Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

СБОРНИК программ и заданий

Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ)

для студентов 2 курса
на осенний семестр
2024–2025 учебного года

ПМФ, ИВТ. Математическое моделирование
и компьютерные технологии
САУ. Прикладная математика, компьютерные технологии
и математическое моделирование в экономике

МОСКВА
МФТИ
2024

Сборник программ и заданий для студентов 2 курса на осенний семестр 2024–2025 учебного года. **Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ)**. ПМФ, ИВТ. Математическое моделирование и компьютерные технологии. САУ. Прикладная математика, компьютерные технологии и математическое моделирование в экономике. – Москва : МФТИ, 2024. – 40 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: электричество и магнетизм**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
16.03.01 «Техническая физика»
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
27.03.03 «Системный анализ и управления»
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

физтех-школа: **для всех физтех-школ кроме ФБВТ, ВШПИ**
кафедра: **общей физики**
курс: 2
семестр: 3

лекции – 60 часов — Экзамен – 3 семестр
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 60 часов — Диф. зачёт – 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 150

Самостоятельная работа:
теор. курс – 105 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. К.М. Крымский
к.ф.-м.н., доц. Л.М. Колдунов
д.ф.-м.н., доц. С.Л. Клёнов
к.ф.-м.н., проф. В. А. Петухов
к.ф.-м.н., доц. П. В. Попов
к.ф.-м.н., доц. Ю. Н. Филатов

Программа принята на заседании
кафедры общей физики 10 мая 2024 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор — А. В. Максимычев

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

1. Электрические заряды и электрическое поле. Закон сохранения заряда. Напряжённость электрического поля. Закон Кулона. Системы единиц СИ и СГС. Принцип суперпозиции. Электрическое поле диполя. Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах. Её применение для нахождения электростатических полей.
2. Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь напряжённости поля с градиентом потенциала. Граничные условия для вектора $\boldsymbol{E}$. Уравнения Пуассона и Лапласа. Проводники в электрическом поле. Граничные условия на поверхности проводника. Единственность решения электростатической задачи. Метод изображений.
3. Электрическое поле в веществе. Поляризация диэлектриков. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации и вектор электрической индукции. Поляризуемость частиц среды. Диэлектрическая проницаемость среды. Теорема Гаусса в диэлектриках. Граничные условия на границе двух диэлектриков.
4. Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Энергия электрического поля и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия диполя во внешнем поле. Энергия в системе заряженных проводников. Силы в электрическом поле. Энергетический метод вычисления сил (метод виртуальных перемещений).
5. Постоянный ток. Сила тока. Объёмная и поверхностная плотности тока. Закон Ома в интегральной и дифференциальной формах. Уравнение непрерывности для плотности заряда. Электродвижущая сила. Правила Кирхгофа для электрических цепей. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля–Ленца. Токи в неограниченных средах.
6. Магнитное поле постоянного тока в вакууме. Вектор магнитной индукции. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био–Савара. Теорема Гаусса для магнитного поля. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме в интегральной форме. Магнитное поле прямого провода, тороидальной катушки и соленоида.
7. Магнитный момент тока. Точечный магнитный диполь. Сила и момент сил, действующие на виток с током в магнитном поле. Эквивалентность витка с током и магнитного листка. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме в дифференциальной форме.
8. Магнитное поле в веществе. Магнитная индукция и напряжённость поля. Вектор намагниченности. Токи проводимости и молекулярные токи. Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Граничные условия на границе двух магнетиков.
9. Электромагнитная индукция. Поток магнитного поля. ЭДС индукции в

движущихся проводниках. Вихревое электрическое поле. Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах.

10. Коэффициенты само- и взаимоиндукции. Установление тока в цепи, содержащей индуктивность. Теорема взаимности. Магнитная энергия токов. Локализация магнитной энергии в пространстве, объёмная плотность магнитной энергии. Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле. Магнитные цепи. Подъёмная сила электромагнита.
11. Магнитные свойства вещества. Качественные представления о механизме намагничивания пара- и диамагнетиков. Понятие о ферромагнетиках. Ферромагнитный гистерезис. Магнитные свойства сверхпроводников I рода.
12. Относительный характер электрического и магнитного полей. Сила Лоренца. Преобразование $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при смене системы отсчёта (при $v \ll c$). Поле равномерно движущегося точечного заряда. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Дрейф в скрещенных однородных полях. Эффект Холла, влияние магнитного поля на проводящие свойства сред.
13. Квазистационарные процессы в электрических цепях. Колебания в линейных системах. Колебательный контур. Свободные затухающие колебания. Коэффициент затухания, логарифмический декремент и добротность. Энергетический смысл добротности.
14. Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы. Амплитудная и фазовая характеристики. Резонанс. Процесс установления стационарных колебаний.
15. Установившиеся колебания в цепи переменного тока. Комплексная форма представления колебаний. Векторные диаграммы. Комплексное сопротивление (импеданс). Правила Кирхгофа для переменных токов. Работа и мощность переменного тока.
16. Понятие о спектральном разложении. Спектр одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов. Соотношение неопределённостей. Вынужденные колебания под действием произвольной силы.
17. Спектральный анализ линейных систем. Частотная характеристика и импульсный отклик системы. Колебательный контур как спектральный прибор. Интегрирующая и дифференцирующая цепочки как высокочастотный и низкочастотный фильтры. Модуляция и детектирование сигналов. Амплитудная и фазовая модуляции. Квадратичное детектирование сигналов.
18. Электрические флуктуации. Тепловой шум, формула Найквиста. Дробовой шум, формула Шоттки. Флуктуационный предел измерения слабых сигналов.
19. Параметрическое возбуждение колебаний. Параметрический резонанс.

Автоколебания в электрических цепях. Положительная обратная связь. Условие самовозбуждения. Роль нелинейности.

20. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Граничные условия. Ток смещения. Материальные уравнения.
21. Энергия переменного электромагнитного поля. Поток электромагнитной энергии, теорема Пойнтинга.
22. Волновое уравнение. Электромагнитные волны в однородном диэлектрике, их поперечность и скорость распространения. Электромагнитная природа света. Монохроматические волны. Комплексная амплитуда. Уравнение Гельмгольца. Плоская электромагнитная волна. Приближение сферической волны.
23. Электромагнитные волны на границе раздела двух диэлектриков. Формулы Френеля. Явление Брюстера. Поток энергии в электромагнитной волне. Давление излучения. Электромагнитный импульс. Понятие о механизме излучения электромагнитных волн.
24. Понятие о линиях передачи энергии. Двухпроводная линия. Коэффициент стоячей волны. Согласованная нагрузка.
25. Электромагнитные волны в прямоугольном волноводе. Дисперсионное уравнение. Критическая частота. Объёмные резонаторы.
26. Элементы физики плазмы. Дебаевский радиус экранирования. Плазменные колебания, плазменная частота. Диэлектрическая проницаемость холодной плазмы. Проникновение электромагнитных волн в плазму.
27. Квазистационарное проникновение поля в проводящую среду, скин-эффект. Сжатие плазменного шнура под действием протекающего в нем тока, пинч-эффект.

Литература

Основная

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. — Москва : Физматлит, 2004.
2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 1. / под ред. А.С. Кингсепа. — Москва : Физматлит, 2007.
3. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — Москва : МФТИ, 2011.
4. *Никулин М.Г. и др* . Лабораторный практикум по общей физике: учеб. пособие. В трёх томах. Т. 2. Электричество и магнетизм./ под ред. А.В. Максимычева, М.Г. Никулина. (2-е изд., перераб. и доп.). — Москва : МФТИ, 2019.
5. *Козел С.М., Лейман В.Г., Локшин Г.Р., Овчинкин В.А., Прут Э.В.* Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика. / под ред. В.А. Овчинкина (4-е изд., испр. и доп.). — Москва : Физматкнига, 2017.

