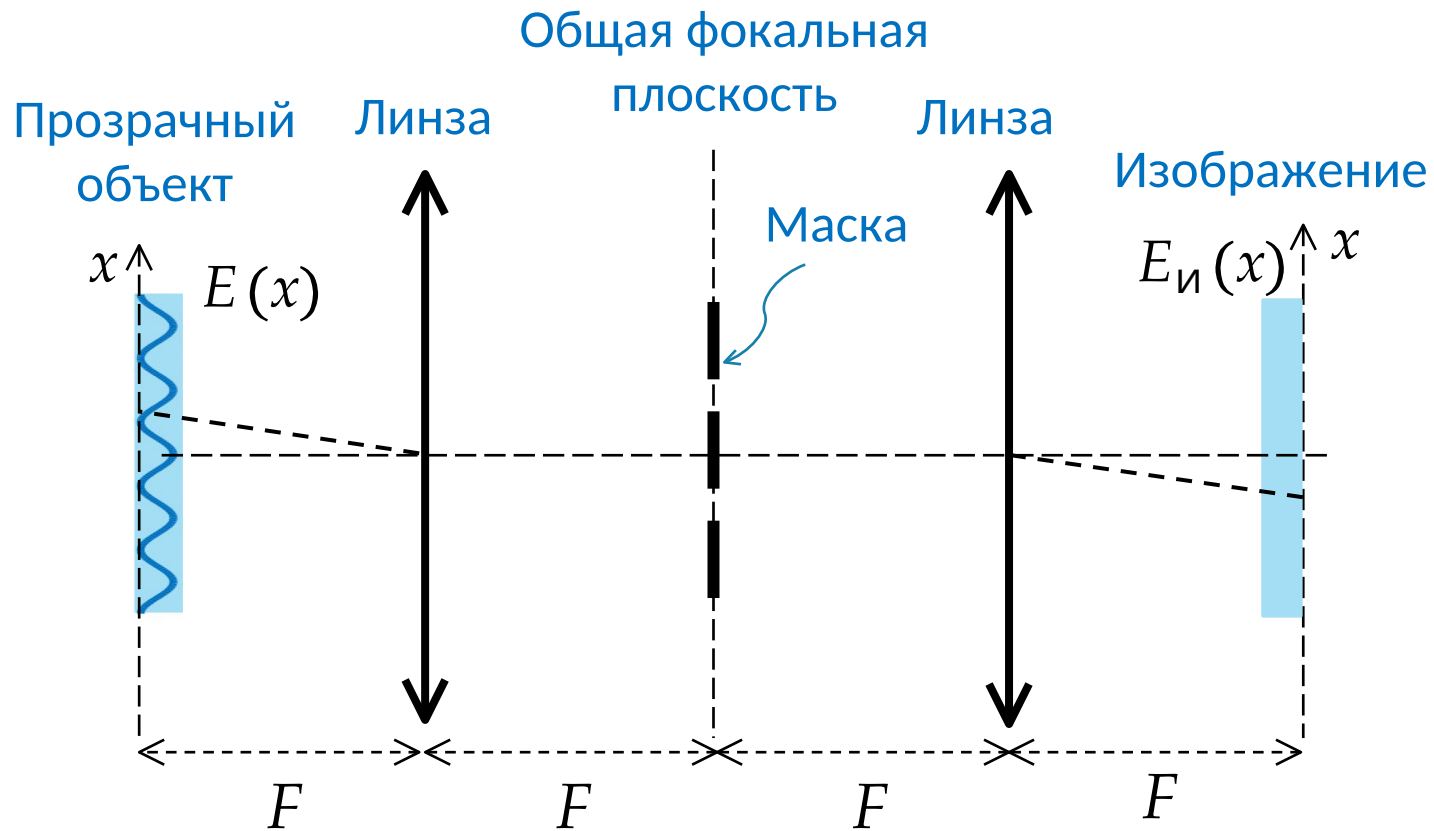
Соотношение
неопределенности:

$$uD = 2\pi$$

$$k \sin \theta D = 2\pi \Rightarrow$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{D}$$