Дополнительная

1. *Калашников С.Г.* Электричество. — Москва : Наука, 1997.
2. *Калашников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. Т.1. — Москва : Лаборатория знаний, 2017.

3. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. — Москва : Физматлит, 2003.
4. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. — Москва : Наука, 1983.
5. *Фейнман Р.П.* Фейнмановские лекции по физике. Выпуски 5, 6, 7. — Москва : Мир, 1977.
6. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. — Москва : Физматлит, 2006.
7. *Мешков И.Н., Чириков Б.В.* – Электромагнитное поле. – Новосибирск : Наука, 1987.
8. *Козел С.М., Локшин Г.Р.* Модулированные колебания, спектральный анализ, линейная фильтрация. — Москва : МФТИ, 2009.
9. *Извекова Ю.Н., Извеков О.А.* – Диполь во внешнем поле. — Москва : МФТИ, 2023.

Электронные ресурсы: http://physics.mipt.ru/S_III/

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

для студентов 2-го курса на осенний семестр
2024/25 учебного года

Дата	№ нед.	Тема семинарских занятий	Задачи		
			0	I	II
1–7 сен.	**1**	Электростатическое поле в вакууме. Поле диполя. Теорема Гаусса.	^{0}1.1 ^{0}1.2 ^{0}1.3	1.14 1.21 Т1 1.22/23	1.7 1.10 1.16 1.17
8–14 сен.	**2**	Потенциал. Проводники в электрическом поле. Метод изображений.	^{0}2.1 ^{0}2.2 ^{0}2.3	1.24 2.3 2.20 2.22	1.26 2.11 2.15 2.48 Т2
15–21 сен.	**3**	Электрическое поле в веществе.	^{0}3.1 ^{0}3.2 3.1	3.8 3.26 3.39 3.77	Т3 3.30 Т4 3.79
22–28 сен.	**4**	Энергия и силы в электрическом поле. Токи в неограниченных средах.	^{0}4.1 3.50 ^{0}4.2	Т1′ 1.5 3.44 3.67/68 4.36	Т5 3.73 Т6 4.23
29 сен – 5 окт	**5**	Магнитное поле постоянного тока. Магнитный момент.	^{0}5.1 ^{0}5.2 ^{0}5.3	5.5 5.10 5.17 5.26	5.12 5.14 5.23 Т7

6–12 окт.	**6**	Магнитное поле в веществе.	6.3/4 ^{0}6.1 ^{0}6.2	6.7 6.17 6.12 6.52	6.5 6.9 6.18 Т8
13–19 окт.	**7**	Электромагнитная индукция. Теорема взаимности. Магнитная энергия.	7.1 ^{0}7.1 7.31	10.1 5.29 5.30 7.58 7.88	5.28 Т9 7.64 6.50 8.47
20–26 окт.	**8**	Сверхпроводники в магнитном поле. Эффект Холла. Движение заряженных частиц.	6.35 8.9 ^{0}8.1	6.23 6.37 8.30 8.69	7.83 8.34 Т10 Т11
27 окт. – 2 ноя.	**9**	Сдача 1-го задания			
3–9 нояб.	**10**	Переходные процессы и свободные колебания в электрических цепях.	9.4 ^{0}10.1 9.33	9.8 9.15 9.48 9.34	9.27 9.36 9.54 Т12
10–16 нояб.	**11**	Вынужденные колебания	^{0}11.1 ^{0}11.2 Т13	10.8 10.6 10.23 10.59	10.20 10.25 10.82 Т14 10.92
17–23 нояб.	**12**	Спектральный анализ электрических сигналов. Модуляция.	11.1 11.3(а,б) ^{0}12.1	11.16 Т15 11.2	11.10 11.13 Т16
		Параметрические колебания. Автоколебания.		11.35 Т17	11.36 Т18
24–30 нояб.	**13**	Уравнения Максвелла. Вектор Пойнтинга.	^{0}13.1 ^{0}13.2	8.51 12.3 12.5/8 12.9	12.22 12.27 12.81 Т19
1–7 дек.	**14**	Электромагнитные волны. Линии передачи энергии. Волноводы. Резонаторы.	^{0}14.1 ^{0}14.2 ^{0}14.3	12.25/40 12.42 12.46 12.52	12.67 12.48 Т20

8–14 дек.	**15**	Элементы физики плазмы. Скин-эффект.	^{0}15.1 ^{0}15.2 ^{0}15.3	12.55 12.58 12.96 Т22	12.53 Т21 Т23
15–21 дек.		Сдача 2-го задания			

Примечания

Номера задач указаны по «Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика» / под ред. В.А. Овчинкина (**4-е изд**., испр. и доп.). — Москва : Физматкнига, 2017.

Все задачи обязательны для сдачи задания, их решения должны быть представлены преподавателю на проверку. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

0 — задачи, которые студент должен решать заранее для подготовки к семинару;

I — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

II — задачи для самостоятельного решения.

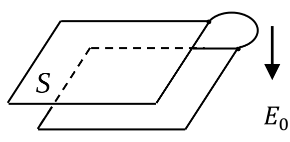
Решение всех задач обязательно для сдачи задания.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К СЕМИНАРАМ
(задачи группы 0)

Семинар 1

^{0}1.1. Вычислить отношение сил электростатического отталкивания и гравитационного притяжения двух протонов.

^{0}1.2. Оцените среднюю концентрацию электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряжённость электрического поля на поверхности Земли равна 100 В/м, а на высоте h = 1,5 км она падает до 25 В/м. Вектор E направлен к центру Земли. Ответ выразить в элементарных зарядах на см^3.



^{0}1.3. Используя формулу для напряжённости поля точечного диполя с дипольным моментом $\vec{p}$, найдите напряжённость поля на оси диполя ($\alpha = 0$) и в перпендикулярном направлении ($\alpha = \pi/2$).

Семинар 2

[0]2.1. Незаряженный проводящий шар вносится в электрическое поле с известным распределением потенциала $\varphi(\vec{r})$. Каким будет потенциал шара?

[0]2.2. В опытах Резерфорда золотая фольга бомбардировалась α-частицами ${}^{2}_{4}He$ с кинетической энергией W = 5 МэВ. На какое минимальное расстояние может приблизиться α-частица к ядру золота ${}^{79}_{197}\mathrm{A}u$? (заряд электрона $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГС; 1 эВ = 1,6·10^{-12} эрг).

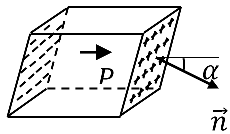
Ответ: $r_{\min} = 2 \cdot 79 \cdot \frac{e^2}{W}\left(1 + \frac{4}{197}\right) = 4{,}6 \cdot 10^{-12}$ см.

[0]2.3. Напряжённость электрического поля Земли $E_0 = 130$ В/м, причём вектор $\vec{E}_0 \uparrow\uparrow \vec{g}$. Какой заряд приобретёт горизонтально расположенный короткозамкнутый плоский конденсатор с площадью пластин S = 1 м^2?

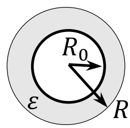
Ответ: $Q = 3{,}4$ ед. СГС.

Семинар 3

[0]3.1. Найдите плотность поляризационных зарядов на торцах однородно поляризованного параллелепипеда.



[0]3.2. Проводящий шар радиуса R_0 несёт заряд q и окружён шаровым слоем диэлектрика с проницаемостью ε, вплотную прилегающим к поверхности шара. Внешний радиус равен R. Определить потенциал проводящего шара.



Ответ: $\varphi = \frac{q}{R}\left(1 + \frac{R-R_0}{\varepsilon R_0}\right)$.

Семинар 4

[0]4.1. Поверхностная плотность заряда на пластинах плоского конденсатора, заполненного твёрдым диэлектриком с проницаемостью ε, равна $\pm\sigma$. Определите объёмную плотность электрической энергии w в конденсаторе, а также силу f, действующую на единицу площади обкладок.

Ответ: $w = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}$, $f = 2\pi\sigma^2$.

⁰4.2. Конденсатор ёмкостью $C = 20$ см заполнен однородной слабо-проводящей средой, имеющей малую проводимость $\lambda = 10^{-6}$ Ом$^{-1} \cdot$ см$^{-1}$ и диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 2$. Определить электрическое сопротивление между обкладками.

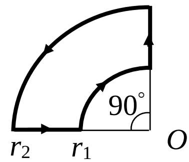
Ответ: 8 кОм.

Семинар 5

⁰5.1. Определите индукцию магнитного поля в центре крайнего витка длинного соленоида с плотностью намотки n витков/см. По виткам соленоида протекает постоянный ток I.

Ответ: $B = \frac{2\pi n I}{c}$.

⁰5.2. Проводящий контур, по которому течёт постоянный ток I, состоит из отрезков дуг и радиусов (см. рис.). Определите индукцию магнитного поля в точке O.



Ответ: $B = \frac{\pi I}{2c}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

⁰5.3. Плоский конденсатор с обкладками в виде круглых дисков радиуса R заполнен немагнитной слабо проводящей средой. Через конденсатор протекает постоянный ток I. Найдите индукцию магнитного поля на расстоянии $r \leq R$ от оси конденсатора.

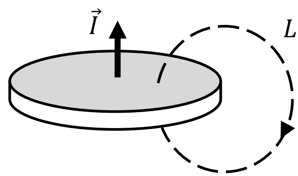
Ответ: $B = \frac{2I}{c} \cdot \frac{r}{R^2}$.

Семинар 6

⁰6.1. Постоянный магнит длиной L с однородной намагниченностью I согнут в кольцо так, что между полюсами остался маленький зазор $\ell \ll L$. Определите магнитную индукцию в зазоре.

Ответ: $B = 4\pi I \frac{L}{L+\ell} \approx 4\pi I$.

⁰6.2. (2017-1А) Постоянный магнит изготовлен из однородно намагниченного материала и имеет форму тонкого диска толщиной d и площадью S. Вектор намагниченности $\vec{I}$ направлен по нормали к плоскости диска. Найти циркуляцию векторов индукции и напряжённости магнитного поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$ по контуру L, показанному на рисунке штриховой линией.

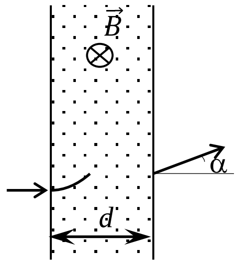


Семинар 7

^{0}7.1. Определить давление магнитного поля на стенки длинного соленоида кругового сечения, в котором создано магнитное поле $B = 10$ Тл. Какова при этом должна быть поверхностная плотность тока i?

Ответ: $P \approx 400$ атм, $i = 80$ кА/см.

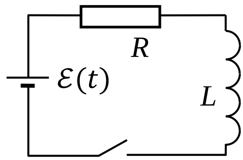
Семинар 8



^{0}8.1. Протон влетает в область поперечного магнитного поля $B = 5$ Тл со скоростью $v = 2{,}4 \cdot 10^{10}$ см/с. Толщина области, занятой полем, $d = 50$ см (см. рис.). Найти угол отклонения протона α от первоначального направления движения. Излучением пренебречь.

Ответ: $\alpha \approx \arcsin\frac{3}{5} \approx 37°$.

Семинар 10



^{0}10.1. Найти зависимость тока в цепи $I(t)$ от времени в схеме на рис., если после замыкания ключа в момент $t = 0$ напряжение источника меняется по закону $\mathcal{E}(t) = At$. Рассмотреть случай $t \ll L/R$.

Ответ: $I(t) \approx \frac{At^2}{2L}$.

Семинар 11

^{0}11.1. К последовательно соединенным резистору с сопротивлением $R = 3{,}2$ кОм и конденсатору ёмкостью $C = 1$ мкФ приложено сетевое напряжение с частотой $f = 50$ Гц. Найдите сдвиг фаз $\Delta\varphi$ между напряжением в сети и напряжением на резисторе.

Ответ: $\Delta\varphi \approx -45°$.

^{0}11.2. Некоторый двухполюсник, имеющий импеданс $Z = 3 + i\sqrt{3}$ [Ом], подключён к идеальному источнику переменной ЭДС с амплитудой $\mathcal{E}_0 = 2$ В. Найдите среднюю мощность, потребляемую двухполюсником.

Ответ: $P = 0{,}5$ Вт.

Семинар 12

^{0}12.1. Найдите спектр модулированного по амплитуде сигнала вида $g(t) = f(t) \cdot \cos\omega_0 t$, если спектр сигнала $f(t)$ равен $F(\omega)$. Рассмотрите случай $f(t) = e^{-\gamma t}$ при $t \geq 0$.

Ответ: $G(\Omega) = \frac{\gamma + i\Omega}{(\gamma + i\Omega)^2 + \omega_0^2}$

Семинар 13

⁰13.1. Напряжение в плоском конденсаторе меняется по гармоническому закону $U = U_0 \sin \omega t$. Пластины имеют форму дисков радиуса R, расстояние между которыми $h \ll R$, между пластин — среда с проницаемостью ε. Пренебрегая краевыми искажениями поля, найдите магнитное поле на краю конденсатора (на расстоянии R от оси). Частоту считать малой: $\omega \ll c/R$.

Ответ: $B = \frac{\omega R}{2c} \cdot \frac{\varepsilon U_0}{h} \cos \omega t$.

⁰13.2. Используя выражение для вектора Пойнтинга S, в условиях предыдущей задачи найдите полный поток электромагнитной энергии из конденсатора и сравните его с выражением для скорости изменения энергии, запасённой в конденсаторе dW/dt.

Ответ: $S \cdot 2\pi R h = \frac{dW}{dt} = \frac{\varepsilon \pi R^2}{h} \sin 2\omega t$.

Семинар 14

⁰14.1. Плоская электромагнитная волна бежит в однородной среде в направлении оси z и имеет компоненты поля $E_x(z,t)$ и $B_y(z,t)$. Фазовая скорость волны равна v. Показать, что в любой момент времени $E_x = \frac{v}{c} B_y$.

⁰14.2. При какой длине кабеля его нельзя при расчётах заменить эквивалентным точечным сопротивлением, если частота в цепи $\nu = 50$ Гц?

Ответ: $\ell \gtrsim 6 \cdot 10^3$ км.

⁰14.3. Найти минимальную частоту электромагнитных колебаний в объёмном прямоугольном резонаторе со сторонами $1 \times 2 \times 3$ см, выполненном из идеального проводника.

Ответ: 9 ГГц.

Семинар 15

⁰15.1. Температура электронов в плазме тлеющего разряда $T_e \sim 10^4$ К, концентрация $n_e \sim 10^9$ см$^{-3}$. При каком радиусе трубки разряд можно считать квазинейтральным?

Ответ: $r \gg 0{,}2$ мм.

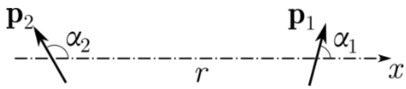
⁰15.2. В условиях предыдущей задачи оцените кулоновскую энергию взаимодействия заряженных частиц в плазме (в расчёте на одну частицу). Можно ли считать такую плазму идеальным газом?

Ответ: $w_{\text{кул}} \sim 10^{-4}$ эВ; да, можно.

⁰15.3. Радиосигнал с частотой $\nu = 4$ МГц посылается вертикально вверх и отражается от ионосферы на некоторой высоте. Определить концентрацию электронов в точке отражения.

Ответ: $n_e = 2 \cdot 10^5$ см$^{-3}$.