Пространственная фильтрация. Схема Катрона

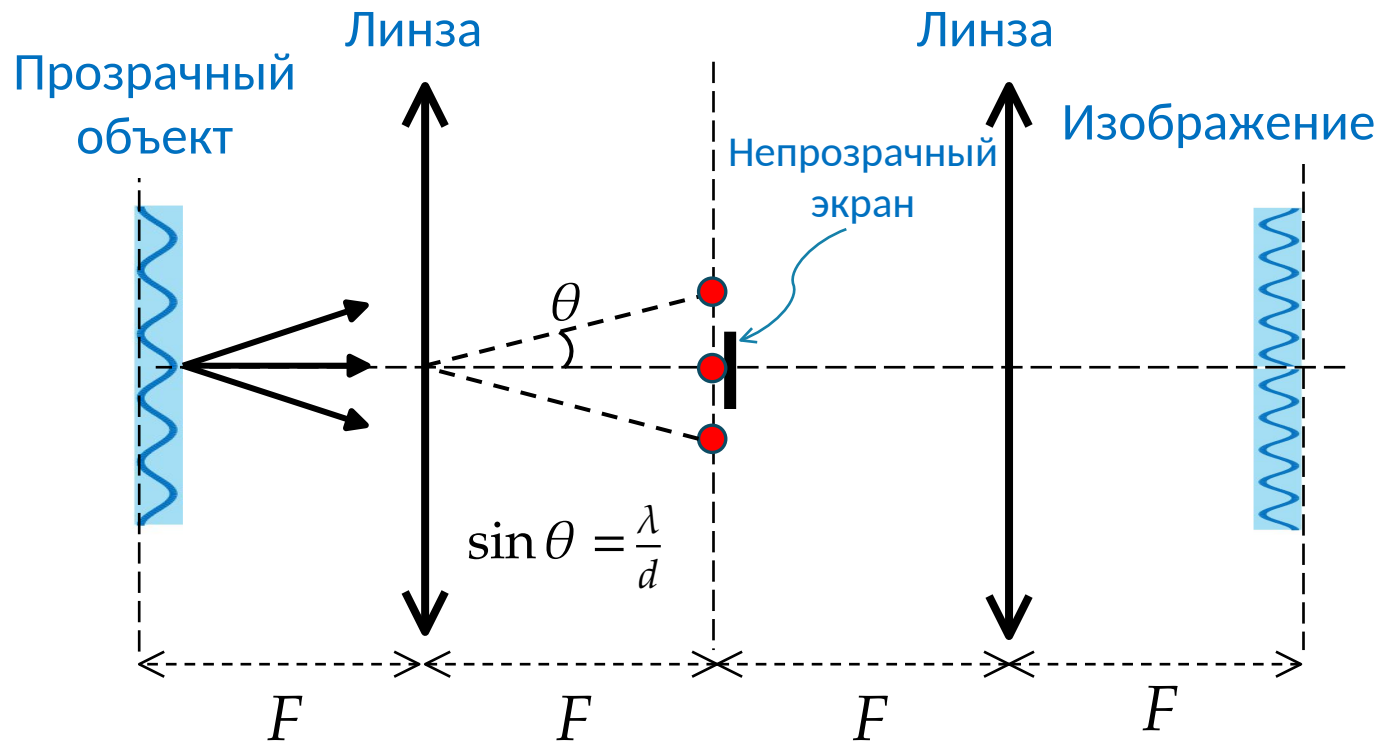


Световое поле в плоскости изображения
в отсутствие маски:

$$E_{\text{и}}(x) = E(-x)$$

Без маски в фокальной плоскости
структура прозрачного объекта
невидна. Маска осуществляет
фильтрацию пространственных частот
и позволяет визуализировать объект.

Визуализация прозрачных объектов. Метод темного поля



Световое поле в плоскости объекта:

$$E(x) = E_0(1 + im \cos \Omega x)$$

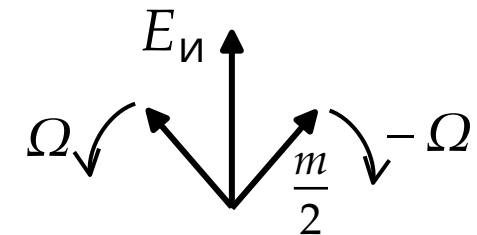
Световое поле в плоскости изображения:

$$E_{\text{и}}(x) = E_0(\cancel{1} + im \cos \Omega x)$$

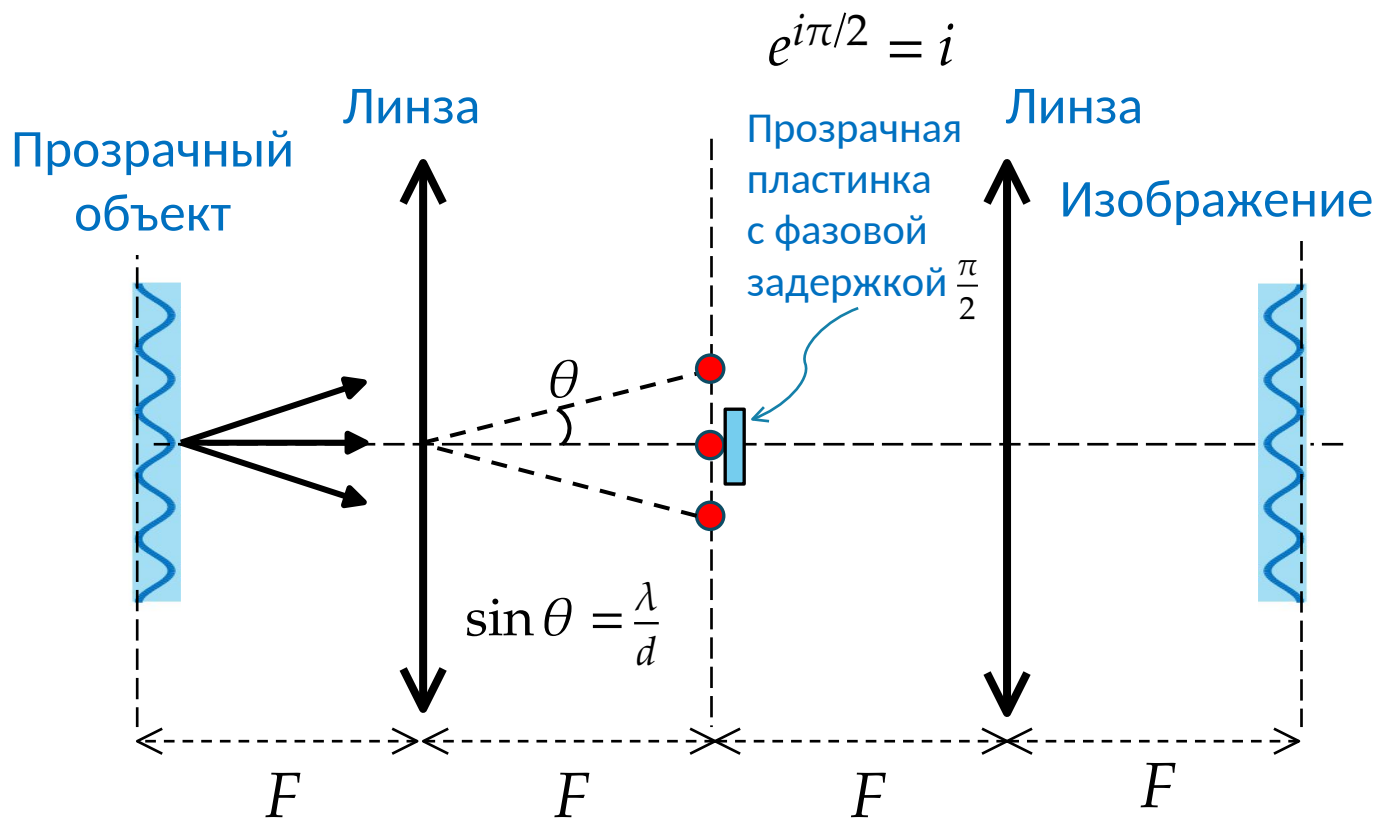
Интенсивность:

$$I_{\text{и}}(x) = I_0 m^2 \cos^2 \Omega x = \frac{I_0 m^2}{2} (1 + \cos 2\Omega x)$$

Векторная диаграмма:



Визуализация прозрачных объектов. Метод фазового контраста



Световое поле в плоскости объекта:

$$E(x) = E_0(1 + im \cos \Omega x)$$

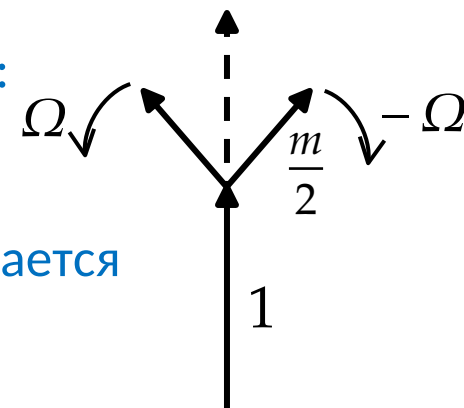
Световое поле в плоскости изображения:

$$E_{\text{и}}(x) = E_0(i + im \cos \Omega x)$$

Интенсивность:

$$I_{\text{и}}(x) = I_0(1 + m \cos \Omega x)^2 \approx I_0(1 + 2m \cos \Omega x)$$