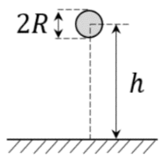
Текстовые задачи



Т1. Молекула воды обладает постоянным электрическим дипольным моментом $p = 1{,}84$ Д (1 Д $\equiv 10^{-18}$ ед. СГС — «дебай», внесистемная единица дипольного момента). Две молекулы воды находятся на расстоянии $r = 35$ Å друг от друга так, что векторы их дипольных моментов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ лежат в одной плоскости под углами α_1 и α_2 к линии, соединяющей их центры (ось x, см. рис.). Для случаев а) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, б) $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pm\pi/2$ и в) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pm\pi/2$ рассчитайте величины и направления векторов сил $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, действующих на диполи. Оцените также максимальную величину ускорения этих молекул.

Ответ: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ а) $F_{1x} = -2F_0$, $F_{1y} = 0$; б) $F_{1x} = \pm F_0$, $F_{1y} = 0$; в) $F_{1x} = 0$, $F_{1y} = \pm F_0$, где $F_0 \approx 6.8 \cdot 10^{-15}$ Н; $a_{max} \sim 2{,}3 \cdot 10^{10}$g.

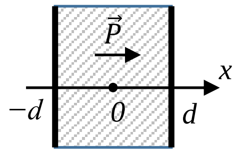
Т1′. Для задачи Т1 определите энергию взаимодействия диполей и проекции силы взаимодействия для произвольных углов α_1 и α_2.



Т2. (2019-1Б) Напряжённость поля на поверхности земли под одиночным заряженным бесконечным проводом радиуса $R = 1$ см, расположенным параллельно поверхности, равна $E_0 = 750$ В/м. Расстояние от поверхности до оси провода $h = 4$ м. Определите потенциал провода, считая потенциал поверхности земли равным нулю.

Ответ: $\varphi = \frac{hE_0}{2} \ln \frac{2h}{R} \approx 10$ кВ.

Т3. (2015-1А) Плоскопараллельная пластина изготовлена из диэлектрика с «замороженной» поляризацией, направленной вдоль оси x, перпендикулярной поверхностям пластины. Пластина поляризована неоднородно: $\vec{P}(x) = \vec{P}_0 \cdot (1 + x^2/d^2)$, где $2d$ — толщина пластины (начало отсчёта – в центре пластины). Определите разность потенциалов U между поверхностями пластины. Краевыми эффектами пренебречь.

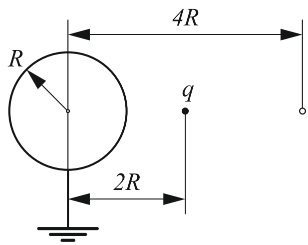


Ответ: $U = \frac{32}{3}\pi P_0 d$.

Т4. На обкладках плоского конденсатора размещены заряды q и $-q$. Зазор между обкладками заполнен веществом, диэлектрическая проницаемость которого меняется по закону $\varepsilon = \frac{2}{1+x/h}$, где x – расстояние до положительной пластины, h – расстояние между пластинами. Найдите распределение объёмной плотности поляризационного заряда $\rho_{\text{пол}}$ в конденсаторе, а также его ёмкость C. Площадь каждой пластины S.

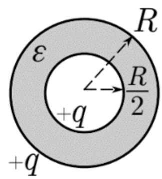
Ответ: $\rho_{\text{пол}} = +\frac{q}{2Sh} = \text{const}$, $C = \frac{S}{3\pi h}$.

Т5. (2018-1Б) На расстоянии $2R$ от центра заземленного проводящего шара радиуса R находится точечный заряд q. Заряд перемещают на расстояние $4R$ от центра шара. Чему равна работа по перемещению точечного заряда q? Чему равно изменение энергии взаимодействия индуцированных зарядов между собой?



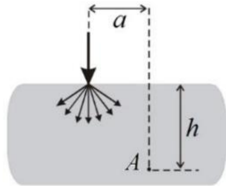
Ответ: $A = \frac{2q^2}{15R}$, $\Delta W_{\text{инд}} = -\frac{2q^2}{15R}$.

Т6. (2023-2Б) Внутренняя и внешняя металлические обкладки уединённого сферического конденсатора заряжены одинаковыми положительными зарядами $q_1 = q_2 = q$. Радиус внешней обкладки R, внутренней $R/2$. Конденсатор заполнен диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2$, вне конденсатора — вакуум. Найдите запасённую в системе энергию.



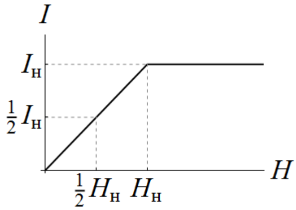
Ответ: $W = \frac{9}{4}\frac{q^2}{R}$.

Т7. (2019-3Б) Постоянный ток силы I подводится по вертикальному кабелю к полусферическому небольшому заземлителю и равномерно растекается в однородном грунте. Пренебрегая проводимостью окружающего воздуха, определить напряженность магнитного поля в грунте в точке А, расположенной на расстоянии a от оси провода на глубине $h = a/\sqrt{3}$.



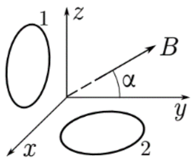
Ответ: $H = \frac{I}{ca}$.

Т8. (2018-2А) Сердечник тонкой тороидальной катушки изготовлен из магнетика, зависимость намагничености $I(H)$ которого показана на рисунке. При некотором токе через катушку поле в сердечнике оказывается равным $\frac{1}{2}H_н$. При увеличении тока в три раза магнитная индукция B в сердечнике увеличивается в 2,1 раза. Определите магнитную проницаемость магнетика μ на участке линейного роста зависимости $I(H)$.



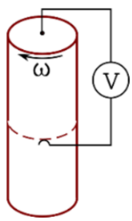
Ответ: $\mu = 10$.

Т9. (2023-4Б) Два одинаковых сверхпроводящих плоских витка с коэффициентами самоиндукции L расположены в плоскостях xz (виток 1) и xy (виток 2). В начальном состоянии ток в витках отсутствует. Для измерения взаимной индукции витки помещают в плавно нарастающее однородное магнитное поле, направленное под углом $\alpha = \mathrm{arctg}\,3$ к оси y в плоскости yz. Оказалось, что отношение токов в витках равно $|I_2/I_1| = 2$. Найдите коэффициент взаимной индукции витков M.



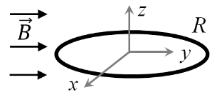
Ответ: $|M| = 1/5\,L$.

Т10. (2020-4А) Длинный однородный металлический цилиндр радиусом r = 30 см несёт на себе некоторый заряд, так что статическая напряжённость поля на его боковой поверхности равна E_0 = 30 кВ/см. Цилиндр подключили к идеальному вольтметру как показано на рис.: одним контактом к оси, а другим скользящим контактом — к боковой поверхности в середине цилиндра. Какую разность потенциалов $\Delta\varphi$ покажет вольтметр при вращении цилиндра вокруг оси с угловой скоростью $\omega = 10^3$ рад/с? Центробежные эффекты не учитывать.



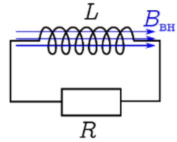
Ответ: $\Delta\varphi$ = 0,45 мкВ.

Т11. (2016-2А) В однородном магнитном поле $\vec{B}$, направленном вдоль оси y, находится сверхпроводящее кольцо, лежащее в плоскости xy. Масса кольца M, коэффициент самоиндукции L, радиус R. Найти период малых колебаний кольца при вращении вокруг оси x. Начало координат совпадает с центром кольца.



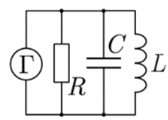
Ответ: $T = \sqrt{2LM}/(RB)$.