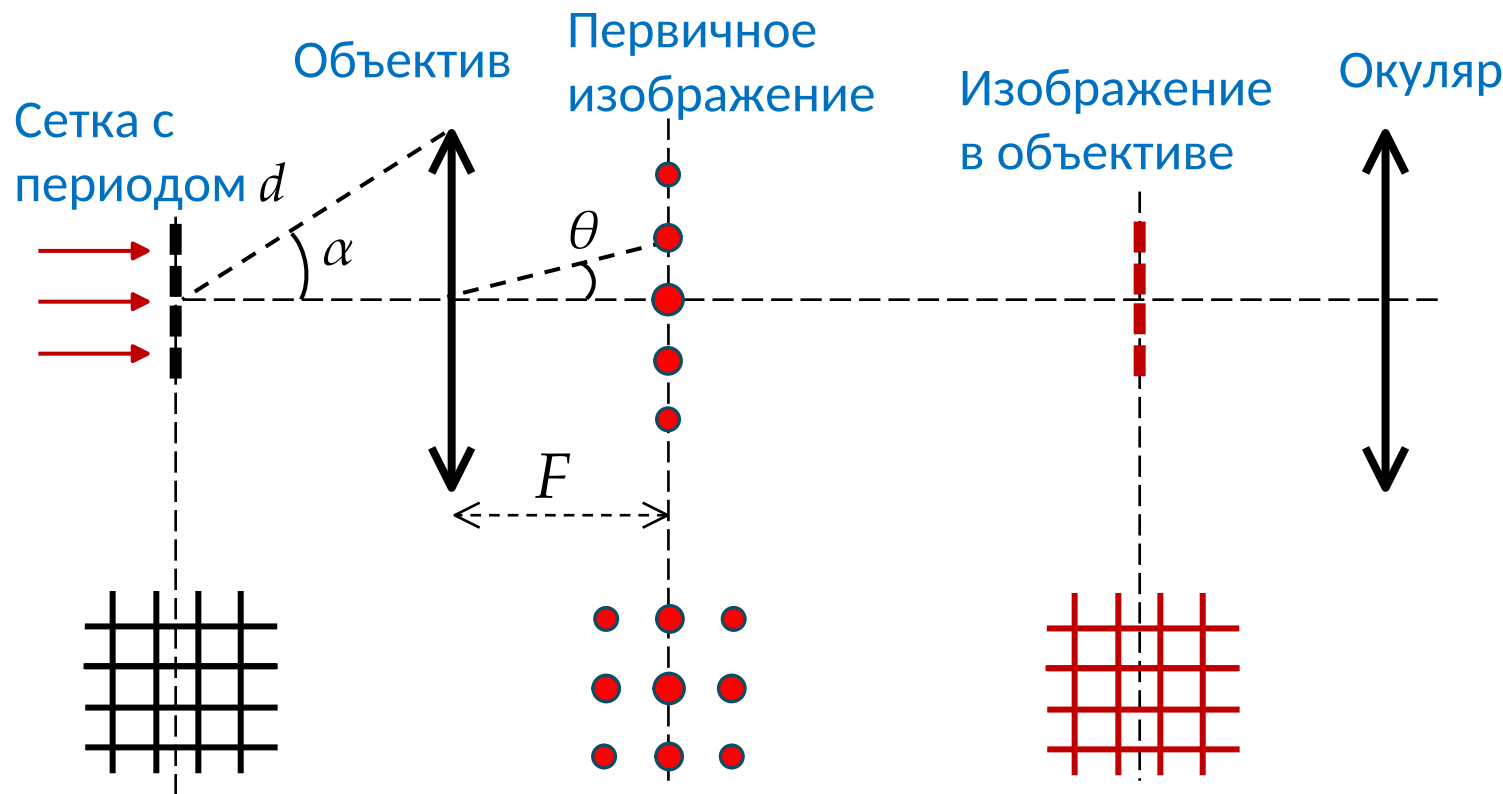
Векторная диаграмма:



Фазовый объект превращается
в амплитудный.