Т12. (2020-3А) Переменное однородное внешнее магнитное поле $B_{\text{вн}}(t) = B_0 \cos \omega t$ пронизывает катушку индуктивности вдоль её оси (см. рис.). Катушка имеет индуктивность L и замкнута на сопротивление $R = \omega L$. Найдите амплитуду и сдвиг фазы (относительно $B_{\text{вн}}$) установившихся колебаний суммарного магнитного поля внутри катушки.



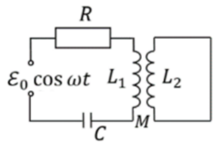
Ответ: $|B| = 1/\sqrt{2}\, B_0,\ \varphi = -\pi/4$.

Т13. (2023-1Б) В представленной на рисунке электрической схеме генератор Г создаёт переменный ток по закону $I(t) = I_0(\cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t)$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Определите выделяющуюся на сопротивлении R среднюю мощность, если $\sqrt{L/C} = 3/2\, R$.



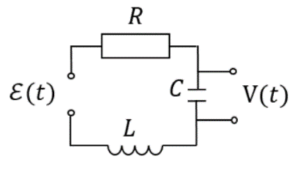
Ответ: $\mathrm{P} = \frac{3}{4} I_0^2 R$.

Т14. (2019-4Б) Определите коэффициент взаимной индукции катушек M в схеме, изображённой на рисунке, если ток в колебательном контуре отстаёт от входного напряжения по фазе на $\pi/4$. Параметры цепи: L_1 = 20 мГн, L_2 = 5 мГн, R = 5 Ом, C = 100 мкФ, $\omega = 10^3$ рад/с.



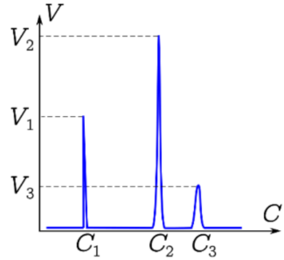
Ответ: $M = 5$ мГн.

Т15. (2019-5А) Вынужденные колебания напряжения на конденсаторе высокодобротного колебательного контура возбуждаются внешней ЭДС $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(1 + m\cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, где частота модуляции $\Omega = \omega_0/2$, $m < 1$. При резонансной частоте контура $\omega_{\text{р}} = \omega_0/2$ оказалось, что две гармоники из спектра колебаний напряжения на конденсаторе $V(t)$ имеют одинаковые амплитуды. Определите глубину модуляции m, если добротность контура $Q = 25$.



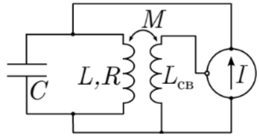
Ответ: $m = \frac{2}{3Q} = \frac{2}{75}$.

Т16. (2020-1Б) Вынужденные колебания в высокодобротном RLC-контуре возбуждаются последовательно включённой внешней ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ с законом фазовой модуляции $\varphi(t) = m \cos \Omega t$, где $m = \frac{1}{9}$ и $\Omega = \frac{4}{5}\omega_0$. Зависимость амплитуды напряжения V на конденсаторе от его ёмкости C схематично показана на рисунке. Найдите отношения V_2/V_1 и V_1/V_3.



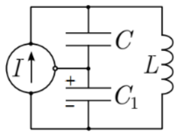
Ответ: $\frac{V_2}{V_1} = 10$, $\frac{V_1}{V_3} = 9$.

Т17. (2023-6А) Колебательный контур подключён к источнику тока (показан на схеме символом «I», стрелка указывает направление протекания тока). Величина тока источника регулируется напряжением $U_{св}$ на «катушке обратной связи» $L_{св}$ по закону $I = I_0 + SU_{св}$, где I_0, S — константы. При каком наибольшем сопротивлении R катушки контура будет возможна генерация автоколебаний в контуре? Каким при этом должен быть коэффициент M взаимной индукции катушек L и $L_{св}$? Параметры цепи: S = 2 мА/В, C = 10 нФ, L = 10 мГн, $L_{св}$ = 0,01L. Ток в катушке связи считать пренебрежимо малым.



Ответ: $R_{max} = \sqrt{LL_{св}}\, S/C = 200$ Ом, $|M| \leq \sqrt{LL_{св}} = 1$ мГн.

Т18. (2023-6Б) Колебательный контур подключён к источнику тока (показан на схеме символом «I», стрелка указывает направление протекания тока). Контур содержит «конденсатор связи» C_1, напряжение $U1$ на котором регулирует величину тока источника по закону $I = I_0 + SU_1$, где I_0, S — константы. Определите минимальное отношение C_1/C, при котором изменение напряжения на конденсаторе C будет иметь *колебательный* характер с нарастающей амплитудой. Параметры цепи: S = 20 мА/В, C = 1 нФ, L = 1 мГн. Потерями пренебречь. Токи через C и C_1 считать одинаковыми.



Примечание: знаками «+/−» на схеме показано состояние конденсатора связи, когда U_1 считается положительным.

Ответ: $\frac{C_1}{C} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{S^2 L}{C}} - 1\right) \approx 9.5.$

Т19. (2016-6Б) В вакууме распространяются две плоские электромагнитные волны одинаковой частоты и амплитуды: одна вдоль оси x, а другая — вдоль оси y. Вектор **E** обеих волн направлен по оси z. Найдите среднее по времени значение вектора плотности потока энергии $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ во всех точках пространства. Укажите плоскости, вдоль которых средний поток энергии максимален.

Ответ: $\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2 \left[\frac{k}{2}(x - y)\right] \left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$,

$$\left|\langle \vec{S} \rangle\right|_{max} = \sqrt{2} \frac{c}{4\pi} E_0^2 \text{ при } y = x + \lambda\, m.$$

Т20. (2018-4А) В прямоугольном резонаторе с хорошо проводящими стенками размерами $a \times a \times b$, где $a > b$, две наименьшие резонансные частоты равны $\nu_1 = 10$ ГГц и $\nu_2 = 11$ ГГц соответственно. Найдите следующую разрешенную частоту резонатора.

Ответ: $\nu_3 \approx 13$ ГГц.

Т21. Оцените омические потери в медном проводе длиной $l = 1$ м сечением $S = 4$ мм^2 при протекании через него синусоидального тока с амплитудой $I = 20$ А и частотой $\nu = 13{,}56$ МГц. Удельная проводимость меди $\sigma = 5{,}2 \cdot 10^{17}$ с$^{-1}$. Сравните результат с потерями при $\nu_0 \lesssim 50$ Гц.

Ответ: $Q \approx \frac{I_0^2 l}{2cr}\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}$ [ед. СГС] ≈ 30 Вт (при 50 Гц $Q \approx 0{,}9$ Вт).

Т22. Оцените относительное уменьшение амплитуды сигнала из-за скин-эффекта в телевизионном коаксиальном кабеле длиной $L = 10$ м на частоте $f = 1$ ГГц (приблизительно верхняя граница дециметрового диапазона). Считать, что потери обусловлены в основном токами в центральном медном проводнике диаметром $D = 0{,}6$ мм (потери в экране малы ввиду его большой площади). Удельная проводимость меди $\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ См/м, волновое сопротивление кабеля $\rho = 75$ Ом.

Ответ: $\Delta U / U \sim 0{,}4$.

Т23. Плазма имеет проводимость $\sigma \sim 10^{14}$ с$^{-1}$. Оцените коэффициент диффузии магнитного поля в плазме и глубину проникновения магнитного поля за время $\tau = 1$ мкс.

Ответ: $D_{\text{М}} \approx 70$ м^2/с, $\delta \sim 1$ см.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению
подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФПМИ, ФБМФ, ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составили:
д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский
к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Программа (годовой курс)

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.
3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).

   Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

   Поток А.М. Бишаева: групповое свойство автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля. Теорема Пуанкаре (*без доказательства*).

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).

Литература

<u>Основная</u>

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамики, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010. http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2022, 2016. http://www.umnov.ru.