Метод Аббе формирования оптического изображения

Изображение в микроскопе



Условие разрешения:

$$\sin \alpha \geq \sin \theta = \frac{\lambda}{d}$$

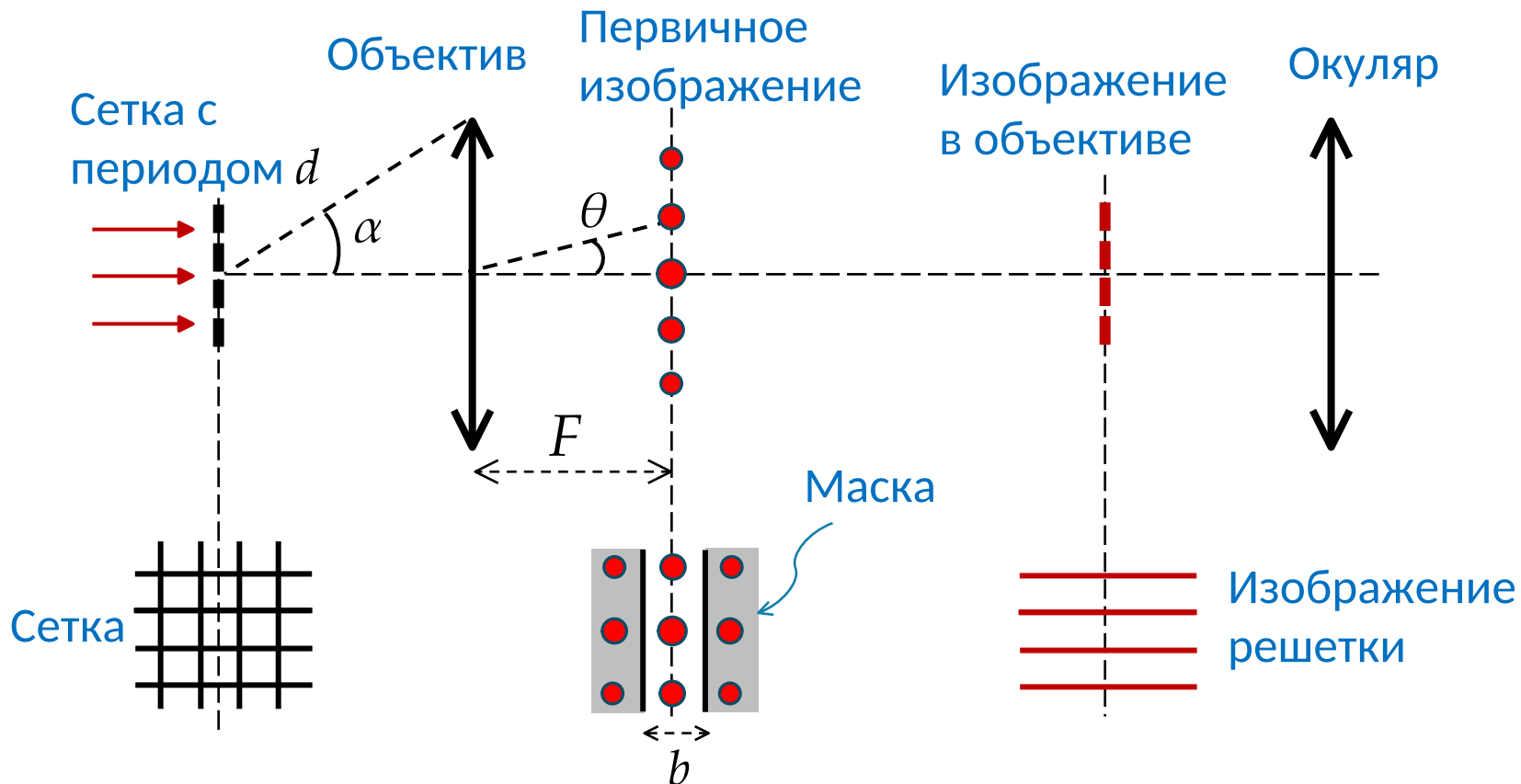
$$d \geq \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

Полоса пропускания пространственных частот определяется аппертурой микроскопа:

$$u \leq k \sin \alpha$$

Пространственная фильтрация в методе Аббе

Изображение в микроскопе

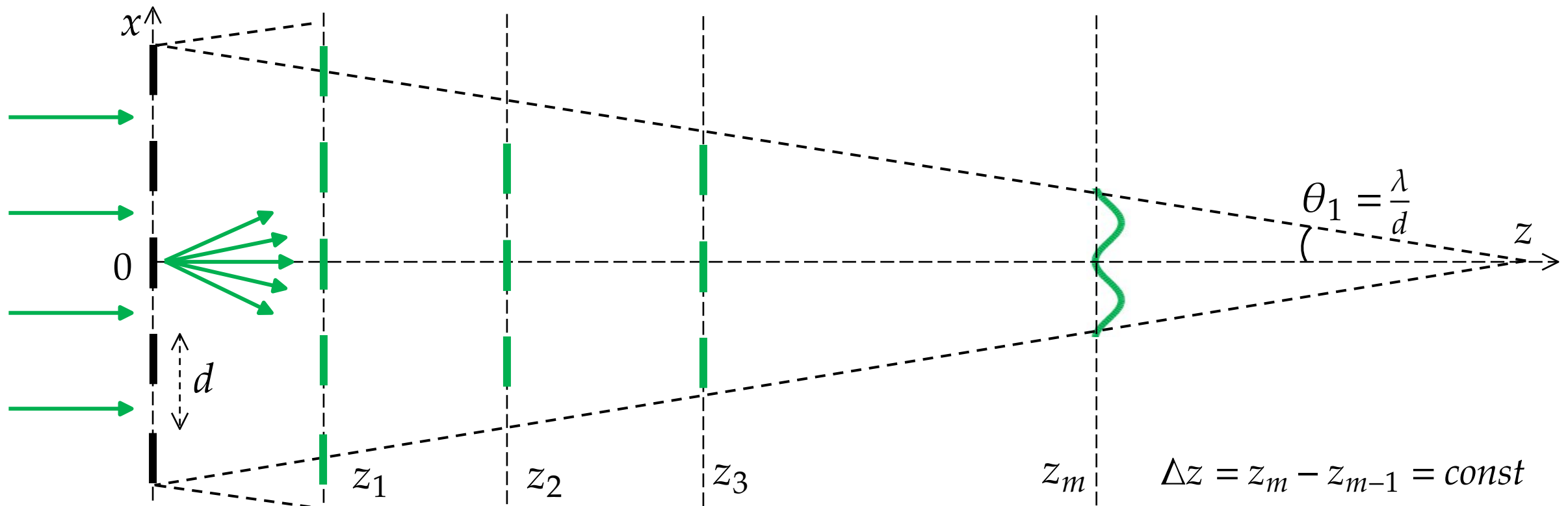


Ширина щели в маске:

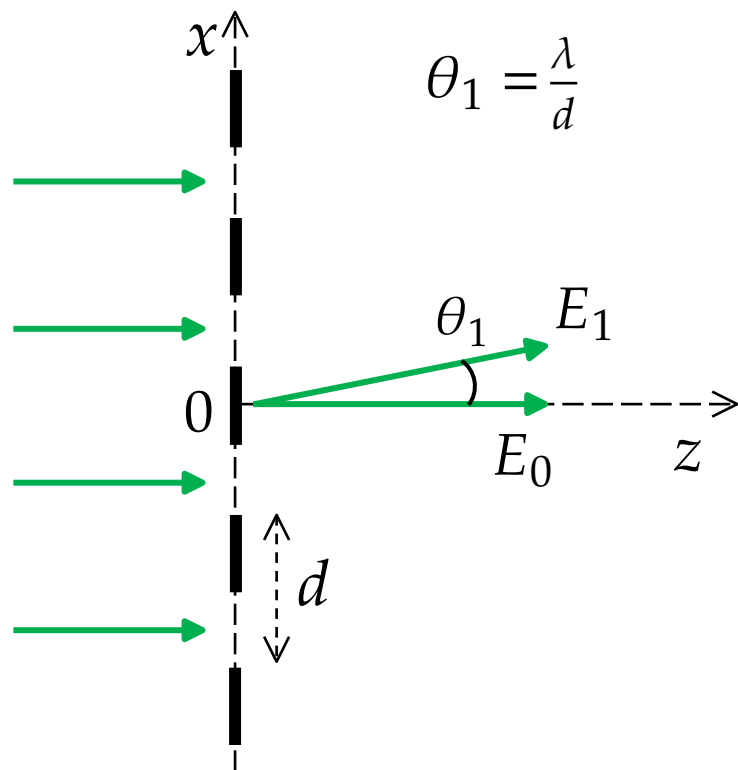
$$b \leq 2F\theta = 2F \frac{\lambda}{d}$$

Эффект саморепродукции

Плоскости саморепродукции:



Положение плоскостей саморепродукции



Рассмотрим две плоские волны:

$$E_0(x, z) = C_0 e^{ikz}, \quad E_1(x, z) = C_1 e^{ik_x x + ik_z z}$$

Суммарное поле:

$$E(x, z) = E_0(x, z) + E_1(x, z)$$

$$E(x, z) = e^{ikz} (C_0 + C_1 e^{ik_x x + i(k_z - k)z}), \quad E(x, 0) = (C_0 + C_1 e^{ik_x x})$$