<u>Дополнительная</u>

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С.)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск: 2005; Москва : МГУ, 2011; Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф.)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные «*», являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–19 октября)

I. Простейшие уравнения 1–го порядка

С. 1: 13.

С. 2: 7; <u>10</u>; 39*; 44.

Ф. 55; 62.

С. 2: 59; 73; 80.

С. 3: 25; 59; 68; 94.

Ф. 146; 181*.

С. 4: 4; 20; 59.

1. Решить уравнение: $y' = \dfrac{y^2}{x^4} - 2\dfrac{y}{x} + 4x^2$.

II. Уравнения, допускающие понижение порядка

С. 7: 1; 5; 28; 46; 65(а).

Ф. 505.

2. Решить задачу Коши:

$$xy^2y'' + x^2y'^3 - xyy'^2 - 15y^2y' = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4.$$

III. Задача Коши для уравнений в нормальной форме

Ф. 225 (а, г); 228 (в, г); 229; 230; 231; 233.

3. Решить уравнение, построить интегральные кривые, указать особые решения, найти (непродолжаемое) решение, удовлетворяющее условиям:

а) $y' = -y^2, \quad y(1) = -1;$

б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(-4) = -1, \quad y(2) = 1.$

Указать область определения решений. Объяснить с точки зрения теоремы существования и единственности, почему в случае а) решение уравнения однозначно определяется одним условием, а в случае б) – нет.

4.* Доказать, что любое решение задачи Коши $y' = x - y^2$, $y(1) = 0$ можно продолжить на интервал $(1, +\infty)$.

IV. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Ф. 278; 287; 288 (во всех задачах решить уравнения, исследовать особые решения, построить интегральные кривые).

С. 6: 7.

5. В задаче **Ф.** 287 найти решения, удовлетворяющие условиям:

а) $y(0) = -1, y(5) = 6;$

б) $y(0) = -1, y(4) = 4.$

6. Решить уравнение $(y')^2 = 4y^3(1 - y)$, исследовать особые решения, построить интегральные кривые.

7.* Для уравнения $(2(y'+\alpha)^2 + 2(y'+\alpha)+1)e^{2y'} - 4y = 0$:

а) при произвольном $\alpha \in \mathbb{R}$ найти дискриминантное множество;

б) выяснить, при каких α дискриминантное множество содержит решение уравнения.

V. (для ФБМФ(ПМФ) и ФЭФМ) Элементы вариационного исчисления

С. 19: 5; 19; 36.

8. Решить простейшую вариационную задачу:

$$J(y) = \int_0^1((y')^2 - 8xy'y)dx,\ y(0)=1, y(1)=\mathrm{ch}(2).$$

$\boxed{38+4^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 09–14 декабря)

I. Уравнения с постоянными коэффициентами

С. 8: 3; 7; 12; <u>23</u>; 31; 35; <u>47</u>; 56; 107; 131; <u>153</u>.

Ф. 593; 598; 610*; 613; 615; 617.

1. Решить уравнение $y'' - ay + 2y = e^x \cos x$, где $a \in \mathbb{R}$ – действительный параметр.

II. Линейные системы с постоянными коэффициентами

С. 11: 1; 5; 12; 23; 31; 46; <u>68</u>; 79; 88; 154; <u>159</u>; 183.

Ф. 824*.

III. Матричная экспонента

С. 11: 117; 124; <u>128</u> (для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y(0) = 2$).

2. Решить задачу Коши: $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, и $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ — заданные число и столбец, $\bar{x}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))^T$ — искомая вектор-функция.

3. а) Записать (в векторном виде) общее решение системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A в базисе $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}, \overline{h_4}, \overline{h_5}$ имеет вид $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) Найти матрицу $e^{A'}$.

4.* Доказать формулу: $\det e^{A} = e^{\operatorname{tr} A}$.

IV. Операционный метод

С. 8: 172; <u>182</u>.

С. 11: <u>189</u>; 194.

$\boxed{38+3^*}$

Составитель задания ассистент Ю. С. Резниченко

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Интеграл Лебега и теория поля**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 105 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Системы подмножеств (полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры и пр.). Борелевская сигма-алгебра.
2. Конечно- и счётно-аддитивные меры. Внешняя мера Лебега, теорема Каратеодори. Внутренняя и внешняя регулярность меры Лебега. Измеримость множеств по Лебегу.
3. Функции, измеримые относительно сигма-алгебры. Образ меры под действием отображения. Интеграл Лебега. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теорема Леви о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Замена переменной в интеграле Лебега. Сведение кратного интеграла к повторному. Теоремы Тонелли и Фубини. Неравенства Гёльдера, Минковского и Йенсена. Теоремы Рисса, Егорова и Лузина.
4. Теорема Витали о тонком покрытии. Точки плотности измеримого множества, точки Лебега интегрируемой функции.
5. Формула Грина. Потенциальные векторные поля. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
6. Геометрический смысл модуля и знака якобиана отображения двумерных пространств. Теорема о замене переменных в кратном интеграле (доказательство для двумерного случая).
7. Простая гладкая поверхность. Поверхностный интеграл первого рода. Независимость интеграла от параметризации поверхности при допустимой замене параметров. Площадь поверхности. Ориентация простой гладкой поверхности. Поверхностный интеграл второго рода, выражение через параметризацию поверхности. Кусочно-гладкие поверхности, их ориентация и интегралы по ним.
8. Формула Гаусса-Остроградского. Дивергенция векторного поля, её геометрический смысл. Соленоидальные векторные поля. Связь соленоидальности поля с обращением в нуль его дивергенции.
9. Формула Стокса. Ротор векторного поля, его геометрический смысл. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Связь потенциальности поля с обращением в нуль его ротора.
10. Оператор Гамильтона (оператор «набла») и действия с ним. Основные соотношения, содержащие вектор «набла».

Литература

Основная

1. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2019.
2. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. — `https://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf`.

3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — М.: МФТИ, 2013, 2018.
4. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2020.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

6. *Богачев В. И., Смолянов О. Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. — Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.
7. *Ульянов П. Л., Бахвалов В. Н., Дьяченко М. И., Казарян К. С., Сифуэнтес П.* Действительный анализ в задачах. — Москва : Физматлит, 2005.
8. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. 1, 2. — Москва : МЦНМО, 2019.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — **С.3**)
2. *Теляковский С. А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. — Москва : Наука, 1980. (цитируется — **С.4**) `https://lib.mipt.ru/book/5353/`

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 30 сентября – 5 октября)

I. Системы подмножеств

С.4: 1.14; 1.19; 2.82; 3.18.

Т.1. Найти сигма-алгебру подмножеств вещественной прямой, порождённую семейством всех одноточечных множеств.

Т.2. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ задана борелевская функция $f_n \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Доказать, что множество

$$A = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{последовательность } \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ограничена}\}$$

является борелевским.

Т.3. Пусть $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$. Показать, что f' является борелевской.

II. Мера Лебега

С.4: <u>3.84</u>; 3.86; 3.95; 3.96; <u>6.90</u>.

<u>Т.4</u>. Пусть $E \subset [0,1]$ и λ — внешняя мера Лебега. Доказать, что следующие условия эквивалентны измеримости E по Лебегу:

1. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся клеточное множество P такое, что $\lambda(E \triangle P) < \varepsilon$.
2. $\lambda(E) + \lambda([0,1] \setminus E) = 1$.

Т.5. Множества $A_1, \ldots, A_n$ измеримы по Лебегу и лежат в квадрате со стороной 1, причём $\sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) \geq n-1$. Доказать, что $\lambda(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) > 0$.

Т.6. Пусть функция f имеет в каждой точке интервала (a,b) конечную производную. Доказать, что образ множества $E = \{x \in (a,b) : f'(x) = 0\}$ под действием f имеет меру нуль.