Условие саморепродукции:

$$\Delta\varphi_1 = (k_z - k)z = -2\pi m \Rightarrow k(1 - \cos\theta_1)z = 2\pi m \Rightarrow k \frac{\theta_1^2}{2} z = 2\pi m$$

Плоскости саморепродукции:

$$z_m = \frac{2d^2 m}{\lambda}$$

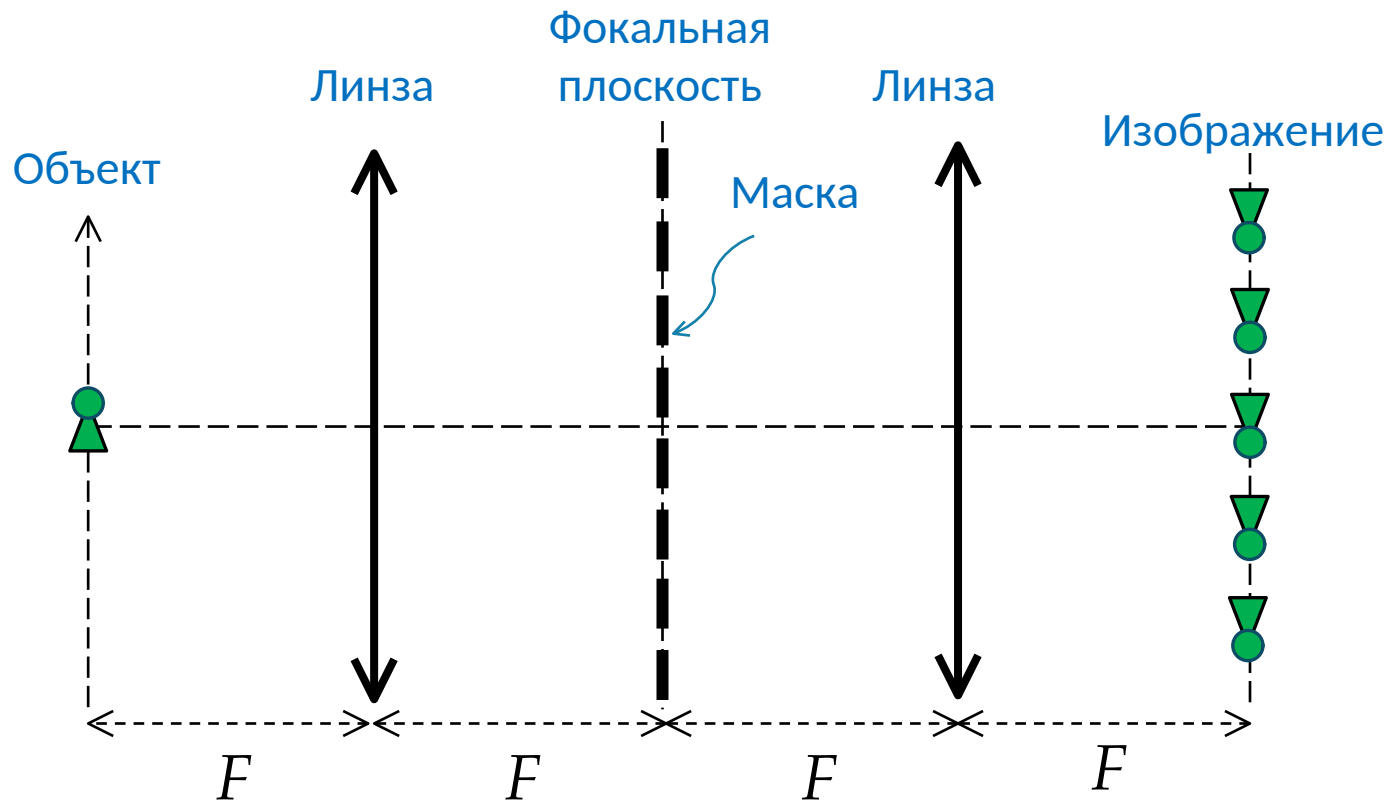
$$\Delta z = \frac{2d^2}{\lambda}$$

Волны E_n тоже в фазе с E_0 :

$$\Delta\varphi_n = k \frac{\theta_n^2}{2} z = n^2 \Delta\varphi_1 = 2\pi m n^2$$

Эффект мультипликации оптического изображения

Схема Катрона



Маской является дифракционная решетка шириной L , периодом d и шириной щелей b

Расстояние между мультиплицированными изображениями:

$$l = \frac{\lambda}{d} F$$

Число мультиплицированных изображений:

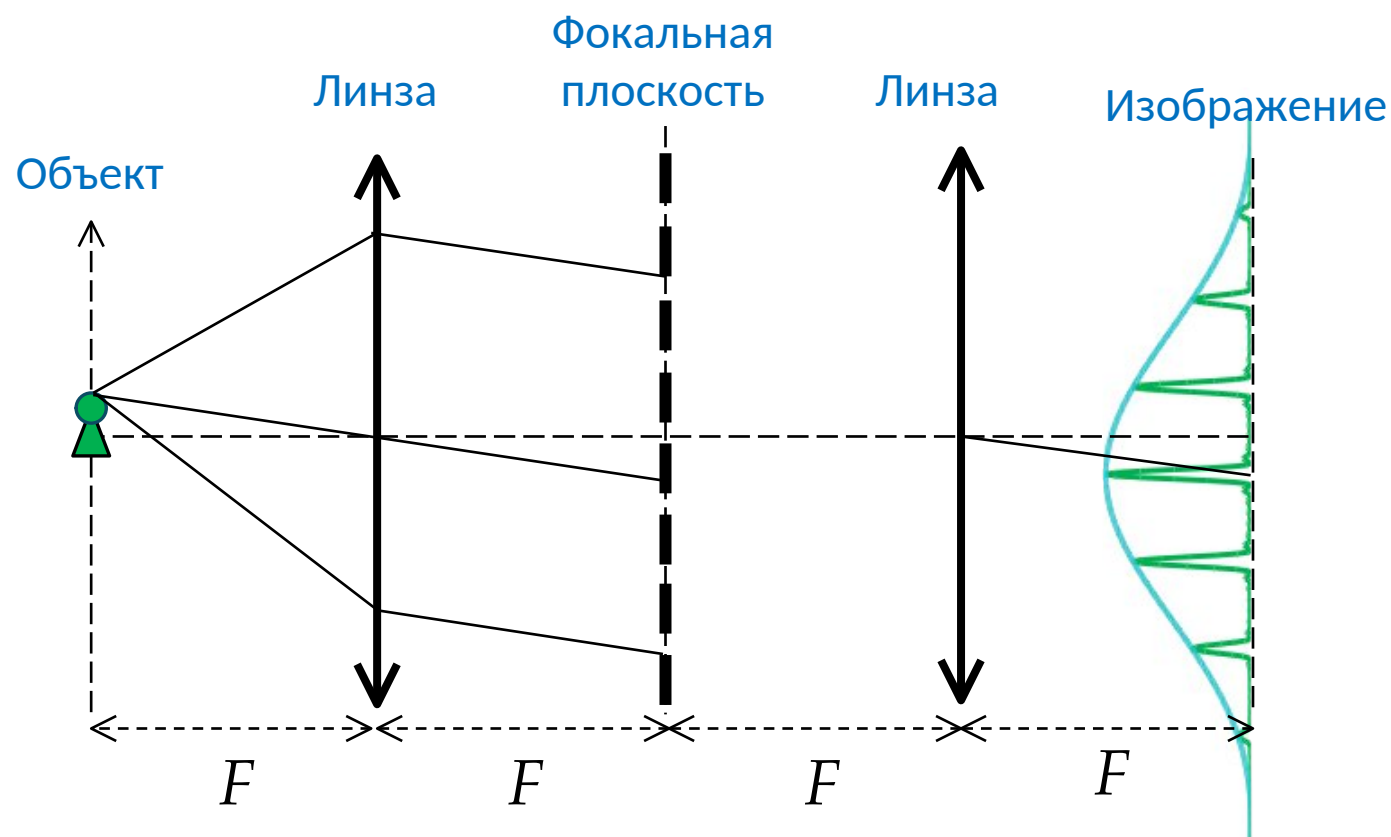
$$N = \frac{2d}{b}$$

Минимальный размер деталей в изображении:

$$\delta = \frac{\lambda}{L} F$$

Объяснение эффекта мультипликации

Схема Катрона



Мультиплицированным изображением точки объекта являются дифракционные максимумы при дифракции на решетке

Расстояние между дифракционными максимумами:

$$l = \frac{\lambda}{d} F$$

Число дифракционных максимумов :

$$N = 2 \frac{\lambda}{b} / \frac{\lambda}{d} = \frac{2d}{b}$$

Ширина дифракционного максимума :

$$\delta = \frac{\lambda}{L} F$$