Т.7. Доказать что в пространстве $\mathbb{R}^3$ объединение любого (не обязательно счётного) семейства замкнутых шаров, радиусы которых строго положительны, измеримо по Лебегу.

Т.8*. Существует ли измеримое по Лебегу множество $E \subset \mathbb{R}$ такое, что для любого непустого открытого интервала I выполнено $0 < \lambda(E \cap I) < \lambda(I)$?

III. Измеримые функции, интеграл Лебега

С.4: 4.12; 4.21*; 4.43; 5.26; <u>5.79</u>; <u>6.66</u>.

<u>Т.9</u>. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу. Доказать, что функции $u(x) = \operatorname{arctg} f(x)$ и $v(x) = f(\operatorname{arctg} x)$ измеримы по Лебегу.

<u>Т.10</u>. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{n \sin(x^{3/2})}{1+n^2x^2}\, dx$$

Т.11. Пусть последовательность измеримых по Лебегу функций $f_n\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ сходится п.в. к функции $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty]$. Пусть, кроме того, $f_n(x) \leq f(x)$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\int f_n\, dx \to \int f\, dx$ при $n \to \infty$.

Т.12. Пусть $f_n \geq 0$ — интегрируемые по Лебегу функции на $[0,1]$, $f_n \to f$ п.в. Доказать, что

$$\int_0^1 f^2(x) e^{-f(x)}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^2(x) e^{-f_n(x)}\, dx.$$

Т.13. Пусть $f\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ измерима по Лебегу и $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n \ln(1 + (f(x)/n)^\alpha)\,dx = \begin{cases} +\infty, & 0 < \alpha < 1, \\ 1, & \alpha = 1, \\ 0, & 1 < \alpha < +\infty. \end{cases}$$

IV. Разные виды сходимости

С.4: 4.31(2,5,6); 4.40; 4.43; 4.51*; 5.144*.

Т.14. Пусть $p \in [1, +\infty]$ и последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p(\mathbb{R})$ фундаментальна. Доказать, что существуют подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ и функция $g \in L^p(\mathbb{R})$ такие, что для и всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено $|f_{n_k}| \le g$ п.в.

Т.15. Доказать, что из последовательности $f_n(x) = \sin(nx)$ $(n \in \mathbb{N})$ нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся по мере на отрезке $[0,1]$.

Т.16. Доказать, что если функции f и f_n $(n \in \mathbb{N})$ принадлежат $L^2[a,b]$, то между разными видами сходимости $\{f_n\}$ к f имеются связи, указанные на схеме (при перечеркнутой стрелке привести контрпример):

сходится равномерно				
$\not\uparrow\ \downarrow$		$\not\uparrow\ \downarrow$		$\not\uparrow\ \downarrow$
сходится почти всюду	$\not\longrightarrow$ $\not\longleftarrow$	сходится по норме L^2	$\longrightarrow$ $\not\longleftarrow$	сходится по норме L^1
$\not\uparrow\ \downarrow$		$\not\uparrow\ \downarrow$		$\not\uparrow\ \downarrow$
сходится по мере				

$(35 + 4^*)$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–9 ноября)

I. Сведение кратных интегралов к повторным

С.3, §8: 80(6); 83(6); 83(14); 85(2,5); 91(1); 133(4); 135(1)*; 139(1,3); 175(5); 176(2); 176(3); 190*.

С.4: 5.115(1,2,3); 5.134.

Т.1. Пусть функция f неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a,b]$ по линейной (одномерной) мере Лебега. Доказать, что интеграл $\int_a^b f\,dx$ равен плоской (двумерной) мере Лебега множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$.

<u>T.2</u>. Пусть $f\colon (0,1)\to\mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Доказать, что функция $g\colon (0,1)\to\mathbb{R}$ вида $g(y)=\int_y^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$ интегрируема по Лебегу и $\int_0^1 g(y)\,dy=\int_0^1 f(x)\,dx$.

T.3. Доказать, что ненулевой многочлен от нескольких переменных почти всюду отличен от нуля.

T.4. Вычислить $\iint_{(0,+\infty)^2} \frac{\sin\pi x}{(y+e^x|\sin\pi x|)^2}\,dx\,dy$.

T.5*. Доказать, что если попарно не пересекающиеся круги, содержащиеся в квадрате, исчерпывают его с точностью до множества меры нуль, то сумма длин граничных окружностей бесконечна.

II. Замена переменной в кратном интеграле

С.3, §8: 102(4); <u>110(3)</u>; 107(4); 124(1,3); 144(<u>3</u>,6); 146(3); 148(3); 257.

С.3, §9: 6(2); 13(6); 15(4); 16(5); 19(6); 63(6).

III. Криволинейные интегралы. Формула Грина

С.3, §10: 2(2,3); 16; 30(1); 37; 40; 47*; 50; 65; 81(5); 85(4); 104(2); <u>112(1)</u>.

T.6. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\gamma \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, где γ — простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0,0)$, ориентированная против хода часовой стрелки.

$(49+4^*)$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 2–7 декабря)

I. Поверхностные интегралы

С.3, §9: 28; 35; 50; <u>51</u>.

С.3, §11: 2(2); 14*; 18(1); 34; 37(2); 41; 42; 49.

II. Формулы Гаусса–Остроградского и Стокса

С.3, §11: 47; 52(2,3); <u>54</u>; 57(2); 62; 63(2); 64; 65(2).

III. Элементы теории поля

С.3, §12: 13; 15(3,5); 19; 38(3); 40(2); 41(4,6,7); 42(2); 49(5,6); 50(5); 54(2); 70(5); 71*; 96; 94(6); 112(1,2); 115*.

T.1. Пусть непрерывно дифференцируемое соленоидальное векторное поле $\mathbf{v}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ и непрерывно дифференцируемое скалярное поле $\rho\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0$. Найти $\operatorname{div}(\rho^2\mathbf{v})$.

<u>T.2</u>. Доказать, любое непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{v}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ удовлетворяет равенству $[\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{v}]=\frac12\nabla|\mathbf{v}|^2-(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}$.

$(41+3^*)$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент Н. А. Гусев

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая механика**
по направлениям подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
27.03.03 «Системный анализ и управление»
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **теоретической механики**
курс: 2
семестр: 3

лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – нет

Экзамен – 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задания составили:
д.ф.-м.н., профессор Н. И. Амелькин
к.ф.-м.н., ст. преподаватель А. С. Охитина

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
26 апреля 2024 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. С. В. Соколов

1. **Аксиоматика классической механики. Кинематика точки**

   Постулаты классической механики. Законы Ньютона. Инерциальные системы отсчета. Преобразования Галилея. Понятие об инвариантности и ковариантности уравнений механики. Траектория, скорость, ускорение. Естественный трехгранник. Разложение скорости и ускорения в осях трехгранника. Криволинейные координаты точки. Разложение скорости и ускорения точки в локальном базисе криволинейных координат. Коэффициенты Ламе.

2. **Кинематика твердого тела (кинематика систем отсчета)**

   Твердое тело. Разложение движения тела на поступательное движение и вращение (движение с неподвижной точкой). Способы задания ориентации твердого тела: углы Эйлера, матрицы направляющих косинусов. Алгебра кватернионов. Кватернионный способ задания ориентации твердого тела (присоединенное отображение). Параметры Родрига–Гамильтона. Кватернионные формулы сложения поворотов. Кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Теорема Эйлера о конечном повороте твердого тела с неподвижной точкой. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Распределение скоростей и ускорений в твердом теле (формулы Эйлера и Ривальса). Движение свободного твёрдого тела. Кинематический винт.

3. **Кинематика сложного движения**

   Сложение скоростей и ускорений точек в сложном движении. Вычисление угловой скорости и углового ускорения тела в сложном движении.

4. **Основные теоремы динамики**

   Определения: внешние и внутренние силы, импульс (количество движения), момент импульса (кинетический момент, момент количества движения), кинетическая энергия, центр масс, момент силы, элементарная работа и мощность силы. Теоремы Кенига для кинетической энергии и момента импульса. Теоремы об изменении импульса, момента импульса и кинетической энергии в инерциальных системах отсчета. Консервативные системы, закон сохранения энергии. Неинерциальные системы отсчета, силы инерции. Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета.

5. **Движение материальной точки в центральном поле**

   Законы сохранения. Уравнение Бине. Поле всемирного тяготения. Уравнение конических сечений. Задача двух тел. Законы Кеплера.

6. **Динамика систем переменного состава**

   Понятие о системе переменного состава и ее математической модели. Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента для систем переменного состава. Уравнение Мещерского. Реактивное движение. Формула Циолковского.

7. **Динамика твердого тела**

   Геометрия масс. Тензор инерции и эллипсоид инерции твердого тела. Главные оси инерции. Преобразование тензора инерции при повороте и параллельном переносе осей. Теорема Гюйгенса–Штейнера для тензора инерции. Кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела. Динамические уравнения Эйлера. Случай Эйлера; первые интегралы движения; геометрические интерпретации Пуансо и Мак-Куллага. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера; параметры свободной регулярной прецессии. Случай Лагранжа; первые интегралы движения. Формула для момента, поддерживающего вынужденную регулярную прецессию динамически симметричного твердого тела.

8. **Лагранжева механика**

   Понятие механической связи. Классификация связей. Виртуальные перемещения. Общее уравнение динамики для системы материальных точек с идеальными связями. Конфигурационное многообразие голономной системы с конечным числом степеней свободы. Обобщенные координаты. Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы. Потенциальные, гироскопические, диссипативные силы. Критерий потенциальности сил. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил; функция Лагранжа (лагранжиан системы). Уравнения Лагранжа в неинерциальных системах отсчета. Свойства уравнений Лагранжа: ковариантность, невырожденность (приведение к нормальному виду Коши). Структура кинетической энергии. Первые интегралы лагранжевых систем: циклические интегралы, обобщенный интеграл энергии (интеграл Пенлеве–Якоби).

Литература

1. *Айзерман М. А.* Классическая механика. — Москва : Наука, 2005.

2. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

3. *Журавлёв В. Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.

4. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика: учебник для университетов. Изд. 3-е, испр. — Москва : Изд-во Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

5. *Амелькин Н. И.* Курс аналитической механики : учеб. пособие. Москва : МФТИ, 2023. – 298 с.

6. *Яковенко Г. Н.* Краткий курс теоретической механики. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

7. *Яковенко Г. Н.* Краткий курс аналитической динамики. — Москва : БИНОМ, 2004.

8. *Трухан Н. М.* Теоретическая механика. Методика решения задач : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

ЗАДАНИЯ

Первое задание

(срок сдачи с 4 по 9 ноября 2024 г.)

Контрольная работа с 28 октября по 9 ноября 2024 г.

1. **Кинематика точки**

   1.18, 1.25, 1.31

   Т1. Используя сферические координаты (r, λ - долгота, φ - широта), определить, какую кривую опишет корабль, идущий под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану. Корабль принять за точку, движущуюся по поверхности земного шара (Рис. 1). Считая, что модуль скорости v корабля не изменяется, определить проекции ускорения корабля на оси сферических координат, модуль ускорения и радиус кривизны траектории.

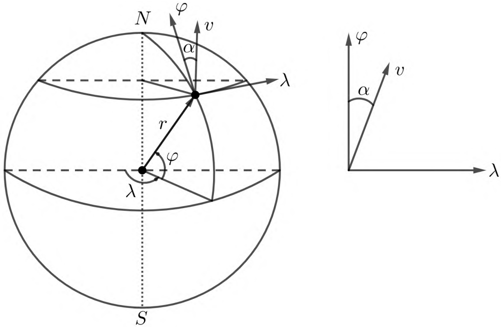


Рис. 1: К задаче Т1

2. **Кинематика твёрдого тела**

   2.1. **Плоскопараллельное движение**

   3.2, 3.20, 3.21, 3.25, 3.36

   2.2. **Пространственное движение**

   4.4, 4.10, 4.12 (*решить для одной из точек, указанных в условии*), 4.23, 4.30, 4.56

2.3. **Кватернионы**

T2. Доказать свойство ассоциативности кватернионного умножения: для любых кватернионов Λ, M и N выполняется $\Lambda \circ (M \circ N) = (\Lambda \circ M) \circ N$.

4.66, 4.70, 4.85

3. **Сложное движение точки и твердого тела**

2.9, 2.16, 2.38, 3.30, 4.25

T3. Конус II (Рис. 2) с углом при вершине $\alpha_2 = 45°$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1 = 90°$. Высота OO_1 подвижного конуса равна l, а скорость центра его основания O_1 постоянна по величине и равна v. Вдоль высоты конуса OO_1 движется точка M по закону $OM = f(t)$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент, когда $OM = MO_1$.

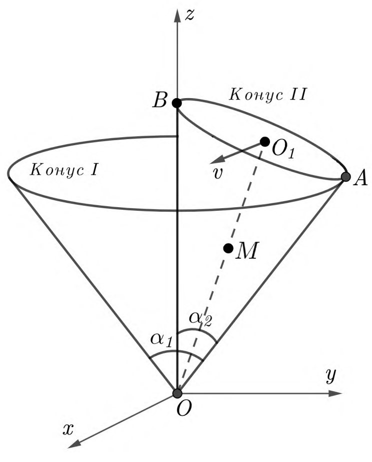


Рис. 2: К задаче T3

4. **Основные теоремы динамики в инерциальных и неинерциальных системах отсчета**

5.7, 6.13, 6.37, 6.39 (*вместо нормальной реакции найти силу натяжения*), 7.4, 7.28, 7.32, 7.42, 7.59, 9.8, 9.25

5. **Движение точки в центральном поле**

8.11, 8.22, 8.25, 8.52

Второе задание

(срок сдачи с 9 по 14 декабря 2024 г.)

Контрольная работа с 2 по 7 декабря 2024 г.

6. **Геометрия масс. Динамика твёрдого тела**
   11.1, 11.11, 11.18, 11.24, 11.32, 11.48, 11.61, 11.75, 11.91, 11.113, 11.132(1)

   Т4 (случай Горячева - Чаплыгина). Твердое тело массы m движется в однородном поле тяжести. Главные моменты инерции для неподвижной точки O в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ равны $A = B = 4C$, а центр масс тела C лежит на оси ξ_1 на расстоянии l от неподвижной точки. В начальный момент времени проекция кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ на вертикаль равна нулю: $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{\gamma}|_{t=0} = 0$, где $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$ – орт вертикали. Показать, что уравнения Эйлера допускают интеграл

   $$Cr(p^2 + q^2) - mglp\gamma_3 = \text{const}.$$

7. **Уравнения Лагранжа**
   12.3, 12.7(б), 12.11, 12.38, 12.39, 12.44, 12.48, 12.64, 12.97, 12.105

Номера задач взяты из сборника Пятницкий Е. С., Трухан Н. М., Ханукаев Ю. И., Яковенко Г. Н. Сборник задач по аналитической механике. — 4-е изд. — Москва : МФТИ, 2018.

Учебное издание

С Б О Р Н И К
п р о г р а м м и з а д а н и й

Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ)

ПМФ, ИВТ. Математическое моделирование и компьютерные технологии
САУ. Прикладная математика, компьютерные технологии и математическое моделирование в экономике

для студентов 2 курса

**на осенний семестр
2024–2025 учебного года**

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *В.А. Дружинина*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзевой*

Подписано в печать 18.07.2024. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 2,5.
Тираж 160 экз. Заказ № 153.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru