



борник задач
по общему курсу
физики

часть 2

- Электричество и магнетизм
- Оптика



МФТИ

СЕРИЯ «ФИЗИКА»

Сборник задач по общему курсу физики

в трех частях

Под редакцией
В. А. ОВЧИНКИНА

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации по образованию
в области прикладных математики и физики в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению
подготовки «Прикладные математика и физика»*

Часть 2

**Электричество и магнетизм
Оптика**

Издание седьмое, исправленное



Москва
Физматкнига
2023

ББК 22.3я73
С23
УДК 53(076.1)

С. М. КÓЗЕЛ, В. Г. ЛЕЙМАН, Г. Р. ЛОКШИН, В. А. ОВЧИНКИН, Э. В. ПРУТ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ: Учеб. пособие для вузов / В трех частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / Кóзел С. М., Лейман В. Г., Локшин Г. Р., Овчинкин В. А., Прут Э. В. (7-е изд., испр.). — М.: Физматкнига, 2023. — 480 с. ISBN 978-5-89155-374-3.

Вторая часть сборника включает в себя около 1600 задач различной степени трудности. Авторами почти всех задач являются преподаватели кафедры общей физики Московского физико-технического института. Эти задачи предлагались студентам на экзаменах, контрольных работах и студенческих физических олимпиадах. Книга содержит классический методический материал, необходимый в учебном процессе любого технического вуза. Около 10% задач приведены с решениями. В сборнике не отдано предпочтение какой-либо одной системе единиц, так как реально в различных областях науки и техники применяются единицы, наиболее адекватные рассматриваемому вопросу. Однако ответы и решения в этой части сборника приведены, как правило, в гауссовой системе единиц. В приложении приведены таблицы перехода из гауссовой системы единиц в СИ и обратно.

Для студентов физических специальностей вузов, а также для преподавателей физики высшей и средней школ.

Табл. 6. Ил. 694.

Интернет-магазин специализированной литературы **www.fizmatkniga.org**

Уважаемые читатели! Наше издательство постоянно работает над улучшением качества издаваемых книг. Если вы заметили в нашей книге опечатку или ошибку, напишите нам об этом в нашу группу <https://vk.com/fizmatkniga> или по электронной почте publishers@mail.mipt.ru.

ISBN 978-5-89155-374-3 (Ч. 2)

ISBN 978-5-89155-350-7



9 785891 553743

© Овчинкин В. А., 2023

© Физматкнига, 2023

*Посвящается светлой памяти
профессора Станислава Мироновича Козела*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию
От составителей

6
7

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Задачи Ответы

§ 1.	Электрический заряд и напряженность электрического поля. Ди- поль. Теорема Гаусса	10	300
§ 2.	Потенциал. Метод электрических изображений	13	303
§ 3.	Электрическое поле в веществе. Энергия электрического поля. Энергетический метод вычисления пондеромоторных сил	20	303
§ 4.	Постоянный ток. Токи в неограниченной среде	33	317
§ 5.	Магнитное поле. Закон Био–Савара–Лапласа. Теорема о цирку- ляции в вакууме. Индуктивность проводников. Теорема взаим- ности	39	320
§ 6.	Магнитное поле в веществе. Векторы B и H . Теорема о цирку- ляции в веществе. Сверхпроводники в магнитном поле	46	324
§ 7.	Электромагнитная индукция. Энергия и силы в магнитном поле. Сохранение магнитного потока в сверхпроводящих контурах	56	330
§ 8.	Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном по- лях. ЭДС Холла. Движение тел при наличии пондеромоторных сил	73	336
§ 9.	Переходные процессы в электрических цепях. Свободные коле- бания	93	348
§ 10.	Вынужденные колебания. Резонанс. Метод комплексных ампли- туд	105	352
§ 11.	Элементы спектрального анализа. Автоколебания. Параметриче- ский резонанс. Шумы	123	359
§ 12.	Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны. Волноводы и резонаторы. Плазма	136	365

ОПТИКА

§ 1.	Геометрическая оптика и элементы фотометрии	155	380
§ 2.	Формулы Френеля. Световое давление	163	386
§ 3.	Интерференция монохроматического света	167	394
§ 4.	Интерференция квазимонохроматического света. Временная ко- герентность	175	397
§ 5.	Протяженные источники света. Пространственная когерент- ность	183	402
§ 6.	Дифракция Френеля. Зонные пластинки	190	407
§ 7.	Дифракция Фраунгофера. Разрешающая способность оптиче- ских инструментов	201	414
§ 8.	Спектральные приборы	216	426
§ 9.	Элементы фурье-оптики и голограммии	239	444
§ 10.	Дисперсия света. Эффект Доплера в оптике	259	452
§ 11.	Поляризованный свет. Элементы кристаллооптики и нелинейной оптики	272	462
	Приложения		475

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание второй части Сборника задач по общему курсу физики подверглось значительной доработке. Некоторые задачи были изъяты и заменены на наш взгляд более удачными. Кроме того, были включены и новые задачи (всего около ста). При этом для удобства работы с разными изданиями сборника была сохранена старая нумерация задач. Некоторая часть задач в настоящем издании приведена в новой редакции, а в ответы и решения внесены необходимые исправления и уточнения.

Авторами всех новых задач являются преподаватели кафедры общей физики МФТИ. Все задачи составлялись для семестровых контрольных работ и письменных экзаменов. Редактор Сборника выражает свою искреннюю признательность преподавателям МФТИ Г. В. Склизкову, А. В. Степанову, О. А. Судакову и В. А. Петухову за указанные ими опечатки, неточности и замечания.

ОТ СОСТАВИТЕЛЕЙ

Эта книга является второй частью Сборника задач по общему курсу физики. Первая часть Сборника посвящена механике, термодинамике и молекулярной физике. Настоящая книга включает в себя два следующих раздела общего курса физики: электричество и магнетизм, оптику. Всего в этой части собрано около 1600 задач. Все задачи, авторами которых являются в основном преподаватели кафедры общей физики МФТИ, предлагались студентам Московского физико-технического института на семестровых контрольных работах, письменных экзаменах и физических олимпиадах. Задачник в известной мере подводит итог семидесятилетней работы кафедры за все время существования МФТИ.

В сборник вошли самые разнообразные задачи всех уровней трудности — от простых до очень сложных. Специально и очень тщательно сформированы разделы сборника. Так, «Электричество и магнетизм» включает в себя 12 параграфов, а «Оптика» — 11 параграфов. Столь подробное и оригинальное разбиение произведено впервые и делает задачник удобным для работы как студентам, так и преподавателям.

Часть задач (около 10% в этой книге) приведены с решениями. Для удобства такие задачи помечены звездочкой. Значительное количество задач были составлены под влиянием реальных научных разработок преподавателей. Кроме того, сборник содержит и классический набор задач, носящих чисто методический характер, способный удовлетворить самые разнообразные запросы в практике преподавания — от технического вуза, где физика не является профилирующим предметом, до университета, готовящего физиков-профессионалов.

Большинство задач ориентировано на получение численного ответа, что само по себе важно как в плане формирования у студентов правильных представлений о масштабах изучаемых явлений, так и в плане механического запоминания физических констант и переводных коэффициентов. Особенно это актуально в разделе «Электричество и магнетизм». В настоящем сборнике хоть и не отдано предпочтение какой-либо одной системе единиц, тем не менее большая часть ответов и решений (исключение составляют задачи из теории электрических цепей) дается в гауссовой системе единиц (СГСЭ), что принципиально отличает данное издание от большинства других. В конце книги в «Приложениях» приведены таблицы переводных коэффициентов и другие сведения о том, как формулу, записанную в гауссовой системе единиц, перевести в СИ, и наоборот, а также некоторые внесистемные единицы, представляющие интерес для данных разделов физики.

Так или иначе, сборник задач отражает точку зрения кафедры общей физики МФТИ на преподавание физики в высшей школе.

Часть задач второй книги уже была опубликована в ранее вышедших изданиях. Прежде всего это «Сборник задач по физике» С. М. Козела, Э. И. Рашибы и С. А. Славатинского (М.: Наука, 1987), а также «Общий курс физики», том III (Электричество) и том IV (Оптика) Д. В. Сивухина (М.: Наука, 1983, 1985 и др.), «Сборник задач по физике (электричество, оптика и атомная физика)» под. ред. С. М. Козела (М.: МФТИ, 1983) и «Сборник задач по общему курсу физики», часть III — электричество и магнетизм, часть IV — оптика; под редакцией И. А. Яковлева и Д. В. Сивухина (М.: Наука, 1977).

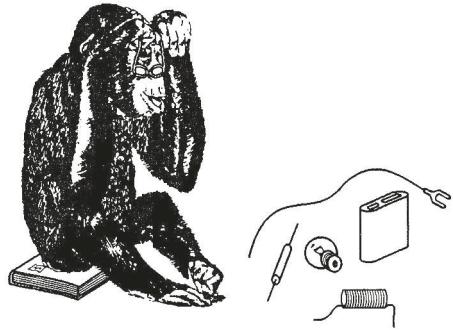
Над составлением задач трудился весь многочисленный коллектив кафедры общей физики МФТИ. Конечно, невозможно перечислить всех авторов сборника. И тем не менее приведем список достоверно известных авторов задач в этой части сборника: В. Г. Аверин, В. В. Анисимов, Ю. В. Афанасьев, Г. С. Баронов, В. Е. Белонучкин, С. В. Бирюков, С. В. Виноградов, М. Д. Галанин, А. Д. Гладун, Л. Л. Гольдин, А. В. Гуденко, В. А. Данилин, Д. Б. Диатроптов, А. С. Дьяков, Д. А. Заикин, В. Г. Зацепин, Ф. Ф. Игошин, С. П. Капица, К. В. Караджев, А. С. Кингsep, А. П. Кирьянов, С. Л. Клёнов, С. М. Козел, Ю. И. Колесов, П. Ф. Коротков, В. П. Корявов, К. А. Котельников, М. Г. Кремлев, К. М. Крымский, Е. П. Кузнецов, С. Д. Кузьмичёв, В. Г. Лейман, В. П. Листвин, Г. Р. Локшин, Л. Б. Луганский, Е. З. Мейлихов, Л. А. Микаэлян, Ю. А. Михайлов, В. В. Можаев, Е. П. Морозов, В. Г. Никольский, В. А. Овчинкин, В. В. Окороков, А. Я. Паршин, В. А. Петухов, В. И. Плис, Э. В. Прут, В. В. Пырков, А. О. Раевский, Е. Г. Рудашевский, Э. Н. Свириденков, М. В. Свиридов, Д. В. Сивухин, Г. В. Склизков, С. А. Славатинский, А. В. Степанов, О. А. Судаков, П. А. Тодуя, В. Н. Топников, Е. И. Тукиш, Ю. Н. Филатов, А. В. Францессон, Э. М. Хохлов, А. А. Шеронов.

Особо следует отметить огромный редакторский труд комиссий, готовивших задачи данных разделов курса физики к письменным экзаменам и олимпиадам. В разные годы это были Д. В. Сивухин, М. Д. Галанин, А. Д. Гладун, Л. Л. Гольдин, Д. Б. Диатроптов, Д. А. Заикин, В. Г. Лейман, Г. Р. Локшин, Л. А. Микаэлян, А. Я. Паршин, А. В. Степанов, А. В. Францессон, А. С. Кингsep, М. Г. Кремлёв, Е. З. Мейлихов, В. А. Овчинкин, Э. В. Прут, Э. Н. Свириденков, Г. В. Склизков, О. А. Судаков, С. В. Виноградов, А. Р. Арсеньев, Ю. Н. Филатов и другие. В течение многих лет возглавлял работу комиссий профессор С. М. Козел.

Техническую и организационную работу комиссий многие годы выполняли старшие преподаватели кафедры Л. П. Баканина, Г. Е. Иванникова, Г. А. Никитаева, а также Н. С. Берюлева, М. А. Тулейкова, Н. И. Петеримова и другие.

Большую техническую помощь в подготовке этой части сборника к изданию оказала Г. Е. Иванникова, за что составители выражают ей свою признательность.

Составители сборника с благодарностью примут замечания, которые неизбежно возникнут у читателей, и советы по его улучшению.



Задачи

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

§ 1. Электрический заряд и напряженность электрического поля. Диполь. Теорема Гаусса

1.1. Вычислить отношение силы электрического отталкивания F_e двух протонов к силе их гравитационного притяжения F_g . Выполнить тот же расчет для электронов.

1.2. В вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые одноименные заряды, равные q . Какой заряд Q противоположного знака необходимо поместить в центре квадрата, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

1.3. Вычислить напряженность электрического поля точечного диполя с дипольным моментом \mathbf{p} .

1.4.* Найти уравнение силовых линий электрического поля точечного диполя в полярной системе координат.

1.5. Вывести выражение для энергии диполя во внешнем электрическом поле напряженностью \mathbf{E} . Рассмотреть случаи:

а) жесткого диполя с дипольным моментом \mathbf{p} ;

б) упругого диполя с поляризумостью α ($\mathbf{p}_e = \alpha \mathbf{E}$ в СГСЭ).

1.6. Электрический квадруполь состоит из двух положительных и двух отрицательных одинаковых по величине точечных зарядов q , расположенных в вершинах квадрата со стороной a , как показано на рис. 1. Найти электрическое поле такого квадруполя в точке A , находящейся на расстоянии $r \gg a$ от его центра O , если линия OA параллельна одной из сторон квадрата.

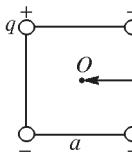


Рис. 1

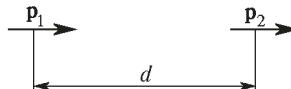


Рис. 2

для которой $r \gg a$ и $r \gg d$. Найти силу взаимодействия F между точечным зарядом q и точечным диполем, если расстояние между зарядом и диполем равно d , а дипольный момент \mathbf{p} направлен вдоль соединяющей их прямой.

1.8. Возможны ли круговые движения с постоянной скоростью точечного электрического заряда вокруг неподвижного точечного электрического диполя?

1.9. Найти силу взаимодействия F двух точечных диполей, если их дипольные моменты \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 направлены вдоль соединяющей их прямой, а расстояние между диполями равно d (рис. 2).

1.10. Диск радиусом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ . Определить напряженность поля E в точке, находящейся на расстоянии d от диска на перпендикуляре, проходящем через центр диска.

1.11. Из трех концентрических бесконечно тонких металлических сфер с радиусами $R_1 < R_2 < R_3$ крайние заземлены, а средней сфере сообщен электрический заряд Q . Найти напряженность электрического поля во всех точках пространства. Сфера находятся в вакууме.

1.12* В равномерно заряженной сфере вырезано малое отверстие. Какова напряженность поля в центре отверстия?

1.13. Две бесконечные плоскопараллельные металлические пластины помещены в вакууме параллельно друг другу (рис. 3). Полный заряд на единицу площади (т. е. сумма зарядов на обеих поверхностях пластины) равен q_1 для первой пластины и q_2 — для второй. Определить поверхностные плотности электрических зарядов на пластинках, а также напряженность электрического поля между ними и во внешнем пространстве.

1.14. Два длинных провода, расположенных параллельно на расстоянии d друг от друга, равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $+\kappa$ и $-\kappa$. Определить напряженность поля E на расстоянии h от плоскости, в которой лежат провода, в точке, лежащей в плоскости симметрии.

Указание. Пользуясь теоремой Гаусса, найти напряженность поля, создаваемого каждым из проводов, а затем геометрическую сумму этих полей.

1.15. Определить напряженность поля E внутри и вне безграничного плоского слоя толщиной d , в котором равномерно распределен положительный заряд с объемной плотностью ρ .

Указание. Воспользоваться симметрией системы зарядов и применить теорему Гаусса.

1.16. В безграничном слое толщиной $2d$ объемная плотность заряда ρ изменяется по закону $\rho = \rho_0 x/d$ ($-d \leq x \leq d$), где x — ось, перпендикулярная плоскости слоя. В слое имеется тонкий канал вдоль оси x , в котором помещен точечный диполь с массой m и дипольным моментом \mathbf{p} . Вычислить период малых продольных колебаний диполя.

1.17. В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд e распределен внутри шара радиусом $R = 10^{-8}$ см. Как должна зависеть от радиуса плотность положительного заряда, чтобы электрон (точечная частица с зарядом $-e$), помещенный внутри шара, совершал гармонические колебания? Заряды механически друг на друга не действуют. Магнитным полем движущегося заряда пренебречь. Найти частоту колебаний электрона.

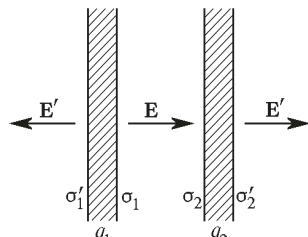


Рис. 3

1.18. Один из опытов Кулона, с помощью которого он убедился, что сила притяжения между двумя разноименными точечными зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, состоял в следующем. В окрестности маленького заряженного шарика подвешивалась на нити небольшая горизонтальная шеллаковая стрелка, на одном конце которой был прикреплен небольшой электрически заряженный кружок из золотой фольги. Измерялся период малых колебаний стрелки T в зависимости от ее расстояния d до заряженного шарика. Предполагая справедливым закон Кулона, найти зависимость периода колебаний стрелки от указанного расстояния и от других параметров системы. Длина стрелки l очень мала по сравнению с расстоянием d .

1.19* Пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме, вычислить напряженность электрического поля равномерно заряженных: 1) шара радиусом R и 2) бесконечной пластины толщиной $2h$. Объемная плотность заряда в обоих случаях равна ρ .

1.20. Подсчитать среднюю объемную плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли равна 100 В/м, а на высоте $h = 1,5$ км эта напряженность падает до 25 В/м. Вектор \mathbf{E} направлен к центру Земли.

1.21. С какой объемной плотностью $\rho(r)$ следует распределить электрический заряд в шаре, чтобы поле E_0 внутри него было направлено вдоль радиуса и всюду имело одинаковую величину?

1.22. В шаре, равномерно заряженном электрическим зарядом с объемной плотностью ρ , сделана сферическая полость, центр которой O' смешен относительно центра шара O на расстояние r . Определить электрическое поле внутри полости.

Указание. Заполнить мысленно полость электрическими зарядами противоположных знаков с плотностями $+\rho$ и $-\rho$. Тогда поле в полости можно рассматривать как суперпозицию полей двух равномерно и противоположно заряженных шаров.

1.23. С какой поверхностной плотностью $\sigma(\theta)$ следует распределить заряд по поверхности сферы радиусом R (рис. 4), чтобы поле внутри нее было однородным и равным E_0 ? Каково при этом будет электрическое поле вне сферы?

1.24. Длинная медная проволока помещена в однородное электрическое поле E_0 , перпендикулярное оси проволоки. Найти распределение поверхностных зарядов на проволоке $\sigma(\theta)$.

1.25. В однородное электрическое поле E_0 вносится незаряженный проводящий шар. Указать на его поверхности точки, в которых:

- поле по абсолютной величине остается прежним;
- поле по абсолютной величине удваивается.

1.26. Во внешнее однородное электрическое поле \mathbf{E} (рис. 5) внесен металлический шарик. Как в результате этого изменится напряжен-

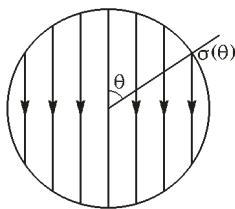


Рис. 4

ность электрического поля вблизи поверхности шарика в точках A и B , C и D ?

1.27. Металлическая незаряженная сфера радиусом R вносится в однородное электрическое поле \mathbf{E}_0 . Найти точки пространства, в которых: а) поле стало равно $2\mathbf{E}_0$; б) поле стало равно $\mathbf{E}_0/3$.

1.28. На внутренней поверхности одной из пластин плоского заряженного конденсатора имеется полусферический бугорок. Вдали от бугорка электрическое поле в конденсаторе равно E_0 . Используя принцип суперпозиции полей, найти поле на вершине и у основания бугорка. Будет ли происходить разряд с бугорка радиусом 1 мкм, если $E_0 = 1$ кВ/см, а пробивная напряженность поля в воздухе 30 кВ/см?

1.29. Найти величину и направление силы взаимодействия между двумя незаряженными проводящими сферами, каждая из которых имеет радиус a , помещенными в однородное электрическое поле \mathbf{E}_0 , направленное параллельно линии, соединяющей центры сфер. Расстояние между центрами сфер $r \gg a$.

1.30. Найти величину и направление силы взаимодействия между двумя незаряженными проводящими сферами, каждая из которых имеет радиус a , находящимися в однородном электрическом поле \mathbf{E}_0 , направленном перпендикулярно линии, соединяющей центры сфер. Расстояние между центрами сфер $r \gg a$.

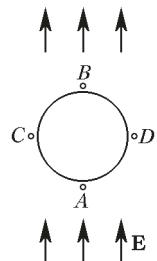


Рис. 5

§ 2. Потенциал. Метод электрических изображений

2.1. Две одинаковые и одинаково заряженные капли несжимаемой проводящей жидкости находятся на большом (бесконечном) расстоянии друг от друга. Заряд, радиус и масса каждой капли равны соответственно q , r и m . Какую минимальную скорость v вдоль прямой, соединяющей их центры, надо сообщить каждой капле, чтобы они стали двигаться навстречу друг другу и при столкновении соединились в одну каплю? Поверхностное натяжение и колебания формы капли не учитывать.

2.2. Заряженный проводник находится внутри замкнутой металлической оболочки.

1) Изменится ли электрическое поле внутри оболочки, если извне поднести к ней еще один заряженный проводник?

2) Будет ли изменяться поле внутри и вне оболочки, если перемещать внутренний проводник?

2.3. Металлический шар радиусом R_1 , несущий заряд Q , окружен расположенным концентрически полым металлическим незаряженным шаром с внутренним радиусом R_2 и внешним R_3 . Построить графики зависимости напряженности поля E от расстояния r до центра шаров. Найти потенциалы шаров, если в бесконечности потенциал равен нулю. Изменятся ли потенциалы шаров, если внешний шар заземлить?

2.4. Три концентрические тонкие металлические сферы радиусами $R_1 < R_2 < R_3$, находящиеся в вакууме, заряжены соответственно зарядами Q_1, Q_2, Q_3 . В некоторой точке A между первой и второй сферами измеряют потенциал. Найти изменение потенциала в этой точке, если вторую и третью сферы замкнуть между собой.

2.5. Вычислить распределение потенциала в плоском конденсаторе толщиной d , если одна обкладка заземлена, другая имеет потенциал φ_0 , а в пространстве между ними распределен заряд с постоянной объемной плотностью ρ .

2.6* В пространстве между пластинами плоского конденсатора имеется однородный поток электронов, который создает равномерный объемный заряд. Расстояние между пластинами равно d . Потенциал одной из пластин равен φ_0 . При каком значении объемной плотности заряда ρ потенциал и напряженность поля у другой пластины равны нулю?

2.7* Внутренняя обкладка цилиндрического конденсатора радиусом R_2 имеет потенциал φ_0 . Внешняя обкладка радиусом R_1 заземлена. Между обкладками конденсатора имеется заряд с постоянной объемной плотностью ρ . Найти распределение потенциала φ между обкладками конденсатора.

2.8. Оценить разность потенциалов V между головной и хвостовой частями стального керна бронебойного снаряда, возникающую вследствие его торможения в преграде. Принять, что керн длиной

$L = 25$ см потерял скорость, пробив броню толщиной $H = 5$ см. Скорость снаряда в момент соприкосновения с броней $v_0 = 1000$ м/с.

2.9. Для инъекции в термоядерную установку используется цилиндрический пучок дейtronов с энергией $W = 500$ кэВ. Диаметр пучка $D = 1$ см. Найти напряженность E электрического поля на поверхности пучка и разность потенциалов V между границей пучка и его центром, если ток в пучке составляет $\mathcal{I} = 1$ А и равномерно распределен по его сечению.

2.10. На расстоянии h от проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд $+q$. Определить напряженность поля E в точке A (рис. 6), отстоящей от плоскости и от заряда на расстояние h .

2.11. Найти поверхностную плотность зарядов, индуцированных зарядом q на поверхности бесконечной металлической плоскости. Заряд находится на расстоянии R от плоскости.

2.12. Точечные заряды Q_1 и Q_2 находятся на расстоянии R друг от друга. Определить величины и направления сил, которые будут действовать на эти заряды после того, как посередине между ними будет введена бесконечная металлическая пластина толщиной $R/2$.

2.13. На двух нитях AB и $A'B'$ на одинаковой высоте подвешены шарики, связанные между собой нитью BB' длиной l (рис. 7). На шарики нанесены одинаковые заряды Q . Под шариками на рас-

стоянии h расположена горизонтальная заземленная металлическая плита, размеры которой велики по сравнению с l и h . Считая, что радиус шариков мал по сравнению с l и h , определить натяжения горизонтальной и вертикальных нитей.

2.14. Найти силу, действующую на точечный заряд q , помещенный на биссектрисе прямого двугранного угла между двумя проводящими плоскостями (рис. 8). Расстояние между зарядом q и вершиной двугранного угла O равно d .

2.15. Найти силу притяжения точечного электрического диполя с дипольным моментом $p = 4 \cdot 10^{-10}$ Кл · см к бесконечной металлической пластине, ближайшая точка которой находится от диполя на расстоянии $L_0 = 1$ см. Ось диполя перпендикулярна к пластине. Определить также работу, которую надо затратить, чтобы отодвинуть диполь от поверхности пластины с расстояния $L_0 = 1$ см до расстояния $L = 2$ см.

2.16. Две взаимно перпендикулярные проводящие плоскости образуют двугранный угол. На биссектрисе этого угла на расстоянии a

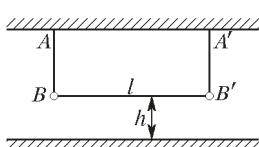


Рис. 7

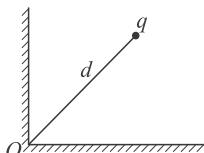


Рис. 8

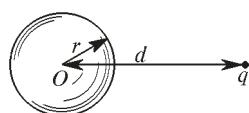


Рис. 9

от вершины помещен электрический диполь с моментом \mathbf{p} . Ось диполя направлена к вершине угла. Найти силу, действующую на диполь.

2.17. Над горизонтальным листом металла вертикально расположен равномерно заряженный тонкий стержень длиной $l = 1$ см с полным зарядом $Q = 10^{-8}$ Кл. Нижняя точка стержня удалена от листа на расстояние $H = 1$ см. Найти плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на поверхности листа непосредственно под стержнем.

2.18. На высоте $H = 1$ см над плоскостью горизонтально лежащего металлического листа расположен равномерно заряженный диск радиусом $R = 1$ см с полным зарядом $Q = 10^{-9}$ Кл. Плоскость диска параллельна плоскости листа. Найти плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на поверхности листа непосредственно под центром диска.

2.19. Два разноименных точечных заряда, отношение величин которых равно n , расположены на расстоянии d друг от друга. Доказать, что поверхность нулевого потенциала есть сферическая поверхность. Определить радиус R этой сферы и расстояние H от ее центра до меньшего заряда.

2.20. Определить силу притяжения между точечным зарядом q и металлическим шаром (рис. 9). Заряд находится на расстоянии d

от центра шара. Рассмотреть два случая: 1) шар заземлен; 2) шар изолирован, а полный заряд его равен нулю.

2.21. В условиях предыдущей задачи найти работу A , которую надо затратить, чтобы точечный заряд q удалить в бесконечность.

2.22. Внутри сферической незаряженной проводящей оболочки в точке A на расстоянии $OA = d$ от ее центра помещен точечный заряд q (рис. 10). Радиус внутренней поверхности оболочки r , а внешней R . Найти: 1) поверхностную плотность индуцированных электрических зарядов на внешней поверхности оболочки; 2) потенциал оболочки, принимая за ноль потенциал бесконечно удаленной точки; 3) поверхностную плотность индуцированных зарядов в точках B и C внутренней поверхности оболочки.

2.23* Металлический шар радиусом R имеет заряд Q . Точечный заряд q помещен на расстоянии d от центра шара (рис. 11). Найти потенциал шара φ .

2.24* На бесконечной плоской поверхности проводника AB имеется сферический бугор CMD , центр O которого лежит в той же плоскости (рис. 12). На оси симметрии системы вне проводника расположен точечный заряд q . Найти электрическое поле во всем пространстве.

2.25. Полый шар радиусом R имеет заряд Q ; в шаре имеется малое отверстие. Как будет меняться потенциал шара, если точечный заряд q перемещать из бесконечности через это отверстие внутрь шара?

2.26. Точечный заряд q находится на расстоянии d от центра незаряженного проводящего шара радиусом r . Какой заряд протечет по проводнику, если заземлить шар?

2.27. В поле точечного заряда q внесли проводящую сферу радиусом r (рис. 13). Во сколько раз изменилась при этом напряженность

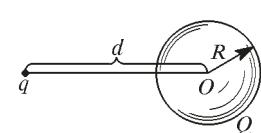


Рис. 11

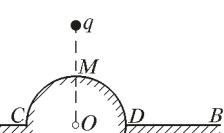


Рис. 12

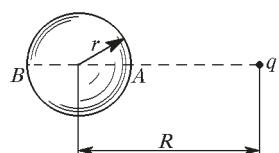


Рис. 13

поля в точках A и B , если расстояние между центром сферы и зарядом $R = 10r$? Рассмотреть два случая: 1) сфера заземлена; 2) сфера не заземлена.

2.28. На расстоянии $2R$ от центра заземленной металлической сферы радиусом R расположен диполь с моментом \mathbf{p} , причем ось диполя лежит на прямой, проходящей через центр сферы. Считая диполь точечным, определить, какой системе зарядов-изображений

эквивалентна сфера. Найти силу взаимодействия между диполем и сферой.

2.29. Два одинаковых по абсолютной величине точечных заряда q и $-q$ расположены на расстоянии $2a$ друг от друга. Посередине между ними расположена незаряженная проводящая сфера радиусом R . Полагая $a \gg R$, определить, какой системе зарядов—изображений эквивалентна сфера. Найти изменение силы, действующей на каждый заряд, обусловленное взаимодействием со сферой.

2.30. Точечный заряд q помещен на расстоянии $R/2$ от центра полой тонкостенной металлической изолированной сферы радиусом R . Заряд сферы равен Q . Определить силу, действующую на заряд q , а также поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях сферы в точках, ближайших к этому заряду.

2.31. Точечный заряд q помещен на расстоянии $R/2$ от центра полой тонкостенной металлической сферы радиусом R , на которой размещен заряд $-2q$. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях сферы в точках, наиболее удаленных от этого заряда. Как изменится результат, если сферу заземлить?

2.32* На расстоянии $a = 10R$ от незаряженной проводящей сферы радиусом R расположен точечный электрический диполь с моментом \mathbf{p} , причем ось диполя перпендикулярна прямой, соединяющей

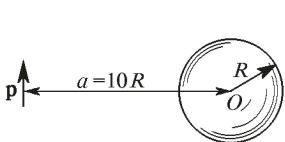


Рис. 14

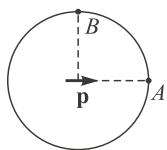


Рис. 15

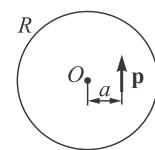


Рис. 16

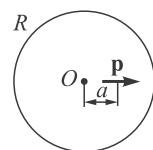


Рис. 17

центр сферы с серединой оси диполя (рис. 14). Найти силу взаимодействия F между диполем и сферой.

2.33. В центре проводящей сферы радиусом R находится точечный электрический диполь с моментом \mathbf{p} (рис. 15). Определить напряженность поля в точках A и B на внутренней поверхности сферы.

2.34. Внутри проводящей полой сферы радиусом R на расстоянии $a = R/2$ от центра помещен точечный диполь с дипольным моментом \mathbf{p} , ориентированным перпендикулярно радиусу (рис. 16). Найти величину и направление силы, действующей на диполь.

2.35. Внутри проводящей полой сферы радиусом R на расстоянии $a = R/2$ от центра помещен точечный диполь с дипольным моментом \mathbf{p} , ориентированным по радиусу (рис. 17). Найти величину и направление силы, действующей на диполь.

2.36. Как меняется с расстоянием d сила взаимодействия F между двумя маленькими металлическими шариками, из которых один заряжен, а другой не заряжен?

2.37. Небольшой незаряженный металлический шарик может свободно перемещаться вдоль оси тонкого однородно заряженного кольца радиусом R . Найти равновесные положения шарика и рассмотреть их устойчивость по отношению к осевым смещениям.

2.38. Заземленный металлический шар радиусом R лежит на тонком равномерно заряженном диэлектрическом диске того же радиуса. Найти заряд шара, если заряд диска равен Q .

2.39. Заземленная проводящая плоскость имеет выпуклость в форме полусферы с радиусом R . Центр сферы O лежит на плоскости (рис. 18). На оси симметрии системы на расстоянии $2R$ от плоскости находится точечный заряд q . Найти силу, действующую на заряд.

2.40. Точечный заряд Q помещен на расстоянии R от центра металлического шара радиусом $r > R/2$. Шару сообщен заряд $-Q$. Найти силу взаимодействия между шаром и точечным зарядом.

2.41* Точечный заряд q находится на расстоянии d от центра заряженного проводящего шара радиусом R . Каков заряд шара, если известно, что сила взаимодействия между зарядами равна нулю?

2.42* Заземленный шар радиусом R находится вблизи точечно-го заряда q . Расстояние между центром шара и зарядом равно d .

Определить максимальную и минимальную поверхностные плотности наведенного на шаре заряда.

2.43. Потенциал металлического шара радиусом R медленно повышается. На тонкой непроводящей нити длиной L к шару подведен нейтральный металлический шарик радиусом r и массой m . При каком по-

тенциале φ шарик будет притянут шаром R ? Считать, что $R \gg r$ и $L \gg r$. Вычислить φ , если $R = L = 10$ см, $m = 10^{-3}$ г, $r = 1$ см.

2.44. Металлический шар радиусом R несет заряд Q . На расстоянии L от его поверхности расположен незаряженный металлический шарик массой m и радиусом r . Шарику сообщают начальную скорость v_0 в направлении от центра шара. Найти минимальное значение скорости, при которой шарик может удалиться на бесконечность. Считать $R \gg r$, $L \gg r$. Вычислить v_0 , если $Q = 10^{-6}$ Кл, $L = R = 100$ м, $r = 1$ см, $m = 10^{-3}$ г.

2.45. Длинная тонкая проволочка расположена параллельно оси длинного металлического цилиндра радиусом r на расстоянии $R > r$ от его оси. Вдали от краев на единицу длины приходится заряд χ на проволочке и $-\chi$ на цилиндре. Найти силу взаимодействия между проводниками, приходящуюся на единицу длины.

2.46* Три одинаковых изолированных металлических шарика расположены в вершинах равностороннего треугольника. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух шарах оказались после этого равными q_1 и q_2 . Найти заряд q_3 на третьем шаре.

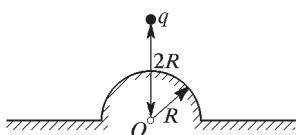


Рис. 18

2.47* Параллельные длинные однородные пластины AB и CD (рис. 19) сделаны из материала, плохо проводящего электричество (например, из дерева). Боковые края их B и D накоротко соединены хорошим проводником (например, металлом), а между краями A и C поддерживается постоянное напряжение V . Найти напряженность электрического поля и форму электрических силовых линий между пластинами, пренебрегая краевыми эффектами. Расстояние между пластинами равно d , а ширина каждой из них $AB = CD = h$.

2.48. Найти, какую максимальную разность потенциалов можно поддерживать между проводами бесконечной двухпроводной линии, если напряженность пробоя воздуха $E_{\max} = 30 \text{ кВ/см}$, диаметр проводов $d = 1 \text{ см}$, а расстояние между проводами $b = 5 \text{ м}$.

2.49. Между заземленными пластинами, расстояние между которыми $2a$, посередине плоского конденсатора помещен заряд q (рис. 20). Определить плотность зарядов, наведенных в точках A и A' . Краевыми эффектами пренебречь.

2.50* На высоте H над поверхностью бесконечной металлической пластины находится точечный заряд. Одна из силовых линий этого заряда оканчивается на поверхности пластины на расстоянии $H\sqrt{3}$ от точки, над которой находится заряд. Определить, под каким углом к горизонту эта силовая линия выходит из заряда.

2.51. На длинном тонком заряженном проводе, расположенным параллельно горизонтальной металлической плоскости на высоте H от нее, сидят два «комара», умеющих летать только вдоль силовых линий электрического поля. На каком расстоянии друг от друга они приземлятся, если оба стартуют из одной точки горизонтально в направлениях, противоположных друг другу?

2.52. «Комар», научившийся летать по эквипотенциальным поверхностям в электростатических полях, пролетает через плоский заряженный конденсатор на расстоянии $\frac{599}{1200}d$ от одной из его обкладок (d — расстояние между обкладками). На какое максимальное расстояние r от конденсатора удалится комар при его дальнейшем движении? Площадь каждой обкладки S .

2.53. На оси симметрии плоского конденсатора с пластины в виде круглых дисков площадью S на большом расстоянии r от него ($r \gg \sqrt{S}$) расположен проводящий незаряженный шарик радиусом $R \ll r$. Конденсатор заряжен до напряжения V . Определить силу, действующую на шарик, и ее знак.

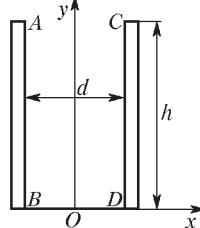


Рис. 19

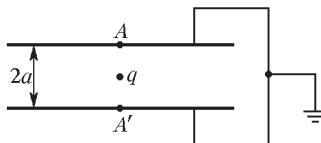


Рис. 20

§ 3. Электрическое поле в веществе.

Энергия электрического поля. Энергетический метод вычисления пондеромоторных сил.

3.1. На сколько отличается от единицы диэлектрическая постоянная ϵ «идеального газа», состоящего из большого количества проводящих шариков радиусом r ? Плотность (концентрация) шариков n мала, так что $r^3 n \ll 1$.

3.2. Для газообразного аргона при нормальных условиях $\epsilon - 1 = 6 \cdot 10^{-4}$. Пользуясь этим, вычислить смещение «центра масс» электронной оболочки атома аргона относительно ядра в статическом электрическом поле с напряженностью $E = 300$ В/см. Атомный номер аргона $z = 18$. (В отсутствие внешнего поля электроны распределены вокруг ядра сферически симметрично.)

3.3. Плотность электронного облака в атоме водорода описывается функцией $\rho(r) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, где $a = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см — радиус первой боровской орбиты. Вычислить коэффициент поляризуемости β атома в слабом внешнем электрическом поле, пренебрегая деформацией электронного облака.

3.4. Оценить коэффициент поляризуемости β атома водорода в слабом внешнем поле, предполагая, что электронное облако сосредоточено внутри сферы радиусом a , где $a = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см (радиус первой боровской орбиты) и имеет постоянную плотность. Деформацией электронного облака пренебречь.

3.5. Диэлектрик с жесткими диполями (дипольный момент молекулы \mathbf{d}_0 , момент инерции J) помещен в постоянное электрическое поле \mathbf{E}_0 , превосходящее по величине поле насыщения. Перпендикулярно к \mathbf{E}_0 действует переменное поле \mathbf{E} , причем $E = E_a \sin \omega t$, $E \ll E_0$. Определить резонансную частоту. Тепловым движением пренебречь.

3.6. Идеальный газ, поляризуемость молекул которого $\beta = 10^{-24}$ см³, находится в большом сосуде при температуре $T = 300$ К. В сосуде имеется плоский конденсатор с напряженностью поля $E = 100$ ед. СГСЭ. Используя распределение Больцмана, найти относительную разность концентрации молекул $\Delta n/n_0$ в конденсаторе и вне его. Силу тяжести не учитывать.

3.7. Имеется тонкий длинный диэлектрический цилиндр длиной $2l$ и радиусом r с «замороженной» поляризацией $\mathbf{P}_0 = \text{const}$. Найти напряженность электрического поля в точке A . Во сколько раз это поле сильнее, чем в точке B (рис. 21a)? Изобразить (качественно) картину силовых линий полей E и D внутри и вне диэлектрического цилиндра.

3.8. Длинный цилиндр изготовлен из диэлектрика с «замороженной» поляризацией, направленной по его оси. Поле в точке A (рис. 21a) оказалось равным $E_A = 300$ В/см. Найти (приближенно) поле E_C вблизи торца короткого цилиндра (в точке C), сделанного

из того же материала, если $h = 2 \cdot 10^{-2}D$, где D — диаметр цилиндра (рис. 21б).

3.9. Имеется бесконечная полоса диэлектрика толщиной l и шириной L (рис. 22). Материал пластины поляризован. Вектор поляризации \mathbf{P} постоянен и перпендикулярен меньшей грани. Считая $l \ll L$, найти поле \mathbf{E} и индукцию \mathbf{D} на средней линии OO' .

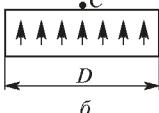
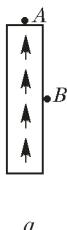


Рис. 21

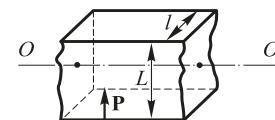


Рис. 22

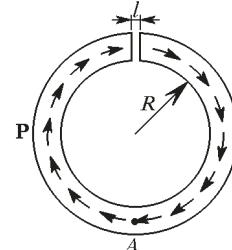


Рис. 23

3.10. Диэлектрический образец с замороженной поляризацией \mathbf{P} имеет форму полого цилиндра с разрезом. На рис. 23 показано сечение этого цилиндра и направление вектора поляризации. Толщина стенки цилиндра $h \ll R$ (R — радиус цилиндра), ширина разреза $l \ll R$. Найти электрическое поле \mathbf{E} и индукцию \mathbf{D} в точке A .

3.11. Поляризованный диэлектрик имеет форму бесконечного жёлоба («полуцилиндр»), поперечный разрез которого показан на рис. 24. Вектор поляризации \mathbf{P} постоянен по величине, лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, и всюду перпендикулярен радиусу. Считая жёлоб тонким ($a/R \ll 1$), найти электрическое поле \mathbf{E} и индукцию \mathbf{D} в точке A .

3.12. В тонком круглом диске радиусом R из диэлектрика создана однородная «замороженная» поляризация так, что вектор поляризации \mathbf{P} параллелен поверхности диска (рис. 25). Определить напряженность электрического поля в центре O круглого отверстия радиусом r , вырезанного в таком диске. Толщина диска $h \ll r$.

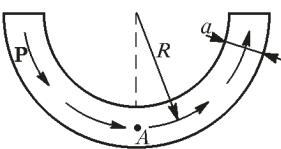


Рис. 24

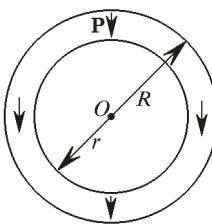


Рис. 25

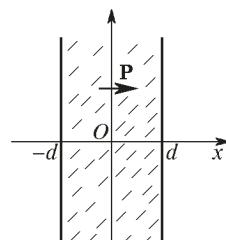


Рис. 26

3.13. Пластина пьезодиэлектрика вследствие неоднородной деформации поляризована так, что поляризация в ее середине равна P_0 и спадает к краям по закону $P = P_0(1 - x^2/d^2)$, где x отсчитывается

ся от середины пластины, а d — ее полутолщина (рис. 26). Вектор поляризации направлен вдоль оси x . Определить напряженность электрического поля внутри и вне пластиинки, а также разность потенциалов между ее боковыми поверхностями. Краевыми эффектами пренебречь.

3.14. В тонкой длинной рейке из диэлектрика создана однородная «замороженная» поляризация, так что вектор поляризации \mathbf{P} параллелен поверхности рейки (рис. 27). Какова напряженность электрического поля в центре круглого отверстия радиусом R , вырезанного в такой рейке? Ширина рейки равна $2l$, ее толщина $h \ll R$.

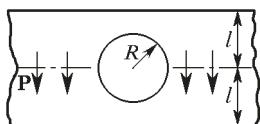


Рис. 27

находится сферическая полость. Найти в центре сферы напряженность \mathbf{E}' поля, созданного поляризационными зарядами, индуцированными на поверхности сферы, считая, что вектор поляризации \mathbf{P} всюду (за исключением полости) имеет постоянное значение.

Указание. Поверхностная плотность поляризационных зарядов σ на границе диэлектрика равна величине поляризации P , умноженной на $\cos\theta$, где θ — угол между нормалью \mathbf{n} к поверхности и вектором \mathbf{P} (рис. 28). Найти напряженность поля в центре сферы, созданную поляризационным зарядом на элементе поверхности сферы, и проинтергировать ее затем по всей сфере.

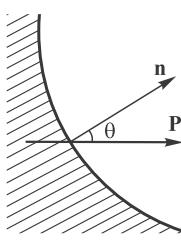


Рис. 28

3.16. Используя результат задачи 3.15, получить формулу Лоренц–Лорентца для плотного диэлектрика $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}n\beta$, где β — поляризуемость изолированной молекулы во внешнем поле, а n — концентрация молекул.

3.17. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$. Разность потенциалов между обкладками $V = 300$ В, расстояние между ними $d = 1$ см. В диэлектрике имеются два воздушных пузырька радиусом $r = 1$ мм, расстояние между ними $l = 1$ см, и они расположены в плоскости, параллельной обкладкам. Оценить величину и направление силы электростатического взаимодействия между пузырьками, полагая, что наличие пузырьков не изменяет однородной поляризации диэлектрика и равномерного распределения заряда на обкладках.

3.18. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$. Разность потенциалов между обкладками $F = 1200$ В, расстояние между ними $d = 4$ см. В диэлектрике имеются два воздушных пузырька радиусом $r = 1$ мм каждый, расстояние между ними $l = 1$ см,

и они расположены вдоль прямой, перпендикулярной обкладкам. Оценить величину и направление силы электростатического взаимодействия между пузырьками, полагая, что наличие пузырьков не изменяет однородной поляризации диэлектрика и равномерного распределения заряда на обкладках.

3.19. Внутрь плоского конденсатора (рис. 29), обкладки которого соединены между собой, помещена диэлектрическая пластина толщиной h с «замороженной» однородной поляризацией ($\mathbf{P} = \text{const}$). Вектор поляризации \mathbf{P} перпендикулярен боковым граням пластины. Определить напряженность поля и электрическую индукцию внутри и вне пластины. Расстояние между обкладками конденсатора равно d .

3.20. В пространство, первоначально занятое однородным электрическим полем \mathbf{E}_0 , вносят длинный диэлектрический цилиндр так, что его ось перпендикулярна начальному полю \mathbf{E}_0 . При каких условиях диэлектрик поляризуется однородно? Найти напряженность поля \mathbf{E} внутри цилиндра и вектор поляризации \mathbf{P} диэлектрика. Проницаемость диэлектрика ϵ .

3.21. Заряженный шарик помещен в газ, молекулы которого представляют собой упругие диполи с молекулярной поляризуемостью β_0 . Средняя концентрация частиц газа n_0 , температура T , заряд шарика Q . Найти поле $E(r)$ вне шарика. Считать, что возмущение концентрации полем $\delta n \ll n_0$.

3.22. В центре диэлектрического шара радиусом R с проницаемостью ϵ_1 помещен точечный заряд q . Шар окружен безграничным диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . Определить поверхностную плотность поляризационных зарядов на границе раздела диэлектриков.

3.23. У плоской поверхности однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ напряженность электрического поля в вакууме равна E_0 , причем вектор \mathbf{E}_0 составляет угол θ с нормалью к поверхности диэлектрика (рис. 30). Считая поле внутри и вне диэлектрика однородным, найти: 1) поток Φ_E вектора \mathbf{E} через сферу радиусом R с центром на поверхности диэлектрика; 2) циркуляцию вектора \mathbf{D} по прямоугольному контуру Γ со сторонами длиной l_1 и l_2 , плоскость которого перпендикулярна к поверхности диэлектрика и параллельна вектору \mathbf{E}_0 .

3.24. Металлический шар радиусом 5 см окружен шаровым слоем диэлектрика ($\epsilon = 7$) толщиной 1 см и помещен концентрично в металлической сфере с внутренним радиусом 7 см. Чему равна емкость C такого конденсатора?

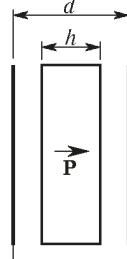


Рис. 29

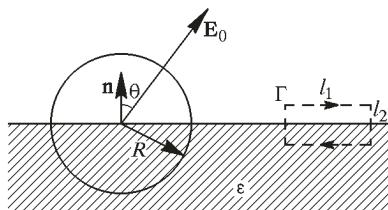


Рис. 30

3.25. В плоский конденсатор введена пластина из оптического стекла ($\epsilon = 9$) так, что остался воздушный зазор $d_1 = 1$ мм. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 1$ см. К конденсатору приложена разность потенциалов $V = 100$ В. Какой будет разность потенциалов U , если после отключения конденсатора от источника напряжения убрать стеклянную пластинку?

3.26. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого линейно меняется от значения ϵ_1 у одной пластины до значения $\epsilon_2 < \epsilon_1$ у другой. Расстояние между пластинами d , площадь каждой из них S . Найти емкость C конденсатора.

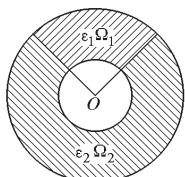


Рис. 31

3.27. В плоский конденсатор, на пластинах которого распределен заряд с поверхностной плотностью σ , вставляется диэлектрик, заряженный положительным пространственным зарядом так, что объемная плотность заряда изменяется от 0 у одной пластины (положительной) до ρ_0 у другой по закону $\rho(x) = \sigma x/d^2$, где d — расстояние между пластинами. Найти распределение поля E в конденсаторе, если диэлектрическая проницаемость диэлектрика ϵ .

3.28. Найти напряженность электрического поля между обкладками сферического конденсатора, пространство между которыми заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 31). Диэлектрики граничат между собой вдоль поверхности конуса с вершиной в центре O . Телесный угол конуса, заполненного первым диэлектриком, равен Ω_1 а заполненного вторым диэлектриком — Ω_2 , так что $\Omega_1 + \Omega_2 = 4\pi$. Заряд на внутренней обкладке равен Q . Найти также емкость конденсатора, если радиусы сферических обкладок равны R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$).

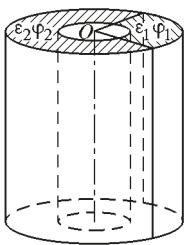


Рис. 32

3.29. Найти напряженность электрического поля между обкладками длинного цилиндрического конденсатора, пространство между которыми заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 32). Диэлектрики граничат между собой вдоль плоскостей, пересекающихся на оси цилиндра O . Двугранные углы, образуемые ими в диэлектриках, равны соответственно φ_1 и φ_2 ($\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi$). Длина конденсатора равна l , а заряд на внутренней обкладке Q . Найти также емкость C конденсатора, если радиусы цилиндрических обкладок равны R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$).

3.30. Прокладка из диэлектрика с большой проницаемостью $\epsilon = 200$ имеет толщину, равную зазору между пластинами плоского конденсатора (рис. 33). Площадь пластин плоского конденсатора $S_1 = 1 \text{ м}^2$. Какова должна быть площадь S_2 основания прокладки для того, чтобы в объеме, занимаемом прокладкой, электрическая

индукция сделалась в 40 раз больше, чем до ее введения? Конденсатор изолирован.

3.31. В подключенный к батарее плоский конденсатор вставляются две пластины из сегнетоэлектрика ($\epsilon = 100$) таким образом, что между ними остается небольшой зазор (рис. 34).

При какой величине зазора h поле в нем будет в 50 раз больше, чем в отсутствие диэлектрика? Расстояние между обкладками конденсатора $d = 2$ см.

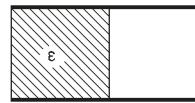


Рис. 33

3.32. В пространстве между обкладками цилиндрического конденсатора, заряженного до величины $\pm q$ на единицу длины, помещен нелинейный пространственно-неоднородный диэлектрик. Его поляризумость $\alpha = \beta |\mathbf{E}| r$. Радиусы обкладок соответственно R_1, R_2 . Найти «нелинейную емкость» конденсатора (на единицу длины), т. е. отношение заряда к разности потенциалов при заданном значении q .

3.33. В пространстве между обкладками сферического конденсатора (радиусы R_1 и R_2) с зарядами $\pm q$ находится нелинейный пространственно-неоднородный диэлектрик. Его поляризумость $\alpha = \beta |\mathbf{E}| r^2$. Найти «нелинейную емкость» конденсатора, т. е. отношение заряда к разности потенциалов при заданном значении q .

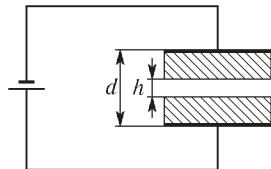


Рис. 34

3.34. Сферический конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется по закону $\epsilon = \epsilon_1 R_1^2 / r^2$, где R_1 — радиус внутренней сферы, r — переменный радиус. Найти объемное распределение связанных зарядов в диэлектрике, если к обкладкам приложена разность потенциалов V_0 . Радиус внешней сферы $R_2 = 1,25R_1$.

3.35. Найти распределение объемной плотности поляризационного заряда $\rho_{\text{пол}}(r)$ в длинном цилиндре радиусом R с замороженной поляризацией $\mathbf{P}(r) = P_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{\mathbf{r}}{R}$. Чему равны при этом напряженность $E(r)$ и индукция $D(r)$ электрического поля внутри и вне цилиндра?

3.36. Диэлектрический диск радиусом $R = 10$ см и высотой $H = 10$ см с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 5$ равномерно вращается вокруг своей оси, делая $n = 100$ об/с. Определить объемную плотность заряда ρ внутри цилиндра, возникающую из-за вращения, а также полный заряд q на поверхности цилиндра. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-28}$ г.

3.37. Проводящий шар помещен в однородную изотропную диэлектрическую среду с проницаемостью ϵ . Вне шара на расстоянии R от его центра находится точечный заряд q . Определить потенциал шара относительно бесконечности.

3.38. Пустотелый металлический шар, заряд которого q , а радиус r , плавает в жидкости с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 так,

что его центр находится на уровне поверхности жидкости. Найти плотность свободных зарядов на поверхности шара. Диэлектрическая проницаемость воздуха ϵ .

3.39. Оценить силу взаимодействия между нейтральным диэлектрическим шариком радиусом r_0 и точечным зарядом q , считая расстояние R между ними большим, а диэлектрическую проницаемость шара ϵ такой, что $\epsilon - 1 \ll 1$.

3.40. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ заполняет полупространство. На расстоянии L от плоской границы диэлектрика находится точечный заряд q . Найти силу, действующую на заряд, и распределение заряда σ по поверхности диэлектрика.

3.41. Определить, как будет меняться с расстоянием сила взаимодействия между двумя шариками, один из которых заряжен и состоит из диэлектрика, а другой металлический и не заряжен. Расстояние между шариками велико по сравнению с их размерами.

3.42. Вычислить электростатическую энергию заряда на шаре радиусом R в вакууме, если заряд шара q равномерно распределен по его поверхности.

3.43. Вычислить электростатическую энергию для шара, заряд которого равномерно распределен по его объему.

3.44. Считая, что масса электрона определяется из соотношения $W = mc^2$, где W — электростатическая энергия заряда электрона, найти значение радиуса электрона при следующих предположениях: 1) заряд электрона распределен по всему его объему с постоянной плотностью; 2) весь заряд электрона распределен по его поверхности.

3.45. Определить толщину H равномерно заряженного плоского слоя, если объемная плотность заряда $\rho = 0,5$ ед. СГСЭ, а при перемещении заряда $q = 1$ ед. СГСЭ от поверхности слоя наружу на расстояние $d = 5$ см совершается работа $A = 20$ эрг.

3.46. В результате импульсного разряда конденсатора через разреженный водород происходит нагревание газа до температуры T . Предполагая, что вся энергия разряда пошла на нагревание газа, оценить величину T . Напряжение на конденсаторе $U = 30$ кВ, емкость $C = 18$ мкФ. До разряда газ занимал объем $V_0 = 10$ л при давлении $P_0 = 10^{-2}$ мм рт. ст. и температуре $T_0 = 300$ К.

3.47. В центры двух удаленных друг от друга металлических сфер с внешними радиусами $R_1 = R$, $R_2 = 3R$ и толщиной стенки $\Delta = R/3$ помещены заряды $q_1 = q$, $q_2 = 2q$. Найти работу, необходимую для того, чтобы поменять эти заряды местами.

3.48. В центры двух удаленных друг от друга диэлектрических шаров с радиусами $R_1 = R$, $R_2 = 12R$ и проницаемостью ϵ помещены заряды $q_1 = q$, $q_2 = 2q$. Найти работу, необходимую для того, чтобы поменять эти заряды местами.

3.49. Диск радиусом R и толщиной l ($l \ll R$) из равномерно заряженного диэлектрика с объемной плотностью заряда ρ лежит на большой металлической заземленной пластине. Вычислить энергию W электростатического поля диска. Диэлектрическую прони-

цаемость диэлектрика положить равной $\epsilon = 1$. Краевыми эффектами пренебречь.

3.50. По сфере радиусом R равномерно распределен заряд Q . Определить давление изнутри на поверхности сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.

3.51* Проводящая сфера радиусом R составлена из двух полусфер. Определить силу F , с которой отталкиваются эти полусфера, если полный заряд сферы равен Q .

3.52. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если в центре сферы поместить дополнительно точечный заряд q ? Сферу считать полой и бесконечно тонкой.

3.53. Незаряженный проводящий шар радиусом $R = 4$ см, разрезанный пополам, находится во внешнем однородном поле $E_0 = 300$ В/см, перпендикулярном к плоскости разреза. Определить силу, с которой оба полушария отталкиваются друг от друга.

3.54. Длинный проводящий цилиндр радиусом R составлен из двух половин. Определить силу отталкивания F , действующую на единицу длины каждого полуцилиндра, если на единицу длины цилиндра приходится заряд χ .

3.55. Конденсатор, заполненный жидким диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ , зарядили, затратив на это энергию W_1 . Затем конденсатор отсоединили от источника, слили из него диэлектрик и разрядили. Какая энергия W_2 выделилась при разрядке? Объяснить результат.

3.56. Три проводящих шара с радиусами $R_1 = 10$ см, $R_2 = 20$ см и $R_3 = 30$ см и соответственно потенциалами $\varphi_1 = 450$ В, $\varphi_2 = 300$ В и $\varphi_3 = 150$ В в вакууме разведены далеко друг от друга. Какое количество тепла Q выделится после того, как их соединили тонкими проволочками? Емкостью проволочек пренебречь.

3.57. Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии d , заполнен твердым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ (рис. 35). Конденсатор подсоединен к батарее постоянного тока, ЭДС которой равна \mathcal{E} . Одну из пластин конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор. На какое расстояние x отодвинута пластина, если при этом произведена работа A ?

3.58. Плоский конденсатор емкостью C последовательно с некоторым резистором подключен к батарее с ЭДС \mathcal{E} . Пластины конденсатора быстро сближают, так что расстояние между ними уменьшается в 2 раза. Предполагая, что за время перемещения пластин заряд конденсатора практически не изменился, найти джоулево тепло, которое выделится на резисторе к моменту окончания перезарядки. Оценить порядок величины сопротивления, при котором условия задачи могут быть практически выполнены, считая время сближения $\Delta t = 10^{-2}$ с, $C \approx 10^{-10}$ Ф.

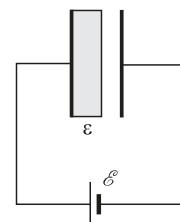


Рис. 35

3.59. Диэлектрическая пластина толщиной l_2 и диэлектрической проницаемостью ϵ введена между обкладками плоского воздушного конденсатора (рис. 36). Между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_1 . Определить силу притяжения F между обкладками, если разность потенциалов между ними равна V , а площадь пластин S . Как изменится выражение для F в предельном случае $l_1 \rightarrow 0$?

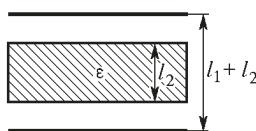


Рис. 36

торыми заполнено жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$. На конденсатор подано напряжение, величина которого медленно увеличивается. Определить, что наступит раньше: механическое разрушение внутренней обкладки или пробой диэлектрика. Пробой диэлектрика наступает при напряженности поля $E_{\text{пр}} = 30 \text{ кВ/мм}$, разрывное усилие стенок цилиндров $\sigma_{\text{кр}} = 500 \text{ Н/м}$. Радиус внутренней обкладки $R = 3 \text{ см}$.

3.61. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов V и отсоединен от источника ЭДС. Площадь пластин S , расстояние между ними d . Пластины конденсатора расположены вертикально. Снизу подводят сосуд с жидким диэлектриком, имеющим диэлектрическую проницаемость ϵ , так, что диэлектрик заполняет половину конденсатора.

- 1) Чему равна емкость конденсатора C ?
- 2) Чему равна напряженность поля E в воздушной части промежутка между пластинами и в части, заполненной диэлектриком?
- 3) Как распределена поверхностная плотность σ электричества в пластине?
- 4) Определить уменьшение энергии конденсатора ΔW . На что она была израсходована? Считать, что граница жидкость–воздух плоская и все параметры конденсатора изменяются скачком.

3.62* Внутри плоского конденсатора с площадью пластин 200 см^2 и расстоянием между ними $0,1 \text{ см}$ находится пластина из стекла ($\epsilon = 5$), целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Как изменится энергия конденсатора, если удалить стеклянную пластину? Решить задачу при двух условиях: 1) конденсатор все время присоединен к батарее с ЭДС, равной 300 В ; 2) конденсатор был первоначально присоединен к той же батарее, а затем отключён, и только после этого пластина была удалена. Найти механическую работу, которая затрачивается на удаление пластины в том и другом случае.

3.63. Плоский конденсатор с квадратными пластинами (расстояние между пластинами d , площадь пластин S) заряжен до разности потенциалов V и отсоединен от источника напряжения. После этого в конденсатор вдвинута до половины широкая пластина диэлектрика

с диэлектрической проницаемостью ϵ . Толщина пластины равна d . Найти силу, с которой пластина втягивается в конденсатор.

3.64. Капиллярный вольтметр состоит из капиллярной стеклянной трубочки с металлизированной полупрозрачной внутренней поверхностью, служащей одной из обкладок цилиндрического конденсатора. Второй обкладкой является тонкая металлическая проволока, коаксиальная с внутренней цилиндрической поверхностью трубочки. Определить поднятие мениска воды h в вольтметре при приложении к обкладкам напряжения $V = 100$ В, если внутренний диаметр капилляра $D_1 = 0,5$ мм, диаметр проволоки $D_2 = 0,05$ мм, плотность воды $\rho = 1 \text{ г}/\text{см}^3$, $\epsilon = 81$.

3.65. В плоский конденсатор параллельно его обкладкам вставлена диэлектрическая пластина с проницаемостью ϵ , толщина которой равна половине зазора конденсатора. К пластинам конденсатора приложено напряжение V . На рис. 37 штриховой линией изображен некоторый замкнутый контур L , пронизывающий конденсатор и диэлектрическую пластину. Найти циркуляцию $\oint_L \mathbf{D} dl$ вектора электростатической индукции \mathbf{D} по контуру L . Положительное направление обхода контура указано на рис. 37.

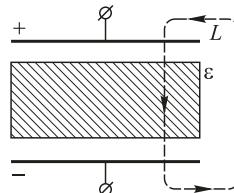


Рис. 37

тростатической индукции \mathbf{D} по контуру L . Положительное направление обхода контура указано на рис. 37.

3.66. Оценить, на сколько изменится емкость плоского конденсатора, пластины которого находятся на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, если в него внести проводящий шарик радиусом $r = 0,2$ мм и расположить его в центре на одинаковых расстояниях от пластин.

3.67. Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии d друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис. 38). Все пластины имеют форму полукруга радиусом R , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с d . Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент M сил, действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор заряжен до разности потенциалов V , диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна ϵ .

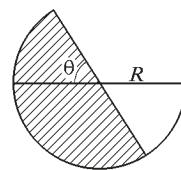


Рис. 38

3.68. В предыдущей задаче величина момента сил M не зависит от угла поворота θ диэлектрической пластины. Но в положении равновесия, когда $\theta = 0$, момент сил должен обращаться в ноль. Объяснить это расхождение.

3.69. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых квадратных пластин, расположенных в вакууме вертикально на расстоянии $d = 1$ мм друг от друга. Одна из пластин закреплена, а другая может

двигаться без трения по гладким вертикальным направляющим. При какой разности потенциалов V между пластинаами подвижная пластина не упадет вниз? Масса подвижной пластины $M = 1$ г, сторона квадрата $l = 10$ см.

3.70. Две половины сферического конденсатора заполнены диэлектриками с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 39). Определить силу, действующую на внутреннюю сферу. Заряд конденсатора Q , радиус внутренней сферы R .

3.71. Оценить силу, действующую на атом, находящийся на расстоянии $l = 200$ Å от поверхности острия металлической иглы с радиусом закругления $R = 100$ Å. Потенциал на игле $V = 10$ кВ. Поляризумость атома α — величина порядка его объема.

3.72. Идеальный газ с упругим механизмом поляризации молекул с поляризумостью $\alpha = 10^{-24}$ см³ находится между обкладками сферического конденсатора при температуре 300 К. Напряженность электрического поля у внутренней обкладки $E_1 = 400$ ед. СГСЭ, у внешней — $E_2 = 300$ ед. СГСЭ. Найти относительную разность концентраций $\Delta n/n_0$ у внутренней и внешней обкладок конденсатора.

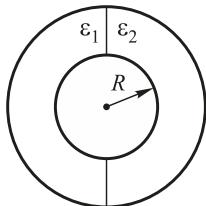


Рис. 39

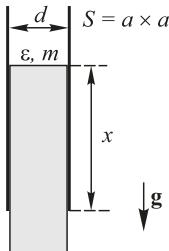


Рис. 40

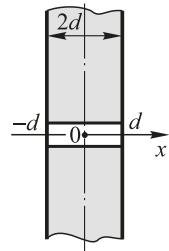


Рис. 41

3.73. Плоский конденсатор с квадратными пластинами со стороной a и расстоянием между ними d расположен вертикально, заряжен до заряда q и отсоединен от источника питания. В конденсатор вводится пластина с диэлектрической проницаемостью ϵ и массой m . Толщина пластины равна зазору конденсатора d , а длина и ширина больше a . Найти положение равновесия пластины x (рис. 40). Силу трения не учитывать.

3.74. Напряженность электрического поля, измеренная в тонком канале, просверленном перпендикулярно поверхностям неоднородно поляризованной пластиинки толщиной d (рис. 41), оказалась равна $\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0 \cdot (x/d)^3$. Найти распределение поляризационных зарядов в пластиинке (объемную плотность $\rho_{\text{пол}}(x)$ и плотность поляризационных зарядов на поверхностях пластиинки), вектор поляризации \mathbf{P} , а также поля $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{D}(x)$ внутри и вне пластиинки. Электрическое поле $\mathbf{E}(x)$ направлено параллельно оси x .

3.75. Зазор между обкладками плоского конденсатора площадью S с зарядом Q заполнен веществом, диэлектрическая прони-

цаемость которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении по закону: $\epsilon = \epsilon_0(1 + x^2/d^2)^{-1}$, где x — расстояние до положительно заряженной пластины, d — расстояние между пластинами. Найти:

- 1) зависимость объемной плотности поляризационного заряда от x ;
- 2) суммарный объемный поляризационный заряд;
- 3) суммарный поверхностный поляризационный заряд у каждой из пластин.

3.76. Заряд сферического конденсатора (рис. 42) с двухслойным диэлектриком ($\epsilon_1 > \epsilon_2$) равен q_0 (положительно заряжен внутренний электрод). Определить: 1) величину и знак поверхностных поляризационных зарядов на всех поверхностях диэлектрика ($r = R_1, R_2, R_3$); 2) величину объемного поляризационного заряда в диэлектрике; 3) разность потенциалов между обкладками.

3.77. В заряженный плоский конденсатор вставлен диэлектрический стержень длиной l_0 из элекретра с замороженной однородной

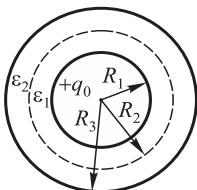


Рис. 42

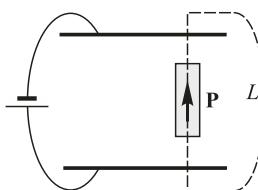


Рис. 43

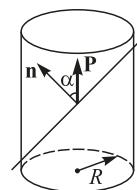


Рис. 44

поляризацией \mathbf{P} (рис. 43). К конденсатору приложена некоторая разность потенциалов. Найти циркуляцию вектора \mathbf{D} по контуру L , показанному на рисунке.

3.78. Имеется однородно поляризованный цилиндр конечной длины и радиусом R (рис. 44). Вектор поляризации равен \mathbf{P} и направлен вдоль оси цилиндра. Найти потоки Φ_E и Φ_D напряженности \mathbf{E} и индукции \mathbf{D} электрического поля через бесконечную плоскость, пересекающую цилиндр. Нормаль к плоскости составляет угол α с вектором \mathbf{P} .

3.79. Широкая тонкая пластина из диэлектрика вносится в однородное электрическое поле \mathbf{E}_0 . Диэлектрическая проницаемость пластины $\epsilon > 1$. Вектор \mathbf{E}_0 составляет с нормалью к поверхности пластины угол θ (рис. 45).

1) Определить поверхностную плотность поляризационного заряда на верхней поверхности пластины.

2) Найти модуль и направление вектора поляризации \mathbf{P} пластины.

3.80. Определить силу, действующую на внутреннюю сферу сферического конденсатора, если заряд внутренней сферы радиусом R

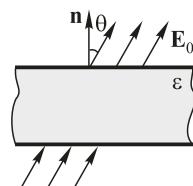


Рис. 45

равен q (рис. 46). Пространство между обкладками конденсатора плотно (без зазоров) заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Диэлектрики граничат между собой вдоль поверхности конуса с вершиной в центре сферы O . Телесные углы, включающие в себя диэлектрики, равны Ω_1 и $\Omega_2 = 4\pi - \Omega_1$; причем угол наклона образующей первого конуса $\alpha_1 = \pi/3$.

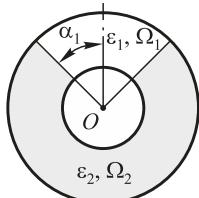


Рис. 46

3.81. Определить силу, действующую на внутреннюю обкладку длинного цилиндрического конденсатора, если ее заряд равен q , а радиус R (рис. 47). Пространство между обкладками конденсатора плотно (без зазоров) заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Диэлектрики граничат между собой вдоль по плоскостям двугранного угла, пересекающимся на общей оси цилиндрических поверхностей. Двугранные углы равны соответственно $\alpha_1 = \pi/3$ и $\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$. Длина конденсатора равна l .

3.82. Заряд электрона $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m_e = 0,911 \cdot 10^{-30}$ кг. Предполагая, что электрон представляет собой шарик с равномерно распределенным по объему зарядом и что вся его

энергия имеет электростатическое происхождение, определить для этой модели радиус электрона r_e . Определить для такой же модели радиус протона r_p . Масса протона $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ кг. Выразить r_e и r_p в единицах классического радиуса электрона $r_0 = e^2/(m_e c^2)$.

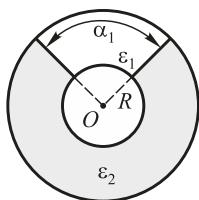


Рис. 47

3.83. Бытовой аэрозольный антистатик снимает статический заряд с одежды за счет увеличения напряженности электрического поля у поверхности распыляемых капелек, как бы уменьшая пробивное напряжение воздуха. Оценить напряженность пробоя воздуха, содержащего большое количество мелких взвешенных капелек воды, если пробой в сухом воздухе происходит при напряженности поля $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см, а статическая диэлектрическая проницаемость воды $\epsilon = 81$. Для радиуса капелек r и их концентрации n выполняется условие $nr^3 \ll 1$.

3.84. В tantalовых электролитических конденсаторах роль одной из обкладок играет пористый tantal, поверхность которого можно представить как совокупность спеченных шариков с суммарной площадью $S = 1 \text{ м}^2/\text{см}^3$. Для получения диэлектрического слоя всю поверхность окисляют, а поры заполняют проводящим диоксидом марганца, который играет роль второй обкладки. Толщина окисла $d = 0,1 \text{ мкм}$, $\epsilon = 27$. Какого размера должен быть такой конденсатор в форме куба, чтобы его емкость равнялась 1 фарааде? Оценить также радиус шариков.

§ 4. Постоянный ток. Токи в неограниченной среде

4.1. В схему включены два одинаковых гальванических элемента с ЭДС 1,5 В и внутренним сопротивлением 2 Ом так, как показано на рис. 48. Какой ток проходит через элементы? Что покажет вольтметр? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

4.2. По ошибке в цепь были включены параллельно два гальванических элемента с разными ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1,9$ В и $\mathcal{E}_2 = 1,1$ В и с вну-

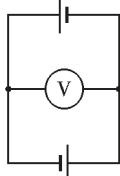


Рис. 48

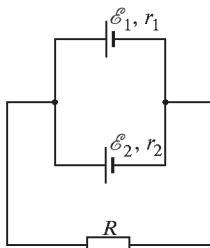


Рис. 49

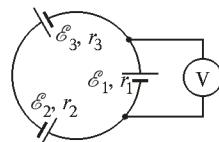


Рис. 50

тренними сопротивлениями $r_1 = 0,1$ Ом и $r_2 = 0,8$ Ом. Элементы замкнуты на внешнее сопротивление $R = 10$ Ом (рис. 49). Чему равны токи \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 через элементы, как они направлены и как велико напряжение V на сопротивлении R внешней цепи?

4.3. Три гальванических элемента с ЭДС \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{E}_3 и внутренними сопротивлениями r_1 , r_2 , r_3 соединены по схеме, указанной на рис. 50. Сопротивления соединяющих проводов пренебрежимо малы.

1) Какое напряжение V будет показывать вольтметр, включенный так, как показано на рисунке?

2) Чему будет равно показание вольтметра, если величины \mathcal{E}_i и r_i связаны соотношением $\mathcal{E}_1/r_1 = \mathcal{E}_2/r_2 = \mathcal{E}_3/r_3$?

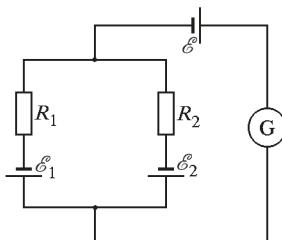


Рис. 51

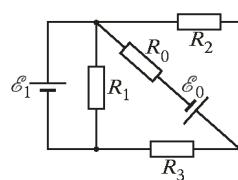


Рис. 52

4.4. Сопротивления R_1 и R_2 (рис. 51) подобраны так, что ток через гальванометр G не идет. Считая известными ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , найти ЭДС \mathcal{E} . Внутренними сопротивлениями батарей по сравнению с R_1 и R_2 пренебречь.

4.5. Найти ток, проходящий через резистор сопротивлением R_0 в схеме, изображенной на рис. 52, считая все параметры заданными.

4.6. В схеме, изображенной на рис. 53, заданы сопротивления R_1 и R_2 . Определить сопротивление R , при котором рассеиваемая на нем мощность максимальна. Каково условие того, что ток, проходящий через сопротивление R , равен нулю?

4.7. Электрическая цепь составлена из двух батарей с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и четырех одинаковых резисторов сопротивлением R каждый (рис. 54). Какая мощность рассеивается на этих резисторах?

4.8. Сопротивления R_1 , R_2 , R_3 подобраны так, что ток через гальванометр G (рис. 55) равен нулю. Электродвижущие силы \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_3

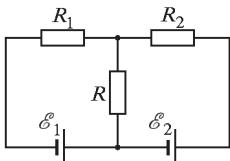


Рис. 53

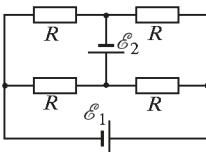


Рис. 54

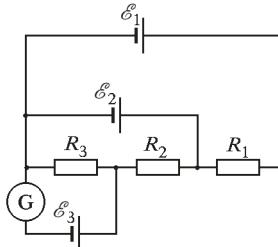


Рис. 55

известны. Считая известными сопротивления R_1 , R_2 , R_3 и пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей, найти электродвижущую силу \mathcal{E}_2 и ток \mathcal{I} , текущий через батарею \mathcal{E}_1 .

4.9. Сопротивления R_1 и R_2 подобраны так, что ток через гальванометр G (рис. 56) равен нулю. Считая известными ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , найти электродвижущую силу \mathcal{E} . Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь по сравнению с R_1 и R_2 .

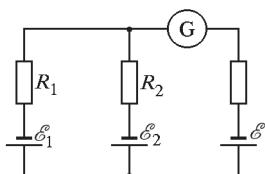


Рис. 56

4.10. Существует принцип, согласно которому токи и напряжения в цепи, состоящей из линейных (подчиняющихся закону Ома) элементов, распределяются таким образом, что диссилируемая в тепло мощность минимальна. Найти с помощью этого принципа напряжения на каждом из трех последовательно соединенных сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 , если суммарное падение напряжения на них равно V .

4.11. Существует принцип, согласно которому токи и напряжения в цепи, состоящей из линейных (подчиняющихся закону Ома) элементов, распределяются таким образом, что диссилируемая в тепло мощность минимальна. Найти с помощью этого принципа токи в каждом из параллельно соединенных сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 , если суммарный ток, протекающий по ним, равен \mathcal{I} .

4.12. В разрыв подвижного проводящего диаметра CD (рис. 57) включена неоновая лампочка. При каких положениях CD лампочка вспыхивает и гаснет? Потенциал зажигания неоновой лампочки $V_{\text{заж}}$, потенциал гашения $V_{\text{гаш}} < V_{\text{заж}}$. Окружность $ABCD$ сделана из од-

нородной проволоки постоянного поперечного сечения. Сопротивление этой окружности мало по сравнению с сопротивлением неоновой лампочки (когда она горит). Между точками A и B поддерживается постоянное напряжение V . Чему равно минимальное значение напряжения V_{\min} , при котором лампочка еще может вспыхнуть?

4.13. Для измерения напряженности электрического поля у поверхности Земли используют две проводящие пластины, расположенные горизонтально с небольшим зазором между ними (рис. 58). Верхняя плата заземлена и вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через край пластины, делая $n = 1200$ об/мин и периодически закрывая нижнюю пластину. При этом перезарядка нижней пластины вызывает падение напряжения на сопротивлении $R = 10^7$ Ом, соединяющем нижнюю пластину с Землей. Найти его среднее по модулю значение V , если напряженность электрического поля у поверхности Земли $E = 1,5$ В/см. Считать, что нижняя плата успевает полностью перезарядиться за один цикл вращения. Площадь пластины $S = 600$ см².

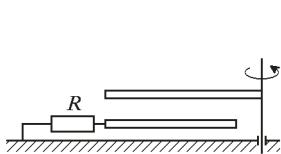


Рис. 58

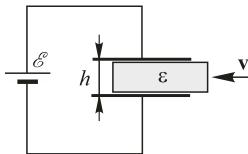


Рис. 59

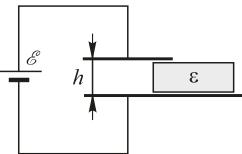


Рис. 60

4.14* В плоский конденсатор заданных размеров вдвигается с постоянной скоростью v пластина диэлектрика (рис. 59). Определить ток в цепи батареи, подключенной к конденсатору. Считать известными: ЭДС батареи \mathcal{E} , диэлектрическую проницаемость ϵ , высоту пластины h и ее ширину b (на рисунке не изображена).

4.15* Две плоские прямоугольные пластины образуют конденсатор. Между пластинами без трения может двигаться пластина твердого диэлектрика (рис. 60). Найти мощность, развиваемую батареей, включенной в цепь конденсатора. Как распределяется эта мощность между электрической и механической энергиями при втягивании диэлектрика? Считать известными ЭДС батареи \mathcal{E} , диэлектрическую проницаемость ϵ , высоту пластины h и ее ширину b (на рисунке не изображена).

4.16* К большому металлическому листу толщиной a приварены на расстоянии b друг от друга два цилиндрических проводника радиусами r_0 (рис. 61). Найти сопротивление R между проводниками,

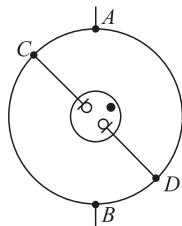


Рис. 57

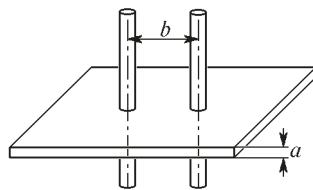


Рис. 61

если $a \ll r_0 \ll b$. Считать, что удельная проводимость λ_1 проводников значительно больше удельной проводимости λ материала листа.

4.17. На поверхности двух одинаковых диэлектрических конусов, соприкасающихся основаниями, нанесен тонкий проводящий слой толщиной δ с удельной проводимостью λ . К вершинам конусов припаяны цилиндрические электроды диаметром d . Определить сопротивление R между вершинами, если $\delta \ll d$. Размеры конусов указаны на рис. 62.

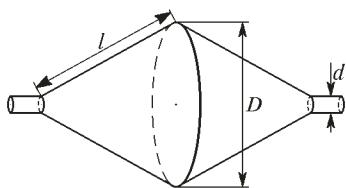


Рис. 62

Определить сопротивление R банки, если она сделана из фольги толщиной $\delta \ll d$ с удельной проводимостью λ .

4.19. Фигура, изображенная на рис. 64, сделана из проволоки постоянного сечения. Число вписанных друг в друга правильных треугольников очень велико. Сторона самого большого треугольника $a_1 = 1$ м. Сопротивление одного метра проволоки равно 1 Ом. Найти сопротивление между клеммами A и B .

4.20. К диаметрально противоположным точкам A и B слабо проводящей однородной полой сферы подведены цилиндрические провода, между концами A и B которых поддерживается постоянная разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Найти распределение потенциала φ как

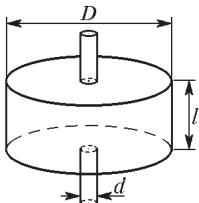


Рис. 63

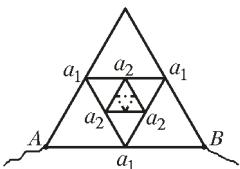


Рис. 64

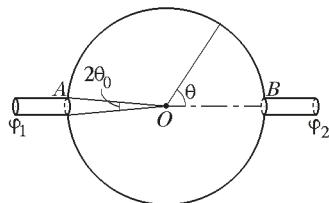


Рис. 65

функции угла θ (рис. 65). Угол, под которым из центра сферы O виден диаметр основания каждого из проводов, равен $2\theta_0$.

4.21. В генераторе Ван-де-Графа, схематически изображенном на рис. 66, заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод. Поверхностные заряды передаются ленте от источника вблизи нижнего шкива. Найти максимальный потенциал и максимальный ток, которые можно получить от такого генератора, если радиус высоковольтного электрода $R = 1,5$ м, скорость движения ленты $v = 20$ м/с, а ширина ленты $l = 100$ см. Лента и высоковольтный электрод находятся в атмосфере газа, в котором пробой возникает при напряженности электрического поля $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см.

4.22. Атомный электрический элемент представляет собой две концентрические проводящие сферы. Внутренняя сфера сделана из радиоактивного материала, испускающего быстрые электроны. В пространстве между сферами скорость электронов и, следовательно, их ионизирующее действие можно считать постоянными. Пролетев воздушный зазор, электроны поглощаются на внешней сфере. В отключенной батарее устанавливается равновесие между потоком заряда, переносимым быстрыми электронами, и током проводимости в ионизированном воздухе. Найти напряженность поля E в пространстве между сферами, если ЭДС элемента равна \mathcal{E} , радиусы сфер равны r_1 и r_2 .

4.23. Пространство между пластинами слоистого плоского конденсатора заполнено многослойным диэлектриком, обладающим слабой электропроводностью. Диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость изменяются от $\epsilon_1 = 4$, $\lambda_1 = 10^{-9} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ на одной поверхности диэлектрика до $\epsilon_2 = 3$, $\lambda_2 = 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ на другой его поверхности. Конденсатор включен в цепь батареи постоянной ЭДС. Определить величину и знак суммарного свободного заряда q , который возникает в диэлектрике, когда в цепи установится постоянный электрический ток $\mathcal{I} = 10^{-7} \text{ А}$, текущий через диэлектрик от стороны 1 к стороне 2.

4.24. На цилиндрический конденсатор с радиусами обкладок R_1 и R_2 подано напряжение V_0 . Конденсатор заполнен слабопроводящей средой ($\epsilon = 1$, $\lambda = k/r^2$, где k — некоторая постоянная). Найти распределение заряда и поля внутри конденсатора. Какова будет емкость такого конденсатора (на единицу длины)?

4.25. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя однородными слабо проводящими слоями диэлектрика с толщинами d_1 и d_2 . Диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость первого диэлектрика равны соответственно ϵ_1 и λ_1 , а второго — ϵ_2 и λ_2 . Найти плотность поверхностных свободных зарядов σ на границе между диэлектриками, которая установится, если к конденсатору приложить постоянное напряжение V .

4.26. Определить проводимость Λ изоляции в сферическом конденсаторе, заполненном слабопроводящим диэлектриком. Удельная проводимость диэлектрика равна λ , диэлектрическая проницаемость ϵ .

4.27. Пространство между двумя концентрическими сферами заполнено диэлектриком, проводимость которого зависит только от расстояния до сфер. Найти закон изменения удельной проводимости $\lambda(r)$, если объемная плотность джоулевых потерь при прохождении тока одинакова во всех точках.

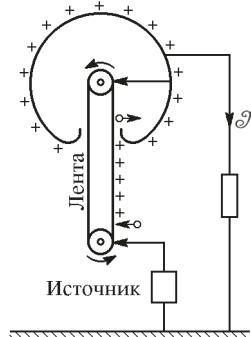


Рис. 66

4.28. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено диэлектриком, обладающим некоторой проводимостью. Найти закон изменения удельной проводимости $\lambda(r)$, если при наличии некоторой разности потенциалов поле между цилиндрами везде одинаково.

4.29. По цилиндрическому стержню течет ток плотности j . Удельная проводимость λ на участке AB длиной l изменяется по линейному закону от λ_1 до λ_2 . Найти объемную плотность зарядов проводимости ρ на участке AB .

4.30. Имеется n идеально проводящих тел в вакууме. Известно, что при зарядах $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ их потенциалы равны $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$. Какое количество тепла Q будет выделяться ежесекундно, когда пространство между рассматриваемыми телами будет заполнено однородной проводящей жидкостью с электропроводностью λ и диэлектрической проницаемостью ϵ , если потенциалы тел поддерживаются при прежних значениях $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$?

4.31. По сети длиной 5 км необходимо передать энергию от источника с напряжением 110 В, имеющего мощность 5 кВт. Какого минимального диаметра D должен быть медный провод, чтобы потери энергии в сети не превышали 10% от мощности источника? Удельное сопротивление меди $\rho = 0,017 \cdot 10^{-4}$ Ом · см.

4.32. Заземление концов телеграфной линии осуществлено посредством очень глубоко зарытых в землю металлических шаров радиусами r_1 и r_2 . Удельная проводимость почвы вблизи них равна λ_1 и λ_2 . Найти сопротивление R земли между шарами. Считать почву однородной в достаточно большой окрестности каждого шара.

4.33*. Показать, что сопротивление однородной проводящей среды, заполняющей все пространство между двумя идеально проводящими оболочками произвольной формы, равно $\rho/(4\pi C)$, где ρ — удельное сопротивление среды, а C — взаимная емкость этой системы электродов-оболочек в вакууме.

4.34. Два металлических шара одинакового радиуса r погружены в однородную среду с удельным сопротивлением ρ . Чему равно сопротивление R среды между шарами? Считать, что расстояние между шарами очень велико по сравнению с их радиусами.

4.35. Два электрода A_1 и A_2 произвольной формы глубоко зарыты в землю и соединены между собой воздушным проводом (телеграфная линия). Электроды находятся далеко друг от друга. Емкости электродов (в вакууме) равны соответственно C_1 и C_2 . Почву в окрестности каждого электрода можно считать однородной. Найти сопротивление земли R между электродами, если удельные сопротивления почвы в окрестности электродов равны соответственно ρ_1 и ρ_2 .

4.36. Цепь постоянного тока состоит из длинной однопроводной линии, в которую включен источник с ЭДС \mathcal{E} . Линия замыкается через землю, в которую зарыты два металлических шара на большом расстоянии друг от друга (рис. 67). Известны радиусы шаров

r_1 и r_2 , а также проводимость грунта λ_1 и λ_2 в местах, где они закопаны. Пренебрегая всеми сопротивлениями, кроме сопротивления заземления, определить заряд каждого шара.

4.37. В пространстве между пластинами плоского конденсатора, заполненного газом и подсоединенном к батарее, образуется пара ионов с зарядами $\pm e$. Какой заряд протечет в цепи в результате движения ионов? Изобразить график зависимости тока от времени. Считать подвижность ионов в газе постоянной.

4.38. Плоский конденсатор заполнен неидеальным диэлектриком, диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость которого

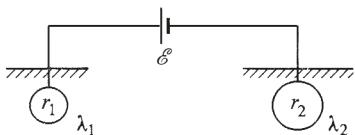


Рис. 67

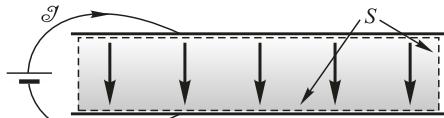


Рис. 68

изменяются от значений ϵ_1 и λ_1 у верхней пластины до ϵ_2 и λ_2 у нижней пластины. При подключении конденсатора к источнику постоянной ЭДС в цепи устанавливается постоянный ток I (рис. 68). Определить величину и знак суммарного объемного поляризационного заряда в объеме диэлектрика (т. е. без учета поверхностных зарядов), а также поток вектора поляризации через замкнутую поверхность S' , проходящую вблизи пластин и границ конденсатора.

§ 5. Магнитное поле. Закон Био–Савара–Лапласа.

Теорема о циркуляции в вакууме.

Индуктивность проводников. Теорема взаимности

5.1. По проводнику, имеющему форму эллипса, течет постоянный ток $I = 10 \text{ А}$. Большая и малая полуоси эллипса равны соответственно $a = 50 \text{ см}$, $b = 30 \text{ см}$. Определить индукцию B магнитного поля в вакууме в фокусе эллипса. Уравнение эллипса в полярной системе координат $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$, где $p = b^2/a$ — параметр, а $e < 1$ — эксцентриситет.

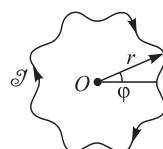


Рис. 69

5.2. Определить магнитное поле B в вакууме в центре O «гофрированной окружности» (рис. 69), уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + b \cos m\varphi$, где $a = 50 \text{ см}$, m — целое число, b — постоянная. По проводнику, имеющему форму «гофрированной окружности», течет ток $I = 10 \text{ А}$.

5.3. Электрический ток I протекает по проводу, изогнутому так, как показано на рис. 70. Найти значение магнитной индукции B в вакууме в центре O окружности радиусом R .

5.4. Определить магнитное поле B в центре однородной тонкой металлической пластинки, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной a , если через пластинку пропускают ток \mathcal{I} (рис. 71). Магнитным полем подводящих проводов пренебречь.

5.5. Найти индукцию B магнитного поля на оси соленоида в точке A , из которой диаметры торцов видны под углами 2α и 2β

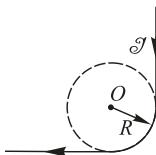


Рис. 70

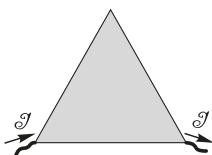


Рис. 71

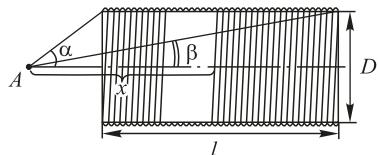


Рис. 72

(рис. 72). Соленоид состоит из N витков, равномерно намотанных на длине l , и по нему течет ток \mathcal{I} .

5.6. При производстве полиэтиленовой пленки широкая полоса протягивается по роликам со скоростью $v = 15 \text{ м/с}$ (рис. 73). В процессе обработки (главным образом из-за трения) поверхность пленки приобретает равномерно распределенный заряд с поверхностной

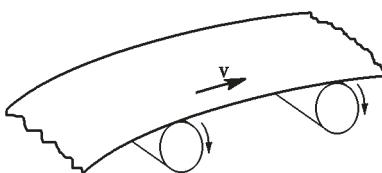


Рис. 73

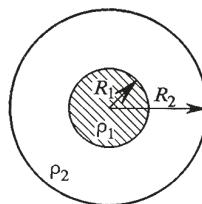


Рис. 74

плотностью σ . Оценить максимальные значения σ и магнитного поля B вблизи поверхности пленки, принимая во внимание, что при напряженности электрического поля $E = 30 \text{ кВ/см}$ в воздухе возникает электрический разряд (пробой).

5.7. Вдоль длинной тонкостенной цилиндрической трубы радиусом $R = 25 \text{ мм}$ течет постоянный ток $\mathcal{I} = 20 \text{ А}$. В стенке трубы имеется тонкая прорезь шириной $d = 1 \text{ мм}$, параллельная оси трубы. Найти магнитное поле B внутри трубы и вне ее на расстоянии $r \gg R$.

5.8. Бесконечно длинный цилиндрический провод (рис. 74) состоит из двух коаксиальных цилиндров: центрального сплошного металлического стержня радиусом R_1 , сделанного из материала с удельным сопротивлением ρ_1 , и окружающего его полого цилиндра с внешним радиусом R_2 , изготовленного из материала с удельным сопротивлением ρ_2 . Внешняя поверхность сплошного и внутренняя поверхность полого цилиндров находятся в электрическом контакте. По проводу параллельно его оси течет постоянный ток \mathcal{I} . Найти выражения для индукции B магнитного поля внутри и вне провода.

5.9. Магнитное поле в плоскости кругового витка с током неоднородно. Из соображений симметрии ясно, что в центре витка оно экстремально. Что это — максимум или минимум?

5.10. Внутри однородной проводящей сферы от точки A к точке B (рис. 75) по диаметру большого круга проходит проводник. Ток \mathcal{I} течет по проводнику от B к A , а затем по сфере к точке B . Определить внутри и вне сферы индукцию магнитного поля, создаваемого токами, текущими по проводнику и по сфере.

5.11. Деревянный шар радиусом R обмотан тонкой проволокой так, что все витки параллельны между собой. Витки плотно уложены и покрывают половину поверхности шара в один слой (рис. 76).

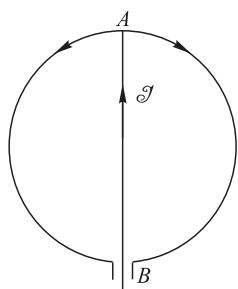


Рис. 75

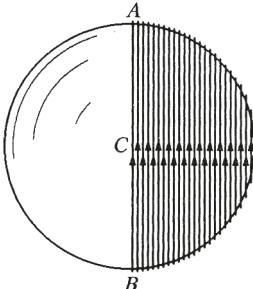


Рис. 76

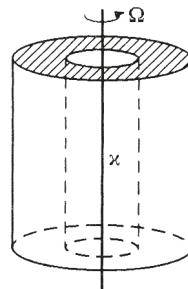


Рис. 77

По проволоке течет ток \mathcal{I} . Найти магнитное поле B в центре шара C . Общее число витков N . Витки можно считать кольцами, находящимися на равном расстоянии друг от друга по дуге большого круга, плоскость которого перпендикулярна к плоскости колец.

5.12. Длинный тонкий многовитковый соленоид с поверхностной плотностью тока i и площадью поперечного сечения $S = \pi r^2$ согнут так, что его ось образует половину окружности радиусом R . Найти величину магнитного поля B в центре этой окружности.

5.13. На немагнитную сферу радиусом R плотно намотаны витки тонкой проволоки. Линейная плотность поверхностного тока в таком «соленоиде» постоянна и равна i . Найти величину магнитного поля B в центре сферы.

5.14. По оси полого цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $\kappa = 1$ ед. СГСЭ. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\Omega = 1000$ рад/с (рис. 77). Определить магнитное поле B в материале цилиндра вдали от его торцов, пренебрегая пьезоэффектом и всеми эффектами, вызываемыми центробежной силой. Определить также магнитное поле в полости цилиндра и во внешнем пространстве в случаях, если цилиндр: 1) металлический немагнитный; 2) диэлектрический ($\epsilon = 3$).

5.15.* Длинный сплошной цилиндр из диэлектрика статически поляризован, причем вектор поляризации во всех точках цилиндра направлен радиально, а его величина пропорциональна расстоянию от

продольной оси цилиндра, т. е. $\mathbf{P} = k\mathbf{r}$ ($k = \text{const}$, \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный от оси перпендикулярно к ней). Цилиндр вращается с угловой скоростью Ω вокруг своей оси. Найти индукцию магнитного поля внутри цилиндра вдали от его концов, если радиус цилиндра равен R .

5.16. Тонкостенная длинная дюралевая трубка заряжается электрически и приводится в быстрое вращение. Какова будет конфигурация создавшегося магнитного поля? Предел скорости вращения трубы обусловлен механической прочностью дюраля $\sigma = 6 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$. Какое наибольшее отношение магнитного поля внутри трубы к электрическому полю на внешней поверхности трубы можно получить? Плотность дюраля $\rho = 2,7 \text{ г/см}^3$.

5.17* Заряженный шарик радиусом R равномерно вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью Ω . Общий заряд шарика равен q . Найти магнитное поле шарика на расстояниях r , больших по сравнению с R , если заряд равномерно распределен: 1) по поверхности шарика; 2) по объему шарика.

5.18* Квадратная непроводящая рамка со стороной l , равномерно заряженная с линейной плотностью μ , вращается с угловой скоростью Ω вокруг одной из сторон. Вычислить магнитный момент \mathfrak{M} , создаваемый вращающейся рамкой. Считать, что магнитное поле создается постоянными токами вращающихся с рамкой зарядов.

5.19. Равномерно заряженный тонкий диск радиусом R вращается с угловой скоростью Ω вокруг своего неподвижного диаметра. Полный заряд диска Q . Найти магнитный момент \mathfrak{M} вращающегося диска. Считать, что магнитное поле создается постоянными токами вращающихся с диском зарядов.

5.20* Согласно современным данным допустимое из опытов различие абсолютных величин зарядов электрона q_e и протона q_p таково, что $\left| \frac{q_p - q_e}{q_p} \right| < 10^{-21}$. Не может ли это различие объяснить существование наблюдавшегося магнитного поля Земли? Магнитное поле Земли $B_3 \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$, плотность $\rho_3 \approx 5 \text{ г/см}^3$. Считать, что для атомов, составляющих Землю, отношение относительной атомной массы A к атомному номеру Z порядка 2.

5.21. Вдоль плазменного цилиндра радиусом a с параболическим распределением проводимости $\lambda = \lambda_0(1 - r^2/a^2)$ течет постоянный ток \mathcal{I} . Найти магнитное поле $B(r)$ внутри и вне цилиндра в зависимости от расстояния r от оси цилиндра.

5.22. На тонкий латунный прут, свернутый в кольцо, намотано равномерно $N = 10^4$ витков провода. Во сколько раз магнитное поле B_o на оси прута больше, чем B_u в центре кольца?

5.23. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, сделанным из немагнитного материала и изолированным друг от друга, текут в противоположных направлениях токи с одной и той же плотностью $j = 1000 \text{ А/см}^2$. Проводники ограничены цилиндри-

ческими поверхностями. (На рис. 78 поперечные сечения проводников заштрихованы.) Найти величину и направление магнитного поля в полости Π . Ток в левом проводнике направлен к читателю, а в правом — от читателя. Расстояние между осями цилиндров $AB = d = 5$ см.

5.24. Определить магнитное поле внутри бесконечной цилиндрической полости, сделанной в бесконечном цилиндрическом проводе, вдоль которого течет постоянный ток плотности j , равномерно распределенный по сечению провода. Расстояние между осями провода и полости равно d .

5.25. Плоский конденсатор, пластины которого являются диски радиусом R , подключен к источнику постоянного напряжения V . Объем между пластинами заполнен слабо проводящим диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого $\epsilon(z) = \epsilon_0 + z^2/d^2$, а проводимость $\lambda(r) = \lambda_0 \sqrt{R/r}$, где d — расстояние между пластинами, а z отсчитывается от нижней пластины, r — расстояние от оси. Определить объемную плотность заряда $\rho(r, z)$, а также полный свободный заряд Q , сосредоточенный в диэлектрике. Чему равно магнитное поле $B(r)$? Краевые эффекты не учитывать.

5.26. В плоскости xy расположен круглый виток радиусом R_0 , по которому течет ток \mathcal{J} . Найти поток магнитной индукции через заштрихованную часть плоскости xy , если $R = 10R_0$ (рис. 79).

5.27. В точках A и B плоскости расположены две далеко отстоящие друг от друга магнитные стрелки. Одна из них жестко закреплена и ее магнитный момент составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с линией AB . Другая стрелка может свободно вращаться. Какой угол β составляет с линией AB магнитный момент по движной стрелки?

5.28. Определить индуктивность L проводника, показанного на рис. 80. Ток течет по проволоке диаметром 1 мм, расположенной по оси достаточно тонкой металлической трубы, переходит на дно трубы, к центру которой припаяна проволока, и возвращается обратно по поверхности трубы. Размеры трубы даны на рисунке.

5.29. Один и тот же ток течет по двум длинным параллельным проводам в противоположные стороны. Провода имеют круглые сечения радиусом $r = 2$ мм, а расстояние между ними $d = 2$ см. Найти индуктивность L_{ud} единицы длины этой системы, учитывая магнитное поле только вне проводов.

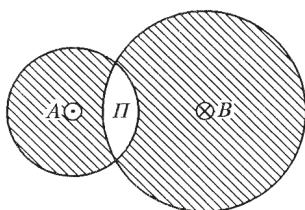


Рис. 78

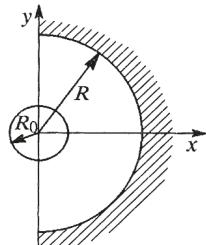


Рис. 79

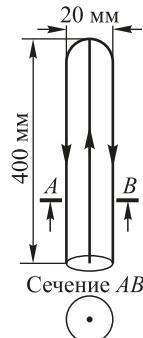


Рис. 80

5.30. На один сердечник намотаны две катушки. Индуктивности катушек в отдельности равны $L_1 = 0,5$ Гн и $L_2 = 0,7$ Гн. Чему равна взаимная индуктивность M ? Рассеяния магнитного поля нет.

5.31. Внутрь тонкого воздушного соленоида вставлена маленькая плоская катушечка с числом витков $n = 40$ и площадью витка $S = 10 \text{ см}^2$, по обмотке которой течет ток $\mathcal{I} = 1 \text{ А}$. Длина соленоида $l = 50 \text{ см}$, число витков $N = 10000$. Определить магнитный поток, который посыпает поле катушечки через обмотку соленоида.

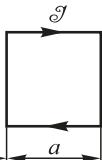


Рис. 81

Указание. Использовать теорему о равенстве взаимных индуктивностей (теорему взаимности).

5.32. Найти поток индукции магнитного поля, создаваемого квадратной рамкой со стороной a , по которой течет ток \mathcal{I} , через полуплоскость, граница которой расположена на расстоянии b от одной из сторон рамки (рис. 81).

5.33. Вычислить коэффициент взаимоиндукции M между катушкой, намотанной на тор прямоугольного сечения, и бесконечным прямолинейным проводом, идущим по оси тора. Длина стороны поперечного сечения тора, параллельной проводу, — a , перпендикулярной к нему — b , радиус внутренней поверхности тора R , число витков катушки N .

5.34. В длинном соленоиде с плотностью намотки n [витков/см] вдали от его концов расположен намагниченный стержень, имеющий

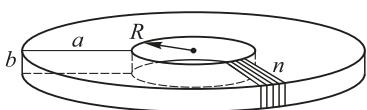


Рис. 82

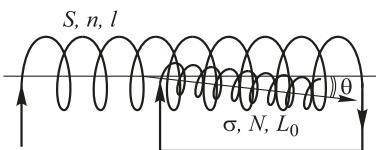


Рис. 83

магнитный момент \mathfrak{M} , ориентированный вдоль оси соленоида. Размер стержня мал по сравнению с диаметром обмотки соленоида. Найти магнитный поток, пронизывающий соленоид.

5.35. На поверхность кругового тора прямоугольного поперечного сечения с размерами $a = 17,2 \text{ см}$ и $b = 5 \text{ см}$ навита обмотка тонкой проволоки, содержащая $N = 1000$ витков. (На рис. 82 обмотка не показана.) На тор надета кольцевая катушка с числом витков $n = 100$, по обмотке которой течет ток $\mathcal{I} = 1 \text{ А}$. Внутренний радиус тора равен $R = 10 \text{ см}$. Определить магнитный поток, который посыпает магнитное поле катушки через обмотку тора.

5.36. Внутри длинной катушки-соленоида длиной l , площадью сечения S и плотностью намотки n расположена небольшая катушка с площадью витков σ и полным числом витков N (рис. 83). Обе катушки соединены последовательно. Как изменяется индуктивность L

такой системы в зависимости от угла θ между осями катушек? Индуктивность меньшей катушки равна L_0 .

5.37. Внутри длинной катушки-соленоида индуктивностью L_0 расположен соосно другой соленоид меньших размеров, все линейные размеры которого в β раз меньше линейных размеров большого соленоида (подобные катушки). Катушки соединены последовательно. Найти индуктивность такой системы. Число витков обоих соленоидов одинаково.

5.38. По бесконечному проводу радиусом R течет ток \mathcal{I} . Удельное сопротивление $\rho = \rho_0 r$. Найти зависимость индукции магнитного поля B от радиуса во всем пространстве.

5.39. Предположим, что один из комаров умеет летать вдоль по линиям магнитной индукции длинного тонкого соленоида длиной L . На какое максимальное расстояние d удалится этот комар от оси соленоида, если его наименьшее расстояние от оси в $\alpha = 10$ раз меньше радиуса соленоида?

5.40. В модели амперметра электродинамической системы в центре неподвижной плоской катушки радиусом $R = 20$ см, имеющей $N = 40$ витков, расположена небольшая катушка, которая может поворачиваться относительно оси OO' (рис. 84). Подвижная катушка имеет $n = 20$ витков с площадью $S = 5$ см 2 каждый. Она удерживается спиральной пружиной жесткостью $k = 5 \cdot 10^{-2}$ Н · м/рад так, что в положении равновесия плоскости обеих катушек перпендикулярны. Катушки соединены последовательно и по ним пропускается ток \mathcal{I} . Предполагая угол φ поворота подвижной катушки достаточно малым, определить зависимость $\varphi(\mathcal{I})$. На какой угол в градусах повернется катушка при токе $\mathcal{I} = 1$ А?

5.41. Внутри длинного соленоида с плотностью намотки $n = 5000$ витков на метр помещена рамка, состоящая из $N = 50$ витков провода площадью $S = 4$ см 2 каждый. Рамка может поворачиваться вокруг оси OO' , перпендикулярной оси соленоида, и удерживается в равновесии спиральной пружиной так, что ее плоскость параллельна оси соленоида (рис. 85). Жесткость пружины $k = 3 \cdot 10^{-5}$ Н · м/рад. Определить силу тока \mathcal{I} , протекающего по виткам рамки и соленоида при их последовательном соединении, если рамка повернулась на угол $\varphi = 60^\circ$.

5.42. Двухпроводная линия состоит из прямолинейного провода круглого сечения радиусом r_0 , расположенного параллельно ребру двугранного угла, образованного двумя взаимно перпендикулярными

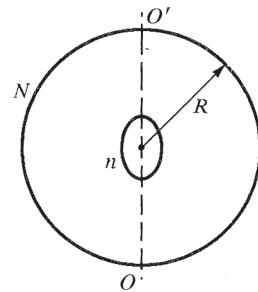


Рис. 84

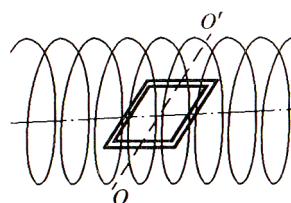


Рис. 85

проводящими плоскостями (рис. 86). Считая $r_0/a \ll 1$, найти погонную емкость такой линии.

5.43. Двухпроводная линия состоит из прямолинейного провода круглого сечения радиусом r_0 , расположенного параллельно ребру двугранного угла, образованного двумя взаимно перпендикулярными сверхпроводящими плоскостями, на одинаковых расстояниях a от его граней (рис. 86). Считая $r_0/a \ll 1$, найти погонную индуктивность такой линии.

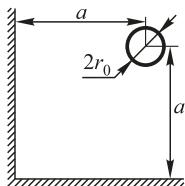


Рис. 86

5.44. Согласно первоначальной гипотезе собственный магнитный момент электрона, равный $\mathfrak{M}_B = 0,927 \cdot 10^{-20}$ эрг/Гс (эта величина называется магнетоном Бора), обусловлен его вращением. Предполагая, что электрон представляет собой однородно заряженный шарик с полным зарядом $e = -4,8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ, определить в рамках этой гипотезы минимальный радиус электрона r_e при условии, что экваториальная скорость вращения не должна превышать скорость света c .

5.45. Коаксиальный кабель состоит из тонкой внешней оболочки радиусом R и толстого внутреннего провода радиусом r . Найти индуктивность единицы длины кабеля.

§ 6. Магнитное поле в веществе. Векторы **B** и **H**.

Теорема о циркуляции в веществе.

Сверхпроводники в магнитном поле

6.1. Какой ток \mathcal{I} нужно пустить по длинному и тонкому однослоистому соленоиду с плотностью намотки n [витков/см], чтобы индукция **B** была равна индукции постоянного магнита тех же размеров? Намагниченность **I** постоянна и направлена по оси.

6.2. Намагниченность **I** прямоугольного бруска одинакова во всех точках бруска и направлена вдоль его оси (рис. 87). Найти поверхностную плотность σ «магнитных зарядов» на торцах бруска и соотношение между **B** и **H** внутри бруска. Начертить картину полей **B** и **H** внутри и вне бруска (качественно).

6.3. Бесконечная плоская пластина изготовлена из однородного намагниченного ферромагнетика, причем вектор намагниченности **I** перпендикулярен плоскости пластины. Найти поля **B** и **H** внутри и вне пластины.

6.4. Бесконечная плоская пластина изготовлена из однородного намагниченного ферромагнетика, причем вектор намагниченности **I** параллелен плоскости пластины. Найти поля **B** и **H** внутри и вне пластины.

6.5. Имеется тонкий длинный постоянный магнит длиной $2l$ и радиусом r , намагниченность которого $\mathbf{I} = \text{const}$ (рис. 88). Начертить качественную картину линий **H** и **B**. Найти индукцию **B** в точке *A*. Во сколько раз она больше, чем в точке *C*?

6.6. Длинный цилиндр изготовлен из материала с замороженной однородной намагниченностью, направленной по его оси (рис. 89). Индукция в точке A оказалась равной $B_A = 10^3$ Гс. Найти (приближенно) индукцию B_C вблизи конца короткого цилиндра, изготовленного из того же материала, если $h = 5 \cdot 10^{-2} D$.

6.7.* Стержень из магнитного материала ($\mu \gg 1$), имеющий форму цилиндра радиусом r , помещен во внешнее однородное магнитное поле B_0 , направленное вдоль его оси (рис. 90). В бесконечно длин-

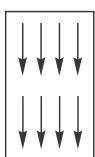


Рис. 87

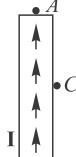


Рис. 88

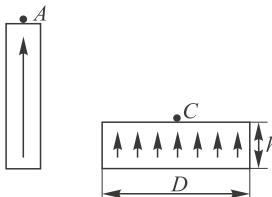


Рис. 89

ном цилиндре индукция B , как известно, была бы равна μB_0 . Оценить, при какой минимальной длине l индукция в центре цилиндра отличается от этого значения не более, чем на 1%.

6.8. Круглый диск радиусом r из магнитного материала ($\mu \gg 1$), помещен во внешнее однородное магнитное поле B_0 , направленное вдоль его оси (рис. 91). В бесконечно тонком диске индукция B ,

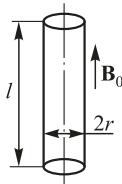


Рис. 90



Рис. 91

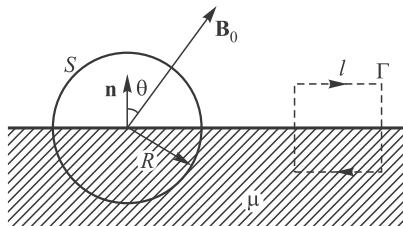


Рис. 92

как известно, была бы равна B_0 . Оценить, при какой максимальной толщине l индукция в центре диска отличается от этого значения не более, чем на 1%.

6.9. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности магнетика равна B_0 , и вектор \mathbf{B}_0 составляет угол θ с нормалью \mathbf{n} к поверхности (рис. 92). Магнитная проницаемость магнетика равна μ . Найти:

1) поток Φ_H вектора \mathbf{H} через поверхность сферы S радиусом R , центр которой лежит на поверхности магнетика;

2) циркуляцию вектора \mathbf{B} по квадратному контуру Γ со стороной l , расположенному, как показано на рисунке.

6.10. На железный сердечник, имеющий форму тора квадратного сечения (сторона $a = 4$ см) с диаметром $D = 40$ см, равномерно в

один слой намотана проволока. Число витков $N = 500$. По проволоке пускают ток $\mathcal{I} = 1 \text{ А}$. Магнитная проницаемость железа $\mu = 400$. Найти поток индукции через сечение сердечника.

6.11. Если железный тор предыдущей задачи разрезать в одном месте так, чтобы образовался воздушный зазор толщиной $d = 1 \text{ мм}$, то чему будет равен поток индукции Φ , если пренебречь рассеянием силовых линий?

6.12. По обмотке электромагнита, имеющего N витков, протекает ток \mathcal{I} . Определить индукцию магнитного поля в небольшом зазоре, если все участки сердечника имеют одинаковые сечения, а магнитная проницаемость материала равна μ . Геометрические размеры указаны на рис. 93, $d \ll l$.

6.13. Тороидальный сердечник составлен из двух половинок, сделанных из различных ферромагнитных материалов с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 (рис. 94). Общая длина сердечников, включая два небольших зазора величиной d , равна L . По обмотке сердечника, имеющей N витков, течет ток \mathcal{I} . Определить величину поля B в зазоре. Рассеянием магнитного поля в зазоре пренебречь.

6.14. Некоторый ферромагнитный материал имеет остаточную намагниченность $I_0 = 500 \text{ Гс}$, а коэрцитивную силу $H_0 = 500 \text{ Э}$, причем кривая намагниченности $I(H)$ представляет собой четверть окружности (рис. 95). Из этого материала изготовлен постоянный магнит,

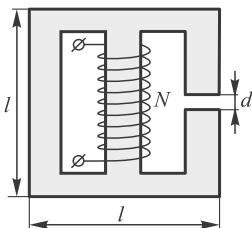


Рис. 93

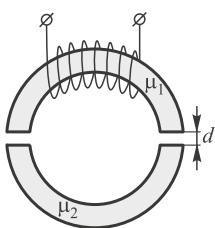


Рис. 94

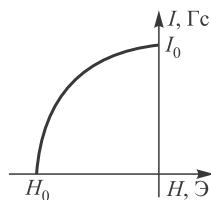


Рис. 95

представляющий собой тор квадратного сечения с поперечным разрезом. Внутренний радиус тора $r_1 = 1,5 \text{ см}$, внешний — $r_2 = 2,5 \text{ см}$, ширина разреза $d = 5 \text{ мм}$. Определить величину магнитного поля в центре зазора. Рассеянием магнитного поля пренебречь.

6.15. Тонкий сердечник тороидальной катушки длиной l сделан из ферромагнитного материала. Минимальная напряженность магнитного поля, при которой намагниченность материала достигает насыщения ($I = I_{\text{нас}}$), равна $H = H_{\text{нас}}$. Определить минимальный ток \mathcal{I}_0 , который должен течь по обмотке, чтобы намагниченность сердечника достигла насыщения. Какой толщины d должен быть сделан воздушный зазор в сердечнике, чтобы не возникало насыщения намагниченности, если по обмотке течет ток $\mathcal{I} > \mathcal{I}_0$? Число витков обмотки N .

6.16. По виткам длинной катушки с плотностью намотки n витков на сантиметр протекает постоянный ток \mathcal{I} . Если смотреть на катуш-

ку со стороны правого торца, то ток течет по виткам в направлении по часовой стрелке. В катушку соосно вставлен длинный магнитный стержень с площадью сечения σ и магнитной проницаемостью $\mu > 1$.

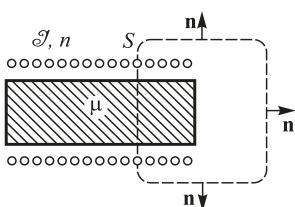


Рис. 96

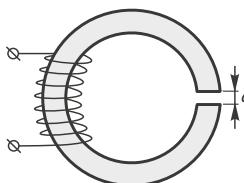


Рис. 97

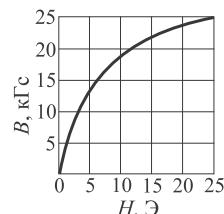


Рис. 98

На рис. 96 штриховой линией изображена некоторая замкнутая поверхность S , которая пересекает катушку вдали от ее торцов. Найти поток $\oint_S H_n dS$ вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} , пронизывающий поверхность S , и определить знак этого потока.

6.17. На железный сердечник постоянного сечения длиной $l = 1$ м с зазором $d = 1$ мм намотана катушка с числом витков $N = 1600$, по которой течет ток $\mathcal{I} = 1$ А (рис. 97). Зависимость $B(H)$ материала сердечника представлена на рис. 98. Определить магнитное поле в зазоре.

6.18. Тонкий тороидальный сердечник радиусом R выполнен из мягкого железа с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$. Сердечник разрезан по диаметру, половинки раздвинуты на расстояние L , а затем один из зазоров (A) замкнут постоянным магнитом (рис. 99). Намагченность вещества магнита I . Пренебрегая рассеянием, найти поле в свободном зазоре B .

6.19. Тороидальный сердечник с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ разрезан по диаметру и раздвинут на расстояние $l \ll r$. Радиус

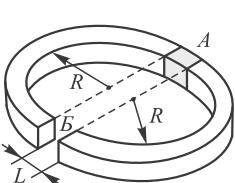


Рис. 99

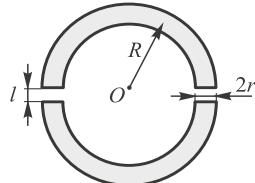


Рис. 100

тора R , радиус сердечника $r \ll R$. Один из зазоров тора замкнут постоянным магнитом (направление намагченности \mathbf{I} перпендикулярно плоскости разреза), а другой заполнен диэлектриком (рис. 100). Величина индукции магнитного поля в диэлектрике равна B_1 . Чему будет равна величина индукции магнитного поля в диэлектрике

после того, как всю систему поместят в среду с магнитной проницаемостью μ (равной магнитной проницаемости сердечника)?

6.20* Тороидальный сердечник с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ разрезан по диаметру и раздвинут на расстояние $l \ll r$. Радиус тора R , радиус сердечника r ($r \ll R$) (рис. 100). Один из зазоров тора замкнут постоянным магнитом, вектор намагниченности которого перпендикулярен плоскости разреза. Во сколько раз изменится индукция магнитного поля в центре O тора после того, как второй зазор заполнят веществом с той же магнитной проницаемостью μ ?

6.21. Требуется построить электромагнит, который создает в зазоре магнитную индукцию $B = 10^4$ Гс. Длина железного сердечника $l = 140$ см, ширина воздушного зазора $a = 1$ см, диаметр сердечника $d = 6$ см. Какое наименьшее число витков должна иметь обмотка, если используется медный провод сечением $S = 1$ мм², по которому можно пропустить ток, не превышающий $I_{\max} = 3$ А? Оценить напряжение V , которое нужно подавать на обмотку для получения максимального поля. Магнитную проницаемость железа принять равной $\mu = 10^3$. Удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

6.22. Стальной шарик намагничивается до насыщения во внешнем поле, после чего поле выключается. Оценить остаточную намагниченность I шарика, если B и H связаны уравнением $B = B_0(1 + H/H_k)$, для данного сорта стали $B_0 = 10^4$ Гс, $H_k = 4 \cdot 10^3$ А/м. Коэффициент размагничивания шара (размагничивающий фактор) $\beta = 4\pi/3$.

6.23* Шар радиусом R из сверхпроводника I рода внесен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B}_0 . Определить магнитное поле \mathbf{B} вне шара, если поле \mathbf{B}_0 еще не разрушает сверхпроводимость в шаре. Найти также поверхностную плотность сверхпроводящего тока i .

6.24. Сверхпроводящая сфера радиусом R помещена в слабое однородное внешнее магнитное поле. В двух точках, симметричных относительно центра сферы и лежащих вне сферы в экваториальной плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю, находятся два комара, умеющих летать вдоль силовых линий магнитного поля. Первоначальное расстояние между ними $2r_0 > 2R$. До какого расстояния они могут приблизиться друг к другу, если вылетают одновременно, в одну сторону и с одинаковой постоянной скоростью?

6.25. Длинная сверхпроводящая проволока радиусом R помещена в однородное магнитное поле B_0 , перпендикулярное оси проволоки. Найти распределение поверхностных токов на проволоке $i_{\text{пов}}(\theta)$, если поле B_0 еще не разрушает сверхпроводимость в проволоке. Чему равно поле B вне проволоки?

6.26. На сколько отличается от единицы магнитная постоянная μ «идеального газа», состоящего из большого числа сверхпро-

водящих шариков радиусом r ? Концентрация шариков n мала, так что $nr^3 \ll 1$.

6.27. Тонкая тороидальная катушка, намотанная на полый немагнитный каркас (рис. 101) радиусом R , имеет N витков, по которым течет ток \mathcal{I} . Каково магнитное поле B в центре тора (точка O)? Как изменится магнитное поле в точке O , если внутрь катушки поместить небольшой сверхпроводящий шарик радиусом $r_0 \ll r$?

6.28. Оценить, на сколько изменится коэффициент самоиндукции длинной однослоиной катушки, если в ее середину поместить сверхпроводящий шарик, радиус которого $r = 1 \text{ мм}$ значительно меньше радиуса витков. Длина катушки $l = 5 \text{ см}$, число витков $N = 250$.

6.29. На осевой линии длинного сверхпроводящего короткозамкнутого соленоида (плотность намотки n , ток \mathcal{I}) вдали от концов находится маленький ($r \ll R$) шарик из немагнитного материала. При охлаждении шарик переводится в сверхпроводящее состояние. Где внутри соленоида будет после этого максимальное поле? Чему оно равно?

6.30. На сколько изменится индуктивность тонкого витка радиусом $R = 1 \text{ см}$, если его расположить на расстоянии $h = 10 \text{ см}$ от бесконечной сверхпроводящей плоскости? Плоскость витка параллельна сверхпроводнику.

6.31. На сколько изменится индуктивность тонкого витка радиусом $R = 1 \text{ см}$, если его расположить на расстоянии $h = 10 \text{ см}$ от бесконечной сверхпроводящей плоскости? Плоскость витка перпендикулярна сверхпроводнику.

6.32. Кольцо из тонкой проволоки помещено в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10 \text{ Гс}$, перпендикулярное к плоскости кольца, и охлаждением переведено в сверхпроводящее состояние. Найти силу тока в кольце после выключения магнитного поля, если радиус кольца $R = 5 \text{ см}$, а радиус проволоки $r = 1 \text{ мм}$.

Указание. Индуктивность тонкого проволочного кольца (если ток течет по его поверхности) в гаусовой системе дается выражением $L = 4\pi R \left(\ln \frac{8R}{r} - 2 \right)$.

6.33. Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода параллельно этой поверхности подведен тонкий прямолинейный провод на расстоянии h от плоскости. По проводу течет постоянный ток \mathcal{I} . Найти линейную плотность сверхпроводящего тока i , текущего по поверхности сверхпроводника.

Указание. Применить метод зеркальных изображений.

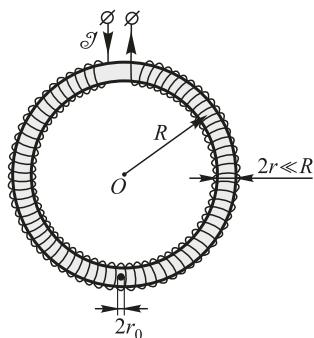


Рис. 101

6.34. Постоянный магнитик с массой $m = 4,8$ г парит в горизонтальном положении на высоте $h = 4$ см над плоской поверхностью сверхпроводника. Применяя метод зеркальных изображений, вычислить напряженность магнитного поля H у поверхности сверхпроводника под магнитиком. При расчетах магнитик считать точечным магнитным диполем.

6.35. Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода на изолирующем слое толщиной $h = 5$ мм лежит тонкое сверхпроводящее кольцо радиусом $R = 10$ см, по которому течет постоянный ток \mathcal{I} . При каком токе \mathcal{I} кольцо начнет парить над сверхпроводником, если масса кольца $m = 1$ г?

6.36. Над сверхпроводящей плоскостью расположен тонкий прямой проводник, по которому течет постоянный ток. Полагая линейную плотность проводника $\rho_l = 2$ г/м, найти, на какой высоте h над плоскостью будет свободно висеть проводник, по которому течет ток $\mathcal{I} = 20$ А.

6.37. Найти распределение поверхностных токов i для плоской поверхности сверхпроводника, если на расстоянии $h = 1$ см от нее расположен прямолинейный достаточно длинный параллельный плоскости сверхпроводника тонкий провод, по которому течет ток $\mathcal{I} = 10$ А. Найти также силу f , действующую на единицу длины провода.

6.38. В момент $t = 0$ сверхпроводящий соленоид индуктивностью $L = 0,5$ Гн подключается к переменной ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ ($\mathcal{E}_0 = 20$ В, $\omega/(2\pi) = 50$ Гц). Внутри соленоида находится сердечник с магнитной проницаемостью $\mu = 100$. Найти среднюю за период колебаний ЭДС намагниченность I сердечника, если плотность намотки соленоида $n = 10$ витков/см. Внутренним сопротивлением ЭДС и явлением гистерезиса в сердечнике пренебречь.

6.39. Определить коэффициент самоиндукции L коаксиала, образованного соосно расположенными железным стержнем ($\mu = 1000$) и медной ($\mu = 1$) трубкой, замкнутыми на одном из концов проводящим диском. Длина стержня и трубы $\Lambda = 10$ см, диаметр стержня $2r_1 = 2$ мм, внутренний диаметр трубы $2r_2 = 9$ мм, наружный — $2r_3 = 10$ мм. Считать, что в стержне и трубке токи равномерно распределяются по сечениям.

6.40. Определить коэффициент самоиндукции L коаксиала, образованного соосно расположенными проводящими стержнем и трубкой, замкнутыми на одном из концов проводящим диском. Длина стержня и трубы $\Lambda = 10$ см, диаметр стержня $2r_1 = 8$ мм, внутренний диаметр трубы $2r_2 = 9$ мм, наружный — $2r_3 = 10$ мм. Пространство между стержнем и трубкой заполнено диэлектрическим ферромагнетиком с магнитной проницаемостью $\mu = 20$. Считать, что в стержне и трубке токи равномерно распределяются по сечениям.

6.41. Железный цилиндр радиусом $a = 1$ см и длиной $L = 10$ см помещен внутрь соленоида, по которому пропускается переменный

ток частотой 50 Гц. Ток перемагничивает цилиндр от $B_{\text{нас}}$ до $-B_{\text{нас}}$ и от $-B_{\text{нас}}$ до $B_{\text{нас}}$. Оси соленоида и железного цилиндра параллельны. Подсчитать тепло гистерезиса Q , выделяющееся в цилиндре за время $t = 1$ мин. Петлю гистерезиса железного цилиндра можно идеализировать кривой прямоугольной формы, изображенной на рис. 102.

6.42. По замкнутой обмотке длинного соленоида радиусом намотки $R = 1$ см течет ток $\mathcal{I}_0 = 1$ А. Внутри соленоида помещен магнетик с магнитной проницаемостью $\mu = 50$. По оси магнетика проложен детонационный шнур, радиус которого мал по сравнению с радиусом

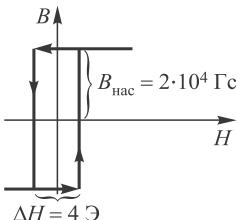


Рис. 102

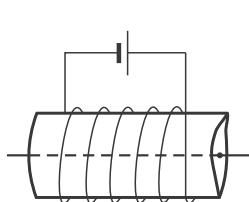


Рис. 103

магнетика R (рис. 103). При детонации шнура по магнетику распространяется ударная (не разрушающая магнетик) волна со скоростью $v = 3$ км/с. На цилиндрическом фронте волны происходит фазовый переход первого рода, при котором магнитная проницаемость падает до 1 и сохраняется такой во всей области за фронтом волны. Как во времени изменяется ток $\mathcal{I}(t)$ в обмотке соленоида? Какова величина максимального тока и в какой момент времени t_{\max} это значение достигается?

6.43. Сверхпроводящий шарик помещают во внешнее однородное магнитное поле. При этом поле в точке A оказалось вдвое больше,

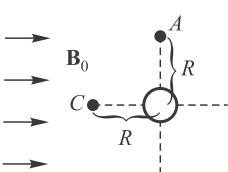


Рис. 104

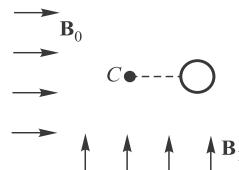


Рис. 105

чем в точке C , находящейся на том же расстоянии R от центра шарика (рис. 104). Каков радиус a шарика?

6.44. Сверхпроводящий шарик радиусом a помещен во внешнее поле \mathbf{B}_0 (рис. 105). При включении поля $B_1 = 2B_0$, направленного перпендикулярно полю \mathbf{B}_0 , поле в точке C возросло в $13\sqrt{2}/7$ раз. Каково расстояние r от точки C до центра шарика?

6.45. Притягиваются или отталкиваются два одинаковых сверхпроводящих шарика радиусом $a = 1$ см, расположенных по вертикали

в электрическом и магнитном полях Земли на расстоянии $x = 10$ см друг от друга? Считать, что поле $E_3 = 1,5$ В/см и направлено вертикально, а поле $B_3 = 0,5$ Гс и направлено горизонтально. Как должны соотноситься поля E_3 и B_3 , чтобы сила взаимодействия шариков была равна нулю?

6.46. Два маленьких одинаковых сверхпроводящих шарика помещены внутри длинного соленоида (с плотностью намотки $n = 10$ витков/см), как показано на рис. 106. Система находится во внешнем однородном электрическом поле $E = 10$ кВ/см, ориентированном вдоль

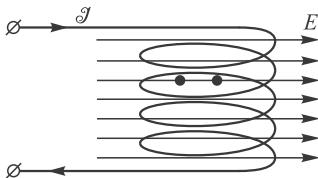


Рис. 106

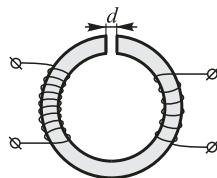


Рис. 107

оси, проходящей через шарики, перпендикулярно оси соленоида. Какой ток \mathcal{I} надо пропустить по обмотке соленоида, чтобы шарики не взаимодействовали друг с другом? Расстояние между шариками много больше их размеров.

6.47. На оси круглого витка площадью S с током \mathcal{I} на большом расстоянии r от него ($r \gg \sqrt{S}$) расположен сверхпроводящий

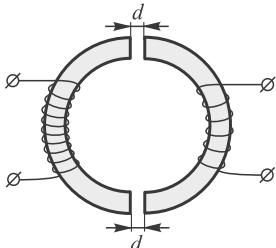


Рис. 108

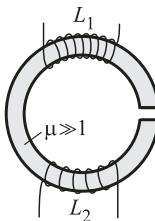


Рис. 109

шарик радиусом $R \ll r$. Определить силу, действующую на шарик, и ее знак.

6.48. На тонкий тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью μ намотаны две катушки (рис. 107). Длина сердечника равна l . Какой ширины зазор необходимо вырезать в сердечнике, чтобы коэффициент взаимной индукции катушек уменьшился вдвое? Рассеянием магнитного потока в зазоре пренебречь.

6.49. На тонкий тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью (длина сердечника $l = 50$ см) намотаны две катушки (рис. 108). Если сердечник разрезать на две равные половины и затем раздвинуть их на малое расстояние $d = 0,25$ мм, то коэф-

фициент взаимной индукции катушек уменьшится в 10 раз. Какова магнитная проницаемость сердечника μ ?

6.50. На торOIDальный сердечник ($\mu \gg 1$) с узким зазором намотаны две катушки, как показано на рис. 109. Точные измерения самоиндукции катушек дали значения: $L_1 = 0,152$ Гн, $L_2 = 0,385$ Гн. Катушки включили последовательно, при этом индуктивность оказалась равной $L = 0,945$ Гн. Оценить из этих данных, какая доля магнитного потока рассеивается из сердечника.

6.51. Широкая тонкая пластина из магнитного материала вносится в однородное магнитное поле \mathbf{B}_0 (рис. 110). Магнитная прони-

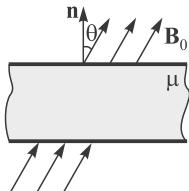


Рис. 110

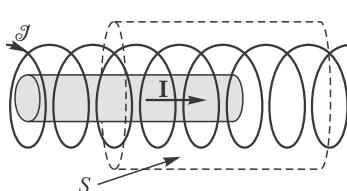


Рис. 111

цаемость пластины $\mu > 1$. Вектор \mathbf{B}_0 и нормаль \mathbf{n} к поверхности пластины составляют угол θ .

1) Определить модуль и направление поверхностной плотности i_m молекулярных токов намагничивания, текущих по верхней поверхности пластины.

2) Найти модуль и направление вектора намагничивания \mathbf{I} внутри пластины.

6.52. В длинную катушку с плотностью намотки n вставлен постоянный магнит — стержень с однородной намагниченностью \mathbf{I} и перечным сечением σ (рис. 111). В катушке течет постоянный ток \mathcal{J} . Найти поток вектора \mathbf{H} через замкнутую поверхность цилиндра S , указанную на рисунке штриховой линией. Левое основание цилиндра пересекается стержнем и катушкой вдали от торцов.

6.53. Имеется однородно намагниченный шар, вектор намагниченности которого равен \mathbf{I} (рис. 112). Найти потоки напряженности \mathbf{H} и индукции \mathbf{B} магнитного поля через бесконечную плоскость, проходящую через центр шара. Вектор \mathbf{n} нормали к плоскости составляет угол α с вектором \mathbf{I} .

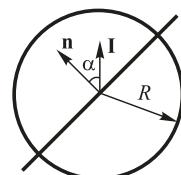


Рис. 112

6.54. Известен эксперимент по левитации при комнатной температуре тонкого карандашного грифеля у полюса постоянного магнита в магнитном поле $B \approx 1$ Тл. Этот эксперимент можно было бы спутать с демонстрацией высокотемпературной сверхпроводимости (аналог «гроба Магомеда»). Оценить вертикальную составляющую градиента поля в области левитации грифеля, если магнитная восприимчивость графита $\chi = -6,75 \cdot 10^{-6}$ ед. СГСЭ, а плотность графита $\rho = 2,25$ г/см³.

§ 7. Электромагнитная индукция. Энергия и силы в магнитном поле. Сохранение магнитного потока в сверхпроводящих контурах

7.1. Медный диск радиусом $a = 10$ см вращается в однородном магнитном поле, делая 100 оборотов в секунду. Индукция магнитного поля направлена перпендикулярно к плоскости диска и равна $B = 10^4$ Гс. Две щетки, одна на оси диска, другая на окружности, соединяют диск с внешней цепью, в которую включены реостат с сопротивлением $R = 10$ Ом и амперметр, сопротивлением которого можно пренебречь. Что показывает амперметр?

7.2. Что будет показывать амперметр в условиях предыдущей задачи, если диск заменить колесом с двумя спицами того же радиуса, что и диск, как показано на рис. 113? Электрическим сопротивлением материала колеса пренебречь.

7.3. По длинному прямому проводу течет синусоидальный ток \mathcal{I} высокой частоты $v = 10^8$ Гц. К проводу подносится квадратный проволочный контур со стороной $a = 17,2$ см, в который включена лам-

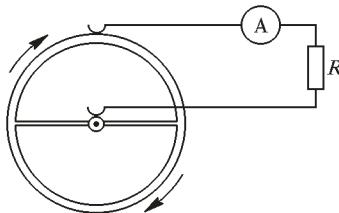


Рис. 113

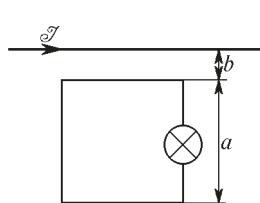


Рис. 114

почка (рис. 114). Когда контур поднесен на расстояние $b = 10$ см, лампочка горит нормальным накалом. Определить эффективное (действующее) значение силы тока в проводе I , если для нормального накала лампочки требуется напряжение $V = 6$ В. Сопротивлением контура пренебречь.

7.4. В соленоиде, имеющем форму тонкого тора, ток линейно возрастает со временем: $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 t / \tau$, $\tau = 10^{-2}$ с, $\mathcal{I}_0 = 10$ А. Вокруг тора (рис. 115) имеется один незамкнутый виток. Один из входов милливольтметра жестко присоединен к концу 3, а другой перемещается, проходя последовательно положения 1-2-3-1. Что покажет при этом милливольтметр? Площадь витков соленоида $S = 10$ см², плотность намотки витков $n = 100$ см⁻¹.

ся, проходя последовательно положения 1-2-3-1. Что покажет при этом милливольтметр? Площадь витков соленоида $S = 10$ см², плотность намотки витков $n = 100$ см⁻¹.

7.5. В длинном воздушном соленоиде с радиусом намотки $r_0 = 1$ см и плотностью витков $n = 10 \text{ см}^{-1}$ течет ток, нарастающий с постоянной скоростью $d\mathcal{I}/dt = 100 \text{ А/с}$. Какова будет форма силовых линий соответствующего ему вихревого электрического поля \mathbf{E} ? Найти величину E на расстоянии $2r_0$ от оси соленоида. Как изменятся поле E и индукция D , если соленоид погрузить в однородный немагнитный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$?

7.6. На железный цилиндрический сердечник, через который проходит однородный магнитный поток $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$, надет тор из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ (рис. 116). В торе имеется бесконечно узкий воздушный зазор, образованный двумя бесконечно близкими разрезами вдоль меридиональных плоскостей. Найти напряженность электрического поля E в зазоре в зависимости от расстояния r до оси цилиндра.

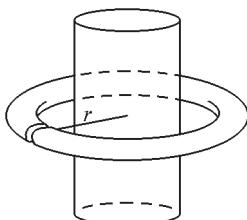


Рис. 116

7.7. Два диска с радиусами R_1 и R_2 врачаются с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной их плоскости (рис. 117). Центры дисков присоединены к об-

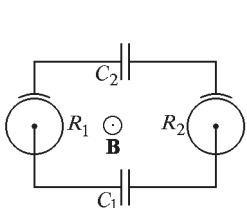


Рис. 117

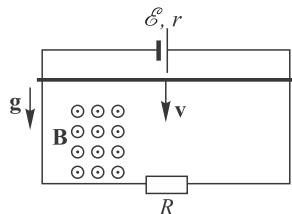


Рис. 118

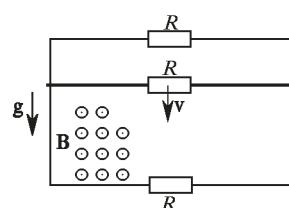


Рис. 119

кладкам конденсатора C_1 , ободы — через скользящие контакты к обкладкам конденсатора C_2 . Найти разности потенциалов на конденсаторах.

7.8. По двум вертикальным рейкам, соединенным внизу сопротивлением $R = 2 \Omega$, а вверху батареей с ЭДС $\mathcal{E} = 1 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 2 \Omega$, без трения скользит проводник, длина которого $l = 10 \text{ см}$, масса $m = 10 \text{ г}$ (рис. 118). Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 10^4 \text{ Гс}$, перпендикулярна плоскости рисунка и направлена к читателю. Найти установившуюся скорость проводника в поле силы тяжести, пренебрегая сопротивлением реек и проводника. При каком соотношении между параметрами задачи установившаяся скорость направлена вниз и при каком вверх?

7.9. По двум вертикальным рейкам, соединенным вверху и внизу сопротивлениями $R = 0,01 \Omega$, может скользить без трения проводник, длина которого $l = 100 \text{ см}$, масса $m = 100 \text{ г}$, сопротивление

$R = 0,01$ Ом (рис. 119). Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 1000$ Гс перпендикулярна плоскости рисунка. Найти максимальную скорость проводника в поле силы тяжести, если пренебречь сопротивлением реек.

7.10. Простейшая динамо-машина состоит из прямоугольной рамки S с числом витков n и внутренним сопротивлением r , вращающейся со скоростью ω в однородном магнитном поле B . Определить средний момент M , приложенный к рамке, и среднюю мощность N , идущую на вращение динамо-машины. Машина работает на нагрузку R .

7.11. В длинном тонком соленоиде с плотностью витков n находится небольшая плоская катушка (сечение катушки — S , число витков — N), по которой течет постоянный ток \mathcal{I}_k . Угол α между осью катушки и осью соленоида меняется по закону $\alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega t$, где α_0 — малая величина. Определить амплитуду и частоту переменного напряжения на концах соленоида.

7.12* Внутри тонкого длинного соленоида, ось которого горизонтальна, находится небольшая магнитная стрелка, уравновешенная на острие, вокруг оси которого может свободно вращаться. Вдоль оси соленоида приложено внешнее однородное магнитное поле с индукцией B_0 . В начальный момент стрелка горизонтальна, отклонена на малый угол α_0 от направления B_0 и покойится. Затем стрелку отпускают. Определить амплитуду и частоту переменной ЭДС, возникающей на концах обмотки соленоида. Плотность намотки соленоида

n [витков/см], момент инерции стрелки относительно оси вращения — J , ее магнитный момент — \mathfrak{M} .

7.13. Магнитный диполь с моментом \mathfrak{M} вращается с частотой ω вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной магнитному моменту (рис. 120). Найти ток в плоской круглой

неподвижной рамке радиусом a с сопротивлением R , находящейся на расстоянии $l \gg a$ от диполя. Нормаль \mathbf{n} к плоскости рамки перпендикулярна оси вращения диполя. Самоиндукцией рамки пренебречь.

7.14. К небольшой катушке с числом витков N и площадью витка S подносят на расстояние a лист из хорошо проводящего металла. По катушке течет переменный ток I (действующее значение) частотой ω . Найти дополнительную ЭДС \mathcal{E} , возникшую в катушке после приближения листа. Лист расположен перпендикулярно оси катушки.

7.15. Два соосных круговых витка радиусами R и $r \ll R$ размещены на расстоянии R друг от друга. По малому витку пропускается ток $i = i_0 \cos \omega t$. Найти ток $\mathcal{I}(t)$ в большом витке, сопротивление которого равно R_0 .

7.16. В центре кругового витка радиусом R , подключенного к вольтметру переменного тока, имеется небольшой тонкий цилиндрический магнитик, остаточная индукция которого равна B . Длина

Рис. 120



и радиус цилиндра равны l и r соответственно. Магнитик приводят во вращение с угловой скоростью ω вокруг оси, лежащей в плоскости витка и перпендикулярной оси цилиндра. Определить показание вольтметра. Считать $r \ll l \ll R$.

7.17. Посредине между двумя параллельными тонкими длинными проводниками расположен тонкий цилиндрический магнитик. Ось магнитика перпендикулярна плоскости проводников. Проводники с одной стороны замкнуты, а с другой — подключены к милливеберметру. Расстояние между проводниками $2l$, масса магнитика m , плотность ρ , остаточная индукция B_0 . Магнитик быстро нагревают выше температуры Кюри. На сколько отклонится стрелка прибора?

7.18. На оси кругового витка радиусом $R = 1$ см на расстоянии $L = 10$ см от него в некоторый момент времени оказывается «точечный» магнитный диполь, параллельный оси витка и движущийся вдоль нее со скоростью $v = 1$ км/с. Оценить силу тока \mathcal{I} в витке, если его сопротивление $r = 0,001$ Ом, а величина магнитного момента диполя $\mathfrak{M} = 0,1$ эрг/Гс.

7.19. Намагниченная пуля пролетает вдоль оси тонкой (плоской) катушки, соединенной с баллистическим гальванометром через идеальный выпрямляющий элемент. Пуля намагничена вдоль своей оси, ее размеры малы по сравнению с диаметром катушки D . Определить магнитный момент пули \mathfrak{M} , если известно, что гальванометр отклонился после пролета пули на угол φ . Известны баллистическая постоянная гальванометра b [рад/Кл], число витков катушки n и сопротивление цепи R .

7.20. Сверхпроводящий шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси. Индукция поля в центре соленоида $B = 1000$ Гс. Какова должна быть начальная скорость v шарика, чтобы он смог пролететь через соленоид насеквоздь? Диаметр соленоида много больше диаметра шарика. Плотность материала шарика $\rho = 8$ г/см³.

7.21. Металлический сверхпроводящий шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси. Поле соленоида $B_0 = 10^3$ Гс. Какой должна быть начальная скорость шарика v_0 , чтобы он смог влететь в соленоид? Радиус шарика $R = 2$ см, масса $m = 1$ г.

7.22. Прямолинейный магнит NS расположен на оси круглого кольца радиусом a , состоящего из n витков проволоки, концы которой соединены с баллистическим гальванометром (рис. 121). Расстояние между центрами кольца и магнита равно h . Размеры магнита малы по сравнению с h и радиусом кольца, его ось перпендикулярна к плоскости кольца. Определить магнитный момент \mathfrak{M} магнита, если при его удалении от кольца баллистический гальванометр отклонился на угол φ . Баллистическая постоянная равна b [рад/Кл], сопротивление цепи (включая сопротивление гальванометра) R .

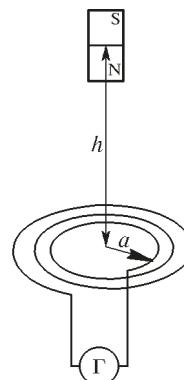


Рис. 121

7.23. В ферромагнитном шаре пропилена узкая глубокая щель. Шар намагнчен до насыщения перпендикулярно плоскости щели, и затем внешнее поле выключено. Кривая размагничивания материала шара $I(H)$ представляет собой четверть окружности (рис. 122). Из щели достаточно далеко выдергивается плоская рамка площадью $S = 10 \text{ см}^2$ с количеством витков $N = 1000$. Рамка подключена к гальванометру. Найти количество электричества Q , протекшего через гальванометр. Полное сопротивление цепи $R = 100 \Omega$, $H_0 = -500 \text{ Гц}$, $I_0 = 500 \text{ Гц}$. Размагничивающий фактор шара равен $4\pi/3$.

7.24. В торцевых плоскостях на оси длинного соленоида помещают одинаковые магнитики объемом $V = 1 \text{ см}^3$ каждый и намагнченностьюю $4\pi I = 12,5 \text{ кГс}$, повернутые друг к другу разноименными полюсами. Магнитики отпускают, и они затем слипаются в центре соленоида, замкнутого на сопротивление $R = 1 \Omega$. Какой заряд Q протечет при этом в цепи соленоида, витки которого намотаны с плотностью $n = 10^3 \text{ см}^{-1}$?

7.25. Внутри тороидальной короткозамкнутой катушки из сверхпроводящей проволоки с плотностью намотки n [витков/см] имеется сверхпроводящее кольцо (рис. 123), сечение которого в два раза

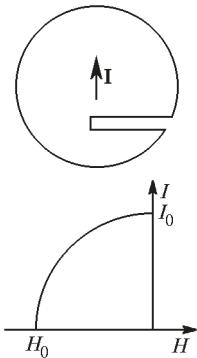


Рис. 122



Рис. 123

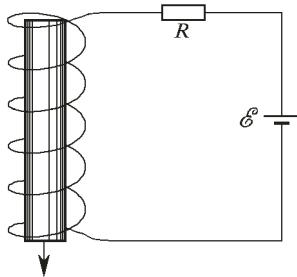


Рис. 124

меньше сечения витков катушки. В катушке течет ток \mathcal{I}_0 . Нагреванием сверхпроводник переводится в нормальное состояние. Определить джоулево тепло, которое выделится в катушке, если:

- 1) в нормальное состояние переводится только катушка;
- 2) в нормальное состояние переходит сначала внутреннее кольцо (из немагнитного материала), а затем катушка.

Объем тороидальной катушки V . Считать, что радиус тора значительно превышает радиус витков.

7.26. Соленоид длиной l с числом витков N и сечением S подключен к батарее с ЭДС \mathcal{E} через сопротивление R (рис. 124). В соленоид вставлен сердечник из сверхпроводника такой же длины, но с площадью сечения $S/2$. Сердечник быстро вынимают из соленоида. Определить ток $\mathcal{I}(t)$ в цепи.

7.27. Сверхпроводящее плоское кольцо, по которому течет ток $\mathcal{I} = 1 \text{ A}$, переносится из удаленной области в область однородного магнитного поля $B_0 = 100 \text{ Гс}$. Площадь кольца $S = 10 \text{ см}^2$, нормаль к плоскости кольца составляет с направлением магнитного поля угол $\theta_0 = 60^\circ$. Чему равен коэффициент самоиндукции кольца, если в результате переноса ток в кольце обратился в ноль?

7.28. В экваториальной плоскости шара радиусом a находится тонкое металлическое кольцо радиусом $\rho > a$ с электрическим сопротивлением R . Внешнее однородное магнитное поле B_0 перпендикулярно плоскости кольца. Охлаждением шар переводится в сверхпроводящее состояние. Найти заряд, протекший по кольцу. Индуктивностью кольца пренебречь.

7.29. Во сколько раз изменится ток в круговой петле из сверхпроводника, если ее поместить внутрь длинного сверхпроводящего соленоида, замкнутого накоротко? Диаметры петли и соленоида считать равными, а их оси — параллельными. В отсутствие круговой петли ток в соленоиде был равен нулю. Индуктивность петли L , соленоида — L_0 , число витков соленоида — N .

7.30. В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита возбужден ток \mathcal{I}_0 . В стальном магнитопроводе длиной L с магнитной проницаемостью μ имеется небольшой зазор l , так что рассеянием магнитного поля можно пренебречь (рис. 125). Как изменится ток в обмотке, если путем деформации сердечника зазор уменьшится в два раза?

7.31. В опытах А. Д. Сахарова сверхсильные магнитные поля получались взрывным сжатием отрезка проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создано начальное магнитное поле с индукцией B_0 . Определить индукцию поля B в трубе в момент максимального сжатия, если $B_0 = 5 \cdot 10^4 \text{ Гс}$, начальный внутренний радиус трубы $R = 5 \text{ см}$, радиус в момент максимального сжатия $r = 0,5 \text{ см}$. Оболочку, окружающую магнитное поле, считать идеально проводящей. Определить также давление P , необходимое для получения такого сжатия.

7.32. В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита возбужден постоянный ток \mathcal{I} (рис. 126). В магнитопроводе из мягкого железа с магнитной проницаемостью μ имеется зазор толщиной l , достаточно малый, что рассеянием магнитного поля в зазоре можно пренебречь. Длина магнитопровода (вместе с зазором) равна L . Чему будет равен ток \mathcal{I}_0 в обмотке электромагнита, если в зазор вставить пластину толщиной l из того же железа?

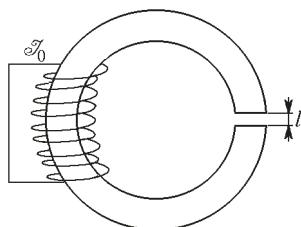


Рис. 125

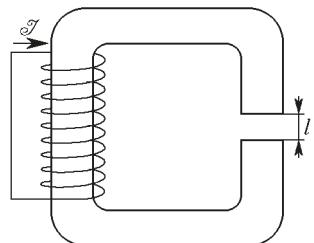


Рис. 126

7.33. По длинному идеально проводящему соленоиду длиной l_0 течет постоянный ток \mathcal{I}_0 . Как будет меняться ток во времени, если растягивать и сжимать соленоид таким образом, чтобы его длина менялась по закону $l = l_0 + a \cos \omega t$?

7.34.* По длинному соленоиду, имеющему n [витков/см], течет ток \mathcal{I} . Найти давление P , действующее на боковую поверхность соленоида. Магнитная проницаемость среды $\mu = 1$.

7.35. Во внешнем тонкостенном цилиндрическом проводнике коаксиального кабеля (рис. 127) вдоль образующей сделана щель шириной $b \ll R$ (R — радиус внешнего проводника). Найти силу, действующую на центральный проводник при пропускании по этому кабелю тока \mathcal{I} . Радиус центрального проводника $r \ll R$. (Ток \mathcal{I} течет по центральному проводнику в одну сторону, а по внешнему проводнику — в другую.)

7.36. Два параллельных цилиндрических провода из сверхпроводника находятся в однородном постоянном магнитном поле с индукцией B , направленной вдоль проводов. Найти магнитное давление P_m на боковую поверхность проводников, а также силу f , действующую на единицу длины каждого провода.

7.37. Магнит в виде круглого длинного стального цилиндра установлен вертикально. Для расчета принимаем, что на его полюсе N сосредоточена магнитная масса m . На полюс опирается проволочная скоба $ABOC$ со стержнем ON (рис. 128), имеющая форму

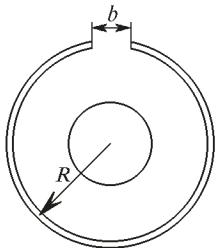


Рис. 127

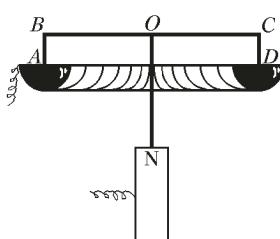


Рис. 128

буквы Т; концы скобы A и D погружены в ртуть, налитую в горизонтальное кольцевое корыто. Точка O является серединой BC ($BO = OC = l$). Части $AB = CD$ малы по сравнению с l . К магнету и ртути в корыте подводится постоянное напряжение, вследствие чего по стержню ON идет ток $2\mathcal{I}$ и проволочный контур вращается вокруг ON . Расстояние ON проволоки BC от полюса N равно l . Определить:

- 1) момент пары сил M , вращающих контур;
- 2) точку приложения силы, действующей на плечо OC .

Указание. Магнитная масса намагниченного стержня длиной L (магнитного диполя) есть отношение магнитного момента стержня \mathfrak{M} к его длине, т. е. $m = \mathfrak{M}/L$. При этом (в данной модели) предполагается, что L — это расстояние между точечными магнитными массами m (аналогия с электрическим диполем).

7.38. Вдоль оси цилиндрического жидкого проводника радиусом a равномерно по сечению течет ток \mathcal{I} . Найти давление $P(r)$, обусловленное взаимодействием тока с созданным им магнитным полем.

7.39. На рис. 129 изображена схема электромагнитного насоса для перекачки расплавленного металла. Участок трубы с расплавленным металлом помещается в магнитное поле, перпендикулярное оси трубы; через этот же участок в перпендикулярном (к магнитному полю и оси трубы) направлении пропускается ток. Найти избыточное давление ΔP , создаваемое насосом. Провести числовой расчет для трубы квадратного сечения со стороной $a = 1$ см при $\mathcal{I} = 100$ А, $B = 1000$ Гс.

7.40*: Для осуществления теплосъема с ядерных реакторов в качестве теплоносителя применяют расплавленные металлы. Перекачка металлов по трубам производится с помощью электромагнитных насосов: участок трубы с расплавленным металлом помещается в поперечное магнитное поле, т. е. поле, перпендикулярное оси трубы; через тот же участок трубы перпендикулярно ее оси и магнитному полю проpusкается поперечный электрический ток. При этом возникает сила, приводящая жидкость в движение. Оценить ток, необходимый для перекачки ртути по трубе диаметром $D = 20$ мм и длиной $L = 10$ м со скоростью $V = 1$ л/с. Вязкость ртути $\eta = 1,5 \cdot 10^{-2}$ дин · с/см², магнитное поле $B = 1000$ Гс.

7.41. В прямоугольную кювету (рис. 130), передняя и задняя стеклянной которой металлические, а прочие стеклянны диэлектрические, налит электролит с удельной проводимостью $\lambda = 0,2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. К металлическим стенкам приложено напряжение $V = 30$ В, и вся кювета помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 100$ Гс, направленной вертикально. Размеры кюветы: $L = 20$ см, $a = 2$ см, плотность электролита $\rho = 1$ г/см³. Определить разность уровней жидкости Δh около правой и левой стенок кюветы.

7.42. В высокий цилиндрический сосуд радиусом R налит электролит. Внутри сосуда параллельно его оси расположен цилиндрический металлический стержень, поверхность которого покрыта изолирующей краской. Радиус стержня равен r . Расстояние между осями стержня и сосуда равно d . В электролите параллельно оси течет ток \mathcal{I} , возвращающийся обратно по стержню. Считая плотность тока в электролите постоянной, найти силу, с которой магнитное поле, созданное рассматриваемыми токами, действует на единицу длины стержня. Куда эта сила направлена?

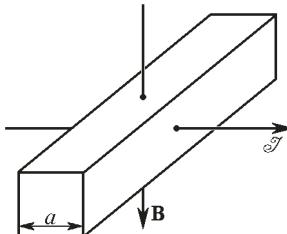


Рис. 129

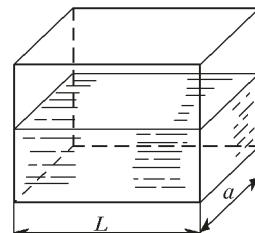


Рис. 130

7.43. Два параллельных достаточно длинных провода находятся на расстоянии 20 см друг от друга. В них поддерживаются токи силой 20 А каждый, направленные в противоположные стороны.

1) Какую работу на единицу длины проводов совершают магнитное поле при удалении проводов на расстояние 40 см?

2) Как изменится при этом магнитная энергия единицы длины системы двух проводов?

7.44. Вблизи длинного прямого провода, по которому течет ток $\mathcal{I}_1 = 10 \text{ A}$, расположена квадратная рамка с током $\mathcal{I}_2 = 1 \text{ A}$ (рис. 131). Рамка и провод лежат в одной плоскости, стороны рамки $a = 6,8 \text{ см}$, расстояние от рамки до провода $b = 4 \text{ см}$. Какую работу нужно совершить, чтобы прямой провод передвинуть в положение, указанное на рисунке штриховой линией?

7.45. При производстве полиэтиленовой пленки широкая тонкая полоса протягивается по роликам со скоростью v (см. рис. 73 на с. 40). В процессе обработки поверхность пленки приобретает равномерно распределенный заряд σ . Над пленкой на расстоянии d , малом по сравнению с шириной пленки, расположен прямой провод,

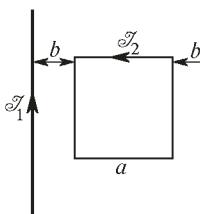


Рис. 131

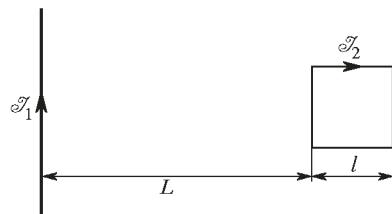


Рис. 132

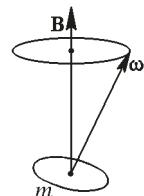


Рис. 133

по которому течет ток \mathcal{I} . Направление тока совпадает с направлением движения пленки. Найти силу, действующую на единицу длины пленки. Оценить величину этой силы при $v = 1 \text{ м/с}$, $\sigma = 10^{-7} \text{ Кл/м}^2$, $\mathcal{I} = 10 \text{ A}$.

7.46. На расстоянии $L = 10 \text{ см}$ от прямого провода, по которому течет ток $\mathcal{I}_1 = 10 \text{ A}$, расположена квадратная рамка со стороной $l = 1 \text{ см}$ таким образом, что две ее стороны параллельны проводу и вся система лежит в одной плоскости (рис. 132). По рамке течет ток $\mathcal{I}_2 = 1 \text{ A}$. Найти силу взаимодействия между проводом и рамкой.

7.47. Однородно заряженное непроводящее тонкое кольцо (масса m , заряд q) быстро вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси во внешнем однородном магнитном поле \mathbf{B} (рис. 133). Найти угловую скорость прецессии Ω .

7.48. Постоянный магнит, выполненный в виде стержня, помещен в слабое однородное магнитное поле (рис. 134). Чтобы повернуть его на 180° из положения по полю в положение против поля, нужно затратить работу A . Стержень приводят в быстрое вращение вокруг своей оси с частотой $\omega = 80 \text{ с}^{-1}$, сообщая стержню энергию вращения $E_{\text{вр}} = 10 \text{ J}$. При этом стержень начинает прецессировать с частотой

той Ω . Пренебрегая отклонением вектора момента импульса стержня от Ω , оценить частоту его прецессии.

7.49. Над большим горизонтальным латунным листом помещена магнитная стрелка с магнитным моментом \mathfrak{M} . Стрелка укреплена на вертикальной оси и связана со спиральной пружиной, модуль кручения которой f . Как изменится положение равновесия стрелки, если по листу потечет поверхностный ток плотностью i ? Направление тока совпадает с начальным равновесным положением стрелки. Рассмотреть случай малых углов закручивания.

7.50. Компас располагают под проводом, по которому течет постоянный ток, на расстоянии $R = 10$ см от оси провода. Найти ток, при котором стрелка поднимется над своим шпеньком. Остаточная индукция стали стрелки равна индукции насыщения $B_0 = 20$ кГс. Плотность стали $\rho = 7,8$ г/см³.

7.51. Искусственный спутник Земли массой $m = 1000$ кг выполнен в виде тонкостенного шара. Для сообщения ему угловой скорости можно использовать магнитное поле Земли, индукция которого $B = 0,5$ Гс. Найти угловую скорость ω , которую приобретает спутник при быстрой разрядке аккумуляторов, имеющих заряд $Q = 5$ А·час, через обмотку $N = 20$ витков, уложенную на поверхности спутника вдоль окружности большого круга. Считать магнитное поле Земли параллельным плоскости обмотки.

7.52. Для исключения потерь энергии на джоулево тепло в линиях передачи постоянного тока предложено использовать коаксиальный кабель, проводящие поверхности которого для внутренней жилы и наружной оболочки выполнены из сверхпроводника. Максимально допустимая индукция магнитного поля на поверхности сверхпроводника $B = 500$ Гс, максимально допустимая напряженность электрического поля в изолирующей прослойке кабеля $E = 30$ кВ/см. При каком соотношении диаметров d/D жилы и оболочки можно передать наибольшую мощность N ? Найти величину N , приняв диаметр наружной оболочки $D = 20$ см.

7.53. По двум широким и длинным металлическим плоским лентам 1 и 2, поставленным параллельно друг другу, текут антипараллельные токи, линейная плотность которых $i = d\mathcal{I}/dl = \text{const}$ (рис. 135). Пространство между лентами плотно без зазоров заполнено двумя плоскими слоями магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Определить давление на каждую из металлических лент, а также на границу раздела магнетиков.

7.54. Определить индуктивность на единицу длины двух плоских шин, находящихся на расстоянии d друг от друга. Ширина шины

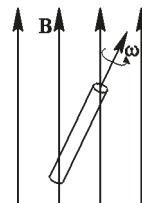


Рис. 134

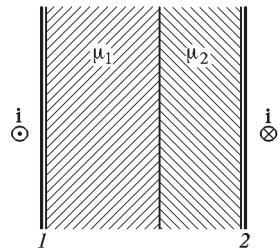
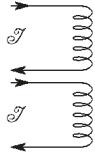


Рис. 135

$a \gg d$. Найти силу, действующую на единицу площади шин, если по ним текут одинаковые токи в противоположных направлениях.

7.55. Из энергетических соображений оценить:



1) коэффициент самоиндукции круглой петли длиной l из тонкой проволоки радиусом r ;

2) погонную индуктивность коаксиального кабеля, состоящего из толстого внутреннего провода радиусом r и тонкой внешней оболочки радиусом R .

Рис. 136 Два одинаковых длинных соленоида длиной $l = 50$ см, приставленных торцами друг к другу (рис. 136), притягиваются с силой $F = 1$ Н, когда по их обмоткам течет одинаковый ток $\mathcal{I} = 10$ А. Чему равен коэффициент самоиндукции L каждого из соленоидов?

7.57. Две небольшие одинаковые катушки расположены так, что их оси лежат на одной прямой (рис. 137). Расстояние между катушками $l = 10$ см значительно превышает их линейные размеры. Число витков каждой катушки $N = 100$, площадь витков $S = 1$ см². С какой силой взаимодействуют катушки, когда по их обмоткам текут одинаковые токи $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = 0,1$ А? Чему равен коэффициент взаимоиндукции катушек M ?

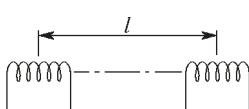


Рис. 137

7.58. С какой силой втягивается в соленоид с полем B длинный цилиндрический стержень с магнитной проницаемостью μ и площадью поперечного сечения S ? Стержень расположен на оси соленоида таким образом, что один его конец находится внутри, а другой — вне соленоида. Магнитное поле соленоида вблизи первого конца можно считать однородным, вблизи второго конца (вне соленоида) — равным нулю, а ток соленоида — постоянным.

7.59. Длинный сердечник из материала с $\mu = 100$ втягивается с силой $F = 10$ Н в длинный соленоид, по которому течет ток $\mathcal{I} = 10$ А. Сердечник занимает все сечение соленоида и вставлен на глубину, значительно превышающую его диаметр (рис. 138). Найти коэффициент самоиндукции L соленоида (без сердечника), если его длина $l = 50$ см.

Рис. 138 Длинный соленоид, намотанный на тонкостенный капилляр, погружен одним концом в парамагнитную жидкость с плотностью ρ и магнитной проницаемостью μ . На сколько изменится уровень жидкости в капилляре, если по соленоиду пропустить ток \mathcal{I} ? Число витков на единицу длины соленоида равно n .

7.60. В сердечнике электромагнита имеется малый зазор l , в который помещена пластинка из того же материала. Какую работу нужно совершить против магнитных сил, чтобы удалить пластину из зазора? Длина сердечника равна L , сечение всюду одинаково и равно S , магнитная проницаемость $\mu \gg 1$ (рис. 139). Обмотка электромагнита имеет N витков, по которым течет ток \mathcal{I} . Рассеянием магнитного потока пренебречь.

7.62. Катушка, имеющая N витков, намотана на железный торoidalный сердечник с проницаемостью μ (рис. 140). Радиус тора R , радиус сечения сердечника $r \ll R$. Тор разрезан на две половины, раздвинутые так, что образовался воздушный зазор d . Определить силу притяжения между половинками тора, если в обмотке течет ток \mathcal{I} . Рассмотреть случай $d = 0$.

7.63. Как изменится подъемная сила электромагнита, изображенного на рис. 141, если его нижнюю подкову изготовить из материала

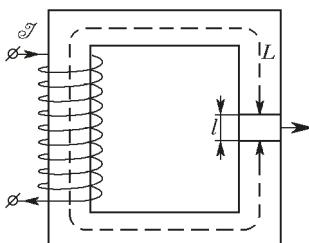


Рис. 139

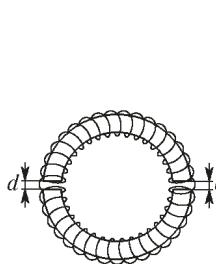


Рис. 140

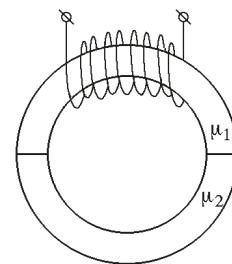


Рис. 141

с магнитной проницаемостью μ_2 , отличной от магнитной проницаемости верхней подковы μ_1 ($\mu_2 \neq \mu_1$)?

7.64. Электромагнит из железного бруса квадратного сечения в форме подковы имеет размеры в сантиметрах, указанные на рис. 142. Полное число витков обмотки $N = 200$. Сила тока $\mathcal{I} = 2$ А. Как велика подъемная сила F электромагнита, если $\mu = 200$?

7.65. К компасу на расстояние $L = 1$ м подносят магнитный бруск сечением $S = 1$ см² и длиной $l = 10$ см. С какой стороны надо подносить магнит и как его ориентировать, чтобы отклонение компаса φ было наибольшим? Найти величину φ , если остаточная индукция материала бруска $B_1 = 10^4$ Гс, горизонтальная составляющая земного поля $B_0 = 0,2$ Гс.

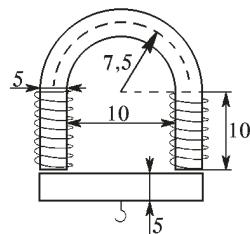


Рис. 142

7.66. Найти относительное изменение частоты регулярной прецессии намагниченного тяжелого гироскопа в поле тяжести, если приложить магнитное поле с индукцией $B = 1,0$ кГс, направленное вертикально вверх. Намагниченность I считать постоянной, однородной и направленной по оси гироскопа, причем величина $4\pi I = 2$ кГс, плотность материала гироскопа $\rho = 8$ г/см³, расстояние от точки опоры до центра масс гироскопа $l = 2$ см.

7.67. Длина цилиндрического однослойного соленоида много больше его радиуса R . Провод обмотки соленоида имеет квадратное сечение со стороной $a \ll R$. Витки плотно прилегают друг к другу. При прохождении тока через соленоид возникает сила, стремящаяся разорвать обмотку. Определить предельную силу тока \mathcal{I}_0 , при ко-

торой наступит разрыв проволоки обмотки в центральном сечении соленоида, если проволока выдерживает нагрузку на растяжение, не превышающую F .

7.68. Длинный короткозамкнутый сверхпроводящий соленоид выполнен из проволоки диаметром $d = 0,2$ мм, плотно намотанной в один слой. Диаметр соленоида $D = 2$ см. Известно, что сверхпроводимость разрушается во внешнем магнитном поле $B_{kp} = 15$ кГс.

Какой максимальный ток можно возбудить в сверхпроводящей обмотке, если прочность проволоки на разрыв $F_p = 5$ Н?

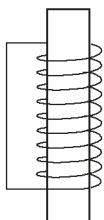


Рис. 143

7.69. Сверхпроводящая сфера с радиусом $R = 8$ см, состоящая из двух одинаковых полусфер, помещена в однородное магнитное поле $B_0 = 10^3$ Гс, перпендикулярное плоскости разреза. Найти силу, необходимую для отрыва одной полусфери от другой.

7.70. Определить разрывающее усилие в сверхпроводящем кольце радиусом R из цилиндрической проволоки радиусом r ($r \ll R$), по которому течет ток \mathcal{I} . Индуктивность кольца $L = 4\pi R [\ln(8R/r) - 2]$.

7.71. В короткозамкнутый длинный сверхпроводящий соленоид с начальным внутренним полем, равным B_0 в центре соленоида, и площадью сечения S вставляют длинный сверхпроводящий сердечник с площадью сечения σ (рис. 143). Найти давление P на боковую поверхность сердечника. Краевыми эффектами пренебречь.

7.72. Сверхпроводящий соленоид, по обмотке которого течет некоторый ток, деформируют так, что происходит адиабатическое сжатие магнитного поля. Каким уравнением (аналогичным уравнению адиабаты в теории газов) можно описать поведение магнитного давления при изменении площади сечения соленоида?

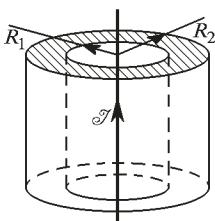


Рис. 144

7.73. Вдоль оси полого цилиндра из сверхпроводника с радиусами цилиндрических поверхностей R_1 и R_2 расположен длинный проводник (рис. 144). Какие токи потекут по внутренней и наружной цилиндрическим поверхностям сверхпроводящего образца, если по проводнику пропустить ток \mathcal{I} ? Определить силы магнитного давления на стенки цилиндра.

7.74. Токи, текущие по поверхности сверхпроводящего тела, приводят к тому, что магнитное поле внутри сверхпроводника всегда равно нулю. Однако, если вокруг тела магнитное поле слишком велико, то сверхпроводимость разрушается и металл переходит в нормальное состояние. Для свинца при температуре 2 К критическое поле $B_{kp} = 750$ Гс. Оценить максимальный размер шарика, который можно подвесить на магнитной подушке при этой температуре. Плотность свинца $\rho = 11,3$ г/см³.

7.75. Какую работу надо совершить для того, чтобы круговую петлю из сверхпроводника поместить внутри длинного сверхпроводящего соленоида, замкнутого накоротко? Диаметры петли и соленоида считать равными, а их оси — параллельными. В отсутствие круговой петли ток в соленоиде равен нулю, начальный ток в петле \mathcal{I}_0 . Индуктивность петли L , соленоида — L_c , число витков соленоида N .

7.76. Для определения магнитной восприимчивости диамагнитного материала измеряют с помощью весов силу, выталкивающую маленький образец из зазора между полюсами электромагнита (рис. 145). Пусть магнитное поле в зазоре изменяется в радиальном направлении по закону $B = B_0 e^{-\alpha r^2}$, где r — расстояние от оси симметрии (в сантиметрах), $B_0 = 10^3$ Гс — поле на оси, $\alpha = 10^{-2} \text{ см}^{-2}$ — константа. На каком расстоянии от оси нужно расположить диамагнитный образец, чтобы выталкивающая сила была максимальной, и чему равна эта максимальная сила для образца в виде небольшого тонкого диска объемом $V = 0,1 \text{ см}^3$? Магнитную восприимчивость материала принять равной $\chi = -1,4 \cdot 10^{-5}$ (висмут). Диск ориентирован перпендикулярно магнитному полю.

7.77. В длинный соленоид с плотностью намотки витков $n = 20 \text{ см}^{-1}$ вставлен тонкий стержень из магнитного материала, кривую намагничивания которого можно аппроксимировать выражением $I = I_{\text{нас}}(1 - e^{-H/H_0})$. Один конец стержня находится в середине соленоида, а другой — вне соленоида вдали от его конца. Найти силу, втягивающую стержень в соленоид при токе $\mathcal{I} = 10 \text{ А}$. Сечение стержня $S = 0,8 \text{ см}^2$, $H_0 = 250 \text{ Э}$, $I_{\text{нас}} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ Гс}$.

7.78. С помощью чувствительных весов измеряется сила, втягивающая парамагнитный образец в сверхпроводящую короткозамкнутую катушку в зависимости от положения образца (рис. 146). Известно, что при $x = 0$ индуктивность катушки равна L_0 , а по ее виткам течет некоторый ток \mathcal{I}_1 . В первом эксперименте была получена зависимость $F_1(x)$. Во втором эксперименте катушка была переведена в нормальное состояние и по ее виткам пропущен ток \mathcal{I}_2 от внешнего источника. Предполагалось вновь измерить зависимость силы, действующей на образец, от координаты. Какую зависимость $F_2(x)$ следует ожидать в этом случае?

7.79. Внутри длинной катушки-соленоида с плотностью намотки витков n расположена небольшая катушка с площадью витков S и полным числом витков N . Ось малой катушки ориентирована под углом Θ по отношению к оси соленоида. Катушки включены последовательно и по ним течет ток \mathcal{I} . Какой момент сил действует на малую катушку?

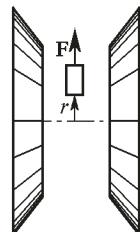


Рис. 145

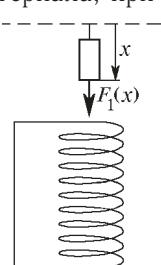


Рис. 146

7.80. В центре торца длинного соленоида расположен магнитный диполь с магнитным моментом \mathfrak{M} , ориентированный вдоль оси соленоида (рис. 147). По соленоиду течет ток \mathcal{I} . Плотность намотки n [витков/см]. Радиус соленоида R . Найти силу, действующую на магнитный диполь.

7.81. Небольшой сверхпроводящий шарик может свободно перемещаться вдоль оси тонкого кольца радиусом R , по которому течет ток. При каком расстоянии между шариком и плоскостью кольца сила, действующая на шарик, принимает максимальное значение? Как направлена эта сила?

7.82. Длинный сверхпроводящий цилиндр (из сверхпроводника I рода) внесен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией B , направленное параллельно оси цилиндра. Определить силу f , действующую на единицу площади боковой поверхности цилиндра.

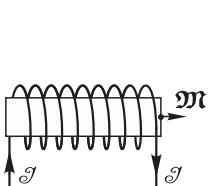


Рис. 147



Рис. 148

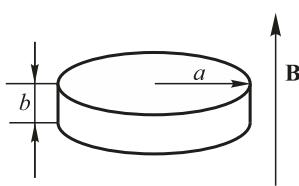


Рис. 149

7.83. На какой высоте h постоянный магнитик с магнитным моментом $\mathfrak{M} = 10^3 \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$ и массой $m = 10 \text{ г}$ будет парить в горизонтальном положении над плоской горизонтальной поверхностью сверхпроводника I рода? Магнитик считать точечным диполем.

Указание. Применить метод зеркальных изображений. Воспользоваться выражением для взаимной потенциальной энергии двух точечных диполей.

7.84. Кольцо из сверхпроводника надевают на длинный однородно намагниченный стержень, индукция на полюсе которого (в точке A) равна B_0 (рис. 148). При этом затрачивают работу A . Какой ток \mathcal{I} пойдет в кольце, если площадь сечения магнита равна S ?

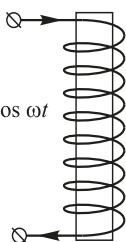


Рис. 150

7.85. Рядом с вертикальной сверхпроводящей плоскостью находится магнитный компас, стрелка которого может вращаться в горизонтальной плоскости. Как она ориентирована в состоянии устойчивого равновесия, если внешнее магнитное поле отсутствует?

7.86. Однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости металлического диска радиусом a , толщиной b и удельной проводимостью λ , изменяется по закону $B = B_0 \sin \omega t$. Определить среднюю мощность тепловых потерь в диске (рис. 149).

7.87. По виткам длинной катушки с плотностью витков n проходит ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. В катушку вставлен стержень радиуса

сом R с магнитной проницаемостью μ , обладающий слабой удельной проводимостью λ . Определить среднюю мощность тепловых потерь в стержне на единицу длины в центральной части катушки (рис. 150).

7.88. Внутри длинного соленоида с плотностью намотки витков n , замкнутого на резистор с сопротивлением R , расположена небольшая магнитная стрелка с магнитным моментом \mathfrak{m} . Ось стрелки перпендикулярна оси соленоида (рис. 151). Какой заряд q протечет через сопротивление R при повороте стрелки на 90° (в плоскости рисунка)?

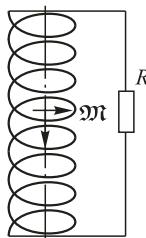


Рис. 151

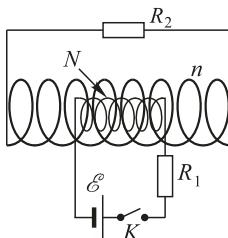


Рис. 152

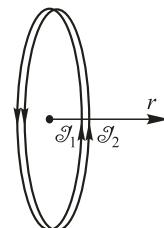


Рис. 153

7.89. В схеме, изображенной на рис. 152, внутри длинного соленоида с плотностью намотки витков n соосно расположена небольшая катушка с числом витков N . Соленоид замкнут на резистор с сопротивлением R_2 . Радиус витков катушки r . При замыкании ключа K катушка последовательно с сопротивлением R_1 подключается к батарее с ЭДС \mathcal{E} . Определить, какой заряд протечет через сопротивление R_2 после замыкания ключа.

7.90. Два одинаковых сверхпроводящих витка с индуктивностью L каждый, расположены вплотную друг к другу. По виткам в одном направлении текут токи \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 (рис. 153). Какую работу нужно совершить, чтобы, не нарушая состояния сверхпроводимости, удалить витки на большое расстояние друг от друга?

7.91. В плоский конденсатор с квадратными пластинами площадью $S = L \times L$ и расстоянием между ними d вставлена на глубину $L/2$ диэлектрическая пластина с проницаемостью ϵ , обладающая слабой проводимостью λ . Конденсатор подключен к батарее с ЭДС \mathcal{E} . Между пластинами конденсатора и диэлектрической пластиной имеется электрический контакт. Конденсатор помещен в однородное магнитное поле \mathbf{B} . Направленное параллельно пластинам и границе диэлектрика (рис. 154). Пренебрегая краевыми эффектами, найти силу, действующую на пластину.

7.92. На горизонтальной плоскости лежит проводящее кольцо диаметром D , по которому течет ток \mathcal{I} . На высоте z ($z \gg D$) на

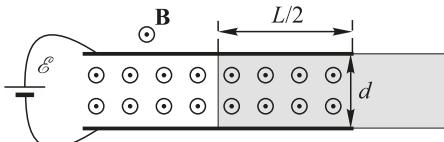


Рис. 154

оси кольца расположен точечный магнитный диполь с моментом \mathfrak{m} . Направление тока в кольце и ориентация диполя указаны на рис. 155. Определить модули силы F и момента силы M , действующих на диполь в магнитном поле кольца. Указать направления векторов \mathbf{F} и \mathbf{M} .

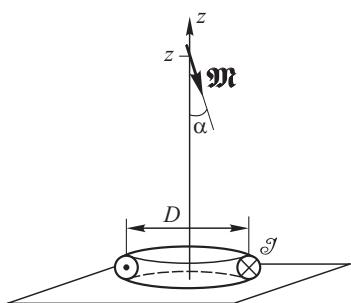


Рис. 155

3) Какую работу нужно совершить, чтобы при неизменных токах J_1 и J_2 повернуть катушку 1 против часовой стрелки на угол 90° ?

7.94. На расстоянии x от торца длинного цилиндрического магнита ($D \ll L$) с намагниченностью I_0 (рис. 157) расположен образец из ферромагнетика с магнитной проницаемостью μ . Образец

представляет собой тонкий маленький цилиндрик ($d \ll l$), ось которого совпадает с осью магнита. Полагая, что $l \ll x \ll L$ и образец намагничивается однородно, определить силу, действующую на него со стороны магнитного поля магнита. Как изменится эта сила, если образец заменить небольшой плоской «лешкой» того же объёма и с той же магнитной проницаемостью, ориентированной перпендикулярно магнитному полю?

7.95. По виткам катушки, имеющей N витков диаметром D , протекает ток J . На оси катушки на расстоянии $z \gg l$, где l — длина

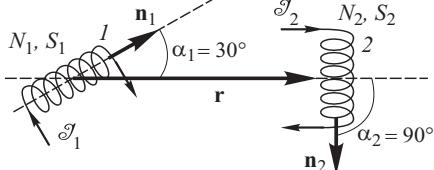


Рис. 156

катушки, расположен небольшой сверхпроводящий шарик радиусом $R \ll l$ (рис. 158). Найти силу, действующую на шарик, и указать её знак.



Рис. 157

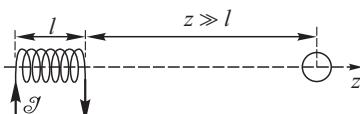


Рис. 158

катушки, расположена небольшой сверхпроводящий шарик радиусом $R \ll l$ (рис. 158). Найти силу, действующую на шарик, и указать её знак.

7.96. Два шарика радиусом R , один из которых сверхпроводящий, а второй немагнитный хорошо проводящий, помещены в однородное магнитное поле \mathbf{B} . Шарики расположены вдоль линии, перпендикулярной направлению поля, на расстоянии $l \gg R$. Поле практически мгновенно увеличивается в полтора раза за время много меньшее времени затухания тока в хорошо проводящем шарике. Определить силу взаимодействия шариков до и сразу после изменения поля.

7.97. Над сверхпроводящей плоскостью параллельно ей на расстоянии $h = 40$ см находится сверхпроводящий длинный провод диаметром $d = 2$ см, по которому течет ток $\mathcal{I} = 2$ А. Провод находится под напряжением $V = 1$ кВ относительно плоскости. Вычислить силу взаимодействия единицы длины провода с плоскостью. Силой тяжести пренебречь.

§ 8. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. ЭДС Холла. Движение тел при наличии пондеромоторных сил

8.1. Три электрона в состоянии покоя помещены в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 1$ см. После этого они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить предельное значение их скоростей.

8.2. Решить предыдущую задачу для релятивистских скоростей. При каких расстояниях a можно пользоваться нерелятивистским приближением?

8.3. В плоском конденсаторе с напряженностью электрического поля $E = 1000$ В/м из отрицательно заряженной пластины в результате термоэмиссии вылетают электроны. Принимая во внимание действие поля электрического изображения, оценить, на каком расстоянии от этой пластины скорость электронов будет наименьшей.

8.4. Вдоль вакуумированной длинной цилиндрической трубы радиусом R создан стационарный аксиально симметричный поток электронов, ускоренных при прохождении разности потенциалов V . Найти распределение плотности электронов в зависимости от радиуса r в некотором сечении пучка, если результаты измерения магнитного поля B как функции r в этом сечении оказалось возможным описать выражением $B = B_0(r/R)^q$

при $r < R$, $q > 0$, где B_0 и q — постоянные. Определить электрическое поле $E(r)$, предполагая, что параметры пучка не изменяются вдоль его оси.

8.5.* Две щели S_1 и S_2 шириной $d = 0,1$ см каждая (рис. 159), установленные в вакуумированном сосуде, выделяют плоский пу-

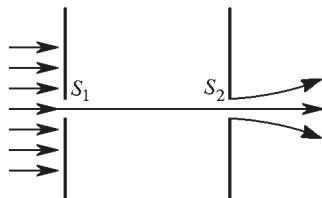


Рис. 159

чок электронов с энергией $W = 400$ эВ. На каком расстоянии x от щели S_2 ширина электронного пучка удвоится из-за кулоновского расталкивания электронов, если электронный ток, приходящийся на единицу длины щели (за щелью S_2), равен $i = 10^{-4}$ А/см? При расчетах щели считать бесконечно длинными.

8.6.* Определить частоту поперечных колебаний протонов, захваченных релятивистским электронным пучком, имеющим сечение $\pi R^2 = 3,14 \cdot 10^{-2}$ см² и силу тока $\mathcal{J} = 10^3$ А.

8.7. Из ускорителя выводится пучок протонов с энергией $W = 4$ МэВ, который затем проходит в вакууме путь $l = 4$ м, прежде чем попасть на мишень. Вследствие кулоновского взаимодействия частиц размеры пучка увеличиваются. Оценить максимально возможную плотность тока в пучке, если допускается увеличение радиуса пучка на $\delta = 10\%$ по сравнению с исходным. Распределение частиц в пучке аксиально симметрично, их начальными поперечными скоростями пренебречь.

8.8. На рис. 160 изображена электронная лампа непосредственного накала со всеми поданными на нее напряжениями. С какой скоростью (выраженной в вольтах) электроны будут достигать анода лампы?

8.9. Найти отношение силы кулоновского расталкивания к силе притяжения Ампера

ра двух параллельных пучков электронов, прошедших ускоряющий потенциал $V = 10$ кВ.

8.10. Какое количество неподвижных однозарядных положительных ионов нужно поместить в пространстве, занимаемом однородным цилиндрическим пучком электронов, движущихся со скоростью v

параллельно оси, чтобы радиус пучка при его движении не изменялся? Плотность электронов в пучке n_0 . Столкновениями электронов с ионами пренебречь.

8.11. Электронный пучок распространяется по цилиндрическому плазменному каналу, нейтрализующему пространственный заряд. Плотность тока в пучке монотонно спадает при удалении от оси. Оценить ток пучка

(в амперах), при котором размеры электронных траекторий станут меньше радиуса пучка. Скорость электронов $v = 0,9c$.

8.12. Электрон влетает в постоянное однородное магнитное поле **B** (рис. 161) и, находясь в точке A , обладает скоростью **v**, образующей с направлением поля угол α . Затем, описав один виток винтовой линии, он оказывается в точке C . Чему равно расстояние AC ?

8.13. Ускоритель протонов ускоряет эти частицы до энергии $W = 76$ ГэВ = $7,6 \cdot 10^{10}$ эВ. Если отвлечься от наличия ускоряющих

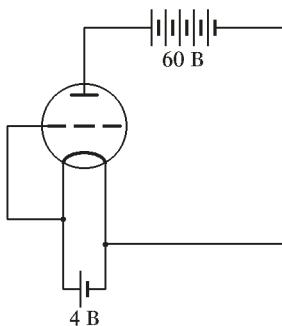


Рис. 160

ра двух параллельных пучков электронов, прошедших ускоряющий потенциал $V = 10$ кВ.

8.10. Какое количество неподвижных однозарядных положительных ионов нужно поместить в пространстве, занимаемом однородным цилиндрическим пучком электронов, движущихся со скоростью v

параллельно оси, чтобы радиус пучка при его движении не изменялся? Плотность электронов в пучке n_0 . Столкновениями электронов с ионами пренебречь.

8.11. Электронный пучок распространяется по цилиндрическому плазменному каналу, нейтрализующему пространственный заряд. Плотность тока в пучке монотонно спадает при удалении от оси. Оценить ток пучка

(в амперах), при котором размеры электронных траекторий станут меньше радиуса пучка. Скорость электронов $v = 0,9c$.

8.12. Электрон влетает в постоянное однородное магнитное поле **B** (рис. 161) и, находясь в точке A , обладает скоростью **v**, образующей с направлением поля угол α . Затем, описав один виток винтовой линии, он оказывается в точке C . Чему равно расстояние AC ?

8.13. Ускоритель протонов ускоряет эти частицы до энергии $W = 76$ ГэВ = $7,6 \cdot 10^{10}$ эВ. Если отвлечься от наличия ускоряющих

промежутков, то можно считать, что ускоренные протоны движутся по окружности радиусом $R = 236$ м и удерживаются на ней магнитным полем, перпендикулярным к плоскости орбиты. Найти необходимое для этого магнитное поле.

8.14* Для моделирования траектории атомной частицы с зарядом e и импульсом p , движущейся в постоянном магнитном поле, часто пользуются тем обстоятельством, что очень легкий (невесомый) гибкий проводник с током \mathcal{I} , находящийся под постоянным механическим натяжением T , занимает в том же магнитном поле положение, совпадающее с траекторией частицы. Найти связь между \mathcal{I} , e , p , T . Частица движется перпендикулярно к магнитному полю. Предполагается, что вне магнитного поля участки проводника прямолинейны и расположены вдоль соответствующих прямолинейных же участков траектории.

8.15. Смоделировать траекторию заряженной частицы в магнитном поле можно, натянув в зазоре магнита проволоку с током. С какой силой F надо натянуть проволоку с током $\mathcal{I} = 1$ А, чтобы имитировать траекторию протона с энергией $W = 1$ МэВ?

8.16. Масс-сепаратор, т. е. прибор, предназначенный для разделения атомных частиц разных масс, состоит из цилиндрического конденсатора с внутренним радиусом $r_1 = 2,4$ см и внешним $r_2 = 3$ см (рис. 162). Ионные лучи попадают в селектор через узкую щель S , расположенную посередине между обкладками. Параллельно оси конденсатора (т. е. перпендикулярно к плоскости чертежа) приложено однородное магнитное поле с индукцией $B = 2000$ Гс. Какую по величине и знаку разность потенциалов надо приложить к пластинам конденсатора, чтобы однократно заряженный положительный ион ${}^7\text{Li}$ прошел по средней линии конденсатора, т. е. по окружности радиусом $r = 2,7$ см? Найти напряженность электрического поля на этой окружности. Энергия иона $W = 1000$ эВ. Масса атома водорода $1,67 \cdot 10^{-24}$ г. На сколько надо изменить эту разность потенциалов, чтобы по той же линии через селектор могли пройти ионы ${}^6\text{Li}$?

8.17. В установке для разделения изотопов ${}^{235}\text{U}$ и ${}^{238}\text{U}$ пучок однократно ионизованных ускоренных ионов урана с энергией $W = 5$ кэВ попадает от источника через щель S (рис. 163) в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка. В магнитном поле ионы разных масс движутся по различным окружностям

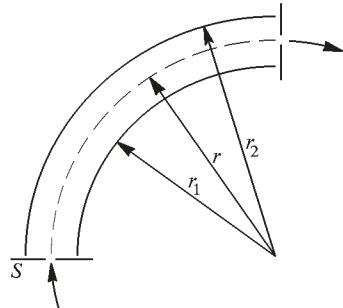


Рис. 162

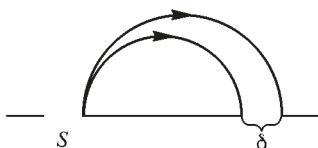


Рис. 163

и, совершив полуоборот, попадают в приемники. Конструкция последних должна быть такова, чтобы расстояние между пучками ^{235}U и ^{238}U на выходе было не меньше $\delta = 5$ мм. Каково должно быть магнитное поле B , удовлетворяющее этому условию? Найти также

время t , необходимое для полного разделения $M = 1$ кг природного урана, если ионный ток, создаваемый источником, $J = 5$ мА. Массы протона и нейтрона считать одинаковыми и равными $1,67 \cdot 10^{-24}$ г.

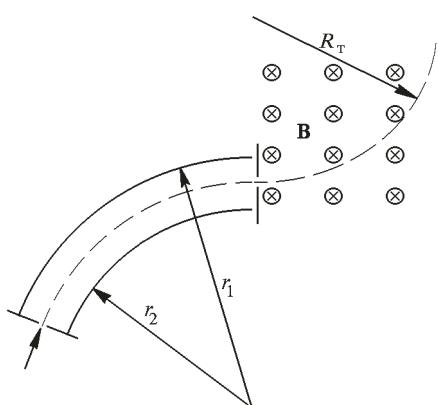


Рис. 164

шел этот сепаратор при напряжении на конденсаторе V , а радиус его траектории в магнитном поле равен R_t ?

8.19. Один из ранних методов определения отношения заряда к массе e/m для электрона состоял в следующем. Электроны, вырванные из алюминиевого диска A , ускорялись разностью потенциалов V , приложенной между A и щелью S (рис. 165). Пройдя через щель S , электронный пучок попадал в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка. Вся система помещалась в вакууме. Изменяя величину магнитного поля, добивались того, чтобы ток на коллекторе C , регистрируемый гальванометром Γ , был максимален.

Измерив магнитное поле B в этот момент, можно вычислить e/m . Провести числовой расчет, если расстояние между щелью S и коллектором C равно $d = 10$ см, угол между прямой, проведенной от S к C , и начальным направлением электронного пучка $\alpha = 30^\circ$, $V = 1000$ В, $B = 10,6$ Гс.

8.20. В ускорителе прямого действия протон движется в практически однородном электрическом поле внутри вакуумной трубы. Посторонние магнитные поля искривляют его траекторию, в результате чего он может попасть на стенку, не дойдя до конца трубы. Оценить

нагрузку на стенку трубы, если толщина ее равна 1 мм, а радиус трубы 10 см. Установка имеет форму конуса с углом раствора 120° .

допустимый уровень однородного внешнего магнитного поля в зоне такого ускорителя, если длина трубы $l = 2$ м, а протоны ускоряются до энергии $W = 4$ МэВ. Допустимое отклонение протонов от осевой линии в конце трубы $b = 1$ см. Начальной скоростью протонов пренебречь.

8.21* Частица массой m с зарядом e движется по равновесной круговой орбите радиусом r_0 в горизонтальной плоскости зазора магнита (рис. 166), в котором магнитное поле спадает по радиусу по закону $B_z(r) = A/r^n$ ($0 < n < 1$). Центр орбиты совпадает с осью симметрии zz . Определить частоту ω_z вертикальных колебаний частицы на такой равновесной орбите в случае малых отклонений от горизонтальной плоскости.

8.22* В условиях предыдущей задачи определить частоту ω_r радиальных колебаний частицы в случае малых отклонений от равновесной орбиты.

8.23. В ускорителях заряженных частиц индукция B магнитного поля, направленная вдоль оси симметрии, изменяется вблизи равновесной орбиты по закону $B \propto 1/r^n$, где r — радиус круговой орбиты и n — характерный показатель. При каком значении n обеспечивается не только круговое движение на равновесной орбите, но и его радиальная устойчивость?

8.24* Длинный соленоид намотан так, что магнитное поле вдоль его оси меняется по линейному закону $B = B_0(1 + |x|/L)$. (Здесь x — расстояние от центра соленоида вдоль его оси, а $L = 15$ см — параметр поля.) Диаметр соленоида $d \ll L$, поле B не зависит от времени. (Отметим, что указанную зависимость $B(x)$ нельзя реализовать в окрестности $x = 0$, несущественной для решения задачи.) Заряженная частица движется так, что ее траектория полностью находится внутри соленоида (для простоты можно считать, что траектория симметрична относительно оси соленоида). Описать движение частицы. Найти период и амплитуду колебаний частицы вдоль оси соленоида, если известно, что в центральном поперечном сечении соленоида частица движется под углом 60° к оси соленоида со скоростью $v = 100$ см/с.

8.25.* Один из предложенных путей получения высоких температур, необходимых для осуществления термоядерных реакций, использует так называемую «магнитную термоизоляцию». Уход быстрых частиц из зоны высокой температуры предотвращается магнитным полем. Определить силу тока \mathcal{I} в столбе газового разряда радиусом $R = 3$ см, необходимую для того, чтобы электроны, обладающие средней скоростью хаотического движения, отвечающей температуре $T = 10^6$ К, не могли удаляться от поверхности столба на расстояние больше, чем $r = 2 \cdot 10^{-3}$ см.

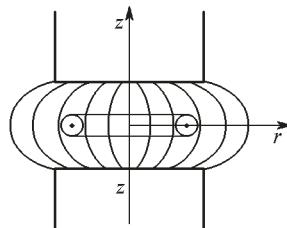


Рис. 166

8.26. Рассматривая движение электрона в атоме классически, показать, что его механический \mathbf{L} и магнитный \mathfrak{M} моменты связаны соотношением $\mathfrak{M} = -\frac{e}{2mc}\mathbf{L}$.

8.27. Вспомнив теорию гироскопа и воспользовавшись результатом предыдущей задачи, показать, что во внешнем поле \mathbf{B} атом прецессирует с частотой $\Omega = -\frac{e}{2mc}\mathbf{B}$ (теорема Лармора).

8.28. В омегатроне ион остаточного газа раскручивается по спирали в скрещённом электрическом (переменном с амплитудой $E = 1 \text{ В/см}$) и постоянном магнитном ($B = 3 \cdot 10^3 \text{ Гс}$) полях (рис. 167). Найти частоту, при которой ионы N_2^+ будут достигать коллектора.

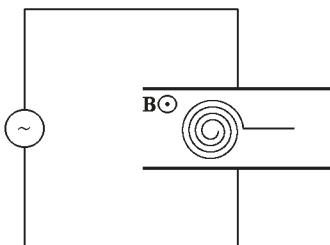


Рис. 167

При этой частоте радиус спирали будет возрастать до тех пор, пока ион не достигнет коллектора на радиусе $R = 1 \text{ см}$. Если частоту немного изменить, то ион будет некоторое время раскручиваться, а потом начнет скручиваться обратно к источнику. Оценить, на сколько надо изменить частоту, чтобы ток на коллектор прекратился.

8.29. Шарик массой $m = 1 \text{ г}$ с зарядом $q = 1 \text{ ед. СГСЭ}$ помещен внутри соленоида на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может скользить без трения. Ось соленоида вертикальна. Сначала тока в обмотке соленоида не было. Затем был включен ток, и в соленоиде установилось постоянное однородное магнитное поле с индукцией $B = 100 \text{ Гс}$. Во время нарастания магнитного поля возникает электрическое поле, приводящее шарик в движение. Нарастание тока происходит настолько быстро, что за время установления поля шарик не успевает сместиться на заметное расстояние. Определить радиус r круговой траектории, по которой будет двигаться шарик после установления магнитного поля, а также период обращения T его по этой траектории, если в начальный момент шарик находился на расстоянии R от оси соленоида. Проанализировав числовые результаты, ответить на вопрос, можно ли практически наблюдать эффект с макроскопическими шариками? В чем трудности постановки опыта с заряженными макрочастицами?

8.30. В ускорителе электронов бетатроне роль ускоряющего напряжения играет ЭДС индукции, возбуждаемая изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электронов. Электроны движутся при этом по орбитам приблизительно постоянного радиуса. Считая радиус орбиты электрона неизменным, определить необходимое для этого в данный момент времени соотношение между средним магнитным полем $\bar{B}(t)$, пронизывающим орбиту электрона, и магнитным полем на орбите электрона $B_o(t)$. Магнитное поле параллельно оси симметрии вакуумной камеры бетатрона.

8.31. Дипольное магнитное поле нейтронной звезды $B \sim 10^{12}$ Гс, масса $M \approx 1,5 \cdot 10^{30}$ кг, радиус $R_0 \approx 10$ км. Определить с помощью числовых оценок, какие силы будут доминировать в динамике релятивистского электрона ($W \sim 3$ МэВ) на расстоянии от звезды порядка радиуса земной орбиты (150 млн км).

8.32. Длинная катушка, по виткам которой течет ток, движется со скоростью \mathbf{u} , направленной перпендикулярно ее оси. Заряженная частица, имеющая скорость \mathbf{v} ($c \gg v > u$), догоняет катушку и, пролетев между ее витками, вылетает под углом 90° к первоначальному направлению (рис. 168). Найти относительное изменение энергии частицы.

8.33. Один из механизмов ускорения заряженных частиц (протонов и ядер) в космических лучах в Галактике обусловлен их отражением от движущихся «магнитных облаков» потоков ионизованной плазмы, несущей сильные «замороженные» магнитные поля. На рис. 169 показана граница намагниченной области AA' (область, заполненная магнитным полем, заштрихована), которая движется со скоростью \mathbf{u} . Магнитное поле в облаке направлено перпендикулярно рисунку. Нерелятивистское заряженное ядро летит перпендикулярно границе AA' со скоростью \mathbf{v} ($v \gg u$). Найти относительное изменение энергии ядра при его отражении от магнитного облака, учитывая действие магнитного и электрического полей.

8.34. В скрещенных однородных полях \mathbf{E} и \mathbf{B} ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$) из некоторой точки x_0 разлетаются электроны с одинаковыми скоростями $v \ll c$, лежащими в плоскости Oxy (рис. 170). Считая $E \ll B$ (СГСЭ) и пренебрегая взаимодействием электронов друг с другом, найти, на каком расстоянии l и через какое время T они снова соберутся в одну точку. Изобразить (качественно) траекторию частицы, если известно, что в начальный момент она покоялась в точке x_0 .

Указание. Перейти в систему отсчета, в которой электрическое поле равно нулю.

8.35. Электрон, обладающий скоростью v , попадает в однородные и постоянные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . Скорость \mathbf{v} электрона перпендикулярна к обоим полям. Найти траекторию движения электрона.

8.36. Однородный по плотности плоскопараллельный слой электронов удерживается в вакууме однородным магнитным полем с ин-

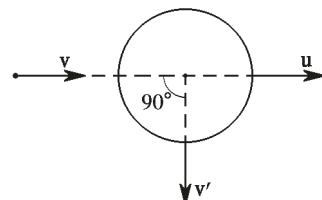


Рис. 168

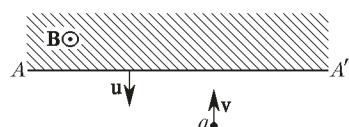


Рис. 169

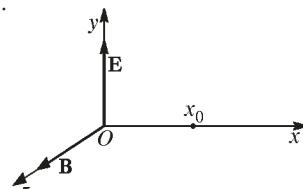


Рис. 170

дукцией $B = 57$ Гс (рис. 171). Поле параллельно поверхности слоя. Толщина слоя $\delta = 1$ см. Плотность электронов в слое $n = 10^7$ см $^{-3}$. В этих условиях электроны движутся параллельно поверхности слоя в плоскости, перпендикулярной магнитному полю (дрейф). Определить скорость дрейфа v_d в зависимости от расстояния x до плоскости симметрии.

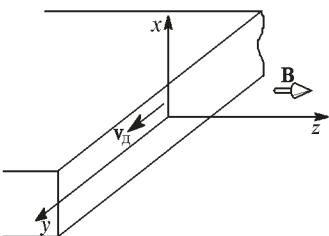


Рис. 171

Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между плоскостью симметрии и внешними поверхностями слоя. Для электронов отношение $e/m_e = 5,27 \cdot 10^{17}$ ед. СГСЭ.

8.37. Электронный пучок представляет собой тонкостенную трубку, движущуюся в направлении своей оси и вращающуюся относительно нее в вакуумированном пространстве между электродами соосного с пучком цилиндрического конденсатора (радиус внутреннего электрода r_1 , внешнего r_2).

Считая пучок бесконечно тонкой заряженной поверхностью, свернутой в круглую трубу радиусом r_0 , а полную скорость электронов пучка заданной и равной v_0 , найти максимальный ток \mathcal{I}_{max} , который может быть проведен в таком пучке через пространство, ограниченное электродами конденсатора. Конденсатор электрически закорочен, его длина существенно превышает зазор между электродами.

8.38. Вдоль оси находящегося в вакууме соленоида из электронной пушки инжектируется цилиндрический пучок электронов

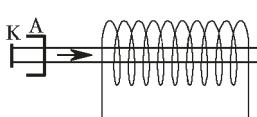


Рис. 172

(рис. 172). Вследствие пересечения частицами сходящихся магнитных силовых линий в области неоднородного поля у торца соленоида пучок приобретает однородное вращение. Полагая, что пушка находится вдали от торца соленоида, определить угловую скорость вращения пучка. Радиальные скорости электронов,

приобретенные при движении в неоднородном магнитном поле, во внимание не принимать. Провести расчет для соленоида с плотностью намотки $n = 10$ витков/см и током $\mathcal{I} = 10$ А. Для электронов отношение $e/m_e = 5,27 \cdot 10^{17}$ ед. СГСЭ.

8.39. Цилиндрический электронный пучок, распространяясь в пространстве внутри вакуумированной металлической трубы радиусом R вдоль направленного по ее оси внешнего однородного магнитного поля с индукцией \mathbf{B} , однородно вращается относительно этой оси с ларморовской частотой $\omega_l = \frac{eB}{2mc}$. В результате все радиальные

силы в нем оказываются уравновешенными (бриллюэновское состояние равновесия, пучок Бриллюэна). Найти зависимость продольной скорости электронов v от расстояния до оси, а также максимальный ток, который может быть получен в таком пучке, при условии, что потенциал трубы относительно эквипотенциального катода не

меняется и равен φ_a , а пучок полностью заполняет трубу. Считать скорости электронов на катоде равными нулю.

8.40. Полый электронный пучок, имеющий форму тонкостенной длинной трубы, движется в вакууме в направлении своей оси, вдоль которой приложено внешнее однородное магнитное поле, и одновременно вращается относительно оси с частотой Лармора. Считая пучок бесконечно тонкой заряженной поверхностью, свернутой в трубку круглого сечения, а полную скорость электронов пучка заданной и равной v_0 , найти максимальный ток \mathcal{I}_{\max} , который можно провести в таком пучке. Считать, что $v_0 \ll c$, где c — скорость света.

8.41. Заряженный шарик движется в скрещённых однородных гравитационном и магнитном полях в среде, сила трения в которой пропорциональна скорости движения. Движение происходит в плоскости, перпендикулярной вектору индукции магнитного поля. Найти величину и направление скорости установившегося движения шарика. Известно, что в среде без трения шарик движется с дрейфовой скоростью $v_{\text{др}}$. В среде с трением, но в отсутствие магнитного поля, скорость его установившегося движения v_1 .

8.42. Заряженный шарик движется в скрещённых однородных электрическом E и магнитном B полях ($E \ll B$) в среде, сила трения в которой пропорциональна скорости движения. Движение происходит в плоскости, перпендикулярной вектору индукции магнитного поля. Найти величину и направление скорости его установившегося движения, если известно, что в отсутствие магнитного поля эта скорость равна v_1 .

8.43. Электрический диполь движется в однородном магнитном поле со скоростью v , перпендикулярной \mathbf{B} . Дипольный момент \mathbf{p} составляет малый угол с направлением $[v\mathbf{B}]$ (рис. 173). Найти угловую частоту малых колебаний диполя ω_0 , считая известными его момент инерции J_0 , скорость v , дипольный момент \mathbf{p} и индукцию поля \mathbf{B} .

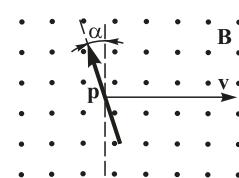


Рис. 173

8.44. Плоский воздушный конденсатор помещен в горизонтальном положении между круглыми горизонтальными наконечниками электромагнита (рис. 174). Между обкладками конденсатора в однородном электрическом поле E на расстоянии R от оси полюсных наконечников неподвижно висит заряженная масляная капля с зарядом q . В обмотке включают ток, и магнитное поле доводят до постоянной величины B . Предполагая, что за время нарастания магнитного поля смещение капли пренебрежимо мало, найти скорость v капли и траекторию ее движения после включения магнитного поля.

8.45. Электрический заряд q равномерно распределен по твердому непроводящему тонкому кольцу массой m . Кольцо может свободно

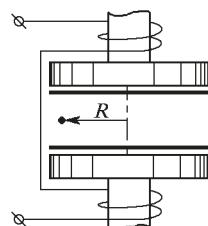


Рис. 174

вращаться вокруг своего (закрепленного) центра. Вначале кольцо покойится, а магнитное поле равно нулю. Затем включают однородное магнитное поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, перпендикулярное к плоскости кольца и произвольно меняющееся во времени. Определить движение кольца в магнитном поле.

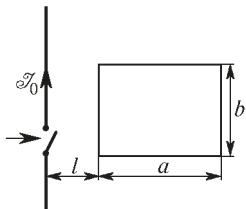


Рис. 175

8.46. Металлическое кольцо радиусом r и массой m падает в магнитном поле, вертикальная составляющая индукции которого зависит от высоты h по закону $B(h) = B_0(1 - ah)$, где a — константа. Плоскость кольца при падении горизонтальна, омическое сопротивление кольца R . Индуктивностью кольца пренебречь. Найти зависимость скорости падения от времени t .

8.47. Короткозамкнутой проволочной рамке в форме квадрата со стороной a , находящейся в магнитном поле, сообщена начальная скорость v_0 в направлении, перпендикулярном одной из сторон в плоскости рамки. Вектор магнитной индукции \mathbf{B} направлен перпендикулярно плоскости рамки, а величина его линейно изменяется в направлении начальной скорости (x) так, что $\frac{dB}{dx} = k$. Найти скорость рамки

через время t после начала движения. Масса рамки m , сопротивление R . Коэффициентом самоиндукции пренебречь. Силу тяжести не учитывать.

8.48. Прямоугольная рамка со сторонами a и b находится на расстоянии l от прямого провода, питаемого током \mathcal{I}_0 (рис. 175). Какой по величине и направлению импульс \mathbf{p} получит рамка при выключении тока \mathcal{I}_0 , если активное сопротивление рамки R , а реактивным можно пренебречь?

8.49* Прямоугольный импульс тока $\mathcal{I} = 200$ кА протекает за время $\Delta t = 10^{-4}$ с через гибкую металлическую полосу длиной $2l = 2$ м, шириной $a = 0,1$ м, сложенную вдвое и разделенную тонким непроводящим промежутком (рис. 176). Под полосой расположен твердый

массивный стол, а сверху находится бруск с площадью основания $a \times l$ и массой $m = 1$ кг. Оценить скорость бруска после прохождения импульса тока по полосе.

8.50. Импульс тока максимальной величины $\mathcal{I} = 100$ кА протекает через две тонкие гибкие металлические полосы шириной $a = 0,1$ м, разделенные тонким зазором, заполненным диэлектрической жидкостью (маслом) с плотностью $\rho = 0,8$ г/см³ (рис. 177). Оценить скорость, с которой масло будет выбрасываться из зазора между полосами в момент протекания максимального тока.

8.51. Диск из изолятора может свободно вращаться вокруг своей оси, на которой укреплен длинный сверхпроводящий соленоид радиусом $r_0 = 2$ см без механической связи с диском (рис. 178). Соленоид замкнут накоротко и в нем циркулирует ток, создающий в центре соленоида индукцию $B_0 = 10^4$ Гс. На диск вне соленоида нанесены заряды, суммарная величина которых составляет $Q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл. Соленоид разогревается, и ток в нем прекращается. Найти момент импульса диска L , который он получает в результате этого.

8.52* В классическом опыте, поставленном И. К. Кикоиным, сверхпроводящий цилиндр (масса $M = 80$ г, высота $h = 20$ см, радиус $R = 0,5$ см) подвешен на упругой нити в магнитном поле, направленном вертикально вдоль оси цилиндра. Нить подвешена в исходном состоянии не закручена. Магнитное поле постепенно повышается. При $B = 1$ кГс сверхпроводимость скачком исчезает, а цилиндр при этом закручивается. Определить максимальный угол закручивания, если модуль кручения $k = 1$ эрг/рад.

8.53. Легкий шарик массой $m = 0,5$ г и радиусом $r = 1$ см подвешен на длинной нити и вращается по горизонтальной окружности, радиус которой очень мал по сравнению с длиной нити (конический маятник). Найти изменение угловой скорости вращения шарика $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ после того, как он был заряжен до потенциала $V = 3000$ В и помещен в вертикальное магнитное поле $B = 3000$ Гс. В каком случае угловая скорость увеличится и в каком — уменьшится?

П р и м е ч а н и е. Окончательную формулу для изменения угловой скорости упростить, использовав соотношение $qB/mc \ll \sqrt{g/l}$, где q — заряд шарика, l — длина нити, g — ускорение свободного падения.

8.54. Металлический шарик с массой m и зарядом q подвешен на нити длиной L и вращается вокруг вертикальной оси (конический маятник). При этом угол между нитью и вертикалью равен α . Маятник подвешен между полюсами электромагнита. Что произойдет при включении однородного магнитного поля с индукцией B ? На какую величину и за счет чего изменится кинетическая энергия маятника? Что произойдет при выключении поля?

8.55. Сверхпроводящий шар массой $M = 10$ г и радиусом $R = 1$ см покоятся в магнитном поле $B = 1$ кГс. Температура шара постепенно повышается так, что сверхпроводимость исчезает, а шар начинает вращаться. Найти угловую скорость ω вращения шара.

8.56. На расстоянии $a = 9$ см над поверхностью сверхпроводника «парит» в поле тяжести тонкий постоянный магнит, длина которого мала по сравнению с расстоянием a . Если магнит слегка вывести из равновесия, то он совершает малые колебания в вертикальной плоскости. Найти период колебаний, при которых отсутствует вращательное движение диполя.

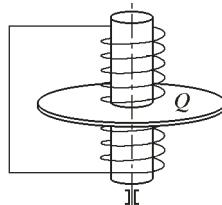


Рис. 178

8.57. Постоянный короткий магнит с магнитным моментом, ориентированным вертикально, сначала удерживается над сверхпроводящей плоскостью на расстоянии $a = 2$ см, а затем отпускается (рис. 179). Оценить высоту h , на которую он подскочит. Масса магнита $m = 15$ г, объем $V = 2$ см³, намагниченность $I = 10^3$ Гс.

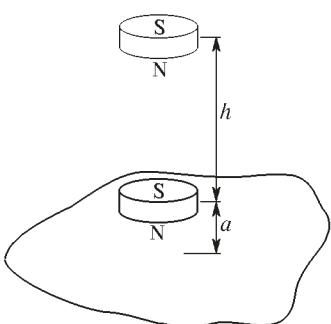


Рис. 179

их магнитные моменты отличаются в 16 раз? Ось магнита при колебаниях остается параллельной сверхпроводящей плоскости.

8.59. Маленький постоянный магнит совершает малые свободные колебания над сверхпроводящей плоскостью. Каково отношение периодов колебаний двух магнитов с одинаковыми магнитными моментами, массы которых отличаются в 16 раз? Ось магнита остается перпендикулярной сверхпроводящей плоскости.

8.60* Монополь Дирака (гипотетическая элементарная частица массой M , обладающая магнитным зарядом b) находится строго

посередине зазора между пластинами незаряженного разомкнутого плоского конденсатора, изготовленными из идеального сверхпроводника. Оценить частоту малых колебаний монополя в направлении нормали к плоскостям. Все размеры конденсатора много больше расстояния d между пластинами.

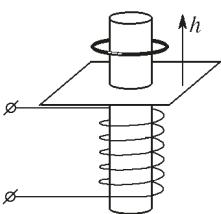


Рис. 180

лой $\mathcal{I} = 10^3$ А. Точно посередине между проводами находится шарик с диамагнитной восприимчивостью $\chi = -10^{-5}$ и плотностью $\rho = 2,0$ г/см³. Найти период T малых колебаний шарика в горизонтальной плоскости. Считать, что вертикальное движение шарика отсутствует, трения при его движении нет.

8.62. Алюминиевое кольцо, сопротивление которого пренебрежимо мало, надето на сердечник электромагнита и лежит на подставке в верхней части сердечника (рис. 180). Магнитный поток, посыпаемый сердечником через кольцо, нарастает от нуля до конечного значения $\Phi_0 = 10^5$ Гс · см². Нарастание потока происходит настолько быстро,

что за время нарастания кольцо практически не успевает сместиться. Найти высоту h , на которую подскочит кольцо, если его масса $m = 100$ г, а индуктивность $L = 100$ см.

8.63. Сверхпроводящий шарик радиусом r и массой m со скоростью v подлетает к области постоянного магнитного поля B . Оценить максимальную скорость, при которой шарик отразится от поля.

8.64. В однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} помещена тонкая металлическая лента шириной d (рис. 181) и толщиной a так, что плоскость ленты перпендикулярна к индукции \mathbf{B} . По ленте пропускают ток \mathcal{I} . Найти разность потенциалов V , возникающую между краями ленты (т. е. на расстоянии d), если концентрация свободных электронов в металле ленты n (частный случай явления Холла).

8.65. Длинный незаряженный цилиндр из немагнитного металла радиусом $R = 12,56$ см равномерно вращается в однородном магнитном поле $B = 300$ Гс, параллельном оси цилиндра, с угловой скоростью $\omega = 60$ рад/с. Определить поверхностную плотность зарядов, возникающих вследствие вращения на боковой поверхности цилиндра. Указать знак поверхностных зарядов, если векторы ω и \mathbf{B} направлены в одну сторону. Магнитным полем возникающих зарядов и инерционными эффектами электронов пренебречь.

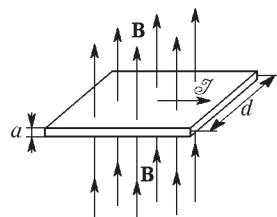


Рис. 181

8.66* Полый диэлектрический цилиндр с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} параллелен оси цилиндра, диэлектрическая проницаемость материала цилиндра равна ϵ . Найти:

1) объемную плотность $\rho_{\text{связ}}$ связанных зарядов, появившихся в диэлектрике вследствие вращения в магнитном поле;

2) полный объемный заряд q на единицу длины цилиндра;

3) плотности поверхностных зарядов на обеих поверхностях цилиндра.

8.67. Длинный сплошной алюминиевый цилиндр радиусом R заряжен электричеством и вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей продольной оси. Заряд на единицу длины цилиндра равен χ . Найти разность потенциалов V между осью и поверхностью цилиндра, возникающую из-за его вращения. Действием центробежной силы пренебречь.

8.68. Вдоль трубы с внутренним и наружным радиусами R_1 и R_2 течет ток \mathcal{I} . Определить, какая разность потенциалов V установится между внутренней и наружной поверхностями трубы. Число свободных электронов в единице объема металла равно n .

8.69. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с проводимо-

стью λ (рис. 182), двигающейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Система находится в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} , направленной перпендикулярно плоскости рисунка. Какая мощность N выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление R ?

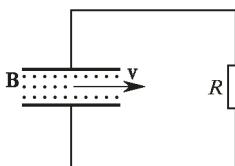


Рис. 182

8.70. Длинная незаряженная пластина из немагнитного металла движется равномерно в однородном магнитном поле $B = 1800 \text{ Гс}$ со скоростью $v = 6,28 \text{ см/с}$. Векторы \mathbf{B} и \mathbf{v} взаимно перпендикулярны и параллельны плоскости пластины (рис. 183). Определить поверхностную плотность электрических зарядов на плоскостях пластины, возникающих вследствие ее движения. Указать знаки поверхностных зарядов, если векторное произведение $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ направлено вверх. Магнитным полем возникающих зарядов пренебречь.

8.71. Диэлектрическая жидкость проницаемостью ϵ протекает между пластинами плоского конденсатора со скоростью $v \ll c$. Перпендикулярно направлению движения жидкости и параллельно обкладкам конденсатора приложено однородное постоянное магнитное поле \mathbf{B} . Определить напряжение V между обкладками конденсатора и поверхностную плотность зарядов диэлектрика σ . Расстояние между пластинами конденсатора d .

8.72. В результате некоторого космического события образовалась система, состоящая из звезды (масса M , магнитный момент \mathfrak{M}_0) и планеты (масса $m \ll M$, магнитный момент \mathfrak{M}). Планета движется

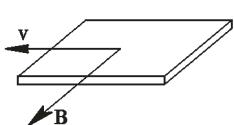


Рис. 183

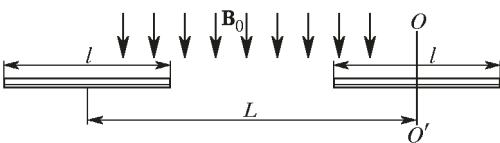


Рис. 184

по круговой орбите радиусом R . Найти возможный разброс величины периода обращения в зависимости от ориентации магнитных моментов, считая плоскость орбиты перпендикулярной магнитному моменту звезды \mathfrak{M}_0 .

8.73. Определить период малых крутильных колебаний магнитного бруска ($S = 1 \text{ мм}^2$, $l = 10 \text{ см}$), подвешенного горизонтально на неупругом подвесе в магнитном поле Земли (горизонтальная составляющая $B_0 = 0,2 \text{ Гс}$). Плотность стали $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$, остаточная индукция $B = 10 \text{ кГс}$.

8.74. Два одинаковых железных бруска сечением $S = 0,1 \text{ см}^2$ и длиной $l = 5 \text{ см}$ имеют остаточную магнитную индукцию $B = 12560 \text{ Гс}$. Бруски расположены на одной прямой на расстоянии $L = 1 \text{ м}$. Один брусок закреплен неподвижно, а другой может свободно вращаться вокруг оси $O-O'$, проходящей через его середину и параллельной маг-

нитному полю Земли \mathbf{B}_0 (рис. 184). Найти период T малых кривильных колебаний бруска. Плотность железа $\rho = 7,8 \text{ г}/\text{см}^3$.

8.75. Две одинаковых железных иглы сечением $S = 1 \text{ мм}^2$ и длиной $l = 1 \text{ см}$ имеют остаточную магнитную индукцию $B = 12560 \text{ Гс}$. Одна игла закреплена неподвижно в плоскости, перпендикулярной земному магнитному полю \mathbf{B}_0 , а другая может свободно вращаться в этой плоскости вокруг оси, проходящей через ее середину на расстоянии $L = 10 \text{ см}$ от центра первой иглы по перпендикуляру к ее оси (рис. 185). Найти период T малых кривильных колебаний иглы. Плотность железа $\rho = 7,8 \text{ г}/\text{см}^3$.

8.76. Тонкое металлическое кольцо быстро вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его диаметр и перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией $B = 100 \text{ Гс}$. Пренебрегая трением в оси, найти время τ , за которое угловая скорость вращения уменьшается в e раз. Плотность материала кольца $\rho = 9 \text{ г}/\text{см}^3$, проводимость $\lambda = 5 \cdot 10^5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Потери энергии за один оборот считать малыми.

8.77. Определить период малых продольных колебаний внутренней обкладки вертикально расположенного цилиндрического конденсатора, заряд которого постоянен и равен Q (рис. 186). Радиус наружного цилиндра R , внутреннего r , высота h , масса внутренней обкладки m , $r \ll h$.

8.78. Электрический заряд Q равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом R (рис. 187). Точечный диполь массой m с дипольным моментом \mathbf{p} может перемещаться вдоль оси кольца, перпенди-

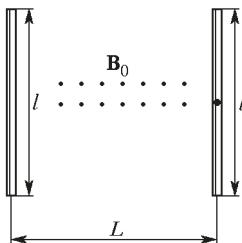


Рис. 185

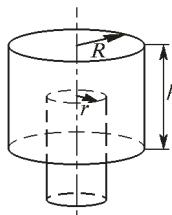


Рис. 186

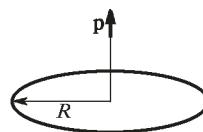


Рис. 187

кулярной его плоскости, причем дипольный момент диполя параллелен оси кольца. В начальный момент времени диполь находится в центре кольца и имеет нулевую скорость.

1) Определить максимальную скорость v_{\max} диполя при его движении вдоль оси кольца. Сила тяжести отсутствует.

2) Определить положение равновесия x_0 диполя.

3) Определить период малых колебаний диполя около положения равновесия.

8.79. Одна из пластин конденсатора жестко закреплена, а вторая, имеющая массу m , связана с пружиной жесткостью k (рис. 188). Расстояние между пластинами при ненапряженной пружине равно d_0 .

К конденсатору подключили батарею. В новом положении равновесия расстояние между пластинами $d = \frac{4}{5}d_0$. Найти период малых колебаний пластины.

8.80. По двум параллельным проводящим плоскостям текут антипараллельные токи с линейной плотностью i . Токи замыкаются через соединяющую плоскости перемычку толщиной δ с удельным сопротивлением ρ (рис. 189). В пространстве между плоскостями совершают дрейфовое движение свободный электрон. Определить величину и направление скорости дрейфа.

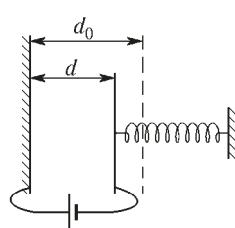


Рис. 188

Изображение **8.81.** Мощный импульс тока распространяется по коаксиальному токопроводу (рис. 190), находящемуся в вакууме. Радиусы внутреннего и внешнего проводников коаксиала равны соответственно $r = 0,6$ см и $R = 1$ см. Между проводниками коаксиала приложено напряжение $V = 600$ кВ. Оценить, каким должен быть ток в токопроводе, чтобы не было «вакуумного пробоя».

Приложение. В таких системах при очень больших токах и мегавольтных напряжениях поверхность токонесущих проводников покрыта плазменной «подушкой» и приобретает неограниченную способность к эмиссии электронов.

8.82. По токопроводу (рис. 191), находящемуся в вакууме, состоящему из двух плоских параллельных полосок шириной $l = 5$ см

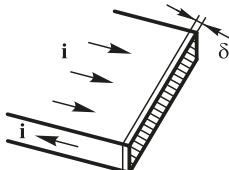


Рис. 189

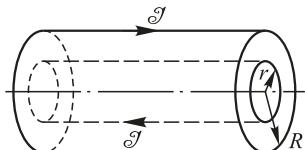


Рис. 190

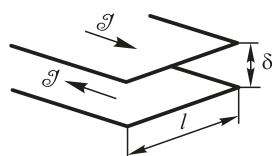


Рис. 191

с зазором между ними $\delta = 0,5$ см, распространяется мощный импульс тока. Напряжение между проводниками составляет $V = 1$ МВ. Оценить, при каком токе в такой линии проводники окажутся эффективно изолированными друг от друга. (См. примечание к задаче 8.81.)

8.83. Два одинаковых плоских изолированных конденсатора с квадратными пластинами площадью S каждая расположены, как показано на рис. 192. В конденсаторы вставлена длинная диэлектрическая пластина массой t с диэлектрической проницаемостью ϵ . Толщина пластины равна толщине зазора в конденсаторах. В положении равновесия пластина заполняет половину объема каждого из конденсаторов.

Конденсаторам сообщены одинаковые заряды q . Емкость конденсаторов без диэлектрика равна C_0 .

1) Определить частоту ω_0 малых колебаний диэлектрической пластиинки, пренебрегая силами трения.

2) Будет ли пластиинка совершать колебания, если конденсаторы соединить параллельно? Почему?

3) Изменится ли частота колебаний, если на одном из конденсаторов изменить знаки зарядов пластин?

8.84. Диэлектрическая незаряженная пластина с проницаемостью $\epsilon = 3$ движется между обкладками плоского конденсатора со скоростью $v = 1 \text{ м/с}$. Перпендикулярно направлению движения пластины и параллельно обкладкам конденсатора приложено однородное постоянное магнитное поле $B = 1,5 \text{ Тл}$. Определить поверхностную плотность зарядов на обкладках конденсатора и поверхностную плотность поляризационных зарядов диэлектрика, если к конденсатору приложена разность потенциалов $V = 1 \text{ В}$. Расстояние между пластиинами конденсатора $d = 2 \text{ см}$ и равно толщине пластины диэлектрика.

8.85. Изолированный плоский конденсатор с квадратными пластиинами площадью S расположен вертикально и заряжен зарядом q . В конденсатор вставлена длинная диэлектрическая пластиинка массой t и диэлектрической проницаемостью ϵ , свободно висящая на пружине с жесткостью k (рис. 193). Толщина пластиинки равна зазору конденсатора. В положении равновесия диэлектрик заполняет половину объема конденсатора. Емкость конденсатора без диэлектрика равна C_0 .

1) Пренебрегая трением, определить частоту ω_0 малых колебаний диэлектрической пластиинки в случаях *a* и *b*, изображенных на рисунке. В обоих случаях пружина растянута.

2) Как изменится частота колебаний, если конденсатор подсоединить к батарее?

8.86. В солнечном ветре, представляющем собой поток плазмы, движущейся относительно Солнца со скоростью $v = 400 \text{ км/с}$, происходит ионизация неподвижных относительно Солнца нейтральных атомов гелия межзвездной среды. Полагая, что вектор магнитной индукции \mathbf{B} в системе отсчета, связанной с ветром, перпендикулярен вектору \mathbf{v} и по модулю равен $5 \cdot 10^{-9} \text{ Тл}$, а также что направления векторов \mathbf{B} и \mathbf{v} остаются постоянными, определить траекторию ионов He^+ после ионизации как функцию времени. В силу высокой проводимости плазмы солнечного ветра считать, что напряженность электрического поля в системе отсчета, связанной с ветром, равна нулю; влиянием гравитационного поля пренебречь.

8.87. В солнечном ветре, представляющем собой поток плазмы, движущейся относительно Солнца со скоростью $v = 1000 \text{ км/с}$, про-

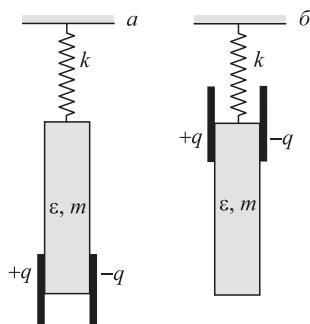


Рис. 193

исходит ионизация неподвижных относительно Солнца нейтральных атомов гелия межзвездной среды. Полагая, что вектор магнитной индукции \mathbf{B} в системе отсчета, связанной с ветром, перпендикулярен вектору скорости \mathbf{v} и по модулю равен $5 \cdot 10^{-8}$ Тл, а также что направления векторов \mathbf{B} и \mathbf{v} остаются постоянными, определить среднюю и максимальную скорость ионов He^+ относительно Солнца. На какое максимальное расстояние в направлении, перпендикулярном векторам \mathbf{v} и \mathbf{B} , смещаются ионы гелия? В силу высокой проводимости плазмы солнечного ветра считать, что напряженность электрического поля в системе отсчета, связанной с ветром, равна нулю; влиянием гравитационного поля пренебречь.

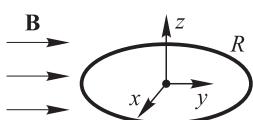


Рис. 194

мости плазмы солнечного ветра считать, что напряженность электрического поля в системе отсчета, связанной с ветром, равна нулю; влиянием гравитационного поля пренебречь.

8.88. Свободная частица с зарядом q

с массой m совершает равномерное круговое движение в поле неподвижного «точечного» электрического диполя с дипольным моментом p . Расстояние от диполя до частицы равно r . Найти угловую скорость вращения частицы.

8.89. В момент времени $t = 0$ в постоянное однородное электромагнитное поле ($E = E_y = 1$ ед. СГСЭ, $B = B_z = 3 \cdot 10^3$ Гс) влетают параллельно оси X со скоростями $v_H = 5 \cdot 10^7$ см/с и $v_\alpha = 2 \cdot 10^7$ см/с ион водорода H^+ и α -частица. Начальные координаты иона водорода $x = 0, y = 0$; α -частицы $x = 0, y = 3,2$ см. Пренебрегая взаимодействием между частицами, определить время и место, где они впервые «соприкоснутся» друг с другом. При вычислении принять округленно $M_{\text{H}} = 2 \cdot 10^{-24}$ г, $M_\alpha = 4M_{\text{H}}$.

8.90. В момент времени $t = 0$ электрон и позитрон влетают в однородное постоянное электромагнитное поле, в котором $E = E_y = 10^{-2}$ ед. СГСЭ, $B = B_z = 3$ Гс. При этом влетают они параллельно оси x со скоростями $v_e = 3 \cdot 10^8$ см/с и $v_p = 2 \cdot 10^8$ см/с.

Начальные координаты электрона: $x = 0, y = 0$, позитрона: $x = 0, y = 12$ см. Пренебрегая взаимодействием между частицами, определить время аннигиляции и место, в котором они аннигилируют.

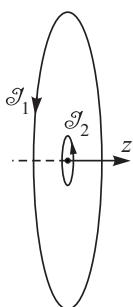


Рис. 195

8.91. В однородном магнитном поле B , направленном вдоль оси y , находится сверхпроводящее кольцо, лежащее в плоскости xy (рис. 194). Масса кольца M , коэффициент самоиндукции L , радиус R . Найти период малых колебаний кольца при вращении вокруг оси x . Начало координат совпадает с центром кольца.

8.92. Электрический диполь с моментом \mathbf{p} и моментом инерции J находится на расстоянии L от идеально проводящей плоскости. Диполь может свободно вращаться относительно оси, параллельной проводящей плоскости и проходящей через его центр масс. Найти период малых колебаний диполя.

Указание. Воспользоваться методом зеркальных изображений.

8.93. Круглый неподвижный виток радиусом R и небольшое кольцо радиусом r ($r \ll R$) и массой m расположены соосно в плоскости $z = 0$ (рис. 195). По витку протекает ток \mathcal{I}_1 , по кольцу — ток \mathcal{I}_2 . Пренебрегая индукционными эффектами, определить период малых колебаний кольца при его смещении вдоль оси z .

8.94. Вдоль оси тонкой торoidalной катушки радиусом R движется с постоянной скоростью v маленькая магнитная стрелка с магнитным моментом \mathfrak{M} , направленным вдоль оси Z (рис. 196). При каких значениях z показания безынерционного вольтметра V , подключенного к катушке, будут максимальными?

8.95. Магнитный диполь с дипольным моментом \mathfrak{M} и моментом инерции J может свободно вращаться относительно оси, проходящей

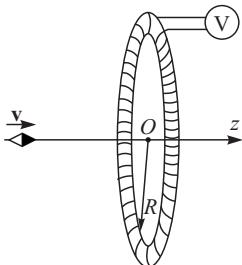


Рис. 196

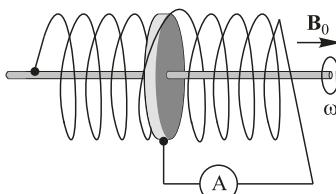


Рис. 197

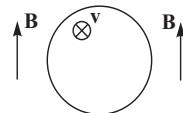


Рис. 198

через его центр масс и расположенной параллельно сверхпроводящей плоскости на расстоянии L от нее. Определить период малых колебаний диполя.

Указание. Воспользоваться методом зеркальных изображений.

8.96. Металлический диск радиусом r может вращаться внутри длинной прямой катушки (рис. 197). Ось вращения диска совпадает с осью катушки. С помощью скользящих контактов один конец катушки соединяется с краем диска, а другой присоединен к оси. Омическое сопротивление катушки равно R , число витков на единицу длины катушки (плотность намотки) равно n . Катушка расположена в магнитном поле Земли B_0 , ориентированном вдоль оси катушки.

1) Найти ток \mathcal{I} , протекающий по катушке, и индукцию магнитного поля B' в катушке при вращении диска с угловой скоростью ω .

2) Нарисовать (качественно) графики зависимости тока \mathcal{I} и магнитного поля B' от угловой скорости ω для двух направлений вращения.

8.97. Диэлектрическая жидкость течет по тонкостенной непроводящей трубе радиусом R с постоянной скоростью v (рис. 198). Труба помещена в постоянное однородное магнитное поле \mathbf{B} , перпендикулярное оси трубы. Диэлектрическая проницаемость жидкости ϵ . Найти электрическое поле \mathbf{E} и вектор поляризации \mathbf{P} внутри жидкости и распределение плотности зарядов σ по поверхности жидкости в радиальном сечении.

8.98. Милливеберметр представляет собой электромеханическую систему, в которой рамка, содержащая N витков площадью S каждый, находится в состоянии безразличного равновесия (т. е. не имеет возвратной пружины). Рамка находится в радиальном магнитном поле с индукцией B так, что магнитный поток, пронизывающий рамку пропорционален углу поворота φ (см. рис. 199). Момент инерции рамки относительно оси вращения J . Рамка включена последовательно с измерительной катушкой и резистором. Общая индуктивность всей цепи L . При резком изменении измеряемого поля в цепи возникает ток. Определить при каких значениях R движение рамки не будет иметь колебательного характера.

8.99. В микротроне — ускорителе электронов — частицы двигаются в постоянном и однородном магнитном поле по раскручивающимся траекториям, в общей точке которых расположен ускоряющий резонатор (рис. 200). Частота ускоряющего поля постоянна и равна $f_0 = 3 \text{ ГГц}$. Чему должен быть равен минимальный прирост энергии

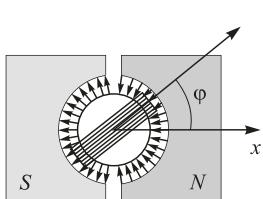


Рис. 199

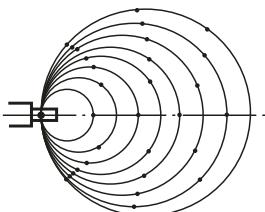


Рис. 200

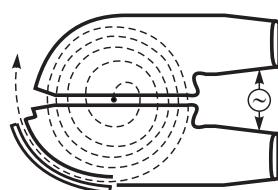


Рис. 201

при каждом проходе ускоряющего резонатора, чтобы все время сохранялся синхронизм ускорения электронов, т. е. электроны проходят ускоряющий резонатор в одной и той же фазе? Чему равно при этом расстояние между орбитами вдоль их общего диаметра?

8.100. В циклотроне ионы закручиваются магнитным полем и получают ускорение в щели между двумя ускоряющими электродами — дуантами (рис. 201). Для резонансного ускорения частота обращения иона и частота ускоряющего поля, которая поддерживается постоянной, должны совпадать. Однако по мере ускорения этот синхронизм начинает нарушаться. До какой максимальной энергии ускорятся в циклотроне протоны, если инжекция частиц произошла при максимальном поле между дуантами?

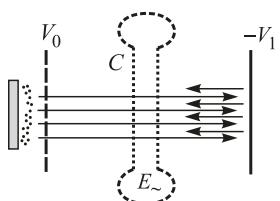


Рис. 202

8.101. В отражательном кластроне — генераторе высокочастотных колебаний — электроны, ускоряясь под действием напряжения $V_0 = 500 \text{ В}$, пролетают через сетчатые пластины конденсатора C , который является частью квазистационарного СВЧ-резонатора, и попадают в область постоянного тормозящего поля, которое возвращает их обратно (рис. 202). На обкладках конденсатора C ре-

зонатора, настроенного на частоту $f = 1$ ГГц, имеется переменное поле $E_\sim = E_0 \sin(2\pi ft)$, которое группирует из электронного пучка сгустки с центром, соответствующим фазе СВЧ-поля $\varphi = \pi$ (электроны, приходящие в тормозящее поле, замедляются, а «отстающие» — ускоряются). При каких напряженностях возвращающего поля E_1 электронные сгустки будут, тормозясь, отдавать в резонатор максимальную энергию?

8.102. Длинный постоянный магнит в виде бруска насажен на ось, проходящую через центр тяжести перпендикулярно грани $a \times b = 24 \times 8$ мм². При вертикальном положении оси период малых крутильных горизонтальных колебаний такого магнита $T_r = 1,18$ с, а при горизонтальном положении оси минимальный период крутильных колебаний в вертикальной плоскости $T_b = 0,62$ с. Масса магнита $m = 9$ г, магнитный момент (вдоль длинной оси бруска) $\mathfrak{M} = 903$ Гс · см³. Найти величину магнитного поля Земли и угол, который оно образует с горизонтом (магнитное наклонение)? Опыт проводился в Долгопрудном (56° с. ш.).

8.103. На рис. 203 показана схема электродвигателя, ротором которого является магнит в форме шара радиусом $r_0 = 2$ см, насаженный на металлическую ось и однородно намагниченный вдоль нее. Шар изготовлен из непроводящего магнетика с намагниченностью $I = 1200$ Гс и покрыт тонким слоем никеля. При подключении к батарейке с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5$ В при помощи скользящих контактов шар приходит во вращение. Батарейка и проводящие провода жестко закреплены. Оценить предельную частоту вращения (об/мин) шара, если полное сопротивление электрической цепи $R = 1,5$ Ом, а сила трения скользящего по «экватору» контакта $F_{tp} = 9$ мН. Электрический контур имеет форму прямоугольника, одна из сторон которого совпадает с осью вращения, а провод со скользящим контактом направлен по радиусу. Размер контура значительно превышает радиус шара.

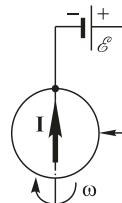


Рис. 203

§ 9. Переходные процессы в электрических цепях. Свободные колебания

9.1. Пластины воздушного конденсатора емкостью $C = 10^{-10}$ Ф соединены с сопротивлением R через батарею с ЭДС \mathcal{E} . Пластины быстро сближаются в течение времени $\Delta t = 10^{-2}$ с, расстояние между ними при этом уменьшается вдвое. При каком условии за это время заряд конденсатора практически не изменится? Найти джоулево тепло $Q_{дж}$, которое выделится в сопротивлении R к моменту окончания перезарядки.

9.2. Описать процесс разрядки конденсатора C_1 после замыкания ключа K , если его начальный заряд равен q_0 . Исследовать случай $R \rightarrow 0$, описать превращения энергии в контуре (рис. 204).

9.3. Для измерения магнитной восприимчивости длинных цилиндрических образцов применяется установка, показанная на рис. 205. При быстром удалении образца, заполняющего всю катушку, на ней возникает импульс напряжения, величина которого измеряется с помощью осциллографа. Определить магнитную восприимчивость χ образца, если $\mathcal{E} = 4,5 \text{ В}$, $R = 10 \Omega$, $L = 1 \text{ Гн}$, $V = 6,8 \text{ мВ}$. Каким должно быть время удаления образца, чтобы от него зависела амплитуда импульса напряжения, измеряемого осциллографом?

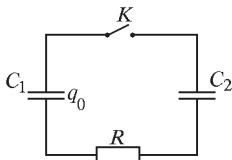


Рис. 204

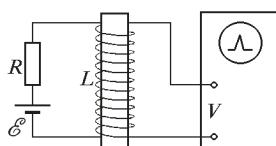


Рис. 205

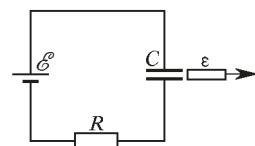


Рис. 206

9.4. Из конденсатора быстро извлекают пластину с диэлектрической проницаемостью ϵ так, что емкость скачкообразно изменяется до значения C (рис. 206). Найти зависимость тока в цепи от времени и нарисовать график $\mathcal{I}(t)$. Диэлектрик заполняет весь объем конденсатора.

9.5. Колебательный контур содержит индуктивность и емкость. В некоторый момент времени из конденсатора быстро извлекают пластину с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$. Как изменится частота колебаний контура? Во сколько раз изменятся максимальные величины заряда на конденсаторе и тока в катушке, если пластину извлекают в момент, когда заряд на конденсаторе 1) отсутствует и 2) максимален?

9.6. Постоянная времени разряда плоского масляного конденсатора через некоторое сопротивление равна τ_1 . После того как масло конденсатора отсырело, постоянная времени разряда через то же сопротивление оказалась равной τ_2 . Определить удельное сопротивление ρ отсыревшего масла, если его диэлектрическая проницаемость ϵ не изменилась.

9.7. Сферический конденсатор с радиусами сфер R_1 и R_2 заполнен слабо проводящей средой. Емкость конденсатора равна C , а разность потенциалов на конденсаторе после отключения его от батареи уменьшается в два раза за время t . Определить диэлектрическую проницаемость ϵ среды и ее удельное сопротивление ρ .

9.8. Последовательно соединенные дроссель L и омическое сопротивление присоединены к источнику постоянного тока с ЭДС \mathcal{E} . Полное омическое сопротивление цепи равно R . Индуктивность дросселя, когда в него вставлен железнный сердечник, равна L_1 . Индуктивность того же дросселя без железного сердечника L_2 . Вначале сердечник был вставлен. В момент времени $t = 0$, когда ток в цепи уже установился, очень быстро вынимают железненный сердечник (в течение времени, пренебрежимо малого по сравнению с временем

установления тока). Определить силу тока \mathcal{I} в цепи в зависимости от времени t для $t > 0$.

9.9. Длинный тонкий соленоид радиусом r_0 подключен к батарее, и по нему течет постоянный ток \mathcal{I}_0 . Сердечником в соленоиде служит сплошной цилиндр из сверхпроводника. Радиус сердечника $r_1 = 0,5r_0$. Сердечник быстро выдергивают из соленоида. Найти значение \mathcal{I}_1 тока в обмотке непосредственно после удаления сердечника. Как будет меняться ток в дальнейшем? Нарисуйте качественный график.

9.10. Колебательный контур содержит индуктивность и емкость. Катушка индуктивности представляет собой соленоид с сердечником из сверхпроводника. Радиус соленоида в два раза больше радиуса сердечника. В некоторый момент времени сердечник быстро выдергивают из соленоида. Как изменится частота колебаний контура? Во

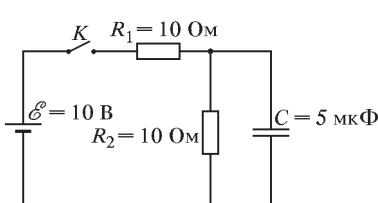


Рис. 207

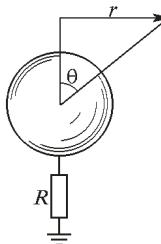


Рис. 208

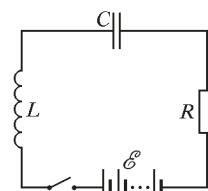


Рис. 209

сколько раз изменятся максимальные величины заряда на конденсаторе и тока в катушке, если сердечник выдергивают в момент, когда ток в катушке 1) отсутствует и 2) максимальен?

9.11. Определить закон изменения напряжения V на конденсаторе C после замыкания ключа K в основной цепи схемы, представленной на рис. 207.

9.12. Проводящий шар радиусом $a = 20$ см (рис. 208), находящийся при потенциале $V_0 = -3 \cdot 10^4$ В, разряжается через сопротивление $R = 5 \cdot 10^3$ Ом. В квазистационарном приближении определить возникающее при этом магнитное поле $B(t, r, \theta)$ вне шара.

9.13. К контуру L, C, R (рис. 209) с малым затуханием в момент $t = 0$ подключают источник постоянной ЭДС \mathcal{E} с ничтожно малым внутренним сопротивлением. Определить напряжение V на конденсаторе C в зависимости от времени t . На какое минимальное напряжение должен быть расчитан конденсатор?

9.14. Катушка индуктивностью L , конденсатор емкостью C и батарея с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением R соединены параллельно (рис. 210). Найти силу тока \mathcal{I} , текущего через катушку, как

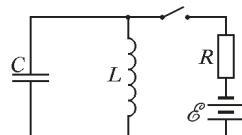


Рис. 210

функцию времени t после включения батареи. Параметры L , C , R удовлетворяют условию $C/L > 1/(4R^2)$.

9.15. Цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивления R и большой индуктивности L , присоединена к источнику постоянного тока, поддерживающего на зажимах постоянное напряжение V_0 . Для ограничения перенапряжений во время отключения источника параллельно с цепью включен конденсатор емкостью C (рис. 211). Определить напряжение на конденсаторе $V(t)$ после отключения источника постоянного напряжения. Параметры контура удовлетворяют условию $4L > CR^2$.

9.16. При отключении цепей постоянного тока, обладающих большой индуктивностью (например, обмоток возбуждения генераторов постоянного тока), эти цепи предварительно замыкают на параллельно включенное сопротивление r для ограничения перенапряжений (рис. 212). Определить, во сколько раз в этом случае максимальное напряжение на зажимах цепи V_{\max} будет превышать приложенное постоянное напряжение V_0 .

9.17. В колебательном контуре с индуктивностью L и емкостью C совершаются незатухающие колебания силы тока $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$, где $\omega^2 = 1/(LC)$. Катушкой индуктивности служит прямая длинная проволочная спираль. Как изменятся частота, амплитуда и энергия колебаний, если в момент времени $t = 0$ очень быстро (т. е. в течение

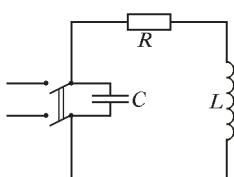


Рис. 211

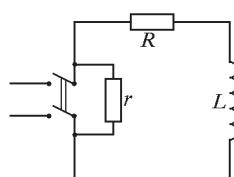


Рис. 212

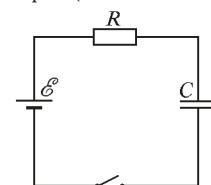


Рис. 213

времени, малого по сравнению с периодом колебаний $T = 2\pi/\omega$) растянуть спираль до удвоенной длины? Объяснить, почему при этом меняется энергия колебаний.

9.18. К заряженному до напряжения V_0 конденсатору емкостью C_1 подключается незаряженный конденсатор емкостью C_2 . Найти зависимость тока в цепи от времени, если влиянием индуктивности цепи можно пренебречь, а сопротивление цепи равно R .

9.19. Конденсатор емкостью C несет заряд q . При параллельном соединении этого конденсатора с незаряженным конденсатором той же емкости часть энергии выделяется в виде тепла в соединительных проводах. Найти количество выделенного в проводах тепла $Q_{\text{дж}}$ прямым расчетом, не прибегая к закону сохранения энергии. Индуктивностью проводов пренебречь.

9.20. Конденсатор C заряжается от батареи \mathcal{E} через нелинейное сопротивление R (рис. 213), сила тока в котором связана с напряжением соотношением $\mathcal{I} = \lambda V^{3/2}$ (λ — постоянная величина). Найти

зависимость силы тока в цепи от времени, если батарея включена при $t = 0$.

9.21. При размыкании рубильника K в электрической цепи, изображенной на рис. 214, возник дуговой разряд. Определить ток в цепи. Вольт-амперная характеристика дугового разряда имеет вид $V = a + b/\mathcal{I}$, где a и b — известные постоянные величины.

9.22. Сверхпроводящие катушки с самоиндукциями L_1 и L_2 соединены параллельно и включены через сопротивление R в цепь гальванической батареи с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (рис. 215). Найти токи в катушках \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 и ток в общей цепи \mathcal{I} , если коэффициентом взаимной индукции катушек можно пренебречь.

9.23. Длинный соленоид, длина которого равна l , а площадь витков S , замыкается в некоторый момент времени последовательно с сопротивлением R на источник постоянного напряжения с ЭДС \mathcal{E} . В средней части соленоида находится небольшое короткозамкнутое кольцо, площадь которого равна σ , сопротивление r . Плоскость кольца перпендикулярна оси соленоида. Пренебрегая самоиндукцией кольца, определить радиальное давление на кольцо (т. е. радиальную силу на единицу длины кольца) в тот момент, когда это давление максимально.

9.24. Тороидальная катушка с радиусом тора R и радиусом витков r ($r \ll R$) замыкается в некоторый момент последовательно с сопротивлением R_0 на источник постоянного напряжения с ЭДС \mathcal{E} . Внутри катушки находится небольшое короткозамкнутое кольцо, площадь которого равна σ , а сопротивление r_0 . Плоскость кольца совпадает с плоскостью одного из витков тора. Пренебрегая самоиндукцией кольца, определить энергию джоулевых потерь $Q_{\text{дж}}$ в кольце за все время установления тока в цепи тора.

9.25. Соленоид, реостат и источник постоянного напряжения включены последовательно. Соленоид равномерно растягивают со скоростью $v = 50 \text{ см/с}$, одновременно передвигая движок реостата так, что сила тока в цепи остается постоянной. На сколько изменится сопротивление реостата, когда длина соленоида увеличится вдвое, если соленоид после растяжения имеет плотность витков $n = 50 \text{ см}^{-1}$, а диаметр его поперечного сечения $D = 10 \text{ см}$.

9.26. Два соленоида имеют одинаковые геометрические размеры, но один из них изготовлен из провода вдвое большей площади поперечного сечения и вдвое меньшей длины, чем другой. Материал проводов обоих соленоидов одинаков. В обмотке какого из соленоидов будет выделяться больше тепла, если магнитные поля в них одинаковы? У какого из соленоидов меньше время установления магнитного поля?

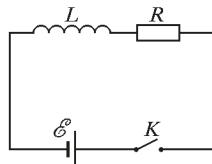


Рис. 214

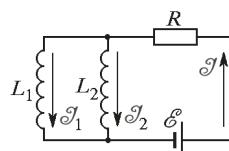


Рис. 215

9.27. В схеме, изображенной на рис. 216, в некоторый момент времени замыкают ключ K , и конденсатор C , имеющий первоначальный заряд q_0 , начинает разряжаться через индуктивность L . Когда ток разряда достигает максимального значения, ключ K вновь размыкают. Какой заряд протечет через сопротивление R ? Сопротивление диода D в схеме в прямом направлении много меньше R , в обратном — бесконечно велико.

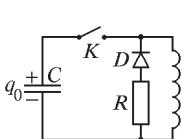


Рис. 216

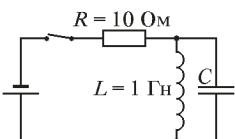


Рис. 217

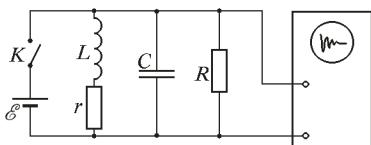


Рис. 218

размыкают. Какой заряд протечет через сопротивление R ? Сопротивление диода D в схеме в прямом направлении много меньше R , в обратном — бесконечно велико.

9.28. Ключ (схема на рис. 217) размыкают, и в контуре возникают колебания. Какой должна быть емкость C , чтобы напряжение на емкости не более чем в $n = 100$ раз превосходило напряжение на батарее?

9.29. При измерении добротности Q резонансного контура из параллельно включенных катушки с индуктивностью $L = 0,1$ Гн и со-

противлением $r = 30$ Ом и конденсатора с емкостью $C = 30$ пФ поступили следующим образом. Контур подключили к клеммам осциллографа и, включая и выключая ЭДС постоянного тока, наблюдали затухающие колебания в контуре (рис. 218). Сравнить добротности контура при разомкнутой цепи батареи в случае, когда входное сопротивление R осциллографа очень велико и когда оно конечно и равно 100 кОм.

9.30. После размыкания ключа в контуре (рис. 219) возникают медленно затухающие колебания, максимальная амплитуда напряжения которых в $n = 100$ раз превосходит напряжение батареи. Найти собственную частоту контура ω_0 , если уменьшение амплитуды колебаний в e раз происходит за время $\tau = 0,1$ с.

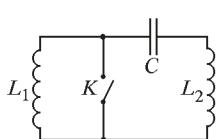


Рис. 220

9.31. Электрическая цепь представляет собой треугольник, каждая сторона которого содержит емкость C , а вершины соединены с общей центральной точкой индуктивностями L . Найти частоту возможных колебаний.

9.32. Через индуктивность L_1 и замкнутый ключ K течет ток \mathcal{I}_0 , а напряжение на конденсаторе равно нулю (рис. 220). В момент времени $t = 0$ ключ размыкается. Найти напряжение на конденсаторе и ток через него как функции времени. Активным сопротивлением всех элементов цепи пренебречь.

9.33. С помощью осциллографа наблюдают свободные затухающие колебания в колебательном контуре. Как изменится число коле-

баний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда затухает в e раз, если в два раза уменьшить индуктивность контура L и в два раза увеличить его емкость C , сохранив неизменным активное сопротивление?

9.34. На рис. 221 изображена схема зажигания автомобиля. Вторичная обмотка высоковольтного трансформатора нагружена на запальную свечу. Первичная обмотка имеет сопротивление $R = 2,5 \Omega$ и индуктивность $L = 10^{-3} \text{ Гн}$ и подключена через конденсатор с емкостью $C = 0,2 \text{ мкФ}$ к источнику постоянной ЭДС $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$. Отношение числа витков обмоток трансформатора $N_2/N_1 = 40$. Определить, через какое время после размыкания прерывателя (ключа K) возникнет разряд. Пробой зарядного промежутка свечи возникает при напряжении $U_{\text{раз}} = 3 \text{ кВ}$.

9.35. Колебательный контур содержит катушку с индуктивностью L и конденсатор с утечкой. Емкость конденсатора равна C , сопротивление R . Пренебрегая активным сопротивлением катушки и прочих проводов, вывести уравнение собственных колебаний контура. Найти собственную частоту ω_0 и логарифмический декремент затухания d .

9.36. Конденсатор $C = 0,1 \text{ мкФ}$, заряженный до напряжения ЭДС $\mathcal{E} = 1 \text{ кВ}$, в момент $t = 0$ замыкается на катушку индуктивностью

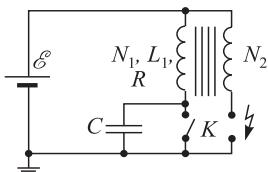


Рис. 221

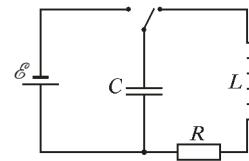


Рис. 222

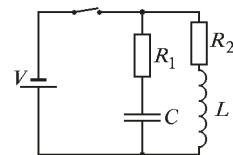


Рис. 223

$L = 100 \text{ мГн}$ и сопротивление, равное критическому для образовавшегося контура (рис. 222). Определить время, за которое ток достигнет максимального значения, и вычислить это значение тока.

9.37. Найти добротность контура с емкостью $C = 2,0 \text{ мкФ}$ и индуктивностью $L = 5,0 \text{ мГн}$, если на поддержание в нем незатухающих колебаний с амплитудой напряжения на конденсаторе $V_0 = 1,0 \text{ В}$ необходимо подводить среднюю мощность $\bar{N} = 0,10 \text{ мВт}$. Затухание колебаний в контуре можно считать малым.

9.38. Изображенная на рис. 223 цепь питается источником напряжения V . 1) Как будут изменяться ток через индуктивность и напряжение на конденсаторе после размыкания ключа? 2) Составить уравнение для определения момента t_1 , в который энергия, запасенная в конденсаторе, будет иметь наибольшее значение. Рассмотреть случай слабого затухания.

9.39. Груз массой m подвешен на тонкой проволоке длиной l и сопротивлением R в однородном горизонтальном магнитном поле B и совершает малые колебания в плоскости, перпендикулярной полю.

При этом проволока всегда остается замкнутой накоротко неподвижной внешней цепью. Найти число колебаний, по прошествии которых амплитуда тока в цепи уменьшится в e раз.

9.40. В колебательном контуре с малым затуханием одновременно увеличивают емкость конденсатора и самоиндукцию катушки в одно и то же число раз, равное n . Увеличение производится в произвольный момент за время, малое по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти соотношение между амплитудами тока \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 до и после изменения параметров контура.

9.41. Кольцо из тонкой проволоки, имеющеее омическое сопротивление $R = 10 \text{ Ом}^{-3}$, массу $m = 1 \text{ г}$ и радиус $r = 1 \text{ см}$, подвешено на упругой нити и совершає малые крутильные колебания с частотой $v_0 = 1 \text{ Гц}$ (рис. 224). Если поместить кольцо в магнитное поле, параллельное плоскости кольца в положении равновесия, то возникает сильное затухание колебаний. Оценить магнитную индукцию поля, при которой движение крутильного маятника происходит в критическом режиме (т. е. колебательный режим переходит в апериодический). Самоиндукцию кольца и затухание без магнитного поля не учитывать.

9.42. В схеме, приведенной на рис. 225 и состоящей из двух контуров, в некоторый момент, когда в первом контуре уже установился ток, одновременно и мгновенно разомкнули ключ K_1 , а K_2 замкнули.

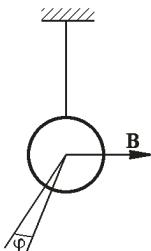


Рис. 224

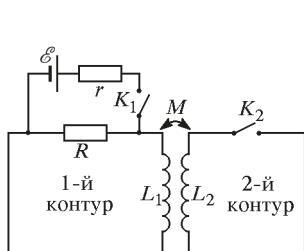


Рис. 225

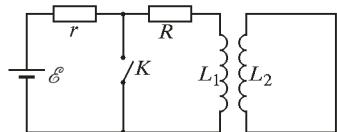


Рис. 226

Вычислить величину энергии W_R , выделившейся на сопротивлении R , а также энергию W_2 , полученную вторым контуром. Дано: E , r , L_1 , L_2 , M . Омическим сопротивлением во втором контуре пренебречь.

9.43. На рис. 226 изображена электрическая цепь, состоящая из батареи E , сопротивлений r и R и индуктивности L_1 . К катушке L_1 издалека приближают короткозамкнутую сверхпроводящую катушку с индуктивностью L_2 . Первоначально ток в этой катушке отсутствует, а после сближения с катушкой L_1 он становится равным \mathcal{I}_2 . После сближения катушек ключ K замыкают. Какая энергия выделится на сопротивлении R в виде джоулева тепла?

9.44. Генератор с весьма малым внутренним сопротивлением посыпает в контур прямоугольный импульс напряжения (рис. 227).

Пренебрегая затуханием, найти: 1) при какой длительности импульса T_1 в контуре отсутствуют колебания после прекращения импульса; 2) при какой длительности импульса T_2 амплитуда колебаний напряжения на емкости максимальна (после прекращения импульса). Чему она равна? Для обоих случаев нарисуйте графики тока и напряжения, начиная с момента t_0 .

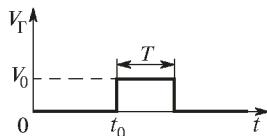
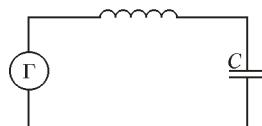


Рис. 227

9.45. Конденсатор емкостью C присоединен к верхним концам двух параллельных медных шин, расположенных вертикально на расстоянии l друг от друга. Однородное магнитное поле B горизонтально и перпендикулярно к плоскости шин. Вдоль шин в магнитном поле падает без начальной скорости медный проводник массой m так, что всегда имеется контакт между проводником и шинами. Сопротивлением и индуктивностью проводников, а также трением проводника о шины пренебречь. Найти: 1) ускорение проводника; 2) силу тока, заряжающего конденсатор.

9.46. В условиях предыдущей задачи вместо конденсатора шины замкнуты вверху на соленоид, индуктивность которого равна L , а сопротивление ничтожно мало. Найти закон движения проводника, скользящего вдоль шин.

9.47. Две длинные параллельные медные шины, расположенные вертикально на расстоянии l друг от друга, замкнуты вверху на сопротивление R и помещены в однородное магнитное поле B , перпендикулярное к плоскости шин. Вдоль шин падает медный проводник весом P . Трение отсутствует. Чему равно установленвшееся значение скорости падения?

9.48* По двум вертикальным идеальным проводам (см. предыдущую задачу) в поле силы тяжести может скользить без трения идеальная проводящая перемычка массой m и длиной l (рис. 228). Проводники сверху замкнуты индуктивностью L , а снизу — сопротивлением R . Перемычка сначала удерживается в некотором положении, а затем отпускается без толчка. Найти положение равновесия перемычки и характер переходного процесса.

9.49. Конденсатор емкостью C^* и катушка индуктивностью L присоединены к верхним концам двух параллельных медных шин, расположенных вертикально на расстоянии l друг от друга (рис. 229). Однородное магнитное поле B горизонтально и перпендикулярно к плоскости шин. Вдоль шин в магнитном поле без начальной скорости падает медный проводник массой m так, что всегда имеется контакт между проводником и шинами. Со-

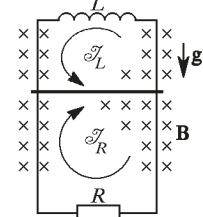


Рис. 228

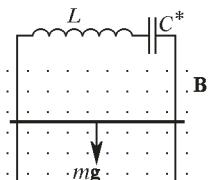


Рис. 229

противлением катушки, медных шин и проводника, а также индуктивностью проводников и трением проводника о шины пренебречь. Определить закон изменения тока $\mathcal{I}(t)$, а также координаты проводника $x(t)$, начиная с момента начала падения $t = 0$, $x(0) = 0$.

9.50. С одной из пластин конденсатора мгновенно испаряется тонкий слой вещества, несущий заряд $-q_0$, который затем движется

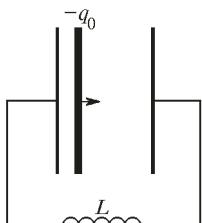


Рис. 230

как целое с постоянной скоростью v_0 к противоположной пластине (рис. 230). Найти зависимость тока в LC -цепи от времени при движении слоя в конденсаторе. Расстояние между пластинами конденсатора d , площадь пластин S . Индуктивность равна L .

9.51. В однородное электрическое поле E_0 перпендикулярно ему помещены две плоскопараллельные незаряженные металлические пластины, образующие плоский конденсатор. В момент

времени $t = 0$ пластины закорачиваются через катушку индуктивностью L . Вычислить зависимость заряда конденсатора от времени. Площадь пластины S , расстояние между пластинами d .

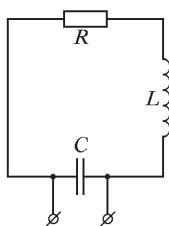


Рис. 231

9.52. В центре уединенной незаряженной проводящей сферы радиусом R находится точечный заряд Q . В некоторый момент $t = 0$ сферу заземляют через катушку с индуктивностью L длинным и тонким проводом. Определить зависимость заряда сферы от времени (активным сопротивлением катушки и провода пренебречь).

9.53. Резонансный контур L, C, R (рис. 231) раскачивается периодически следующими импульсами такими, что каждый отдельный импульс создает на конденсаторе дополнительное напряжение V . Промежутки времени между последовательными импульсами в целое число n раз больше периода собственных колебаний. Определить

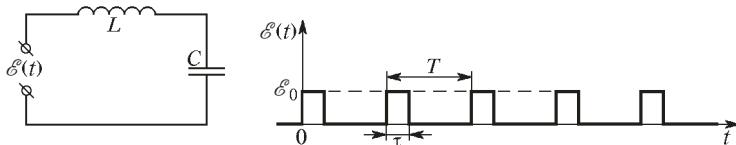


Рис. 232

амплитуду V_0 установившихся колебаний, считая декремент затухания контура малым.

9.54. В момент времени $t = 0$ идеальный LC -контур с собственной частотой 100 Гц возбуждается периодической последовательностью импульсов с длительностью $\tau = 0,02$ с, изображенной на рис. 232 ($\mathcal{E}_0 = 5$ В). Найти период следования импульсов T , при ко-

тором среднее значение напряжения на конденсаторе $V_{\text{ср}} = 2$ В. Нарисуйте график зависимости $V_C(t)$.

9.55. В момент времени $t = 0$ идеальный контур L, C (рис. 232) с периодом собственных колебаний $T_0 = 0,01$ с возбуждается периодической последовательностью прямоугольных импульсов $\mathcal{E}(t)$. Какова длительность импульсов τ , если период их следования $T = 0,09$ с, а среднее значение напряжения на конденсаторе составляет $1/6$ часть от максимального значения? Нарисуйте график зависимости $V_C(t)$.

9.56. Намагниченная пуля пролетает вдоль оси длинного соленоида, входящего в колебательный контур. Время пролета пулей расстояния, равного диаметру соленоида, мало по сравнению с периодом T колебаний в контуре. При какой скорости v пули амплитуда колебаний тока в контуре максимальна? Какова при этом величина тока \mathcal{I}_{\max} ? Магнитный момент пули \mathfrak{M} параллелен оси соленоида. Принять, что длина соленоида $l = 0,5$ м, площадь поперечного сечения $S = 5$ см 2 , число витков $N = 10^4$, магнитный момент пули $\mathfrak{M} = 0,1$ А · м 2 , период $T = 0,01$ с. Сопротивлением контура пренебречь.

9.57. Найти добротность колебательного контура, составленного из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L , если катушка заполнена слабопроводящим материалом с удельной проводимостью λ и магнитной проницаемостью μ . Радиус катушки a . Сопротивлением проводов и потерями энергии на перемагничивание сердечника пренебречь.

9.58. В схеме, изображенной на рис. 233, при замыкании ключа K через гальванометр Γ протек заряд $q = 3 \cdot 10^{-4}$ Кл. Известны следующие параметры схемы: $\mathcal{E} = 120$ В, $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 300$ Ом. Определить коэффициент взаимоиндукции M катушек L_1 и L_2 .

9.59. В схеме, изображенной на рис. 234, катушки L_1 и L_2 намотаны на общий магнитный сердечник с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$. При замыкании ключа K в первом контуре через гальванометр Γ , включенный во вторичный контур, протекает заряд $q = 5 \cdot 10^{-4}$ Кл. Известны $R_2 = 400$ Ом, $L_2 = 0,2$ Гн. Установившийся ток в первичном контуре $\mathcal{I}_0 = 1$ А. Определить коэффициент самоиндукции катушки L_1 .

9.60. Конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $V = 400$ В, при замыкании ключа K подключается к соленоиду круглого сечения длиной $l = 40$ см. Соленоид представляет собой спираль, верхний конец которой закреплен, а нижний соединен с грузом M , лежащим на подставке (рис. 235). В начальный момент

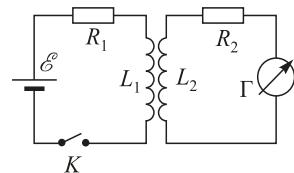


Рис. 233

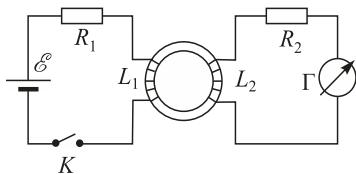


Рис. 234

спираль находится в недеформированном состоянии. Предполагая сопротивление цепи равным нулю, определить, при каком условии груз M подпрыгнет над подставкой при замыкании ключа K .

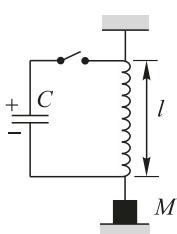


Рис. 235

9.61. Колебательный контур, изображенный на рис. 236, имеет добротность $Q = 50$ и настроен на частоту $f_0 = 500$ Гц, $\mathcal{E} = 10$ В. Первоначально ключ K был продолжительное время замкнут, и в цепи установился стационарный процесс. В момент времени $t = 0$ ключ размыкают. Определить для последующего после размыкания ключа процесса:

1) максимальное значение напряжения на конденсаторе V_{\max} ;

2) время τ , через которое напряжение на конденсаторе достигнет максимального значения в первый раз.

9.62. Как изменится добротность контура с заданными L , C , R ($R \ll \sqrt{L/C}$) при замыкании накоротко сверхпроводящей катушки L , если коэффициент взаимной индукции катушек $M = (4/5)L$ (рис. 237)? Как изменится добротность контура, если после замыкания ключа K изменением емкости конденсатора C настроить контур на прежнюю частоту?

9.63. Некоторому классу генераторов СВЧ соответствует эквивалентная схема, приведенная на рис. 238, где R_0 — резистор с отрицательным сопротивлением. Найти предельное значение этого сопротивления, при котором в контуре возникнет генерация. Параметры

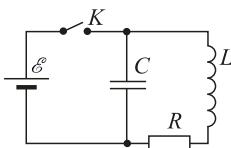


Рис. 236

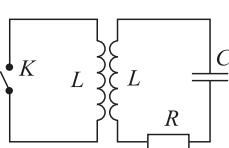


Рис. 237

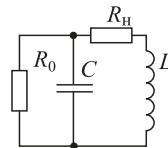


Рис. 238

элементов схемы: емкость $C = 80$ пФ, индуктивность $L = 2,5$ мкГн, сопротивление нагрузки $R_h = 120$ Ом.

9.64. Некоторому классу высокочастотных генераторов незатухающих колебаний соответствует эквивалентная схема, приведенная на рис. 238, где R_0 — резистор с отрицательным сопротивлением (накачку энергии в колебательный контур с использованием цепи обратной связи в автокоавитационной системе можно описать с помощью эквивалентного «отрицательного сопротивления»). Найти модуль предельного значения этого сопротивления $|R_0|$, при котором в контуре возникнет генерация. Определить частоту генерации при $|R_0| = |R_{\text{пред}}|$. Параметры элементов схемы: $C = 80$ пФ, $L = 2,5$ мкГн, сопротивление нагрузки $R_h = 100$ Ом.

Указание. Необходимо написать дифференциальное уравнение, описывающее процесс в схеме.

9.65. Эквивалентная схема одного из генераторов незатухающих электрических колебаний изображена на рис. 239. Здесь L , C и R — элементы колебательного контура, R_3 — отрицательное сопротивление, вносимое в контур цепью обратной связи. Полагая, что пассивный изолированный контур (без цепи обратной связи) имеет высокую добротность, определить:

- 1) частоту генерации ω_0 ;
- 2) значение R_3 , при котором в схеме возникают незатухающие колебания, если $L = 10^{-2}$ Гн, $C = 10^{-6}$ Ф, $R = 10^4$ Ом;
- 3) Определить также добротность Q пассивного контура.

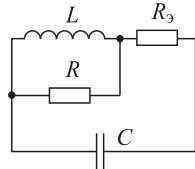


Рис. 239

§ 10. Вынужденные колебания. Резонанс.

Метод комплексных амплитуд

10.1. Железный сердечник несет на себе две обмотки. Одна обмотка из большого числа n витков присоединена к источнику синусоидальной ЭДС \mathcal{E} . Другая обмотка состоит из одного кольца,

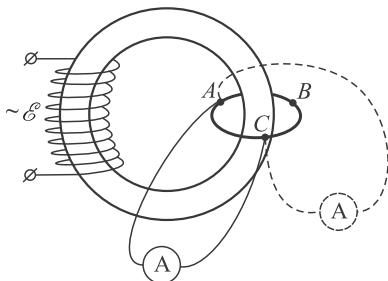


Рис. 240

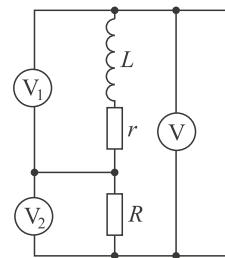


Рис. 241

сопротивление которого R . Точки A , B и C этого кольца (рис. 240) отстоят друг от друга на равные расстояния.

1) Что покажет достаточно чувствительный амперметр переменного тока с сопротивлением r , если его присоединить к двум из этих точек?

2) Как изменится показание амперметра, если его перебросить в положение, указанное штриховой линией на рисунке? Железный сердечник не имеет магнитного рассеяния. Индуктивностью кольца и соединительных проводов можно пренебречь.

10.2. Для определения мощности, выделяемой переменным током в катушке (индуктивность L , сопротивление r — неизвестны), иногда применяют метод трех вольтметров, заключающийся в следующем. Последовательно с катушкой включают известное сопротивление R и присоединяют к цепи три вольтметра так, как показано на рис. 241. Измеряют с помощью этих вольтметров эффективные напряжения:

V_1 — на катушке, V_2 — на сопротивлении и V — между концами цепи. Зная показания приборов, определить искомую мощность N .

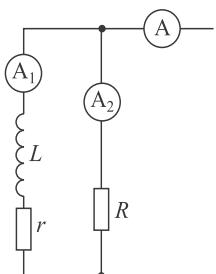


Рис. 242

10.3. Для определения мощности, выделяемой переменным током в катушке (индуктивность L , сопротивление r — неизвестны), иногда применяют метод трех амперметров, состоящий в следующем (рис. 242). Параллельно катушке включают известное сопротивление R . Измеряют эффективные значения токов: I_1 — через катушку, I_2 — через сопротивление R и полный ток I . Зная показания приборов, определить искомую мощность N .

10.4. К источнику синусоидального напряжения $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ в момент времени $t = 0$ подключают последовательно соединенные сопротивление R и индуктивность L . Найти силу тока \mathcal{I} как функцию времени и фазы φ . При каком условии после замыкания цепи в ней сразу установятся синусоидальные колебания?

10.5. В приведенной на рис. 243 схеме в момент $t = 0$ замыкают ключ K . Найти зависимость от времени тока \mathcal{I} , текущего через источник синусоидальной ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$. Параметры контура связаны соотношением $R = \sqrt{L/C}$.

10.6. С помощью схемы, показанной на рис. 244, требуется получить фазовый сдвиг на угол 90° между напряжением на входе $V_{\text{вх}}$

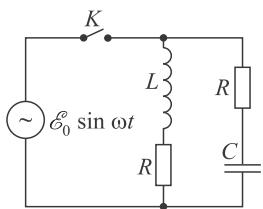


Рис. 243

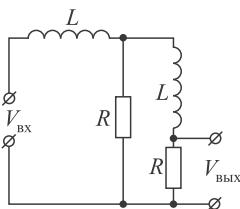


Рис. 244

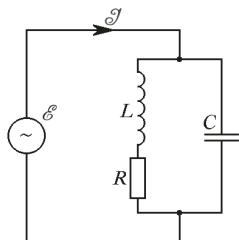


Рис. 245

и напряжением на выходе $V_{\text{вых}}$. Какому условию должны удовлетворять параметры схемы R и L , если циклическая частота входного напряжения равна ω ? Чему при этом будет равно отношение амплитуд входного и выходного напряжений?

10.7. Обмотка электромагнита, полное сопротивление которой $Z = 10$ Ом и коэффициент мощности $\cos \varphi = 0,6$, присоединены к цепи переменного тока. Каким будет коэффициент мощности $\cos \varphi'$, если параллельно обмотке присоединить конденсатор, реактивное сопротивление которого равно $Z_1 = 7$ Ом?

10.8. Источник переменного тока с циклической частотой ω и ЭДС \mathcal{E} действует на высокодобротный колебательный контур (рис. 245). Определить силу тока \mathcal{I} и сдвиг фазы φ между \mathcal{E} и \mathcal{I} при резонансе.

10.9. Найти ток \mathcal{I} (в установившемся режиме) в цепи, изображенной на рис. 246. При какой частоте ω амплитуда установившихся колебаний будет максимальна и при какой минимальна? Чему равны максимум и минимум тока?

10.10. Индуктивностью резонансного контура ($f_0 = 10$ МГц) служит длинная однослоиняя катушка диаметром $D = 10$ мм. Во сколько раз изменится резонансная частота контура, если внутрь катушки вставлен на всю длину латунный цилиндр диаметром $D/2$? Сопротивление латуни $\rho = 8 \cdot 10^{-6}$ Ом · см.

10.11. В цепь, состоящую из последовательно включенных сопротивления R , индуктивности L и емкости C , включен последовательно источник синусоидальной ЭДС постоянной амплитуды и перестраиваемой частоты. Изменяя частоту источника, настраивают ее в резонанс с частотой цепи, затем уменьшают емкость контура в два раза и снова добиваются резонанса. Изменится ли сила тока при резонансе? Каково отношение резонансных частот, соответствующих первому и второму случаям?

10.12. Показать, что в контуре задачи 10.11 амплитуда силы тока \mathcal{I} при отклонении частоты внешней ЭДС на небольшую величину Δf^*) от резонансной частоты f_0 будет связана с амплитудой \mathcal{I}_0 силы тока при резонансе соотношением

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{I}_0}{\sqrt{1 + \left(2 \frac{\Delta f}{f_0}\right)^2 Q^2}},$$

где $Q = R^{-1} \sqrt{L/C}$ — добротность контура.

10.13. Через баллистический гальванометр пропускается кратковременный импульс тока. При этом его рамка отклоняется на угол φ_0 . Спустя половину периода, когда рамка гальванометра вернется в исходное положение, через гальванометр пропускается такой же импульс тока, но в противоположном направлении; через следующую половину периода пропускается снова такой же импульс, но в первоначальном направлении, и т. д. Таким образом, всякий раз, когда рамка гальванометра проходит через положение равновесия, она испытывает одинаковые толчки в направлении своего движения. Найти максимальный угол отклонения рамки φ_{\max} при установившихся колебаниях. Период затухающих колебаний гальванометра T , коэффициент затухания δ .

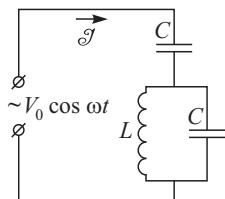


Рис. 246

*) Δf называется «расстройкой», а $\Delta f/f_0$ — «относительной расстройкой» частоты.

10.14. При свободных колебаниях некоторого контура амплитуда падает в e раз за время $\tau = 1$ с. Считая добротность этого контура достаточно большой, найти:

1) расстройку $\Delta\omega_1$ (при снятии резонансной кривой), при которой потребляемая контуром мощность падает в два раза;

2) расстройку $\Delta\omega_2$, при которой сдвиг фазы меняется на $\pi/4$. (См. сноску к задаче 10.12.)

10.15. При изменении частоты f вынуждающей силы, действующей на линейную колебательную систему, меняется фаза φ установившихся колебаний этой системы и запасенная в ней энергия W . Пусть при малом сдвиге частоты от резонансной $\Delta f = 1$ Гц фаза колебаний φ изменилась на $\pi/4$. Как изменится при этом энергия W ? Каково время затухания τ системы в режиме свободных колебаний?

10.16. В колебательном контуре с индуктивностью $L = 1$ Гн, настроенном в резонанс, под действием внешнего синусоидального напряжения с амплитудой $V_0 = 200$ В установился переменный ток с амплитудой $I_0 = 20$ А. Найти сопротивление контура R и время затухания τ (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз) в режиме свободных затухающих колебаний.

10.17. Прямой однослойный соленоид с индуктивностью L совершает вынужденные крутильные гармонические колебания вокруг своей оси $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$. Соленоид гибкими проводами присоединен к конденсатору емкостью C (опыт Мандельштама и Папалекси). Найти напряжение на конденсаторе при резонансе, когда частота ω равна собственной частоте колебательного контура $\omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$. Радиус соленоида a , длина проволоки, из которой он изготовлен, l , сопротивление соленоида R .

10.18. В резонансном контуре вдвое увеличили индуктивность L и вдвое уменьшили емкость C , оставив неизменным активное сопротивление. Как при этом изменилась избирательность контура $f_0/\Delta f$, где f_0 — резонансная частота, а Δf — ширина резонансной кривой?

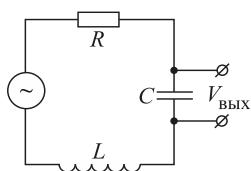


Рис. 247

10.19. Входной контур радиоприемника имеет добротность $Q = 100$ и настроен на $f_0 = 1000$ кГц. Во сколько раз напряжение частоты f_0 на конденсаторе больше напряжения частоты $f_1 = 2f_0$ (мешающая станция), при условии, что амплитуды электродвижущих сил, возбуждающих в контуре, одинаковы?

10.20. При снятии резонансной кривой колебательного контура (рис. 247) с малым затуханием найдено: выходное напряжение максимально при частоте $f_0 = 1,6$ кГц; при частотах $f \ll f_0$ это напряжение равно $V_0 = 1$ В. Чему равно выходное напряжение V_1 при частоте $f_1 = 16$ кГц?

10.21. При снятии резонансной кривой колебательного контура (рис. 248) найдено: максимальный ток $I_0 = 0,1$ А достигается при частоте генератора $f_0 = 1,6$ кГц (здесь и дальше приведены эффективные значения токов и напряжений); ток при частоте $f_1 = 16$ кГц

равен $I_1 = 10^{-4}$ А. Входное напряжение в обоих случаях равно $V = 1$ В. Вычислить по этим данным приближенные значения параметров контура R , L , C .

10.22. Индуктивный датчик является радиотехническим устройством для регистрации небольших изменений индуктивности. Обычно такой датчик представляет собой электрический колебательный контур с изменяемой индуктивностью (рис. 249). Оценить минимальное измеряемое относительное изменение индуктивности $\Delta L/L$, если контур настроен в резонанс. Напряжение источника питания $V = 100$ В, минимальное измеряемое изменение напряжения на сопротивлении $\Delta V = 10$ мкВ, добротность контура $Q = 10^2$.

10.23. Емкостный датчик — одно из наиболее чувствительных радиотехнических устройств для регистрации малых механических смещений. Обычно емкостный датчик представляет собой электрический колебательный контур с воздушным конденсатором (рис. 250),

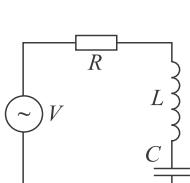


Рис. 248

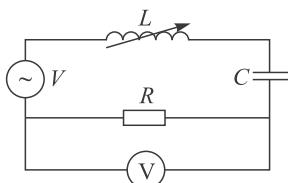


Рис. 249

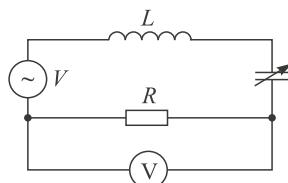


Рис. 250

одна из пластин которой подвижна. Оценить минимальное измеряемое перемещение пластины конденсатора Δd , если контур настроен в резонанс. Напряжение источника питания $V = 100$ В, минимальное измеряемое изменение напряжения на сопротивлении $\Delta V = 100$ мкВ, добротность контура $Q = 10^2$, зазор между пластинами $d = 1$ мм.

10.24. В определенном пункте напряженность электрического поля, создаваемого радиостанцией A , в пять раз больше, чем напряженность электрического поля радиостанции B . Определить добротность контура, с помощью которого можно принимать в данном пункте станцию B без помех со стороны станции A , если для этого необходимо, чтобы амплитуда сигналов станции B в контуре была бы по крайней мере в 10 раз больше амплитуды сигналов станции A . Частота станции A равна 210 кГц, частота станции B равна 200 кГц (см. задачу 10.12).

10.25. Для схемы, изображенной на рис. 251, определить частоты источника ЭДС, соответствующие резонансам токов и напряжений. Построить график сдвига фазы тока \mathcal{J} относительно ЭДС \mathcal{E} в зависимости от частоты источника, считая внутреннее сопротивление последнего пренебрежимо малым.

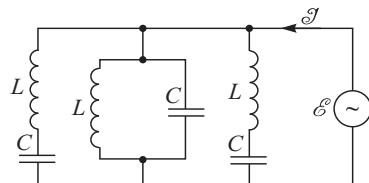


Рис. 251

10.26. Для схемы, изображенной на рис. 252, определить частоты источника ЭДС, соответствующие резонансам токов и напряжений. Построить график сдвига фазы тока \mathcal{I} относительно ЭДС источника \mathcal{E} в зависимости от частоты источника, считая внутреннее сопротивление последнего пренебрежимо малым.

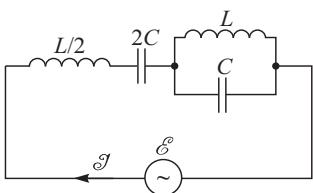


Рис. 252

1 В на частоте 50 Гц ток равен 1 мА. С ростом частоты ток падает, достигает минимума при частоте 500 Гц, а затем постоянно возрастает до предельного значения 10 мА. Нарисовать схему черного ящика и определить ее параметры.

10.28. Дан черный ящик с двумя внешними клеммами. Внутри него собрана схема из индуктивности с малыми омическими потерями, емкости и сопротивления. Известно, что если подать на клеммы постоянное напряжение 1 В, то ток будет равен 1 мА. При переменном напряжении 1 В на частоте 50 Гц ток равен 10 мА. С ростом частоты ток растет и достигает максимума на частоте 500 Гц. Нарисовать схему черного ящика и определить ее параметры.

10.29. В цепь синусоидальной ЭДС включены параллельно активное сопротивление R и реактивное X . Какое активное r и реактивное x сопротивления должны быть подключены к ЭДС последовательно (рис. 253), чтобы ток во внешней цепи (по амплитуде и фазе) остался неизменным? Во что переходят точные выражения для x и r

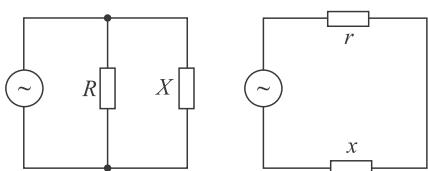


Рис. 253

при дополнительных условиях:
1) $r \ll x$; 2) $r \gg x$? X и x — величины вещественные.

10.30. В цепь переменного тока с напряжением $E = 440$ В и частотой $f = 50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и конденсатор. Чему равна емкость

конденсатора C , если лампочка рассчитана на напряжение $V = 220$ В и силу тока $I = 1$ А? Чему равен сдвиг фаз ϕ между током и полным напряжением в цепи?

10.31. В цепь переменного тока напряжением $E = 440$ В и частотой $f = 50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и катушка самоиндукции. Лампочка рассчитана на 110 В и 1 А. При замене лампочки другой, рассчитанной на 220 В и 0,8 А, оказалось, что новая лампочка горит также нормальным напряжением. Найти сопротивление R и самоиндукцию L катушки.

10.32. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ жидкости, если известно, что ее удельное сопротивление $\rho = 10^{11}$ Ом · см и при переходе от постоянного тока к переменному с частотой 50 Гц (при том же эффективном напряжении) ток, текущий через конденсатор, заполненный этой жидкостью, возрастает в 7 раз ($n = 7$).

10.33. Длинный однослойный реостат из никромовой проволоки с удельным сопротивлением $\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом · см намотан виток к витку с плотностью витков $n = 10 \text{ см}^{-1}$ на керамический каркас диаметром $D = 5$ см и включен в цепь переменного тока с частотой $f = 50$ Гц. Найти сдвиг фаз между током и напряжением на реостате. Толщиной изоляции проволоки пренебречь.

10.34. В схеме, представленной на рис. 254, емкость C подбрана таким образом, что при замыкании ключа K ток I , показываемый амперметром A , не изменяется. Определить индуктивность катушки, если известно, что $I = 0,5$ А, $V = 380$ В, $f = 50$ Гц.

10.35. По первичной обмотке трансформатора течет ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. В какой момент времени следует разорвать вторичную обмотку трансформатора, чтобы в месте разрыва не образовалась искра? Определить силу тока \mathcal{I}_1 в первичной обмотке в этот момент времени. Индуктивность вторичной обмотки L , омическое сопротивление R .

10.36. Как изменится ответ к предыдущей задаче, если во вторичную обмотку дополнительно включить конденсатор емкостью C ? При какой частоте ω ток в первичной обмотке в момент разрыва вторичной будет равен амплитудному значению \mathcal{I}_0 ?

10.37. Разделительный трансформатор имеет две одинаковые обмотки, у каждой из которых индуктивное сопротивление на рабочей частоте в $n = 5$ раз больше омического. Каково отношение мощностей, потребляемых в первичной цепи при замкнутой и разомкнутой вторичной цепи?

10.38. В трансформаторе омическое сопротивление первичной цепи в n_1 , а вторичной в n_2 раз меньше индуктивного (на рабочей частоте). Найти сдвиг фазы ϕ между током и напряжением в первичной цепи. Рассеянием магнитного потока в сердечнике трансформатора пренебречь. Получить числовой ответ при $n_1 = n_2 = 10$.

10.39. Вблизи катушки колебательного контура с параметрами L_1 , C , R расположена вторая катушка с индуктивностью L_2 . Взаимная индуктивность между катушками равна M . Какой будет резонансная частота контура, если выводы второй катушки замкнуты накоротко? Считать, что индуктивное сопротивление второй катушки на рассматриваемой частоте значительно больше ее активного сопротивления. При каком условии резонанс недостижим?

10.40. Две одинаковые катушки, намотанные на общий каркас, включены последовательно в колебательный контур с емкостью C двумя способами, изображенными на рис. 255. Резонансные частоты

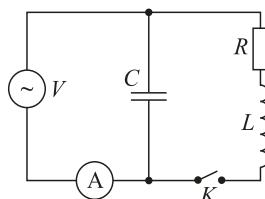


Рис. 254

колебательных контуров оказались равными ω_1 и ω_2 соответственно. Найти индуктивность L каждой из катушек и коэффициент их взаимной индукции M .

10.41. Высокодобротный колебательный контур (рис. 256) включает две последовательно соединенных катушки с индуктивностями

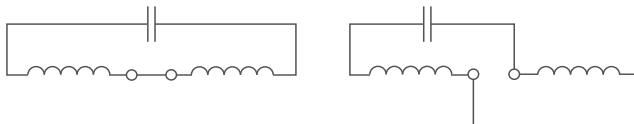


Рис. 255

L_1 и L_2 . После того как катушку L_2 замыкают накоротко, частота собственных колебаний контура не изменяется. Определить коэффициент взаимной индукции M .

10.42. К высокодобротному колебательному контуру L_1 , C_1 с известной резонансной частотой ω_1 может быть подключена ключом K последовательно цепочка с известными L_2 , C_2 (рис. 257). При этом резонансная частота контура не изменяется. Определить коэффициент взаимной индукции M .

10.43. Две одинаковые катушки, намотанные на общий каркас, соединены параллельно и включены в колебательный контур с емкостью C двумя способами, изображенными на рис. 258. Резонансные

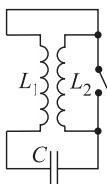


Рис. 256

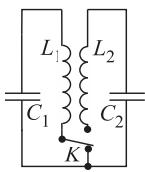


Рис. 257

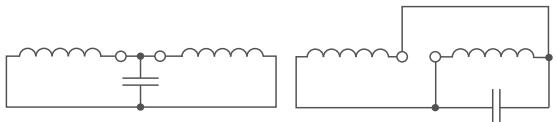


Рис. 258

частоты контуров оказались равными ω_1 и ω_2 соответственно. Найти индуктивность L каждой из катушек и коэффициент их взаимной индукции M .

10.44* Определить добротность катушки, намотанной на тонкую медную трубку с внешним диаметром $D = 2$ см и толщиной стенок $\delta = 0,05$ см (удельное сопротивление меди $\rho = 1,8 \cdot 10^{-6}$ Ом · см). Катушка подключена к цепи переменного тока частотой $f = 50$ Гц. Длины трубы и катушки считать одинаковыми и гораздо больше диаметра.

10.45. Катушка колебательного контура имеет добротность $Q = 100$. Если один виток катушки замкнуть накоротко, то ее индуктивность почти не меняется, а добротность уменьшается вдвое. Определить по этим данным число витков N катушки.

10.46. Колебательный контур состоит из конденсатора и заполненной железным сердечником катушки индуктивности, намотанной

проводом с пренебрежимо малым сопротивлением. Как изменится добротность контура при увеличении емкости конденсатора в два раза? Скин-эффект не учитывать.

10.47. Длинный соленоид с плотной намоткой размещен на цилиндрическом железном сердечнике с магнитной проницаемостью μ

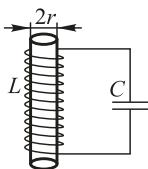


Рис. 259

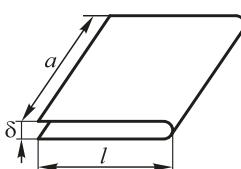


Рис. 260

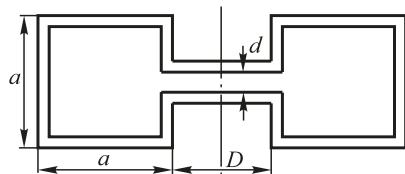


Рис. 261

и проводимостью λ (рис. 259). Соленоид замкнут на конденсатор, вследствие чего образован контур с резонансной частотой ω . Радиус сердечника r , утечки в конденсаторе не существенны, обмотку и соединительные провода можно считать идеально проводящими. Определить добротность контура. Скин-эффект не учитывать.

10.48. Данна металлическая скоба длиной $l = 10$ см, шириной $a \sim l$ и с зазором $\delta \ll l, a$ (рис. 260). Рассматривая ее как колебательный контур, оценить резонансную частоту.

10.49. Оценить приближенно резонансную частоту $f_{\text{рез}}$ тороидального резонатора, размеры которого представлены на рис. 261, где изображено меридиональное сечение резонатора: $a = 20$ см, $D = 10$ см, $d = 1$ мм.

10.50. Тороидальный резонатор представляет собой полый идеально проводящий тор круглого сечения. Внутри тора вырезан зазор (рис. 262), края зазора затянуты двумя проводящими сетками, имеющими форму круга радиусом $a = 5$ см. Расстояние между сетками $d = 2$ см, а средний радиус кривизны тора $2a$. Рассматривая резонатор как колебательный контур, оценить его резонансную частоту. Считать, что ϵ и μ в резонаторе примерно равны единице.

10.51. Пренебрегая активным сопротивлением катушек, определить частоту резонанса токов в изображенном на рис. 263 контуре в случаях, когда генератор подключен к клеммам 1) ab , 2) ad и 3) ac .

10.52. При каком условии амплитуда тока \mathcal{J} в цепи, изображенной на рис. 264, зависит только от амплитуды приложенного напряжения $V = V_0 \cos \omega t$, но не от его частоты? Найти при этом условии разность

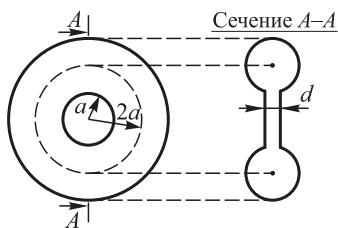


Рис. 262

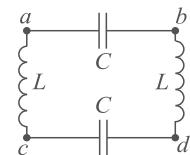


Рис. 263

фаз между приложенным напряжением и напряжением на концах RC -пары.

10.53. На рис. 265 изображена электрическая схема, в которой $R = 6 \Omega$, $L = 0,01 \text{ Гн}$. Внешнее напряжение синусоидальное с круговой частотой $\omega = 300 \text{ с}^{-1}$. Определить, при какой емкости конденсатора C ток \mathcal{I} находится в фазе с напряжением V .

10.54. С помощью схемы, приведенной на рис. 266, требуется получить сдвиг фазы 90° между напряжением на входе V и напряжением на выходе U . Какому условию при этом должны удовлетворять параметры схемы R и C , если частота входного напряжения равна ω ?

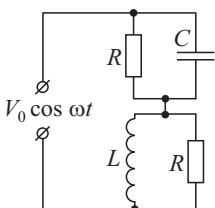


Рис. 264

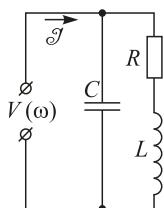


Рис. 265

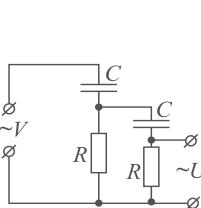


Рис. 266

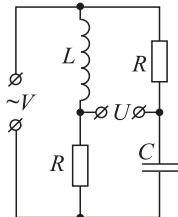


Рис. 267

10.55. При каком соотношении между параметрами схемы, изображенной на рис. 267, напряжение на выходе U находится в фазе с напряжением на входе $V = V_0 \cos \Omega t$? Какова при этом амплитуда напряжения на выходе? Построить векторную диаграмму напряжений на элементах схемы.

10.56. В схеме, изображенной на рис. 268, требуется получить сдвиг фаз 90° между входным напряжением V и выходным напряжением U . При каком соотношении между параметрами схемы это возможно? Чему равно при этом U ? Построить для этого случая векторную диаграмму для напряжений на элементах схемы.

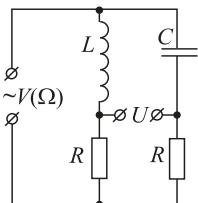


Рис. 268

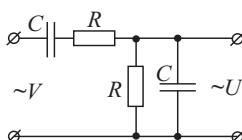


Рис. 269

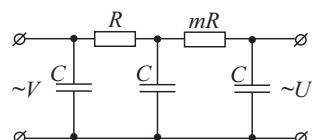


Рис. 270

10.57. Параметры R и C схемы, изображенной на рис. 269, заданы. При какой частоте ω выходное напряжение U будет находиться в фазе с входным напряжением V ? Каким при этом будет отношение амплитуд напряжений U и V ?

10.58. На вход фильтра (рис. 270) подано напряжение $V = V_0 \cos \omega t$, где $\omega = 1/(RC)$. Определить амплитуду напряжения на выходе U_0 .

10.59. К клеммам A и B (рис. 271) подводится произвольное переменное напряжение $V_{\text{вх}}(t)$, которое возбуждает между клеммами M и N напряжение $V_{\text{вых}}(t)$. Параметры R , L , C подобраны таким

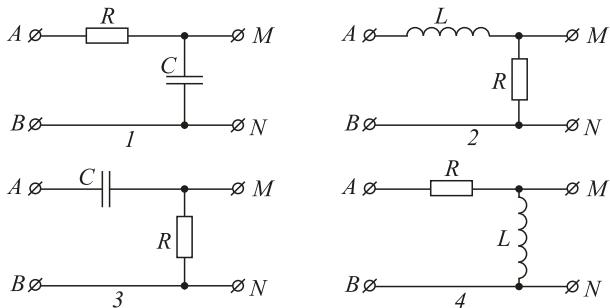


Рис. 271

образом, что напряжение на выходе в каждый момент времени мало по сравнению с напряжением на входе в тот же момент. Показать, что при выполнении этого условия выходное напряжение на схемах 1 и 2 приблизительно пропорционально интегралу, а на схемах 3 и 4 — производной от входного напряжения по времени.

10.60. Найти входной импеданс бесконечной цепи, показанной на рис. 272. При каких частотах цепь не будет потреблять мощность от источника?

10.61. На рис. 273 a и \bar{b} представлены две полубесконечные цепочки. На вход цепочек подается напряжение $\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ от высокочастотного

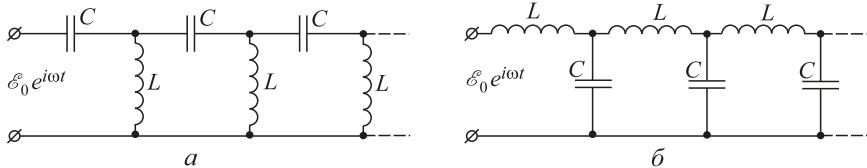


Рис. 273

генератора, согласованного с нагрузкой. Какую мощность накачивает генератор в цепочки? В случае цепочки a выполняется условие $\omega^2 \gg 1/(LC)$, в случае цепочки \bar{b} — условие $\omega^2 \ll 1/(LC)$.

Указание: Найти входной импеданс цепочки.

10.62. На вход схемы, изображенной на рис. 274, подается синусоидальное напряжение с частотой ω . Исследовать зависимость амплитуды и фазы выходного напряжения от величины сопротивления R .

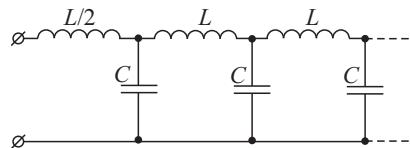


Рис. 272

10.63. При каком соотношении между параметрами моста, изображенного на рис. 275, напряжение U на его выходе находится в фазе со входным напряжением V_1 ? Какова при этом амплитуда напряжения U_0 на выходе?

10.64. Мост переменного тока, изображенный на рис. 276, сбалансирован. Определить соотношение между постоянными времени плеч ab и cd . Является ли найденное соотношение достаточным условием баланса моста?

10.65. На колебательный контур с собственной частотой ω_0 и логарифмическим декрементом затухания $d = 0,02$ действует внешняя периодическая сила с постоянной амплитудой. Частота ω внеш-

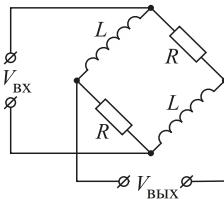


Рис. 274

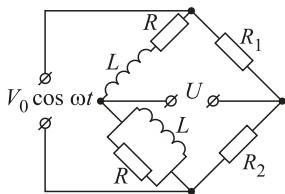


Рис. 275

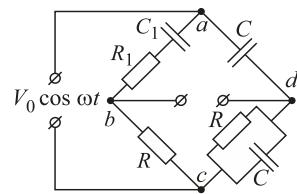


Рис. 276

ней силы, вначале равная частоте собственных колебаний, изменяется настолько, что мощность, расходуемая в контуре, падает вдвое. Определить изменение частоты в процентах к собственной (или резонансной) частоте ω_0 .

10.66. Два электрических колебательных контура с известными параметрами связаны индуктивной связью. В одном из контуров действует синусоидальная ЭДС с круговой частотой ω . Определить сдвиг фаз φ между токами в контурах.

10.67. Найти условие, при котором в схеме, изображенной на рис. 277, ток через некоторую нагрузку Z не будет зависеть от величины этой нагрузки. Сопротивлением подводящих проводов и омическим сопротивлением катушки пренебречь.

10.68. Конденсатор колебательного контура возбуждается периодической последовательностью коротких импульсов, частота следования которых равна собственной частоте контура, а их величина равна V_0 . Как изменится амплитуда вынужденных колебаний, если контур возбудить гармонической ЭДС той же частоты и амплитуды V_0 (ЭДС в этом случае включается последовательно с элементами контура)?

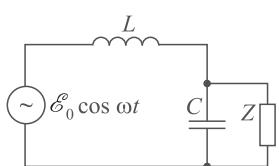


Рис. 277

10.69. Проволочная спираль с числом витков $N = 100$ навита на длинный сердечник с магнитной проницаемостью $\mu = 1000$. Один из концов спирали закреплен, а другой совершают медленные гармонические колебания с частотой $f = 1$ Гц и амплитудой $a = 2$ см. При таких медленных колебаниях спираль деформируется практически равномерно по всей длине. Площадь по-

116

перечного сечения, приблизительно равная площади витка спирали, $S = 100 \text{ см}^2$, омическое сопротивление спирали $R = 2 \Omega$, а ее длина в недеформированном состоянии $l_0 = 31,4 \text{ см}$. Концы спирали подсоединенятся к источнику с напряжением $\mathcal{E}(t)$. Каково должно быть $\mathcal{E}(t)$, чтобы по спирали шел постоянный ток $\mathcal{I} = 1 \text{ А}$?

10.70. В одной из схем радиочастотного лампового генератора наличие электронной лампы с нелинейной характеристикой в цепи обратной связи эквивалентно подключению к колебательному контуру двухполюсника (рис. 278), комплексное сопротивление которого зависит от амплитуды тока \mathcal{I}_0 и на частоте ω равно $\hat{Z} = a/\mathcal{I}_0 + ib\mathcal{I}_0^2/\omega$, где a и b — известные константы. При каких условиях возникнут автоколебания в такой схеме? Каковы частота ω и амплитуда A установившихся колебаний?

10.71. Генератор возбуждает в изображенной на схеме электрической цепи (рис. 279) колебания сложной формы с периодом порядка 10^{-3} с . Внутренняя катушка может поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа. За счет упругости подвеса при отсутствии токов внутренняя катушка устанавливается в положении равновесия, при котором ее ось перпендикулярна оси внешней катушки. При пропускании постоянного тока $\mathcal{I}_0 = 1 \text{ А}$ по обеим катушкам отклонение внутренней катушки $\varphi_0 = 1^\circ$. Период собственных колебаний внутренней катушки порядка 1 с . Каково отклонение φ , если амперметры показывают эффективные значения токов $I = 1 \text{ А}$, $I_1 = 2 \text{ А}$ и $I_2 = 3 \text{ А}$?

10.72* Конденсатор подключен к розетке переменного тока с частотой $f = 50 \text{ Гц}$ и напряжением $U = 220 \text{ В}$. Через конденсатор с сопротивлением утечки $R = 10 \text{ к}\Omega$ течет ток $I = 1 \text{ А}$. Зависимость электрического смещения от напряженности E электрического поля в сегнетоэлектрике конденсатора, объем которого $V = 100 \text{ см}^3$, образует петлю гистерезиса с площадью $S = 12,5 \text{ мДж}/\text{см}^3$. Найти активное сопротивление r_C и емкость C конденсатора.

10.73. Дроссель подключен к розетке сети переменного тока с частотой $f = 50 \text{ Гц}$ и напряжением $U = 220 \text{ В}$. Через обмотку с омическим сопротивлением $r = 1 \Omega$ течет ток $I = 1 \text{ А}$. Мощность, выделяемая токами Фуко в пластинах сердечника, равна $N = 10 \text{ Вт}$. Зависимость индукции B от напряженности H магнитного поля в ферромагнетике сердечника, объем которого $V = 100 \text{ см}^3$, образует петлю гистерезиса с площадью $S = 25 \text{ кГс} \cdot \text{Э}$. Найти активное со-

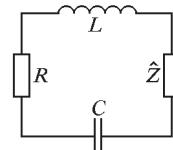


Рис. 278

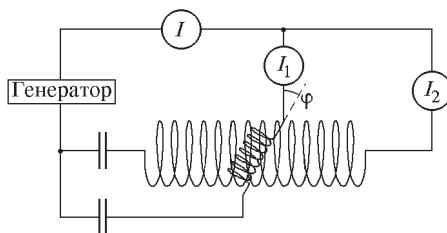


Рис. 279

противление R и индуктивность дросселя L . Считать, что сердечник набран из тонких пластин и поле внутри сердечника однородное.

10.74. Два одинаковых проволочных кольца радиусом r каждое расположены так, как указано на рис. 280. Расстояние l между центрами колец велико по сравнению с r . В кольце 1 поддерживается переменный ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. Найти среднее значение и направление силы F взаимодействия между кольцами. Индуктивность одного кольца равна L , омическое сопротивление R . Исследовать два предельных случая: 1) $\omega L \gg R$; 2) $\omega L \ll R$.

10.75. Металлическое проволочное кольцо площадью S с омическим сопротивлением R и индуктивностью L подвешено в горизонтальном однородном магнитном поле $B = B_0 \cos \omega t$ и удерживается в нем таким образом, что угол между вектором \mathbf{B}_0 и нормалью \mathbf{n} к плоскости кольца равен φ (рис. 281). Определить средний момент M сил, действующих на кольцо со стороны магнитного поля. Найти положения равновесия кольца и исследовать их устойчивость. Рассмотреть два предельных случая: 1) $\omega L \gg R$; 2) $\omega L \ll R$. В каком случае при одинаковых L вращающий момент больше?

10.76. Для регистрации сверхпроводящего перехода круглый цилиндрический образец радиусом r и длиной l помещается в катушку колебательного контура, работающего на частоте $f = 10$ МГц. На этой частоте глубина скин-слоя исследуемого металла в нормальном состоянии $\delta = 1,0 \cdot 10^{-5}$ см. Определить изменение частоты Δf при охлаждении от $T > T_c$ до $T \ll T_c$, где T_c — критическая температура

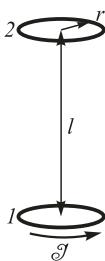


Рис. 280

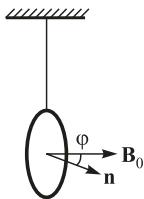


Рис. 281

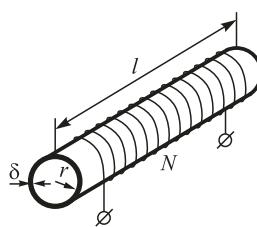


Рис. 282

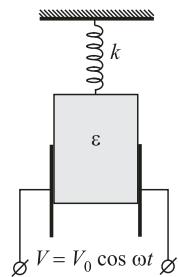


Рис. 283

сверхпроводника. Катушку считать соленоидом длиной $l \gg r$, зазор между образцами и витками катушки $d = 0,1$ мм, $d \ll r$. Проникновением высокочастотного поля в проволоку катушки пренебречь.

10.77. Для изготовления трансформатора используется замкнутый магнитный сердечник с площадью поперечного сечения $S = 5 \text{ см}^2$. Индукция насыщения материала сердечника равна $B_{\text{нас}} = 2$ Тл. Определить минимальное число N витков первичной обмотки, предназначенный для включения в сеть с действующим напряжением $V = 220$ В и частотой $f = 50$ Гц, чтобы в сердечнике еще не возникало насыщения. Рассеянием магнитного потока пренебречь.

10.78. На металлическую трубу с внешним радиусом r и толщиной δ намотан соленоид (рис. 282). Число витков N , длина трубы l , удельная проводимость ее материала λ , а магнитная проницаемость $\mu \approx 1$. Считая обмотку идеально проводящей, определить активное сопротивление такой катушки переменному току частотой ω .

10.79. На рис. 283 изображена электромеханическая колебательная система высокой добротности Q , совершающая вынужденные колебания. Система состоит из неподвижного плоского конденсатора с квадратными пластинами площадью $L \times L$ и расстоянием d между ними ($d \ll L$). Диэлектрическая пластина толщиной d , массой m и диэлектрической проницаемостью ϵ подвешена на пружине жесткостью k и входит в зазор между пластинами конденсатора, на который подается переменное напряжение $V = V_0 \cos \omega t$. При каком значении частоты ω наступит механический резонанс? Определить амплитуду вертикальных механических колебаний пластины при резонансе.

10.80. На рис. 284 изображена электромеханическая колебательная система высокой добротности, совершающая вынужденные колебания. Система состоит из неподвижного соленоида с числом витков на единицу длины n , по виткам которого протекает переменный ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. В катушку вставлен длинный магнитный стержень массой m , сечением S с магнитной проницаемостью μ , подвешенный на невесомой пружине. Известно, что собственная частота механических колебаний стержня на пружине совпадает с частотой тока в соленоиде. Определить амплитуду колебаний стержня.

10.81. Параллельный колебательный контур подключён, как показано на рис. 285, через сопротивление $R = 10$ кОм к источнику переменного напряжения. Активное сопротивление катушки $r = 5$ Ом. Для измерения добротности колебательного контура к сопротивлению R подключили параллельно такое же сопротивление (замкнув

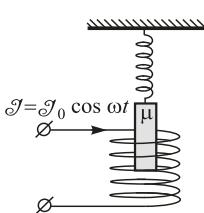


Рис. 284

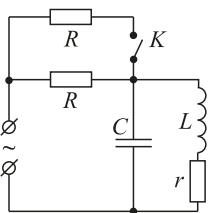


Рис. 285

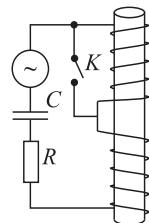


Рис. 286

ключ K). При этом амплитуда колебаний напряжения на контуре при резонансе токов увеличилась в 1,5 раза. Чему оказалась равной добротность Q контура, если известно соотношение между параметрами контура $L/C \gg r^2$.

10.82. Две одинаковые катушки, намотанные на цилиндрический каркас, как показано на рис. 286, подключены последовательно с конденсатором емкостью $C = 0,1$ мкФ и резистором с сопротивлением

$R = 10$ Ом к генератору синусоидального напряжения. При разомкнутом ключе K резонансная частота контура оказалась равной $f_1 = 1780$ Гц, а при замкнутом ключе — $f_2 = 1990$ Гц. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и подводящих проводов, определить:

1) добротность контуров Q_1 и Q_2 в обоих случаях;

2) коэффициенты самоиндукции L_1 и L_2 катушек и коэффициент взаимной индукции между ними.

10.83. В изображенной на рис. 287 электрической цепи L — индуктивность катушки, C — емкость конденсатора, R — сопротивление нагрузки, V — источник гармонического напряжения частотой ω . Найти зависимость амплитуды тока через сопротивление R от частоты. При какой частоте ω ток через нагрузку не зависит от величины R (т. е. рассматриваемая схема представляет собой простейший стабилизатор переменного тока частоты ω)?

Рис. 287

10.84. Вблизи катушки L высокодобротного колебательного контура L, C, R расположена катушка L_1 . Коэффициент взаимной индукции катушек равен M . К катушке L_1 подключена внешняя ЭДС $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ (рис. 288). Определить амплитуду вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе при резонансе. Какова добротность последовательного колебательного контура при короткозамкнутой катушке L_1 ?

10.85. В радиотехнике при рассмотрении воздействия гармонического сигнала некоторой частоты Ω на линейные цепи (фильтры) вводится понятие частотной характеристики (комплексной передаточной

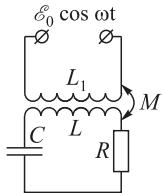


Рис. 288

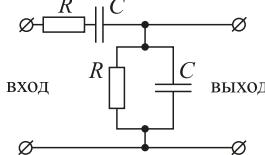


Рис. 289

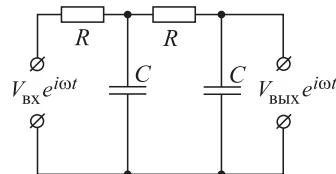


Рис. 290

функции) $\hat{K}(\Omega)$, которая определяется как отношение комплексной амплитуды напряжения на выходе фильтра к комплексной амплитуде входного напряжения $\hat{K}(\Omega) = \hat{V}_{\text{вых}} / \hat{V}_{\text{вх}}$. Найти частотную характеристику моста Вина, изображенного на рис. 289.

10.86. В релаксационных генераторах электрических колебаний (т. е. генераторах, в схеме которых нет колебательных контуров) иногда в цепи обратной связи используют двухзвенную RC -цепочку (рис. 290).

1) Предполагая, что цепочка на выходном конце не нагружена, найти комплексную передаточную функцию $\hat{K}(\Omega)$ частотной характеристики такой цепочки.

2) На какой частоте ω_0 напряжение на выходе будет сдвинуто по фазе на $\pi/2$ относительно входного напряжения?

3) Чему равно на этой частоте отношение амплитуд выходного и входного напряжений?

10.87. На рис. 291 изображен линейный фильтр. $L = 0,1 \text{ мГн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$, $R = 100 \Omega$.

1) Найти частотную характеристику $\hat{K}(\omega)$ фильтра (отношение комплексной амплитуды выходного сигнала $\hat{V}_{\text{вых}}$ к комплексной амплитуде входного сигнала $\hat{V}_{\text{вх}}$).

2) Найти зависимость амплитуды выходного сигнала $|\hat{V}_{\text{вых}}|$ от частоты ω входного сигнала и нарисовать график этой зависимости.

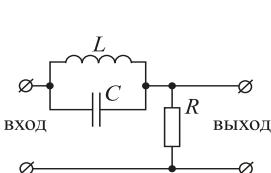


Рис. 291

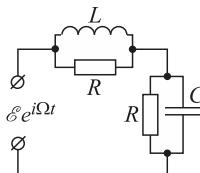


Рис. 292

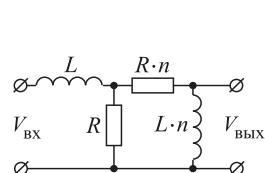


Рис. 293

3) При каком отклонении $\Delta\omega$ частоты входного сигнала от собственной частоты контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ амплитуда выходного сигнала уменьшится в $\sqrt{2}$ раз?

10.88. На рис. 292 изображен колебательный контур, параметры которого подчиняются условию $R \gg \Omega L, 1/(\Omega C)$. Определить резонансную частоту $f_{\text{рез}}$ и сопротивление контура $R_{\text{рез}}$ на резонансной частоте. Определить также добротность Q контура. Рассчитать $f_{\text{рез}}$, $R_{\text{рез}}$ и Q при следующих значениях параметров:

$R = 10^4 \Omega$, $L = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, $C = 4 \cdot 10^{-7} \Phi$.

10.89. В цепочке, изображенной на рис. 293, параметры второго звена в $n \gg 1$ раз больше параметров первого звена. На вход цепочки подается переменное напряжение частотой ω .

1) При каком соотношении между параметрами цепочки L и R разность фаз между напряжениями на выходе и на входе будет равна $\pi/3$?

2) Каким при этом будет отношение амплитуд на выходе и входе?

10.90. На рис. 294 изображена цепочка переменного тока, состоящая из двух звеньев, причем параметры элементов второго звена в $n \gg 1$ раз отличаются от аналогичных параметров первого звена. На вход цепочки подается переменное напряжение частотой ω .

1) При каком соотношении между параметрами цепочки C и R сдвиг фаз между напряжениями на выходе и на входе будет равен $\pi/4$?

2) Каким при этом будет отношение амплитуд напряжений на выходе и на входе?

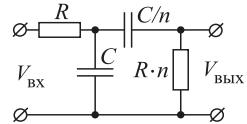


Рис. 294

10.91. Ишигока, Шимицу, Ниномая и Кога в 1997 г. предложили способ резонансного возбуждения сверхпроводящего соленоида (СП-соленоида) (рис. 295). В эксперименте $L = 23,3$ мГн, $C = 290$ мкФ, добротность LC -контура $Q = 1000$. Во сколько раз ток через соленоид будет превышать ток источника через $T = 5$ мин после включения источника переменного напряжения, обеспечивающего ток $\mathcal{I}_0 = 0,1$ А? (СПК — сверхпроводящий ключ, переводящий соленоид в короткозамкнутый режим работы.)

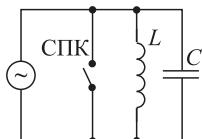


Рис. 295

10.92. Последовательный колебательный контур состоит из конденсатора и неидеальной катушки, омическое сопротивление которой, измеренное на постоянном токе, оказалось равным $r = 2$ Ом. В эксперименте была получена зависимость амплитуды $V_C(\omega)$ напряжения на конденсаторе при неизменной амплитуде \mathcal{E} сигнала генератора — источника напряжения. Используя прилагаемый график (рис. 296), определить:

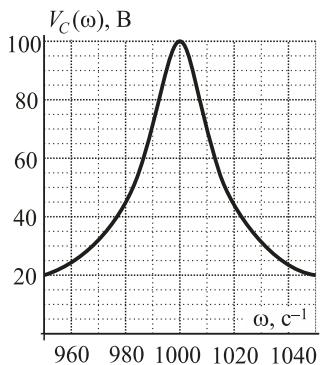


Рис. 296

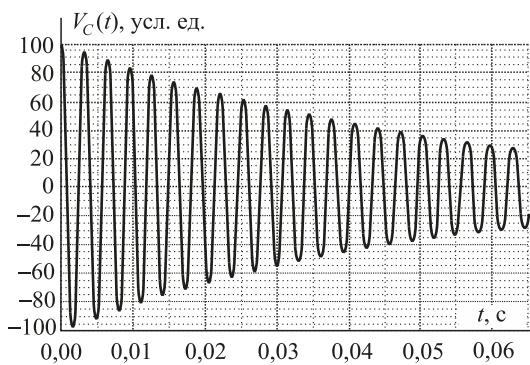


Рис. 297

- 1) индуктивность L катушки; 2) емкость C конденсатора; 3) коэффициент затухания δ ; 4) добротность контура Q ; 5) амплитуду \mathcal{E} напряжения генератора; 6) сопротивление R , которое нужно включить в колебательный контур, чтобы свободные колебания контура происходили в критическом режиме.

10.93. На рис. 297 приведена зависимость напряжения на конденсаторе $V_C(t)$ от времени при исследовании свободных колебаний в последовательном R, L, C контуре. Критическое сопротивление, соответствующее этим же значениям L и C , составляет $R_{kp} = 200$ Ом. Используя приведенную на рисунке осциллограмму $V_C(t)$, определить: 1) собственную частоту ω_0 контура; 2) добротность контура Q ; 3) коэффициент затухания δ ; 4) индуктивность L ; 5) емкость C , 6) активное сопротивление R .

§ 11. Элементы спектрального анализа. Автоколебания. Параметрический резонанс. Шумы

11.1. Найти спектры следующих колебаний:

1) $f(t) = A \cos^2 \omega_0 t$ (квадратичное преобразование монохроматического сигнала);

2) $f(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$; ($\Omega \ll \omega$; $m < 1$) (амплитудная модуляция);

3) $f(t) = A \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t)$; ($\Omega \ll \omega_0$; $m \ll 1$) (фазовая модуляция).

11.2. В приемниках радиоизлучения обычно осуществляется квадратичное преобразование принимаемого сигнала с последующим

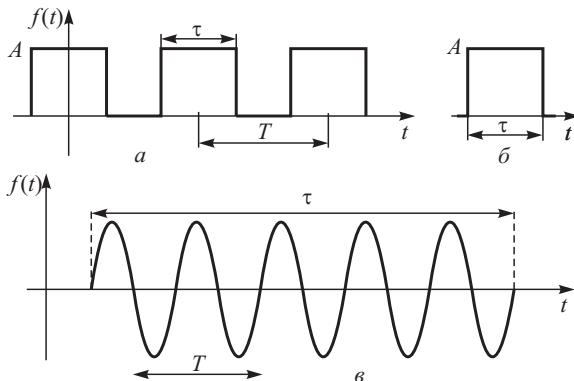


Рис. 298

усреднением за некоторое время Δt , причем $2\pi/\omega_0 \ll \Delta t \ll 2\pi/\Omega$, где ω_0 — радиочастота, Ω — частота модуляции ($\omega_0 \gg \Omega$). Что зарегистрирует такой приемник в следующих случаях:

1) на вход поданы амплитудно-модулированные колебания (задача 11.1, п. 2);

2) на вход поданы колебания, модулированные по фазе (задача 11.1, п. 3);

3) на вход поданы колебания с отфильтрованной несущей (т. е. частотой ω_0);

4) на вход поданы колебания, модулированные по фазе, в которых фаза спектральной компоненты частоты ω_0 изменена на $\pi/2$ (т. е. фаза несущей изменена на $\pi/2$)?

11.3. Найти спектр следующих сигналов, изображенных на рис. 298: а) периодическая последовательность прямоугольных импульсов; б) прямоугольный импульс; в) синусоидальный цуг.

11.4. Плоский вакуумный диод подключен к источнику постоянного напряжения с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением (рис. 299). Эмиссионная способность катода K столь мала, что ток через диод протекает в виде одиночных импульсов отдельных элек-

тронов, каждый из которых имеет длительность τ . Найти спектр сигнала на измерительном приборе при прохождении такого импульса.

11.5. Через систему тонких плоскокаркасных пластин, соединенных с измерительным прибором так, как показано на рис. 300,

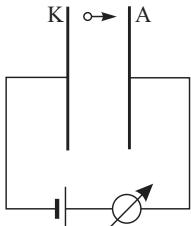


Рис. 299

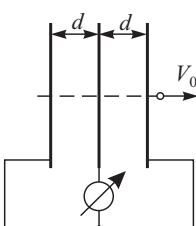


Рис. 300

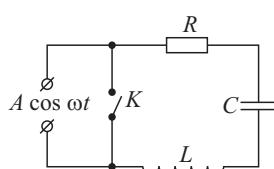


Рис. 301

пролетает по нормали к пластинам электрон достаточно высокой энергии, чтобы пронизывать пластины без заметных потерь. Скорость электрона v_0 , ширина каждого зазора d . Определить спектр сигнала на измерительном приборе.

11.6. Колебательный контур возбуждается переменной ЭДС, частота которой ω отличается от собственной частоты ω_0 , причем расстройка $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ больше ширины резонансной кривой ($|\Delta\omega| > \delta$). Можно ли «раскачать» колебания в контуре (рис. 301) периодическим замыканием и размыканием ключа K ? При какой частоте переключений амплитуда колебаний в контуре будет максимальной?

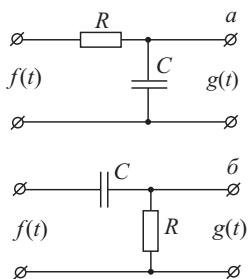


Рис. 302

определить амплитуду вынужденных колебаний в следующих случаях: 1) контур настроен на несущую частоту ω_0 ; 2) контур настроен на частоту $\omega_0 + 2\Omega$.

11.9. На вход колебательного контура с высокой добротностью подаются амплитудно-модулированные колебания $\mathcal{E}(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t$. При перестройке несущей частоты ω наблюдается несколько резонансов. Указать резонансные значения частот. Определить глубину модуляции m , если известно, что амплитуда

11.7. При каких условиях, налагаемых на вид сигнала $f(t)$ (и его спектра $F(\omega)$), напряжение $g(t)$ на выходе RC -цепочек, изображенных на рис. 302 a и рис. 302 b , совпадает с входным напряжением $f(t)$?

11.8. Высокодобротный колебательный контур находится под действием внешней амплитудно-модулированной ЭДС, изменяющейся по закону $\mathcal{E}(t) = A(1 + m \cos^2 \Omega t) \cos \omega_0 t$. Резонансная частота контура может перестраиваться при помощи изменения емкости. Считая коэффициент затухания контура δ заданным,

определять амплитуду вынужденных колебаний в следующих случаях: 1) контур настроен на несущую частоту ω_0 ; 2) контур настроен на частоту $\omega_0 + 2\Omega$.

11.9. На вход колебательного контура с высокой добротностью подаются амплитудно-модулированные колебания $\mathcal{E}(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t$. При перестройке несущей частоты ω наблюдается несколько резонансов. Указать резонансные значения частот. Определить глубину модуляции m , если известно, что амплитуда

вынужденных колебаний напряжения в контуре уменьшилась в $n = 4$ раза при перестройке частоты ω от значения ω_0 до $\omega_0 + \Omega + \delta$ (ω_0 — собственная частота, δ — коэффициент затухания контура).

11.10. В схеме, изображенной на рис. 303, действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos^2 \Omega t$. Определить токи \mathcal{I} и \mathcal{I}_1 , если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению $\Omega^2 = 1/(4LC)$.

11.11. В схеме, изображенной на рис. 304, действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos^2 \Omega t$. Определить токи \mathcal{I} и \mathcal{I}_1 , если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению $\Omega^2 = 1/(4LC)$.

11.12. На RC -цепочку (рис. 305) подается гармоническое напряжение $V_{\text{вх}} = V_0 \cos \omega t$. Параметры цепочки подобраны так, что сдвиг фаз между $V_{\text{вых}}$ и $V_{\text{вх}}$ составляет 60° . Определить спектральный

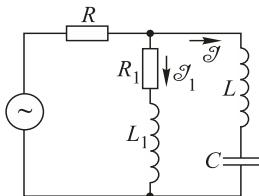


Рис. 303

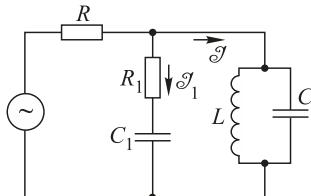


Рис. 304

состав выходного напряжения и фазовые сдвиги между спектральными компонентами для случая, когда расстояние между пластинами конденсатора (конденсатор плоский) изменяется по закону $d = d_0(1 + a \cos \Omega t)$, причем $\Omega \ll \omega$ и $a \ll 1$.

11.13. На RC -цепочку (рис. 306) подается синусоидальное напряжение $V_{\text{вх}} = V_0 \cos \omega t$. Параметры цепочки подобраны так, что сдвиг

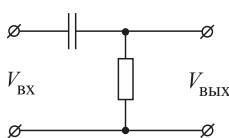


Рис. 305

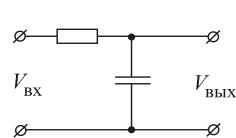


Рис. 306

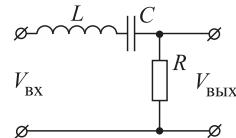


Рис. 307

фаз между $V_{\text{вых}}$ и $V_{\text{вх}}$ составляет -45° . Определить спектральный состав выходного напряжения и фазовые сдвиги между спектральными компонентами для случая, когда расстояние между пластинами плоского конденсатора изменяется по закону $d = d_0(1 + a \cos \Omega t)$, причем $\Omega \ll \omega$ и $a \ll 1$.

11.14. На вход колебательного контура (рис. 307) подается амплитудно-модулированное напряжение $V_{\text{вх}} = V_0(1 + m \cos \Omega t) \cdot \cos \omega_0 t$ ($m < 1$). Контур настроен в резонанс с частотой ω_0 . Вычислить $V_{\text{вых}}$, если $\omega_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\Omega = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, добротность контура $Q = 100$.

11.15. На вход колебательного контура (рис. 307) подается периодическая последовательность прямоугольных импульсов, длительность которых в 4 раза меньше величины периода. Частота повторения импульсов совпадает с резонансной частотой контура. Вычислить отношение амплитуд второй гармоники к первой на выходе контура, если его добротность $Q = 100$.

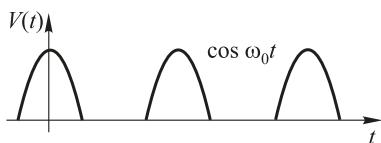


Рис. 308

идеальным, определить форму сигнала $V_R(t)$.

11.17. Сигнал с выпрямителя имеет вид $V(t)$ (половинки косинусоиды) (рис. 308). Его подают на схему, изображенную на рис. 309. Контур L, C настроен на частоту ω_0 ; $R \gg \omega_0 L$ и $R \gg r$. Считая контур идеальным, определить форму сигнала $V_R(t)$.

11.18* Генератор импульсов, имеющих форму ограниченной косинусоиды (рис. 308), включен в цепь колебательного контура L, C, R , имеющего добротность $Q = 100$ (рис. 311). Внутреннее сопротивление генератора $r = 50$ Ом, а амплитуда ЭДС $V = 100$ В. Найти

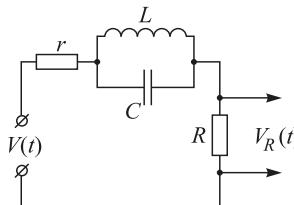


Рис. 309

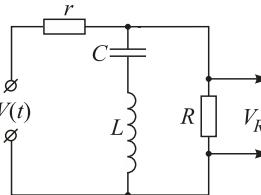


Рис. 310

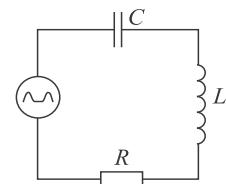


Рис. 311

максимально возможное значение амплитуды первой гармоники тока \mathcal{I}_1^{\max} в контуре, если все высшие гармоники должны быть подавлены по крайней мере в 100 раз ($\beta = \mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2 \geq 100$).

11.19. Генератор прямоугольных импульсов с амплитудой $V = 100$ В и скважностью $\alpha = T/\tau = 4$ (T — период следования, τ — длительность импульсов), имеющий внутреннее сопротивление $r = 50$ Ом, нагружен на последовательный контур с добротностью $Q = 100$. Найти максимально возможное значение амплитуды первой гармоники тока в контуре \mathcal{I}_1 , если все высшие гармоники должны быть подавлены по крайней мере в 100 раз ($\beta = \mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2 \geq 100$).

11.20. Квадратичный детектор D преобразует входное напряжение $V = V_0(\sin \omega t + \sin 2\omega t)$ по закону $V_d = kV^2$. К выходу детектора подключена цепь, состоящая из последовательно соединенных индуктивности L и сопротивления R ($\omega L/R = 1/3$) (рис. 312). Вычислить отношение амплитуды гармоники с максимальной частотой

к постоянной составляющей выходного напряжения, снимаемого с сопротивления.

11.21. Квадратичный детектор D преобразует входное напряжение $V = V_0(\cos \omega t + \cos 2\omega t)$ по закону $V_d = kV^2$. К выходу детектора подключена цепь, состоящая из последовательно соединенных

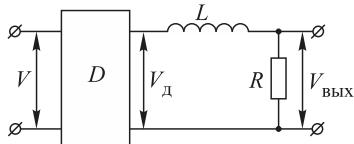


Рис. 312

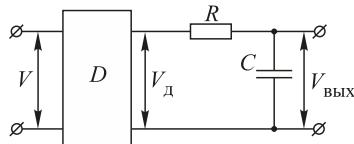


Рис. 313

емкости C и сопротивления R ($\omega RC = 1/\sqrt{2}$) (рис. 313). Вычислить отношение амплитуды гармоники с максимальной частотой к постоянной составляющей выходного напряжения, снимаемого с емкости.

11.22. Электронный пучок линейного ускорителя представляет собой последовательность сгустков, следующих друг за другом с периодом $T = 3 \cdot 10^{-10}$ с. Для измерения электрического тока ускоренных частиц используется цилиндр Фарадея (рис. 314), полностью погло-

Цилиндр Фарадея

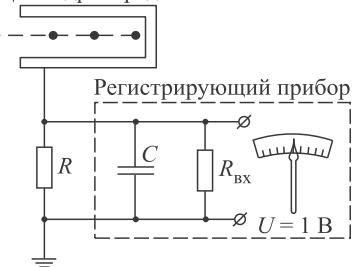


Рис. 314

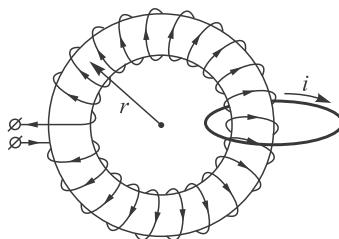


Рис. 315

щающий пучок. Цилиндр Фарадея заземлен через сопротивление $R = 100\Omega$, сигнал с которого подается через кабель на вход регистрирующего прибора с большим входным сопротивлением ($R_{\text{вх}} \gg R$), который шунтируется емкостью кабеля $C = 200 \text{ пФ}$ (эквивалентная схема измерительной цепи дана на рисунке). Определить число электронов n в сгустке, если показание регистрирующего прибора $U = 1 \text{ В}$.

11.23. Дифференциальная магнитная проницаемость μ некоторого ферромагнетика зависит от напряженности магнитного поля по закону $\mu = \frac{dB}{dH} = \mu_1 - \mu_2 H^2$. На тонкий тороидальный сердечник из такого материала равномерно намотана катушка, имеющая N витков. Сечение сердечника S , радиус тора r (рис. 315). Через катушку течет постоянный ток подмагничивания, величина которого такова, что зависимость $B(H)$ достигает максимума. Катушка охвачена короткозамкнутым проводом, сопротивление которого R . Определить

спектр тока i в проводнике, если помимо тока подмагничивания через катушку пропустить слабый переменный ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \sin \omega t$. Индуктивностью проводника пренебречь.

11.24. Тороидальная катушка, имеющая N витков, равномерно намотана на ферритовый сердечник сечением S и радиусом r . Из-за насыщения дифференциальная магнитная проницаемость материала

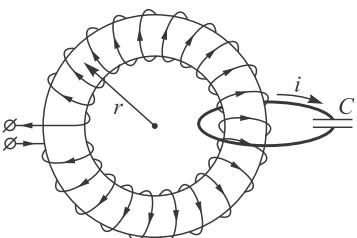


Рис. 316

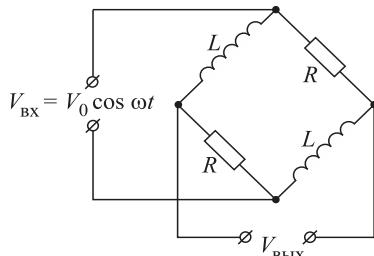


Рис. 317

сердечника зависит от напряженности магнитного поля по закону $\mu = \frac{dB}{dH} = \mu_1 - \mu_2 H^2$. Катушка охвачена проводником, замкнутым на конденсатор емкостью C (рис. 316). Определить спектральный состав тока i через конденсатор, если в катушке течет переменный ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \sin \omega t$. Индуктивностью проводника, омическим сопротивлением цепей и гистерезисом в магнетике пренебречь.

11.25. Каков спектральный состав выходного напряжения $V_{\text{вых}}$ (т. е. амплитуды и фазы спектральных компонент) в схеме, изображенной на рис. 317, если обе индуктивности одновременно изменяются по закону $L = L_0(1 + m \cos \Omega t)$. Считать, что $m \ll 1$, $\omega \gg \Omega$ и $\omega L_0 \ll R$.

11.26. Каков спектральный состав выходного напряжения $V_{\text{вых}}$ (т. е. амплитуды и фазы спектральных компонент) в схеме, изображенной на рис. 318, если обе емкости одновременно изменяются по закону $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}(1 + m \cos \Omega t)$? Считать, что $m \ll 1$, $\omega \gg \Omega$ и $\omega RC_0 \gg 1$.

11.27. В вольтметре для измерения постоянного напряжения ток поступает в катушку, которая может вращаться во внешнем постоянном магнитном поле. Какую величину измеряет такой вольтметр? Что он будет показывать, если его включить через идеальный диод в розетку переменного тока с напряжением 220 В (рис. 319)?

11.28. В вольтметрах для измерения постоянного или переменного напряжения используется принцип взаимодействия двух катушек, одна из которых подвижная. Катушки соединены последовательно,

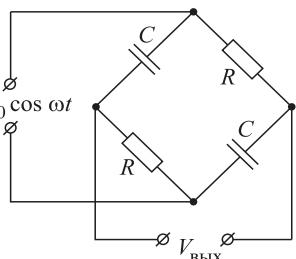


Рис. 318

постоянного напряжения ток поступает в катушку, которая может вращаться во внешнем постоянном магнитном поле. Какую величину измеряет такой вольтметр? Что он будет показывать, если его включить через идеальный диод в розетку переменного тока с напряжением 220 В (рис. 319)?

11.28. В вольтметрах для измерения постоянного или переменного напряжения используется принцип взаимодействия двух катушек, одна из которых подвижная. Катушки соединены последовательно,

так что через них проходит один и тот же ток. Какую величину измеряет такой вольтметр? Вольтметр такого типа для переменного тока включен через идеальный диод в штепсельную розетку с напряжением 220 В (рис. 319). Какое напряжение покажет вольтметр?

11.29. Оценить отношение амплитуды пульсаций напряжения к его постоянной составляющей $\delta V/V_0$ на нагрузке R однополупериодного выпрямителя, если частота генератора $f = 50$ Гц, $C = 50$ мкФ, $R = 20$ кОм, а сопротивление диода равно нулю (диод открыт) или бесконечности (диод закрыт) (рис. 320).

11.30. Оценить отношение амплитуды пульсаций тока к его постоянной составляющей $\delta \mathcal{I}/\mathcal{I}_0$ в нагрузке R_2 однополупериодного выпрямителя, если частота генератора $f = 50$ Гц, $R_2 = 1$ Ом, $R_1 = 10$ Ом, $L = 10$ Гн, а сопротивление диода D равно нулю (диод открыт) или бесконечности (диод закрыт) (рис. 321).

11.31. На вход высокодобротного колебательного контура (L, C, R) в начальный момент времени $t = 0$ подается внешняя ЭДС $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos [\Omega t + \varphi(t)]$ с законом фазовой модуляции $\varphi(t) = at^2$ ($\Omega \gg \sqrt{a}$). Параметры колебательного контура удовлетворяют условию $2L/R \ll \sqrt{\pi/a}$. Через какое время после включения ЭДС амплитуда

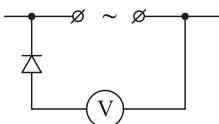


Рис. 319

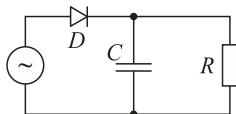


Рис. 320

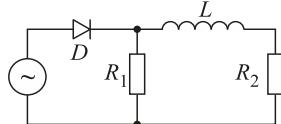


Рис. 321

вынужденных колебаний в контуре максимальна? Сколько времени должно пройти, чтобы амплитуда вновь заметно уменьшилась?

11.32. На вход высокодобротного колебательного контура (L, C, R) в начальный момент времени $t = 0$ подается внешняя ЭДС $\mathcal{E}(t) = a(t) \cos \omega_0 t$ с законом амплитудной модуляции $a(t) = a(1 + \cos at^2)$, где $\omega_0 \gg \sqrt{a}$. Параметры контура удовлетворяют условиям: $2L/R \ll \sqrt{\pi/a}$, $1/\sqrt{LC} = \omega_0$. Через какое время после включения ЭДС колебания напряжения на обкладках конденсатора окажутся близкими к гармоническим?

11.33. Сигнал $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + m \cos \Omega t)$, где $m \ll 1$ и $\Omega \ll \omega$, подается на вход контура с высокой добротностью $Q \gg 1$. Резонансная частота контура $\omega_0 = \omega - \Omega$. Определить с точностью до малых поправок зависимость от времени напряжения на конденсаторе $V(t)$. Считать $\Omega \gg \omega_0/Q$.

11.34. На вход колебательного контура, настроенного на частоту ω_0 , подается сигнал $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, $m < 1$. Добротность контура $Q \gg 1$. Частота модуляции выбрана равной $\Omega = \omega_0/(2Q)$. Определить амплитуды и фазы спектральных компонент напряжения $V(t)$ на выходе. Пояснить решение с помощью векторной диаграммы.

11.35. Индуктивность колебательного контура периодически изменяется во времени по закону, указанному на рис. 322. При каком значении емкости колебательного контура возможен параметрический резонанс? При каком максимальном значении активного сопротивления контура произойдет возбуждение параметрических колебаний? Выполнить расчет для $L_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ Гн, $\Delta L = 4 \cdot 10^{-5}$ Гн, $\tau_0 = 10^{-6}$ с.

11.36. Для поддержания незатухающих колебаний в LCR -контуре ($L = 4 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C = 10^{-10}$ Ф, $R = 1$ Ом) емкость конденсатора быстро изменяют на величину ΔC каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время $\tau = 6,4 \cdot 10^{-8}$ с возвращают в исходное состояние. Определить величину и знак ΔC .

11.37. В схеме, изображенной на рис. 323, анодный ток \mathcal{I}_a при малых колебаниях в контуре линейно зависит от напряжения на сетке V_c по закону $\mathcal{I}_a = SV_c + \mathcal{I}_0$, где S и \mathcal{I}_0 — постоянные величины. Катушка колебательного контура L и катушка связи L_{cb}

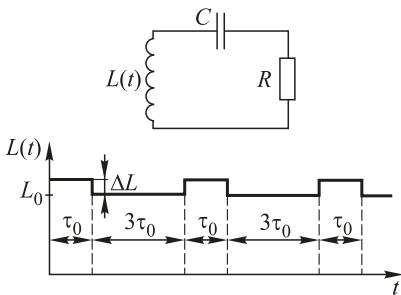


Рис. 322

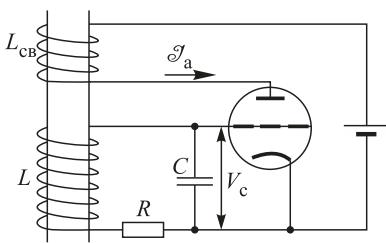


Рис. 323

намотаны на общем магнитном сердечнике. Считая величины L , L_{cb} , C и S заданными, определить, при каком максимальном значении активного сопротивления R контура возможно возбуждение автоколебаний. Какова будет эффективная добротность контура, если выбрать $R = 2R_{\max}$? Провести числовой расчет для $L = 4 \cdot 10^{-4}$ Гн, $L_{cb} = 4 \cdot 10^{-6}$ Гн, $C = 10^{-8}$ Ф, $S = 2 \cdot 10^{-3}$ А/В.

11.38. С помощью высокочувствительной измерительной схемы, которая проводит усреднение за время $\tau \approx 1$ с, регистрируются малые изменения $\Delta \mathcal{I}$ постоянного тока, текущего через вакуумный диод (рис. 324), вызванные, например, изменением напряжения батареи. Оценить минимальное регистрируемое на фоне дробового шума диода значение $\Delta \mathcal{I}_{\min}$, если средний ток диода $\mathcal{I} \approx 10^{-3}$ А.

11.39. Сигнал от радиопередатчика, принятый на расстоянии $l_1 = 1$ км, равен по мощности уровню собственных шумов приемника. Считая, что шумы обусловлены только тепловыми флюктуациями во входном контуре радиоприемника, оценить, с какого расстояния l_2 можно было бы вести прием с тем же соотношением уровней сигнала

и шума, если охладить входные цепи радиоприемника до температуры жидкого гелия $T_2 \approx 4$ К.

11.40. Каков закон амплитудной модуляции, т. е. как зависит от времени амплитуда сигнала на выходе $R-L$ -цепочки, показанной на рис. 325, если входной сигнал $V(t)$ — колебание, модулированное по

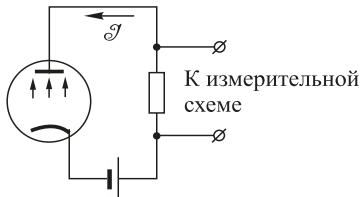


Рис. 324

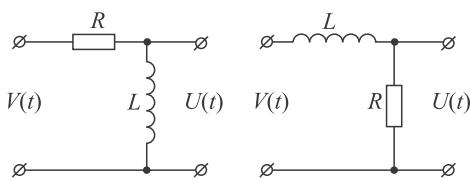


Рис. 325

Рис. 326

фазе: $V(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t)$, $\Omega < \omega_0$, $m < 1$? Параметры R , L удовлетворяют условию $\omega L \ll R$ для всех спектральных компонент входного сигнала. Какова глубина модуляции амплитуды выходного сигнала $U(t)$?

11.41. На вход $L-R$ -цепочки (рис. 326) подается амплитудно-модулированное напряжение $V(t) = V_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, $m < 1$. Найти отношение амплитуд боковых спектральных гармоник выходного сигнала, а также фазовый сдвиг между колебаниями боковых гармоник и несущей, если $\omega_0 = R/L$ и $\Omega = \omega_0/4$.

11.42. Каков закон амплитудной модуляции, т. е. как зависит от времени амплитуда сигнала на выходе $R-C$ -цепочки, показанной на рис. 327, если сигнал на входе представляет собой колебание, модулированное по фазе: $V(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t)$, $\Omega < \omega_0$, $m < 1$?

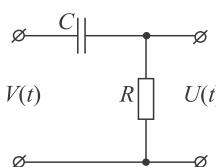


Рис. 327

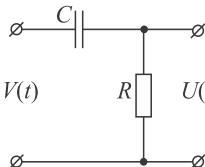


Рис. 328

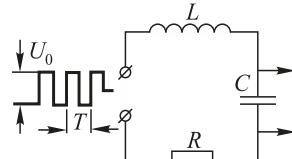


Рис. 329

Предполагается, что параметры R и C удовлетворяют условию $\omega RC \ll 1$ для всех спектральных компонент входного сигнала. Какова глубина амплитудной модуляции выходного сигнала?

11.43. На вход $R-C$ -цепочки (рис. 328) подается амплитудно-модулированное напряжение $V(t) = V_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, $m < 1$. Найти отношение амплитуд боковых гармоник выходного сигнала, а также начальные фазы спектральных гармоник, если $\omega_0 = 1/(RC)$, $\Omega = \omega/4$.

11.44. На вход колебательного контура (рис. 329) подается сигнал в виде периодической последовательности прямоугольных импульсов, длительность которых равна $\tau = T/2$ — половине периода T их сле-

дования. Круговая частота следования сигналов $\Omega = 2\pi/T = 50 \text{ с}^{-1}$, колебательный контур настроен на частоту $\omega_0 = 350 \text{ с}^{-1}$.

1) Определить добротность контура, если амплитуда V_C напряжения на конденсаторе оказалась в 8 раз больше амплитуды импульсов U_0 .

2) Пусть период T следования импульсов начинают плавно увеличивать, не изменяя отношения τ/T и параметров колебательного контура. При каком значении $\Omega = \Omega_1$ наступит ближайший резонанс? Во сколько раз при этом изменится амплитуда напряжения на конденсаторе?

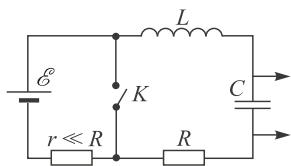


Рис. 330

туте возникают колебания. Контур настроен на частоту $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$, напряжение источника постоянного тока $E = 1 \text{ В}$, добротность контура $Q = 50$.

1) Определить амплитуду V_C вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе.

2) Предположим, что, оставляя параметры схемы неизменными, частоту переключений Ω начинают плавно увеличивать. При каком значении $\Omega = \Omega_1$ наступит ближайший резонанс и какова при этом будет амплитуда V_C' колебаний напряжения на конденсаторе?

11.45. ЭДС, возбуждающая вынужденные колебания в контуре, изображенном на рис. 331, имеет вид $\mathcal{E}_0(t) = \mathcal{E}_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$. Найти закон изменения напряжения на конденсаторе $V(t)$, если добротность контура $Q = 10$, $\Omega = \omega_0$, $m = 1$, а несущая частота ω_0 равна резонансной частоте контура (при расчете пренебречь погрешностями в амплитуде и фазе менее 1%).

11.47. ЭДС, возбуждающая вынужденные колебания в контуре, изображенном на рис. 331, имеет вид $\mathcal{E}_0(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$, где

$\varphi(t) = m \cos \Omega t$. Полагая, что $\Omega = \omega_0$, $m \ll 1$ (при расчетах пренебречь слагаемыми порядка m^2 и выше) и добротность контура $Q = 100$, найти закон изменения напряжения на конденсаторе $V(t)$ (ошибками в амплитуде и фазе менее 1% пренебречь). Частота ω_0 совпадает с резонансной частотой контура.

11.48. Вынужденные колебания в контуре L , C , R (рис. 331) с большой добротностью

$Q = 100$ возбуждаются периодической последовательностью прямоугольных импульсов $\mathcal{E}(t)$ (длительность импульсов τ , период следования импульсов $T = 3\tau$). Каково отношение амплитуд первой и второй гармоник входного $\mathcal{E}(t)$ и выходного $V(t)$ сигналов, если резонансная частота контура $\omega_p = 2\pi/T$.

11.49. Вынужденные колебания в контуре L , C , R (рис. 331) с большой добротностью $Q = 100$ возбуждаются периодической последовательностью прямоугольных импульсов. Отношение длительности импульсов к периоду их следования $\tau/T = 1/2$. Резонансная частота контура $\omega_p = 2\pi/T$. Как изменится отношение амплитуд первой и третьей гармоник выходного сигнала $V(t)$ (напряжения на конденсаторе) при уменьшении емкости конденсатора в девять раз?

11.50. Колебательный контур с добротностью $Q = 40$, настроенный на частоту $\omega_0 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, используется в схеме недовозбужденного лампового генератора (рис. 332). Крутизна линейной части анодно-сеточной характеристики лампы $S = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A/B}$. Коэффициент взаимоиндукции между катушкой колебательного контура и катушкой обратной связи $M = -4 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}$. Определить в этих условиях эквивалентную добротность Q^* колебательного контура с учетом влияния цепи обратной связи.

11.51. В колебательном контуре с добротностью $Q = 32$ возбуждены собственные колебания. График зависимости тока $\mathcal{I}(t)$ в контуре от времени на интервале одного периода показан на рис. 333. Чему будет равна эквивалентная добротность Q^* колебательного контура, если его индуктивность периодически в такт с колебаниями тока скачкообразно изменять так, как показано на рисунке? Относительное изменение индуктивности $\Delta L/L = 0,05$.

Указание. Необходимо воспользоваться энергетическим определением добротности.

11.52. В схеме, изображенной на рис. 334, емкость конденсатора C периодически изменяется путем механического перемещения пластин. Допустим, что вследствие некоторого малого возмущения в схеме возникли колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе порядка нескольких милливольт. В момент времени, когда напряжение на конденсаторе максимально, его емкость скачкообразно уменьшается на долю $\epsilon = |\Delta C|/C$. Через четверть периода $\Delta t = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$ емкость скачком увеличиваются до прежнего значения; еще через четверть периода емкость вновь скачкообразно уменьшают на долю ϵ и т. д. При определенных условиях в схеме могут возбудиться незатухающие электрические колебания. В схему включен нелинейный

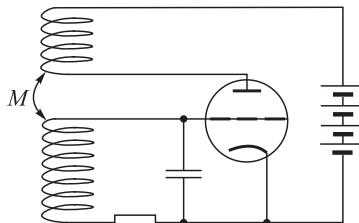


Рис. 332

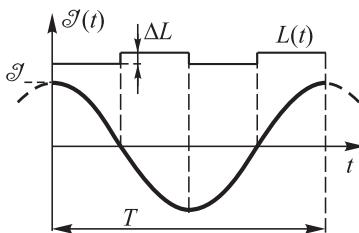


Рис. 333

инерционный элемент — лампочка накаливания L , вольт-амперная характеристика которой, снятая на постоянном токе, представлена на рис. 334.

1) Определить минимальное значение ε_{\min} , при котором в схеме возбуждаются незатухающие параметрические колебания, если $L = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 10^{-7} \text{ Ф}$.

2) Найти амплитуду установившихся колебаний на лампочке, если $\varepsilon = 3\%$.

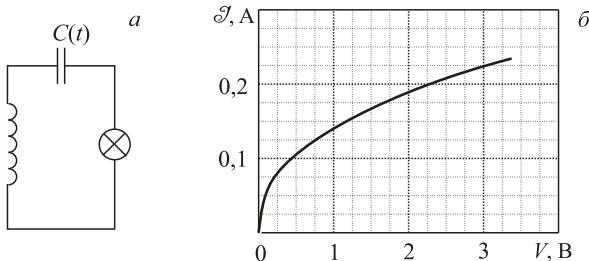


Рис. 334

11.53. Собрана схема, изложенная на рис. 335. Емкость конденсатора C может периодически изменяться путем механического перемещения пластин. В схему включен пассивный безынерционный

нелинейный элемент $HЭ$, вольт-амперная характеристика которого задается соотношением $V/V_0 = (\mathcal{I}/\mathcal{I}_0)^3 + 2\mathcal{I}/\mathcal{I}_0$, где $\mathcal{I}_0 = 0,03 \text{ А}$, $V_0 = 0,03 \text{ В}$. Пусть в схеме из-за неизбежных возмущений возникли малые колебания тока и, следовательно, малые колебания напряжения на конденсаторе C . В момент времени, когда напряжение на конденсаторе достигает амплитудного значения, емкость конденсатора скачкообразно уменьшают на $\varepsilon\%$; через четверть периода $\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$ емкость так же скачкообразно увеличивают до прежнего значения. Еще через четверть периода емкость снова скачком уменьшают на $\varepsilon\%$ и т. д.

1) Оценить минимальное значение ε_{\min} , при котором в схеме возбуждаются незатухающие параметрические колебания, если $L = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 10^{-7} \text{ Ф}$.

2) Оценить амплитуду V_{\max} установившихся колебаний на конденсаторе при $\varepsilon = 3\%$, предполагая колебания тока в цепи близкими к гармоническим.

Приложиме. При решении может понадобиться значение определенного интеграла $\int_0^{2\pi} \cos^4 x dx = \frac{3}{4}\pi$.

11.54. В схеме, изображенной на рис. 336, индуктивность катушки периодически изменяется путем механического перемещения сер-

дечника. Допустим, что вследствие некоторого малого возмущения в схеме возникли колебания тока с амплитудой порядка нескольких миллиампер. В момент времени, когда ток в катушке максимален, ее индуктивность скачкообразно уменьшается на долю $\epsilon = |\Delta L|/L$. Через четверть периода $\Delta t = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$ индуктивность так же скачком увеличиваются до прежнего значения. Еще через три четверти периода $\Delta t = \frac{3\pi}{2}\sqrt{LC}$ индуктивность вновь скачкообразно уменьшают на долю ϵ . Далее процесс повторяется периодически. При определенных условиях в схеме могут возбуждаться незатухающие электрические колебания.

В схему включен инерционный нелинейный элемент $H\mathcal{E}$, вольт-амперная характеристика которого, снятая на постоянном токе, описывается уравнением $V = A\mathcal{I} + B\mathcal{I}^2$, где $A = 2 \Omega$, $B = 4 \Omega/\text{A}$.

1) Определить минимальное значение ϵ_{\min} , при котором в схеме возбуждаются незатухающие параметрические колебания, если $L = 0,4 \text{ Гн}$, $C = 10^{-7} \Phi$.

2) Найти амплитуду установившихся колебаний тока, если $\epsilon = 5\epsilon_{\min}$.

11.55. Параметрические колебания в контуре L_1 , C , R можно возбудить, периодически скачкообразно изменяя взаимную индуктивность M между катушкой контура L_1 и сверхпроводящей коротко-

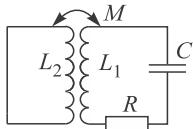


Рис. 337

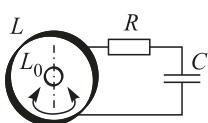


Рис. 338

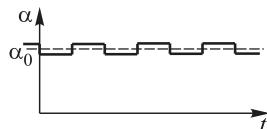


Рис. 339

замкнутой катушкой L_2 (см. рис. 337). Каковы условия возбуждения колебаний, если $L_1 = L_2 = L$, а $M = L/2$? Каково минимальное значение ΔM , при котором возможно возбуждение колебаний?

11.56. Индуктивность колебательного контура L , C , R представляет собой плоскую катушку радиусом a с числом витков N . В центре катушки расположена маленькая короткозамкнутая катушечка с числом витков n и площадью витков $s_0 \ll \pi a^2$ (рис. 338). Индуктивность катушечки L_0 . Периодически быстро (скакком) поворачивая катушечку на малый угол $\Delta\alpha$, можно возбудить в контуре колебания (рис. 339). При каком максимальном сопротивлении контура R возбуждение колебаний возможно? Каковы при этом периодичность изменения угла α и его оптимальное среднее значение α_0 ? При расчете можно полагать $M \ll L$, M — коэффициент взаимоиндукции катушек.

11.57. Колебательный контур образован последовательно соединенными соленоидом длиной l с числом витков N и площадью вит-

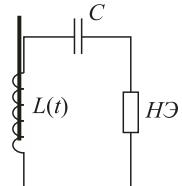


Рис. 336

ков S , конденсатором C и резистором R . Внутри соленоида, вдали от его торцов, расположена маленькая короткозамкнутая катушечка с числом витков n и площадью витков s_0 ($ns_0 \ll NS$). Индуктивность катушечки L_0 . Периодически скачком поворачивая плоскость катушечки на малый угол $\Delta\alpha$ (рис. 339), можно возбудить в контуре колебания. При каком минимальном $\Delta\alpha$ такое возбуждение возможно? Каковы при этом частота, с которой необходимо поворачивать катушечку, и оптимальное среднее значение угла поворота α_0 ?

§ 12. Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны. Волноводы и резонаторы. Плазма

12.1. Считая известным закон Био и Савара $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{jR}]}{R^3} dV$ (в пустоте) и формулу векторного анализа $\text{rot}(f\mathbf{a}) = f \text{rot } \mathbf{a} + [\text{grad } f]\mathbf{a}$, показать, что $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, где $\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}}{R} dV$. Вектор \mathbf{A} называют вектор-потенциалом.

12.2.* Обкладки плоского конденсатора имеют форму дисков радиусом R . Пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ . Конденсатор включен в цепь переменного тока $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить электрическую и магнитную энергии, локализованные в конденсаторе. Найти отношение максимальной магнитной к максимальной электрической энергии. Расстояние между обкладками конденсатора d . Провести числовой расчет для $R = 10$ см, частоты $v = 100$ Гц и $\epsilon = \mu = 1$.

12.3. Пространство внутри длинного соленоида, состоящего из N витков проволоки, заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Длина соленоида равна l , радиус R . По обмотке соленоида течет переменный ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить магнитную и электрическую энергию, локализованные внутри соленоида, и найти отношение максимальных значений этих энергий. Провести числовой расчет для $R = 5$ см, $\epsilon = \mu = 1$ и частоты $v = 100$ Гц.

12.4.* Заряженный и отключённый от источника электричества плоский конденсатор медленно разряжается объемными токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой проводимости. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора.

12.5.* Заряженный и отключённый от источника электричества плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиусом R , пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, вычислить мгновенное значение напряженности магнитного поля H внутри конденсатора (в зависимости от расстояния r до его оси), если сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент времени равна \mathcal{I} .

12.6. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых металлических дисков, пространство между которыми заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Расстояние между внутренними поверхностями дисков равно d . Между обкладками конденсатора поддерживается переменное напряжение $V = V_0 \sin \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, найти магнитное поле H в пространстве между обкладками конденсатора.

12.7. К плоскому воздушному конденсатору, обкладки которого имеют форму дисков с зазором $d = 1$ см между ними, приложено переменное напряжение $V = V_0 \cos \omega t$ с амплитудой $V_0 = 300$ В и круговой частотой $\omega = 3 \cdot 10^6$ с⁻¹. Найти амплитуды полей H_0 и B_0 на расстоянии $r = 1$ см от оси конденсатора, если это расстояние меньше радиуса обкладок конденсатора. Как изменятся эти амплитуды, если зазор между обкладками заполнить однородным диэлектриком с $\epsilon = 10$ и $\mu = 100$?

12.8. Плоский воздушный конденсатор, обкладками которого являются два одинаковых диска, заряжен до высокой разности потенциалов и затем отключён от источника напряжения. В центре конденсатора происходит пробой (проскаивает электрическая искра), в результате чего конденсатор разряжается. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, определить полный поток электромагнитной энергии, вытекающей из пространства между обкладками. Обсудить явление с точки зрения сохранения и превращения энергии.

12.9. Плоскому конденсатору емкостью C , обкладками которого являются два одинаковых диска, сообщен заряд Q . Затем конденсатор отключают от источника электричества. После этого пластины соединяют длинным цилиндрическим проводом, проходящим вне конденсатора, и конденсатор разряжается. Пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, показать непосредственным расчетом, что полный поток электромагнитной энергии из конденсатора равен полному потоку электромагнитной энергии, втекающему внутрь провода. Проанализировать явление с точки зрения представления о движении, превращении и сохранении энергии.

12.10. Найти плотность тока смещения $j_{\text{см}}$ в плоском конденсаторе, пластины которого раздвигаются со скоростью u , оставаясь параллельным друг другу, если: 1) заряды на пластинах конденсатора остаются постоянными; 2) разность потенциалов V между пластинами остается постоянной. Расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин. 3) Что изменится, если пластины конденсатора будут сближаться, а не раздвигаться?

12.11.* Плоский воздушный конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков, заряжен электричеством и помещен внутри соленоида, создающего однородное постоянное магнитное поле $B = 1000$ Гс. Магнитное поле создается батареей, посыпающей постоянный ток в обмотку электромагнита. Электрическое поле между пластинами

конденсатора равно $E = 10000$ В/см. Вся система (вместе с батареей) помещена на горизонтальные рельсы и может перемещаться по ним без трения. Рельсы параллельны пластинам конденсатора. Как изменится по величине и направлению механический импульс системы, если конденсатор пробивается электрической искрой вдоль его оси и в результате этого разряжается? Объем воздушного пространства между пластинами конденсатора $V = 100$ см³. Обсудить результат с точки зрения закона сохранения импульса. Как изменится механический импульс системы, если конденсатор остается заряженным, но разрывается цепь батареи, питающей соленоид?

12.12. Заряженный плоский воздушный конденсатор с напряженностью электрического поля между пластинами $E_0 = 282$ В/см помещен внутри соленоида, поперечное сечение которого имеет форму прямоугольника со сторонами, параллельными и перпендикулярными пластинам конденсатора. В цепи обмотки соленоида имеется батарея постоянного тока и ключ. Вся система (вместе с батареей) помещена на горизонтальные рельсы, параллельные пластинам конденсатора, и может перемещаться по ним без трения. Вначале цепь соленоида разомкнута. Затем ключ замыкается, и в соленоиде создается постоянное магнитное поле с индукцией $B = 2000$ Гс. Как изменится по величине и направлению механический импульс системы после замыкания ключа? Объем воздушного пространства между пластинами конденсатора равен $V = 200$ см³. Обсудить результат с точки зрения закона сохранения импульса.

12.13. Заряженный тонкостенный цилиндрический конденсатор с радиусом внешнего электрода $R = 20$ см висит в вакууме на упругой нити с модулем кручения $f = 10^4$ дин · см в магнитном поле $B = 10^4$ Гс, параллельном нити и тонкому внутреннему электроду конденсатора. При нагреве конденсатор быстро разряжается за счет термоэмиссии. Определить амплитуду φ_0 малых крутильных колебаний конденсатора. Заряд конденсатора $Q = 5 \cdot 10^{-7}$ Кл, момент инерции конденсатора $J = 100$ г · см².

12.14. Одним из методов обнаружения гипотетического элементарного магнитного заряда — монополя Дирака, величина которого в гауссовой системе единиц $g_0 = \hbar c / (2e)$, — может быть регистрация электрического тока, возникающего в сверхпроводящем контуре после прохождения сквозь него монополя. Оценить величину тока в кольце индуктивностью $L = 0,1$ мГн.

Указание. Гипотеза П. Дирака о монополе приводит к симметризации уравнений Максвелла так, что одно из них принимает форму

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} - \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}_m,$$

где \mathcal{E} — ЭДС, возникающая в контуре, Φ — поток магнитной индукции, \mathcal{J}_m — ток монополя или магнитный заряд, протекающий через площадку, ограниченную контуром в единицу времени.

12.15. Одним из методов обнаружения гипотетического элементарного магнитного заряда — монополя Дирака, величина которого в гауссовой системе единиц $g_0 = \hbar c / (2e)$, — может быть регистрация электрического заряда, протекшего в металлическом кольце при прохождении сквозь него монополя. Оценить величину заряда для кольца сопротивлением $R = 1$ Ом (см. также предыдущую задачу).

12.16* Подвесим небольшой стальной цилиндр внутри проволочной катушки, питаемой городским переменным током. Цилиндр, испытывая 50 циклов перемагничивания в секунду, сильно нагревается уже через одну–две минуты. Чтобы доказать, что нагревание обусловлено гистерезисом, а не токами Фуко, подвесим внутри той же катушки медный цилиндр тех же размеров, что и стальной. Электропроводность меди больше, чем у железа, а потому токи Фуко в ней будут сильнее. Между тем при значительном нагревании стального цилиндра медный остается холодным. Является ли это убедительным доказательством гистерезиса у железа?

12.17. Катушка с числом витков N , длиной l и радиусом a заполнена слабопроводящим материалом с постоянной проводимостью λ . Определить, как изменится ЭДС самоиндукции катушки по сравнению со случаем $\lambda = 0$, если по катушке течет ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. Магнитная проницаемость материала μ . Краевыми эффектами пренебречь.

12.18. На горизонтальном столе из непроводящего немагнитного материала покоится сильно сплющенная собственным весом капля ртути, более похожая на блин. Диаметр «блина» $d = 10$ см. Ртуть абсолютно не смачивает поверхность стола. Далее «блин» вместе со столом помещают в переменное однородное магнитное поле с индукцией $B = B_0 \cos \omega t$, перпендикулярное поверхности стола. Оценить, какова должна быть амплитуда поля B_0 , чтобы на частоте $v = 1$ МГц диаметр «блина» изменился в два раза. Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0,465$ Н/м, плотность $\rho = 13,5$ г/см³, ее удельное сопротивление $\alpha = 9,6 \cdot 10^{-7}$ Ом · м. Ускорение свободного падения принять равным $g = 9,8$ м/с².

12.19. Обкладками плоского воздушного конденсатора являются два круговых диска, расположенных на расстоянии d друг от друга. Внутри конденсатора находится проволочная прямоугольная рамка, одна сторона которой совпадает с осью симметрии конденсатора (рис. 340). Сторона рамки, параллельная пластинам конденсатора, равна $2a$, перпендикулярная — $2b$. К обкладкам конденсатора приложено переменное напряжение $V = V_0 \cos \omega t$. Найти силу тока \mathcal{I} в рамке в предположении, что ее омическое сопротивление R велико по сравнению с индуктивным.

12.20. В длинном воздушном соленоиде с радиусом намотки $r_0 = 1$ см, содержащем $n = 10$ витков/см, течет ток, нарастающий с постоянной скоростью $d\mathcal{I}/dt = 100$ А/с. Какова будет форма силовых

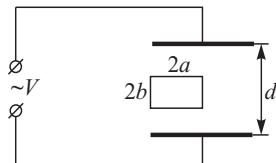


Рис. 340

линий соответствующего ему вихревого электрического поля E ? Найти величину E на расстоянии $2r_0$ от оси соленоида. Как изменится поле E и индукция D , если соленоид погрузить в однородный немагнитный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$?

12.21. В однородном магнитном поле перпендикулярно вектору \mathbf{B} расположен замкнутый круглый виток радиусом r , индуктивность которого L , а омическое сопротивление R . Начиная с момента $t = 0$, поле убывает по линейному закону со скоростью $dB/dt = -a$. Найти закон изменения потока индукции $\Phi(t)$, пронизывающего контур витка.

12.22. Медный цилиндр радиусом $a = 1$ см и высотой $h = 10$ см помещен в переменное однородное магнитное поле $B = B_0 \cos \omega t$, параллельное оси цилиндра. Амплитуда поля $B_0 = 100$ Гс, частота $\nu = 50$ Гц. Определить среднюю мощность тепла Q , выделяющуюся в цилиндре из-за токов Фуко. Электропроводность меди $\lambda = 5,14 \cdot 10^{17}$ с $^{-1}$ (СГСЭ).

12.23. Плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d заполнен слабопроводящим диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ и удельным сопротивлением ρ . Через конденсатор течет переменный ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. Найти амплитуду V_0 напряжения на конденсаторе.

12.24. В плоский конденсатор, состоящий из двух круглых дисков площадью S , помещена квадратная проволочная рамка со стороной a . Одна из сторон рамки совпадает с осью конденсатора, а две другие направлены по радиусу диска. Сопротивление рамки r (ее индуктивное сопротивление можно считать много меньшим омического). Конденсатор заряжается от источника постоянной ЭДС до заряда Q_0 , причем постоянная времени $\tau = RC$. Найти джоулево тепло, выделяющееся в рамке при зарядке конденсатора. Откуда берется эта энергия? При каких условиях можно пренебречь индуктивностью рамки?

12.25. Имеется двухпроводная линия из идеального проводника (без тепловых потерь). Одна пара концов линии присоединена к генератору постоянного тока, другая — к некоторому сопротивлению (нагрузке). Показать, что если падение напряжения в проводах не учитывать, то вектор потока энергии (вектор Пойнтинга) \mathbf{S} в пространстве между проводами направлен вдоль проводов от генератора к нагрузке. Как изменится картина, если учесть сопротивление проводов?

12.26. По прямому проводу, обладающему сопротивлением, идет постоянный ток.

1) Указать для произвольной точки боковой поверхности провода направление составляющей вектора Пойнтинга \mathbf{S} , обусловленной тангенциальной составляющей \mathbf{E} .

2) Показать, что произведение модуля вектора Пойнтинга на величину боковой поверхности провода равно мощности, выделяемой током в проводе.

12.27. Постоянный ток \mathcal{I} течет по цепи, состоящей из резистора сопротивлением R и длинной катушки радиусом r_2 и плотностью намотки витков n [см $^{-1}$] и соосного с катушкой прямого провода ра-

диусом r_1 (рис. 341). Пренебрегая сопротивлением катушки и провода, найти аксиальную S_z и азимутальную S_φ компоненты вектора Пойнтинга внутри катушки вдали от ее торцов. Вычислить поток энергии через сечение катушки.

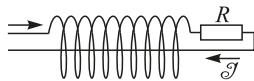


Рис. 341

12.28. Длинный соленоид (длина l , радиус r , число витков N) подключается к источнику постоянной ЭДС \mathcal{E} через сопротивление R (сопротивлением соленоида можно пренебречь). Найти электромагнитную энергию, втекающую в соленоид за время установления тока, и сравнить ее с магнитной энергией соленоида $L\dot{\mathcal{I}}^2/2$.

12.29. Цилиндрический электронный пучок радиусом R распространяется в свободном пространстве. Электроны пучка летят параллельно, их энергия W , а концентрация n . Найти величину и направление вектора Пойнтинга в любой точке пространства.

12.30. По цилиндрическому проводнику течет ток, плотность которого j однородна по сечению проводника. Концентрация электронов проводимости n . Пренебрегая сопротивлением и учитывая поле Холла, определить величину и направление вектора Пойнтинга в проводнике в зависимости от расстояния до оси r . Величины $\epsilon = \mu = 1$.

12.31. В свободном пространстве распространяется электронный пучок «ножевой» геометрии, т. е. имеющий вид тонкого плоского слоя; скорость электронов лежит в плоскости слоя. Толщина пучка $2a$, энергия электронов W , концентрация их n . Считая, что все электроны летят параллельно, найти вектор Пойнтинга в произвольной точке пространства.

12.32* Конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиусом a , расположенных на расстоянии d друг от друга, заполнен диэлектриком с проницаемостью ϵ и заряжен до напряжения V_0 . Затем конденсатор начинает разряжаться через внешнее сопротивление R . Пренебрегая краевыми эффектами, найти вектор Пойнтинга в конденсаторе как функцию расстояния r от оси и времени t . Найти полную электромагнитную энергию W , вытекшую через боковую поверхность конденсатора за все время разряда.

12.33. Плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых соосных дисков, подключен к источнику постоянного напряжения \mathcal{E} . В момент $t = 0$ расстояние d между дисками начинает увеличиваться по некоторому закону $d(t)$. Найти вектор Пойнтинга \mathbf{S} и электромагнитную энергию $W(r, t)$, переносимую через цилиндрическую поверхность радиусом r , расположенную внутри конденсатора вокруг оси, как функцию времени. Расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с радиусом пластины.

12.34. По проводнику, имеющему форму плоской ленты, течет ток с плотностью j . Носителями тока являются электроны с концентрацией n . Найти величину и направление вектора Пойнтинга в произвольной точке внутри проводника. Считать толщину ленты много меньше ее ширины, сопротивление не учитывать; $\mu \approx 1$.

12.35. Цилиндрический электронный пучок с концентрацией n_e и продольной скоростью электронов v проходит сквозь газ положительных неподвижных ионов с концентрацией, подобранный таким образом, чтобы скомпенсировать силы взаимодействия электронов в поперечном направлении. Найти величину и направление вектора Пойнтинга внутри пучка, а также концентрацию ионов n_i .

12.36. В длинном соленоиде объемом V и индуктивностью L ток возрастает по закону $\mathcal{I} = at$, где a — известная константа. Определить вектор Пойнтинга внутри соленоида. Определить полный поток Φ_S вектора Пойнтинга \mathbf{S} через сферическую поверхность, центр которой лежит на оси соленоида вдали от его торцов, через время $t = 1$ с после начала процесса. Радиус R поверхности меньше радиуса соленоида. Рассеянием поля на торцах соленоида пренебречь, $\epsilon = \mu = 1$.

12.37. Внутри плоского конденсатора, образованного двумя круглыми дисками, расположенными на расстоянии d друг от друга, мысленно выделена замкнутая цилиндрическая поверхность радиусом R ($2R < d$) и длиной L (L меньше диаметра пластин конденсатора). Ось цилиндра перпендикулярна оси симметрии конденсатора. Напряжение на конденсаторе изменяется по линейному закону $V = At$, где A — известная константа. Определить вектор Пойнтинга внутри конденсатора. Определить полный поток Φ_S вектора Пойнтинга \mathbf{S} через цилиндрическую поверхность через время $t = 1$ с после начала процесса.

12.38. Оболочка и центральный проводник длинного отрезка коаксиального кабеля, замкнутого с торцов, изготовлены из разных сверхпроводников. Вначале по кабелю циркулирует ток \mathcal{I}_0 . Затем температуру повышают так, что внутренний сверхпроводник переходит в нормальное состояние. Сверхпроводимость же оболочки при этом сохраняется. Определить вектор Пойнтинга и электромагнитную энергию, перенесенную за время затухания тока, на единицу длины кабеля. Радиус оболочки R_0 , центрального проводника r_0 . Считать скорость изменения тока $d\mathcal{I}/dt$ известной.

12.39. Двухпроводная линия из задачи 12.25 присоединена с одного конца к генератору синусоидального тока. Напряжение и сила тока в линии находятся в одной и той же фазе. Показать, что вектор Пойнтинга \mathbf{S} в пространстве между проводами всегда направлен от генератора к нагрузке.

12.40. В двухпроводной линии из задачи 12.25 ток отстает по фазе от напряжения на 90° . Показать, что вектор Пойнтинга \mathbf{S} через каждую четверть периода меняет свое направление на обратное и, следовательно, поток энергии за период равен нулю (стоячая волна).

12.41* Источник постоянного тока нагружен на сопротивление $R = 60$ Ом. Сопротивление и источник соединены через коаксиальную линию, длина которой $l \gg r_1, r_2$. В некоторый момент времени ключ K_1 отключает линию от источника и одновременно K_2 замыкает накоротко нагрузку (рис. 342). Полагая все сопротивления,

кроме R , пренебрежимо малыми, а величины ЭДС, l , r_1 заданными, определить, при какой величине r_2 энергия, излученная линией после срабатывания ключей, будет минимальной.

12.42. Провода системы Лехера находятся в ёмкостной связи с генератором синусоидальных колебаний, который поддерживает между концами A и B переменное напряжение $V_0 \cos \omega t$, где V_0 и ω — постоянные. Концы C и D закорочены (рис. 343). Длина лехеровой системы $AC = BD = l$. Найти распределение напряжения $V(x, t)$ между проводами как функцию координаты x и времени t , предполагая, что колебания установились, а активное сопротивление всех проводов равно нулю. Исследовать амплитуду A установившихся колебаний напряжения в пучностях в зависимости от длины l лехеровой системы.

12.43* Отрезок коаксиального кабеля длиной $l = 14$ м подключен ко входу усилителя с очень высоким входным сопротивлением. Другой конец кабеля замкнут накоротко. Межпроводное пространство кабеля заполнено диэлектриком ($\epsilon = 2$), характеризующимся малой удельной проводимостью $\lambda = 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}^{-1} \approx 9 \cdot 10^3$ ед. СГСЭ. Найти наименьшую резонансную частоту v_{\min} и добротность Q контура, эквивалентного отрезку данного кабеля, считая, что потери связаны только с проводимостью диэлектрика.

12.44* Торцы отрезка волновода сечением $a \times b = 10 \times 22 \text{ мм}^2$ и длиной $l = 100 \text{ мм}$ запаяны, и волновод заполнен диэлектрической средой ($\epsilon = 2$), обладающей слабой удельной проводимостью $\lambda = 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}^{-1} \approx 900$ ед. СГСЭ. Найти добротность Q полученного СВЧ-резонатора для самой низкой возможной резонансной частоты v_{\min} , считая, что потери связаны только с проводимостью диэлектрика.

12.45* Волновод с металлическими стенками квадратного сечения со стороной $a = 5 \text{ см}$ возбуждается модулированными колебаниями $E_x(t) = E_0(1 + \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, где $\omega_0/(2\pi) = 3001 \text{ МГц}$, а $\Omega/(2\pi) = 4 \text{ МГц}$. Пренебрегая потерями бегущих волн в волноводе, определить, по какому закону меняется поле $E_{\text{вых}}(t)$ на выходе волновода длиной L . Поле \mathbf{E} перпендикулярно оси волновода и параллельно одной из стенок (рис. 344). Чему равна фазовая скорость волны с частотой ω_0 ?

12.46. В волноводе квадратного сечения со стороной $a = 5 \text{ см}$ с металлическими стенками возбуждаются колебания электрическо-

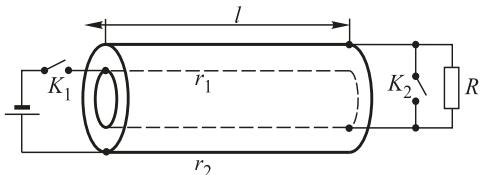


Рис. 342

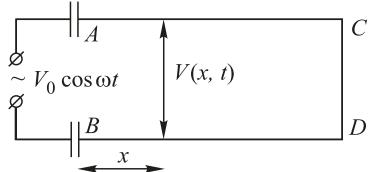


Рис. 343

го поля $E_x = E_0 \cos 2\pi v_0 t$ с частотой $v_0 = 2995$ МГц (поле **E** перпендикулярно оси волновода z и параллельно одной из стенок) (рис. 344). При какой минимальной частоте амплитудной модуляции v_{min} в волноводе возникнет бегущая волна? Чему равна фазовая скорость волны при частоте модуляции $v = 5$ МГц?

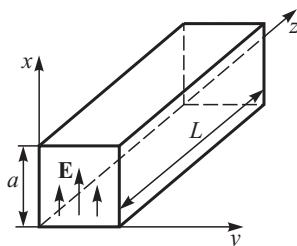


Рис. 344

но по оси z . Найти вектор Пойнтинга $\mathbf{S}(t, x, y, z)$ как функцию координат и времени.

12.48. Генератор электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda = 8$ мм и мощностью $N = 1$ Вт настроен на основную моду прямоугольного резонатора с металлическими стенками, объем которого $V = 0,2$ см³ и добротность $Q = 10^3$. Система соединения генератора и резонатора обеспечивает полное поглощение энергии генератора внутри резонатора. Определить максимальную напряженность E_0 электрического поля в резонаторе.

12.49. Прямоугольный сверхпроводящий резонатор высотой $h = 3$ см имеет в горизонтальном сечении форму квадрата со стороной $a = 10$ см. Изнутри резонатор покрыт сверхпроводником, критическое магнитное поле H_c которого в условиях опыта равно 1 кЭ. Во избежание пробоя напряженность E электрического поля всюду не должна быть больше $E_0 = 30$ кВ/см. Измеренная на низшей резонансной частоте добротность резонатора оказалась равной $Q = 10^6$. Какую мощность N можно подводить непрерывно к резонатору на этой частоте, чтобы поддерживать колебания с максимально допустимой амплитудой?

12.50. В волноводе квадратного сечения (сторона квадрата равна a) с идеально проводящими стенками и вакуумным наполнением возбуждена бегущая электромагнитная ТЕ-волна с минимальной частотой при заданном волновом числе k_z . Ось z направлена вдоль волновода, вектор **E** параллелен оси x , амплитуда поля равна E_0 . Определить вектор Пойнтинга $\mathbf{S}(x, y, z, t)$ как функцию координат и времени.

12.51. Относительный показатель преломления n двух сред можно определить как отношение длин волн или волновых чисел: $n = \lambda_1/\lambda_2 = k_2/k_1$. С этой точки зрения излучение электромагнитной энергии с открытого торца волновода можно рассматривать как переход электромагнитной энергии из одной среды в другую. При этом неизбежно возникает отраженная волна. Пользуясь этой моделью, определить коэффициент стоячей волны (КСВ) в волноводе прямоугольного сечения для волны H_{10} . Один торец волновода подключен

к генератору высокочастотного электромагнитного поля с частотой $\nu = 3000 \text{ МГц}$, другой торец открыт. Широкая стенка волновода имеет размер $a = 5,2 \text{ см}$.

12.52. Мощный СВЧ-генератор через волновод питает нагрузку, посылая в волновод мощность $N_0 = 100 \text{ кВт}$. Часть этой мощности поглощается в нагрузке ($N_h = 75 \text{ кВт}$), а часть отражается. В результате в волноводе возникает суперпозиция прямой и отраженной волн, распространяющихся во встречных направлениях. Найти коэффициент стоячей волны в волноводе, т. е. отношение максимальной напряженности поля (в пучности) к минимальной (в узле).

12.53. В прямоугольном объемном резонаторе СВЧ-диапазона со сторонами $a < b < l$ возбуждают низшую моду колебаний. После накопления в резонаторе плазмы, образующейся в результате ионизации оставшегося после откачки воздуха, частота этой моды колебаний удваивается. По этим данным определить концентрацию электронов плазмы.

12.54.* Через волновод прямоугольного сечения со сторонами $a < b$ распространяется волна низшего типа (т. е. H_{01}), возбуждаемая генератором микроволнового излучения с частотой ω_0 . Вследствие ионизации воздуха, оставшегося в волноводе после его вакуумирования, в нем образуется плазма, в результате чего длина волны в волноводе удваивается. Из этих условий определить концентрацию электронов в образовавшейся плазме.

12.55. Плоский конденсатор заполнен плазмой со средней концентрацией электронов и ионов n_0 и температурой T . Расстояние между пластинами конденсатора a , разность потенциалов V . Пренебрегая током через плазму и считая $eV \ll kT$, определить пространственную зависимость потенциала в плазме между пластинами конденсатора.

12.56. Через конденсатор колебательного контура с резонансной частотой $\omega_0 = 10^7 \text{ с}^{-1}$ параллельно пластинам пропускается электронный пучок, полностью заполняющий пространство между ними (ток $\mathcal{I} = 1 \text{ мА}$, энергия $W = 1 \text{ кэВ}$, сечение пучка $S = 100 \text{ см}^2$). Во сколько раз изменится резонансная частота?

12.57. По длинному плазменному цилиндру диаметром $2R = 10 \text{ см}$ течет ток $\mathcal{I} = 10^5 \text{ А}$, сосредоточенный в поверхностном слое. Давление в плазме $P = 10^5 \text{ Н/м}^2$. Определить давление P_0 на боковую поверхность плазменного цилиндра, возникающее под действием тока. Сжимается плазма или расширяется? Найти величину тока, необходимую для того, чтобы радиальные силы уравновесились.

12.58.* Z -пинч представляет собой плазменный шнур, вдоль оси которого течет ток \mathcal{I} . В равновесии магнитное давление его собственного магнитного поля уравновешивает газокинетическое давление плазмы. В одной из моделей плазма считается нейтральной с однородным распределением плотностей частиц и тока по поперечному сечению пучка. Оценить температуру T плазмы на оси шнура. Принять, что внешний радиус шнура $R = 5 \text{ см}$, сила тока $\mathcal{I} = 4 \cdot 10^5 \text{ А}$, плотность частиц $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, магнитная проницаемость плазмы $\mu = 1$.

12.59. Плазменный шнур удерживается с помощью магнитного поля, параллельного оси шнура, вследствие того, что поле не проникает внутрь плазмы. Оценить величину магнитного поля, необходимую для удержания плазмы, если концентрация частиц плазмы $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, а ее температура $T = 10^8 \text{ К}$.

12.60. В цилиндрическом пропорциональном счетчике пучок частиц вызывает объемную ионизацию. Оценить время собирания ионов в таком счетчике, наполненном аргоном при нормальном давлении. Радиус катода $R = 1 \text{ см}$, радиус анода $r = 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, разность потенциалов между анодом и катодом $V = 2500 \text{ В}$, подвижность положительных ионов аргона $\mu^+ = 1,4 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

12.61. Мощный источник тока создает в тонкой цилиндрической плазменной оболочке ток $\mathcal{I} = 5 \cdot 10^6 \text{ А}$, параллельный оси и равномерно распределенный по азимуту (рис. 345). Внутри оболочки предварительно создано продольное магнитное поле $B_0 = 1 \text{ кГс}$. Начальный радиус цилиндра $R_0 = 2 \text{ см}$. В дальнейшем под действием тока оболочка сжимается по радиусу. Считая ее идеально проводящей, оценить, при каком радиусе R_x ускорение оболочки поменяет знак.

12.62. Вдоль цилиндрического электронейтрального плазменного шнура (Z -пинч) течет ток \mathcal{I} . Считая, что условие механического равновесия плазмы определяется балансом сил Ампера и газокинетического давления, определить температуру вблизи оси плазменного шнура, полагая температуру на поверхности пренебрежимо малой (рис. 346). Плотность тока и концентрация частиц в плазме однородны по сечению, число частиц на единицу длины равно $N [\text{см}^{-1}]$.

12.63. Дипольный момент \mathbf{p} точечно-го электрического диполя, расположенного в вакууме в начале координат, направлен вдоль оси z и меняется по закону $p_z = p_0 \sin \omega t$. Найти магнитное поле $B(t)$ в точке с координатами $(R, 0, R)$. Считать выполненным условие $R \ll 2\pi c/\omega$. Что означает это условие?

12.64. Дипольный момент \mathbf{p} точечного электрического диполя, расположенного в вакууме вблизи начала координат, направлен вдоль оси z , а его положение меняется во времени по закону $z = a \sin \omega t$, $x = y = 0$. Найти магнитное поле $B(t)$ в точке с координатами $(R, 0, R)$, полагая $a \ll R$. Считать выполненным условие $R \ll 2\pi c/\omega$. Что означает это условие?

12.65. Длинный коаксиальный кабель состоит из двух идеальных цилиндрических проводников, отношение радиусов которых $r_1/r_2 = 20 \approx e^3$. Пространство между проводниками заполнено немагнитным диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 2$. Один конец кабеля подключен к батарее постоянного тока, а другой конец замкнут на неко-

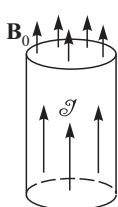


Рис. 345

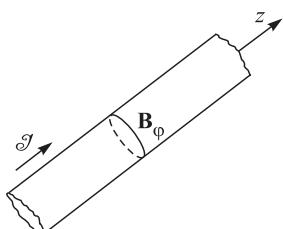


Рис. 346

вдоль оси z и меняется по закону $p_z = p_0 \sin \omega t$. Найти магнитное поле $B(t)$ в точке с координатами $(R, 0, R)$. Считать выполненным условие $R \ll 2\pi c/\omega$. Что означает это условие?

12.64. Дипольный момент \mathbf{p} точечного электрического диполя, расположенного в вакууме вблизи начала координат, направлен вдоль оси z , а его положение меняется во времени по закону $z = a \sin \omega t$, $x = y = 0$. Найти магнитное поле $B(t)$ в точке с координатами $(R, 0, R)$, полагая $a \ll R$. Считать выполненным условие $R \ll 2\pi c/\omega$. Что означает это условие?

12.65. Длинный коаксиальный кабель состоит из двух идеальных цилиндрических проводников, отношение радиусов которых $r_1/r_2 = 20 \approx e^3$. Пространство между проводниками заполнено немагнитным диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 2$. Один конец кабеля подключен к батарее постоянного тока, а другой конец замкнут на неко-

торое нагрузочное сопротивление R_h (рис. 347). Оценить, при каком значении R_h электрическая и магнитная энергии в диэлектрике окажутся одинаковыми.

Ответ следует привести в омах.

12.66. Длинная тонкая катушка радиусом $r_1 = 2$ см с числом витков $n = 20$ на сантиметр соосно вставлена в другую длинную катушку радиусом $r_2 = 5,4$ см с теми же плотностью и направлением намотки витков. Одни концы катушек подключены к батарее постоянного тока, а другие замкнуты на некоторое нагрузочное сопротивление R_h (рис. 348). Пренебрегая

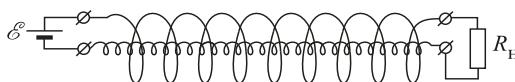


Рис. 348

краевыми эффектами, оценить, при каком значении R_h электрическая и магнитная энергии такой системы окажутся одинаковыми. Ответ следует привести в Омах.

12.67. Для передачи электромагнитной энергии от генератора высокочастотных колебаний к нагрузке используется длинная линия, состоящая из двух плоских шин, расположенных параллельно друг другу (рис. 349). Ширина шин $l = 10$ см, расстояние между ними $d = 1$ см. Оценить скорость распространения электромагнитных волн в такой линии, а также импеданс Z_h нагрузки, при которой в линии устанавливается чисто бегущая волна. Считать, что длина волны $\lambda \gg d, l$.

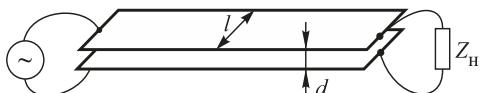


Рис. 349

12.68. Объемный резонатор в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами $a = 1$ см, $b = 2$ см, $L = 3$ см выполнен из сверхпроводника. Определить резонансные частоты двух наименших мод такого резонатора. Предполагая, что электрические параметры заполняющего резонатор воздуха не зависят от частоты, определить отношение добротностей этих мод.

12.69. В волноводе прямоугольного сечения распространяется монохроматическая волна сложной пространственной структуры. Попе \mathbf{E} в волне перпендикулярно широкой стенке волновода размером $d = 4$ см (рис. 350). Такую волну можно представить как суперпозицию собственных мод волновода типа H_{0m} , поле \mathbf{E} которых в плоскости $z=0$ имеет вид $E_x(y, 0, t) = \sum_m C_m \sin(m\pi y/d) \cos(\omega t + \alpha_m)$. Будем предполагать, что для всех мод выполнено условие $m \gg 2d/\lambda_0$, где $\lambda_0 = 2$ см — длина волны в свободном пространстве. Показать, что при этом условии распределение амплитуды колебаний по по-

перечному сечению волновода $E(y, z)$ воспроизводится (повторяется) через определенное расстояние Δz , $E(y, z) = E(y, z + \Delta z)$. Определить расстояние Δz между сечениями саморепродукции поля в волноводе.

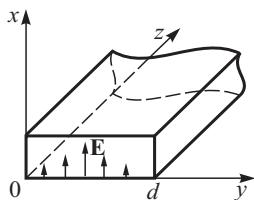


Рис. 350

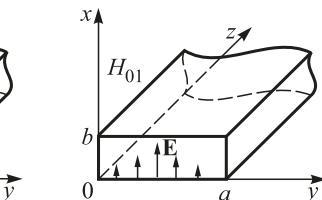
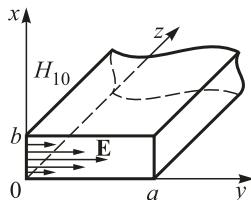


Рис. 351

12.70. Электромагнитная волна во входном торце волновода ($z = 0$) прямоугольного сечения ($b \times a$) с идеально проводящими стенками представляет собой суперпозицию мод типа H_{01} и H_{10} . Распределение поля \mathbf{E} в этих модах показано на рис. 351. В моде H_{01} поле \mathbf{E} при ($z = 0$) имеет только x -компоненту $E_x = E_0 \sin(\pi y/a) \cos \omega t$, а в моде H_{10} — только y -компоненту $E_y = E_0 \sin(\pi x/b) \cos \omega t$. При какой минимальной длине волновода ориентация вектора \mathbf{E} в любой точке (x, y) выходного сечения совпадает с ориентацией вектора \mathbf{E}

во входном сечении (в точке с теми же координатами x, y)? При расчете принять, что частота много больше критических частот обеих мод: $\omega \gg \pi c/a, \pi c/b$. Рассмотреть пример: $\lambda_0 = 0,3$ см, $a = 2b = 6$ см (здесь λ_0 — длина волн в свободном пространстве).

12.71. По двум параллельным проводящим плоскостям (рис. 352) текут антипараллельные токи с линейной плотностью i . Токи замыкаются через соединяющую плоскости перемычку толщиной δ с удельным сопротивлением ρ . Найти величину и направление вектора Пойнтинга в пространстве между плоскостями.

12.72. Плоский конденсатор в виде двух плоских дисков с радиусами a и расстоянием между ними d заполнен слабо проводящей средой ($\epsilon = \mu = 1$) с электропроводностью λ . В момент времени $t = 0$ конденсатор подключают к батарее постоянного тока с ЭДС, равной \mathcal{E} , и внутренним сопротивлением r . Найти зависимость от времени тока проводимости $\mathcal{I}_{\text{пр}}$ и тока смещения $\mathcal{I}_{\text{см}}$ в конденсаторе, а также магнитного поля \mathbf{B} вблизи боковой поверхности конденсатора.

12.73. Плоский конденсатор емкостью C_0 в виде двух круглых дисков с радиусами a заполнен слабо проводящей средой ($\epsilon = \mu = 1$) с сопротивлением утечки между пластинами, равным R . Конденсатор подключен к источнику переменного тока с ЭДС, равной $\mathcal{E} \cos \omega t$, и внутренним сопротивлением r . Найти амплитуды $\mathcal{I}_{\text{пр}}$ и $\mathcal{I}_{\text{см}}$ токов проводимости и смещения, текущих через конденсатор в установившемся режиме. Определить амплитуду магнитного поля B_0 на рас-

стоянии $x < a$ от оси конденсатора. Параметры схемы подобраны так, что $\omega C_0 R = 1$.

12.74. Длинная линия, предназначенная для передачи электромагнитной энергии от генератора высокочастотных колебаний к нагрузке, выполнена в виде двух плоских идеально проводящих шин шириной b , расположенных параллельно друг другу на расстоянии a , причем $a \ll b$. Выходной торец этой линии закрывают пленкой толщиной d из полупроводникового материала с удельным сопротивлением ρ (рис. 353). Оказалось, что при этом исчезли как отраженные от торца, так и выходящие из линии волны. При каком соотношении между d и ρ это возможно? Вычислить значение ρ при $d = 0,1$ мм. Можно ли на основании этого результата прийти к проекции антирадарной защиты?

12.75. Два провода в системе Лехера, используемой в лекционном зале для демонстрации стоячих волн, были пропущены сквозь расположенный поперек линии большой лист стекла, покрытый кремниевой пленкой (рис. 354). При этом оказалось, что в системе не возникла отраженная волна, и стоячие волны не возбудились. Определить толщину δ этой кремниевой пленки, приняв удельное сопротивление кремния $\rho = 0,47$ Ом · м, а удельное сопротивление стекла — бесконечным.

12.76. Оценить силы F_x , F_y и F_z , оказываемые электромагнитным полем на стенки объемного резонатора, имеющего размеры в плоскости XOY : $a_1 = a_2 = 3$ см, по оси OZ : $b = 1$ см, в условиях, когда СВЧ-генератор непрерывно подводит к резонатору мощность $N = 1$ Вт на наименее моду резонатора. Добротность резонатора $Q = 10^3$.

12.77. Длинный цилиндр радиусом $R = 3$ см из графита с удельным сопротивлением $\rho = 3,1 \cdot 10^{-15}$ ед. СГСЭ расположен параллельно линиям индукции однородного магнитного поля, медленно меняющегося по закону $B_{\text{вн}} = B_0 \cos \omega t$ с угловой частотой $\omega = 100$ с⁻¹. Найти отличие ΔB магнитного поля на оси цилиндра от $B_{\text{вн}}$. Оценить численно отношение амплитудных значений $|\Delta B_0 / B_0|$.

12.78. Сфера радиусом R и толщиной $h \ll R$ из слабо проводящего материала с удельным сопротивлением ρ помещена во внешнее однородное магнитное поле, меняющееся во времени по закону $B(t) = B_0 \cos \omega t$. Найти отличие магнитного поля в центре сферы от внешнего поля $B(t)$.

12.79. Металлический незаряженный шар радиусом R движется с постоянной скоростью v перпендикулярно линиям однородного маг-

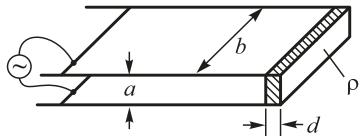


Рис. 353

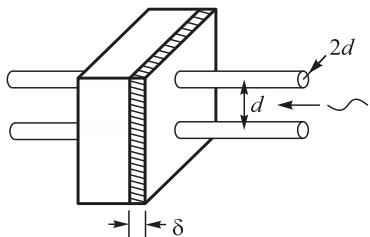


Рис. 354

нитного поля B . Найти электрическое поле внутри шара, распределение плотности заряда на его поверхности и разность потенциалов между точками A и B (рис. 355).

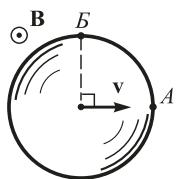


Рис. 355

12.80. Через плоский конденсатор с круглыми пластины радиусом R_2 каждая течет переменный ток $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \cos \omega t$. При этом в конденсатор симметрично вставлена слабо проводящая диэлектрическая пластина (рис. 356) в форме диска радиусом R_1 и толщиной d . Диэлектрическая проницаемость диэлектрика ϵ , удельное сопротивление ρ . Принимая $\epsilon = 2$, $R_2 = 2R_1 = 2R$, найти амплитуду напряжения на конденсаторе.

12.81. Заряженный плоский конденсатор с круглыми пластины радиусом R_2 , отключённый от внешней цепи, постепенно разряжается через слабо проводящий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , вставленный между пластины (рис. 357). Диэлектрик имеет форму кольца с внутренним радиусом R_1 и наружным радиусом R_2 , ток через него в данный момент равен \mathcal{J} . Пренебрегая краевыми эффектами для электрического поля в конденсаторе, определить распределение магнитного поля внутри и вне диэлектрика в конденсаторе. Магнитная проницаемость $\mu = 1$.

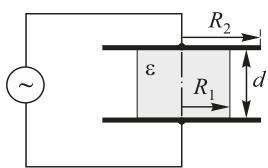


Рис. 356

Механически связанные между собой, подвешен на тонкой нити в однородном магнитном поле \mathbf{B}_0 , параллельном оси конденсатора. Радиусы обкладок R_1 и R_2 , заряд конденсатора q (рис. 358). Первоначально конденсатор неподвижен. В момент времени $t = 0$ обкладки соединяются перемычкой A , обладающей некоторым сопротивлением.

1) Найти механический момент импульса, который приобретет конденсатор при разряде.

2) Указать направление, в котором будет закручиваться конденсатор.

12.83. Длинный заряженный цилиндрический конденсатор, обкладки которого механически связаны между собой, подвешен на тонкой нити в однородном магнитном поле \mathbf{B}_0 , параллельном оси конденсатора. Радиусы обкладок R_1 и R_2 , заряд конденсатора q (рис. 359). Первоначально конденсатор неподвижен.

1) Пренебрегая краевыми эффектами, найти механический момент импульса, который приобретет конденсатор при исчезновении магнитного поля.

2) Указать направление, в котором будет закручиваться конденсатор.

12.84. Катушка с индуктивностью $L = 1$ Гн в момент времени $t = 0$ замыкается на источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $R = 1$ Ом. Определить максимальное

значение полного потока вектора Пойнтинга, втекающего в катушку, а также момент времени τ , когда достигается это максимальное значение. Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

12.85. В схеме, изображенной на рис. 360, ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В, сопротивление резистора $R = 3 \cdot 10^3$ Ом, емкость конденсатора $C = 10$ мкФ. В момент времени $t = 0$ ключ K замыкается. Определить

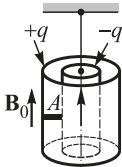


Рис. 358

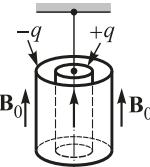


Рис. 359

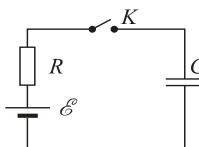


Рис. 360

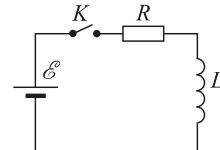


Рис. 361

максимальное значение полного потока вектора Пойнтинга, втекающего в конденсатор, а также момент времени τ , когда достигается это максимальное значение.

12.86. Пренебрегая краевыми эффектами, найти плотность потока электромагнитной энергии \mathbf{S} внутри длинной катушки в любой момент времени после замыкания ключа K (рис. 361). Указать направление потока. Найти полный поток \dot{W} электромагнитной энергии через боковые стенки катушки за все время после замыкания ключа K . Радиус катушки r_0 , ее длина l , плотность намотки витков n .

12.87. Пренебрегая краевыми эффектами, найти плотность потока электромагнитной энергии \mathbf{S} внутри длинной катушки в любой момент времени после размыкания ключа K (рис. 362). Указать направление потока. Найти полный поток \dot{W} электромагнитной энергии через боковые стенки катушки за все время после размыкания ключа K . Радиус катушки r_0 , ее длина l , плотность намотки витков n .

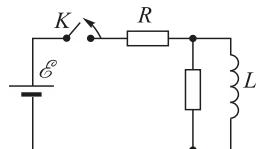


Рис. 362

12.88. Генератором с частотой $f = 10$ ГГц возбуждают стационарные колебания в прямоугольном резонаторе с размерами $a \times b \times l$, где $a = 23$ мм, $b = 10$ мм. Медленное увеличение мощности генератора до значения $N = 28$ кВт приводит к пробою воздуха в двух точках, расположенных на одинаковых расстояниях от торцов. Определить добротность резонатора, считая, что пробой воздуха наступает при напряженности $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см.

12.89. С помощью СВЧ-генератора во входном прямоугольном (2×3 см 2) сечении (x, y) волновода (рис. 363) с проводящими стенками возбуждаются колебания. Найти расстояние Δz между сечениями волновода, в которых входное распределение $E(x, y)$ воспроизводится (т. е. амплитуда колебания поля в каждой точке (x, y) этих

сечений повторяет распределение амплитуды поля во входном сечении $z = 0$). Частота колебаний в 3 раза превышает критическую частоту для волны E_y , а распределение поля $E_x(y)$ и $E_y(x)$ во входном сечении соответствует основным наименшим модам колебаний. Волны $E_x(y, z, t)$ и $E_y(x, z, t)$ считать независимыми.

12.90. С помощью СВЧ-генератора во входном квадратном сечении волновода ($2 \times 2 \text{ см}^2$) с проводящими стенками возбуждаются колебания электрического поля $E_y(x, t)$, соответствующие двум низшим типам колебаний ($n=1$ и $n=2$): $E_y(x, t) = E_{y1}(x, t) + E_{y2}(x, t)$ (рис. 364). Частота генератора в пять раз превышает критическую частоту для волновода. Найти расстояние Δz между сечениями волновода, в которых воспроизводится распределение амплитуды колебаний (т. е. амплитуда колебаний в каждой точке (x, y) сечений $z = \text{const}$ повторяет распределение амплитуды во входному сечению $z = 0$).

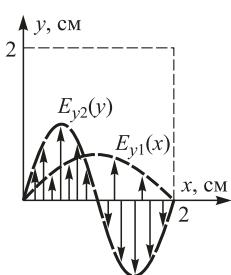


Рис. 363

12.91. Пустой конденсатор сложной формы подсоединен к идеальной катушке. Резонансная частота колебательного контура оказалась равной $f_0 = 3,6 \text{ МГц}$. Конденсатор заполнены однородной слабопроводящей средой с удельной проводимостью $\lambda = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ ед. СГСЭ}$ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$. Принимая во внимание только потери энергии в диэлектрике, определить добротность Q колебательного контура.

12.92. По длинному коаксиальному кабелю длиной $l = 100 \text{ м}$ высокочастотная электромагнитная энергия передается от передатчика к антенне (рис. 365), согласованной с кабелем (т. е. нет отраженной волны). Кабель заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$. Проводимость диэлектрика $\lambda = 10^{-6} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} = 9 \cdot 10^3 \text{ ед. СГСЭ}$, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Принимая во

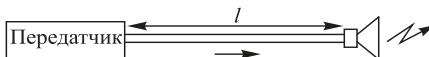


Рис. 364

Рис. 365

внимание только потери в диэлектрике, оценить долю мощности $\Delta N/N$, теряемой в кабеле.

12.93. Определить дебаевский радиус экранирования в идеальной ($e^2 n_a^{1/3} \ll kT_a$, $a = e, i$) неизотермической плазме. $T_e \gg T_i$ плазме. $T_e = 11600 \text{ К}$, $T_i = 500 \text{ К}$, $n = 10^{16} \text{ м}^{-3}$.

12.94. Оценить число частиц, экранирующих заряд в идеальной ($e^2 n_a^{1/3} \ll kT_a$, $a = e, i$) неизотермической плазме. $T_e \ll T_i$ плазме. $T_e = 11600 \text{ К}$, $T_i = 116000 \text{ К}$, $n = 10^{16} \text{ м}^{-3}$.

12.95. Предельный угол полного отражения электромагнитной волны частотой ω от поверхности плазмы $\alpha = 30^\circ$. При увеличении частоты на $\Delta\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$ этот угол возрастает на $\Delta\alpha = 3^\circ$. Определить концентрацию электронов в плазме, полагая $\Delta\omega \ll \omega$.

12.96. Плоская электромагнитная волна с частотой $\omega = 10^{11} \text{ с}^{-1}$ падает нормально на поверхность плазмы. Уменьшение частоты на $\Delta\omega = 10^{10} \text{ с}^{-1}$ приводит к росту амплитудного коэффициента отражения на 0,01. Определить концентрацию электронов плазмы, полагая $\omega_p \ll \omega$.

12.97. В плоском конденсаторе с расстоянием между пластинами d расположен параллельно пластинам плоский слой плазмы толщиной h (рис. 366). К конденсатору приложено переменное напряжение $V = V_0 \cos \omega t$. Найти резонансную частоту такого контура. Концентрация электронов плазмы N_e считается известной.

12.98. В плоском конденсаторе с расстоянием между пластинами d расположено облако однородной плазмы с концентрацией электронов N_e , имеющее форму шара радиусом b (рис. 367). К конденсатору приложено переменное напряжение $V = V_0 \cos \omega t$. Найти резонансную частоту такого контура, считая, что радиус шара много меньше расстояния до ближайшей пластины.

12.99. В прямоугольном резонаторе со сторонами $a \times b \times L = 6,2 \times 6,4 \times 10,4 \text{ см}^3$ возбуждена резонансная мода $H_{101}(TE_{101})$. Связь генератора с резонатором позволяет возбуждать моды с разной поляризацией (ориентацией вектора \mathbf{E}). Вследствие ионизации воздуха в резонаторе образовалась плазма. Оценить, при какой концентрации N плазмы резонатор перестроится на резонансную моду $H_{011}(TE_{011})$ при неизменной частоте СВЧ-генератора.

П р и м е ч а н и е . На рис. 368 представлены распределения электрического поля в плоскости xy для мод $H_{101}(TE_{101})$ и $H_{011}(TE_{011})$.

12.100. Генератор микроволнового диапазона связан с антенной через волновод прямоугольного сечения $a \times b = 5,1 \times 3,2 \text{ см}^2$. Антenna излучает электромагнитную волну с длиной $\lambda = 10,1 \text{ см}$. Вследствие ионизации воздуха в волноводе образовалась плазма. Оценить, при какой минимальной концентрации N плазмы связь между генератором и антенной нарушится.

12.101. Электрическое поле у поверхности Земли $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_r$, а магнитное поле является полем магнитного диполя $\mathfrak{M} = M_1 \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_r ,

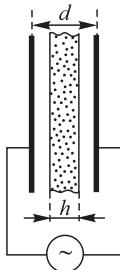


Рис. 366

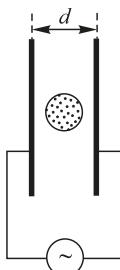


Рис. 367

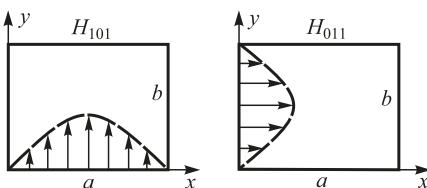


Рис. 368

\mathbf{e}_z — орты сферической (r, θ, φ) и цилиндрической (ρ, φ, z) систем координат с началом отсчета в центре Земли и осью z , направленной на север, $E_0 = -130$ В/м, $\mu_1 = 8 \cdot 10^{25}$ эрг/Гс. Найти вектор \mathbf{S} плотности потока энергии электромагнитного поля в Москве, географическая широта которой ($\varphi_m = \pi/2 - \theta_m = 56^\circ$ с. ш.). Оценить момент импульса приповерхностного слоя высотой $h = 0,5$ км, считая, что среднее значение электрического поля в нем $E_{cp} = -90$ В/м, а магнитное поле с высотой не меняется. Средний радиус Земли $R = 6400$ км.

12.102* В 1963 г. академик П. Л. Капица осуществил измерение амплитуды электромагнитного поля в объемном резонаторе при помощи полого металлического шарика радиусом $a = 10$ мм, массой

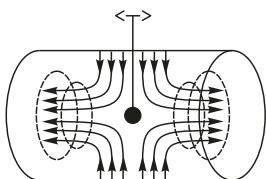


Рис. 369

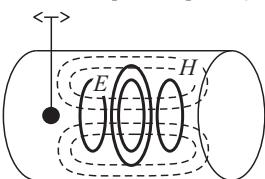


Рис. 370

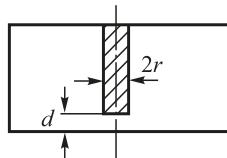


Рис. 371

$m = 1$ г, подвешенного на нити длиной $h = 125$ мм. Подвес вместе с шариком можно перемещать вдоль оси резонатора длиной $2l = 20$ см (рис. 369). Возбуждено колебание E -типа, при котором амплитуда аксиального поля на оси резонатора изменяется по закону $E_z(z, t) = E_0 \cos(\pi z / 2l) \cos \omega t$, $E_0 = 3000$ В/см. Найти максимальное отклонение шарика по горизонтали.

12.103. В 1963 г. академик П. Л. Капица осуществил измерение амплитуды электромагнитного поля в объемном резонаторе при помощи полого металлического шарика радиусом $a = 10$ мм и (рис. 370) массой $m = 1$ г, подвешенного на нити длиной $h = 125$ мм. Шарик можно перемещать вдоль оси резонатора длиной $2l = 20$ см. В резонаторе возбуждено колебание H -типа, при котором амплитуда аксиального поля на оси резонатора изменяется по закону $H_z(z, t) = H_0 \sin(\pi z / 2l) \cos \omega t$, а $E = 0$. Найти H_0 , если максимальное отклонение шарика по горизонтали $\Delta = 0,5$ мм. Считать, что толщина скин-слоя много меньше толщины стенки шарика.

12.104. В качестве дилатометра — прибора для измерения смещений — В. М. Пудалов и М. С. Хайкин в 1968 г. использовали коаксиальный резонатор ($\lambda = 3$ см), являвшийся частью автогенератора (рис. 371). Нижняя стенка резонатора может легко перемещаться. Оценить, какое минимальное смещение может быть зарегистрировано, если величина зазора между подвижной стенкой резонатора и центральным стержнем $d = 2$ мкм, а нестабильность частоты автогенератора $\Delta f = 500$ Гц. Радиус внутреннего стержня $r \gg d$.

ОПТИКА

§ 1. Геометрическая оптика и элементы фотометрии

1.1. Сосуд с ртутью равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$. Поверхность ртути принимает вогнутую форму и используется как зеркало. Определить фокусное расстояние этого зеркала.

1.2.* Доказать геометрически, что если луч света, исходящий из точки A , попадает в точку B после отражения от плоского зеркала, то длина пути этого луча меньше, чем длина любого другого пути, проходящего от A к зеркалу, а затем к B .

1.3.* Показать, что если луч света, исходящий из точки A , попадает в точку B после преломления на плоской границе раздела двух сред, то оптическая длина этого луча меньше оптической длины любого пути, соединяющего A и B (принцип Ферма).

1.4. Найти фокусное расстояние f двояковыпуклой тонкой линзы, ограниченной сферическими поверхностями с радиусами $R_1 = 25 \text{ мм}$ и $R_2 = 40 \text{ мм}$; показатель преломления стекла линзы $n = 1,5$.

1.5. С помощью тонкой собирающей стеклянной линзы с показателем преломления $n = 3/2$ получено действительное изображение предмета на расстоянии 10 см от линзы. После того как предмет и линзу погрузили в воду, не изменяя расстояния между ними, изображение получилось на расстоянии 60 см от линзы. Найти фокусное расстояние f линзы, если показатель преломления воды $n' = 4/3$.

1.6.* Вывести формулу сферического зеркала и формулу тонкой линзы из принципа таутохронизма.*)

1.7. Плоская стеклянная пластинка толщиной 3 мм рассматривается в микроскоп. Сначала микроскоп устанавливают для наблюдения верхней поверхности пластиинки, а затем смещают тубус микроскопа вниз до тех пор, пока не будет отчетливо видна нижняя поверхность пластиинки (для удобства наблюдения на поверхностях пластиинки сделаны метки). Смещение тубуса оказалось равным 2 мм. Найти показатель преломления пластиинки n .

*) Для определенности примем следующее правило знаков. Все расстояния, отсываемые от зеркала или линзы (или других точек, принимаемых за начала отсчета) в направлении распространения света, считаются положительными, а против направления распространения света — отрицательными. Если падающий свет распространяется слева направо, то это правило знаков совпадает с правилом знаков, принятым в аналитической геометрии. Радиусы кривизны сферических поверхностей отсчитываются в направлении от сферической поверхности к центру кривизны. Фокусные расстояния, напротив, отсчитываются в направлении от фокусов к линзе или зеркалу, а в случае толстых линз или системы линз — в направлении от фокусов к соответствующим главным плоскостям.

1.8. Предмет помещен на расстоянии $l_1 = 15$ см от плоскопараллельной стеклянной пластинки. Наблюдатель рассматривает его через пластинку, причем луч зрения нормален к ней. Толщина пластиинки $d = 4,5$ см. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Найти расстояние до изображения предмета l_2 от ближайшей к наблюдателю поверхности пластиинки.

1.9. Показать, что наименьшее отклонение δ параллельного пучка в призме происходит при симметричном ходе лучей в призме. Связать угол наименьшего отклонения δ с показателем преломления n вещества призмы и с преломляющим углом A призмы (рис. 372).

1.10. Вычислить угол наименьшего отклонения δ для призмы с очень малым преломляющим углом A с учетом членов второго порядка малости (относительно A).

1.11. Чему равен угол наименьшего отклонения δ для линии D настрия в призме с преломляющим углом 60° ? Для линии D показатель преломления стекла призмы $n = 1,62$.

1.12. На плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом φ падает узкий пучок света шириной a (рис. 373), содержащий две спектральные компоненты. Показатели преломления стекла для этих

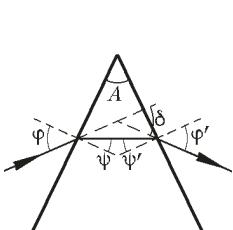


Рис. 372

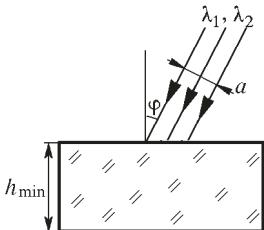


Рис. 373

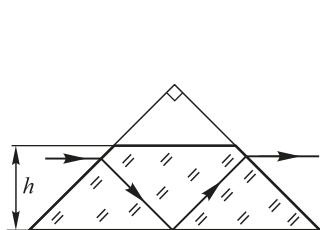


Рис. 374

длин волн различны: n_1 и n_2 . Определить минимальную толщину h_{\min} пластиинки, при которой свет, пройдя через пластиинку, будет распространяться в виде двух отдельных пучков, каждый из которых содержит только одну спектральную компоненту.

1.13. Для обращения изображения часто используют так называемую призму Дове (рис. 374), представляющую собой усеченную прямоугольную равнобедренную призму. Определить длину l основания призмы, если ее высота $h = 2,11$ см, а показатель преломления стекла $n = 1,41$. Призма должна обращать пучок света максимального сечения.

1.14. На стеклянный клин перпендикулярно его грани падает тонкий луч света (рис. 375). Показатель преломления стекла $n = 1,41$, угол $\alpha = 10^\circ$. Сколько светлых пятен будет видно на экране, поставленном за клином?

1.15. Перед торцом стеклянного цилиндрического световода, показатель преломления которого равен n , на его оси расположен то-

чечный источник света. Найти угловую апертуру α пучка света, проходящего через световод.

1.16. Цилиндрический стакан с жидкостью поставлен на монету, рассматриваемую сквозь боковую стенку стакана. Указать наименьшую возможную величину n показателя преломления жидкости, при котором монета не видна.

1.17. С каким углом α нужно взять трапециoidalный сосуд с водой $ABCD$ (рис. 376), чтобы сквозь его боковую стенку не было видно предмета, положенного под сосуд? Показатель преломления воды $n = 1,33$. Дно сосуда имеет форму прямоугольника.

1.18. Человек, стоящий на берегу пруда, смотрит на камень, находящийся на дне. Глубина пруда $h = 1$ м. На каком расстоянии h' от поверхности воды получится изображение камня, если луч зрения составляет с нормалью к поверхности воды угол $\varphi = 60^\circ$? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

1.19. В оптической системе, предназначеннной для задержки во времени короткого светового импульса, используется многократное отражение света от двух вогнутых сферических зеркал Z_1 (радиус кривизны $r_1 = 10$ м) и Z_2 (радиус кривизны $r_2 = 1$ м), расположенных на расстоянии $L = 5,5$ м друг от друга (рис. 377). В центре зеркала Z_1 имеется отверстие диаметром $d = 2$ мм. На это зеркало на высоте $h = 15$ см от оси системы падает короткий световой импульс в виде тонкого луча, параллельного оси. Оценить, через какой промежуток времени Δt этот луч выйдет через отверстие.

1.20. Экспериментатор хочет получить фотографию Луны размером 6×6 см, используя вместо объектива систему плоских зеркал и вращающееся ведро с ртутью. Ведро приводится во вращение двигателем со скоростью вращения вала $n = 600$ об/мин. Каково должно быть отношение диаметров шкивов вала на оси двигателя и на оси ведра? Диаметр Луны — 3476 км, расстояние от Луны до Земли — 384 000 км.

1.21. Предмет помещен на оси вогнутого зеркала дальше его фокуса. Между фокусом и зеркалом помещена плоскопараллельная стеклянная пластинка толщиной d с показателем преломления n так, что ось зеркала перпендикулярна к пластинке. Показать, что введение пластинки смешает изображение так же, как перемещение зеркала на расстояние $d(n - 1)/n$ по направлению к предмету.

1.22. Матовое стекло фотографического аппарата установлено так, что резким выходит изображение предмета, находящегося на расстоянии 5 м. До какого диаметра D нужно заиафрагмировать

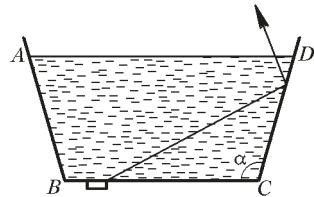


Рис. 376

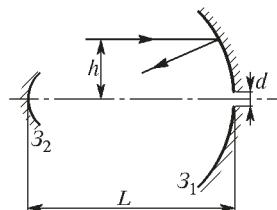


Рис. 377

объектив с фокусным расстоянием 20 см, чтобы не было заметной нерезкости в изображении предметов, находящихся на 0,5 м ближе снимаемого? (Нерезкость считать незаметной, если размытость деталей не превышает 0,1 мм.)

1.23. При фотографировании на пленке из-за конечной разрешающей способности получаются резко изображенными не только те предметы, на которые сфокусирован объектив фотоаппарата, но также и предметы, находящиеся несколько ближе и несколько дальше этого расстояния. Оказалось, что при наведении объектива фотоаппарата на предмет, находящийся на расстоянии $L_0 = 10$ м, ближняя граница глубины резкости расположена на расстоянии $L_1 = 7,8$ м. Определить дальнюю границу L_2 .

1.24. Как сместится фокус фотоаппарата, если внутрь аппарата на пути лучей (перпендикулярно к оптической оси) поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 6$ мм с показателем преломления $n = 1,5$? (Объектив сильно задиафрагмирован.)

1.25. Тонкая отрицательная линза собирает изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 0,2$. Если к ней вплотную приставить тонкую положительную линзу, то при том же расстоянии до предмета эта система создаст прямое изображение с увеличением $\Gamma_c = 1/3$. Определить, с каким увеличением Γ_2 будет изображаться предмет одной положительной линзой, если убрать отрицательную. Положение предмета остается прежним.

1.26. Показать, что наименьшее расстояние между двумя оптически сопряженными относительно собирающей линзы точками равно $4f$, где f — фокусное расстояние линзы.

1.27. Собирающая линза дает изображение некоторого объекта на экране. Высота изображения равна h_1 . Оставляя неподвижным экран и объект, начинают двигать линзу к экрану и находят, что при втором четком изображении объекта высота изображения равна h_2 . Найти действительную высоту предмета h .

1.28. Расстояние от лампочки до экрана $L = 50$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение лампы на экране при двух положениях, расстояние между которыми $l = 10$ см. Найти фокусное расстояние f линзы.

1.29. У двояковыпуклой тонкой линзы серебрится одна из поверхностей. Найти фокусное расстояние f полученного таким образом зеркала. Радиус кривизны чистой поверхности равен R_1 , радиус кривизны посеребрённой поверхности — R_2 , показатель преломления материала линзы равен n .

1.30. Две одинаковые плосковыпуклые тонкие линзы с показателем преломления n посеребрены: одна с плоской стороны, другая с выпуклой. Найти отношение фокусных расстояний f_1 и f_2 полученных сложных зеркал, если свет в обоих случаях падает с непосеребрённой стороны.

1.31. Фотографическим аппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние, меняющееся от 12 см до 20 см, требуется сфото-

графировать предмет, находящийся на расстоянии 15 см от объектива. Какую линзу нужно добавить к объективу, чтобы изображение вышло резким при максимальном фокусном расстоянии?

1.32. Две тонкие линзы с фокусными расстояниями f_1 и f_2 находятся на расстоянии l друг от друга, образуя центрированную систему. Найти фокусное расстояние f этой системы, а также положения ее главных плоскостей.

1.33. Систему двух тонких линз, описанную в предыдущей задаче, требуется заменить одной «эквивалентной» тонкой линзой, которая при любом положении объекта давала бы такое же по величине его изображение, как и описанная система двух линз. Найти фокусное расстояние и положение «эквивалентной» линзы.

1.34. С одной стороны двояковыпуклой тонкой линзы, сделанной из стекла ($n = 1,52$), находится вода ($n' = 1,33$), с другой — воздух. Найти положения главных и фокальных плоскостей и узловых точек системы.

1.35. Фокусное расстояние объектива зрительной трубы равно $f_1 = 60$ см, а окуляра — $f_2 = 4$ см. Показатель преломления стекла объектива и окуляра $n = 3/2$. Труба погружается в воду, заполняющую ее внутреннюю часть. Каким объективом из стекла того же сорта следует заменить объектив трубы, чтобы в нее можно было рассматривать удаленные предметы в воде? Чему будет при этом равно увеличение трубы, если показатель преломления воды $n' = 4/3$?

1.36. Человек с нормальным зрением рассматривает удаленный предмет с помощью зрительной трубы Галилея. В качестве объектива и окуляра используются линзы с фокусными расстояниями $f_1 = -40$ см и $f_2 = -2$ см. При каких расстояниях L между объективом и окуляром наблюдатель увидит четкое изображение предмета, если глаз может аккомодироваться от 10 см до бесконечности?

1.37. Галилеева труба 9-кратного увеличения имеет длину 40 см. После того как объектив и окуляр трубы заменили собирающими линзами, труба стала давать то же увеличение. Определить фокусные расстояния f'_1 и f'_2 этих линз, а также фокусные расстояния f_1 и f_2 объектива и окуляра галилеевой трубы.

1.38. Зрительная труба с фокусным расстоянием объектива $f = 50$ см установлена на бесконечность. На какое расстояние Δl надо передвинуть окуляр трубы, чтобы ясно видеть предметы на расстоянии 50 м? При этом глаз остается аккомодированным на бесконечность.

1.39. На систему линз, изображенную на рис. 378, падает слева параллельный пучок света. Найти положение точки схождения этого пучка после прохождения системы.

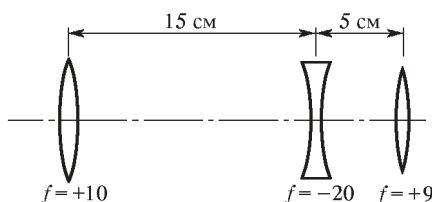


Рис. 378

1.40. Найти изображение точки, которая находится на расстоянии 10 см слева от крайней левой линзы системы, изображенной на рис. 379.

1.41. Микроскоп имеет объектив с фокусным расстоянием $f_1 = 1$ см и окуляр с фокусным расстоянием $f_2 = 3$ см, расстояние между ними $d = 20$ см. На каком расстоянии l_1 должен находиться объект, чтобы окончательное изображение получилось на расстоянии $l_2 = 25$ см от глаза (что является минимальным расстоянием ясного зрения)? Какое при этом получится линейное увеличение α ?*

1.42. Найти положения главных плоскостей толстой линзы, имеющей форму шара радиусом R . Определить фокусные расстояния f и f' и положения фокальных точек такой линзы, когда она сделана: 1) из воды ($n_w = 4/3$); 2) из стекла ($n_{ст} = 3/2$). При каком показателе преломления фокальные точки не выйдут наружу?

1.43. Радиус стеклянного ($n = 1,5$) шара $R = 4$ см. 1) Найти расстояние x' от центра шара до изображения предмета, который расположен в 6 см от поверхности шара. 2) Найти увеличение изображения.

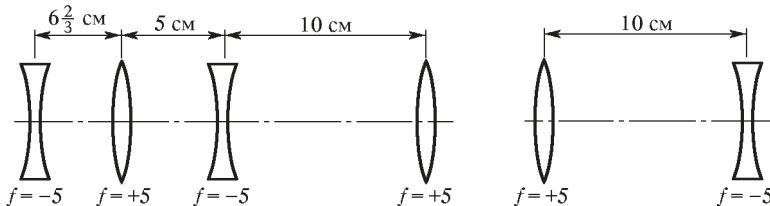


Рис. 379

Рис. 380

1.44. Радиус кривизны сферической поверхности стеклянной ($n = 1,52$) плосковыпуклой линзы $R = 26$ см; толщина линзы 3,04 см. Вычислить фокусное расстояние f линзы и найти положение изображения объекта, находящегося на расстоянии 75 см от ближайшей поверхности линзы и расположенного со стороны: 1) выпуклой поверхности; 2) плоской поверхности.

1.45. Найти фокусное расстояние f и положения главных плоскостей двояковыпуклой толстой линзы, для которой $n = 1,5$, $R_1 = 10$ см, $R_2 = 4$ см, $d = 2$ см.

1.46. Определить положения главных плоскостей, фокальных точек и фокусное расстояние системы двух тонких линз, изображенной на рис. 380.

1.47. Какова освещенность E площадки, если источником света служит бесконечная плоскость, параллельная этой площадке, причем поверхностная яркость источника B всюду одинакова и не зависит от направления?

*.) Если нужно 8 часов кряду смотреть в микроскоп, то настройка микроскопа телескопическая — т. е. на выходе окуляра параллельный пучок лучей.

1.48. Какова освещенность E на горизонтальной площадке, освещаемой небесной полусферой, если считать яркость неба повсюду равномерной и равной B ?

1.49. Какую освещенность E следует создать на белом листе бумаги с коэффициентом отражения $k = 0,85$, чтобы его яркость была $B = 3 \cdot 10^4 \text{ кд}/\text{м}^2$? Можно считать, что бумага рассеивает свет по закону Ламберта.

1.50. Освещенность, получаемая при нормальном падении солнечных лучей на поверхность Земли, составляет приблизительно $E_0 = 100000 \text{ лк}$. Какова освещенность E изображения Солнца, даваемого свободной от aberrаций линзой с диаметром $D = 5 \text{ см}$ и фокусным расстоянием $f = 10 \text{ см}$? Угловой диаметр Солнца $\alpha = 30^\circ$.

1.51. Освещенность, получаемая при нормальном падении солнечных лучей на поверхность Земли, около $E = 10^5 \text{ лк}$. Считая, что излучение Солнца подчиняется закону Ламберта и пренебрегая поглощением света в атмосфере, определить яркость Солнца, если известно, что радиус земной орбиты $R = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}$, а диаметр Солнца $D = 1,4 \cdot 10^6 \text{ км}$.

1.52. Найти освещенность светом, отраженным Луной в полночь в полнолуние, некоторой площадки на поверхности Земли, над которой Луна находится в зените. Считать, что Солнце является ламбертовым источником света, а Луна — ламбертовым отражателем. Яркость Солнца $B_C = 1,5 \cdot 10^9 \text{ кд}/\text{м}^2$, радиус Солнца $R_C = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$, расстояние от Солнца до Земли (и Луны) $R_0 = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$, расстояние от Луны до Земли $R_1 = 3,8 \cdot 10^8 \text{ м}$, видимый радиус Луны $R_L = 1,7 \cdot 10^6 \text{ м}$. Коэффициент отражения лунной поверхности $k = 7\%$.

1.53. Спектрограф имеет объектив коллиматора диаметром D с фокусным расстоянием f_1 и объектив камеры того же диаметра с фокусным расстоянием f_2 . Источник с яркостью B резко отображается на входную щель спектрографа при помощи конденсора один раз с увеличением (расстояние от конденсора до щели равно L), другой раз с уменьшением. Каков должен быть диаметр конденсора D_k , чтобы в обоих его положениях освещенность на фотопластинке была одинаковой? Чему равна освещенность E в этом случае, если пренебречь потерями на отражение и поглощение?

1.54. Тепловой фотоприемник (рис. 381) представляет собой полуую камеру с площадью внутренней поверхности $S = 2 \text{ см}^2$, имеющую небольшое отверстие площадью $S_1 = 1 \text{ мм}^2$. Внутренняя поверхность камеры незначительную часть света поглощает (коэффициент поглощения $k = 0,01$), а остальную часть рассеивает. В этих условиях внутри полости создается равномерно распределенное по всем направлениям излучение. Какая часть светового потока Φ/Φ_0 (где Φ_0 — световой поток, попадающий на входное отверстие камеры) выходит через отверстие обратно?

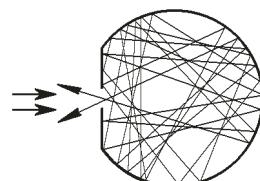


Рис. 381

1.55. Какую мощность должна иметь лампа в осветителе микроскопа для того, чтобы можно было производить киносъемку микроЭкспонатов в воздухе с частотой кадров $v = 10^4$ Гц? Объектив микроскопа имеет увеличение $k_1 = 20$ и апертуру $a = 0,4$, окуляр — увеличение $k_2 = 8$. Коэффициент преобразования энергии в активный для фотослоя свет в лампе накаливания $\eta = 2,5\%$. Тело свечения лампы имеет размеры $S = 2 \times 5$ мм. Чувствительность фотослоя $H = 20 \text{ см}^2/\text{эрз}$ (т. е. 1 эрг световой энергии на площади 20 см^2 дает нормальную плотность почернения). Пропускающая способность объекта $\chi = 40\%$. Потерями света в линзах пренебречь.

1.56. Действительное изображение, сформированное собирающей линзой, рассматривается сначала непосредственно, а затем на белом экране. Как зависит в обоих случаях яркость изображения от диаметра линзы?

1.57. Найти яркость изображения Луны, наблюдаемой в телескоп с объективом диаметром 75 мм, при увеличениях: 1) 20-кратном; 2) 25-кратном; 3) 50-кратном. Яркость Луны, видимой невооруженным глазом, принять за единицу. Диаметр зрачка глаза считать равным 3 мм.

1.58* Как известно, яркость изображения в оптической системе не зависит от его увеличения. Почему же при наблюдении в микроскоп изображение кажется менее ярким, если применить большее увеличение? Найти: 1) освещенность изображения в микроскопе с числовой апертурой 1 (сухая система) и увеличением 625; 2) освещенность изображения в микроскопе с числовой апертурой 1,5 (иммерсия с $n = 1,5$) и увеличением 1500. Освещенность объекта принять за единицу. Расстояние ясного зрения равно 25 см, диаметр зрачка глаза считать равным 2 мм. Потерями света в микроскопе пренебречь.



Рис. 382

звезды шестой величины, найти: 1) величину наиболее слабых звезд, которые могут быть видимы с помощью этого телескопа; 2) наивыгоднейшее увеличение для наблюдения звезд; 3) величину звезд, которые будут видимы при увеличении в 10 раз. Диаметр зрачка глаза равен 3 мм.

При мечани. Возрастанию звездной величины на единицу соответствует уменьшение ее видимой яркости в $\sqrt[5]{100} \approx 2,5$ раза.

1.60* Фотографирование пейзажа во время снегопада производилось с фотоспышкой. На фотографии оказались видны многочислен-

ные резко очерченные круги различного диаметра (см. рис. 382). На каком расстоянии a от объектива с фокусным расстоянием $f = 38$ мм находилась снежинка, которая на фотографии 10×15 см выглядит в виде круга диаметром $D = 5$ мм? Фотоаппарат считать однолинзовым, диаметр зрачка фотоаппарата $d = 5$ мм, размер фотокадра 24×36 мм.

§ 2. Формулы Френеля. Световое давление

2.1. Проверить с помощью формул Френеля, что поток энергии падающей волны через границу раздела сред равен сумме потоков энергии преломленной и отраженной волн через ту же границу.

2.2. Исходя непосредственно из граничных условий для электрического и магнитного полей на границе вакуума и диэлектрика, найти коэффициент отражения ρ света при нормальном падении на границу раздела. Выразить коэффициент отражения через показатель преломления диэлектрика n . Найти значения ρ для отражения света от поверхности воды ($n = 1,33$) и стекла ($n = 1,5$).

2.3. Найти коэффициент пропускания τ при нормальном падении света из воздуха на стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 1,5$.

2.4. Сколько процентов светового потока теряется на отражение в призматическом бинокле? Показатель преломления стекла призм и линз равен 1,5. Схема бинокля дана на рис. 383.

2.5. При выводе формул Френеля предполагается, что магнитная проницаемость среды $\mu = 1$. Как изменятся формулы Френеля, если не вводить этого предположения?

2.6.* Пользуясь формулами Френеля, показать, что линейно поляризованный свет остается линейно поляризованным после отражения на границе раздела двух прозрачных изотропных сред во всех случаях, за исключением случаев полного внутреннего отражения.

2.7. Угол между плоскостью колебаний поляризованного света и плоскостью падения называется азимутом колебания. Найти азимут преломлённой волны δ и азимут отраженной волны ρ , если азимут падающей волны α , а угол падения φ .

2.8. 1) Найти угол полной поляризации для света, отраженного от стекла с показателем преломления $n = 1,5$. 2) Найти степень поляризации преломлённого света $\Delta = \frac{\mathcal{I}_{\perp} - \mathcal{I}_{\parallel}}{\mathcal{I}_{\perp} + \mathcal{I}_{\parallel}}$ при падении света под

тем же углом. (\mathcal{I}_{\perp} — интенсивность света, поляризованного в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, \mathcal{I}_{\parallel} — поляризованного в плоскости падения.) Падающий свет естественный.

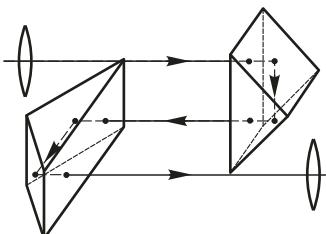


Рис. 383

2.9. Под каким углом нужно отразить луч от кристалла каменной соли ($n = 1,544$), чтобы получить максимальную поляризацию отраженного луча? Падающий свет — естественный.

2.10. Найти степень поляризации света, отраженного от поверхности стекла под углами 0° , 45° , $56^\circ 5'$ и 90° (показатель преломления стекла $n = 1,53$). Падающий свет естественный.

2.11. Естественный свет падает под углом Брюстера из воздуха на поверхность стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Найти интенсивность \mathcal{I}_r отраженного света, приняв за единицу интенсивность падающего света \mathcal{I}_e .

2.12. При каких условиях луч света, падающий на боковую грань прозрачной изотропной призмы (рис. 384) с преломляющим углом $\alpha = 60^\circ$, проходит через нее без потерь, т. е. не претерпевает отражений на поверхностях призмы?

2.13. На боковую грань призмы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1,5$, падает под углом Брюстера φ_B световой пучок, электрический вектор которого лежит в плоскости падения. Каким должен быть преломляющий угол A призмы, чтобы свет прошел через нее без потерь на отражение?

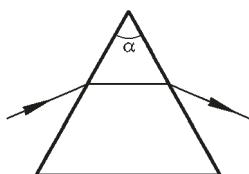


Рис. 384

ющая волна поляризована либо в плоскости падения, либо перпендикулярно к ней. Найти связь между комплексными амплитудами E и R падающей и отраженной волн, если коэффициенты Френеля на верхней и нижней границах слоя (для прямого прохождения света) равны соответственно r_1 и r_2 .

2.16. Пользуясь формулами Френеля, показать, что при отражении плоской электромагнитной волны от идеального зеркала, покрытого сверху слоем прозрачного диэлектрика, амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей. Изменяется лишь фаза волны, как это и должно быть согласно закону сохранения энергии.

2.17. Имеются две параллельные полупрозрачные плоскости. Коэффициенты отражения и пропускания первой из них равны ρ_1 и τ_1 , а второй — ρ_2 и τ_2 соответственно. Степень монохроматичности падающего света невелика, так что интерференции не происходит, а имеет место сложение интенсивностей света. Найти коэффициенты отражения ρ и пропускания τ для совокупности обеих плоскостей.

2.18.* Имеется m параллельных полупрозрачных плоскостей. Коэффициенты отражения и пропускания каждой из них равны ρ и τ . Найти коэффициент отражения ρ_m и коэффициент пропускания τ_m всей системы m плоскостей. Степень монохроматичности падающего

света невелика, так что интерференции не происходит, а имеет место сложение интенсивностей света.

2.19. Стопа Столетова состоит из плоскопараллельных стеклянных пластинок с показателем преломления $n = 1,5$. На нее под углом Брюстера падает свет, поляризованный в плоскости падения. Начертить график для коэффициентов отражения и пропускания стопы в зависимости от числа N пластинок.

2.20. Найти степень поляризации преломлённого луча при выходе его из стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1,5$ при углах падения $20^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ и 80° . Падающий свет естественный.

2.21*: На опыте наблюдаются отступления от формул Френеля для отражения света от прозрачных изотропных сред, которые в основном сводятся к двум: 1) не существует угла полной поляризации, при котором свет с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения, не отражается совсем; 2) при отражении линейно поляризованного света, плоскость колебаний которого не совпадает с плоскостью падения и не перпендикулярна к ней, получается эллиптическая поляризация, особенно отчетливо заметная в окрестности угла Брюстера (т. е. угла падения $\varphi = \arctg n$). Показать, что каждое из этих отступлений является следствием другого.

2.22*: Будет ли существовать угол полной поляризации, если магнитные проницаемости μ_1 и μ_2 граничащих сред отличны от единицы?

2.23. Показать, что отражательная способность среды, для которой $\varepsilon = \mu$ (ε — диэлектрическая, μ — магнитная проницаемости), равна нулю.

2.24. Рассчитать преломляющий угол параллелепипеда Френеля, сделанного из стекла с показателем преломления $n = 1,7$.

2.25. Азимут колебаний падающей линейно поляризованной волны равен $+45^\circ$. Какая получится эллиптическая поляризация отраженного света на границе стекло–воздух, правая или левая?*)

2.26. При каком угле падения φ разность фаз δ между компонентой отраженной волны, поляризованной в плоскости падения, и компонентой, поляризованной перпендикулярно к ней, достигает максимума при полном внутреннем отражении, если падающая волна линейно поляризована? Чему равен этот максимум?

2.27. Каким показателем преломления n должно обладать вещество, чтобы при помощи однократного полного внутреннего отражения на границе его с воздухом можно было превращать линейно поляризованный свет в поляризованный по кругу? Азимут колебаний падающего света равен 45° .

2.28. Падающий свет поляризован линейно с азимутом колебаний, равным $+45^\circ$. Можно ли путем однократного отражения превратить его в свет, поляризованный по правому кругу?

*) Азимут колебаний падающей волны может изменяться от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Он считается положительным, если $E_{||}/E_{\perp} > 0$, и отрицательным, если $E_{||}/E_{\perp} < 0$.

2.29. Каким должен быть минимальный показатель преломления параллелепипеда Френеля, чтобы при азимуте колебаний падающего света в $+45^\circ$ выходящий свет был поляризован по правому кругу?

2.30. Каким должен быть показатель преломления среды, чтобы коэффициент отражения естественного света имел минимум при угле падения между 0 и 90° ?

2.31* Исходя из представления, что свет состоит из фотонов, каждый из которых обладает импульсом $h\nu/c$, определить давление P световой волны на плоское зеркало, предполагая, что коэффициент отражения зеркала равен r , а угол падения равен φ . Определить также тангенциальную силу T , действующую на единицу поверхности зеркала со стороны падающего излучения.

2.32* Решить предыдущую задачу в предположении, что поверхность, на которую падает световая волна, идеально матовая (удовлетворяет закону Ламберта).

2.33. На плоскую поверхность раздела вакуум–стекло (показатель преломления $n = 1,5$) из вакуума падает перпендикулярно к поверхности световой пучок интенсивностью $\mathcal{I} = 10 \text{ Вт}/\text{см}^2$. Найти величину и направление силы F , действующей на единицу площади поверхности раздела сред.

2.34. Линейно поляризованная световая волна с направлением электрического вектора в плоскости падения и с интенсивностью $\mathcal{I} = 1 \text{ Вт}/\text{см}^2$ падает из вакуума под углом Брюстера на круглую плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 3 \text{ мм}$ и диаметром $D = 10 \text{ см}$. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Найти момент сил M , действующий на пластинку. В какую сторону будет разворачиваться пластинка?

2.35. Показать, что давление излучения при нормальном падении света на идеальное зеркало равно $2u$, а на полностью поглощающую поверхность — u , где u — плотность энергии падающего излучения.

2.36. Каково давление света на идеальное зеркало, если излучение изотропно?

2.37. Найти световое давление солнечного излучения на единицу площади земной поверхности, перпендикулярной к направлению излучения. Солнечная постоянная равна $1,35 \cdot 10^6 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2)$. Абсорбцией в земной атмосфере пренебречь. Рассмотреть три случая: 1) земная поверхность — абсолютно черная; 2) земная поверхность — абсолютно зеркальная; 3) земная поверхность — абсолютно отражающая, но матовая (удовлетворяет закону Ламберта).

2.38* Плоская световая волна падает на поверхность шара, размеры которого велики по сравнению с длиной световой волны. Предполагая, что поверхность шара: 1) абсолютно черная; 2) абсолютно зеркальная; 3) абсолютно матовая (удовлетворяет закону Ламберта); выразить силу светового давления на шар через плотность падающего излучения.

2.39* В каком случае световое давление плоской неполяризованной волны на шар будет больше: когда поверхность шара идеально отражающая или когда она отражает свет частично, а остальной свет поглощается внутри шара? Размеры шара велики по сравнению с длиной световой волны.

2.40. Определить силу светового давления F_1 солнечного излучения на поверхность земного шара, считая ее абсолютно черной. Найти отношение этой силы к силе гравитационного притяжения Солнца F_2 . Средняя плотность Земли $\rho = 5,5 \text{ г}/\text{см}^3$.

2.41* Принимая во внимание, что давление света на идеально отражающее зеркало при нормальном падении равно удвоенной плотности энергии падающей волны, найти закон изменения плотности световой энергии при отражении от медленно движущегося идеального зеркала.

2.42* Существуют лазеры, мощность излучения которых в импульсе составляет сотни мегаватт. Допустим, что мощность лазера равна $W = 500 \text{ МВт}$, а площадь поперечного сечения светового пучка $S = 1 \text{ см}^2$. Пусть луч сфокусирован идеальной линзой с фокусным расстоянием $f = 5 \text{ см}$. Оценить напряженность электрического поля E и давление света P вблизи фокуса такой линзы. Длина волны $\lambda = 6943 \text{ \AA}$.

2.43. Лазер на рубине излучает в импульсе длительностью $\tau = 0,5 \text{ мс}$ энергию $E = 1 \text{ Дж}$ в виде почти параллельного пучка с сечением $S = 1 \text{ см}^2$. Рабочая длина волны лазера $\lambda = 6943 \text{ \AA}$. Определить: 1) давление несфокусированного пучка света на площадку, перпендикулярную к пучку; 2) давление света на площадку, перпендикулярную к пучку, при максимальной возможной концентрации светового пучка (при фокусировке в область с площадью поперечного сечения порядка λ^2); 3) напряженность электрического поля E в области максимально возможной концентрации светового пучка.

П р и м е ч а н и е. Считать излучение лазера во время импульса равномерным.

2.44. Солнечное излучение фокусируется линзой диаметром $D = 5 \text{ см}$ и фокусным расстоянием $F = 10 \text{ см}$. Оценить напряженность электрического поля в фокусе (в $\text{В}/\text{см}$). Солнечная постоянная $J_C = 1,35 \text{ кВт}/\text{м}^2$, угловой диаметр Солнца $\alpha_C = 10^{-2} \text{ рад}$.

2.45. На тонкую плосковыпуклую линзу с фокусным расстоянием $F = 10 \text{ см}$ со стороны плоской части с радиусом $R = 2 \text{ см}$ падает параллельный поток монохроматического излучения с интенсивностью $\mathcal{J} = 10 \text{ кВт}/\text{см}^2$. На линзу нанесено просветляющее покрытие. Найти силу, действующую на линзу в параксиальном приближении. Стекло считать идеальным (без потерь).

§ 3. Интерференция монохроматического света

3.1* Направления распространения двух плоских волн одной и той же длины λ составляют угол $\varphi/2$ с нормалью к плоскости экрана.

на, на котором наблюдаются интерференционные полосы (рис. 385). Показать, что при малых φ расстояние Δx между соседними интерференционными полосами $\Delta x \approx \lambda/\varphi$.

3.2. Как изменится выражение для Δx в предыдущей задаче, если интерферирующие лучи падают на экран не симметрично относительно нормали?

3.3. Найти длину волны λ монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние от центральной полосы до первого интерференционного максимума $x = 0,05$ см. Данные установки (рис. 386): $a = 5$ м, $d = 0,5$ см.

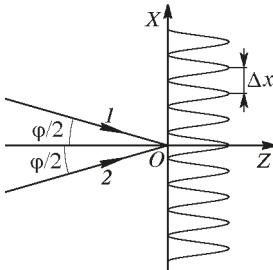


Рис. 385

ни D натрия ($\lambda = 5890$ Å). Принимая показатель преломления воздуха $n = 1,000276$, вычислить показатель преломления хлора. В какую сторону смещаются полосы интерференции при наполнении сосуда хлором?

3.5. Выразить расстояние x от центра интерференционной картины до m -й светлой полосы в опыте с бипризмой (рис. 387). Показатель преломления призмы n , длина волны λ , преломляющий угол α . Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно. Расстояние от источника света до бипризмы равно a , а расстояние от бипризмы до экрана равно b .

3.6. Преломляющий угол бипризмы $\alpha = 3'26''$. Между точечным источником монохроматического света ($\lambda = 5000$ Å) и бипризмой помещена линза таким образом, что ширина интерференционных полос оказалась не зависящей от расстояния от экрана до бипризмы.

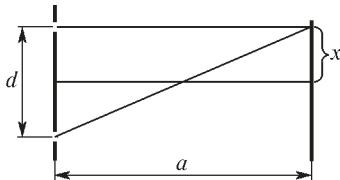


Рис. 386

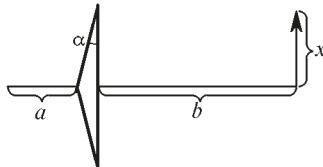


Рис. 387

Найти расстояние между соседними темными полосами, если показатель преломления стекла бипризмы $n = 1,5$. Найти максимальное число полос N , которое может наблюдаться в этой установке, если оно получается при удалении экрана от бипризмы на $L = 5$ м.

3.7. При каком положении экрана в установке, описанной в предыдущей задаче, будет наблюдаться максимальное число интерференционных полос, если расстояние между вершинами преломляющих углов бипризмы составляет $l = 4$ см? Чему равно это число полос? При каком положении экрана интерференционные полосы исчезнут?

3.8. Найти число полос интерференции N , получающихся с помощью бипризмы, если ее показатель преломления n , преломляющий угол α , длина волны источника λ . Расстояние от источника света до бипризмы равно a , а расстояние от бипризмы до экрана равно b .

3.9* Полосы интерференции получаются с помощью бипризмы Френеля с малым преломляющим углом и щелевого источника света, параллельного ребру бипризмы. Интерференционные полосы наблюдаются на экране, расположенным перпендикулярно к оси установки. Нулевая полоса получается в центре экрана — на оси (точнее, в плоскости симметрии) установки. Расстояние от источника до бипризмы равно a , от бипризмы до экрана — b . В какую сторону и на какую величину x сместится нулевая интерференционная полоса, если щелевой источник света немного сместить в направлении, перпендикулярном к оси оптической системы, на величину h ?

3.10. От двух когерентных источников света S_1 и S_2 (рис. 388) получена система интерференционных полос на экране AB , удаленном от источников на расстояние $a = 2$ м. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 25$ см? Рассмотреть два случая: 1) расстояние до линзы от источников равно $2f$; 2) источники S_1 и S_2 находятся в фокальной плоскости линзы.

3.11. Из линзы с фокусным расстоянием $f = 50$ см вырезана центральная часть шириной a , как показано на рис. 389. Обе половины

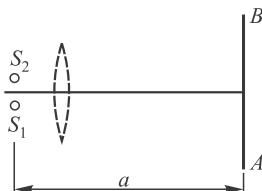


Рис. 388

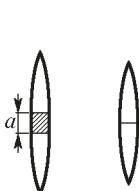


Рис. 389

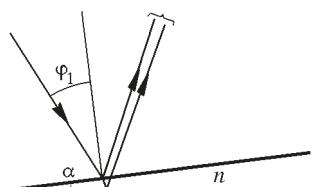


Рис. 390

линзы сдвинуты до соприкосновения. По одну сторону линзы помещен точечный источник монохроматического света ($\lambda = 6000 \text{ \AA}$). С противоположной стороны линзы помещен экран, на котором наблюдаются полосы интерференции. Расстояние между соседними светлыми полосами $\Delta x = 0,5 \text{ мм}$ и не изменяется при перемещении экрана вдоль оптической оси. Найти a .

3.12. Плоская монохроматическая волна длины λ падает перпендикулярно к ребру клина из стекла с углом при вершине $\alpha \ll 1$ (рис. 390). Показатель преломления стекла n , угол падения вол-

ны φ_1 . Найти расстояние Δx между соседними максимумами интерференционных полос на экране, расположенным перпендикулярно к отраженному свету.

3.13. Свет с длиной волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ падает на тонкую мыльную пленку. Угол падения $\varphi = 30^\circ$. В отраженном свете на пленке наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними полосами $\Delta x = 4 \text{ мм}$. Показатель преломления мыльной пленки $n = 1,33$. Вычислить угол α между поверхностями пленки.

3.14. При какой толщине пленки исчезают интерференционные полосы при освещении ее светом с длиной волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-5} \text{ см}$? Показатель преломления пленки $n = 1,5$.

3.15. В оптических приборах потери света при прохождении через прибор происходят главным образом вследствие отражения света от поверхностей оптических деталей. Для увеличения поверхностной прозрачности стекла его поверхность покрывают тонкой пленкой, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла. Каковы должны быть толщина пленки и ее показатель преломления, чтобы отражательная способность стекла обратилась в ноль?

3.16. В очень тонкой клиновидной пластинке в отраженном свете при нормальном падении наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними темными полосами $\Delta x = 5 \text{ мм}$. Зная, что длина световой волны $\lambda = 5800 \text{ \AA}$, а показатель преломления пластиинки $n = 1,5$, найти угол α между гранями пластиинки.

3.17. С помощью воздушного клина с углом при вершине α наблюдаются полосы равной толщины в отраженном монохроматическом свете. Свет падает на клин нормально. Найти распределение освещенности E в интерференционной картине на поверхности клина. Считать интенсивности световых пучков, отраженных от обеих поверхностей клина, одинаковыми и равными \mathcal{I}_0 .

3.18. Спутник Земли, поднимаясь над горизонтом, излучает радиоволны длиной $\lambda = 10 \text{ см}$. Микроволновый детектор расположен на берегу озера на высоте $h = 1 \text{ м}$ над уровнем воды (рис. 391). Определить, при каком угле α спутника над горизонтом детектор зарегистрирует 1-й и 2-й максимумы интенсивности сигнала. Поверхность воды считать гладкой, а воду проводящей. Кроме того, рассмотреть два случая поляризации падающей волны: вектор \mathbf{E} лежит в плоскости падения (\parallel) и перпендикулярно ей (\perp).

3.19. Радиоизлучение космического источника с длиной волны λ , имеющего угловой размер ψ , принимается горизонтальным вибратором, служащим антенной. Вибратор расположен на отвесном берегу

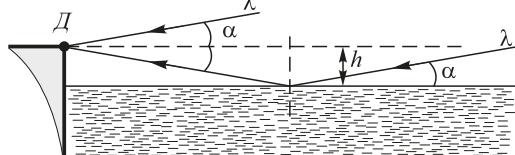


Рис. 391

ложен на берегу озера на высоте $h = 1 \text{ м}$ над уровнем воды (рис. 391). Определить, при каком угле α спутника над горизонтом детектор зарегистрирует 1-й и 2-й максимумы интенсивности сигнала. Поверхность воды считать гладкой, а воду проводящей. Кроме того, рассмотреть два случая поляризации падающей волны: вектор \mathbf{E} лежит в плоскости падения (\parallel) и перпендикулярно ей (\perp).

3.19. Радиоизлучение космического источника с длиной волны λ , имеющего угловой размер ψ , принимается горизонтальным вибратором, служащим антенной. Вибратор расположен на отвесном берегу

на высоте h над уровнем моря. Рассматривая поверхность воды как плоское зеркало, определить, как будет меняться интенсивность принимаемого сигнала в зависимости от угла α возвышения источника над горизонтом. При каких значениях углового размера источника интенсивность принимаемого сигнала не будет зависеть от α ? Для простоты расчета провести для малых значений α и ψ .

3.20. Радиоизлучение от точечного космического источника с длиной волны $\lambda = 1$ м, находящегося в плоскости экватора, принимается с помощью двух одинаковых антенн, расположенных по направлению восток–запад на расстоянии $L = 200$ м друг от друга. На входной контур приемника подается сумма сигналов, приходящих от обеих антенн по кабелям одинаковой длины. Как меняется в результате вращения Земли амплитуда напряжения U_0 на входном контуре приемника? Считать точечный источник звездой, которая за время наблюдения незначительно отклоняется от зенита.

3.21. Оценить неточность, которую можно допускать в установке углов наклона зеркал в интерферометре Майкельсона (рис. 392), для того чтобы можно было наблюдать полосы равного наклона. Ширина зеркал $D = 5$ см, длина волны света $\lambda = 0,55$ мкм.

3.22. Найти относительное смещение $\Delta l/l$ интерференционных полос, полученных с помощью пластинки Луммера–Герке, при изменении температуры на 1°C . Толщина пластиинки $h = 2$ см, показатель преломления $n = 1,5$, температурный коэффициент линейного расширения стекла $\alpha = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, длина волны света $\lambda = 500$ нм. Зависимость показателя преломления от температуры пренебречь.

3.23. На поверхности жидкости с показателем преломления n_1 плавает очень тонкая линза с показателем преломления $n < n_1$, геометрические размеры которой показаны на рис. 393. Рассчитать, какая картина будет видна в отраженном монохроматическом свете с длиной волны λ , если смотреть на линзу сверху.

3.24. Найти расстояние Δl между двадцатым и двадцать первым светлыми кольцами Ньютона, если расстояние между вторым и третьим равно 1 мм, а кольца наблюдаются в отраженном свете.

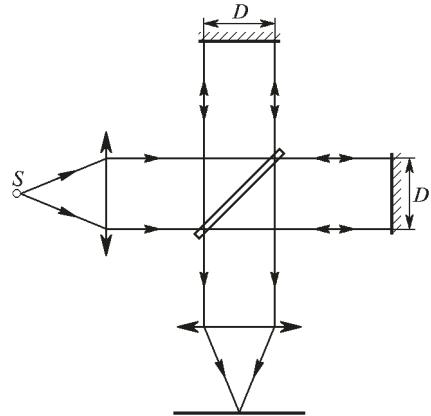


Рис. 392

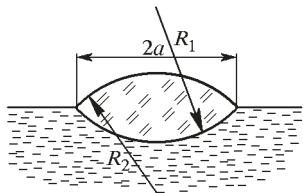


Рис. 393

3.25. Найти фокусное расстояние f плосковыпуклой линзы, примененной для получения колец Ньютона, если радиус третьего светлого кольца равен 1,1 мм, $n = 1,6$, $\lambda = 5890 \text{ \AA}$. Кольца наблюдаются в отраженном свете.

3.26. При наблюдении колец Ньютона в отраженном синем свете ($\lambda_c = 4500 \text{ \AA}$) с помощью плосковыпуклой линзы, положенной на плоскую пластинку, радиус третьего светлого кольца оказался равным 1,06 мм. После замены синего светофильтра на красный был измерен радиус пятого светлого кольца, оказавшийся равным 1,77 мм. Найти радиус кривизны R линзы и длину волны $\lambda_{\text{кр}}$ красного света.

3.27. Плоскопараллельная стеклянная пластина лежит на одной из поверхностей двояковыпуклой линзы. При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете натриевой горелки ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$) найдено, что радиус темного кольца порядка $m = 20$ (центральному темному кольцу соответствует $m = 0$) равен $r_1 = 2 \text{ мм}$. Когда пластина была положена на другую поверхность линзы, радиус темного кольца того же порядка сделался равным $r_2 = 4 \text{ мм}$. Определить фокусное расстояние линзы, если показатель преломления стекла, из которого она изготовлена, $n = 1,5$.

3.28. Найти радиус r центрального темного пятна колец Ньютона, если между линзой и пластинкой налит бензол ($n = 1,5$). Радиус кривизны линзы $R = 1 \text{ м}$. Показатели преломления линзы и пластиинки одинаковы. Наблюдение ведется в отраженном натриевом свете ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$).

3.29. Кольца Ньютона получаются с помощью плосковыпуклой линзы с радиусом кривизны R_1 , положенной на вогнутую сферическую поверхность с радиусом кривизны $R_2 > R_1$. Кольца наблюдаются в отраженном свете. Определить радиус r_m m -го темного кольца, если длина световой волны равна λ .

3.30. Кольца Ньютона получаются между двумя плосковыпуклыми линзами, прижатыми друг к другу своими выпуклыми поверхностями. Найти радиус r_m m -го темного кольца, если

длина световой волны равна λ , а радиусы кривизны выпуклых поверхностей линз равны R_1 и R_2 . Наблюдение ведется в отраженном свете.

3.31. Тонкая симметричная двояковыпуклая линза сложена с тонкой симметричной двояковогнутой линзой так, что в некоторой точке они со-прикасаются. Показатель преломления обеих линз $n = 1,6$. Наблюдаются интерференционная картина

в отраженном свете на длине волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$. Определить фокусное расстояние f системы линз, если радиус 5-го светлого кольца $r = 2 \text{ мм}$.

3.32. Интерференционная картина (кольца Ньютона) наблюдалась в проходящем свете (рис. 394). Показатель преломления линзы и пластиинки равен $n = 1,5$. Найти отношение интенсивностей

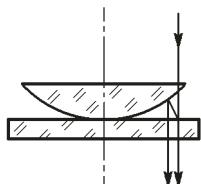


Рис. 394

$\mathcal{I}_{\max}/\mathcal{I}_{\min}$ света в максимуме и минимуме интерференционной картины. Можно ли увидеть картину глазом, если контрастная чувствительность глаза равна 0,05?

3.33. Две тонкие симметричные линзы (одна двояковыпуклая, другая двояковогнутая) приложены вплотную друг к другу (рис. 395) так, что между ними возникает контакт, вокруг которого в отраженном свете наблюдается интерференционная картина (кольца Ньютона). Определить оптическую силу системы из двух линз, если известно, что радиус восьмого темного кольца равен $r = 4$ мм при длине волны света $\lambda = 0,5$ мкм. Коэффициент преломления материала обеих линз $n = 1,5$.

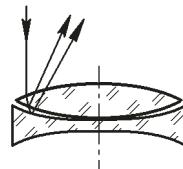


Рис. 395

3.34.* В установке для наблюдения колец Ньютона плосковыпуклая линза сделана подвижной и может перемещаться в направлении, перпендикулярном к пластинке. Описать, что будет происходить с кольцами Ньютона при удалении и приближении линзы к пластинке. Кольца получаются с помощью монохроматического света.

3.35. Источником освещения в интерферометре Майкельсона является лазер, частота излучения которого перестраивается во времени по линейному закону $\omega = \omega_0(1 + at)$. Разность хода в плечах интерферометра $L = 1$ м. Длина волны $\lambda_0 = 1$ мкм, $a = 0,1 \text{ c}^{-1}$. Какова частота изменения тока фотоприемника, регистрирующего интерференционную картину.

3.36. Каким должен быть показатель преломления n просветляющего покрытия, наносимого на поверхность стекла с показателем преломления n_{ct} , чтобы на данной длине волны отражение света отсутствовало? Чему равна минимальная толщина просветляющего покрытия?

3.37. На поверхность стеклянной пластиинки нанесена просветляющая в желтой области спектра ($\lambda_j = 6000 \text{ \AA}$) пленка минимальной толщины с коэффициентом преломления $n_p = 1,3$. Какая доля интенсивности падающего по нормали к пластиинке фиолетового света ($\lambda_f = 4000 \text{ \AA}$) отразится? Считать, что коэффициенты преломления не зависят от длины волны.

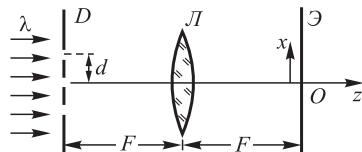


Рис. 396

3.38. Для защиты от механических повреждений стёкла современных очков покрывают алмазной пленкой. Какая часть падающего светового потока отражается от пленки на длине волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$, если толщина пленки равна $d = 625 \text{ \AA}$, показатель преломления стекла $n_2 = 1,7$, алмазной пленки $n_1 = 2,4$?

3.39. В передней фокальной плоскости линзы L с фокусным расстоянием F расположена диафрагма D с тремя узкими щелями, расположенными на расстоянии d друг от друга (см. рис. 396). На диа-

фрагму падает плоская волна с длиной волны λ , распространяющаяся вдоль оптической оси. В задней фокальной плоскости линзы расположена белый экран \mathcal{E} . Такое устройство называется трехщелевым интерферометром Цернике.

а) Предполагая $d/f \ll 1$, найти (с точностью до постоянного множителя) распределение интенсивности света $\mathcal{I}(x)$ на белом экране.

б) Определить координату x_0 первого минимума функции $\mathcal{I}(x)$. Рассчитать значение x_0 , принимая $\lambda = 500$ нм, $d = 0,5$ мм, $F = 30$ см.

в) Найти отношение интенсивностей в соседних интерференционных максимумах.

3.40. В 1952 г. в Нижегородском университете под руководством проф. Г. С. Горелика был выполнен уникальный интерференционный эксперимент по измерению амплитуды сверхмалых колебаний зеркала. Схема установки изображена на рис. 397.

Для получения интерференционной картины использовался интерферометр Майкельсона. Путем регулировки наклона зеркал Z_1 и Z_2 можно

но было получить на экране \mathcal{E}_1 достаточно широкие интерференционные полосы. Свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм проходил через узкую по сравнению с шириной интерференционных полос щель и попадал на фотоприемник Φ . При перемещении одного из зеркал ток i фотоприемника воспроизводил интерференционную картину $i \approx 2\mathcal{I}_0(1 + \cos k\Delta)$. Затем положения зеркал фиксировались и одно из них приводилось в колебание с малой амплитудой a . Оценить минимальное значение a_{\min} амплитуды колебаний, которое можно измерить описанным методом, если измерительная схема позволяет обнаружить периодические колебания фототока при условии

$$\frac{\text{амплитуда колебаний тока}}{\text{среднее значение тока}} \geq 10^{-8}.$$

Как для достижения наилучшего результата должен быть настроен интерферометр (т. е. какой должна быть установлена средняя разность хода интерферирующих волн на щели)?

3.41. Три синфазных излучателя 1, 2, 3 расположены вдоль прямой (рис. 398). Расстояние между излучателями 1 и 2 равно $\lambda/2$, а между излучателями 2 и 3 в полтора раза больше. Амплитуды излучателей 1 и 2 одинаковы. Какова должна быть амплитуда излучателя 3, чтобы в диаграмме направленности системы существовали минимумы нулевой интенсивности? Найти направления на эти минимумы. Решение дать аналитически и с помощью векторной диаграммы.

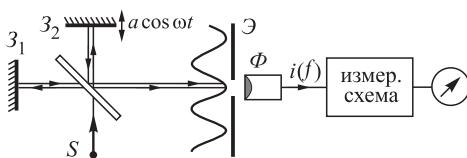
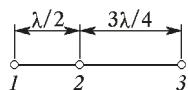


Рис. 397

Рис. 398



§ 4. Интерференция квазимонохроматического света. Временная когерентность

4.1* Описать, как будет меняться резкость колец Ньютона при перемещении плосковыпуклой линзы в направлении, перпендикулярном к пластинке. Кольца наблюдаются в отраженном свете D -линии Na. Учесть, что D -линия Na не монохроматична, а представляет собой две близкие спектральные линии с $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$.

4.2. Найти разность длин волн D -линий Na, если известно, что резкость интерференционной картины, наблюданной в интерферометре с двумя лучами, минимальна у 490-й, 1470-й и т. д., а максимальна у 1-й, 980-й и т. д. полос. Средняя длина волны D -линий $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ (см. задачу 4.1).

4.3* Интерференционные полосы равного наклона в фокальной плоскости линзы L (рис. 399) получаются при отражении от плоскопараллельной пластинки P , освещаемой монохроматическим источником света S . Прямой свет источника на линзу не попадает. Длина световой волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$, толщина пластинки $d = 1,6 \text{ мм}$; показатель преломления $n = 1,5$; фокусное расстояние линзы $f = 40 \text{ см}$. Найти радиус r первого видимого на экране \mathcal{E} темного интерференционного кольца, если центр кольца темный. Какова максимально допустимая ширина линии $\Delta\lambda$, освещающей пластинку, чтобы при указанных параметрах схемы можно было наблюдать интерференционные кольца?

4.4* Сколько темных колец N можно наблюдать в условиях предыдущей задачи, если диаметр линзы $D = 8 \text{ см}$, а источник S помещен посередине между линзой и пластинкой на расстоянии f от линзы?

4.5. Какова должна быть минимальная толщина пластинки, чтобы в условиях предыдущей задачи можно было получить по крайней мере одно темное кольцо?

4.6. Свет от двух одинаковых некогерентных точечных источников (рис. 400) S_1 и S_2 ($\lambda = 500 \text{ нм}$, $\Delta\lambda = 50 \text{ нм}$) падает на непрозрачный экран с двумя отверстиями, расстояние между которыми $d = 1 \text{ см}$. Интерференция света, прошедшего через отверстия, наблюдается вблизи точки P , лежащей на оси системы. Источники и точка наблюдения находятся на одинаковом

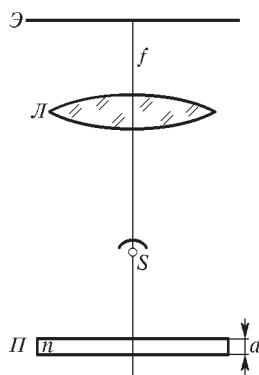


Рис. 399

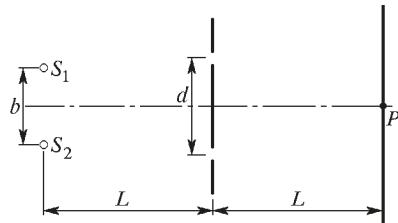


Рис. 400

расстоянии $L = 2$ м от экрана. При симметричном удалении источников от оси (т. е. при увеличении расстояния b между источниками) интерференционная картина в окрестности точки P периодически возникает и исчезает. Оценить число периодов восстановления интерференционной картины при увеличении расстояния b от нуля до d ($0 \leq b \leq d$).

4.7. Свет далекого точечного источника S падает на фотоприемник непосредственно и отразившись от горизонтальной плоскости (рис. 401). При вертикальном перемещении источника фотоприемник $\Phi П$ регистрирует изменение интенсивности падающего на него света. Оценить максимальный угол α возвышения источника над гори-

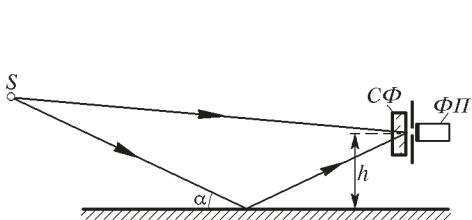


Рис. 401

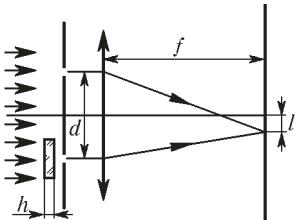


Рис. 402

зонтом, при котором еще заметны изменения фототока, если перед фотоприемником установлен светофильтр $C\Phi$ с полосой пропускания $\Delta\nu = 3 \cdot 10^{11}$ Гц. Входное отверстие фотоприемника находится на высоте $h = 1$ см над отражающей плоскостью.

4.8. В интерферометре Рэлея плоская волна испытывает дифракцию на двух щелях. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $f = 100$ см (рис. 402). Одну из щелей закрывают плоскопараллельной пластинкой диспергирующего вещества толщиной $h = 0,01$ мм с законом дисперсии $n(\lambda) = A - B\lambda$, где A и B — некоторые постоянные. При этом белая (ахроматическая) полоса смещается на расстояние $l = 4$ мм. Определить постоянную A , если известно, что расстояние между щелями равно $d = 1$ см.

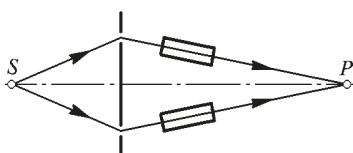


Рис. 403

4.9. Интерференция света от двух малых отверстий в непрозрачном экране наблюдается в точке P (рис. 403). Позади отверстий на пути лучей по-

ставлены две одинаковые кюветы, наполненные воздухом при одинаковом начальном давлении. При изменении давления в одной из кювет изменение интенсивности света в точке P имеет осциллирующий характер. Определить разность давлений ΔP газа в кюветах, при которой амплитуда осцилляции становится равной нулю, если 1-й минимум интенсивности наступает при разности давлений $\Delta P_1 = 10^{-3}$ мм рт. ст. Спектр излучения точечного источника S равномерен в полосе $\Delta\omega$ и имеет относительную ширину $\Delta\omega/\omega = 10^{-5}$.

4.10* Интерференционные полосы равной толщины наблюдаются на воздушном клине между двумя стеклянными пластинками с углом при вершине $\alpha = 1'$. Полосы получаются в свете зеленой линии ртути с длиной волны $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ и шириной $\Delta\lambda = 0,1 \text{ \AA}$. Определить: 1) расстояние Δx между двумя соседними полосами; 2) максимальное количество полос N , которые можно было бы видеть на клине, если бы его размеры не были ограничены; 3) расстояние x от последней наблюдаемой полосы до вершины клина и толщину h клина в этом месте; 4) максимально допустимое угловое расхождение лучей дф, при котором возможно наблюдение всех полос.

4.11. Определить видность V интерференционной картины в некотором интерферометре, использующем квазимохроматический источник света, спектр излучения которого изображен на рис. 404. Как зависит видность V от ширины спектра $\Delta\nu$?

4.12. Два пучка белого света, полученные от одного точечного источника, сходятся на входной щели оптического спектрального прибора. Разность хода $\Delta = 300 \text{ м}$. Оценить разрешающую способность R спектрального прибора, который может обнаружить интерференцию этих пучков.

4.13. Два пучка белого света от одного источника приходят в точку наблюдения P (рис. 405 a) с разностью хода Δ . С помощью спектроскопа высокой разрешающей способности исследуется распределение энергии в спектре колебаний, возникающих в точке P

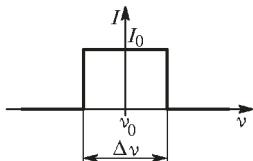


Рис. 404

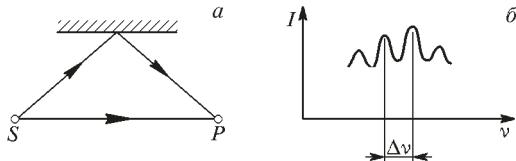


Рис. 405

при наложении обоих пучков. Оказалось, что наблюдаются чередующиеся максимумы и минимумы спектральной интенсивности $\mathcal{J}(\nu)$, причем частотный интервал между соседними максимумами $\Delta\nu = 10 \text{ МГц}$ (рис. 405 b). Определить разность хода Δ .

4.14. Мохроматическое излучение проходит через интерферометр Маха-Цандера, в одном из плеч которого расположена кювета с газом длиной l . В кювете создается избыточное давление. При этом показатель преломления газа в нем изменяется во времени по закону $n(t) = 1 + at$. Определить спектр колебаний тока фотоприемника, расположенного в области нулевой полосы интерферометра.

4.15. Определить видность интерференционной картины в схеме Юнга с точечным источником, спектр которого состоит из двух близко расположенных спектральных линий с интенсивностями, различающимися в три раза. Спектральный интервал между линиями, их среднюю длину волны, а также все геометрические параметры схемы считать известными.

4.16. В одно из плеч интерферометра Майкельсона вместо отражающего зеркала помещена непоглощающая пластина с полупрозрачной передней и зеркальной задней стенкой (рис. 406). Толщина пластины $d = 2$ мм, показатель преломления $n = 5$, спектр падающего излучения простирается от 0 до 110 ГГц. При перемещении зеркала во втором плече детектор регистрирует ряд пиков интенсивности излучения. Каково расстояние между пиками в единицах длины перемещения зеркала?

4.17. В фурье-спектрометре, служащем для исследования спектрального излучения, одно из зеркал интерферометра Майкельсона перемещается со скоростью $v = 0,1$ см/с (рис. 407). Какова зависимость тока фотоприемника от времени $\mathcal{I}(t)$, если излучение содержит

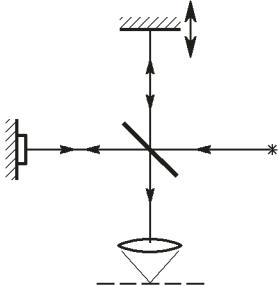


Рис. 406

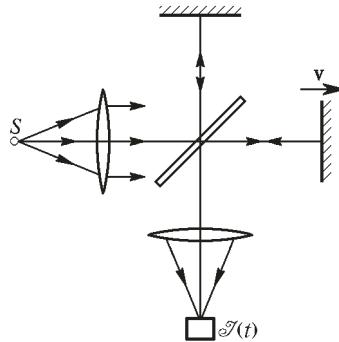


Рис. 407

две спектральные линии $\lambda_1 = 500$ нм и $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta\lambda$, где $\delta\lambda = 0,02$ нм, с отношением интенсивностей $\mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2 = 0,5$? Оценить минимальное время измерения, необходимое для разрешения этих линий. Нарисовать график зависимости тока от времени.

4.18. Для исследования спектрального состава излучения источника S одно из зеркал интерферометра Майкельсона (рис. 407) перемещается со скоростью $v = 0,01$ см/с. Какова зависимость тока фотоприемника от времени $\mathcal{I}(t)$, если источник излучает на длине волн $\lambda = 500$ нм, причем ширина спектральной линии $\Delta\lambda = 0,01$ нм? Спектральная интенсивность внутри спектральной линии $\mathcal{I}(\omega) = \mathcal{I}_0 = \text{const}$. Оценить минимальное время, необходимое для изучения спектрального состава излучения. Нарисовать график зависимости тока от времени.

4.19* В интерференционном эксперименте в микроволновом радиодиапазоне ($\lambda = 3$ см) два точечных некогерентных источника излучения S_1 и S_2 располагались на высотах h_1 и h_2 над гладкой поверхностью озера. Точечный приемник Pr излучения находился на расстоянии $L = 100$ м и мог перемещаться вдоль вертикальной оси x (рис. 408а). Считая поверхность воды идеальным зеркалом, оценить с помощью приведенной на рис. 408б интерферограммы $\mathcal{I}(x)$ (т. е.

зависимости интенсивности \mathcal{I} волн в точке приема от положения x приемника):

- 1) отношение интенсивностей $\mathcal{I}_2/\mathcal{I}_1$ источников;
- 2) относительные ширины $\Delta\lambda/\lambda$ спектров обоих источников;
- 3) высоты h_1 и h_2 , на которых располагались источники.

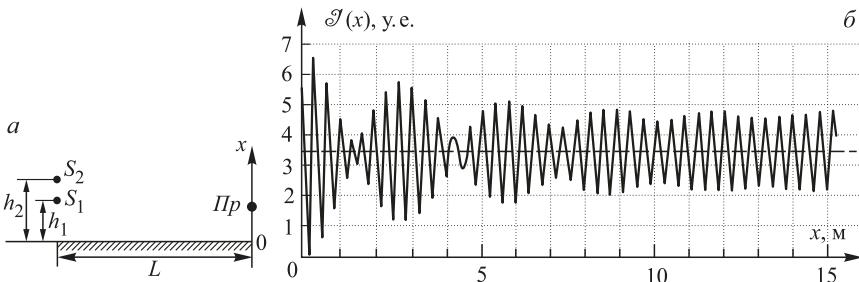


Рис. 408

Углы наклона интерферирующих пучков к горизонтальной поверхности считать малыми.

4.20. С помощью интерферометра Майкельсона получена интерферограмма $\mathcal{I}(\Delta)$, т. е. зависимость интенсивности \mathcal{I} в интерференционной картине от разности хода Δ (рис. 409). В эксперименте

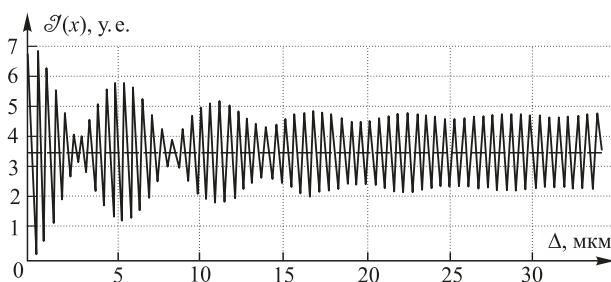


Рис. 409

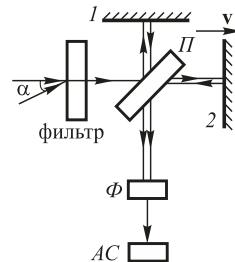


Рис. 410

использовался точечный источник света, в спектре которого имелись две спектральные линии. Используя интерферограмму, оценить:

- 1) отношение интенсивностей $\mathcal{I}_2/\mathcal{I}_1$ спектральных линий;
- 2) длины волн λ_1 и λ_2 спектральных линий;
- 3) ширины $\Delta\lambda_1$ и $\Delta\lambda_2$ спектральных линий.

Интенсивности интерферирующих пучков света в обоих плечах интерферометра Майкельсона считать одинаковыми.

4.21. Для измерения углового расстояния между двумя удаленными некогерентными источниками их излучение пропускают через фильтр с полосой $\Delta\lambda$, вблизи линии $\lambda_0 = 500$ нм, а затем через интерферометр Майкельсона, одно из зеркал которого перемещается со скоростью $v = 0,1$ см/с (на рис. 410 1 и 2 — зеркала, P — полупро-

зрачной пластиинка, Φ — фотоприемник, AC — анализатор спектра). Анализ спектра сигнала фотоприемника, пропорционального интенсивности света, показал наличие спектральных компонент с разностью частот $\Delta\nu = 5$ Гц. Определить угловое расстояние α между источниками, а также оценить требуемое время измерения и полосу пропускания фильтра $\Delta\lambda$.

4.22. Интерферометр Маха–Цандера состоит из двух «глухих» зеркал Z_2 и Z_4 и двух полупрозрачных зеркал Z_1 и Z_3 . В оба плеча интерферометра помещены одинаковые кюветы длиной $l = 50$ см, торцы которых закрыты одинаковыми плоскопараллельными стеклянными пластинами (рис. 411 a). В обеих кюветах находится воздух; давление

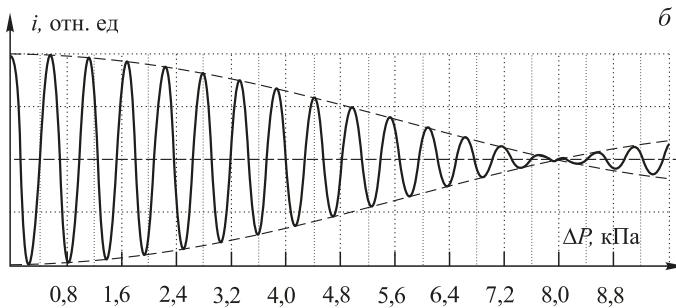
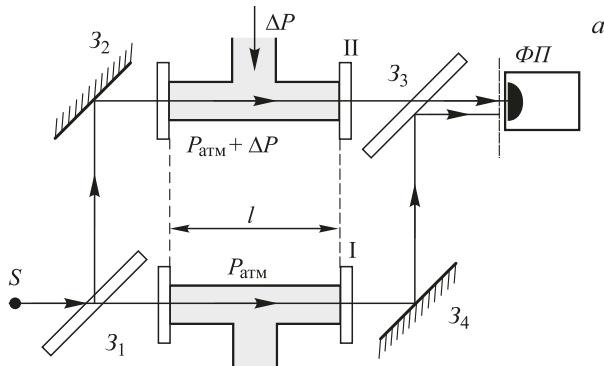


Рис. 411

в одной из них равно атмосферному $P_1 = P_{\text{атм}}$, в другой кювете можно изотермически создавать избыточное давление $\Delta P = P_2 - P_{\text{атм}}$. Интерференционная картина исследуется с помощью фотоприемника, имеющего достаточно малые размеры. Интерферометр отьюстрирован так, что при равных давлениях в кюветах фотоприемник находится в максимуме интенсивности интерференционной полосы нулевого порядка. В эксперименте была получена зависимость силы тока i фотоприемника от избыточного давления (рис. 411 b). Предпо-

лагая, что изменение Δn показателя преломления воздуха пропорционально изменению ΔN концентрации молекул ($\Delta n = \alpha \Delta N$, $\alpha = \text{const}$):

- 1) определить коэффициент пропорциональности α ;
- 2) определить показатель преломления воздуха при нормальных условиях ($P = 10^5$ Па, $t = 0^\circ\text{C}$).

3) оценить относительную ширину $\Delta\lambda/\lambda$ спектра источника света.

Длина волны света $\lambda = 600$ нм. Число Лошмидта $N_L = 2,7 \cdot 10^{19}$ см⁻³.

4.23. Для измерения модуля всестороннего сжатия некоторой жидкости, показатель преломления которой при нормальном атмосферном давлении $n_0 = 1,50$, кювету с этой жидкостью поместили в одно из плеч интерферометра Майкельсона (рис. 412a). Длина кюветы $l = 10$ см. С помощью компрессора в жидкости можно было

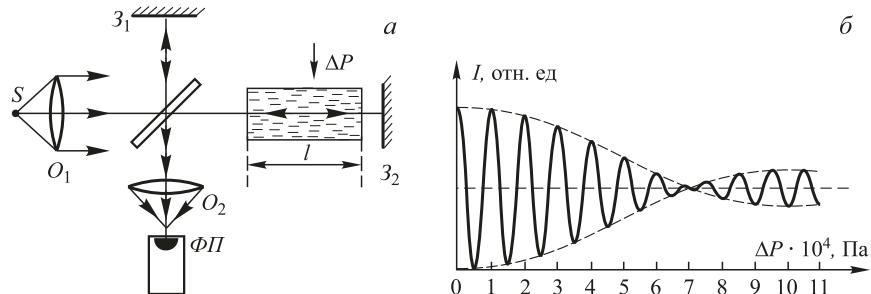


Рис. 412

создавать избыточное давление $\Delta P = P - P_{\text{атм}}$. Фотоприемник достаточно малого размера был установлен в фокальной плоскости объектива O_2 . При $\Delta P = 0$ зеркала интерферометра были установлены так, что фотоприемник находился в максимуме интенсивности интерференционной полосы нулевого порядка. В эксперименте был снят график зависимости тока i фотоприемника от избыточного давления в жидкости (рис. 412б).

1) Предполагая, что изменение Δn показателя преломления жидкости пропорционально изменению ее плотности, определить из приведенных экспериментальных данных модуль K всестороннего сжатия.

2) Оценить относительную спектральную ширину $\Delta\lambda/\lambda$ излучения источника S . Средняя длина волны света источника $\lambda = 500$ нм.

П р и м е ч а н и е. Модуль K всестороннего сжатия определяется из соотношения $\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{1}{K}\Delta P$, где $\frac{\Delta V}{V_0}$ — относительное изменение объема жидкости, ΔP — изменение давления.

4.24. Для измерения скорости мельчайших частиц, взвешенных в текущей жидкости, используется интерференционная схема, изображенная на рис. 413. Параллельный пучок света лазера с длиной волны $\lambda = 630$ нм падает на бипризму с преломляющим углом $\alpha = 5,7^\circ$

и показателем преломления $n = 1,5$. Размер бипризмы $D = 6$ см. Частицы двигаясь вместе с жидкостью, пересекают интерференционное поле и рассеивают свет, регистрируемый фотоприемником $\Phi П$. Определить скорость частиц v , если известно, что частота колебаний тока фотоприемника равна $f = 10$ кГц. Оценить минимальную относительную ширину $\Delta f/f$ спектральной линии тока фотоприемника.

4.25. На бипризму $БП$ с показателем преломления $n = 1,5$ и преломляющим углом α падает параллельный квазимохроматический пучок света (средняя длина волны $\lambda = 1$ мкм, ширина спектра

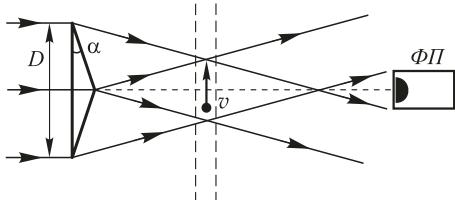


Рис. 413

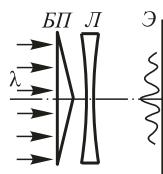


Рис. 414

$\Delta\lambda \ll \lambda$). За бипризмой вплотную к ней помещена рассеивающая линза L с фокусным расстоянием $f = -40$ см. На экране \mathcal{E} , расположенным на расстоянии $|f|$ от линзы, наблюдается интерференционная картина (рис. 414).

- 1) Найти угол α , если измеренная ширина интерференционной полосы $\Delta x = N\lambda$, где $N = 57$.
- 2) Найти $\Delta\lambda$, если максимальное число наблюдаемых на экране полос $m = 200$.
- 3) Найти видность V 50-й полосы, отсчитываемой от центра. Линзу и бипризму считать тонкими.

4.26. В интерференционном опыте Юнга используется квазимохроматический точечный источник света, излучающий с постоянной спектральной интенсивностью \mathcal{I}_0 ($\mathcal{I}(\omega) = \mathcal{I}_0$) в интервале частот $\Delta\omega$, локализованном вблизи центральной частоты излучения ω_0 (рис. 415a). Если излучение пройдет через фильтр, пропускающий N дискретных, равноотстоящих по частоте спектральных линий с частотным интервалом между линиями Ω (так, что общая полоса частот $N\Omega = \Delta\omega$ осталась неизменной, а спектральная ширина каждой линии $\delta\omega$ много меньше частотного интервала Ω между линиями, см. рис. 415b), то интерференционная картина изменится. В каких порядках интерференции m_{\max} наблюдаются при этом максимумы видности и какова в этих порядках видность полос? При каком отклонении Δm от максимального значения $m = m_{\max} \pm \Delta m$ видность окажется равной нулю?

чения ω_0 (рис. 415a). Если излучение пройдет через фильтр, пропускающий N дискретных, равноотстоящих по частоте спектральных линий с частотным интервалом между линиями Ω (так, что общая полоса частот $N\Omega = \Delta\omega$ осталась неизменной, а спектральная ширина каждой линии $\delta\omega$ много меньше частотного интервала Ω между линиями, см. рис. 415b), то интерференционная картина изменится. В каких порядках интерференции m_{\max} наблюдаются при этом максимумы видности и какова в этих порядках видность полос? При каком отклонении Δm от максимального значения $m = m_{\max} \pm \Delta m$ видность окажется равной нулю?

§ 5. Протяженные источники света. Пространственная когерентность

5.1.* Найти видность V интерференционной картины в опыте Юнга при использовании протяженного источника света. Размер источника света b , расстояние от источника до экрана со щелями R_0 , расстояние до экрана R , расстояние между щелями d . Средняя длина волны $\lambda = 500$ нм. Сравнить результат с задачей 4.11.

5.2. На экран с двумя узкими параллельными щелями падают лучи непосредственно от Солнца. При каком расстоянии D между щелями могут наблюдаться интерференционные полосы за экраном? Угловой диаметр Солнца $\alpha \approx 0,01$ рад.

5.3. Изображение Солнца получено при помощи линзы с фокусным расстоянием $f = 50$ мм на отверстии экрана (размер отверстия равен величине изображения). За экраном помещены две узкие параллельные щели на расстоянии $D = 1$ мм друг от друга. При каком расстоянии l между экраном и щелями могут наблюдаться интерференционные полосы? Угловой диаметр Солнца $\alpha \approx 0,01$ рад.

5.4. Какому условию должны удовлетворять размеры источника света, чтобы могли наблюдаться интерференционные полосы в установке с: 1) зеркалами Френеля; 2) зеркалом Ллойда? Различные точки источника излучают некогерентно.

5.5. Интерференционная картина наблюдается с помощью бипризмы Френеля (преломляющий угол $\alpha = 20'$, показатель преломления $n = 1,5$). Экран и источник света ($\lambda = 600$ нм, $\Delta\lambda = 20$ нм) находятся на одинаковом расстоянии от бипризмы. Оценить число интерференционных полос, которые будут видны на экране. На каком расстоянии от центра интерференционной картины интерференционные полосы размываются? Каков допустимый размер источника, при котором можно наблюдать все интерференционные полосы?

5.6. Перед линзой L (рис. 416) установлена плоскопараллельная стеклянная пластинка P , перпендикулярная к главной оптической оси и освещаемая монохроматическим светом от протяженного источника. Описать интерференционную картину в фокальной плоскости линзы. Как изменится эта картина при наклоне пластиинки на угол $\alpha = 10^\circ$ (по отношению к исходному положению)? Фокусное расстояние линзы $f = 30$ см.

5.7. Билинза Бийе изготовлена из двух половинок тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 10$ см. На расстоянии $x = 3f/2$ от нее помещен источник света в виде щели, освещаемой широкоугольным пучком света с длиной волн $\lambda = 5790$ Å. Экран для наблюдения интерференционных полос установлен с противоположной стороны билинзы на расстоянии $L = 330$ см от нее. При какой минимальной ширине щели b интерференционные полосы на экране пропадут?

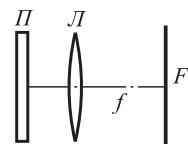


Рис. 416

Считать, что различные точки щели излучают световые волны некогерентно. Расстояние между половинками билинзы $a = 0,5$ мм.

5.8. Свет от протяженного монохроматического источника S падает на непрозрачный экран \mathcal{E} , в котором имеются два маленьких отверстия. Интерференция света, прошедшего через отверстия, наблюдается в точке P (рис. 417). Источник света S и точка P находятся на одинаковом расстоянии L от экрана. При увеличении расстояния d между отверстиями изменение интенсивности в точке P имеет осциллирующий характер. Определить линейный размер b источни-

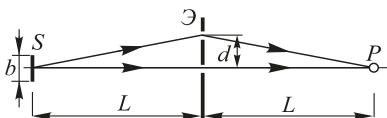


Рис. 417

ка света, если 1-й минимум интенсивности в точке P наблюдается при $d = d_1 = 1$ см, а амплитуда осцилляции становится равной нулю при $d = d_2 = 20$ см (условие $d \ll L$ выполняется всегда).

5.9. Наблюдаются полосы равной толщины в воздушном клине между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками, образующими между собой очень малый угол. Клин освещается рассеянным светом. Наблюдение ведется невооруженным глазом с расстояния ясного зрения $L = 25$ см в направлении, перпендикулярном поверхности клина, причем глаз может смещаться перпендикулярно ребру клина. Оценить максимальное число интерференционных полос N , которое может видеть глаз в монохроматическом свете при таком способе наблюдения, если диаметр зрачка глаза $d = 5$ мм. Оценить степень монохроматичности света, необходимую для того, чтобы такое максимальное число полос могло наблюдаться.

5.10. Полосы равной толщины, получающиеся в тонком стеклянном клине с показателем преломления $n = 1,5$ при освещении рассеянным монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 5000$ Å, проецируются линзой на экран. Перед линзой помещена квадратная диафрагма со стороной $d = 1$ см и отстоящая от клина на расстояние $L = 50$ см. Какой максимальный порядок интерференции N может при этом наблюдаться на экране? Главная оптическая ось проецирующей системы приблизительно перпендикулярна поверхности клина.

5.11. Рассчитать, какую ширину b может иметь источник света в интерферометре Майкельсона, если зеркала интерферометра расположены на неодинаковых расстояниях от делительной пластинки и разность этих расстояний равна $L = 2$ см. Фокусное расстояние коллиматора равно $f = 25$ см. Немонохроматичностью источника пренебречь, длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм. Наблюдаются линии равной толщины.

5.12. Источник света S расположен на расстоянии $L = 1$ м от тонкой слюдяной пластиинки толщиной $h = 0,1$ мм с показателем преломления $n = 1,4$ (рис. 418). На таком же расстоянии от пластиинки расположен небольшой экран \mathcal{E} , ориентированный перпендикулярно отраженным лучам, на котором наблюдаются интерференционные

полосы. Угол $\varphi = 60^\circ$. Найти порядок m интерференционной полосы в центре экрана и ширину Δl интерференционных полос. Оценить допустимый размер b и допустимую неменохроматичность $\Delta\lambda$ источника. Используется зеленый свет с длиной волны $\lambda = 560$ нм.

5.13. С помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность, наблюдают интерференционные полосы в тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной $h = 0,2$ мм с показателем

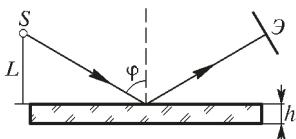


Рис. 418

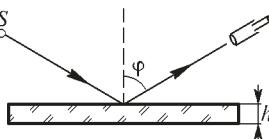


Рис. 419

преломления $n = 1,41$; при этом угол наблюдения φ может изменяться от 0 до 90° (рис. 419). Найти максимальный и минимальный порядок интерференционных полос. Оценить допустимую неменохроматичность $\Delta\lambda$ источника, при которой будут достаточно четко наблюдаться все интерференционные полосы. Каков допустимый размер источника света в этом интерференционном эксперименте? Используется зеленый свет с длиной волны $\lambda = 560$ нм.

5.14. В двулучевой интерференционной схеме с равными интенсивностями интерферирующих лучей используется источник белого света, размер которого $b = 0,025$ см. Интерференционная картина,

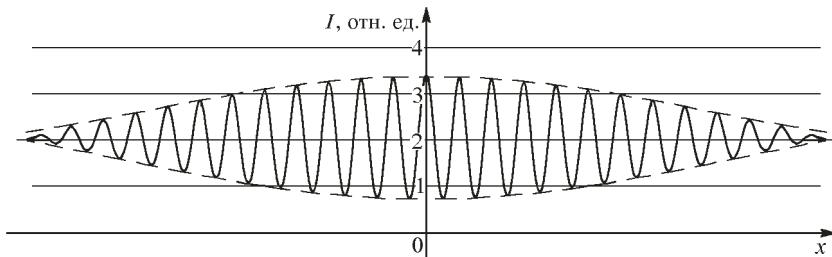


Рис. 420

наблюдаемая через светофильтр, изображена на рис. 420. Оценить полосу пропускания фильтра $\Delta\lambda$ и апертуру интерференции Ω . Средняя длина волны равна $\lambda = 500$ нм.

5.15.* Интерференционная картина, полученная при интерференции двух пучков одинаковой интенсивности при апертуре интерференции $\Omega = 10^{-3}$ рад, изображена на рис. 420. Оценить неменохроматичность источника $\Delta\lambda$ и его линейный размер b . Средняя длина волны равна $\lambda = 500$ нм.

5.16. В интерференционной схеме (рис. 421) используется квазимохроматический источник света S ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). Отражающие зеркала расположены симметрично относительно источника S и

экрана \mathcal{E} , на котором наблюдается интерференция. Найти: 1) ширину интерференционной полосы Λ на экране \mathcal{E} ; 2) область локализации полос на экране; 3) максимальный и минимальный порядок интерференции и число наблюдаемых полос; 4) степень немонохроматичности $\Delta\lambda$, при которой число наблюдаемых полос максимально; 5) допустимый размер источника b . Параметры схемы: $L = 1 \text{ м}$, $2d = 2,5 \text{ см}$, $D = 10 \text{ см}$.

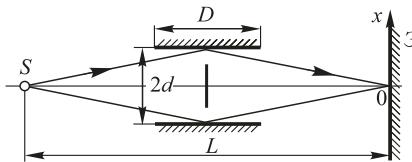


Рис. 421

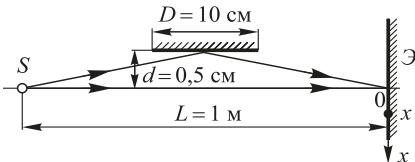


Рис. 422

ренции и число наблюдаемых полос; 4) степень немонохроматичности $\Delta\lambda$, при которой число наблюдаемых полос максимально; 5) допустимый размер источника b . Параметры схемы: $L = 1 \text{ м}$, $2d = 2,5 \text{ см}$, $D = 10 \text{ см}$.

5.17. В интерференционной схеме, изображенной на рис. 422, используется квазимонохроматический протяженный источник света S ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, $\Delta\lambda = 28 \text{ \AA}$). Полагая, что спектральная интенсивность излучения постоянна в интервале $\Delta\lambda$, найти: 1) ширину интерференционных полос Λ на экране \mathcal{E} ; 2) количество наблюдаемых полос; 3) область локализации полос на экране ($< x <$); 4) максимальный и минимальный порядок наблюдаемых полос; 5) допустимый размер источника b . Параметры схемы указаны на рис. 422.

Отражающее зеркало расположено симметрично относительно источника S и точки O экрана \mathcal{E} .

5.18. На рис. 423 изображена схема установки Майкельсона, предназначеннной для измерения угловых диаметров звезд. Зеркала M_1 , M_2 , M_3 , M_4 направляют в объектив телескопа два пучка света, интерферирующие друг с другом в фокальной плоскости объектива. При измерении углового диаметра гигантской красной звезды Бетельгейзе Майкельсон нашел, что интерференционные полосы исчезли, когда расстояние между внешними зеркалами M_1 и M_2 (рис. 423) равнялось 306,5 см. Считая, что эффективная длина волны света от Бетельгейзе равна 5750 \AA , вычислить угловой диаметр этой звезды ψ .

5.19. Параллельный пучок света от удаленного источника с длиной волны $\lambda = 500 \text{ нм}$ падает на бипризму с преломляющим углом $\alpha = 10^{-2} \text{ рад}$ и шириной $D = 2 \text{ см}$, выполненную из стекла с показателем преломления $n = 1,5$ (рис. 424). 1) На каком расстоянии L от бипризмы следует расположить экран, чтобы на нем можно было наблюдать максимально возможное число интерференционных полос? 2) Оценить допустимую немонохроматичность $\Delta\lambda$ света, необходимую для наблюдения всех полос. 3) Оценить допустимый угловой размер ψ источника в этом интерференционном опыте.

5.20. Из тонкой линзы диаметром $D = 2,5$ см с фокусным расстоянием $f = 50$ см вырезана центральная полоска шириной $a = 0,5$ см, после чего обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения (билинза). Источник света S с длиной волны $\lambda = 500$ нм располагается

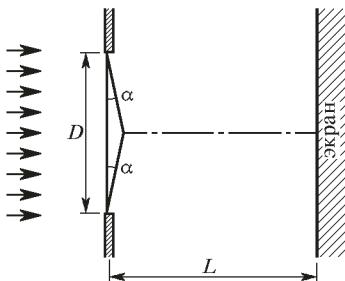


Рис. 424

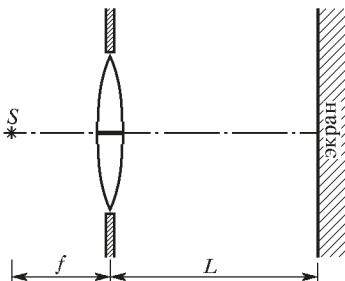


Рис. 425

на оси системы в фокальной плоскости линзы (рис. 425). 1) На каком расстоянии L от билинзы следует расположить экран, чтобы на нем можно было наблюдать максимально возможное число интерференционных полос? Определить ширину Λ интерференционных полос и их число. 2) Оценить допустимую немонохроматичность $\Delta\lambda$ источника света в этом интерференционном эксперименте, необходимую для наблюдения всех полос. 3) Оценить допустимый размер b источника света.

5.21. Бипризма освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм от удаленного протяженного источника с угловым размером $\psi = 10^{-3}$ рад. Преломляющий угол бипризмы $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ рад, показатель преломления $n = 1,5$. Определить видимость интерференционных полос, наблюдавшихся на экране, в зависимости от расстояния L между экраном и бипризмой (рис. 426). При

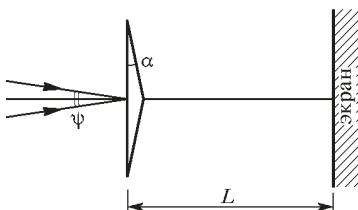


Рис. 426

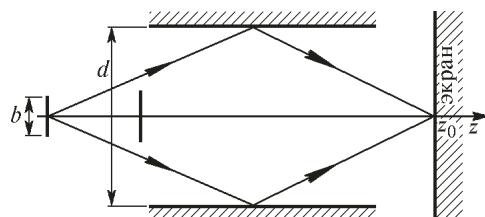


Рис. 427

каких значениях L интерференционные полосы размываются? Размер бипризмы считать достаточно большим. Источник можно считать равномерно светящейся полоской, параллельной ребру бипризмы.

5.22. В интерференционной схеме с двумя параллельными зеркалами (рис. 427) используется протяженный источник монохроматического света в виде однородно светящейся полоски шириной

ной $b = 5 \cdot 10^{-3}$ см. Длина волны излучения $\lambda = 600$ нм, расстояние между зеркалами $d = 0,2$ см. Какова видность V_0 интерференционных полос на экране, расположенным на расстоянии $z_0 = 0,5$ м от источника? В каком направлении и на какое расстояние следует переместить экран, чтобы: 1) видность увеличилась в 2 раза; 2) интерференционная картина исчезла (размылась)? Размеры зеркал считать достаточно большими. Прямые лучи от источника на экран не попадают.

5.23. Протяженный круглый монохроматический ($\lambda = 5461$ Å) источник света в интерферометре Майкельсона (см. рис. 428) расположен в фокальной плоскости линзы L . Центр источника совпадает с фокусом этой линзы, а его плоскость перпендикулярна главной оптической оси. Определить минимальный диаметр D источника, если в фокальной плоскости линзы L_2 наблюдается интерференционная картина из двух светлых колец, а в центре — максимум интенсивности. Линзы L_1 и L_2 имеют фокусное расстояние $f = 1$ м. Разность длин плеч интерферометра $l = 1$ см.

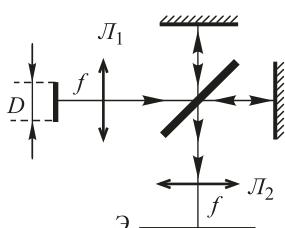


Рис. 428

точка, если видность наблюдаемой интерференционной картины в окрестности нулевой полосы $V = 1/3$, $\lambda = 500$ нм, расстояние между щелями $d = 5$ мм.

5.25. Определить видность интерференционной картины в схеме Юнга с двумя щелями, если щели освещаются двумя некогерентными точечными источниками с равной частотой ω , интенсивности которых различаются в три раза. Источники, расположенные на расстояниях $\pm l/2$ от оси симметрии оптической схемы, находятся на расстоянии a от экрана со щелями. Расстояние между щелями равно d , расстояние от щелей до экрана, где наблюдается дифракционная картина, равно b .

5.26. При использовании в интерференционных опытах протяженных источников допустимая разность хода Δ_{\max} может зависеть не только от немонохроматичности света, но и от размеров источника. Аналогично радиусу поперечной пространственной когерентности ρ_{\perp} (в направлении, перпендикулярном лучу), можно ввести понятие продольного радиуса пространственной когерентности ρ_{\parallel} . Рассмотрим удаленный квазимонохроматический источник света с угловым размером $\psi \ll \pi$. Выделим на пути луча две точки P_1 и P_2 на расстоянии ρ друг от друга и разместим в этих точках два небольших полупрозрачных зеркала (или просто два рассеивателя) так, что-

5.24. В интерференционной схеме Юнга, используемой для определения угловых размеров источника, картина интерференции «зашумлена» некогерентной фоновой засветкой (рассеянным светом посторонних источников). Интенсивность фона вдвое превышает интенсивность каждого из интерферирующих пучков. Оценить угловой размер ис-

бы отраженный свет падал на экран (рис. 429). Если колебания в точках P_1 и P_2 когерентны, то на экране возникнет интерференционная картина, причем разность хода в центре экрана будет равна ρ . Оценить ρ_{\parallel} , т. е. расстояние между точками P_1 и P_2 , при котором исчезнет интерференционная картина в центре экрана. Оценить также степень немонохроматичности $\Delta\lambda/\lambda$ излучения, при которой ρ перестанет зависеть от $\Delta\lambda$.

5.27. В интерферометре Рэлея плоская волна со средней длиной волны $\lambda = 600$ нм испытывает дифракцию на двух щелях, отстоящих друг от друга на расстояние $d = 1$ см. Дифракционная картина наблюдается с помощью микроскопа в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $F = 100$ см.

Позади щелей на пути лучей установлены две одинаковые кюветы, закрытые с торцов плоскопараллельными пластинками и наполненные воздухом при одинаковом начальном давлении (рис. 430).

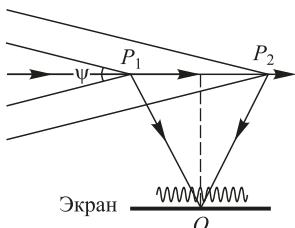


Рис. 429

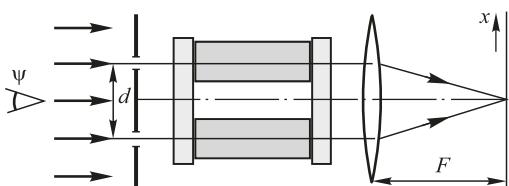


Рис. 430

При изменении давления в одной из кювет на $\Delta P_1 = 1,6$ Па полосы смещаются на расстояние, равное $\Delta x = 3,2 \cdot 10^{-2}$ см. Оценить разность давлений ΔP в кюветах, при которой интерференционная картина в центральной части экрана размывается. Каков допустимый угловой размер ψ источника в этом интерференционном эксперименте? Спектр излучения источника равномерен в полосе $\Delta\lambda = 1,5$ нм.

5.28. Квазимонохроматический источник света S ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, $\Delta\lambda = 1$ Å) используется в симметричной интерференционной схеме с двумя зеркалами (рис. 431); $L = 1$ м, $d = 5$ см, $D = 10$ см. Прямые

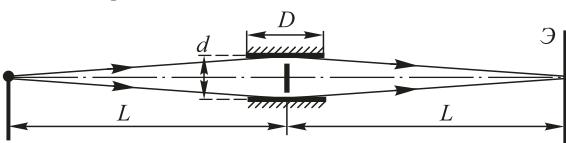


Рис. 431

лучи от источника на экран не попадают. Найти: 1) ширину Λ интерференционных полос на экране Θ ; 2) допустимый размер b источника; 3) число N наблюдаемых полос.

5.29. Свет от протяженного монохроматического источника ($\lambda = 1$ мкм) размером b падает на собирающую линзу диаметром $D =$

$= 1$ см с фокусным расстоянием $f = 40$ см. За линзой вплотную к ней расположена бипризма с показателем преломления $n = 1,5$ и преломляющим углом $\delta = 0,02$ рад. На экране, расположенном на некотором

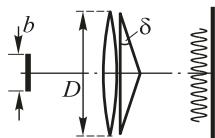


Рис. 432

расстоянии от бипризмы, наблюдается интерференционная картина (рис. 432), причем оказалось, что ширина полос интерференции Δx не зависит от этого расстояния. Найти: 1) ширину интерференционных полос Δx ; 2) расстояние L между бипризмой и экраном, при котором на экране наблюдается максимальное число полос; 3) размер источника b , если видность полос, измеренная на этом расстоянии L от бипризмы, оказалась равна $V = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} \approx 0,64$. Линзу и бипризму считать тонкими.

5.30. Источником света является торец газоразрядной трубы диаметром $d = 6$ мм, средняя длина волны $\lambda = 0,6$ мкм, ширина до-пллеровского контура линии излучения $\Delta f = 1,5$ ГГц. Оценить расстояние от торца трубы, при котором длина когерентности излучения сравнима с радиусом поперечной когерентности.

5.31. Оценить объем когерентности видимой части спектра солнечного света вблизи поверхности Земли. Угловой диаметр Солнца $\psi = 10^{-2}$ рад.

5.32. Для наблюдения колец Ньютона в отраженном свете используется источник света с угловым размером $\psi = 5 \cdot 10^{-2}$ рад, средней длиной волны $\lambda = 450$ нм и шириной спектра $\Delta\lambda = 9$ нм. Кольца наблюдают с помощью микроскопа, сфокусированного на плоскость, лежащую вблизи верхней поверхности стеклянной пластиинки, на которой покоятся плосковыпуклая линза с радиусом кривизны выпуклой поверхности $R = 5$ см. 1) Какое максимальное число темных колец m_{\max} можно увидеть в данных условиях? 2) Оценить, при каком максимальном смещении δ тубуса микроскопа по вертикали количество видимых колец еще не будет уменьшаться?

Указание. Для оценки можно пренебречь преломлением света на изогнутой поверхности линзы и считать, что в микроскопе наблюдается интерференция плоской волны, отраженной от пластиинки, и сферической волны, отраженной от выпуклой поверхности линзы.

§ 6. Дифракция Френеля. Зонные пластинки

6.1. Какова интенсивность света \mathcal{I} в центре дифракционной картины от круглого экрана, если он закрывает первую зону Френеля? Интенсивность света в отсутствие экрана равна \mathcal{I}_0 .

6.2.* Непрозрачный экран, имеющий форму полудиска, помещен между точечным источником S и точкой наблюдения A таким образом, что точка O располагается на одной прямой с точками S и A (рис. 433). Экран закрывает небольшое нечетное число полузон Френеля. Какова освещенность в точке A ?

6.3. Между точечным источником S и точкой наблюдения A помещен диск, центр которого расположен на одной прямой с точками S и A (рис. 433). Одна половина диска прозрачна, другая непрозрачна. Диск закрывает первые три зоны Френеля. Толщина прозрачной части диска $l = N \frac{\lambda}{2(n-1)}$, где n — показатель преломления прозрачной части диска, N — целое число. Какова освещенность в точке A при четном и нечетном N ?

6.4.* Вдали от точечного источника S электромагнитной волны поставлен бесконечный идеально отражающий экран AB (рис. 434). Пользуясь векторной диаграммой, найти, как изменится интенсивность отраженной волны в точке S , если из экрана вырезать диск CD

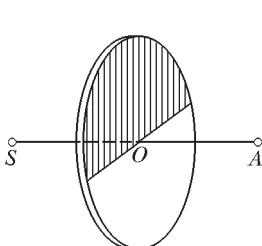


Рис. 433

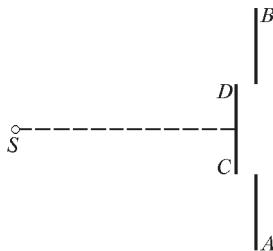


Рис. 434

с центром в основании перпендикуляра, опущенного из S на плоскость экрана, и сместить этот диск по направлению к источнику на одну двенадцатую длины волны? Площадь диска составляет одну треть от площади первой зоны Френеля. Как изменится результат, если смещение произвести в противоположную сторону на ту же величину?

6.5. В установке предыдущей задачи площадь диска составляет половину площади центральной зоны Френеля. На какое минимальное расстояние h следует сместить диск в направлении от источника, чтобы интенсивность отраженной волны в точке S осталась неизменной?

6.6. Если круглое отверстие (например, ирисовая диафрагма) увеличивается таким образом, что его радиус от радиуса одной зоны возрастает до радиуса двух зон, то освещенность в точке P (точка P — изображение источника света, даваемое диафрагмой) падает почти до нуля. Как согласовать этот факт с увеличением всего светового потока через диафрагму в два раза?

6.7.* Точечный источник монохроматического света помещен на расстоянии a от круглой диафрагмы, а экран — с противоположной стороны на расстоянии b от нее. При каких радиусах диафрагмы r центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет темным и при каких — светлым, если перпендикуляр, опущенный из источника на плоскость диафрагмы, проходит через ее центр?

6.8. Между точечным монохроматическим источником света и точкой наблюдения перпендикулярно соединяющей их линии поме-

щен экран, состоящий из секторов двух кругов (рис. 435). Радиус одного из них равен радиусу 1-й зоны Френеля, другого — радиусу 2-й зоны Френеля. Определить интенсивность света в точке наблюдения, если в отсутствие экрана она равна \mathcal{I}_0 . Рассмотреть экраны, изображенные на рис. 435 a и рис. 435 b .

6.9. Симметрично между источником ($\lambda = 4900 \text{ \AA}$) и точкой наблюдения расположена непрозрачный экран с круглым отверстием ($r = 0,35 \text{ mm}$). Расстояние от источника до экрана $a = 1 \text{ m}$. Во сколько раз изменится интенсивность в точке наблюдения, если источник сместить вдоль оси к отверстию на расстояние $\Delta a = 0,8 \text{ m}$?

6.10. Между источником S ($\lambda = 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$) и точкой наблюдения P расположен непрозрачный экран с круглым отверстием ($r = 0,7 \text{ mm}$) на оси SP . Расстояние от источника до экрана $a = 3 \text{ m}$, между экраном и точкой наблюдения $b = 1 \text{ m}$. Во сколько раз изменится интенсивность сигнала, если точку наблюдения удалить вдоль оси на расстояние $b' = 3 \text{ m}$ от экрана?

6.11. В непрозрачной пластинке имеется отверстие диаметром $d = 1 \text{ mm}$. Оно освещается удаленным точечным источником монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500 \text{ nm}$. Найти расстояние L_{\max} от отверстия, на котором будет наблюдаваться наибольшая освещенность.

6.12. Два точечных некогерентных источника монохроматического света S и S' освещают экран (рис. 436). Для точки C выполняется условие $SC = S'C = 1 \text{ m}$. Во сколько раз изменится освещенность

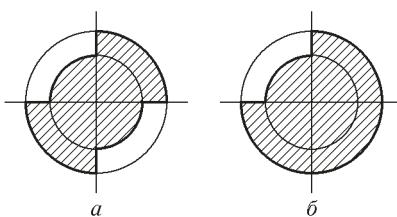


Рис. 435

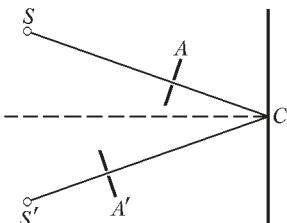


Рис. 436

в точке C , если на путях лучей в точках A и A' расположить непрозрачные экраны с круглыми отверстиями, диаметры которых равны $0,6 \text{ mm}$? Центры отверстий совпадают с SC и $S'C$; $AC = 9 \text{ cm}$, $A'C = 20 \text{ cm}$. Длина волны света равна 5600 \AA . Как изменится ответ, если источники будут когерентными?

6.13. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ нормально падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром $D = 1,2 \text{ mm}$. На расстоянии $b_1 = 18 \text{ cm}$ за экраном на оси отверстия наблюдается темное пятно. На какое минимальное расстояние Δb нужно сместиться от этой точки вдоль оси отверстия, удаляясь от него, чтобы в центре дифракционной картины вновь наблюдалось темное пятно?

6.14. Вдали от точечного источника S стоит бесконечный идеально отражающий экран. Из экрана удален диск диаметром $d_1 = 2r_1\sqrt{2/3}$, где r_1 — радиус 1-й зоны Френеля, и поставлен другой диаметром $d_2 = d_1/\sqrt{2}$. Найти интенсивность \mathcal{I} отраженной волны в точке S , если диск диаметром d_2 стоит в плоскости экрана.

6.15. Яркий источник можно сфотографировать, поместив между ним и фотопластинкой гладкий непрозрачный шар. Объяснить явление. Диаметр шара $D = 40$ мм, расстояние от источника до шара $a = 12$ м, расстояние от шара до изображения $b = 18$ м, размер источника $y = 7$ мм. Определить размер изображения y' . Будет ли изображение испорчено, если поверхность шара испещрена множеством неправильных царапин, глубина которых h порядка 0,1 мм? Можно ли шар заменить диском?

6.16. Диск из стекла с показателем преломления n (для длины волны λ) закрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения P . При какой толщине h диска освещенность в точке P будет наибольшей?

6.17. В параллельном пучке радиоизлучения, длина волны которого $\lambda = 3$ см, поставлен диск из диэлектрика с показателем преломления $n = 1,5$. Диск перпендикулярен направлению пучка. Диаметр диска $D = 20$ см. При какой толщине диска h и на каком расстоянии b от диска вдоль его оси будет наблюдаться максимальная интенсивность излучения? Отражением излучения от диска пренебречь.

6.18. Непрозрачный диск, радиус которого $R = 0,55$ см, освещается плоской монохроматической волной ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). Оказалось, что если в центре диска проделать маленькое отверстие, то интенсивность света в точке наблюдения, находящейся за диском на оси отверстия на расстоянии $L = 1,5$ см, вырастет в 4 раза. Определить минимальный радиус отверстия.

6.19. Непрозрачный диск диаметром $D = 1$ см освещается плоской нормально падающей волной ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). При каком минимальном диаметре отверстия, проделанного в центре диска, интенсивность света в точке, находящейся за диском на оси симметрии на расстоянии $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, равна нулю?

6.20. В плоскопараллельной стеклянной пластинке с показателем преломления n , на которую нормально падает плоская волна, вырезано круглое отверстие размером в одну зону Френеля для некоторой точки P , лежащей на оси системы. Определить, при какой толщине пластиинки h интенсивность \mathcal{I} колебаний в точке P будет максимальной. Найти \mathcal{I}_{\max} , если в отсутствие пластиинки интенсивность равна \mathcal{I}_0 . Длина волны падающего света равна λ .

6.21*: Интенсивность света в некоторой точке на оси за отверстием в непрозрачном экране, на который нормально падает параллельный пучок монохроматического света, равна \mathcal{I}_0 , если в отверстии укладывается одна зона Френеля. С помощью векторной диаграммы найти интенсивность света в той же точке, если радиус отверстия уменьшить на $\alpha = 1/3$ первоначальной величины.

6.22. Параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$) интенсивностью \mathcal{I}_0 падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром 2 мм. 1) Найти расстояния b_1, b_2, \dots, b_m от экрана до точек P_1, P_2, \dots, P_m на оси отверстия, для которых в пределах отверстия укладывается 1, 2, …, m зон Френеля. 2) Построить приближенно график зависимости интенсивности света на оси отверстия от расстояния от точки наблюдения до экрана. 3) На сколько надо сместиться из точки P_1 , удаляясь от экрана, чтобы интенсивность света в новой точке наблюдения стала в два раза меньше, чем в точке P_1 ?

6.23. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью \mathcal{I}_0 падает нормально на непрозрачный экран в виде полуплоскости с вырезом на краю, имеющем форму полукруга (рис. 437). Найти интенсивность света в точке P , для которой граница выреза совпадает с границей 1-й зоны Френеля.

6.24. На белой стене наблюдается тень от прямолинейного края AB непрозрачного экрана, освещаемого параллельными монохроматическими лучами, падающими на экран перпендикулярно ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$). Плоскости стены и экрана параллельны, расстояние между ними $b = 4 \text{ м}$. На краю экрана выточено углубление, имеющее форму полукруга радиусом $r = 1 \text{ мм}$ (рис. 438). Как изменится интен-

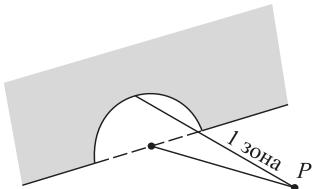


Рис. 437

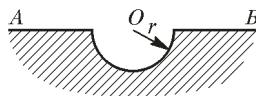


Рис. 438

сивность света в точке стены, являющейся геометрической тенью центра O соответствующего круга по сравнению с интенсивностью в той же точке, когда углубления не было?

6.25. Точечный источник света с двумя монохроматическими линиями $\lambda_1 = 660 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 440 \text{ нм}$ одинаковой интенсивности расположен на расстоянии $L = 1 \text{ м}$ от экрана. Перед экраном на расстоянии $a = 0,2 \text{ м}$ расположен прозрачный диск диаметром $D = 0,92 \text{ мм}$, вносящий фазовую задержку в π для обеих компонент, причем источник света, центры диска и экрана лежат на общей оси. Как отличаются интенсивности света в центре экрана при наличии и в отсутствие диска?

6.26. Точечный источник света с двумя монохроматическими линиями $\lambda_1 = 6600 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 4400 \text{ \AA}$ одинаковой интенсивности расположен на расстоянии $l = 1 \text{ м}$ от экрана. Перед экраном на расстоянии $b = 0,2 \text{ м}$ располагается непрозрачный лист с отверстием диаметром $D = 0,92 \text{ мм}$ так, что источник света, центры диска и экрана расположены на общей оси системы. Как отличаются освещенности в центре экрана при наличии и в отсутствие листа?

6.27. Между точечным источником и приемником излучения установлен непрозрачный экран с круглым отверстием, размер которого соответствует внешнему краю второй зоны Френеля. Всю систему заполняют водой, показатель преломления которой $n = 1,33$. Определить интенсивность излучения \mathcal{I} , которую зарегистрирует приемник, если известно, что в отсутствие экрана интенсивность была равна \mathcal{I}_0 .

6.28. Параллельный пучок монохроматического света нормально падает из воздуха на плоскую поверхность диэлектрика. Определить максимальную величину напряженности электрического поля в диэлектрике E_{\max} . Оценить расстояние l от поверхности диэлектрика до точки, в которой поле максимально. Диаметр светового пучка $D = 0,1$ см, длина световой волны в воздухе $\lambda = 0,5$ мкм, плотность потока мощности в падающем пучке $S = 1$ кВт/см², показатель преломления диэлектрика $n = 2$.

6.29. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм нормально падает на поверхность диэлектрика с показателем преломления $n = 2$. Поверхность диэлектрика покрыта черным (неотражающим) экраном, в котором имеется отверстие диаметром $D = 0,1$ см. На каком расстоянии l от поверхности диэлектрика (в воздухе) электрическое поле волны максимально? Принимая плотность потока мощности в падающей волне равной $S = 1$ кВт/см², определить максимальную величину напряженности электрического поля в воздухе E_{\max} .

6.30* На пути плоской световой волны с $\lambda = 0,54$ мкм поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 50$ см, непосредственно за ней — диафрагму с круглым отверстием, и далее на расстоянии $b = 75$ см от диафрагмы — экран. При каких радиусах отверстия центр дифракционной картины на экране имеет максимальную освещенность?

З а м е ч а н и е. Для сходящихся волновых пучков зоны Френеля строятся с вогнутой стороны сферической поверхности.

6.31. Перед тонкой линзой с оптической силой $D = 2,5$ дптр расположен непрозрачный экран с круглым отверстием $r = 1,1$ мм. На экран параллельно оптической оси падает пучок света с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Измеряется интенсивность света \mathcal{I}_1 в фокусе линзы, после этого линзу убирают и вновь измеряют интенсивность света \mathcal{I}_2 в той же точке. Найти отношение $\mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2$.

6.32. Источник света и точка наблюдения расположены на одинаковых расстояниях от круглого отверстия в непрозрачном экране. Радиус отверстия равен радиусу 1-й зоны Френеля. Интенсивность колебаний в точке наблюдения равна \mathcal{I}_0 . Найти интенсивность колебаний в точке наблюдения, если посередине между источником и экраном расположить без нарушений осевой симметрии тонкую собирающую линзу такую, что источник при этом оказывается в ее фокусе.

6.33. Точечный источник света и точка наблюдения P расположены симметрично на расстоянии $2L$ на оси круглого отверстия

в непрозрачном экране. Отверстие оставляет открытой одну зону Френеля для точки P . Во сколько раз изменится интенсивность света в точке P , если к отверстию без нарушения осевой симметрии приложить тонкую линзу с фокусным расстоянием $f = L$.

6.34* На длиннофокусную собирающую линзу с ирисовой диафрагмой падает параллельный пучок монохроматического света. На расстоянии a от линзы помещен экран, на котором наблюдаются дифракционные кольца. При каких радиусах диафрагмы центр колец будет темным и при каких светлым, если фокусное расстояние линзы равно f ?

6.35. Зонная пластинка дает изображение источника, удаленного от нее на 3 м, на расстоянии 2 м от своей поверхности. Где получится изображение источника, если его отодвинуть в бесконечность?

6.36. Определить фокусное расстояние f зонной пластинки для света с длиной волны 5000 Å, если радиус 5-го кольца этой пластинки равен 1,5 мм; определить радиус r_1 1-го кольца этой пластинки. Что произойдет, если пространство между зонной пластинкой и экраном заполнить средой с показателем преломления n ($n > 1$)?

6.37. Какова интенсивность света \mathcal{I} в фокусе зонной пластинки, если закрыты все зоны, кроме 1-й? Интенсивность света без пластинки равна \mathcal{I}_0 .

6.38. Какова интенсивность света \mathcal{I} в фокусе зонной пластинки, если закрыть всю пластинку, за исключением верхней половины 1-й зоны? Интенсивность света без пластинки равна \mathcal{I}_0 .

6.39. Зонная пластинка, вырезанная из стекла с показателем преломления n , представляет собой тело вращения, сечение которого

показано на рис. 439. Пластинка помещена в непрозрачную оправу. Радиусы ступенек $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 6$ мм. Толщина ступенек h одинакова. Определить максимальное фокусное расстояние f_{\max} пластинки для света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Указать, при какой толщине h интенсивность в фокусе будет наибольшей. Какой максимальный выигрыш в интенсивности будет давать такая система?

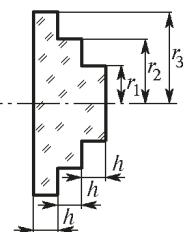


Рис. 439

6.40. Основное фокусное расстояние амплитудной плоской зонной пластинки равно f_0 . Найти ее остальные фокусные расстояния.

6.41. Овещенный предмет расположен на оси зонной пластинки на расстоянии a от нее. Самое дальнее от зонной пластинки изображение предмета получается на расстоянии b от нее. На каких расстояниях b_k от пластинки получаются остальные изображения предмета?

6.42* С помощью зонной пластинки нужно сфотографировать освещенный предмет с угловым размером $2\alpha = 0,1$ рад. Оценить число зон пластинки, при котором будет достигнута наибольшая четкость в изображении всех частей предмета.

6.43. Линза с фокусным расстоянием $f = 50$ см и диаметром $D = 5$ см освещается параллельным монохроматическим пучком света

с длиной волны $\lambda = 630$ нм. Найти, во сколько раз интенсивность волны \mathcal{I} в фокусе линзы превышает интенсивность волны \mathcal{I}_0 , падающей на линзу. Оценить размер b пятна в фокальной плоскости.

6.44. Зонная пластинка с радиусом 1-й зоны Френеля $r_1 = 0,5$ мм помещена перед отверстием в экране диаметром $D = 1$ см. Пластинка освещается параллельным монохроматическим пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и интенсивностью \mathcal{I}_0 . Определить интенсивность \mathcal{I} волны в фокусе пластиинки. Оценить размер b пятна в фокальной плоскости.

6.45* Требуется изготовить отражательную зонную пластинку на вогнутом сферическом зеркале кольцевыми зонами Френеля. Найти радиус m -й зоны r_m , если источник света и точка наблюдения расположены на оси зеркала на расстояниях a и b соответственно от его вершины, причем $a \leq R \leq b$, $r_m \ll a$, где R — радиус кривизны поверхности зеркала.

6.46* В предыдущей задаче $R = 100$ см, $a = 80$ см, $\lambda = 5000$ Å, радиус 4-й зоны Френеля $r_4 = 0,2$ см. Где будут расположены изображения S' источника нулевого и ± 1 -го порядков?

6.47. Зонная пластинка имеет такие же параметры, как и в предыдущей задаче. Источник монохроматического света ($\lambda = 5000$ Å) помещен в центре кривизны вогнутого зеркала, на котором она изготовлена ($a = R$). Пластинка дает два изображения ± 1 -го порядков в точках, отстоящих от зеркала на расстояния b_1 и b_2 , причем $b_1 - b_2 = R/10$. Найти радиус m -й зоны пластиинки.

6.48. Для измерения размеров малых светящихся частиц предложена схема, изображенная на рис. 440. Частица S и плоскость наблюдения P расположены на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы L с фокусным расстоянием $f = 25$ см. Перед линзой на некотором расстоянии L , которое может изменяться в процессе эксперимента, расположен экран \mathcal{E} с двойной щелью. Расстояние между щелями $d = 1$ см, ширина каждой щели $l = 2$ мм. Длина волны света $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Определить ширину интерференционных полос, наблюдавшихся на плоскости P , если экран расположен точно посередине между частицей S и линзой ($L = f$). Оценить, при каком значении L интерференционные полосы исчезнут, если размер частицы $b = 10^{-3}$ см.

6.49. Направленность излучения ультразвукового дальномера обеспечивается рупором конической формы длиной $a = 15$ см и диаметром выходного отверстия $D = 10$ см. Оценить, в каких пределах можно перестраивать излучаемую частоту, чтобы интенсивность волны, излучаемой в направлении оси рупора, изменялась бы не более чем

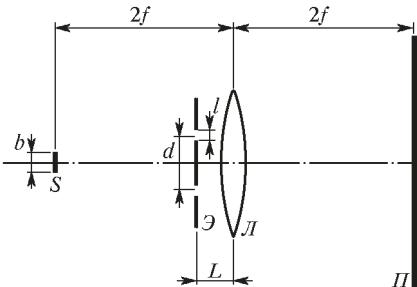


Рис. 440

в 2 раза. Средняя рабочая частота $v = 100$ кГц. Считать волну, распространяющуюся в рупоре, сферической. Скорость звука $v = 330$ м/с.

6.50. На пути сферической монохроматической волны, сходящейся в точке O , на расстоянии $z = R_0$ от точки O устанавливается экран с круглым отверстием (рис. 441). Размер отверстия таков, что при освещении экрана плоской волной с той же длиной волны на нем укладывалось бы три зоны Френеля для точки O . Найти интенсивность света в точке O , принимая интенсивность в плоскости экрана

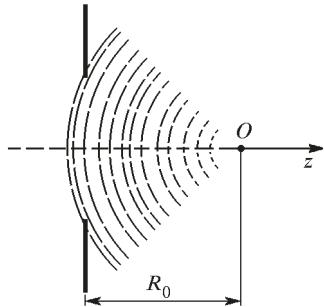


Рис. 441

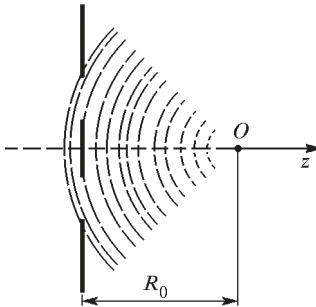


Рис. 442

равной \mathcal{I}_0 . Определить, при каких значениях z будут наблюдаться локальные минимумы интенсивности, если точку наблюдения удалять от точки O в область $z > R_0$.

6.51. На пути сферической монохроматической волны, сходящейся в точке O , на расстоянии $z = R_0$ от точки O устанавливается непрозрачный экран с кольцевым вырезом (рис. 442). При освещении этого экрана плоской волной с той же длиной волны экран оставлял бы открытыми 2-ю, 3-ю и 4-ю зоны Френеля для точки O . Найти интенсивность света в точке O , принимая интенсивность в плоскости экрана равной \mathcal{I}_0 . Определить, при каких значениях z будут наблюдаться локальные минимумы интенсивности, если точку наблюдения смешать от точки O в область $z < R_0$.

6.52. Точечный источник S монохроматического света с длиной волны λ , помещенный в фокусе линзы L с диаметром D и фокусным расстоянием f , создает на экране, отстоящем от линзы на расстояние $2f$, световое пятно с интенсивностью \mathcal{I}_0 (рис. 443). Найти интенсивность света \mathcal{I} в центре дифракционного пятна на экране, если источник отнести на расстояние $2f$ от линзы. Рассчитать отношение $\mathcal{I}/\mathcal{I}_0$ для случая $D = 5$ см, $f = 50$ см, $\lambda = 500$ нм.

6.53. Точечный монохроматический источник S и точка наблюдения P расположены симметрично на расстояниях L по обе стороны от экрана с круглым отверстием. Отверстие имеет наименьший диаметр, при котором интенсивность света в точке P равна нулю. В от-

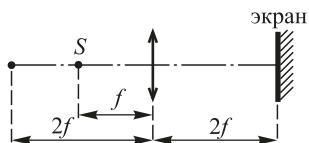


Рис. 443

198

существие экрана интенсивность света в точке P равна \mathcal{I}_0 . Источник света и точку наблюдения отодвинули от экрана в положения S' и P' (рис. 444). Какой будет интенсивность колебаний в точке P' ?

6.54. На прозрачный экран с круглым отверстием площадью в одну треть зоны Френеля (для данной точки наблюдения) нормально падает плоская монохроматическая волна. Зависимость коэффициента преломления материала экрана от длины волны λ имеет вид $n(\lambda) = 1 - \alpha\lambda$, где $\alpha = 1 \text{ мм}^{-1}$.

Определить минимальную толщину экрана, при которой интенсивность в выбранной точке наблюдения обращается в ноль.

6.55. Зонная пластинка Френеля с радиусом первой зоны $r_1 = 0,6 \text{ мм}$ создает изображение

удаленного протяженного объекта с угловым размером $\psi = 5,7^\circ$. Оценить максимальный размер пластинки, а также допустимую при этом размере относительную немонохроматичность света $\Delta\lambda/\lambda$, при которых изображение краев объекта остается достаточно резким (рис. 445).

6.56. Параллельный пучок света ($\lambda = 0,5 \text{ мкм}$) круглого сечения радиусом $R = 0,5 \text{ см}$ фокусируется линзой с фокусным расстоянием $F = 10 \text{ см}$ в точке A (рис. 446). На каком расстоянии L от точки A

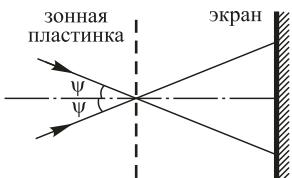


Рис. 445

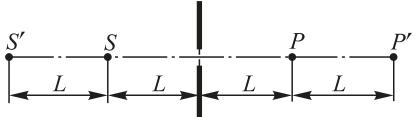


Рис. 444

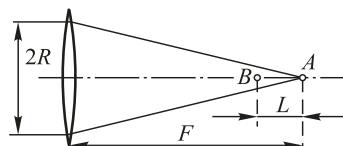


Рис. 446

расположена на оси линзы точка B , в которой наблюдается первый минимум интенсивности световой волны (оценка продольного размера фокального пятна).

6.57. Точечный источник S монохроматического света и точка (плоскость) наблюдения P расположены симметрично на расстоянии $2a$ на оси круглого отверстия в непрозрачной пластинке Π . Радиус отверстия равен радиусу 3-й зоны Френеля. Дифракционная картина, созданная в плоскости P , проецируется идеальной линзой L на экран \mathcal{E} (рис. 447а). Затем линзу вместе с экраном \mathcal{E} придвигают к отверстию так, что плоскость P' , сопряженная с экраном, оказывается перед отверстием (рис. 447б). При каком максимальном смещении (линзы вместе с экраном) в точке C' (в центре экрана) наблюдается темное пятно?

6.58. С помощью идеальной линзы L на экране \mathcal{E} получено изображение точечного источника S (см. рис. 448). Затем между источником

ником и линзой на расстоянии a от источника помещают (осесимметрично) непрозрачную пластинку с круглым отверстием. Линзу вместе с экраном \mathcal{E} смещают вправо. При каком минимальном сме-

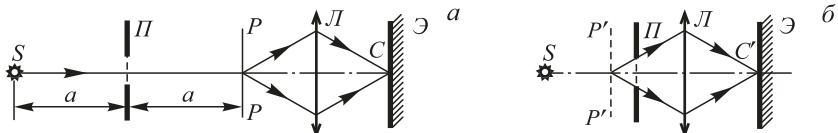


Рис. 447

щении в центре экрана (в точке O) возникает темное пятно? Радиус отверстия R , длина волны излучения λ , причем $R = \sqrt{\lambda}a$.

6.59. Наблюдается дифракция Френеля на оси круглого отверстия диаметром $D = 0,5$ см (рис. 449). Точка наблюдения P находится на расстоянии $l = 50$ см от плоскости экрана. Свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм и интенсивностью \mathcal{I}_0 падает на экран параллельным пуч-

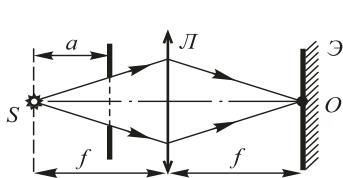


Рис. 448

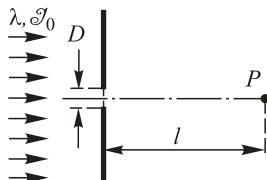


Рис. 449

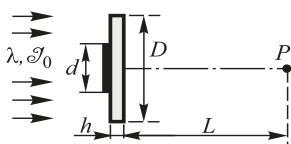
ком. Как изменится интенсивность света в точке наблюдения, если к экрану вплотную соосно приложить линзу с оптической силой 1 дптр?

6.60. В параллельный пучок радиоизлучения с длиной волны $\lambda = 3$ см (рис. 450) установили диск из диэлектрика с показателем преломления $n = 1,5$ и диаметром $D = 60$ см. В точке P , находящейся на оси диска на расстоянии $L = 1$ м от него, требуется получить нулевую интенсивность излучения. Для этого предлагается вплотную

к диску поместить соосно с ним круглую металлическую пластину. Каким надо взять диаметр d пластины? Какой при этом должна быть толщина h диска?

6.61. В параллельный пучок радиоизлучения с длиной волны $\lambda = 3$ см и интенсивностью \mathcal{I}_0 внесли диск из диэлектрика с показателем преломления $n = 1,5$, диаметром $D = 60$ см и толщиной $h = 2$ см (рис. 450). В точке P , находящейся на оси диска на расстоянии $L = 1,5$ м от него, расположен приемник излучения. Для повышения интенсивности излучения в точке P вплотную к диску приставили соосно с ним круглую металлическую пластину диаметром d . Определить этот диаметр, обеспечивший максимум интенсивности в данных условиях. Чему равен этот максимум \mathcal{I}_{\max} ?

Рис. 450



6.62. На зонную пластину Френеля для радиоволн с длиной волны $\lambda = 3$ см нормально падает монохроматическая волна с интенсивностью \mathcal{I}_0 . Пластина содержит чередующиеся прозрачные и непрозрачные кольцевые зоны Френеля для точки, находящейся на расстоянии $L = 1,0$ м от пластины. Радиус пластины $R = 60$ см. Определить интенсивность света на оси в фокусе пластины ($x_1 = L$) и на расстояниях $x_2 = L/2$ и $x_3 = L/3$ от пластины.

6.63. Плоскопараллельная прозрачная пластина толщиной d с показателем преломления n освещается параллельным нормально падающим пучком света с длиной волны λ и интенсивностью \mathcal{I}_0 . В пластинке просверлено маленькое отверстие в 1,5 зонах Френеля для точки наблюдения P , лежащей на оси отверстия (рис. 451a). Отверстие перегорожено непрозрачным диском. Найти изменение интенсивности в точке P , если диск заменить линзой, вставленной в отверстие так, что точка P оказывается в фокусе линзы (толщина линзы на краях равна нулю (рис. 451b)). При какой толщине пластины интенсивность в точке P максимальна? Найти \mathcal{I}_{\max} .

6.64. Амплитудная зонная пластина Френеля для радиоволн с длиной волны $\lambda = 3$ мм, состоящая из чередующихся прозрачных и непрозрачных зон Френеля, вставлена в отверстие в непрозрачном экране диаметром $D = 30$ см. Точечный источник S радиоволн и точка наблюдения P расположены симметрично относительно экрана на расстояниях $a = b = 150$ см (рис. 452). Радиусы зон Френеля пластины рассчитаны именно для этого расположения точек S и P . Интенсивность волн в плоскости экрана равна $\mathcal{I}_0 = A_0^2$. Определить интенсивности колебаний $\mathcal{I}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ в точке P для случаев: 0) начального положения точки S ; 1) при перемещении источника на расстояние $a_1 = a/3$ до экрана; 2) при перемещении источника на расстояние $a_2 = a/5$ до экрана.

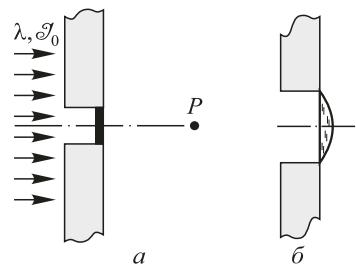


Рис. 451

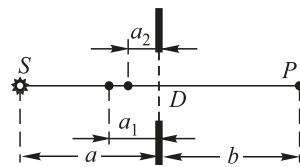


Рис. 452

§ 7. Дифракция Фраунгофера.

Разрешающая способность оптических инструментов

7.1. Параболическое зеркало диаметром $D = 1$ м используется как антenna для волн длины $\lambda = 3$ см. Оценить наименьшее расстояние L_{\min} , на котором следует поместить приемник для снятия диаграммы направленности.

7.2. Для измерения скорости частиц жидкости бесконтактным методом используется лазерный анемометр. Два когерентных лазер-

ных пучка с длиной волны излучения $\lambda = 0,63$ мкм и углом сходимости $\varphi = 2^\circ$ пересекаются в некоторой области жидкости, в которой небольшие взвешенные частички движутся со скоростью v (рис. 453). Определить скорость этих частиц, если известно, что при регистрации отраженного от них света частота колебаний тока фотоприемника Φ равна $v = 5,54$ кГц.

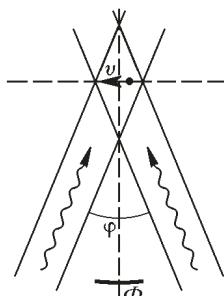


Рис. 453

7.3. Оценить, с какого расстояния L можно увидеть раздельно свет от двух фар автомобиля. 7.4. Пыль, взвешенная в воздухе, делает видимым узкий лазерный луч. Луч виден особенно хорошо, если смотреть почти навстречу ему в пределах угла приблизительно 10° . Объяснить явление и оценить размер b пылинок, если длина волны света 6300 \AA .

7.5. О зоркости хищных птиц ходят легенды. Оценить на основе дифракционных соображений, может ли орел, летающий над землей на высоте 1 км, разглядеть мышонка размером в 2 см.

7.6. Изображение точечного источника проецируется на экран с помощью тонкой линзы с малым апертурным числом двумя способами, реализуемыми при условии, что расстояние от источника до экрана в обоих случаях остается постоянным и равным $L = 4$ м. При этом фокусное расстояние линзы $f = 0,75$ м. Как относятся освещенности в центре дифракционного изображения в этих двух случаях?

7.7. Изображение точечного источника проецируется на экран с помощью тонкой линзы с малым апертурным числом двумя различными способами. В первом расстояние от источника до линзы равно

ее удвоенному фокусному расстоянию. Во втором это расстояние составляет $5/4$ фокусного расстояния линзы. Во сколько раз изменится освещенность в центре дифракционного изображения?

7.8. В интерферометре Майкельсона источником света служит круглая диафрагма S диаметром $d = 0,05$ мм, которая освещается параллельным пучком монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Длины плеч интерферометра $AB = 30$, $AC = 10$ см

(рис. 454). Интерференционная картина в виде концентрических колец наблюдается на экране \mathcal{E} , помещенном в фокальной плоскости линзы. Оценить число m интерференционных колец, наблюдаемых в пределах главного дифракционного максимума источника.

7.9. С искусственного спутника Земли, обращающегося по круговой орбите на расстоянии $h = 250$ км, проводится фотографирование земной поверхности. Разрешающая способность фотопленки

$N = 500$ линий/мм. Какими параметрами должен обладать объектив фотоаппарата (диаметр D , фокусное расстояние f), чтобы при фотографировании разрешались детали с линейными размерами $l \approx 1$ м?

7.10. С самолета, летящего на высоте $H = 5$ км, производится аэрофотосъемка местности. Какими следует выбрать фокусное расстояние f и диаметр объектива D фотоаппарата, чтобы сфотографировать объекты размером $l \approx 2,5$ см на фотопленку с разрешающей способностью $n = 500$ штрих/мм? На какое время τ следует открывать затвор фотоаппарата (экспозиция), чтобы движение самолета со скоростью $V = 360$ км/час не приводило к размытию изображения?

7.11. На щель шириной b положена стеклянная призма с показателем преломления n и преломляющим углом α . На грань AB призмы нормально падает плоская монохроматическая волна (рис. 455). Найти направления на нулевой максимум и минимум в дифракционной картине Фраунгофера.

7.12* Плоская световая волна падает нормально на абсолютно черный экран, размеры которого велики по сравнению с длиной волны. Часть энергии поглощается черным экраном, а часть рассеивается из-за дифракции. Показать, что количество поглощенной энергии равно количеству рассеянной.

7.13. Оценить минимально необходимую для локации Луны энергию δ световой вспышки рубинового лазера ($\lambda = 0,7$ мкм), если отражение луча осуществлялось 14 призмами, установленными на Луноходе-1. Каждая из призм отражает луч на угол 180° . Отражение от призмы рассматривать, как отражение от плоского зеркала диаметром $d = 6$ см. Посылка и прием луча осуществлялись телескопом Симеизской обсерватории. Диаметр зеркала телескопа $D = 2,6$ м. При приеме мог быть обнаружен сигнал, состоящий из двух фотонов.

7.14* Доказать, что при дифракции Фраунгофера интенсивности дифрагированного света от дополнительных экранов совпадают во всех направлениях, за исключением направления падающей волны (принцип Бабине). Дополнительными называются два экрана, у которых непрозрачные места одного экрана по форме и положению совпадают с отверстиями другого.

7.15* Точечный источник света находится на некотором расстоянии от щели шириной D . За щелью на расстоянии b от нее помещен экран, плоскость которого параллельна плоскости щели. Прямая, соединяющая источник света с серединой щели, перпендикулярна к плоскости экрана. Найти приближенное выражение для расстояния x между центральным максимумом и первым дифракционным минимумом на экране, считая, что углы дифракции малы. Найти условие применимости полученного приближенного выражения.

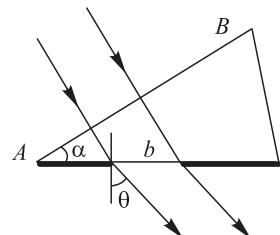


Рис. 455

7.16. Камера-обскура длиной $L = 10$ см с малым отверстием предназначена для фотографирования удаленных предметов. Оценить диаметр отверстия D камеры, при котором она имеет наибольшую разрешающую способность. Длина волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$.

7.17. Пучок фтористо-водородного лазера, работающего в одномодовом режиме на длине волны $\lambda = 3 \text{ мкм}$, формируется зеркалами диаметром $D = 3 \text{ м}$. На каком максимальном расстоянии L может находиться мишень, чтобы плотность потока энергии на ней была практически равна плотности потока на зеркале?

7.18. Оценить, во сколько раз отличаются напряженности электрического поля монохроматической волны $\lambda = 1 \text{ мкм}$ в фокусе сферического зеркала (диаметр $D = 10 \text{ см}$, радиус кривизны $R = 1 \text{ м}$) и на его входе.

7.19. Плоская волна проходит через стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 3/2$, падая на ее поверхность нормально (рис. 456). Толщина пластинки испытывает скачкообразное изменение на величину $b = 2\lambda/3$ вдоль прямой, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка. Найти интенсивность света в точке O , лежащей в плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка, если интенсивность света в этой точке в случае плоскопараллельной пластинки (т. е. при $b = 0$) равна \mathcal{I}_0 .

7.20. Плоская волна проходит через стеклянную пластинку с показателем преломления n , падая на ее поверхность нормально (рис. 456). Толщина пластинки испытывает скачкообразное изменение на величину b вдоль некоторой прямой, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка. При каких значениях b интенсивность света в точке O , лежащей в плоскости, проходящей

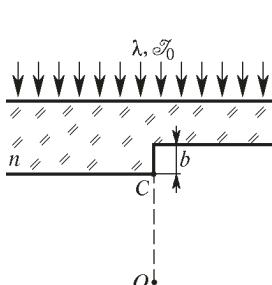


Рис. 456

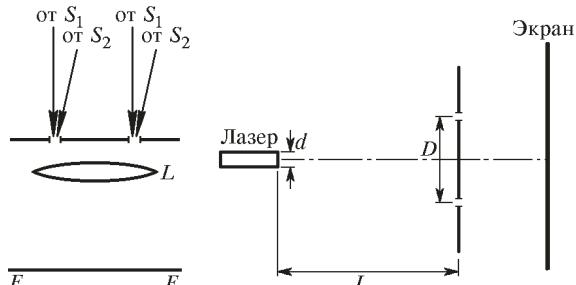


Рис. 457

Рис. 458

через точку C перпендикулярно плоскости рисунка, будет вдвое меньше интенсивности света в той же точке O в случае отсутствия уступа на пластинке? Длина волны падающего света равна λ .

7.21. Дифракционные полосы от двух одинаковых параллельных щелей наблюдаются в фокальной плоскости линзы L (рис. 457). S_1 и S_2 — бесконечно удаленные линейные источники монохроматического света, параллельные щелям. При каком угловом расстоянии

между S_1 и S_2 дифракционные полосы исчезнут, если расстояние между центрами щелей равно D и велико по сравнению с шириной щели и длиной световой волны λ ?

7.22. В установке, описанной в предыдущей задаче, источники S_1 и S_2 помещены в фокальной плоскости коллиматорной линзы с фокусным расстоянием f . При каком расстоянии x между S_1 и S_2 дифракционные полосы исчезнут?

7.23. На рис. 458 изображена схема интерференционного опыта Юнга, в котором используется явление дифракции света на двух щелях. В качестве источника света в схеме применен лазер, работающий на длине волны $\lambda = 6328 \text{ \AA}$. Пучок света на выходе лазера имеет плоский волновой фронт. Диаметр пучка $d = 2 \text{ mm}$. При каком расстоянии между щелями D возможно наблюдение интерференционной картины на экране, если расстояние от источника до двойной щели $L = 4 \text{ m}$?

7.24. Интерференционная схема Юнга (расстояние между щелями в непрозрачном экране $d = 1 \text{ cm}$) используется для оценки степени монохроматичности источника, излучающего в окрестности линии $\lambda = 500 \text{ nm}$. Оказалось, что при изменении ширины щелей от значения $b_1 = 0,5 \text{ mm}$ до $b_2 = 0,1 \text{ mm}$ число наблюдаемых полос возрастает вдвое (от $N_1 = 40$ до $N_2 = 80$). Оценить ширину спектра излучения $\Delta\lambda$. При этом надо иметь в виду, что плоскость наблюдения удалена в зону Фраунгофера и визуально наблюдаются лишь полосы, интенсивность которых составляет не менее 4% интенсивности нулевой полосы.

7.25* Диафрагма линзы имеет форму квадрата с длиной стороны D . Точечный монохроматический источник света помещается на главной оптической оси линзы. Найти распределение интенсивности света, получающееся в результате дифракции в плоскости изображения источника.

7.26. Дифракция Фраунгофера плоской волны на щели наблюдается в фокальной плоскости линзы. Во сколько раз изменится интенсивность в фокусе линзы, если щель накрыть плоскопараллельной пластинкой, амплитудный коэффициент пропускания которой имеет вид $\tau(x) = \sin(\pi x/a)$? Ось x направлена перпендикулярно щели, точки $x = 0$ и $x = a$ — координаты краев щели.

7.27. Найти картину дифракции Фраунгофера плоской монохроматической неполяризованной волны на длинной прямой щели шириной b , вдоль оси которой симметрично расположена длинная пластина из поляроида шириной $b/2$.

7.28. На щель шириной a нормально падает плоская волна с длиной волны λ . Щель закрыта двумя стеклянными пластинками шириной $a/2$ и толщиной h с показателями преломления n_1 и n_2 и коэффициентами пропускания (по интенсивности) τ_1 и τ_2 . Найти распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера. При каком условии в центре картины получается темная полоса?

7.29. Рассчитать и проанализировать дифракционную картину Фраунгофера при нормальном падении света на пилообразную ре-

шетку, сделанную из стекла с показателем преломления n (рис. 459). Число зубьев решетки равно N , $a \gg h$. Длина волны падающего света равна λ .

7.30. Плоская монохроматическая волна (длина волны λ) падает на плосковогнутую сферическую линзу диаметром $2\rho_0$ (рис. 460).

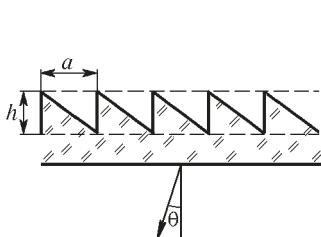


Рис. 459

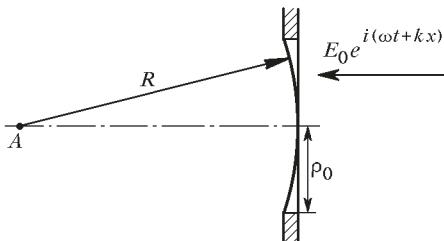


Рис. 460

Пространство вне линзы закрыто экраном. Вычислить интенсивность в точке A центра кривизны линзы, лежащей на оптической оси системы. При каких радиусах линзы $\rho_{0\max}$ интенсивность в точке A максимальна ($\rho_0 \ll R$)? Показатель преломления материала линзы n .

7.31. Цилиндрическая линза шириной D освещается параллельным пучком монохроматического света. Центральная часть линзы (рис. 461) перекрывается прозрачной полоской, вносящей фазовую

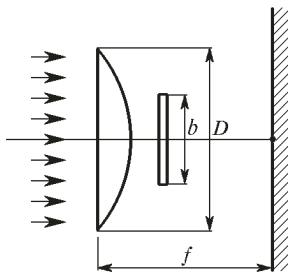


Рис. 461

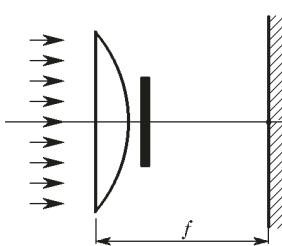


Рис. 462

задержку в π . Какова ширина полоски b , если центральный дифракционный максимум сузился вдвое? Во сколько раз изменилась при этом интенсивность в фокусе?

7.32. Цилиндрическая линза освещается параллельным пучком монохроматического света (рис. 462). Во сколько раз изменится интенсивность в фокусе и ширина центрального максимума, если центр линзы перекрыть непрозрачной полоской, ширина которой вдвое меньше ширины линзы? Как изменится световой поток в центральном максимуме?

7.33. Оценить, во сколько раз изменится угловое разрешение телескопа, если центральную часть его объектива закрыть непрозрачным экраном. Для простоты при оценке считать сечения объектива и экрана симметрично расположенными квадратами со сторонами D

и d соответственно. Каково максимальное возможное изменение разрешающей способности?

7.34* Оптическая система (труба или микроскоп) дает в качестве изображения светящейся точки систему дифракционных колец. Согласно Рэлею минимальное расстояние между двумя близкими точками, которые еще изображаются раздельно, определяется тем, что центральный светлый кружок от первой светящейся точки должен находиться на первое темное кольцо дифракционной картины, даваемой второй светящейся точкой. Ориентировочно можно принять, что глаз способен различить две близкие точки, если максимумы освещенности в местах их геометрических изображений превосходят интенсивность посередине между ними не менее чем на 15%. Приняв это, проверить, действительно ли при выполнении критерия Рэлея получатся раздельные изображения двух самосветящихся точек. См. также задачи 7.82 и 7.83.

Указание. Для простоты расчета принять, что диафрагма квадратная. В случае круглой диафрагмы результаты мало отличаются от тех, которые получаются для квадратной диафрагмы. (См. решение задачи 7.25.)

7.35* Решить предыдущую задачу в предположении, что изображаемые точки не самосветящиеся, а освещаются одним и тем же источником света. Например, можно взять два круглых отверстия в экране, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Рассмотреть качественно три случая: 1) отверстия освещаются пучком лучей, параллельных главной оптической оси; 2) отверстия освещаются параллельными лучами, но наклоненными к главной оптической оси; 3) отверстия освещаются диффузным светом. См. также задачи 7.82 и 7.83.

7.36. При аэрофотосъемке местности используется объектив с фокусным расстоянием $f = 10$ см и диаметром $D = 5$ см. Съемка производится на фотопленку, имеющую разрешающую способность $R = 100 \text{ мм}^{-1}$. Определить, какие детали местности могут быть разрешены на фотографиях, если съемка производилась с высоты $h = 10$ км.

7.37* Объектив телескопа имеет фокусное расстояние $f_1 = 3$ м и диаметр $D = 15$ см. Определить фокусное расстояние f_2 окуляра, при котором полностью используется разрешающая способность объектива, если диаметр зрачка глаза $d = 3$ мм. Предполагая, что в системе телескоп–глаз отсутствуют aberrации, оценить, на каком расстоянии L с помощью такого телескопа можно читать книгу с размером букв $b \approx 2$ мм.

7.38. Фотопленки способны разрешать до $z = 10^4$ линий/см. Какую светосилу (т. е. отношение квадратов диаметра D и фокусного расстояния f) должен иметь объектив фотоаппарата, чтобы полностью использовать разрешающую способность пленки?

7.39* Каково должно быть увеличение зрительной трубы, чтобы полностью использовать разрешающую способность ее объектива?

7.40. 1) Подсчитать разрешающую способность зрительной трубы с диаметром объектива 5 см. 2) При каком увеличении будет использована полная разрешающая способность этой трубы? Диаметр зрачка глаза $d = 5$ мм.

7.41. Вблизи станции Зеленчукская в астрономической обсерватории на северных отрогах Кавказского хребта расположен телескоп с диаметром зеркала $D = 6$ м. Найти разрешаемое им угловое расстояние $\delta\theta$ для длины волны $\lambda = 5500$ Å.

7.42. В чем выгода применения телескопов для рассматривания звезд, если они не дают увеличения по сравнению с невооруженным глазом?

7.43. В принципе можно построить телескоп сколь угодно высокой разрешающей способности без объектива, заменив объектив круглым отверстием. Какова должна быть длина L такого телескопа, чтобы он имел ту же разрешающую способность, что и обычный телескоп с диаметром объектива $D = 1$ м? Чему будет равна светосила S такого телескопа?

7.44. Производится фотографирование удаленных предметов с помощью объектива телескопа на фотопластинке, помещенной в его фокальной плоскости. Полученный снимок с помощью окуляра того же телескопа проецируется на удаленный экран. Каково должно быть угловое увеличение телескопа, чтобы при этом была использована полностью разрешающая способность объектива телескопа? Изображение на экране рассматривается с того места, где установлен проекционный аппарат. Диаметр зрачка глаза равен d .

7.45. Гальванометр имеет зеркальце диаметром $D = 5$ мм. Оценить (учитывая дифракционные эффекты), дальше какого расстояния L не следует отодвигать шкалу от гальванометра, если отсчеты с помощью зрительной трубы можно делать с точностью до $l = 0,5$ мм.

7.46. Какова должна быть минимальная длина отрезка на Луне и Солнце, чтобы его изображение в рефлекторе с диаметром зеркала 6 м можно было отличить от изображения точки?

7.47. Каково должно быть минимальное расстояние между двумя точками на поверхности Марса, чтобы их изображение в телескопе (рефракторе) с диаметром объектива 60 см можно было отличить от изображения одной точки? Считать, что Марс наблюдается в момент великого противостояния, когда расстояние до него от Земли минимально и составляет $56 \cdot 10^6$ км.

7.48. Космонавты прибыли на Луну. Чтобы сообщить об этом на Землю, они растягивают на поверхности Луны черный круглый тент. Каким должен быть радиус r этого тента, чтобы его можно было заметить с Земли в телескоп с объективом $D = 5$ м? Конрастная чувствительность приемника 0,01.

7.49. Блестящий металлический межпланетный корабль поперечного размера $d = 10$ м опустили на поверхность Луны в полнолуние. Оценить диаметр D зеркала телескопа, в который можно с Земли увидеть прибытие корабля, если контраст, надежно обнаруживаемый

глазом, равен $k = 0,15$. Считать коэффициент отражения лунной поверхности равным $\rho_1 = 0,1$, а металла — $\rho_2 = 1$; наблюдение ведется в свете с длиной волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$.

7.50* Луч лазера фокусируется идеальной оптической системой с отношением $f/D = 1$. Оценить мощность N лазера, при которой в электрическом поле в фокусе системы электроны смогут приобрести энергию порядка энергии покоя $m_0 c^2$. Как зависит N от длины волны λ ? Какое магнитное поле B будет при этом в фокусе?

7.51* Ракета удаляется от Земли и перестает быть видимой на фоне неба в телескоп с объективом диаметром $D_1 = 80 \text{ мм}$, когда она находится на расстоянии $L_1 = 2 \cdot 10^4 \text{ км}$ от Земли. На каком расстоянии L_2 от Земли удается заметить эту ракету в телескоп с объективом диаметром $D_2 = 200 \text{ мм}$ при той же контрастной чувствительности глаза?

7.52* Излучение лазера непрерывного действия на длине волны $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$ мощностью $N = 10 \text{ мВт}$ направляется на спутник с помощью телескопа, объектив которого имеет диаметр $D = 30 \text{ см}$. Свет, отраженный спутником, улавливается другим таким же телескопом и фокусируется на фотоприемник с пороговой чувствительностью $N_{\text{пор}} = 10^{-14} \text{ Вт}$. Оценить максимальное расстояние L_{\max} до спутника, на котором отраженный сигнал еще может быть обнаружен. Поверхность спутника равномерно рассеивает падающий свет с коэффициентом отражения $\rho = 0,9$. Диаметр спутника $d = 20 \text{ см}$.

7.53. Оценить расстояние L , с которого можно увидеть невооруженным глазом свет лазера, генерирующего в непрерывном режиме мощность $N = 10 \text{ Вт}$ на частоте $v = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$, если для формирования луча используется параболическое зеркало диаметром $D = 50 \text{ см}$. Глаз видит источник в зеленой части спектра, если в зрачок (диаметр зрачка $d = 5 \text{ мм}$) попадет $n = 60$ квантов в секунду.

7.54. В фокальной плоскости объектива телескопа помещена фотопластиника. Освещенность изображения звезды на фотопластинке в $\alpha = 10$ раз меньше освещенности дневного неба. Во сколько раз надо увеличить диаметр объектива, чтобы освещенность изображения звезды на фотопластинке стала в $\beta = 10$ раз больше освещенности изображения неба?

7.55. При наблюдении в телескоп с нормальным увеличением освещенность изображения звезды на сетчатке глаза в $\alpha = 10$ раз меньше освещенности дневного неба, рассматриваемого в тот же телескоп. Во сколько раз надо увеличить диаметр объектива для того, чтобы освещенность изображения звезды на сетчатке стала в $\beta = 10$ раз больше освещенности изображения неба, если вместе с объективом телескопа заменён и окуляр таким образом, что увеличение телескопа осталось нормальным?

7.56* Каково должно быть увеличение микроскопа, чтобы полностью использовать разрешающую способность его объектива?

7.57. Проволочная сетка, ячейки которой имеют форму квадратов, проецируется собирающей линзой на экран. В задней фокальной

плоскости линзы помещена узкая щель. Как будет меняться картина на экране при вращении щели вокруг главной оптической оси линзы? Как изменится картина при увеличении ширины щели (опыты Аббе)?

7.58. С помощью объектива микроскопа получена микрофотография малого объекта (например, растительных клеток или бактерий) с линейным увеличением N . Тот же объектив был использован для проецирования полученной микрофотографии на удаленный экран. Каково должно быть минимальное значение увеличения N , чтобы полностью использовать разрешающую способность микроскопа? Диаметр апертурной диафрагмы объектива равен D , диаметр зрачка глаза d . Изображение на экране рассматривается с места нахождения объектива.

7.59. Определить минимальное разрешаемое расстояние δ микроскопа при наилучших условиях освещения для: 1) безыммерсионного объектива с числовой апертурой $a = 0,9$; 2) того же объектива, но с масляной иммерсией ($n = 1,6$). Длина волны при визуальных наблюдениях $\lambda = 5500 \text{ \AA}$. См также задачу 7.56.

7.60. Интерференционные кольца Ньютона получены при отражении рассеянного монохроматического света ($\lambda = 600 \text{ nm}$) от поверхности линзы с радиусом кривизны $R = 60 \text{ cm}$ и плоского зеркала. Наблюдение колец проводится с помощью микроскопа с малой апертурой. При какой апертуре микроскопа u возможно наблюдение максимального числа колец? Каково при этом число наблюдаемых колец?

7.61. Почему для увеличения разрешающей способности эмиссионного электронного микроскопа необходимо создавать очень сильное электрическое поле у катода? В эмиссионном микроскопе объективом является нагретый катод. Оценить напряженность электрического поля у катода для того, чтобы: 1) разрешающая способность эмиссионного микроскопа достигла разрешающей способности наилучших световых микроскопов; 2) превысила ее в 100 раз. Температуру катода считать равной 1000°C .

7.62. Каково должно быть фокусное расстояние f_2 окуляра микроскопа, чтобы была полностью использована разрешающая способность объектива? Числовая апертура объектива равна $n \sin a$, фокусное расстояние объектива f_1 , длина тубуса (трубы микроскопа) l . Длину тубуса можно считать равной расстоянию между объективом и плоскостью первого изображения (т. е. изображения, даваемого объективом).

7.63. С помощью объектива телескопа с диаметром D и фокусным расстоянием f производится фотографирование удаленных объектов на мелкозернистой пластинке, помещенной в фокальной плоскости объектива. Полученное изображение рассматривается в микроскоп с числовой апертурой $n \sin a$ и увеличением N . Каким условиям должны удовлетворять числовая апертура и увеличение микроскопа, чтобы полностью использовать разрешающую способность объектива телескопа?

7.64. Угловая апертура электронного микроскопа $\Omega_{\text{эл}} = 10^{-4}$, а оптического — $\Omega_{\text{опт}} \approx 1$. Оценить напряжение U , ускоряющее электроны, при котором разрешающая способность этих приборов будет одинакова.

7.65. Оценить длительность τ светового импульса от одной грани 8-гранного врачающегося зеркала, расположенного на расстоянии $L = 200$ м от точечного источника света S . Световой импульс регистрируется фотоумножителем с малой шириной входной щели, расположенным вблизи источника (рис. 463). Ширина грани зеркала $a = 1$ см. Длина волны света $\lambda = 500$ нм. Зеркало вращается с частотой $v = 16$ Гц.

7.66. Изображения микродеталей, лежащих на черной подложке, проецируют с большим увеличением на экран. Одна деталь (более темная) имеет диаметр $d_1 = 50$ мкм, другая (более светлая) рассеивает в $k = 5$ раз большую долю падающего света и имеет диаметр $d_2 = 2$ мкм. Оценить отношение средних освещенностей изображений этих двух деталей. Применяется объектив, диаметр которого $D = 1$ мм, а фокусное расстояние $f = 20$ мм; длина волны используемого света $\lambda = 0,5$ мкм.

7.67. Первый зеркальный телескоп, созданный И. Ньютоном, имел диаметр объектива $D_1 = 5$ см и фокусное расстояние $f_1 = 15$ см. Канадский инженер Э. Борра пытался организовать создание телескопа, в котором зеркалом служила бы поверхность вращающейся в сосуде воды. Предполагаемые параметры объектива: $D_2 = 30$ м и $f_2 = 100$ м. Оценить, во сколько раз должны отличаться средние освещенности изображений звезды Бетельгейзе, полученные в фокальных плоскостях объективов этих телескопов? Угловой диаметр звезды $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-7}$ рад. Коэффициент отражения зеркала телескопа Ньютона $k_1 \sim 1$, а для поверхности воды $k_2 = 0,02$. Длину волны принять равной $\lambda = 0,6$ мкм.

7.68. На край плоского полубесконечно-го прозрачного экрана нормально падает плоская квазимонохроматическая волна. Зависимость коэффициента преломления материала экрана от частоты v имеет вид $n(v) = 1 - \beta/v$, где $\beta = 3 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$. Определить, при какой толщине d экрана интенсивность прошедшего света равна нулю в любой точке плоскости, перпендикулярной к экрану и проходящей через его край.

7.69. Тонкие стеклянные плоскопараллельные пластины собраны в стопу, представляющую собой «лестницу» (рис. 464). Такая структура в оптике называется эшелоном. Высоты ступенек одинаковы и равны d , показатель преломления стекла n . На эшелон нормально па-

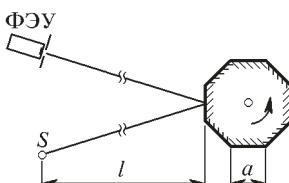


Рис. 463

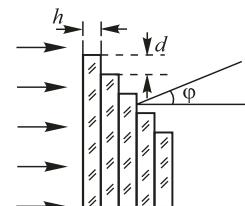


Рис. 464

дает параллельный пучок света с длиной волны λ . Наблюдается дифракционная картина Фраунгофера в прошедшем свете. Известно, что два наиболее ярких дифракционных максимума имеют одинаковые интенсивности. Определить возможные значения толщины пластин h .

7.70. Комету с угловым размером $\psi = 10^{-5}$ рад фотографируют через телескоп с объективом диаметром $D = 100$ см. Оценить во сколько раз изменится интенсивность света в центре изображения, если объектив закрыть экраном с отверстием диаметром $d = 1$ см. Длину волны света принять равной $\lambda = 0,5$ мкм.

7.71. В интерференционном опыте Юнга свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм от далекого источника падает на диафрагму с двумя узкими щелями шириной $D = 0,05$ мм, отстоящими друг от друга на расстояние $d = 1$ мм. Интерференционная картина наблюдается на экране, расположенным на расстоянии $L = 2$ м от щелей. Оценить:

1) число интерференционных полос, которые можно наблюдать при точечном монохроматическом источнике в главном дифракционном максимуме;

2) допустимый угловой размер источника ψ ;

3) допустимую немонохроматичность $\Delta\lambda$ для наблюдения всех интерференционных полос.

7.72. При измерении угловых размеров удаленных источников методом Физо перед объективом телескопа, имеющим фокусное расстояние F , устанавливается экран с двумя параллельными щелями шириной b , расположенными на расстоянии d друг от друга. Рассчитать распределение интенсивности $\mathcal{I}(x)$ в фокальной плоскости объектива для случая точечного источника, испускающего свет длиной волны λ , и определить, сколько интерференционных полос можно наблюдать в пределах главного дифракционного максимума.

7.73. На рис. 465а изображена модифицированная схема опыта Юнга. Источником света служит щель шириной a , на которую сфокусировано изображение протяженного источника. На экран с двумя щелями шириной b каждая, расположенными на расстоянии d друг от друга, свет падает параллельным пучком. Интерференционная картина наблюдается в фокальной плоскости второй линзы. Длина волны $\lambda = 600$ нм, фокусные расстояния линз $F_1 = F_2 = F = 20$ см. Интерференционная картина $\mathcal{I}(\phi)$ изображена на рис. 465б.

1) Определить ширину b каждой из двух щелей.

2) Определить расстояние d между щелями.

3) Принимая видность интерференционных полос равной $V = 2/\pi \approx 0,64$, определить ширину щели a .

4) Оценить максимальное значение ширины щели a , при котором еще можно наблюдать интерференционные полосы.

5) Оценить максимально допустимую немонохроматичность света $\Delta\lambda$, при которой можно наблюдать все интерференционные полосы, изображенные на рис. 465б.

7.74. Параллельный монохроматический пучок света проходит через диафрагму, а затем фокусируется линзой. Во сколько раз уве-

личится напряженность поля электромагнитной волны в фокальной плоскости линзы, если площадь диафрагмы увеличить вдвое?

7.75. Лазерный пучок ($\lambda = 0,532 \text{ мкм}$) диаметром $D = 2,5 \text{ мм}$ фокусируется линзой с фокусным расстоянием $F = 25 \text{ см}$. Оценить продольные и поперечные размеры области фокальной перетяжки пучка.

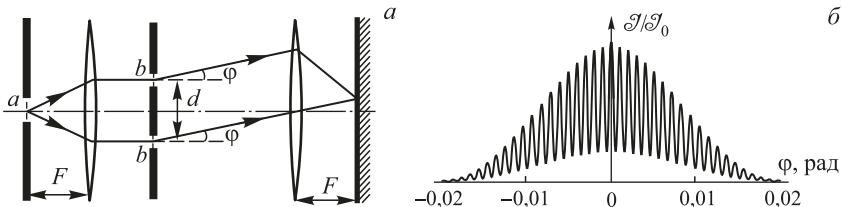


Рис. 465

ка. В качестве длины перетяжки принять расстояние, на котором в приближении геометрической оптики радиус пятна равен радиусу перетяжки.

7.76* В отверстие непрозрачного экрана вставлена длиннофокусная линза, изготовленная из диэлектрика в форме диска толщиной $h = 0,5 \text{ см}$. Показатель преломления материала изменяется от $n_0 = 1,5$ в центре диска до $n = 1,1$ на краю диска. Линза освещается параллельным пучком излучения с длиной волны $\lambda = 1 \text{ мкм}$. Оценить, во сколько раз напряженность электрического поля E в фокусе такой линзы превышает напряженность поля E_0 в падающей волне? Поглощением и отражением от границ диэлектрика пренебречь.

7.77. В Германии создана установка, представляющая собой мощный импульсный лазер, смонтированный на грузовике, с телескопом для расширения лазерного пучка и спектрографом. Сфокусированное лазерное излучение может вызывать пробой воздуха на значительном расстоянии от установки, и по спектру излучения искры можно дистанционно определять загрязнение воздуха в недоступных точках. Найти пороговую энергию лазерного импульса, необходимую для осуществления пробоя воздуха на расстоянии $L = 1 \text{ км}$, если диаметр лазерного пучка после телескопа $D = 0,5 \text{ м}$, распределение интенсивности излучения по сечению пучка вблизи телескопа прямоугольное, длина волны излучения $\lambda = 1 \text{ мкм}$, длительность импульса $\tau = 10 \text{ нс}$, расходимость лазерного излучения близка к дифракционной. Воздух пробивается, если амплитуда электрического поля в световой волне достигнет значения $E = 10^7 \text{ В/см}$.

7.78. Существовал проект (так и не реализованный) выведения из строя электроники вражеских самолетов путем подачи на корпус самолета по плазменному шнуру высоковольтного импульса от высокой мачты, на которую подано напряжение $\sim 1 \text{ МВ}$. Плазменный шнур должен был создаваться за счет пробоя воздуха мощным сфокусированным лазерным излучением, предварительно расширенным телескопом для уменьшения расходимости (рис. 466). Оценить

необходимый диаметр D объектива телескопа, чтобы инициировать пробой воздуха на расстоянии $L = 3$ км, если длительность лазерного импульса $\tau = 100$ мкс, энергия $W = 100$ кДж, длина волны $\lambda = 1000$ нм, расходимость обусловлена только дифракцией, а пробой наступает при амплитуде электрического поля волны $E_0 = 10^7$ В/см. Считать, что лазерное излучение полностью заполняет объектив телескопа, то есть распределение интенсивности по сечению пучка вблизи телескопа близко к прямоугольному.

7.79. В радиолокации благодаря использованию модуляционной техники удается превзойти критерий Рэлея по угловому разрешению антенны. Рассмотрим упрощенную схему радиолокатора метрового диапазона, предназначенного для точного определения азимута цели (т. е. углового положения в горизонтальной плоскости). Излучающая антenna состоит из двух вертикальных вибраторов, расположенных на одной высоте и отстоящих друг от друга на расстояние $d = 2\lambda$ (рис. 467 a). К вибраторам подводится быстропеременное напряжение

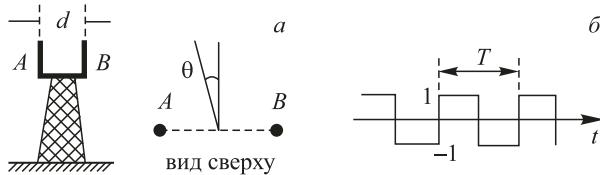


Рис. 467

на радиочастоте ω от одного и того же высокочастотного генератора, но фаза одного из напряжений периодически изменяется: $E_A = E_0 \cos \omega t$, $E_B = E_0 \cos (\omega t + \frac{n}{2} f(t))$, где $f(t)$ — знакопеременная функция некоторого периода $T \gg 2\pi/\omega$ (рис. 467 b). При этом возникает модуляция диаграммы направленности системы. Направление $\theta = 0$ является «равносигнальным». Если цель находится в этом направлении, то отраженный сигнал, принимаемый приемной системой радиолокатора, не будет модулирован. Модуляция отраженного сигнала возникает при смещении цели от направления $\theta = 0$.

Рассмотреть случай малого отклонения цели от направления $\theta = 0$ и: 1) найти глубину модуляции отраженного сигнала. 2) Пусть приемная система радиолокатора способна обнаружить сигнал с глубокой модуляцией $m \geq 10^{-2}$. Определить предельное угловое разрешение радиолокатора и сравнить с критерием λ/d .

7.80. Плоская волна длиной λ падает на фазовую решетку с периодом $d \gg \lambda$ (рис. 468), изготовленную из стекла с показателем преломления n с симметричным профилем штриха. Определить значение угла $\alpha \ll 1$ при основании штриха, чтобы в распределении интенсив-

ности поля во фраунгоферовой зоне отсутствовал дифракционный максимум нулевого порядка.

7.81. Положение летящего самолета определяется радиолокатором, излучающим импульсы длительностью 3 мкс. Диаметр антенны $D = 4$ м. С какой точностью можно определить высоту полета самолета, если расстояние до самолета $l = 100$ км, длина волны радиоизлучения $\lambda = 10$ см. При каком размере антенны достигается минимальная погрешность в определении высоты и какова эта точность?

7.82. На рис. 469 показана картина интенсивности $\mathcal{I}(x)$, возникающая в плоскости изображения двух некогерентных точечных источников. Изображения источников расположены симметрично относительно оси оптической системы на расстоянии друг от друга $\Delta x = 2x_0$, соответствующем пределу разрешения по Рэлею. Известно, что «провал» в суммарной картине интенсивности $\mathcal{I}(x)$ (в точке $x = 0$ на оси оптической системы) составляет примерно 20% от максимальной интенсивности \mathcal{I}_{\max} (т. е. от интенсивности в точках x_0 и $-x_0$, где возникает «геометрическое» изображение источников): $\mathcal{I}_0 = 0,8\mathcal{I}_{\max}$. Будет ли заметен «провал», по которому судят, согласно критерию Рэлея, о наличии двух источников, если заменить некогерентные источники одинаковыми когерентными источниками, излучающими с разностью фаз $\phi = \pi/3$ и расположенными на том же расстоянии Δx друг от друга?

- 1) Определить в этом случае отношение $\mathcal{I}(0)/\mathcal{I}_{\max} = \mathcal{I}(0)/\mathcal{I}(x_0)$.
- 2) При какой разности фаз ϕ провал в суммарной картине интенсивности отсутствует, т. е. $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}(x_0)$?

7.83. Два одинаковых некогерентных точечных источника S_1 и S_2 находятся в «предметной плоскости» на расстоянии z от объектива диаметром D (симметрично относительно оси оптической системе-

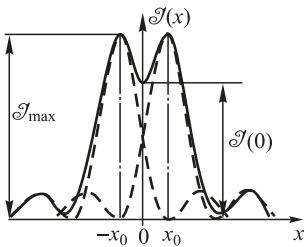


Рис. 469

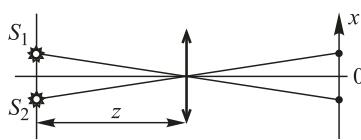


Рис. 470

мы, см. рис. 470). На рис. 469 показана картина интенсивности $\mathcal{I}(x)$ в плоскости изображения (оптически сопряженной с предметной плоскостью). Источники S_1 и S_2 находятся на пределе разрешения по Рэлею, т. е. на расстоянии друг от друга $\Delta x = 1,22\lambda z/D$. Известно, что «провал» в суммарной картине интенсивности $\mathcal{I}(x)$ (в точке $x = 0$ на оси оптической системы) составляет примерно 20% от мак-

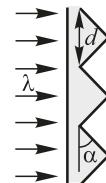


Рис. 468

симальной интенсивности \mathcal{I}_{\max} (т. е. от интенсивности в точках x_0 и $-x_0$, где возникает «геометрическое» изображение источников): $\mathcal{I}_0 = 0,8\mathcal{I}_{\max}$. Как изменится отношение $\mathcal{I}(0)/\mathcal{I}(x_0)$, если заменить некогерентные источники когерентными синфазно излучающими источниками, находящимися на том же расстоянии Δx друг от друга? Как изменится это отношение, если источники излучают с разностью фаз $\pi/2$?

§ 8. Спектральные приборы

8.1. Какую разрешающую силу должен иметь спектральный аппарат для разрешения дублета D -линии натрия ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$)?

8.2. Найти величину наименьшего основания призмы b , изготовленной из стекла, дисперсия которого вблизи D -линии натрия $dn/d\lambda = 956 \text{ см}^{-1}$, чтобы призма смогла разрешить желтый дублет натрия ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$).

8.3*: Спектрограф имеет стеклянную призму с основанием $a = 10 \text{ см}$ и преломляющим углом $A = 60^\circ$, устанавливаемую при работе на угол наименьшего отклонения вблизи длины волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$. Показатель преломления стекла призмы $n = 1,73$; фокусное расстояние объектива коллиматора $f = 25 \text{ см}$. Какова должна быть ширина коллиматорной щели b , чтобы можно было практически полностью использовать теоретическую разрешающую способность призмы?

8.4*: Найти угловое распределение интенсивности света при франгоферовой дифракции на решетке из N щелей с периодом d при условии, что световые лучи падают на решетку нормально, а ширина щели равна b .

8.5*: Дополнительными (или взаимно дополнительными) дифракционными решетками называются такие щелевые решетки, у которых непрозрачные места одной решетки совпадают с прозрачными в другой. Убедиться непосредственным расчетом, что при освещении таких решеток одним и тем же световым пучком положения и интенсивности главных дифракционных максимумов одного и того же порядка совпадают, за исключением главных максимумов нулевых порядков. Если же число штрихов решетки очень велико, то совпадают также интенсивности дифрагированного света для всех направлений, за исключением направления падающего света.

8.6. Параллельный пучок монохроматического света падает на дифракционную решетку с заданной полной шириной ее штрихованной поверхности. При каком значении отношения b/d ширины щели b к периоду решетки d интенсивность главных дифракционных максимумов 2-го порядка максимальна?

8.7*: Показать, что для обычной амплитудной щелевой дифракционной решетки справедливо неравенство $\mathcal{I}_{\text{диф}} \leq \mathcal{I}_{\text{пад}}/4$, где $\mathcal{I}_{\text{пад}}$ — полный поток энергии, падающий на решетку, $\mathcal{I}_{\text{диф}}$ — поток энергии дифрагированного света, приходящийся на все дифракционные

максимумы, кроме максимума нулевого порядка. Максимальное значение дифрагированного потока энергии достигается в случае, когда ширина щелей решетки равна половине ее периода.

8.8. Найти угловое распределение дифракционных минимумов при дифракции на решетке, период которой равен d , а ширина щели равна b .

8.9. Найти условие появления главного дифракционного максимума при наклонном падении лучей на решетку (угол падения θ_0). Какой вид принимает это условие, если $d \gg \lambda$, а порядок спектра $m \ll d/\lambda$?

8.10. Пучок рентгеновских лучей падает на решетку с периодом 1 мкм под углом $89^\circ 30'$. Угол дифракции для спектра второго порядка равен 89° . Найти λ .

8.11. Найти условие равенства нулю интенсивности m -го максимума для дифракционной решетки с периодом d и шириной щели b .

8.12. Описать характер спектров дифракционной решетки, если ее постоянная d равна: 1) удвоенной; 2) утроенной; 3) у четырехкратной ширине щели b .

8.13. Какой максимальный порядок спектра может наблюдаться при дифракции света с длиной волны λ на решетке с периодом d ?

8.14. Определить длину волны спектральной линии, изображение которой, даваемое дифракционной решеткой в спектре 3-го порядка, совпадает с изображением линии $\lambda = 4861 \text{ \AA}$ в спектре 4-го порядка.

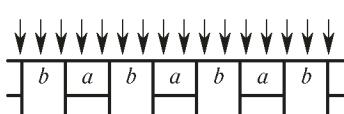


Рис. 471

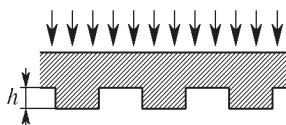


Рис. 472

8.15. Чем определяется максимальная длина волны, которая может получиться в спектре дифракционной решетки? Определить постоянную, которую должна иметь решетка, способная давать инфракрасный спектр с длинноволновой границей 100 мкм.

8.16* При каком условии можно наблюдать зеркальное отражение от шероховатой поверхности при малых и больших углах падения?

8.17. Могут ли перекрываться спектры 1-го и 2-го порядков дифракционной решетки при освещении ее видимым светом ($7000 \div 4000 \text{ \AA}$)?

8.18. На одномерную фазовую дифракционную решетку (рис. 471) нормально падает плоская монохроматическая волна. На участках a и b оптические пути равны соответственно $l_1 = n_1 z_1$ и $l_2 = n_2 z_2$ (n_1 и n_2 — показатели преломления, z_1 и z_2 — соответствующие толщины). Как меняются интенсивности дифракционных максимумов и соответствующие им углы дифракции при $n_1 \rightarrow n_1$ и $z_1 \rightarrow z_2$?

8.19. Прозрачная периодическая структура, профиль которой изображен на рис. 472, освещается сверху плоской монохроматиче-

ской волной, падающей нормально на верхнюю границу. Ширина уступов и впадин структуры одинакова. При заданном показателе преломления n подобрать глубину h таким образом, чтобы главные фраунгоферовы дифракционные максимумы 1-го порядка имели наибольшую интенсивность. Какова при этом интенсивность нулевого главного максимума?

8.20. На одномерную дифракционную решетку со щелями (рис. 473) падает плоская монохроматическая волна. Щели b решетки совсем прозрачные, а участки a имеют коэффициент пропускания α . Как меняются интенсивности дифракционных максимумов и соответствующие им углы дифракции, когда $\alpha \rightarrow 1$?

8.21. На дифракционную решетку нормально падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ . Решетка имеет N щелей шириной b и периодом d . Найти угловое распределение интенсивности света за решеткой, если закрыть центральную ее

часть непрозрачным экраном так, что по краям решетки открытыми остаются по n щелям. Нарисуйте (качественно) график зависимости интенсивности \mathcal{I} от $\sin \theta$.

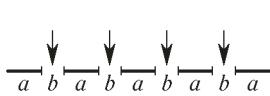


Рис. 473

($d = 2b$), нормально падает плоская монохроматическая волна. Найти долю энергии падающей волны, рассеянную в нулевой и в каждый из вторых и первых порядков ($d = 10\lambda$).

8.23. Дифракционная решетка шириной $a = 3$ см с числом штрихов $N = 10^4$ освещается параллельным пучком света от натриевой

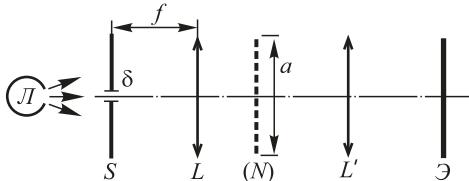


Рис. 474

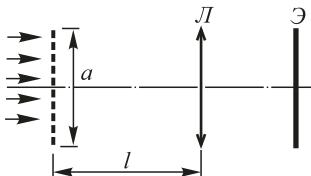


Рис. 475

лампы L . Пучок формируется с помощью щели S шириной $\delta = 0,05$ мм, помещенной в фокусе линзы L с фокусным расстоянием $f = 10$ см (рис. 474). Далее следует стандартное фраунгоферово расположение. В каком порядке спектра на экране \mathcal{E} может быть разрешен желтый дублет натрия (588,996 и 589,593 нм)?

8.24. Дифракционная решетка шириной a освещается параллельным пучком света от натриевой лампы, при этом $a\delta\lambda \gg \lambda^2$, где λ — средняя длина волны, а $\delta\lambda$ — расстояние между линиями дублета. Далее на расстоянии l помещена линза L диаметром D , а в ее фокальной плоскости — экран наблюдения (рис. 475). Какому условию должно удовлетворять расстояние l , чтобы желтый дублет натрия (588,996 и 589,593 нм) разрешался на экране?

8.25. Спектр некоторого вещества в видимой области содержит ряд спектральных линий в диапазоне от 400 нм до 600 нм с минимальной разницей длин волн $\delta\lambda = 0,5 \text{ \AA}$. Спектр изучается с помощью достаточно большой дифракционной решетки с периодом $d = 0,01 \text{ мм}$. С помощью линзы спектр проецируется на экран, расположенный в ее фокальной плоскости, и рассматривается затем невооруженным глазом с расстояния наилучшего зрения ($L = 25 \text{ см}$). Определить минимальные значения диаметра линзы D и ее фокусного расстояния f , при которых наблюдатель может разглядеть все линии спектра. Диаметр зрачка глаза принять равным $d_{\text{зр}} = 0,5 \text{ см}$.

8.26* Над центром изношенной граммофонной пластинки помещен точечный источник света на высоте $h_1 = 1 \text{ см}$. Глаз наблюдателя, расположенный на расстоянии $a = 110 \text{ см}$ от оси пластинки и на высоте $h_2 = 10 \text{ см}$, видит помимо геометрического изображения источника систему дифракционных полос на поверхности пластинки. Определить расстояние Δx между ними, если расстояние между бороздками $d = 0,5 \text{ мм}$. Длина волны $\lambda = 5500 \text{ \AA}$.

8.27. 1) Найти угловую дисперсию в угл. с/Å в спектре 1-го порядка для решетки, имеющей 3937 штрихов/см. 2) Найти линейную дисперсию спектрографа с такой решеткой при объективе с фокусным расстоянием 50 см. 3) Найти величину, обратную линейной дисперсии [Å/mm]. При расчете считать, что углы дифракции малы ($\cos\theta \approx 1$).

8.28. Какое расстояние между компонентами желтой линии дублета натрия ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$) получится на фотографическом негативе в спектрографе, описанном в предыдущей задаче?

8.29. Найти угловую дисперсию решетки с постоянной $d = 5 \text{ мкм}$, если $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, порядок спектра $n = 3$.

8.30. На плоскую отражательную решетку нормально падает свет D -линии натрия ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$). Определить число штрихов решетки на 1 мм, если спектр 2-го порядка наблюдается под углом 45° к нормали.

8.31. Найти угловое расстояние между главным максимумом и ближайшим к нему минимумом дифракционной решетки.

8.32. Подсчитать минимальное число штрихов решетки, которая может разрешить натриевый дублет в спектре 1-го порядка.

8.33. Подсчитать разрешающую способность решетки с периодом $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ и шириной 3 см в спектрах 1-го и 4-го порядков.

8.34. Изменяется ли разрешающая способность решетки при изменении наклона первичного пучка, падающего на нее?

8.35. Изменяется ли разрешающая способность и дисперсионная область дифракционной решетки, если, закрепив неподвижно трубу, в которую наблюдаются дифракционные спектры, закрыть через одну щели решетки?

8.36. Какова полуширина спектральной линии водорода ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$) на негативе спектрографа, если в нем использована решетка шириной $l = 3 \text{ см}$ и объектив с фокусным расстоянием $f = 15 \text{ см}$?

8.37. Коллиматорная щель S , освещаемая источником света, помещается в главном фокусе линзы L с фокусным расстоянием $f = 20$ см. Пройдя через линзу, свет падает на дифракционную решетку, плоскость которой перпендикулярна к главной оптической оси линзы L . Число штрихов решетки $N = 1000$, ее период $d = 0,001$ см. Какова должна быть ширина коллиматорной щели b , чтобы была полностью использована разрешающая способность решетки в окрестности длины волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$?

8.38* Свет от газоразрядной трубы, диаметр которой $D = 1$ см, непосредственно падает на дифракционную решетку, расположенную на расстоянии $L = 100$ см. Оценить, какой будет в этих условиях максимальная разрешающая способность $R_{\max} = \lambda/\delta\lambda$.

8.39. Свет от газоразрядной трубы, диаметр которой $D = 0,1$ см, непосредственно падает на дифракционную решетку. Оценить, на каком минимальном расстоянии L_{\min} от трубы нужно расположить решетку, чтобы при этом можно было разрешить две спектральные линии с расстоянием между ними $\delta\lambda = 5$ нм при $\lambda = 500$ нм.

8.40. Свет от удаленного источника, угловой размер которого составляет $\psi = 10^{-3}$ рад, непосредственно падает на дифракционную решетку. Оценить, какую максимальную разрешающую способность R_{\max} можно получить в таких условиях.

8.41. Удаленный протяженный источник испускает две узкие спектральные линии $\lambda_1 = 500$ нм и $\lambda = 500,2$ нм равной интенсивности. Свет от источника непосредственно падает на дифракционную решетку. Оценить угловой размер ψ источника, при котором можно разрешить эти две линии.

8.42. Наблюдается дифракция параллельного пучка монохроматического излучения с частотой $v = 10^{15}$ Гц, падающего нормально на дифракционную решетку с числом штрихов $N = 1,5 \cdot 10^4$. Во сколько раз изменится угловая расходимость в 1-м порядке, если падающее на решетку излучение промодулировать так, чтобы были сформированы короткие импульсы длительностью $\tau = 10^{-12}$ с?

8.43* Дифракционная решетка с числом штрихов $N = 10^5$ имеет заводской дефект: ее период на разных участках неодинаков и изменяется в пределах 0,1%. Можно ли с помощью такой решетки обнаружить простой эффект Зеемана в магнитном поле с индукцией $B = 10^4$ Гс на длине волны $\lambda = 600$ нм? Найти минимальное расстояние между линиями, которое может разрешить такая решетка.

8.44. Для дифракционной решетки с числом штрихов $n = 500$ штрих/мм предел разрешения в спектре 1-го порядка равен $\delta\lambda = 0,1$ нм при средней длине волны $\lambda = 600$ нм. Изображение спектра получается с помощью линзы на экране. Определить минимальный допустимый диаметр D_{\min} линзы, при котором изображение спектра может быть разрешено.

8.45. Параллельный пучок импульсного лазера с длительностью импульсов 1 пс падает нормально на дифракционную решетку с высоким разрешением. Излучение, дифрагированное под углом 45° к оси

падающего пучка, регистрируется быстродействующим фотоприемником, установленным в фокусе удаленного от решетки объектива диаметром 3 см. Оценить длительность импульсов, регистрируемых фотоприемником. Считать, что оптическая плоскость объектива установлена перпендикулярно оси дифрагированного пучка, разрешение определяется дифракцией на объективе.

8.46. Импульсное излучение с длительностью импульсов 1 пс и длиной волны $\lambda = 0,53$ мкм падает на дифракционную решетку с разрешающей способностью $R = 3400$. Оценить отношение длительности импульсов за решеткой к длительности падающих импульсов.

8.47. Излучение неодимового лазера с длиной волны $\lambda = 1,06$ мкм представляет собой последовательность ультракоротких импульсов, следующих с интервалом $\tau = 1$ нс. Излучение падает нормально на решетку с числом штрихов $n = 1500$ штрих/см. Каков минимальный размер L решетки, с помощью которой можно разрешить структуру спектра излучения во 2-м порядке дифракции?

8.48. Ультрафиолетовое излучение состоит из двух близких спектральных линий ($\lambda \approx 300$ нм, $\delta\lambda = 0,1$ нм). Излучение падает под углом $\alpha = 86^\circ$ к нормали на отражательную дифракционную решетку с периодом $d = 4$ мкм. Оценить диаметр падающего пучка лучей, при котором возможно разрешение спектральных линий во 2-м дифракционном порядке. В каком порядке (+2 или -2) это возможно?

8.49. С помощью оптического затвора из параллельного пучка света, содержащего смесь двух монохроматических компонент $\lambda_1 = 500$ нм

и $\lambda_2 = 510$ нм, выделен короткий импульс длительностью $\tau = 5 \cdot 10^{-13}$ с. Импульс последовательно дифрагирует на двух одинаковых отражательных решетках, после чего распространяется в направлении, параллельном исходному (рис. 476). При каком расстоянии L между решетками длительность импульса на выходе увеличится вдвое? (Период решетки $d = 5 \cdot 10^{-4}$ см; выделяется 1-й порядок дифракции.)

8.50. Два коротких совмещенных во времени импульса света со средними длинами волн $\lambda_1 = 0,55$ мкм и $\lambda_2 = 0,56$ мкм нормально падают на отражательную дифракционную решетку ($d = 2 \cdot 10^{-4}$ см). Дифрагированный в первый порядок свет попадает на вторую такую же решетку, параллельную первой, на которой снова дифрагирует в направлении, параллельном исходному. На сколько по времени сместятся импульсы разных длин волн друг относительно друга, если расстояние между решетками $l = 50$ см?

8.51. Найти период d отражательной дифракционной решетки σ , если входная щель A и выходная щель B спектрального прибора

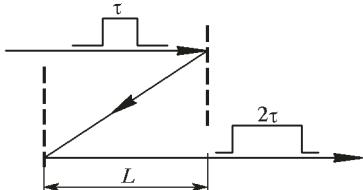


Рис. 476

(рис. 477) расположены на окружности радиусом $R = 1$ м, центр которой совпадает с центром решетки M . На щель A последовательно направляют пучок СО-лазера (длина волны излучения $\lambda_1 = 5$ мкм) и пучок СО₂-лазера ($\lambda_2 = 10$ мкм). При этом 2-й порядок продифрактировавшего пучка СО-лазера возвращается во входную щель, а 1-й порядок продифрактировавшего пучка от СО₂-лазера падает на выходную щель. Расстояние от выходной щели до нормали MD к решетке a равно 0,5 м.

8.52. Импульсное излучение лазера с длительностью импульсов $\tau = 10^{-12}$ с проходит через спектрометр с дифракционной решеткой с максимальной оптической разностью хода $\Delta = 10$ см. Найти изменение ширины полосы излучения $\Delta\omega_2/\Delta\omega_1$.

8.53. Лазер испускает световые импульсы с центральной длиной волны 0,6 мкм с длительностью 1 пс и скважностью (отношение периода повторения импульсов к длительности каждого из них) 10^3 .

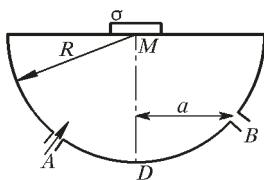


Рис. 477

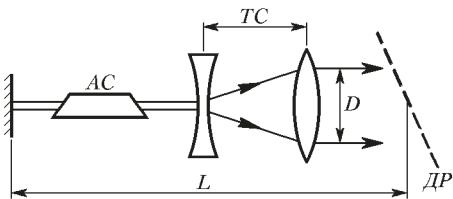


Рис. 478

Это излучение пропускается через монохроматор с разрешающей способностью $5 \cdot 10^4$. Оценить скважность импульсов Q на выходе из монохроматора.

8.54* Электрон движется в вакууме со скоростью v вблизи поверхности дифракционной решетки с периодом d . Скорость электрона параллельна поверхности решетки и перпендикулярна ее штрихам. Определить длины волн, которые могут излучаться под углом θ к нормали решетки из-за взаимодействия электрона с решеткой (эффект Смита-Парселла).

8.55. Одним из условий стабильности дифракционной картины, полученной с помощью дифракционной решетки, является постоянство температуры. Оценить максимально допустимое изменение температуры ΔT решетки, при котором еще практически полностью используется ее разрешающая способность, если фотографирование спектров ведется в 1-м порядке. Температурный коэффициент линейного расширения материала решетки $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, полное число штрихов $N = 10^5$.

8.56* Для выделения одной моды из большого числа мод, генерируемых газовым лазером, предлагается использовать модифицированный резонатор Фабри-Перо, одно из зеркал которого заменено наклонной отражательной дифракционной решеткой DR (рис. 478). Внутри резонатора располагается наряду с активной средой AC телескопическая система TC , предназначенная для расширения светового

вого пучка, падающего на решетку. Найти минимальный размер D , до которого нужно расширить пучок, чтобы было можно выделить одну моду. Длина резонатора равна $L = 15$ см, длина волны генерации $\lambda = 1,2$ мкм, решетка имеет $N = 1600$ штрих/мм. Используется дифракция в 1-м порядке.

8.57. Для сужения спектра излучения лазера на красителе, имеющего широкий спектр в окрестности длины волн $\lambda = 600$ нм, одно из зеркал резонатора заменено дифракционной решеткой, нормаль к которой составляет угол $\varphi = 60^\circ$ к оси резонатора. Определить ширину спектра $\delta\lambda$ излучения такого лазера, если диаметр кюветы с красителем $D = 0,5$ см. См. также задачи 8.56 и 8.58.

8.58. Для сужения спектра излучения лазера на красителе, имеющего широкий спектр в окрестности длины волн $\lambda = 600$ нм, внутри резонатора устанавливается призма P под углом минимального отклонения (рис. 479). Оценить спектральную ширину $\delta\lambda$ излучения такого лазера, если призма изготовлена из стекла, имеющего дисперсию $dn/d\lambda = 1000 \text{ с}^{-1}$ в окрестности длины волны генерации, а преломляющий угол $\alpha = 10^\circ$. В резонаторе лазера установлена также диафрагма диаметром $d = 0,5$ см. См. также задачи 8.56 и 8.57.

8.59* Для наблюдения дифракции рентгеновских лучей узкий пучок их падает на кристалл или (при скользящем падении) на дифракционную решетку. Дифракционная картина фиксируется на фотопластинке без какой бы то ни было фокусировки. На каком расстоянии l_F от кристалла надо установить фотопластинку, чтобы на ней наблюдалась дифракционная картина Фраунгофера, если ширина пучка падающих рентгеновских лучей $h = 1$ мм, а длина волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$? На опыте фотопластинку устанавливают на расстоянии нескольких сантиметров или десятков сантиметров, а для вычисления направлений на дифракционные максимумы пользуются формулами фраунгоферовой дифракции. Приняв во внимание вычисленное значение для l_F , объяснить, почему можно поступать таким образом.

8.60* Имея в виду решение предыдущей задачи, получить выражение для разрешающей способности (одномерной) дифракционной решетки в рентгеновской области спектра.

8.61. Рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 2,8 \text{ \AA}$ дифрагирует на кристалле каменной соли, испытывая отражение от ряда кристаллических плоскостей под углом $\varphi = 30^\circ$ к нормали. Толщина кристалла $L = 0,56$ мм. Определить угловую расходимость дифракционного максимума.

8.62. На дифракционную решетку с числом штрихов $n = 100$ штрих/см падает плоская монохроматическая волна ($\lambda_0 = 1$ мкм), частота которой начинает медленно изменяться со временем по закону $\omega = \omega_0(1 + at)$. За решеткой расположена линза

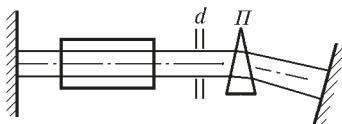


Рис. 479

с фокусным расстоянием $f = 100$ см. Оценить время, в течение которого положение 6-го максимума в фокальной плоскости достигнет положения 5-го в начальный момент времени. Известно, что максимум интенсивности перемещается вдоль фокальной плоскости со скоростью $v = 100$ м/с.

8.63. Монохроматический плоский пучок света с длиной волны $\lambda = 600$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 5$ мкм. Определить относительное изменение частоты света,

продифрагировавшего во второй порядок, если решетка движется с постоянной скоростью $v = 500$ см/с параллельно своей плоскости.

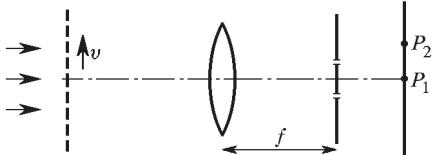


Рис. 480

Решетка перемещается со скоростью $v = 0,5$ см/с в направлении, указанном на рис. 480. В фокальной плоскости линзы установлена фильтрующая маска, пропускающая лишь 1-й и -1 -й порядки дифракции. Какова частота изменения тока фотоприемника, установленного в точке P_1 плоскости изображения? Как изменится частота, если используются ± 2 -е порядки дифракции? Чем отличаются токи фотоприемников, установленных в точках P_1 и P_2 ?

8.65. На плоскую отражательную решетку, содержащую $N = 50000$ штрихов, нормально падает свет от двойной линии натрия ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$). Плотность штрихов $n = 5000$ штрих/мм. Какой максимальный порядок спектра m можно получить от такой решетки и каково минимальное расстояние $\delta\lambda$ между спектральными линиями, которое способна разрешить решетка в указанной области спектра? Спектр максимального порядка фотографируется на фотопластинке с помощью объектива с фокусным расстоянием $f = 50$ см. Какое расстояние Δx между спектральными линиями λ_1 и λ_2 получится на фотопластинке?

8.66* Стеклянная призма с основанием $b = 10$ см изготовлена из тяжелого флинта, дисперсия которого в окрестности $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ равна $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$. Какую максимальную разрешающую способность может иметь дифракционная решетка, ширина заштрихованной части которой равна длине основания этой призмы? Сравнить разрешающую способность такой решетки с разрешающей способностью призмы.

8.67. Ширина заштрихованной части дифракционной решетки равна длине основания призмы из каменной соли. Разрешающая способность решетки в 1-м порядке равна разрешающей способности призмы для длины волны $\lambda = 5150 \text{ \AA}$. Определить период решетки d , если показатель преломления каменной соли для длины вол-

ны $\lambda_1 = 4861 \text{ \AA}$ равен $n_1 = 1,5537$, а для длины волны $\lambda_2 = 5461 \text{ \AA}$ $n_2 = 1,5477$.

8.68. Параллельный пучок света падает на призму с угловой дисперсией $d\phi/d\lambda = 10^3 \text{ см}^{-1}$. Свет, прошедший через призму, нормально падает на дифракционную решетку с периодом d . Размер решетки превышает поперечное сечение пучка лучей, выходящих из призмы. При каком значении d разрешающая способность системы в спектре 2-го порядка будет в два раза больше разрешающей способности одной призмы? Считать дифракционные углы малыми.

8.69. Определить угловую дисперсию и дисперсионную область пластинки Луммера–Герке с учетом дисперсии показателя преломления. Считать угол ϵ между выходящим лучом и поверхностью пластинки малым.

8.70. Каково число N интерферирующих лучей в пластинке Луммера–Герке длиной $L = 30 \text{ см}$, толщиной $h = 1 \text{ см}$ и с показателем преломления $n = 1,52$?

8.71. Какую минимальную длину L должна иметь пластинка Луммера–Герке ($n = 1,5$), чтобы разрешить дублетную структуру линий H_α ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$)? Разность длин волн линий дублета равна $0,14 \text{ \AA}$. Пренебречь величиной $dn/d\lambda$.

8.72. Какой должна быть длина b основания стеклянной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, как и пластинка Луммера–Герке длиной $L = 20 \text{ см}$? Показатель преломления пластинки $n = 1,5$; дисперсия показателя преломления призмы $dn_{\text{пр}}/d\lambda = 956 \text{ см}^{-1}$; длина волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$.

8.73. При нормальном падении на плоскопараллельную пластинку из непоглощающего материала параллельного пучка монохроматического излучения, длина волны которого перестраивается непрерывно, коэффициент пропускания пластинки «осциллирует» так, что его соседние максимумы приходятся на длины волн в 720 мкм , 840 мкм и т. д. Найти показатель преломления материала пластинки, если ее толщина $d = 1,2 \text{ мм}$.

8.74. Определить условие максимума, угловое расстояние между максимумами, угловую дисперсию и дисперсионную область эталона Фабри–Перо (ввести угол падения ϕ и расстояние между зеркалами L).

8.75. Определить дисперсионную область эталона Фабри–Перо при $h = 1 \text{ см}$, $\lambda = 5000 \text{ \AA}$. Угол падения ϕ считать малым.

8.76. Чему равен порядок спектра при работе с эталоном Фабри–Перо в зеленой части спектра ($\lambda = 5500 \text{ \AA}$), если расстояние между пластинками равно 1 см ? Угол падения очень мал.

8.77* Разрешающую способность интерферометра Фабри–Перо можно определить, пользуясь следующим критерием. Для разрешения двух спектральных линий λ и λ' необходимо, чтобы в интерференционной картине, даваемой интерферометром, эти линии были разведены на расстояние не меньше полуширины линий. Пользуясь этим критерием, найти выражение для разрешающей способности интерферометра Фабри–Перо.

8.78. Зеркала интерферометра Фабри–Перо, имеющие коэффициент отражения $\rho = 99\%$ (по интенсивности), расположены на расстоянии $L = 1$ м друг от друга. Эталон используется в качестве оптического резонатора на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм. Пользуясь аналогией с колебательным контуром, определить добротность резонатора и ширину $\Delta\nu$ резонансной кривой (в мегагерцах). Определить также частотный интервал $\Delta\nu$ между двумя соседними резонансами.

8.79. Излучение точечного монохроматического источника ($\lambda = 5000$ Å) проходит через резонатор Фабри–Перо (расстояние между зеркалами $L_1 = 25$ см). Каково минимальное расстояние L_2 между зеркалами второго резонатора (рис. 481), если после его установки

вслед за первым первые девять колец в фокальной плоскости линзы исчезают? Каков радиус первого оставшегося кольца? Фокусное расстояние линзы $f = 100$ см.

8.80* С помощью интерферометра Фабри–Перо исследуется выделенный системой фильтров участок спектра шириной $\Delta\lambda =$

$= 0,2$ нм. Минимальная разность длин волн соседних спектральных линий $\delta\lambda = 0,001$ нм. Оценить максимальное значение коэффициента пропускания $T = 1 - \rho$ (где ρ – коэффициент отражения зеркал по энергии), при котором разрешаются соседние линии.

8.81. Определить время установления колебаний и добротность в оптическом резонаторе, используемом в лазерах (длина волны излучения $\lambda = 0,63$ мкм) и состоящем из двух плоскопараллельных зеркал, расположенных на расстоянии $L = 100$ см друг от друга и имеющих коэффициент отражения по энергии $\rho_1 = 100\%$ и $\rho_2 = 80\%$. Явлениями дифракции на краях зеркал пренебречь.

8.82. В интерферометре Фабри–Перо среда между зеркалами обладает дисперсией. При изменении длины волны света λ на величину $\Delta\lambda$ наблюдаемые интерференционные кольца сдвигаются так, что каждое кольцо перемещается на место соседнего кольца. Предполагая, что база интерферометра $L \gg \lambda$, вычислить дисперсию показателя преломления среды $dn/d\lambda$.

8.83* Определить разрешающую способность спектрометра инфракрасного диапазона, работающего по следующему принципу. Излучение исследуемого ИК-источника в диапазоне $\lambda_{\text{ик}} \approx 3$ мкм смешивается в нелинейном кристалле с излучением стабильного аргонового лазера. При этом возникает излучение на суммарной частоте, лежащей в оптическом диапазоне. Последнее анализируется с помощью интерферометра Фабри–Перо, зеркала которого отстоят друг от друга на расстояние $L = 1$ см и имеют коэффициент отражения по интенсивности $\rho = 0,9$.

8.84* В интерферометре Фабри–Перо с открытым воздушным промежутком между зеркалами при температуре $T_1 = 293$ К наблюдается одно из колец равного наклона, угловой размер которого $\varphi_1 = 0,01$ рад. При повышении температуры кольцо стягивается к центру и исчезает. Найти температуру T_2 , при которой это произойдет, если для воздуха при температуре T_1 разность $n - 1 = 0,00029$, где n — показатель преломления. (Для воздуха разность $n - 1$ пропорциональна его плотности.)

8.85. Интерферометр Фабри–Перо образован двумя зеркалами с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 0,9$, разделенными кольцом из инвара толщиной $d = 100$ мм. Интерференционная картина фиксируется на фотопластинке. Оценить допустимое изменение температуры в лаборатории за время экспонирования, если коэффициент линейного расширения инвара $\alpha = 9 \cdot 10^{-7} \text{ К}^{-1}$. Длина волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$.

8.86. Интерферометр Фабри–Перо образован двумя зеркалами с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 0,95$, разнесенными на расстояние $L = 10$ мм. Интерференционная картина фиксируется на фотопластинке. Оценить величину допустимых изменений атмосферного давления в лаборатории за время экспозиции. Показатель преломления воздуха связан с атмосферным давлением P (в паскалях) соотношением $n = 1 + 28 \cdot 10^{-10}P$. Длина волны света $\lambda = 5000 \text{ \AA}$.

8.87. На интерферометр Фабри–Перо, состоящий из двух одинаковых зеркал диаметром $D = 1$ см, падает свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Интерференционная картина наблюдается с помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность, и имеет вид концентрических колец. Первое кольцо имеет угловой радиус $\varphi = 10^{-2}$ рад. Оценить максимальную разрешающую способность спектрального прибора в этих условиях.

8.88. На интерферометр Фабри–Перо, состоящий из двух одинаковых зеркал, падает пучок света с длиной волны $\lambda \approx 0,5$ мкм. Интерференционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы диаметром $D = 2,5$ см с фокусным расстоянием $f = 10$ см и имеет вид концентрических колец. Первое кольцо имеет диаметр $d = 1$ см. Оценить максимальную разрешающую способность спектрального прибора в этих условиях.

8.89. Интерферометр Фабри–Перо состоит из двух одинаковых плоских зеркал с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 0,95$, расположенных на некотором расстоянии L друг от друга. На интерферометр нормально падает плоская волна, содержащая две спектральные компоненты $\lambda_1 = 546,740$ нм и $\lambda_2 = 546,768$ нм. При изменении L интерферометр последовательно настраивается на пропускание одной из спектральных компонент (λ_1 или λ_2). Оценить минимальное L_{\min} и максимальное L_{\max} значения, при которых интерферометр способен отделить одну спектральную компоненту от другой.

8.90. Излучение гелий-неонового лазера анализируется с помощью интерферометра Фабри–Перо. Спектральная линия излучения лазера совпадает с серединой линии поглощения неона на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм. Оказалось, что пустой интерферометр Фабри–Перо в этих условиях имеет разрешающую способность $R_0 = 10^8$. Если пространство между зеркалами интерферометра заполнить разреженным неоном, то разрешающая способность падает до значения $R_1 = 0,8 \cdot 10^8$. Определить, какую часть энергии излучения поглощает неон на длине $l = 1$ м.

8.91. На резонатор Фабри–Перо с расстоянием между зеркалами (базой) $L = 0,5$ см и разрешающей способностью $R = 10^6$ падает ультракороткий световой импульс длительностью $\tau = 10^{-11}$ с и длиной волны $\lambda = 500$ нм. Определить зависимость от времени сигнала, который зарегистрирует фотоприемник, установленный за резонатором Фабри–Перо.

8.92* Плоский пучок монохроматического света шириной D падает нормально на плоский резонатор Фабри–Перо. Оценить добротность резонатора Q , при которой диаметр пучка на выходе резонатора возрастает приблизительно в 3 раза. Длина волны падающего света отвечает максимуму пропускания резонатора.

8.93. Спектр лазерного импульса анализируется с помощью интерферометра Фабри–Перо, образованного зеркалами с коэффициентами отражения по энергии $\rho \sim 1$, находящимися на расстоянии L друг от друга. Оценить длительность импульса после прохождения через интерферометр.

8.94. Найти максимальную и минимальную амплитуды колебаний поля *внутри* резонатора Фабри–Перо, настроенного в резонанс с нормально падающей монохроматической волной амплитудой A_0 . Коэффициент отражения зеркал по интенсивности $\rho = 0,95$. Поглощением света пренебречь.

8.95. Оценить разрешающую способность интерферометра Фабри–Перо, если отношение максимальной и минимальной амплитуд колебаний поля *внутри* интерферометра, освещаемого плоской нормально падающей волной ($\lambda = 600$ нм), равно $\alpha = A_{\max}/A_{\min} = 90$. Расстояние между зеркалами $L = 4$ см.

8.96. На испаряющуюся прозрачную пленку нормально падает излучение лазера с длиной волны $\lambda = 630$ нм. Контроль толщины пленки осуществляется путем измерения интенсивности прошедшего излучения, которая периодически изменяется в процессе испарения, так что $\mathcal{I}_{\min}/\mathcal{I}_{\max} = 0,84$. Пренебрегая поглощением света в пленке, определить, при какой минимальной толщине интенсивность прошедшего света достигает максимального значения.

8.97. На подложке осаждается прозрачная пленка, контроль толщины которой производится путем измерения доли (по энергии) отраженного назад излучения лазера с длиной волны $\lambda = 0,63$ мкм. По мере роста пленки эта доля осциллирует, принимая минимальное

значение, равное $2 \cdot 10^{-2}$. Какова толщина пленки в эти моменты? Излучение падает нормально к поверхности пленки. Коэффициент отражения на границе пленка–подложка (по амплитуде) $s = -1/7$. Рассмотреть двулучевое приближение.

8.98. Импульс видимого света длительностью τ падает на интерферометр Фабри–Перо параллельно его оси и затем фокусируется на чувствительную площадку фотоприемника. Расстояние между зеркалами интерферометра $L = 15$ см, коэффициент отражения зеркал по энергии $\rho = 0,99$. Оценить, при каком значении величины τ в фототоке возникнут осцилляции, имеющие затухающий характер. Оценить частоту осцилляции v , характерное время T затухания и число N колебаний фототока за время T . Инерционность фотоприемника считать достаточно малой.

8.99. Видимый свет от квазимохроматического источника с шириной спектральной линии $\Delta\nu = 109$ Гц падает на интерферометр Фабри–Перо параллельно его оси и затем фокусируется на чувствительную площадку фотоприемника (рис. 482). Оценить значение расстояния L между зеркалами интерферометра и их коэффициент отражения по энергии ρ , чтобы в фототоке можно было зарегистрировать осцилляции за время измерения $T \approx 10^{-7}$ с. Считать, что время реакции фотоприемника на изменение интенсивности света не превышает 10^{-9} с.

8.100. В гелий–неоновом лазере ($\lambda = 630$ нм) используется оптический резонатор Фабри–Перо с коэффициентом отражения зеркал по энергии $\rho = 0,99$. Длина резонатора $l = 10$ см. Известно, что в некотором сечении внутри резонатора пучок лучей имеет плоский фазовый фронт, а радиальное распределение интенсивности света выражается формулой $\mathcal{I}(r) = \mathcal{I}_0 \exp \frac{r^2}{2W_0^2}$, где $W_0 = \sqrt{\frac{l}{2k}}$, k – волновое число. Оценить интенсивность света на оси резонатора на расстоянии $L = 10$ м от него, если принять $\mathcal{I}_0 = 10^5$ Вт/м².

8.101. 1) Каков порядок m спектра при работе в области $\lambda = 5000$ Å с эшелоном Майкельсона, высота ступенек которого $b = 1$ см, а показатель преломления стекла $n = 1,5$? 2) Найти угловое расстояние Θ между главными максимумами для той же области спектра при ширине ступеньки $a = 0,2$ см.

8.102. Эшелон Майкельсона состоит из $N = 30$ стеклянных пластинок с показателем преломления $n = 1,5$; толщина каждой из них $h = 1$ см. Какова должна быть длина b основания стеклянной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, что и рассматриваемый эшелон? Дисперсия показателя преломления призмы $dn_{np}/d\lambda = 956$ см⁻¹; длина волны $\lambda = 6000$ Å.

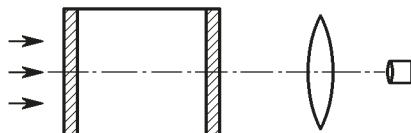


Рис. 482

8.103. Призма прямого зрения состоит из трех призм, выполненных из стекол различных сортов (рис. 483). Подбором преломляющих углов α_1 и α_2 и показателей преломления n_1 и n_2 удается добиться, что-

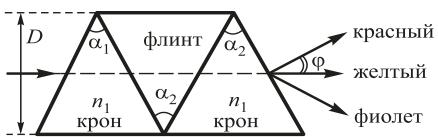


Рис. 483

бы лучи, соответствующие определенной длине волны λ_0 , проходили через призму без преломления. При этом призма в целом сохраняет значительную дисперсию и может служить спектральным прибором. Пусть угол φ отклонения лучей от первоначального направления в призме прямого зрения зависит от длины волн λ вблизи $\lambda_0 = 590$ нм (желтый свет) по закону $\varphi = k(\lambda - \lambda_0)$, где $k = 600$ рад/см. Размер призмы $D = 1,5$ см. Определить дифракционный предел разрешающей способности такой призмы. Можно ли с ее помощью разрешить желтый дублет натрия ($589,0$ нм и $589,6$ нм)?

8.104. Десять тонких стеклянных плоскопараллельных пластинок толщиной $h = 1$ мм с показателем преломления $n = 1,5$ собраны в стопу, представляющую собой «лестницу» (рис. 484). Такая структура называется в оптике эшелоном. Высоты ступенек одинаковы. На

эшелон нормально падает параллельный пучок света. Наблюдается дифракционная картина Фраунгофера в прошедшем свете. Определить дисперсионную область G и разрешающую способность R эшелона в окрестности волны $\lambda = 500$ нм. Оценить допустимый разброс толщины Δh плоскопараллельных пластинок при их изготовлении.

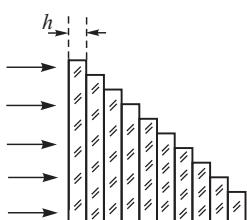


Рис. 484

8.105. Мягкое рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 10$ нм дифрагирует на компакт-диске при скользящем падении. Ширина дорожки на поверхности компакт-диска равна $d = 0,8$ мкм. Ширина рабочей части компакт-диска $L = 3,2$ см. Найти направление на первый дифракционный максимум и разрешающую способность такого спектрального прибора в первом порядке.

8.106. В опыте Юнга (рис. 485) используется протяженный некогерентный квазимонохроматический источник σ ($\lambda = 500$ нм, размер источника $D = 1$ см). Расстояние между щелями S_1 и S_2 в непрозрачном экране $d = 0,5$ см, $L = 1$ м. Оценить размер b диафрагмы, которую необходимо расположить перед источником для получения четкой интерференционной картины в плоскости Π с видностью $V = 2/\pi$. Для увеличения интенсивности (яркости) интерференционной картины предлагается заменить одноточечевую диафрагму решеткой. Определить параметры решетки (период l и ширину щелей δ), которые необходимо выбрать для того, чтобы при сохранении видности (четкости) интерференционной картины обеспечить максимально возможную яркость.

8.107. Точно изготовленный интерферометр Фабри–Перо с расстоянием между зеркалами $d = 1$ см освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 632,8$ нм (гелий–неоновый лазер). Сколько интерференционных полос «исчезнет», если откачать воздух

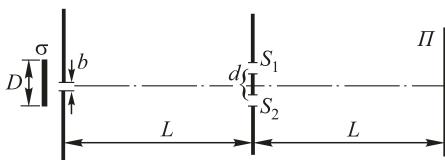


Рис. 485

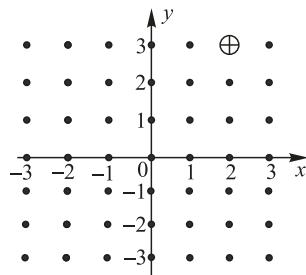


Рис. 486

между зеркалами? Показатель преломления воздуха $n = 1,00029$. Оценить минимальную немонохроматичность $\Delta\lambda$ источника света, при которой интерференционные кольца в центре картины окажутся полностью размытыми.

8.108* Двумерная решетка, плоскость которой перпендикулярна главной оптической оси линзы, освещается плоской, нормально падающей монохроматической волной. На рис. 486 яркими точками показана картина дифракционных максимумов, которая возникает в фокальной плоскости линзы. Найти отношение интенсивности максимума в точке $x = 2$, $y = 3$ (отмечена на рисунке крестиком)

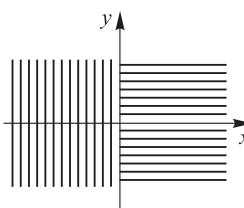


Рис. 487

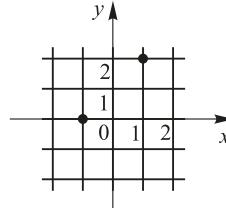


Рис. 488

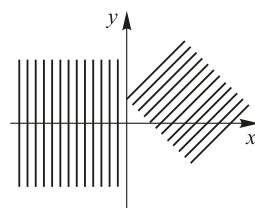


Рис. 489

к интенсивности главного максимума ($x = 0, y = 0$). Отношение периода решетки к ширине щелей $d/b = 6$. Изобразить (по аналогии с рис. 486) картину дифракции, если двумерную решетку заменить двумя расположенным рядом одномерными решетками, как показано на рис. 487.

8.109. Двумерная решетка, плоскость которой перпендикулярна главной оптической оси линзы, освещается монохроматической волной, бегущей вдоль оптической оси. Картина дифракции, возникающая в фокальной плоскости линзы, показана на рис. 488. Найти отношение интенсивности максимума, находящегося в точке с коор-

динатами $x = 1$, $y = 2$, к интенсивности максимума в точке $x = -1$, $y = 0$. Отношение периода решетки к ширине щелей $d/b = 3$. Изобразить (по аналогии с рис. 488) картину дифракции, если двумерную решетку заменить двумя рядом расположенными одномерными решетками, как показано на рис. 489.

8.110. Трехгранная призма спектрографа с шириной основания $b = 1$ см изготовлена из стекла, зависимость показателя преломления n которого от частоты ω в диапазоне видимого света приближенно описывается соотношением $n(\omega) = n_0 + A\omega^2$. Известно значение $A = 1,1 \cdot 10^{-33}$ с². Определить разрешающую способность спектрографа в окрестности $\lambda = 600$ нм. Можно ли с помощью этого прибора разрешить желтый дублет Na ($\lambda_1 = 589,0$ нм, $\lambda_2 = 589,6$ нм)?

8.111. Спектральные волны в спектре далеких галактик смещены в область длинных волн (красное смещение), причем сдвиг спектральных линий пропорционален расстоянию r до галактики. В модели расширяющейся Вселенной это явление объясняется доплеровским сдвигом частоты спектральных линий. Из наблюдений установлено, что скорость удаления v галактики пропорциональна расстоянию до нее: $v = Hr$. Это соотношение называется законом Хаббла; коэффициент пропорциональности H называется постоянной Хаббла. Его численное значение $H \approx 75$ км/(с · Мпк). (В астрономии расстояние принято измерять в парсеках (пк), 1 пк = $3086 \cdot 10^{12}$ км = = 3,26 св. года.)

1) Какой должна быть длина b основания призмы, выполненной из стекла с дисперсией показателя преломления $|\frac{dn}{d\lambda}| = 10^3$ см⁻¹, чтобы с ее помощью можно было обнаружить красное смещение спектральных линий туманности Андромеды, если расстояние до этой галактики равно 0,7 Мпк?

2) Какой бы вы предложили спектральный прибор для обнаружения красного смещения линий в спектре галактики Большое Магелланово Облако (БМО) ($r = 0,05$ Мпк)?

8.112. Зависимость показателя преломления n некоторой прозрачной среды от частоты ω в диапазоне видимого света можно приблизенно описать с помощью соотношения $n(\omega) = n_0 - A(\omega - \omega_0)^{-1}$,

$\omega < \omega_0$, где $\omega_0 = 3,9 \cdot 10^{15}$ с⁻¹, $n_0 = 1,5$, $A = 1,9 \cdot 10^{13}$ с⁻¹. Каким должно быть основание b трехгранной призмы, изготовленной из этого вещества, для разрешения красных линий водорода ($\lambda_H = 656,45$ нм) идейтерия ($\lambda_D = 656,27$ нм)?

8.113. Найти время распространения электромагнитного импульса заданной частоты вдоль основания стеклянной призмы с разрешающей способностью $R = 10^4$. Длина волны в веществе $\lambda = 9,35 \cdot 10^{-5}$ см. Оптическая длина основания призмы составляет $L = 17$ см.

8.114. На рис. 490 изображена схема спектрального прибора с дифракционной решеткой. Для получения параллельного пучка лучей, падающих на решетку P , используется коллиматор, состоящий из входной щели S , на которой фокусируется свет исследуемого источника, и линзы L_1 диаметром $D_0 = 4$ см с фокусным расстоянием $F_0 = 40$ см. Спектр, возникающий в задней фокальной плоскости линзы L_2 с теми же параметрами, фотографируется непосредственно на микропленку Φ , расположенную в этой плоскости. Параметры решетки: ширина щелей $D = 0,5 \cdot 10^{-2}$ мм, период решетки $d = 1 \cdot 10^{-2}$ мм, число периодов $N = 10^4$.

1) Каким должно быть разрешение n фотопленки (число штрихов на 1 мм), чтобы полностью могла быть использована спектральная разрешающая способность прибора?

2) Каков при этом допустимый размер b входной щели S ?

3) Чему равна максимальная разрешающая способность прибора?

Исследуется спектр источника вблизи длины волны $\lambda = 600$ нм.

8.115. Источник света излучает в спектральном интервале $\Delta\lambda = 200$ нм со средней длиной волны $\lambda = 600$ нм. Требуется выполнить исследование спектрального состава излучения источника с высоким разрешением не хуже $\delta\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ нм. Для этой цели может быть использован спектрограф с дифракционной решеткой. В лаборатории имеются три высококачественные решетки, параметры которых указаны в таблице: n — число штрихов на миллиметр; L — полный размер решетки; b — ширина прозрачных щелей каждого периода решетки. Какую из этих решеток следует использовать для проведения указанных исследований?

8.116. Дифракционная решетка с периодом d , состоящая из чередующихся прозрачных и непрозрачных полосок с ширинами a и b соответственно, работает в стандартной оптической схеме. При каком отношении a/b интенсивность линий в спектре второго порядка будет максимальной?

8.117. На дифракционную решетку с $N = 10^5$ числом щелей, ширина которых равна половине периода, нормально падает плоская волна. Дифракционная картина фокусируется линзой на фотопластинку. Оценить допустимые изменения атмосферного давления в лаборатории во время экспозиции, чтобы полностью использовать разрешающую способность решетки. Показатель преломления воздуха связан с атмосферным давлением (в паскалях) соотношением $n - 1 = 3 \cdot 10^{-9} P$.

8.118. Дифракционная решетка длиной $D = 0,5$ см и периодом $d = 5 \cdot 10^{-3}$ см освещается с расстояния $z = 25$ см монохроматическим ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см) плоским протяженным источником. Вплотную к источнику установлена щель, стороны которой параллельны штрихам решетки. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости

№	n , ш/мм	L , см	b , мкм
1	500	10	0,4
2	1000	10	0,25
3	2000	10	0,25

кости линзы, расположенной за решеткой. Оценить, как изменится интенсивность в центре дифракционной картины при изменении ширины щели от $a_1 = 0,25$ см до $a_2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ см.

8.119. Протяженный монохроматический ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см) источник, имеющий форму светящейся полоски шириной $a = 5 \cdot 10^{-2}$ см, освещает дифракционную решетку с периодом $d = 5 \cdot 10^{-3}$ см и числом щелей $N = 100$; при этом щели решетки расположены параллельно источнику. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости объектива. Оценить, как изменится интенсивность в центре дифракционной картины при изменении расстояния r между источником и решеткой от $z_1 = 5$ см до $z_2 = 5$ м.

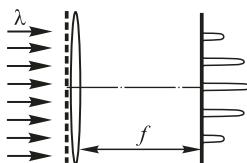


Рис. 491

с периодом d и шириной щелей $b = d/6$ заменить «обратной» решеткой с тем же числом штрихов $N \gg 1$ и тем же периодом d , но со щелями шириной $a = 5d/6 = d - b$?

8.121. Если, подойдя близко к окну, смотреть на уличный фонарь через капроновую, почти прозрачную занавеску (толщина нитей занавески, по-видимому, заметно меньше расстояния между ними), то можно увидеть характерную дифракционную картину: кроме собственно изображения фонаря наблюдается линейка (или крест) пятен-изображений. Оказалось, что линейка состоит примерно из десяти пятен, причем расстояние между пятнами приблизительно вдвое меньше их размера, а угловой размер всей наблюдаемой дифракционной картины равен примерно $\varphi \approx 2 \cdot 10^{-2}$. Средняя длина волны света $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, расстояние до фонаря $L = 50$ м, диаметр зрачка глаза $d_{\text{зр}} = 5$ мм.

1) Каково строение занавески: толщина нитей и «плотность» занавески (число нитей на 1 см)?

2) Оценить размер светящейся колбы фонаря.

8.122* Монохроматический источник света заданной частоты движется равномерно по нормали к дифракционной решетке длиной $L = 5$ см и периодом $d = 10^{-3}$ см. Какую минимальную нерелятивистскую скорость источника можно обнаружить, наблюдая дифракцию первого порядка?

8.123* В опыте Юнга использовали протяженный квазимонохроматический источник S (длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, размер источника $D = 1$ см, расстояние от источника до непрозрачного экрана с двумя щелями S_1 и S_2 и до экрана \mathcal{E} равно $z = 20$ см), рис. 492. Расстояние между щелями $d_0 = 2$ мм оказалось слишком большим, поэтому интерференционная картина на экране \mathcal{E} не наблюдается. Для получения четкой интерференционной картины предлагается вплотную к источнику S расположить многощелевую диафрагму (решетку)

с периодом $d = 5 \cdot 10^{-3}$ см и шириной щелей $b = 2 \cdot 10^{-3}$ см. Решетка полностью покрывает источник, т. е. $d \cdot N = D$, N — число щелей решетки. Какова видность интерференционной картины, возникающей на экране \mathcal{E} в этом случае? При каком минимальном изменении расстояния d_0 между щелями S_1 и S_2 в непрозрачном экране интерференционная картина исчезает? Можно использовать приближение малых углов: $\alpha = D/(2z) \ll 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$.

8.124. В опыте Юнга использовали протяженный квазимонохроматический источник S размером $D = 0,5$ см (длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, $z = 20$ см, расстояние между щелями S_1 и S_2 равно $d_0 = 2$ мм). Возникнет ли картина интерференции на экране \mathcal{E} (рис. 492)?

Чтобы получить четкую интерференционную картину, предлагаются вплотную к источнику S расположить многощелевую диафрагму (решетку) с периодом $d = 10^{-2}$ см, шириной щелей $b = 1,5 \cdot 10^{-3}$ см и числом щелей $N = 50$. Какова видность интерференционной картины на экране \mathcal{E} в этом случае? При каком минимальном изменении длины волны излучения источника интерференционная картина исчезает? Можно использовать приближение малых углов: $\alpha = D/(2z) \ll 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$.

8.125. Спектральная линия некоторого вещества имеет среднюю длину волны $\lambda = 630$ нм и спектральную ширину $\Delta f =$

$= 3 \cdot 10^9$ Гц. Требуется выполнить исследование тонкой структуры этой линии с разрешением не хуже $\delta\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$ нм. Для этой цели в лаборатории имеются три интерферометра Фабри-Перо со следующими параметрами: базы интерферометров (расстояние между зеркалами) $L_1 = 10$ см, $L_2 = 5$ см, $L_3 = 2,5$ см; энергетический коэффициент отражения зеркал $\rho_1 = 99\%$, $\rho_2 = 95\%$, $\rho_3 = 99,5\%$. Какой из этих интерферометров следует использовать для проведения указанных исследований?

8.126. В эксперименте А. Физо (1849 г.) по измерению скорости света свет от источника проходил между зубьями быстро вращающегося колеса. Колесо имело $n = 720$ зубьев и вращалось со скоростью $v = 25,2$ оборота в секунду. Такой прерывистый свет согласно теореме Фурье должен иметь дискретный спектр. Для обнаружения дискретных спектральных линий предлагается использовать интерферометр Фабри-Перо, зеркала которого имеют энергетический коэффициент отражения $\rho = 99,9\%$. Какую базу должен иметь такой интерферометр? Можно ли такой эксперимент выполнить, если в качестве источника света используются: а) узкая спектральная линия с относительной спектральной шириной $\delta\lambda/\lambda \approx 10^{-8}$; б) когерентное излучение лазера с относительной шириной спектра $\delta\lambda/\lambda \approx 10^{-12}$?

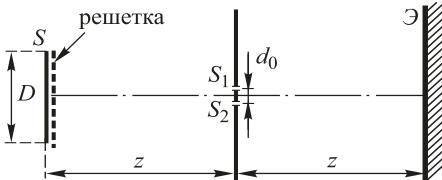


Рис. 492

8.127. При просвечивании тонкой пленки толщиной $d = 1,0$ мкм в диапазоне ближнего ИК и видимого света была получена зависимость коэффициента пропускания $\tau = f(1/\lambda)$, изображенная

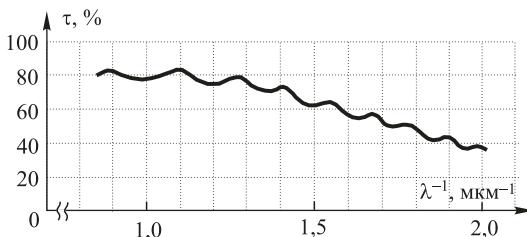


Рис. 493

на рис. 493. Показать, что в данном диапазоне длин волн показатель преломления пленки можно приблизенно описать выражением $n(\lambda) = B\lambda^{-1}$, где B — некоторая постоянная величина, и определить значение этой величины.

8.128. При изучении спектра пропускания тонкой диэлектрической пленки была получена зависимость коэффициента пропускания τ от длины волны λ , изображенная на рис. 494. Предполагая,

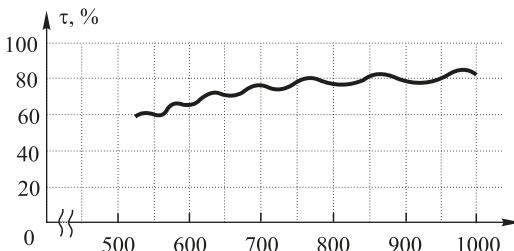


Рис. 494

что диэлектрическая постоянная ϵ пленки не зависит от длины волны в данном диапазоне и равна $\epsilon = 2,25$, определить толщину пленки d . Показать, что экспериментальная кривая приближенно соответствует предположению $\epsilon = \text{const}$.

8.129. Протяженный круглый источник квазимохроматического света излучает на длине волны $\lambda = 0,5$ мкм. Центр источника совпадает с фокусом линзы L_1 (рис. 495). Оптическая система включает в себя также высокодобротный интерферометр Фабри–Перо (расстояние между зеркалами $L = 5$ см), линзу L_2 , соосную с линзой L_1 , и экран, расположенный в фокальной плоскости линзы L_2 . Оценить, при каком максимальном диаметре d источника на экране не будет наблюдаться ни одного кольца. Фокусное расстояние линз $f = 50$ см.

8.130. На параллельно расположенные стеклянную и кремниевую пластинки, образующие низкодобротный интерферометр Фабри–

Перо, падает плоская монохроматическая волна (рис. 496). После многократных отражений кремниевая пластинка полностью поглощает проникающий в нее свет. Найти отношение I_{\max}/I_{\min} — максимальной к минимальной интенсивности света, прошедшего через стеклянную пластинку и поглощенного кремниевой, если изменять расстояние d между ними. Коэффициенты преломления стекла и кремния равны соответственно $n_{\text{ст}} = 1,5$ и $n_{\text{кр}} = 3,5$. Достаточно

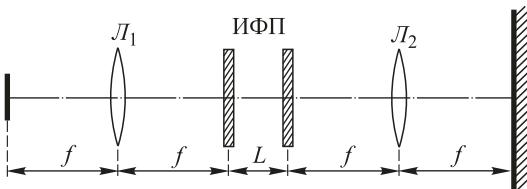


Рис. 495

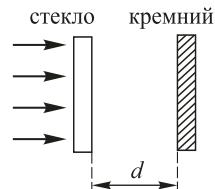


Рис. 496

(но не обязательно) ограничиться двумя интерферирующими волнами, падающими на кремний (двулучевое приближение).

8.131. На высокодобротный интерферометр Фабри–Перо, образованный двумя плоскими зеркалами, находящимися на расстоянии $L = 5$ см друг от друга, падают монохроматические волны длиной $\lambda = 0,6$ мкм. Для пространственных частот падающих волн $\Omega = (k_x, k_y)$ выполнено условие $|\Omega| < \Omega_0$ [рад/см]. Оценить минимальное значение Ω_0 , при котором появится первое светлое кольцо в угловом распределении излучения за интерферометром. В центре дифракционной картины наблюдается светлое пятно.

8.132. Плоская монохроматическая волна с частотой $v = 37,5$ ГГц падает нормально на металлический экран с отверстием, закрытым цилиндрической вставкой толщиной $L = 100,5$ мм из диэлектрика с показателем преломления $n = 4$ для данной частоты (см. рис. 497). Во сколько раз будет отличаться интенсивность излучения в точке A от интенсивности в падающей волне?

8.133. Полупроводниковый лазер на длину волны $\lambda = 1$ мкм представляет собой кристалл полупроводника, на грани которого нанесены зеркала, образующие резонатор Фабри–Перо. Определить расстояние между модами колебаний лазера $\Delta\lambda$. Длина резонатора $L = 6 \cdot 10^{-2}$ см, показатель преломления полупроводника в рабочей области длин волн $n = 3,1$, а дисперсия $dn/d\lambda = -1,2 \cdot 10^4$ см $^{-1}$.

8.134. В газоразрядной трубке находится неон ${}^{20}\text{Ne}$ при низком давлении. Из-за теплового движения молекул неона красная спектральная линия с длиной волны $\lambda = 633$ нм (на этой длине волны

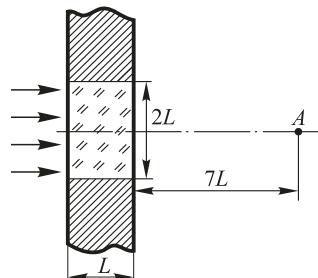


Рис. 497

работает гелий-неоновый лазер) уширена (эффект Доплера). Принимая температуру газа равной 400 К, оценить, при какой базе интерферометра Фабри–Перо, зеркала которого имеют энергетический коэффициент отражения $\rho = 0,98$, можно измерить доплеровскую ширину спектральной линии неона.

8.135. Твердотельный лазер на кристалле Fe : CdSe излучает короткие импульсы длительностью $\tau = 50$ пс на длине волны $\lambda = 5$ мкм. Излучение лазера пропускается через плоскопараллельную прозрачную для этой длины волны пластинку из PbTe толщиной $L = 1$ мм. Показатель преломления пластинки $n = 5,857$. Благодаря френелевскому отражению от поверхностей пластинки, она работает как интерферометр Фабри–Перо. Оценить длительность импульсов за пластинкой.

8.136. Многие лазеры непрерывного действия генерируют свет одновременно на нескольких частотах (модах), определяемых размерами резонатора лазера и шириной спектральной линии (линии усиления) активного вещества. У аргонового (Ar) лазера, работающего на длине волны $\lambda = 514,5$ нм, ширина линии усиления составляет $\Delta\nu_0 = 3,5$ ГГц. Длина резонатора Ar лазера $L = 1,5$ м.

Для выделения только одной моды, соответствующей максимуму линии усиления, излучение лазера пропускается через эталон Фабри–Перо, представляющий собой прозрачную пластину с показателем преломления $n = 1,5$. Энергетический коэффициент отражения поверхностей эталона (за счет специального покрытия) $\rho = 0,9$. Оценить верхний и нижний пределы допустимых значений толщины эталона Фабри–Перо.

8.137. Ширина спектральной линии неона с длиной волны $\lambda = 633$ нм (на этой линии работает He–Ne лазер) равна $\Delta\nu = 1,5 \cdot 10^3$ МГц. Для детального исследования контура этой линии, т. е. зависимости спектральной интенсивности от частоты $\mathcal{I}(\omega)$

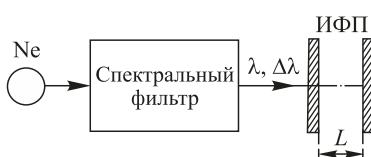


Рис. 498

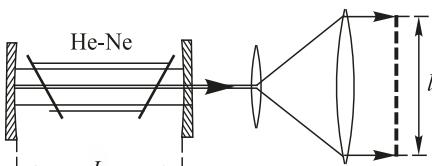


Рис. 499

(или от длины волны $\mathcal{I}(\lambda)$), предлагается использовать интерферометр Фабри–Перо (ИФП), зеркала которого имеют энергетический коэффициент отражения $\rho = 0,95$. Условная схема эксперимента показана на рис. 498. Излучение газоразрядной неоновой трубы проходит через спектральный фильтр, выделяющий спектральный интервал $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ ($\Delta\lambda$ соответствует $\Delta\nu$), и направляется на ИФП. Какую максимальную базу L_{\max} может иметь ИФП для того, чтобы с его помощью можно было исследовать контур спектральной ли-

нии неона во всем диапазоне частот $\Delta\nu$? Какой при этом будет его максимальная разрешающая способность R_{\max} ?

8.138. В He-Ne лазере, работающем на длине волн $\lambda = 633$ нм, в качестве резонатора используется интерферометр Фабри-Перо с базой $L = 15$ см. При определенных условиях лазер может генерировать излучение, спектр которого состоит из двух близких линий (так называемых продольных мод). Каждая из этих линий является резонансной для лазерного интерферометра Фабри-Перо. Лазерный пучок расширяется с помощью телескопической системы (рис. 499) и падает нормально на дифракционную решетку с плотностью штрихов $n = 1,2 \cdot 10^3$ мм $^{-1}$ и шириной $l = 10$ см. Возможно ли с помощью данной решетки разрешить моды в излучении лазера?

§ 9. Элементы фурье-оптики и голограмии

9.1. Три плоские монохроматические волны с амплитудами 1, a и a ($a \ll 1$) падают на плоскость $z = 0$ под углами 0 , α и $-\alpha$ (рис. 500) так, что в точке $x = 0$ колебания оказываются синфазными. При смещении плоскости наблюдения в область $z > 0$ происходят периодические изменения контраста интерференционной картины. Объяснить явление. Найти положения плоскости наблюдения, в которых контраст картины максимальный и минимальный. Чему он равен?

9.2. Найти спектр плоских волн $F(u)$ за синусоидальной решеткой, освещаемой нормально падающей плоской волной. Амплитудный коэффициент пропускания решетки $\tau(x) = 1 + a \cos \Omega x$ ($a < 1$).

9.3. Найти спектр плоских волн за щелью шириной a , освещаемой нормально падающей плоской волной. Решить ту же задачу, если щель перекрыть решеткой с периодом d и размером прозрачных участков b ($a = Nd$, где N — число штрихов решетки).

9.4. Два плоских когерентных монохроматических пучка света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и с амплитудами A_0 и $2A_0$ падают под углами $\alpha = \pm 0,05$ рад на синусоидальную решетку с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = (1 + \cos \Omega x)/2$. В точке $x = 0$ эти волны создают противофазные колебания (рис. 501). Период решетки $d = 10^{-3}$ см. Определить пространственный спектр волн за решеткой.

9.5*: В кювету, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда, налит толуол, в котором возбуждаются ультразвуковые волны с помощью колебаний пластинки пьезокварца. Пластинка кварца установлена параллельно боковым стенкам кюветы. Ультразвуковые волны, возбуждаемые пластинкой, отражаются от одной из боковых

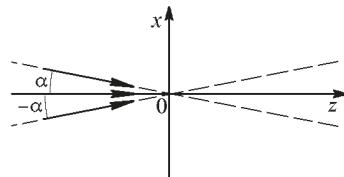


Рис. 500

стенок кюветы. В результате в жидкости образуется стоячая ультразвуковая волна. Чему равен пространственный период изменения показателя преломления жидкости при наличии в ней стоячей ультразвуковой волны?

9.6* На рис. 502 изображена схема установки для наблюдения дифракции света на ультразвуке. Стоячие ультразвуковые волны образуются в кювете K . Пластина кварца P установлена параллельно стенке AC так, что волны, излучаемые ею, распространяются

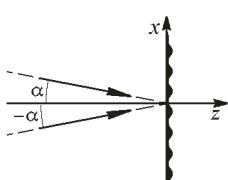


Рис. 501

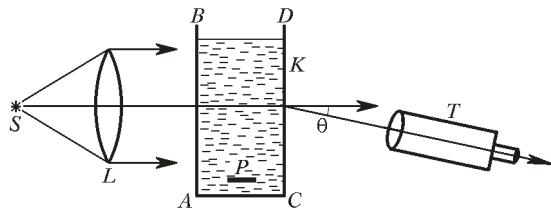


Рис. 502

в направлении, параллельном AB . Дифракционные максимумы и минимумы наблюдаются в трубу T , установленную на бесконечность. Показать, что угол дифракции θ для максимума m -го порядка определяется из условия $\Delta \sin \theta = m\lambda$.

Указание. Принять во внимание, что частота ультразвуковых колебаний весьма мала по сравнению с частотой световых колебаний.

9.7. Дифракция света на ультразвуковой волне в толуоле наблюдается на установке, описанной в предыдущей задаче. В качестве источника света использована зеленая линия ртути ($\lambda = 5461 \text{ \AA}$). Вместо трубы T за кюветой поставлена собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 30 \text{ см}$. Дифракционные полосы получаются в фокальной плоскости линзы и рассматриваются в микроскоп, снабженный шкалой. Определить скорость звука v в толуоле, если расстояние между двумя соседними максимумами $\Delta x = 0,546 \text{ мм}$, а частота ультразвука $v = 4000 \text{ кГц}$.

9.8* Можно ли по характеру дифракционной картины Фраунгофера на плоской ультразвуковой волне решить, происходит ли дифракция на бегущей или стоячей ультразвуковой волне? Поглощением ультразвука пренебречь.

9.9* Если жидкость, в которой установилась стоячая ультразвуковая волна, рассматривать в микроскоп, то благодаря неоднородности жидкости будут видны светлые и темные полосы. Чему равно расстояние между двумя соседними светлыми или темными полосами?

9.10. Горизонтальный луч Не-Не лазера с $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$ падает нормально на тонкую стеклянную кювету с водой. В воде возбуждена стоячая ультразвуковая волна. Направление распространения ультразвука перпендикулярно направлению падающего луча. В результате дифракции света на ультразвуке первые дифрагированные

волны отклонились на угол $\varphi = 5,7^\circ$. Дифрагированный свет анализируется интерферометром Фабри–Перо толщиной $L = 1$ см. Определить спектральный состав дифрагированного света и оценить коэффициент отражения зеркал интерферометра, при котором можно наблюдать исследуемую структуру спектра. Скорость звука в воде $v = 1,5$ км/с.

9.11. Два плоских монохроматических когерентных пучка света с длиной волны $\lambda = 600$ нм и равными амплитудами A_0 падают под углом $\alpha = \pm 0,06$ рад на синусоидальную решетку с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = (1 + \sin \Omega x)/2$ (рис. 501). В точке $x = 0$ эти волны создают синфазные колебания. Период решетки $d = 10^{-3}$ см. Определить пространственный спектр волн за решеткой.

9.12. Плоский монохроматический пучок света интенсивностью \mathcal{I}_0 и длины волны λ дифрагирует на двух последовательно расположенных синусоидальных решетках с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau_1(x) = \tau_2(x) = (1 + \cos \Omega x)/2$ (рис. 503). Определить, при каких расстояниях Δz между решетками интенсивность дифракционных максимумов 1-го порядка максимальна и минимальна. Найти эти значения.

9.13. Плоский монохроматический пучок света с длиной волны λ дифрагирует на двух последовательно расположенных синусоидальных решетках с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau_1(x) = \tau_2(x) = (1 + \cos \Omega x)/2$. При смещении одной из решеток вдоль

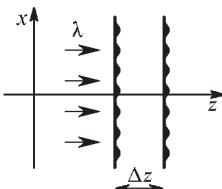


Рис. 503

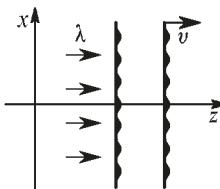


Рис. 504

оси z со скоростью v (рис. 504) интенсивность нулевого дифракционного максимума периодически изменяется. Определить частоту ω этих изменений, а также отношение максимальной и минимальной интенсивностей.

9.14. Предлагается следующая схема спектрометра — устройства для исследования спектрального состава излучения источника света, содержащего две спектральные компоненты. Сколлимированный пучок света дифрагирует на двух последовательно расположенных одинаковых синусоидальных решетках, одна из которых перемещается с постоянной скоростью (рис. 505а). В фокальной плоскости линзы L_2 исследуется зависимость $\mathcal{I}(t)$ интенсивности первого спектрального максимума от времени. Оказалось, что эта зависимость имеет вид, изображенный на рис. 505б. Определить относи-

тельное расстояние $\Delta\lambda/\lambda$ между двумя спектральными компонентами λ и $\lambda + \Delta\lambda$ в излучении источника.

9.15. При наблюдении фазовых (прозрачных) структур методом темного поля в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 (рис. 506) на оптической оси устанавливается проволока P . Фазовая решетка создается в жидкости стоячей ультразвуковой волной с частотой

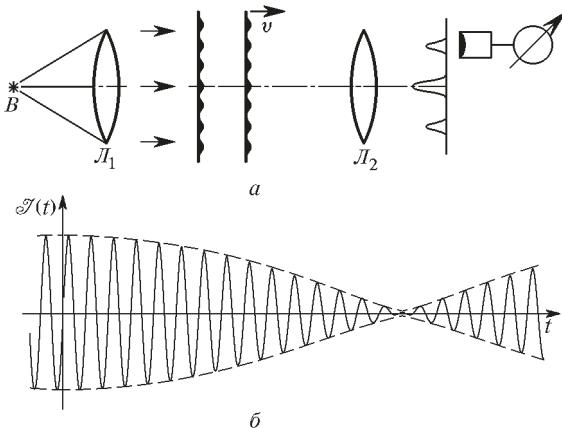


Рис. 505

$v = 20$ МГц. Найти расстояние Δl между интерференционными полосами на экране \mathcal{E} , а также максимально допустимое удаление L_{\max} экрана от линзы L_2 , при котором еще возможно наблюдение интерференционной картины. Диаметр линзы L_2 равен $D = 4$ см, скорость

звукa в жидкости $v = 1,5$ км/с. Решетка освещается нормально падающей плоской волной ($\lambda = 0,5$ мкм).

9.16. При наблюдении фазовых (прозрачных) структур методом темного поля в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 (рис. 506) на оптической оси устанавливается проволока P . Оценить ее допустимый диаметр (d_{\max} и d_{\min}) для наблюдения на экране \mathcal{E} интерференционной картины от фазовой синусоидальной решетки с периодом $\Lambda = 2$ мм, освещаемой нормально падающей плоской волной длиной $\lambda = 0,5$ мкм. Диаметр линзы L_1 равен $D = 2$ см, фокусное расстояние $f = 20$ см.

9.17. Один из методов наблюдения фазовых (прозрачных) объектов состоит в следующем: в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 на оптической оси устанавливается прозрачная пластинка P , вносящая фазовую задержку в $\pi/2$ (рис. 507). Найти распределение

ние интенсивности $\mathcal{I}(x)$ в плоскости изображения (в задней фокальной плоскости линзы L_2), если предмет — фазовая синусоидальная решетка с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = \exp(im \cos \Omega x)$, $m \ll 1$ — расположен в передней фокальной плоскости линзы L_1 ?

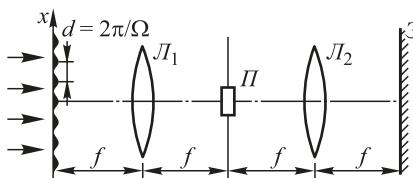


Рис. 507

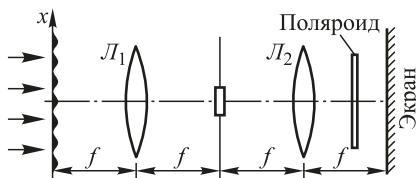


Рис. 508

кости линзы L_1 . Как изменится картина интенсивности, если использовать пластиночку с задержкой в $3\pi/2$?

9.18. Фазовая синусоидальная решетка с глубиной модуляции $m \ll 1$ установлена в передней фокальной плоскости линзы L_1 и освещается параллельным пучком монохроматического линейно поляризованного света с длиной волны λ . Определить толщину и ориентацию маленькой кристаллической пластиночки, установленной в фурье-плоскости (рис. 508), при которой контраст изображения на экране (видность) максимален. Какова при этом максимальная и минимальная видность при вращении поляроида вокруг оптической оси (поляроид расположен между линзой L_2 и экраном)?

9.19. Для наблюдения фазового (прозрачного) объекта в общей фокальной плоскости линз

L_1 и L_2 на оптической оси устанавливают небольшой идеальный поляроид, который вносит для проходящего света фазовую задержку в 2π (рис. 509). Определить видность интерференционной картины в задней фокальной плоскости линзы L_2 , если расположенную в передней фокальной плоскости линзы L_1 фазовую решетку с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = \exp(i \cdot 0,2 \cos \Omega x)$ освещать плоским пучком монохроматического света, поляризованного по кругу.

9.20. Амплитудная синусоидальная решетка с коэффициентом пропускания по амплитуде $\tau(x) = (1 + \cos \Omega x)/2$ установлена во входной плоскости оптической системы (рис. 510) и освещается нормально падающей плоской волной (длина волны λ). Какова контрастность изображения в выходной плоскости, если в общей фокальной плоскости двух линз на оптической оси разместить прозрачную пластиночку, вносящую фазовую задержку в $\pi/2$ (удовлетворяющую условию $(n - 1)d = m\lambda + \lambda/4$)?

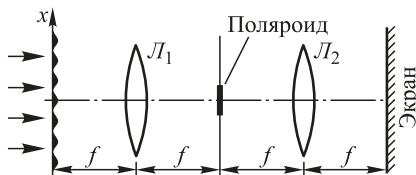


Рис. 509

9.21. Решетка с функцией пропускания $\tau(x) = 1 + m \cos \Omega x$, $m \ll 1$ установлена во входной плоскости схемы Катрона (рис. 511) и освещается параллельным пучком монохроматического циркулярно

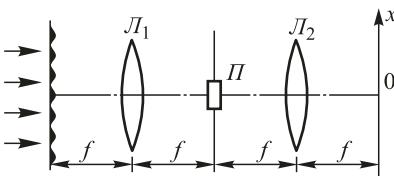


Рис. 510

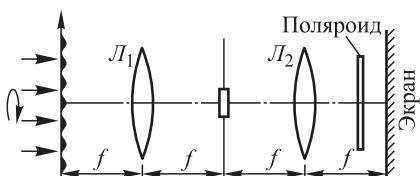


Рис. 511

поляризованного света с длиной волны λ . Определить толщину маленькой кристаллической пластинки, установленной на оси системы в фурье-плоскости, а также взаимную ориентацию разрешенного направления поляроида и пластинки, если контраст (видность) изображения на экране максимальен. Чему равна видность изображения, если после этого повернуть поляроид на 90° ?

9.22. Один из методов наблюдения фазовых (прозрачных) объектов состоит в том, что плоскость наблюдения P смещается на некоторое расстояние l относительно плоскости P_0 , сопряженной с объектом (т. е. плоскости, в которой в соответствии с геометрической оптикой располагается его изображение) (рис. 512).

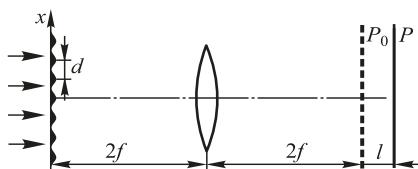


Рис. 512

При этом контрастность наблюдаваемой картины периодически изменяется при изменении l . Найти период d фазовой синусоидальной

решетки, если в схеме, представленной на рисунке, ее контрастное изображение в первый раз возникло при $l_1 = \Delta L$. При каких других значениях l изображение будет контрастным?

9.23. В оптической схеме предметом является дифракционная решетка с большим числом штрихов и шагом d (рис. 513). Решетка освещается плоской нормально падающей монохроматической волной. Если в общую фокальную плоскость линз поместить такую же решетку, то наблюдаемое изображение входной решетки практически не изменится. Определить минимальный интервал времени τ между моментами возникновения изображения решетки, если угол падения волны затем изменять по закону $\alpha(t) = 2(\lambda/d) \sin(2\pi\nu t)$, где частота $\nu = 1 \text{ Гц}$, $\lambda/d \ll 1$. Считать, что для заданного шага решеток фокусное расстояние линз минимально.

9.24. В оптической схеме предметом является дифракционная решетка с большим числом штрихов и шагом d_1 (рис. 513). Решетка освещается плоской нормально падающей монохроматической волной. Если в общую фокальную плоскость линз поместить решет-

ку с вдвое большим шагом $d_2 = 2d_1$, то наблюдаемое изображение входной решетки практически не изменится. Определить минимальный интервал времени между моментами возникновения изображения решетки, если угол падения волны затем изменять по закону $\alpha(t) = 2(\lambda/d_1) \sin(2\pi v t)$, где частота $v = 1$ Гц, $\lambda/d_1 \ll 1$. Считать, что для заданного шага решеток фокусное расстояние линз минимально.

9.25. При нормальном освещении амплитудной синусоидальной решетки монохроматическим параллельным пучком света в плоскостях саморепродукции P воспроизводятся ее изображения (рис. 514).

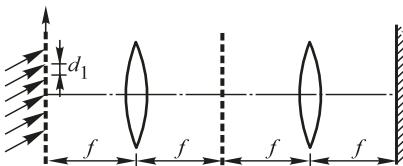


Рис. 513

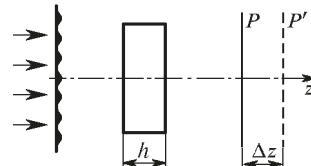


Рис. 514

Если за дифракционной решеткой поместить однородную плоскопараллельную пластинку толщиной $h = 30$ мм с показателем преломления n , то все плоскости изображения смеютсяся по оси z на $\Delta z = 10$ мм. Определить n , если отношение длины волны λ к периоду решетки d достаточно мало ($\lambda/d \ll 1$).

9.26. Дифракционная решетка размером L и периодом d освещается нормально падающей плоской полной (длина волны $\lambda \ll d$). За ней воспроизводятся ее изображения в плоскостях саморепродукции. Оценить число изображений, наблюдавшихся за решеткой, в которых еще различима ее структура.

9.27. При наблюдении методом фазового контраста фазовой синусоидальной решетки с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = e^{im \cos \Omega x}$, $m \ll 1$ по ошибке фазовую пластинку Φ расположили так, что она перекрыла в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 один из дифракционных максимумов 1-го порядка (рис. 515). Найти распределение поля в плоскости Π изображения. На какое минимальное расстояние l нужно переместить плоскость Π , чтобы возникло изображение чисто амплитудной решетки? Пояснить свое решение с помощью векторной диаграммы. Углы дифракции считать малыми. Длина волны λ .

9.28. Две последовательно расположенные вплотную друг к другу решетки с функциями пропускания $\tau_1(x) = (1 + \cos \Omega x)/2$ и $\tau_2(x) = \exp(im \cos \Omega x)$, $m \ll 1$ освещаются плоской нормально падающей монохроматической волной. Как изменится отношение интенсивно-

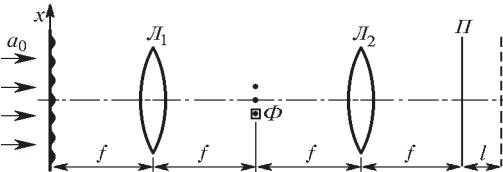


Рис. 515

стей волн, дифрагировавших в ± 1 -е порядки дифракции, если сдвинуть первую решетку вдоль оси x на четверть периода? Какова разность фаз колебаний поля в ± 1 -х порядках дифракции?

9.29. Плоская монохроматическая волна (длина волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$) дифрагирует на амплитудной синусоидальной решетке, а затем проходит через интерферометр Фабри–Перо с расстоянием между зеркалами $L = 2 \text{ см}$. При каком максимальном периоде решетки d контраст интерференционной картины, возникающей в плоскости наблюдения, максимален?

9.30. Оптическая система состоит из двух одинаковых линз с общей фокальной плоскостью; f — фокусное расстояние линз. Амплитудная синусоидальная решетка находится в передней фокальной плоскости 1-й линзы, а изображение рассматривается в задней фокальной плоскости 2-й линзы. Как зависит характер изображения от соотношения между частотой решетки Ω и диаметром линзы D ?

9.31. Свет точечного квазимонохроматического источника S коллимируется объективом L_1 и падает на систему из двух последовательно расположенных одинаковых синусоидальных дифракционных решеток (рис. 516). При продольном смещении одной из решеток

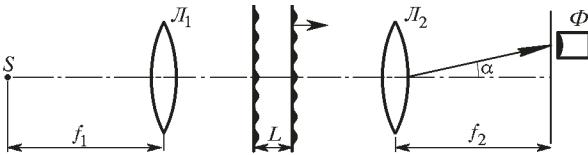


Рис. 516

фотоприемник Φ регистрирует осцилляции интенсивности в первом дифракционном максимуме. Считая углы дифракции малыми, определить длину волны источника λ и оценить ширину спектра излучения $\Delta\lambda$, если известно, что первый минимум интенсивности наблюдается при расстоянии между решетками $L = L_1 = 2 \text{ см}$, а амплитуда осцилляции становится равной нулю при $L \geq L_2 = 20 \text{ см}$. Период решеток $d = 10^{-2} \text{ см}$.

9.32. При голографировании в лазерном излучении плоского предмета A опорный пучок света создавался с помощью призмы Pr ,

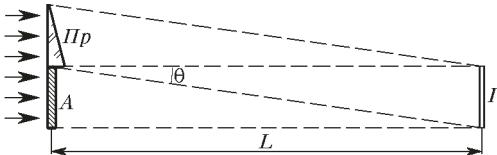


Рис. 517

находящейся в плоскости предмета (рис. 517). Где расположены мнимое и действительное изображения предмета при просвечивании голограммы Γ ? Излучение лазера считать плоской монохроматической

волной. Угол отклонения луча призмой равен θ . Расстояние от предмета до голограммы равно L .

9.33. Найти амплитудный коэффициент пропускания $\tau(x)$ голограммы точечного источника света, если в качестве опорной волны используется нормально падающая на плоскость голограммы плоская волна. Расстояние от источника до голограммы равно L . Считать, что прозрачность голограммы пропорциональна интенсивности света при записи. Найти положение действительного и мнимого изображений при восстановлении изображения нормально падающей плоской волной. Как изменится положение восстановленных изображений, если при записи использовать наклонный опорный пучок с углом наклона θ ? Оценить минимальный размер a_{\min} голограммы, при котором полностью используется разрешающая способность фотоэмульсии, равная n [линий/мм]. Найти размер b восстановленного изображения.

9.34. Голограмма записана на пластинке радиусом $r = 5$ см. Она освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм, а изображение получается на расстоянии $L = 1$ м. Найти допустимую немонохроматичность света $\Delta\lambda$, при которой еще полностью используется теоретическая разрешающая способность голограммы.

9.35. Получена голограмма небольшого предмета, расположенного на расстоянии $L = 50$ см от нее. Каким должен быть размер D фотопластинки, чтобы записать на голограмме детали размером $b \approx 0,01$ мм? Какая немонохроматичность света $\Delta\lambda$ допустима при записи голограммы? Длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм.

9.36. При записи голограммы предмета, находящегося на расстоянии $L = 1$ м, используется излучение Не-Не лазера ($\lambda \approx 6300$ Å). Восстанавливается изображение с помощью протяженного квазимонохроматического источника с угловым размером $\alpha = 10^{-4}$ рад. Каков минимальный размер деталей в восстановленном изображении? Какова при этом требуемая монохроматичность?

9.37. Излучение Не-Не лазера ($\lambda \approx 6300$ Å) используется для записи голограммы. Расстояние от предмета до голограммы $L = 1$ м. Какого минимального размера детали d можно восстановить с помощью немонохроматического источника с шириной полосы $\Delta\lambda = 9$ Å? Каков необходимый для этого размер голограммы D ?

9.38. Точечный объект движется параллельно фотопластинке, на которую записывается его голограмма. Оценить скорость v объекта, при которой голограмма будет иметь максимальное число колец. Объект и фотопластинка освещаются плоской волной с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм, нормальной к плоскости фотопластинки. Размер фотопластинки $D = 0,1$ м, расстояние между объектом и фотопластинкой $L = 1$ м, время экспозиции $\tau = 0,01$ с. Найти также разрешающую способность голограммы Δl в направлении движения объекта.

9.39. Для записи голограммы без опорного пучка используется схема, изложенная на рис. 518. Предмет S , освещаемый параллельным пучком монохроматического света λ , расположен на расстоя-

нии L от входной плоскости P_0 , а фотопластинка (голограмма) в выходной плоскости P_1 . В некоторой точке фурье-плоскости (общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2) установлен небольшой непрозрачный экран \mathcal{E} . Полагая, что предмет — синусоидальная решетка с функцией пропускания $\tau(x) = (1 + \cos \Omega x)/2$, а непрозрачный экран перекрывает первый дифракционный максимум, найти распределение интенсивности на голограмме, считая известным диаметр D линз. Найти также положение восстановленных изображений. (Для восстановления используется плоская волна, нормально падающая на голограмму.) Оценить требуемый размер непрозрачного экрана.

9.40. При записи голограммы на фотопленку с толщиной слоя фотэмulsionии $h = 5$ мкм падают две плоские монохроматические волны ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см) с равными амплитудами. Одна из волн (опорная) падает по нормали к фотопластинке, другая (предметная) — под углом

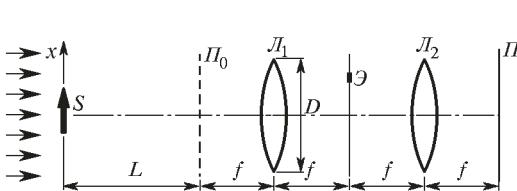


Рис. 518

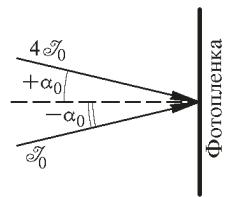


Рис. 519

$\alpha = 60^\circ$ к нормали. Предполагая, что показатель преломления фотэмulsionии $n = 1$, определить расстояние между слоями с максимальным почернением фотэмulsionии (интерференционные максимумы). Сколько таких слоев пройдет луч света, пронизывающий фотопластинку по нормали?

9.41. Голографические дифракционные решетки получают путем фотографирования интерференционных полос, полученных в лазерном излучении, на фотопленке высокого разрешения. Пусть на плоскую пленку под углами α и $-\alpha$ к нормали падают два широких пучка лазерного излучения с длиной волны λ (рис. 519). Интенсивность излучения в пучках равна $4\mathcal{I}$ и \mathcal{I} соответственно. После проявления и обработки фотопленки ее просвечивают лазерным пучком интенсивностью $4\mathcal{I}$ с той же длиной волны λ . Этот пучок падает на поверхность полученной таким образом голографической решетки под углом α к нормали. Предполагая, что амплитудная прозрачность решетки пропорциональна интенсивности света при записи, определить спектр плоских волн за решеткой.

9.42. Во входной плоскости P_0 оптической системы (рис. 520) расположена решетка с периодом d и шириной $b = 5d/12$, освещаемая нормально падающей монохроматической волной. Определить амплитудную прозрачность маски, установленной в фурье-плоскости Φ (общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2), если в выходной плоскости необходимо получить световое поле, комплексная ампли-

туда которого представляет синусоидальную амплитудную структуру с глубиной модуляции, равной единице, и периодом $d_1 = d/2$.

9.43. Две последовательно расположенные вплотную друг к другу решетки с функциями пропускания $\tau_1 = \frac{1}{2}(1 + \cos\Omega x)$ и $\tau_2 = \exp(im \cos\Omega x)$, $m \ll 1$ освещаются плоской нормально падающей монохроматической волной с амплитудой a . Каков закон изменения во времени интенсивности волн, продифрагировавших в ± 1 -е порядки, если амплитудная решетка смещается вдоль оси x со скоростью v ? Каков фазовый сдвиг между колебаниями интенсивности в ± 1 -х порядках дифракции (см. также задачу 9.28)?

9.44* На рис. 521 показана оптическая схема мультиликации изображений. Объект-транспарант с общим размером $L = 1$ см и размером мельчайших деталей $\delta = 0,01$ мм расположен во входной плоскости Π_0 оптической системы и освещается монохроматическим пучком света ($\lambda = 500$ нм). Мультилицированное (размноженное) изображение возникает в выходной плоскости Π_1 . В общей фокальной плоскости

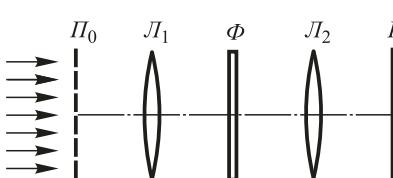


Рис. 520

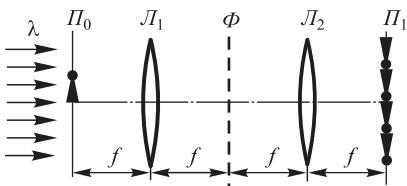


Рис. 521

плоскости линз L_1 и L_2 (фурье-плоскости Φ оптической системы) располагается амплитудная решетка. Определить период решетки d и ее общий размер D , необходимые для качественного воспроизведения мультилицированного изображения. Оценить ширину щелей решетки b , если необходимо получить не менее десяти периодически повторяющихся изображений объекта. Фокусное расстояние объективов $f = 20$ см.

9.45. Оптическая схема мультиликации (размножения) изображения показана на рис. 521. Предмет (размер которого равен $l = 5$ мм) располагается во входной плоскости Π_0 оптической системы и освещается параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. В общей фокальной плоскости Φ линз L_1 и L_2 (фокусное расстояние линз $f = 50$ см) располагается решетка, а размноженное (мультилицированное) изображение возникает в выходной плоскости Π_1 . Определить период решетки, при котором размноженные изображения не налагаются друг на друга и не создают таким образом взаимных помех. Оценить размер щелей решетки, если необходимо получать десятикратно размноженное изображение (ограничение обусловлено тем, что интенсивность размноженных изображений убывает по мере удаления от оптической оси). Оценить число щелей решетки, если в плоскости Π_1 необходимо рассмотреть детали объекта, размер которых $\delta = 0,01$ мм.

9.46. Осевая голограмма точечного источника, расположенного на расстоянии $L = 20$ см перед фотопластинкой, возникает при интерференции плоской опорной волны и предметной сферической волны, исходящей из этого источника. Найти положения изображений источника, восстановленных с помощью той же опорной волны, если вплотную к фотопластинке приложить отрицательную линзу с фокусным расстоянием $f = -10$ см.

9.47. Осевая голограмма точечного источника, расположенного на расстоянии $L = 10$ см перед фотопластинкой, возникает при интерференции плоской опорной волны и предметной сферической волны, исходящей из этого источника. Найти положения изображений источника, восстановленных с помощью той же опорной волны, если вплотную к фотопластинке приложить положительную линзу с фокусным расстоянием $f = 5$ см.

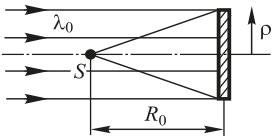


Рис. 522

1) Предполагая, что предметная и опорная волны имеют одинаковые амплитуды, равные A , найти во френелевском приближении распределение интенсивности $\mathcal{I}(\rho)$ на фотопленке при записи голограммы. 2) Полученную таким образом голограмму просвещивают светом с длиной волны $\lambda > \lambda_0$. Найти положения действительного и мнимого изображений.

9.49. Голограмма точечного объекта получена по схеме Габора в красном свете гелий-неонового лазера с длиной волны $\lambda = 630$ нм. При записи голограммы предмет находился на расстоянии $L = 1$ м от фотопленки. При восстановлении изображений объекта голограмму просветили параллельным пучком зеленого света аргонового лазера с длиной волны $\lambda_2 = 490$ нм. 1) Найти во френелевском приближении распределение интенсивности света \mathcal{I} на фотопленке при записи. 2) Найти положения действительного и мнимого изображений.

9.50. Голограмма точечного объекта получена по схеме Габора в зеленом свете аргонового лазера с длиной волны $\lambda = 490$ нм. При записи голограммы объект находился на расстоянии $L_1 = 0,8$ м от фотопленки. При восстановлении изображений объекта голограмму просветили светом точечного источника с той же длиной волны, расположенного на оси голограммы на расстоянии $L_2 = 1,2$ м от голограммы. 1) Предполагая, что амплитудная прозрачность голограммы при восстановлении пропорциональна интенсивности света при записи, написать выражение для комплексной амплитуды поля непосредственно за голограммой (во френелевском приближении). 2) Найти положения действительного и мнимого изображений.

9.51. Для записи голограммы Френеля предмета используется плоская монохроматическая волна с $\lambda = 7000$ Å. Восстановление изображения производится вначале той же волной, а затем волной

с $\lambda = 3500 \text{ \AA}$. Как изменится при этом минимально разрешимый поперечный размер деталей изображения?

Указание. Масштабные изменения удобней анализировать на примере голограммы точечного источника.

9.52. В слое фотоэмульсии толщиной $L = 50 \text{ мкм}$ регистрируется результат интерференции двух пучков света ($\lambda = 0,5 \text{ мкм}$), распространяющихся под углом $\alpha = 60^\circ$ друг к другу (рис. 523). Оценить относительную ширину $\Delta\lambda/\lambda$ спектра отраженной волны при освещении полученной в результате фотообработки объемной отражательной решетки параллельным пучком белого света, распространяющимся вдоль оси z .

9.53. При создании объемной голограммической решетки в среде толщиной $L = 50 \text{ мкм}$ регистрируется результат интерференции встречных пучков света с длиной волны $\lambda = 500 \text{ нм}$ (рис. 524). Оценить минимальную ширину спектра отраженной волны при освещении полученной объемной решетки параллельным пучком белого света.

9.54. Точечный фотоприемник смещается вдоль оси z и регистрирует результат интерференции трех плоских монохроматических волн ($\lambda = 500 \text{ нм}$), одна из которых \mathbf{k}_0 бежит вдоль оси z и имеет амплитуду a_0 , а две других \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 составляют с осью z соответственно углы $\alpha_1 = 10^{-3} \text{ рад}$ и $\alpha_2 = \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \text{ рад}$ и имеют амплитуду $a_1 = a_2 = a_0/2$ (рис. 525). Колебания волн \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_2 в точке O оказались синфазными, а волна \mathbf{k}_1 отстает по фазе на $\pi/2$.

1) При каком минимальном смещении z интенсивность, регистрируемая фотоприемником, окажется минимальной и чему она равна?

2) При каком минимальном смещении регистрируемая приемником интенсивность окажется равной интенсивности волны \mathbf{k}_0 ?

9.55. Точечный фотоприемник, смещающийся вдоль оси z , регистрирует результат интерференции трех монохроматических волн ($\lambda = 500 \text{ нм}$), одна из которых \mathbf{k}_0 (с амплитудой a_0) бежит вдоль оси z ,

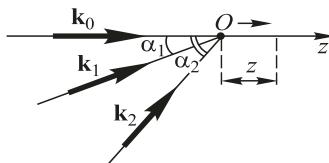


Рис. 525

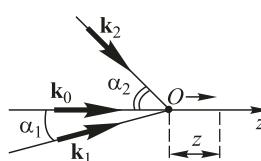


Рис. 526

а волновые векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 двух других (с амплитудами $a_1 = a_2 = a_0/2$) составляют углы $\alpha_1 = 10^{-3} \text{ рад}$ и $\alpha_2 = \sqrt{3} \cdot 10^{-3} \text{ рад}$ с осью z (рис. 526). Колебания всех трех волн в точке O оказались синфазными.

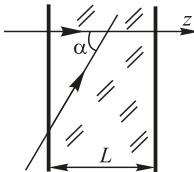


Рис. 523

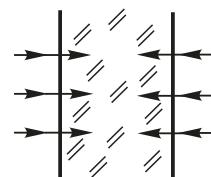


Рис. 524

- 1) Какова интенсивность, регистрируемая приемником в точке O ?
- 2) При каком минимальном смещении регистрируемая приемником интенсивность окажется равной интенсивности волны k_0 ?
- 3) При каком минимальном смещении регистрируемая интенсивность максимальна?

9.56. Плоская монохроматическая волна падает по нормали на амплитудную синусоидальную решетку. За решеткой расположена линза, в фокальной плоскости которой закрывается нулевой дифракционный максимум. Интерференционная картина наблюдалась в плоскостях, расположенных на расстояниях $L_1 = 32$ см и $L_2 = 34$ см от линзы, интервалы между интерференционными полосами оказались равными $d_1 = 0,04$ мм и $d_2 = 0,08$ мм. Найти фокусное расстояние F линзы и период решетки d_0 .

9.57. Амплитудная синусоидальная решетка освещается плоской монохроматической волной, падающей по нормали к ней. При помощи линзы (фокусное расстояние $F = 15$ см) в сопряженной с решеткой плоскости, находящейся на расстоянии $b = 40$ см от линзы, методом темного поля было построено изображение решетки, имеющее период $d = 0,1$ см. В какую сторону и на сколько следует сместить плоскость изображения, чтобы этот период уменьшился в $n = 5$ раз? Найти также период самой решетки d_0 .

9.58. При дифракции плоской нормально падающей волны ($\lambda = 500$ нм) на амплитудной синусоидальной решетке (размер решетки $D = 5$ мм, период $d = 0,1$ мм) возникает ряд изображений решетки при смещении (удалении) плоскости наблюдения. Оценить, на каком максимальном расстоянии воспроизводится изображение хотя бы одного периода решетки. Сколько раз воспроизводится это изображение? Оценить требуемую при этом монохроматичность.

9.59. Плоская волна (длина волны $\lambda = 500$ нм, немонохроматичность $\Delta\lambda = 50$ нм) дифрагирует на амплитудной синусоидальной решетке размером $D = 1$ см и периодом $d = 0,1$ мм. При этом на определенных расстояниях от решетки возникают ее изображения (само-

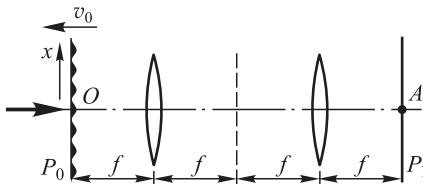


Рис. 527

репродукции). Оценить, сколько раз воспроизведется изображение решетки по мере удаления плоскости наблюдения.

9.60. Синусоидальная решетка с амплитудной прозрачностью $t(x) = \frac{1}{1+m} (1 + m \cos \Omega x)$ освещается плоской нормально падающей волной (длина волны λ). Решетка находится во входной плоскости P_0 оптической системы, при этом интенсивность света, регистрируемая

в точке A выходной плоскости P_1 (т. е. на оптической оси), равна \mathcal{I}_0 (рис. 527). Какова частота и диапазон изменений интенсивности $\Delta\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}$, если решетка смещается вдоль оптической оси влево со скоростью v_0 . Полагать глубину модуляции t малой ($t \ll 1$); период решетки $d \gg \lambda$.

9.61. Экспериментатор с помощью микроскопа исследует синусоидальную фазовую решетку (рис. 528). Смешая микроскоп вдоль оптической оси, он периодически видит изображение с максимальной видностью $V = 0,1$. Минимальное расстояние между такими положениями $l = 2$ см. Определить период решетки d и глубину модуляции фазы. Решетка освещается нормально падающей монохроматической волной $\lambda = 0,5$ мкм.

9.62. Дифракционная решетка с амплитудной прозрачностью $\tau(x) = a(1 + m \cos^2 \Omega x)$ ($m < 1$, a — постоянная величина) просвечивается плоской монохроматической волной с длиной волны λ . Амплитуду волны можно принять равной 1. Предполагая, что $\Omega \ll k = 2\pi/\lambda$, определить зависимость комплексной амплитуды поля $A(x)$

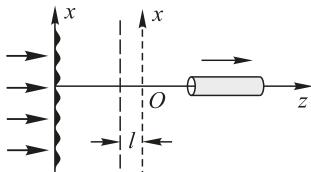


Рис. 528

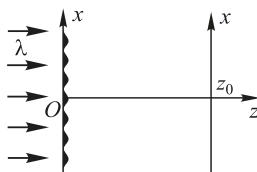


Рис. 529

от координаты x на плоскости, расположенной на расстоянии $z_0 = 2$ см от решетки (рис. 529), если $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, $\Omega = \pi \cdot 10^2$ см $^{-1}$. Будет ли в этой плоскости видно изображение решетки?

9.63. Фазовая решетка, прозрачность которой выражается формулой $\tau(x) = ae^{im \cos^2 \Omega x}$ ($m \ll 1$, $a = \text{const}$), просвечивается плоской монохроматической волной с длиной волны λ . Амплитуду волны можно принять равной 1.

1) Предполагая, что $\Omega \ll k = 2\pi/\lambda$, определить зависимость комплексной амплитуды поля $A(x)$ от координаты x на плоскости, расположенной на расстоянии $z = z_0$ от решетки (рис. 529).

2) Можно ли визуально наблюдать изображение фазовой решетки на экране, расположенному на расстоянии $z_0 = 2$ см от решетки, если $\lambda = 500$ нм, $\Omega = \pi \cdot 10^2$ см $^{-1}$.

9.64. Во входной плоскости $P_{\text{вх}}$ системы Катрона установлен транспарант с амплитудным коэффициентом прозрачности $\tau(x) = a \cos \Omega x$. Транспарант просвечивается монохроматическим светом с длиной волны λ и амплитудой A (рис. 530).

1) Определить спектр плоских волн за транспарантом.

2) Найти распределение интенсивности $\mathcal{I}(x)$ в выходной плоскости $P_{\text{вых}}$ схемы.

3) Что увидит наблюдатель в выходной плоскости $P_{\text{вых}}$ при условии $\Omega > k \sin u$, где k — волновое число, u — апертурный угол?

9.65. Периодическая структура — решетка с периодом $d = 2 \cdot 10^{-2}$ см с узкими щелями — освещается нормально падающим параллельным пучком света, содержащим две спектральные линии: $\lambda_1 = 600$ нм (оранжевый цвет) и $\lambda_2 = 450$ нм (синий цвет). Определить минимальное расстояние от решетки, где саморепродуцированное изображение ее щелей имеет максимальную интенсивность.

9.66. На рис. 531 показана оптическая система, состоящая из двух одинаковых линз L_1 и L_2 с фокусным расстоянием $f = 50$ см.

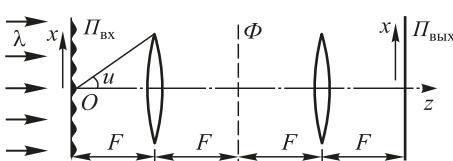


Рис. 530

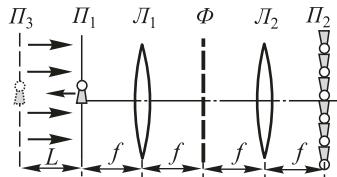


Рис. 531

В их общей фокальной плоскости Φ установлена решетка с узкими щелями и периодом $d_0 = 2,5 \cdot 10^{-2}$ см. Предмет («пешка», изображенная на рисунке) располагается во «входной» плоскости P_1 (передняя фокальная плоскость линзы L_2) и освещается параллельным пучком света ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). При этом в «выходной» плоскости P_2 (задней фокальной плоскости линзы L_2) возникает сфокусированное и при этом размноженное (мультилинированное) изображение предмета. Определить:

1) период возникающей в выходной плоскости периодической структуры мультилинированного изображения;

2) при каком смещении предмета влево от входной плоскости (z из P_1 в некоторую плоскость P_3) изображение предмета (и при этом мультилинированное) вновь окажется сфокусированным.

9.67. В оптической системе, изображенной на рис. 531, в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 (плоскость Φ) расположена решетка с узкими щелями. При этом в выходной плоскости P_2 возникает мультилинированное (размноженное) изображение объекта, расположенного во входной плоскости P_1 и освещенного параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Фокусное расстояние линз $f = 25$ см. Определить период d_0 фильтрующей решетки в плоскости Φ , если расстояние между соседними элементами размноженного изображения (период мультилинирования) $d = 0,25$ мм. На какое расстояние L влево от входной плоскости P_1 нужно сдвинуть объект, чтобы в плоскости P_2 вновь возникло прежнее сфокусированное мультилинированное изображение?

9.68. В оптической схеме, показанной на рис. 532, предмет-транспарант расположен в передней фокальной плоскости линзы L_1 и освещен параллельным пучком монохроматического света (длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). В фурье-плоскости Φ помешают решетку с узкими щелями. При этом на экране \mathcal{E} , расположенным в зад-

ней фокальной плоскости линзы L_2 , возникает мультилинированное (размноженное) изображение объекта. При смещении экрана вправо изображение становится размытым (расфокусированным), однако при смещении на $l_1 = 4$ м изображение вновь становится резким (сфокусированным). Фокусное расстояние линз $f = 50$ см.

1) Определить период решетки d_0 .

2) Определить период мультилинировки d (т. е. расстояние между элементами наблюдаемой периодической структуры).

3) Каков при этом допустимый размер предмета a ?

9.69. С линейным увеличением $\Gamma = 2$ на фотопленку фотографируется центральный участок интерференционной картины — колец Ньютона, полученных в отраженном свете при нормальном падении лучей. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы R_0 (рис. 533).

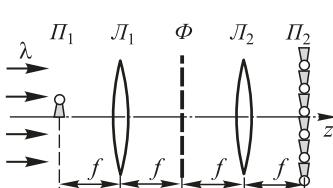


Рис. 532

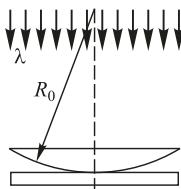


Рис. 533

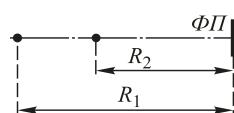


Рис. 534

После обработки фотопленки ее просвечивают плоской волной той же длины волн, падающей нормально на поверхность пленки. Предполагая, что амплитудная прозрачность фотопленки (голограммы) пропорциональна интенсивности света при экспозиции, определить положение изображений. Размер фотографируемого участка колец Ньютона много меньше R_0 .

9.70. На пленку фотографируется интерференционная картина, полученная от двух точечных монохроматических источников, испускающих свет одной и той же частоты. Источники расположены на перпендикуляре к плоскости фотопленки ($ФП$) на расстояниях $R_1 = 1$ м и $R_2 = 0,6$ м (рис. 534). Обработанная фотопленка просвещивается плоской волной той же частоты, падающей нормально на ее поверхность. Предполагая, что амплитудная прозрачность фотопленки (голограммы) пропорциональна интенсивности света при записи, определить положения изображений. Размер фотопленки много меньше R_1 и R_2 .

9.71. В установке для наблюдения колец Ньютона монохроматический свет от удаленного точечного источника с длиной волны $\lambda = 500$ нм нормально падает на плоскую поверхность плоско-выпуклой линзы с радиусом кривизны выпуклой поверхности $R = 100$ см (рис. 535). Участок интерференционного поля радиусом $r_0 = 1$ см с помощью полупрозрачной пластинки $ПП$ и линзы L фокусируется на фотопленке Φ с линейным увеличением $\Gamma = 2$. Для упрощения задачи будем считать интенсивности обеих волн, создаю-

щих интерференционную картину, одинаковыми и пренебрегать преломлением лучей на поверхностях линзы. В этом приближении:

1) найти распределение интенсивности света от радиуса $\mathcal{J}(\rho)$ на фотопленке и определить число колец на выделенном участке интерференционного поля;

2) можно ли рассмотреть (разрешить) все кольца на фотопленке невооруженным глазом с расстояния $L = 25$ см? Диаметр зрачка принять равным $d = 5$ мм;

3) пусть теперь обработанную фотопленку просвечивают нормально падающей плоской волной с той же длиной волны $\lambda = 500$ нм. Какие волны будут распространяться за фотопленкой? Указать точки фокусировки света.

9.72. При записи голограммы точечного источника по схеме Габора на фотопленку падал параллельный опорный пучок света и когерентная сферическая предметная волна от источника S (см. рис. 536). После обработки пленки из-за нелинейности светочувствительной характеристики фотоматериала амплитудная прозрачность $\tau(\rho)$ голограммы оказалась пропорциональной квадрату интенсивности света при записи: $\tau(\rho) \sim \mathcal{J}^2(\rho)$. Полагая, что интенсивности

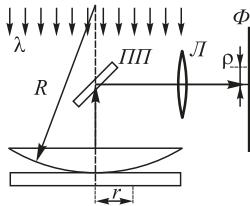


Рис. 535

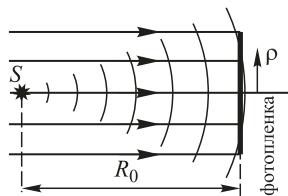


Рис. 536

опорной и предметной волн на фотопленке при записи были равными, определить, сколько изображений точечного источника (действительных и мнимых) получится при просвечивании голограммы нормально падающим опорным пучком. Нарисовать схему, показывающую положения всех изображений. Размер голограммы много меньше R_0 .

9.73. Голограмма точечного источника S , излучающего красный свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм, была получена по схеме, изображенной на рис. 537. Источник находился на расстоянии $R_0 = 100$ см от фотопластинки Φ . На расстоянии $1,5R_0$ от источника располагалось плоское зеркало Z . Свет от источника, отраженный от зеркала, играл роль опорной волны. Полученная таким образом после обработки фотоматериала пластина была просвеченена плоской нормально падающей на голограмму волной с длиной волны $\lambda_2 = 400$ нм (фиолетовый свет). Пренебрегая для простоты всеми несущественными постоянными фазовыми сдвигами, найти распределение интенсивности $\mathcal{J}(\rho)$ света на фотопластинке при записи голограммы. Считая, что амплитудная прозрачность голограммы пропорциональна интен-

сивности света при записи, определить положение действительного и мнимого изображений источника S . Указать положения изображений на рисунке. Размер фотопластинки много меньше R_0 .

9.74. На рис. 538 изображена схема Габора для записи голограммы точечного источника S , расположенного на расстоянии $R_0 = 1$ м от фотопластинки Φ . В качестве опорной волны использовался когерентный пучок, сходящийся на расстоянии R_0 за фотопластинкой.

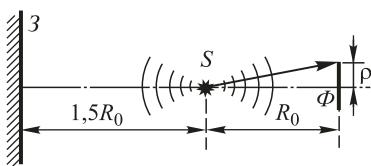


Рис. 537

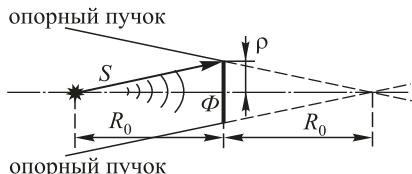


Рис. 538

При записи голограммы использовался свет с длиной волны λ_1 . Полученная таким образом после обработки фотоматериала голограмма просвечивалась светом точечного источника с длиной волны λ_2 , расположенного на расстоянии $R_0/2$ перед голограммой. Пренебрегая для простоты всеми несущественными постоянными фазовыми сдвигами и предполагая, что амплитуды опорной и предметной волн одинаковы, найти распределение интенсивности $\mathcal{J}(\rho)$ света на фотопластинке при записи голограммы. Считая, что амплитудная прозрачность голограммы пропорциональна интенсивности света при записи, определить положения действительного и мнимого изображений. Указать положения изображений на рисунке для случая $k_1/k_2 = \lambda_2/\lambda_1 = 2/3$. При каком условии оба изображения источника будут мнимыми? Размер фотопластинки много меньше R_0 .

9.75. Голограмма точечного объекта O записывается по схеме Габора с той лишь разницей, что опорная волна создается точечным монохроматическим источником S с длиной волны $\lambda = 633$ нм, расположенным на расстоянии $L = 1$ м от фотопластинки Φ (см. рис. 539). Объект расположен на расстоянии $R = 60$ см от фотопластинки. Предметной волной служит свет опорной волны, рассеянный объектом. Полученная таким образом голограмма просвечивается параллельным пучком лучей от удаленного монохроматического источника с той же длиной волны.

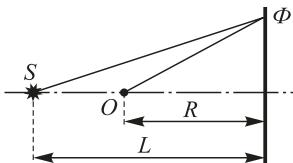


Рис. 539

1) Определить положение действительного и мнимого изображений объекта.

2) Принимая диаметр фотопластинки равным $D = 10$ см, оценить допустимую немонохроматичность света $\Delta\lambda/\lambda$ при записи, при которой достигается максимальное разрешение голограммы.

Указание: использовать параболическое приближение.

9.76. При записи голограммы небольшого предмета P использовалась схема Габора. Предмет располагался на расстоянии $R = 100$ см от фотопластинки Φ и освещался параллельным пучком лучей от далекого монохроматического источника S с длиной волны $\lambda = 633$ нм, нормально падающим на фотопластинку (рис. 540 a). Предметной волной служил свет, рассеянный предметом. При восстановлении изображения предмета голограмма просвечивалась светом точечного источника с той же длиной волны, расположенного на расстоянии $L = 150$ см от голограммы (рис. 540 b).

1) Определить положение действительного и мнимого изображений предмета.

2) Принимая диаметр фотопластинки равным $D = 19$ см, оценить разрешающую способность ее фотоэмulsionии (в линиях на мм), при которой достигается максимальное разрешение голограммы.

Указание: использовать параболическое приближение.

9.77. При изготовлении голографической дифракционной решетки фотопленка освещалась двумя когерентными пучками лазерного света одинаковой интенсивности с длиной волны λ_0 , падающими на фотопленку под углами $\pm\alpha_0$ (см. рис. 541). После обработки пленки

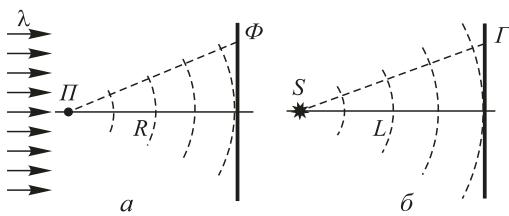


Рис. 540

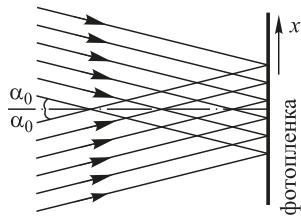


Рис. 541

из-за нелинейности светочувствительной характеристики фотоматериала амплитудная прозрачность $\tau(x)$ полученной таким образом решетки оказалась пропорциональной квадрату интенсивности света при записи: $\tau(x) \sim \mathcal{I}^2(x)$. Определить спектр плоских волн, которые возникают при просвечивании решетки нормально падающей плоской волной с той же длиной волн. Указать относительные амплитуды, пространственные частоты и направления распространения всех плоских волн за решеткой.

9.78. При записи голограммы точечного источника S_1 , расположенного на расстоянии $R_1 = 60$ см от фотопластинки Φ , по методу Габора вместо плоской опорной волны использована сферическая опорная волна от когерентного точечного источника S_2 , расположенного на расстоянии $R_2 = 90$ см от фотопластинки (рис. 542). Определить положения действительного и мнимого изображений при просвечивании записанной голограммы нормально падающей плоской волной той же длины, что и при записи.

9.79. Если во входной плоскости Π_1 , оптической системы (рис. 543) расположить предмет, то в выходной плоскости Π_2 изоб-

ражение предмета оказывается *сфокусированным*, т. е. плоскости P_1 и P_2 , являются *оптически сопряженными* (по законам геометрической оптики). При каком минимальном смещении объекта Δz

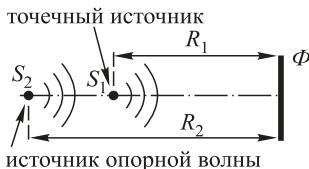


Рис. 542

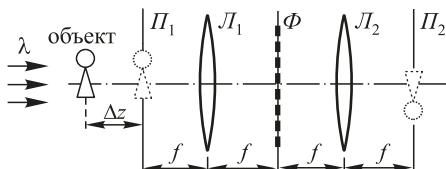


Рис. 543

от входной плоскости P_1 , изображение в выходной плоскости P_2 также окажется сфокусированным, если в фурье-плоскости Φ расположить фильтрующую решетку с периодом $d = 10^{-2}$ см. Фокусные расстояния объективов L_1 и L_2 равны $f = 10$ см, а длина волны, освещавшей объект, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см.

9.80. Известно, что смесь красного и зеленого света воспринимается глазом человека как желтый свет. Амплитудная синусоидальная решетка с периодом $d = 10^{-2}$ см освещается параллельным пучком света содержащим две спектральные линии: $\lambda_1 = 630$ нм (красный свет) и $\lambda_2 = 525$ нм (зеленый свет). Определить, на каком минимальном расстоянии нужно расположить белый экран, чтобы саморепроизведенное изображение решетки оказалось желтым.

§ 10. Дисперсия света. Эффект Доплера в оптике

10.1. Рассматривая импульс, представляющий собой суперпозицию двух гармонических волн $\sin(\omega t - kx)$ и $\sin(\omega't - k'x)$, найти групповую скорость u . Считать, что $\omega \approx \omega'$, $k \approx k'$.

10.2. Выразить групповую скорость $u = dw/dk$ через фазовую скорость света v и $dv/d\lambda$, а также через v и $dn/d\lambda$.

10.3. Изобразим кривой зависимость фазовой скорости волны v от длины волн λ . (рис. 544). Показать, что отрезок OA на оси v , отсекаемый касательной к этой кривой в точке λ_0 , равен групповой скорости для длины волн $\lambda = \lambda_0$. (Построение П. С. Эренфеста).

10.4. Плоское волновое возмущение распространяется в среде с линейным законом дисперсии $v = a + b\lambda$, где v — фазовая скорость, а a и b — постоянные. Показать, что каково бы ни было возмущение, форма его, непрерывно изменяясь, будет периодически восстанавливаться по истечении времени $\tau = d\lambda/dv = 1/b$. Показать, что отношение пути s , пройденного возмущением за промежуток времени τ , к продолжительности этого промежутка равно групповой скорости.

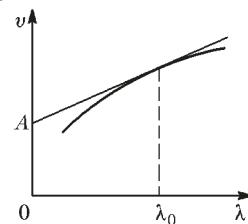


Рис. 544

Указание. Любое плоское возмущение в любой момент времени может быть получено суперпозицией синусоид. Каждая из синусоид перемещается со своей фазовой скоростью в одном и том же направлении. Вследствие этого непрерывно деформируется форма возмущения. Утверждение, сформулированное в задаче, будет доказано, если показать, что существует такое время τ , по истечении которого точно восстанавливается первоначальное взаимное расположение синусоид. Достаточно провести рассуждение для трех синусоид; обобщение на большее число синусоид тривиально.

10.5. Вычислить групповую скорость u для различных законов дисперсии (v — фазовая скорость):

1) $v = a$ ($a = \text{const}$) — недиспергирующая среда, например звуковые волны в воздухе;

2) $v = a\sqrt{\lambda}$ — волны на поверхности воды, вызываемые силой тяжести (гравитационные волны);

3) $v = a/\sqrt{\lambda}$ — капиллярные волны;

4) $v = a/\lambda$ — поперечные колебания стержня;

5) $v = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}$ — электромагнитные волны в ионосфере (c — скорость света в вакууме, λ — длина волны в среде, см. задачу 10.16);

6) $v = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - c^2a^2}}$ — электромагнитные волны в прямолинейном волноводе, заполненном диспергирующей средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu = \mu(\omega)$ (c — скорость света в вакууме, a — постоянная, зависящая от размеров и формы поперечного сечения волновода).

10.6. При каком законе дисперсии немагнитной среды $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, заполняющей прямолинейный волновод или бесконечное пространство, связь между фазовой и групповой скоростями электромагнитных волн принимает вид $vu = c^2$?

Указание. См. предыдущую задачу.

10.7. Показать, что в условиях предыдущей задачи, а также в том случае, когда внутри волновода вакуум, фазовая скорость электромагнитных волн в волноводе превосходит скорость света в вакууме.

10.8. Найти групповую скорость u рентгеновского излучения в среде, если предельный угол полного внутреннего отражения при падении этих волн на среду из воздуха равен α . Показатель преломления рентгеновских волн определяется выражением $n^2 = 1 - \omega_0^2/\omega^2$, где ω_0 — постоянная.

10.9. Майкельсон измерил скорость света в сероуглероде по методу вращающегося зеркала. Показатель преломления сероуглерода для средней длины волны видимого спектра равен $n = 1,64$, а величина $1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} = 0,93$. Определить, какое следует ожидать значение для отношения скорости света в вакууме к измеренной этим методом скорости света в сероуглероде.

10.10. Получить формулу для диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ ионизованного газа в монохроматическом электрическом поле $E = E_0 \cos \omega t$. Столкновениями электронов и ионов пренебречь.

10.11. Может ли показатель преломления быть меньше единицы?

10.12. Диэлектрическая проницаемость плазмы $\epsilon(\omega)$ (см. задачу 10.10) отрицательна, если $\omega < \omega_0$. В этом случае показатель преломления $n = \sqrt{\epsilon}$ — чисто мнимая величина. Выяснить физический смысл чисто мнимого показателя преломления.

10.13. Радиоволна распространяется вверх. Волны каких частот могут проходить через ионосферу? Какие волны будут полностью отражаться?

10.14. Радиосигнал определенной частоты $v = \omega/2\pi$ посыпается вверх и отражается на определенной высоте. Определить концентрацию электронов в точке отражения.

10.15. Концентрация электронов на Солнце на расстоянии $r = 0,06R$ от границы фотосфера ($R = 6,95 \cdot 10^{10}$ см — радиус Солнца) примерно равна $N = 2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$. Могут ли радиоволны из этой области Солнца достигать Земли, если длина волны (в вакууме) равна: 1) $\lambda = 1 \text{ м}$; 2) $\lambda = 10 \text{ м}$; 3) $\lambda = 50 \text{ м}$?

10.16. Получить выражение для фазовой скорости радиоволны в ионосфере в зависимости от длины волны λ в ионосфере. (См. задачу 10.10.)

10.17. Лазер на CO_2 со средней длиной волны $\lambda = 10,6 \text{ мкм}$ излучает две близкие частоты v_1 и v_2 . Излучение такого лазера смешивают в нелинейном кристалле с излучением лазера на Nd ($\lambda_3 = 1,06 \text{ мкм}$). Анализ излучения на комбинационных частотах ($v_1 + v_3$ и $v_2 + v_3$) показал, что соответствующие им длины волн отличаются на $\delta\lambda = 0,5 \text{ нм}$. Определить разность длин волн $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ излучения лазера.

10.18*: Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой $v = 10 \text{ МГц}$ равен $n = 0,90$. Найти концентрацию N электронов в ионосфере, а также фазовую v и групповую u скорости для этих радиоволн.

10.19. При изучении прохождения плоской электромагнитной волны частоты $v = 8 \text{ МГц}$ через плоские однородные слои плазмы с концентрацией свободных электронов $N = 10^6 \text{ см}^{-3}$ найдено, что энергетические коэффициенты пропускания волн отличаются в 10 раз для слоев плазмы, толщины которых отличаются в два раза. Пренебрегая интенсивностью волн, отраженных от задней границы каждого слоя, найти их толщины d_1 и d_2 .

10.20. Для оценки интегральных и средних характеристик межзвездной плазмы можно использовать экспериментальный факт, установленный сразу же после открытия пульсаров. Оказалось, что из-за дисперсии плазмы импульсы радиоизлучения пульсаров на более низких частотах всегда запаздывают по отношению к импульсам более высоких частот. Рассмотрите следующий идеализированный при-

мер. Два монохроматических сигнала с длинами волн $\lambda_1 = 3$ см и $\lambda_2 = 5$ см распространяются в плазме. Определить полное число n свободных электронов на пути сигналов (т. е. их число в цилиндре площадью 1 см² и высотой, равной расстоянию источник–приемник), если испущенные одновременно сигналы запаздывают друг относительно друга на время $\Delta t = 10^{-5}$ с. Концентрация электронов хотя и не постоянна вдоль пути сигналов, но показатель преломления везде весьма близок к единице. Определить также среднюю концентрацию N свободных электронов на пути сигналов, если их относительное запаздывание $\Delta t/t_0 = 10^{-15}$ (t_0 — время распространения от источника до приемника).

10.21. Импульсное излучение пульсара CP 1919+21 на частоте $v_1 = 80$ МГц достигает Земли на $\Delta t = 7$ с позже, чем соответствующий импульс на частоте $v_2 = 2000$ МГц. Оценить расстояние L до пульсара, если принять среднюю концентрацию электронов в межзвездном пространстве равной $N \approx 0,05$ см⁻³.

10.22. Измерение скорости ракеты при вертикальном взлете проводится импульсным радиолокатором, расположенным в точке старта. На экране локатора по оси времени фиксируются моменты посылки двух последовательных радиоимпульсов и их приема после отражения от ракеты. Поскольку скорость распространения радиоволн в ионосфере точно не известна, возникает погрешность в определении скорости ракеты. Найти относительную погрешность в определении скорости ($\Delta v/v$) ракеты, принимая максимальную концентрацию электронов в ионосфере равной $N = 10^6$ см⁻³, а рабочую частоту радиолокатора $v = 400$ МГц.

10.23* С целью проверки теории относительности предполагается с помощью радиоволн точно измерить параметры орбиты спутника Земли. Однако из-за преломления радиоволн в ионосфере, где средняя концентрация электронов $N = 10^5$ см⁻³, возникают ошибки измерений. Оценить минимальную частоту v_{\min} , на которой следует проводить такие наблюдения.

10.24. Определить число свободных электронов на атом Ag, если пленка серебра прозрачна для ультрафиолета, начиная с энергии $\varepsilon = 5$ эВ. Для серебра относительная атомная масса равна $A = 108$, плотность $\rho = 10,5$ г/см³.

10.25. Параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 0,1$ нм падает на тонкую двояковыпуклую линзу из берилля (плотность берилля $\rho = 1,85$ г/см³, порядковый номер $Z = 4$, относительная атомная масса $A = 9$) с поверхностями одинаковых радиусов кривизны $R = 40$ см. Диаметр линзы считать равным $D = 9$ см. Найти угол расхождения φ пучка после линзы.

10.26. На экран из 9Be (плотность $\rho = 1,85$ г/см³) падает плоская волна $\lambda = 100$ Å (от рентгеновского лазера). В экране имеется круглое отверстие диаметром $d = 2,45 \cdot 10^{-2}$ см. Расстояние до точки P наблюдения $L = 1$ м. Определить толщину экрана h , когда

интенсивность в точке P максимальна (поглощением и отражением пренебречь). Определить величину максимальной интенсивности. (Для рентгеновского излучения электроны Be можно считать свободными).

10.27. На круглую пластинку из $^{9}_{4}\text{Be}$ (плотность $\rho = 1,85 \text{ г}/\text{см}^3$) падает плоская монохроматическая волна $\lambda = 100 \text{ \AA}$ (от рентгеновского лазера). Расстояние до точки P наблюдения $L = 1 \text{ м}$. Определить диаметр и толщину пластинки, при которых интенсивность в точке P максимальна. Определить величину максимальной интенсивности. Поглощением в пластинке пренебречь. (Для рентгеновского излучения электроны Be можно считать свободными).

10.28* Зеркало в виде сильно вытянутого параболоида вращения фокусирует мягкие рентгеновские лучи благодаря полному внутреннему отражению при скользящих углах падения α на далекие от вершины части параболоида (рис. 545). Оценить угол схождения лучей φ в фокусе параболоида для рентгеновского излучения с энергией 2 кэВ, если зеркало изготовлено из бериллия (плотность бериллия $\rho = 1,85 \text{ г}/\text{см}^3$, порядковый номер $Z = 4$, относительная атомная масса $A = 9$).

10.29. Рентгеновское излучение падает на поверхность железной пластины (плотность железа $\rho = 7,8 \text{ г}/\text{см}^3$, порядковый номер $Z = 26$, относительная атомная масса $A = 56$). Предполагая, что для

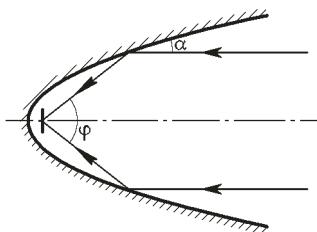


Рис. 545

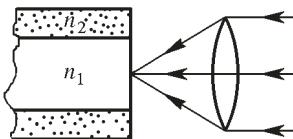


Рис. 546

достаточно жесткого излучения все электроны вещества можно считать свободными, определить, на сколько отличается от единицы показатель преломления железа для рентгеновского излучения с длиной волны в вакууме $\lambda = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ нм}$. Найти угол скольжения β при полном «внешнем» отражении излучения от поверхности железной пластины.

10.30* Оценить мощность N , при которой лазерный луч диаметром $d = 1 \text{ мм}$ вызывает электрический пробой газа. Свободный пробег электронов в газе при условиях опыта равен $l_{\text{пр}} = 10^{-4} \text{ см}$, потенциал ионизации газа $U = 10 \text{ В}$, длина волны излучения $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$.

10.31. Волоконный световод представляет собой стеклянный цилиндр (сердцевину) с показателем преломления n_1 , окруженный оболочкой с показателем преломления n_2 (рис. 546). В сердцевину с по-

мощью короткофокусной линзы вводится импульс света от лазера длительностью $\tau = 5 \cdot 10^{-12}$ с. Оценить длину импульса света на выходе световода длиной $L = 100$ м. При оценке принять во внимание, что диаметр сердцевины d много больше длины волны света λ . Групповая скорость света в стекле $u = 2 \cdot 10^8$ м/с и $n_1 = 1,02n_2$.

10.32* Для одновременной передачи множества сигналов используют геостационарный спутник Земли в качестве ретранслятора. Оценить, сколько телефонных каналов с шириной полосы $\Delta f = 3$ кГц можно одновременно передавать по такой линии связи на средней частоте 10 ГГц. Средняя концентрация свободных электронов на пути сигналов $N = 10^5$ см $^{-3}$. Влияние ионов можно не учитывать.

10.33* «Рентгеновод» представляет собой полый капилляр, стенки которого выполнены из твердого вещества (SiO_2). Захват рентгеновского кванта в «рентгеновод» происходит за счет полного «внутреннего» отражения. Оценить, какими должны быть внутренний диаметр капилляра и радиус изгиба «рентгеновода», чтобы он был пригоден для транспортировки рентгеновских лучей с энергией $\mathcal{E} = 10$ кэВ.

10.34* Найти показатель преломления n газа и его градиент по высоте на поверхности Венеры, атмосфера которой состоит из углекислого газа CO_2 с поляризумостью молекул $\alpha = 2,7 \cdot 10^{-23}$ см 3 . Давление на Венере $P_0 = 100$ атм, температура $t = 500^\circ\text{C}$. Найти радиус кривизны r светового луча, пущенного горизонтально. К каким особенностям атмосферной оптики планеты приводит найденное значение? Ускорение свободного падения на Венере $g_B = 0,84g_3$.

Указание. Радиус r кривизны горизонтального луча определяется соотношением $\frac{1}{r} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dh}$.

10.35. Во сколько раз должна увеличиться плотность атмосферы Земли для того, чтобы в ней, как на Венере, возникла круговая рефракция, при которой луч света обойдет Землю? Показатель преломления воздуха при атмосферном давлении равен $n_0 = 1,0003$ (см. предыдущую задачу).

10.36. Световой луч распространяется в поле тяжести параллельно поверхности Земли. Пренебрегая движением воздуха, определить величину отклонения луча на пути 1 км. Считать давление $P = 1$ атм, температуру воздуха $T = 300$ К, коэффициент преломления воздуха при этих условиях $n = 1 + 3 \cdot 10^{-4}$.

10.37. На плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны $R = 100$ см падает плоская монохроматическая волна, частота которой изменяется со временем по закону $\omega = \omega_0(1 + at)$, $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \ll 1$, $\lambda_0 = 1$ мкм. Определить константу a , если фокус перемещается со скоростью $v = 3$ км/с. Показатель преломления линзы $n = 1,5$. Дисперсия линзы $dn/d\lambda = 10^{-3}$ см $^{-1}$.

10.38. Линейно поляризованный импульс квазимонохроматического излучения проходит через электрооптическую ячейку Покельса длиной $l = 10$ см. Показатель преломления ячейки увеличива-

ют по закону $n(t) = n_0 + at$. Как изменится длительность импульса и его средняя частота после прохождения через ячейку, если $a = 3 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$?

10.39. Показатель преломления некоторой прозрачной среды вблизи частоты $\bar{\omega}$ изменяется по закону $n(\omega) = n_0 - \frac{A}{\omega - \omega_0}$, где $n_0 = 1,5$, $\omega_0 = 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, $A = \text{const}$, $\omega < \omega_0$. Через слой такого вещества толщиной $l = 3 \text{ см}$ проходит короткий световой импульс, средняя частота которого равна $\bar{\omega}$, а спектральная ширина $\Delta\omega \ll |\bar{\omega} - \omega_0|$. Известно, что $|\bar{\omega} - \omega_0| \approx 10^{12} \text{ с}^{-1}$, и $|n(\bar{\omega}) - n_0| = 0,01$. Оценить время прохождения импульса через слой и сравнить это время со временем прохождения такого же расстояния в вакууме.

10.40. Определить время прохождения импульса света через слой вещества толщиной $l = 1 \text{ см}$, показатель преломления которого вблизи средней частоты $\bar{\omega}$ импульса описывается как $n(\omega) = n_0 - A(\omega - \omega_0)$, где $n_0 = 1,5$, A — константа и $\omega_0 = 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ — резонансная частота атомов вещества. Рассмотреть случай $\bar{\omega} < \omega_0$, $|\bar{\omega} - \omega_0| \approx 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $|n(\bar{\omega}) - n_0| \approx 0,1$. Считать спектральную ширину импульса $\Delta\omega \ll |\bar{\omega} - \omega_0|$. Поглощением света пренебречь.

10.41*: Для того чтобы короткий импульс-сигнал, описываемый функцией $f(t)$, передать через диспергирующую среду без искажений, предлагается на входе в среду сформировать плоское волновое возмущение, периодически (с периодом T) повторяя сигнал $f(t)$. На каком минимальном расстоянии от входной плоскости повторяется неискаженная форма сигнала? Закон дисперсии среды в полосе частот, охватываемых сигналом, имеет вид $k(\omega) = B\omega^2$.

10.42. Для того чтобы короткий импульс-сигнал, описываемый функцией $f(t)$, передать через диспергирующую среду (толщина среды L) без искажений, предлагается на входе в среду сформировать плоское волновое возмущение, периодически повторяя сигнал $f(t)$. Закон дисперсии среды в полосе частот сигнала имеет вид $k(\omega) = B\omega^4$. Какова необходимая минимальная частота повторения, при которой на выходе из среды повторяется неискаженная форма сигнала?

10.43. Плазма заполняет полупространство $x > 0$, причем концентрация электронов растет вглубь по закону $N(x) = \mu x$; $\mu = \text{const}$. Перпендикулярно границе $x = 0$ падает электромагнитный волновой пакет со средней частотой ω , уходит в плазму, отражается от зоны критической плотности и через некоторое время τ регистрируется при $x = 0$. Определить время τ .

10.44. В ионосфере Земли (на высоте $\sim 100 \text{ км}$), где концентрация свободных электронов $N = 10^5 \text{ см}^{-3}$ и постоянное магнитное поле $B = 0,5 \text{ Гс}$, вдоль силовых линий магнитного поля могут распространяться электромагнитные волны («свистящие атмосферики») с законом дисперсии вида $k^2 = \frac{4\pi Ne\omega}{cB}$, где k — волновое число, e —

заряд электрона, ω — угловая частота, c — скорость света. Найти фазовую и групповую скорости таких волн, если $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$.

10.45* Из точки A (рис. 547) на спутник, летящий со скоростью v , падает лазерный луч с частотой ν_0 . Отраженный луч регистрируется в точке B . Найти частоту ν принимаемого на Земле сигнала.

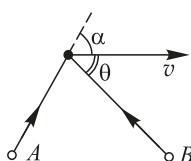


Рис. 547

Оценить разрешающую способность R регистрирующего спектрального прибора, необходимую для обнаружения релятивистской поправки к смещению частоты.

10.46. Найти полуширину линии H_α , излучаемой водородом при температуре 50°C . Считать, что уширение линии вызвано лишь эффектом Доплера. Длина волны линии H_α $\lambda = 6563 \text{ \AA}$.

Причение. Полушириной линии называется величина $\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_{1/2}$, где λ_0 — длина волны, соответствующая центру линии, и $\lambda_{1/2}$ — длина волны, при которой $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0/2$.

10.47. Найти $\Delta\lambda/\lambda$, если источник движется со скоростью v в среде с показателем преломления n .

10.48* Излучение рубинового лазера рассеивается на звуковых колебаниях в воде. При рассеянии света происходит доплеровское смещение частоты. Оценить число штрихов N дифракционной решетки, с помощью которой в 1-м дифракционном порядке можно обнаружить смещение частоты в свете, рассеянном под прямым углом. Скорость звука в воде $v = 1400 \text{ м/с}$, показатель преломления $n = 1,3$. Считать, что в воде есть звуковые волны всевозможных направлений.

10.49. Какое число штрихов N должна иметь дифракционная решетка, чтобы с ее помощью в спектре испускания Солнца (во время полного солнечного затмения) можно было обнаружить гравитационное смещение спектральных линий во 2-м порядке? Данные, необходимые для числовых расчетов, можно получить, зная угловой диаметр Солнца (при наблюдении с Земли) $a_C \approx 0,01 \text{ рад}$ и скорость движения Земли по орбите $v_3 = 30 \text{ км/с}$.

10.50. Спектральные линии, излучаемые нагретым газом, оказываются уширенными вследствие того, что атомы газа движутся с разными скоростями относительно наблюдателя (эффект Доплера). Считая распределение скоростей атомов газа максвелловским, оценить размеры L дифракционной решетки с периодом $d = 1 \text{ мкм}$, которую надо использовать для изучения формы спектральных линий, излучаемых неоном ${}^{20}\text{Ne}$ при температуре $T = 1000 \text{ K}$.

10.51. Двойная звезда состоит из двух близких по массе звезд, вращающихся относительно общего центра с периодом $\tau = 10 \text{ сут}$ и отстоящих друг от друга на расстояние $L = 2 \cdot 10^7 \text{ км}$. Определить, какое число штрихов N дифракционной решетки необходимо для того, чтобы при наблюдении видимого спектра водорода в излучении этих звезд можно было во 2-м порядке заметить вращение

системы. Можно ли таким способом заметить относительное вращение таких звезд, если период $\tau = 10$ лет? Температура поверхности звезд $T = 6000$ К.

10.52. Наблюдаются периодические изменения в спектре излучения двойной звезды, которые обусловлены эффектом Доплера. Спектральные линии периодически с периодом $T = 10$ сут разделяются на две компоненты. Максимальная разница длин волн двух компонент линии водорода $\lambda = 4340 \text{ \AA}$ в излучении этой звезды равна $\Delta\lambda = 8,84 \text{ \AA}$. Предполагая, что двойная звезда состоит из двух одинаковых звезд, найти их массы и расстояние между ними.

10.53* Оценить порядок скорости v , с которой должен удаляться от Солнца космический корабль, чтобы находящийся в нем космонавт, имея в распоряжении спектрометр с дифракционной решеткой, мог заметить движение корабля относительно Солнца при наблюдении видимой части спектра солнечного водорода во 2-м порядке. Какое число штрихов N должна иметь при этом дифракционная решетка? Температура поверхности Солнца $T = 6000$ К.

10.54. В оптическом резонаторе, состоящем из четырех плоских зеркал (рис. 548), световые волны могут распространяться во встречных направлениях по периметру квадрата, сторона которого равна l . Если такой резонатор привести во вращение с угловой скоростью Ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка, резонансные частоты v для встречных волн оказываются неодинаковыми. Объяснить явление и определить разность Δv этих частот.

10.55. Оценить температуру водородной лампы, используемой в качестве источника света в интерферометре Майкельсона, если при смещении одного из зеркал число наблюдаемых интерференционных максимумов составляет $N = 7 \cdot 10^4$. Первоначально зеркала интерферометра были расположены на одинаковых расстояниях от делильной пластиинки. Влиянием протяженности источника пренебречь.

10.56. На плоскую границу плазмы, занимающей полупространство, под углом падения φ падает плоская электромагнитная волна длиной λ . Концентрация электронов плазмы растет вглубь, при этом на поверхности она много меньше критической. Определить концентрацию электронов $N_{\text{кр}}$ внутри плазмы, при которой наступает полное отражение волны.

10.57. На вход оптического световода подается периодическая последовательность коротких импульсов длительностью $t = 0,1$ нс с частотой следования $v = 1 \text{ ГГц}$. Источником света является натриевая лампа, из излучения которой выделяются две желтые линии с длинами волн $\lambda_1 = 589,0 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 589,6 \text{ нм}$. Определить, при какой минимальной длине световода частота следования импульсов на выходе станет равной 2 ГГц . Дисперсия показателя преломления стекла $dn/d\lambda = -1033 \text{ см}^{-1}$. Затухание в стекле не учитывать.

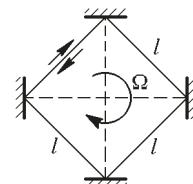


Рис. 548

10.58. Параллельный пучок рентгеновского излучения падает на плоско-вогнутую линзу из графита (плотность графита $\rho = 2,25 \text{ г}/\text{см}^3$, порядковый номер $Z = 6$, относительная атомная масса $A = 12$). Предполагая, что для рентгеновского излучения все электроны вещества можно считать свободными, оценить поперечный размер дифракционного пятна в фокусе линзы r_f для излучения с длиной волны $\lambda = 2 \text{ нм}$. Радиус вогнутой поверхности линзы $R = 60 \text{ см}$, диаметр $D = 5 \text{ см}$.

10.59. Оценить диапазон длин волн, в котором можно обнаружить источник космического радиоизлучения, находящийся за Луной, если угловой размер лунного диска $\psi \approx 10^{-2} \text{ рад}$. При этом среднюю высоту неровностей лунной поверхности принять равной $h \approx 100 \text{ м}$, а среднюю концентрацию электронов в ионосфере Земли $N \approx 10^6 \text{ см}^{-3}$.

10.60. Вибратор с частотой $v_0 = 100 \text{ Гц}$ генерирует на поверхности воды капиллярные волны. Длительность генерируемого импульса $\tau_0 = 1 \text{ с}$. Через сколько времени волновое возмущение достигнет приемника, находящегося на расстоянии $l = 6 \text{ м}$? Закон дисперсии капиллярных волн $v(\lambda) = a/\sqrt{\lambda}$, где $a = \sqrt{2\pi\sigma/\rho}$, $\sigma = 70 \text{ дин}/\text{см}$ — коэффициент поверхностного натяжения, $\rho = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ — плотность воды.

10.61. Гармонический источник с частотой ω возбуждает на поверхности воды капиллярно-гравитационные волны, имеющие закон дисперсии $\omega = \sqrt{gk + (\sigma k^3/\rho)}$, где k — волновое число, $\sigma = 70 \text{ дин}/\text{см}$ — коэффициент поверхностного натяжения воды, $\rho = 1 \text{ г}/\text{см}^3$, g — ускорение свободного падения. Определить частоту источника и длину волны, для которой скорость волны минимальна. Найти эту скорость.

10.62. В море на глубине $H_1 = 5 \text{ км}$ в результате землетрясения зародились плоские волны цунами высотой $a_1 = 3 \text{ м}$. Оценить высоту волн цунами у берега, где глубина моря $H_2 = 15 \text{ м}$. Из-за дисперсионных свойств среды фазовая скорость волн цунами $v \propto \sqrt{H}$. Энергия единицы длины фронта цунами по пути к берегу практически не теряется.

10.63. Морские волны при подходе к берегу выстраиваются вдоль береговой линии. Рассчитать, под каким углом к нормали к прямолинейному берегу подойдут волны, если далеко в море на большой глубине, где длина волн $\lambda = 50 \text{ м}$, а фазовая скорость $v_0 = \sqrt{g\lambda/(2\pi)}$, они движутся под углом $\alpha_0 = 15^\circ$. Глубина моря постепенно уменьшается до $h \sim 0,5 \text{ м}$, где скорость волн $v = \sqrt{gh}$.

10.64. На научно-исследовательском судне исследовали волнение, вызванное упавшим в океан метеоритом, т. е. зависимость частоты колебаний ω приходивших квазимонохроматических волн от времени t (см. таблицу, время $t = 0$ соответствует началу наблюдений). Закон дисперсии этих волн в океане $v = \sqrt{g\lambda/(2\pi)}$. Оценить рассто-

жение от корабля до места падения метеорита. Время прихода волн определяется их групповой скоростью.

t , час	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
ω , с^{-1}	1,1	1,26	1,46	1,7	1,9	2,02	2,24	2,4	2,5	2,73

10.65. В реке при обтекании плоского препятствия образовались неподвижные относительно берега волны на поверхности воды. Длины образовавшихся волн по разные стороны от препятствия отличаются в 10 раз (см. рис. 549). Какова скорость течения реки? Закон

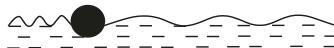


Рис. 549

дисперсии волн $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$, где коэффициент поверхностного напряжения воды $\sigma = 73$ дин/см.

10.66. Найти время распространения электромагнитного импульса вдоль основания стеклянной призмы с разрешающей способностью $R = 10^4$. Длина волны $\lambda = 10^{-5}$ см. Оптическая длина основания призмы $b = 17$ см.

10.67. Предположим, что концентрация N_e электронов в атмосфере Земли изменяется с высотой h по линейному закону $N_e = ah$, достигая на высоте $h_0 = 40$ км значения $(N_e)_0 = 2,5 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$. При радиозондировании атмосферы вертикально вверх посыпается короткий электромагнитный импульс со средней частотой $f_0 = 10$ МГц. Найти время, через которое импульс возвратится на Землю, отразившись от ионосферного слоя с критической концентрацией электронов. На какой высоте h_{kp} произойдет отражение?

10.68. Ракета-зонд, на борту которой установлен передатчик радиосигналов с частотой $f_0 = 10$ МГц, движется вертикально вверх со скоростью $v = 0,6$ км/с. При прохождении верхних слоев атмосферы принимаемый на Земле сигнал оказался смещенным по частоте на $\Delta f = 10$ Гц. Оценить концентрацию электронов в верхних слоях атмосферы.

10.69. При постоянном расстоянии l между удаленным источником и приемником электромагнитных волн в результате внешнего воздействия (например, вспышки космического излучения) меняется со временем со скоростью \dot{n} показатель преломления среды. Найти вызванное этим относительное смещение $\Delta\omega/\omega$ частоты регистрируемого приемником сигнала. Какой скорости v источника найденное смещение может быть по ошибке приписано?

10.70. Электромагнитное излучение проходит через газохранилище, заполненное газом, давление которого растет со временем с постоянной скоростью \dot{P} при постоянной температуре T . Найти вызванное этим относительное смещение $\Delta\omega/\omega$ частоты сигнала, реги-

стрируемого приемником на расстоянии l от источника излучения. Поляризуемость молекул газа принять равной α .

10.71. Прямоугольная призма из прозрачного материала с показателем преломления n движется вверх с нерелятивистской скоростью v . Призма пересекает горизонтальный лазерный луч (рис. 550).

Определить относительное изменение частоты $\Delta\omega/\omega$ излучения, принимаемого неподвижным приемником, расположенным на пути лазерного луча. Угловым смещением луча, вышедшего из призмы, пренебречь.

10.72. При вертикальном зондировании ионосферы передатчик геофизической ракеты посылает сигнал на частоте $f_0 = 50$ МГц, а приемник, расположенный в точке старта, принимает сигнал на частоте f и фиксирует доплеровский сдвиг $\Delta f = f - f_0$. Из-за нестабильности ионизированной оболочки Земли интеграл электронной концентрации N_e в вертикальном столбе от точки старта до верхней точки подъема испытывает медленные изменения. В момент запуска ракеты

можно принять $\frac{d}{dt} \int_0^{h_{\max}} N_e(h) dh = 5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Какими будут сдвиг частоты Δf и кажущаяся скорость v ракеты в верхней точке траектории, где ракета остановится? Считать, что частота передатчика на всех участках траектории значительно превышает частоту плазменных колебаний.

10.73. Современная космическая навигационная система определения наземных координат GPS основана на измерениях дальности наземного приемника потребителя от нескольких искусственных спутников Земли (ИСЗ), координаты которых в любой момент времени известны с высокой точностью, по времени прохождения импульсного сигнала от ИСЗ до приемника. Земная атмосфера состоит из неионизированного приземного слоя некоторой высоты H (тропосфера) и ионизированной части на высотах $h > H$ (ионосфера). Определить ошибку Δ при измерении дальности L до ИСЗ, вызванную прохождением сигнала через атмосферу Земли. Считать, что спутник находится в зените в высоких слоях ионосферы ($L > H$). Несущая частота радиосигнала спутника $f_0 = 1227$ МГц. В тропосфере показатель преломления радиоволн $n(h) = 1 + 3 \cdot 10^{-4} \cdot (1 - h/H)$; $H = 10$ км; при $h > H$ без учета влияния ионизации $n = 1$. Считать известным полное число электронов на пути сигнала (т. е. их число

в столбе сечением 1 см^2 и высотой L) $N = \int_0^L N_e(h) dh = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$, N_e — концентрация свободных электронов. Частота радиоволн значительно превышает частоту плазменных колебаний.

10.74. Земная атмосфера состоит из тропосферы, которая простирается от поверхности Земли до некоторой высоты H , и ионосферы ($h > H$). В тропосфере отсутствует ионизация воздуха и показатель

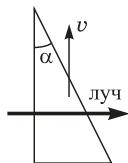


Рис. 550

преломления радиоволн равен $n(h) = 1 + 3 \cdot 10^{-4} \cdot (1 - h/H)$, где $H = 7$ км. При $h > H$ без учета влияния ионизации $n = 1$. В ионосфере воздух ионизирован. Предположим, что искусственный спутник Земли (ИСЗ) находится в высоких слоях ионосферы в зените наземной станции приема. Спутник излучает радиоволны некоторой частоты ω . Определить частоту ω радиоволн, для которых фазовый путь (в радиофизике — синоним оптического пути) в атмосфере $\Phi = \int_0^L N_e(h) dh$ равен истинному расстоянию L от ИСЗ до наземной станции приема. Считать известным полное число N электронов на пути сигнала (т. е. их число в цилиндре сечением 1 см^2 и высотой L) $N = \int_0^L N_e(h) dh = 5 \cdot 10^{13}$ см, N_e — концентрация свободных электронов. Частота радиоволн значительно превышает частоту плазменных колебаний.

10.75. При изучении ионизированной оболочки Земли — ионосферы — применяется метод дисперсионного интерферометра. С космического зонда, падающего вертикально вниз в гравитационном поле Земли со скоростью $v = 1$ км/с, два передатчика излучают радиоволны на частотах $f_1 = 30$ МГц и $f_2 = 3f_1 = 90$ МГц. Приемник, расположенный в точке падения зонда на Землю, принимая и обрабатывая эти сигналы, измеряет приведенную разность частот $|\Delta f| = |f'_2 - 3f'_1|$, где f'_1 и f'_2 — частоты сигналов, принятых от первого и второго передатчика соответственно. Определить концентрацию электронов N_e в ионосфере, если $|\Delta f| = 5$ Гц. Для исследуемого участка ионосферы можно считать, что $2\pi f_1 \gg \omega_{\text{пл}}$, где $\omega_{\text{пл}}$ — плазменная частота. Считать, что за время регистрации сигнала концентрация электронов в месте нахождения зонда практически не изменилась.

10.76. Для измерения толщины ионосферы на космическом аппарате используется двухлучевой интерферометр, в котором один луч, посыпаемый с Земли, проходит через ионосферу, а второй генерируется на самом аппарате. Найти, на сколько полос сдвигается интерференционная картина по сравнению с измерениями в вакууме. Частота сигнала $f = 10$ ГГц, высота ионосферы $H = 500$ км, средняя концентрация электронов в ней $N_e = 10^5 \text{ см}^{-3}$. Считать, что аппарат находится на верхней границе ионосферы, а нижняя граница совпадает с поверхностью Земли.

10.77. Короткий радиоимпульс длительностью $\tau = 0,2$ мкс на несущей частоте $v_0 = 100$ МГц распространяется в ионосфере, критическая длина волны для которой $\lambda_{\text{кр}} = 10$ м. Оценить дистанцию, которую импульс пробегает в ионосфере без заметного искажения формы.

10.78*: Во входном сечении волновода квадратного сечения ($a \times a = 25 \text{ см}^2$) с идеально проводящими стенками сформирован радиоимпульс $E_{\text{вх}}(t)$ на несущей частоте $v_0 = 10^{10}$ Гц (колебания

поля E параллельны одной из стенок волновода $E = E_y$, причем распределение поля по сечению согласовано с основой модой волновода). Оценить длительность импульса, при которой приемник, расположенный в выходном сечении волновода (длина волновода $l = 10$ м) зарегистрирует неискаженный из-за дисперсии сигнал $E_{\text{вых}}(t) \simeq E_{\text{вх}}(t)$.

§ 11. Поляризованный свет.

Элементы кристаллооптики и нелинейной оптики

11.1. Найти наименьшую толщину d пластинки кварца, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий плоскополяризованный свет выходил поляризованным по кругу ($n_e = 1,5533$, $n_o = 1,5442$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см).

11.2. При какой толщине пластинка из исландского шпата является пластинкой в четверть волны для света с длиной волны $\lambda_1 = 5880$ Å и может поворачивать плоскость поляризации на 90° для света с длиной волны $\lambda_2 = 5740$ Å? Разность показателей преломления для обычного и необычного лучей принять равной 0,2 для обеих длин волн. Считать, что обычный и необычный лучи идут по одному направлению.

11.3. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку из исландского шпата, вырезанную параллельно оптической оси. Определить разность хода Δ обычного и необычного лучей, прошедших через пластинку. Толщина пластинки равна 0,03 мм; $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$.

11.4. Какова должна быть наименьшая толщина d пластинки слюды, чтобы она могла служить в качестве пластинки в $1/4$ волны для света натриевого источника, если для этого света показатели преломления волн, идущих перпендикулярно к пластинке, соответственно равны $n_1 = 1,5941$ и $n_2 = 1,5887$?

11.5. Почему, если через плоскопараллельную двоякпреломляющую кристаллическую пластинку смотреть на удаленный предмет, видно одно изображение, а не два, как в случае близко расположенных предметов?

11.6. Наблюдатель смотрит на близкий предмет через плоскопараллельную двоякпреломляющую пластинку из исландского шпата и видит два прямых увеличенных изображения предмета, когда между пластинкой и предметом помещена собирающая линза на расстоянии 4 см от предмета. После того как к линзе вплотную приложили собирающее очковое стекло с оптической силой в 5 дптр, стало видно только одно изображение предмета. Определить фокусное расстояние f линзы.

11.7. Ветровое стекло и фары автомашин снабжаются пластинками из поляриоида. Как должны быть расположены эти пластинки,

чтобы шофер мог видеть дорогу, освещенную светом его фар, и не страдал бы от света фар встречных машин?

11.8. Узкий пучок неполяризованного света падает нормально на пластинку исландского шпата и затем нормально на вторую такую же пластинку, главная плоскость которой образует с главной плоскостью первой пластинки угол 30° . Затем свет падает на экран. Описать полученную картину и найти относительную интенсивность наблюдаемых на экране пятен.

П р и м е ч а н и е. Пластиинки вырезаны так, что оптическая ось составляет угол γ с плоскостью пластиинки. При этом $0 \leq \gamma < 90^\circ$.

11.9. В интерференционном опыте Юнга между щелью S и щелями S_1 и S_2 (рис. 551) введен поляроид P , главные оси которого параллельны или перпендикулярны к щелям S_1 и S_2 . Как изменится

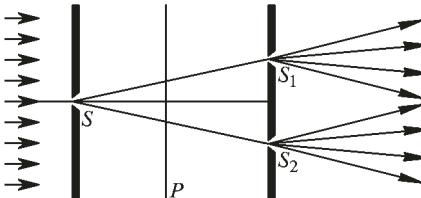


Рис. 551

интерференционная картина на экране, если щели S_1 и S_2 прикрыть пластиинками в полволны, ориентированными взаимно перпендикулярно друг к другу (параллельно и перпендикулярно к щелям)? Что произойдет, если поляроид P повернуть на 90° ? Какая картина будет наблюдаться, если убрать поляроид? Рассмотреть ту же задачу, если вместо пластиинки в полволны используется пластиинка в четверть волны. Щели S_1 и S_2 предполагаются узкими (порядка длины волны), а расстояние между ними большим по сравнению с их шириной.

11.10*: Частично линейно поляризованный свет рассматривается через николь. При повороте николя на 60° от положения, соответствующего максимальной яркости, яркость пучка уменьшается в два раза. Найти степень поляризации пучка $\Delta = \frac{\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}}{\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}}$ и отношение интенсивностей естественного и линейно поляризованного света (\mathcal{I}_{\max} и \mathcal{I}_{\min} — максимальная и минимальная интенсивности света, проходящего через николь).

11.11. Определить, во сколько раз изменится интенсивность частично поляризованного света, рассматриваемого через николь, при повороте николя на 60° по отношению к положению, соответствующему максимальной интенсивности. Степень поляризации света $\Delta = \frac{\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}}{\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}} = 0,5$.

11.12. Один поляроид пропускает 30% света, если на него падает естественный свет. После прохождения света через два таких по-

поляроида интенсивность падает до 9%. Найти угол φ между осями поляроидов.

11.13. Некогерентная смесь линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через поляроид. Найдено положение поляроида, соответствующее максимальной интенсивности прошедшего света. При повороте поляроида из этого положения на угол $\alpha = 30^\circ$ интенсивность света уменьшалась на $p = 20\%$. Найти отношение интенсивности света \mathcal{I}_k , поляризованного по кругу, к интенсивности линейно поляризованного света \mathcal{I}_l .

11.14. Некогерентная смесь линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через николь. Найдено положение николя, при котором интенсивность проходящего света максимальна. При повороте николя от этого положения на некоторый угол вокруг оси пучка интенсивность проходящего света уменьшается в $m = 2$ раза по сравнению с максимальной и во столько же раз увеличивается по сравнению с минимальной. Найти отношение интенсивности \mathcal{I}_k света, поляризованного по кругу, к интенсивности света \mathcal{I}_l , поляризованного линейно.

11.15. Как изменится результат предыдущей задачи, если линейно поляризованный свет и свет, поляризованный по кругу, будут когерентны?

11.16. Смесь света, поляризованного по кругу, и естественного рассматривается через кристаллическую пластинку в четверть волны и николь. При вращении николя вокруг оси светового пучка найдено, что максимальная интенсивность света, прошедшего через систему, в $m = 3$ раза превосходит минимальную интенсивность. Найти отношение интенсивности света \mathcal{I}_k , поляризованного по кругу, к интенсивности естественного света \mathcal{I}_e .

11.17. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ , поляризованный по правому кругу, падает нормально на пластинку в полволны. Найти состояние поляризации света, прошедшего через эту пластинку.

11.18. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ падает нормально на поляроид, а затем на пластинку в полволны. Главная плоскость поляроида (в которой лежит электрический вектор пропускаемой им волны) составляет угол α с осью этой пластинки. Найти состояние поляризации прошедшего света на выходе из пластинки в полволны.

11.19* Параллельный пучок монохроматического света проходит через два николя, главные плоскости которых повернуты друг относительно друга на угол $\alpha = 20^\circ$. Между николями ставится пластинка одноосного кристалла, вырезанная параллельно оптической оси и вносящая разность хода $\lambda/2$ между обыкновенным и необыкновенным лучами. Какой угол β должна составлять оптическая ось пластинки с главным направлением первого николя, чтобы свет через эту систему не прошел?

11.20. Для сравнения яркостей двух поверхностей, освещаемых неполяризованным светом, одну из них рассматривают непосредственно, а другую через два николя. Каково отношение этих яркостей, если освещенность обеих поверхностей кажется одинаковой при угле между николями $\alpha = 60^\circ$? Считать, что потери света в каждом николе на отражение и поглощение составляют $p = 10\%$ от падающего света.

11.21. Имеется горизонтальный параллельный пучок эллиптически поляризованного света. Обнаружено, что при прохождении пучка через пластинку в $\lambda/4$ при определенной ее ориентации свет оказывается линейно поляризованным под углом $\alpha_1 = 23^\circ$ к вертикали. Если пластинку повернуть на угол 90° , то весь свет снова оказывается линейно поляризованным под углом $\alpha_2 = 83^\circ$ к вертикали. Найти отношение a/b полуосей эллипса поляризации и угол φ наклона большой оси.

11.22. Некогерентная смесь неполяризованного, линейно поляризованного света и света с круговой поляризацией анализируется при помощи быстро вращающегося поляризатора и фотоприемника, ток которого зависит от интенсивности света. Оказалось, что глубина модуляции фототока равна $m_1 = 0,1$. После установки на пути лучей пластинки $\lambda/4$ было выяснено, что свет по-прежнему представляет собой некогерентную смесь неполяризованного, линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, но теперь глубина модуляции фототока составила $m_2 = 0,2$. Определить степень поляризации света.*)

11.23. Плоская монохроматическая эллиптически поляризованная волна падает на кристаллическую пластинку, после которой установлен анализатор. Оказалось, что существует такое положение кристаллической пластинки, при котором интенсивность света, вышедшего из анализатора, не зависит от положения анализатора и равна \mathcal{I}_1 . В отсутствие пластинки максимальная интенсивность света, которая может быть получена после анализатора, составила \mathcal{I}_2 . Определить отношение полуосей эллипса поляризации.

11.24.* Плоская световая волна эллиптически поляризована. Длины полуосей эллипса колебаний равны соответственно a и b . Какую кристаллическую пластинку надо поставить на пути распространения волны и как надо ориентировать эту пластинку, чтобы получить свет, поляризованный по кругу: 1) с тем же направлением вращения; 2) с противоположным направлением вращения?

11.25. На плоский экран, состоящий из двух поляроидных полуплоскостей, граничащих друг с другом вдоль прямой, перпендикулярно падает пучок параллельных лучей, поляризованных по кру-

*) В этом разделе удобнее вычислять степень поляризации света так же, как в задаче 11.10: $\Delta = (\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}) / (\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min})$. Эта формула, конечно, соответствует введенной ранее в § 2.

гу (рис. 552). Оси поляроидов взаимно перпендикулярны. Интенсивность падающего света равна \mathcal{I}_0 . Определить интенсивность \mathcal{I} света в точке P , расположенной в плоскости, перпендикулярной плоскости экрана и проходящей через границу раздела между поляроидами. Как будет поляризован свет в точке P ?

11.26. Плоская волна монохроматического света длиной λ , поляризованного по кругу, создает в точке P интенсивность \mathcal{I}_0 . На пути волны ставят большую пластинку из идеального поляроида, как

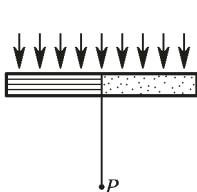


Рис. 552

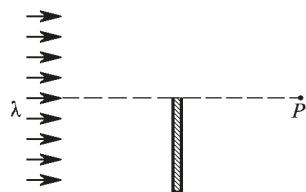


Рис. 553

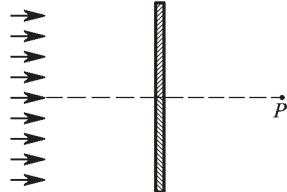


Рис. 554

показано на рис. 553. Показатель преломления вещества поляроида n . Найти толщину d пластинки, при которой интенсивность света в точке P будет максимальной. Чему равна \mathcal{I}_{\max} ?

11.27. Плоская волна монохроматического света, поляризованного по кругу, создает в точке P интенсивность \mathcal{I}_0 . На пути волны

ставят две большие пластинки в $\lambda/4$, как показано на рис. 554. Главные направления пластинок ориентированы взаимно перпендикулярно. Найти интенсивность \mathcal{I} в точке P .

11.28. Плоская волна круговой поляризации (длина волны λ) падает на полубесконечный экран (рис. 555), изготовленный из поляроида с показателем преломле-

ния для разрешенного направления n ($n - 1 \ll 1$) и толщиной $a = \lambda/[4(n - 1)]$. Какова степень поляризации света в точке наблюдения P ?

11.29. Бесконечный экран состоит из двух поляроидных полу-плоскостей, граничащих друг с другом вдоль прямой. Главное направление одной из полу-плоскостей параллельно, а другой перпендикулярно к этой прямой. На экран перпендикулярно к его поверхности падает пучок параллельных лучей естественного света с длиной волны λ . Описать качественно дифракционную картину, получающуюся за экраном.

11.30. На прозрачную пластинку в полволны, ограниченную прямолинейным краем, нормально падает пучок параллельных линейно поляризованных лучей интенсивностью \mathcal{I}_0 (рис. 556). Плоскость поляризации падающего света наклонена под углом 45° к краю пластиинки. Определить интенсивность \mathcal{I} прошедшего света в точке P , расположенной в плоскости, перпендикулярной к плоскости пластиинки.

ки и проходящей через ее край. Какова будет в общем случае (при произвольной толщине пластиинки) поляризация прошедшего света в точке P ?

11.31. Плоская поляризованная по кругу монохроматическая волна света с длиной λ и интенсивностью \mathcal{I}_0 падает на диск, вырезанный из идеального поляроида, показатель преломления которого равен n . Диск закрывает для некоторой точки P одну зону Френеля. Какова должна быть толщина d диска, чтобы интенсивность света в точке P была максимальной? Найти эту интенсивность \mathcal{I}_{\max} .

11.32. Круглое отверстие в непрозрачном экране содержит для точки наблюдения P одну зону Френеля. Отверстие закрыто поляроидом так, что направления колебаний в первой и второй половинах зон взаимно перпендикулярны. Отверстие освещается светом, поляризованным по кругу. Определить интенсивность света \mathcal{I} в точке P , если в отсутствие экрана она равна \mathcal{I}_0 . Как будет поляризован свет в точке наблюдения? Считать, что в поляроидах нет поглощения света разрешенной поляризации.

11.33. Определить интенсивность света \mathcal{I} в точке P экрана, на который падает монохроматический свет интенсивностью \mathcal{I}_0 , если на пути поставить диск из optически активного вещества, закрывающий полторы зоны Френеля и поворачивающий плоскость поляризации на 90° . Отражением и поглощением света пренебречь.

11.34. Параллельный пучок неполяризованного монохроматического света падает на пластиинку в $\lambda/4$. Интенсивность света в некоторой точке P за пластиинкой равна \mathcal{I}_0 . Из пластиинки вырезают диск, закрывающий одну зону Френеля для точки P . Диск повернули вокруг луча на угол 90° и поставили на место. Какой стала интенсивность \mathcal{I} в точке P ?

11.35. Параллельный пучок неполяризованного монохроматического света падает на пластиинку в $\lambda/2$. Интенсивность света в некоторой точке наблюдения P за пластиинкой равна \mathcal{I}_0 . Из пластиинки вырезают диск, закрывающий полторы зоны Френеля для точки P . Диск повернули вокруг луча на угол $\pi/2$ и поставили на место. Какой стала интенсивность \mathcal{I} в точке P ?

11.36. Из кристаллической пластиинки $\lambda/2$ вырезаны диски диаметром в одну и две зоны Френеля для точки P . Диски вносят в пучок света вплотную друг к другу, так что у них совпадают: 1) разноименные главные направления; 2) одноименные главные направления. При этом для света, поляризованного по одному из главных направлений, ни амплитуда, ни фаза колебаний не изменились. Во сколько раз изменится интенсивность света той же поляризации в случаях 1) и 2), если малый диск повернуть на 90° ?

11.37. Плоская монохроматическая волна, поляризованная по кругу, падает на диск, вырезанный из пластиинки $\lambda/2$. Для точки наблюдения на оси диск закрывает три первые зоны Френеля. Толщи-

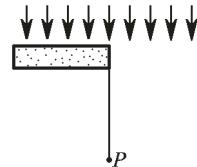


Рис. 556

на диска подобрана так, что он вносит дополнительный оптический путь в $3\lambda/2$ для необыкновенного луча. Во сколько раз изменится интенсивность в точке наблюдения, если диск убрать? Поглощением и отражением света пренебречь.

11.38. Зонная пластинка из N зон Френеля сделана из поляриода. Во всех четных зонах поляриод ориентирован вертикально, во всех нечетных — горизонтально. Какова будет интенсивность света в основном фокусе пластиинки, если она освещается неполяризованным светом?

11.39. В непрозрачном экране, на который нормально падает плоская линейно поляризованная волна интенсивностью \mathcal{I}_0 , вырезано круглое отверстие размером в одну зону Френеля для некоторой точки наблюдения, лежащей на оси системы. В отверстие вставлены пластиинки $\lambda/4$ в форме полудисков, одноименные оси которых ориентированы взаимно перпендикулярно. Направление колебаний в падающей волне составляет 45° с главными направлениями пластиинок в обоих случаях. Какова интенсивность колебаний в точке наблюдения?

11.40. В непрозрачном экране, на который нормально падает плоская линейно поляризованная волна интенсивностью \mathcal{I}_0 , вырезано круглое отверстие размером в две зоны Френеля для некоторой точки наблюдения, лежащей на оси системы. Первая зона перекрыта пластиинкой $\lambda/4$ в форме диска, а вторая — пластиинкой $\lambda/4$ в форме кольца. Одноименные оси пластиинок ориентированы взаимно перпендикулярно. Главные направления пластиинок в обоих случаях составляют угол 45° с направлением колебаний в падающей волне. Какова интенсивность колебаний в точке наблюдения?

11.41. Параллельный пучок линейно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ и вектором \mathbf{E}_0 , лежащим в плоскости рис. 557,

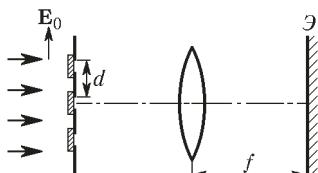


Рис. 557

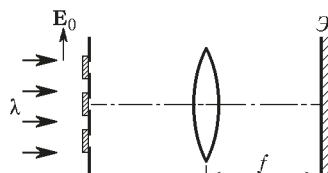


Рис. 558

нормально падает на три щели, закрытые одинаковыми двоякотрехмлюющими пластиинками в $\lambda/4$. Крайние щели при этом закрыты одинаково ориентированными пластиинками так, что вектор \mathbf{E}_0 совпадает с одним из главных направлений этих пластиинок, а средняя пластиинка повернута относительно них на 90° . Интерференционная картина рассматривается на экране с помощью линзы с фокусным расстоянием $f = 1 \text{ м}$. Найти распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы, считая размер щелей пренебрежимо малым по сравнению с расстоянием $d = 1 \text{ см}$ между ними. Определить видность V интерференционной картины, а также ее период Λ .

11.42. Параллельный пучок линейно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 500$ нм с вектором \mathbf{E}_0 , лежащим в плоскости рис. 558, нормально падает на три щели, закрытые одинаковыми двоякотрехломляющими пластинками в $\lambda/2$. Первые две рядом стоящие щели при этом закрыты одинаково ориентированными пластинками так, что вектор \mathbf{E}_0 падающей волны совпадает с одним из главных направлений этих пластинок. Третья пластина повернута относительно первых двух на 90° . Интерференционная картина рассматривается на экране с помощью линзы с фокусным расстоянием $f = 2$ м. Считая размер щелей пренебрежимо малым по сравнению с расстоянием $d = 0,5$ см между ними, найти распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы. Определить также видность интерференционной картины и ее период на экране \mathcal{E} .

11.43. Параллельный пучок поляризованного по кругу монохроматического света падает на решетку с периодом d и шириной щелей $b = d/2$. Каждая щель перекрыта двумя полосками поляроида одинаковой ширины $b/2$ с взаимно перпендикулярными разрешенными направлениями. Какова поляризация света в нулевом и боковых дифракционных максимумах ($\pm 1\text{-м}, \pm 2\text{-м}, \dots$)?

11.44. Как изменится разрешающая способность дифракционной решетки, если одну ее половину прикрыть поляроидом, ориентированным параллельно штрихам решетки, а другую — поляроидом, ориентированным перпендикулярно к штрихам? Будет ли зависеть разрешающая сила решетки от поляризации падающего света?

11.45. В предыдущей задаче перед и за решеткой дополнительно ставятся два поляроида, главные направления которых параллельны друг другу и образуют угол 45° с направлением штрихов решетки. Как изменится разрешающая способность такой решетки по сравнению с ничем не прикрытой решеткой?

11.46. Параллельный пучок циркулярно поляризованного света с длиной волны λ падает нормально на дифракционную решетку. Как изменится расстояние между главными максимумами и интенсивность нулевого максимума, если щели решетки перекрыть пластинками в $\lambda/4$, причем так, что одноименные главные направления на четных и нечетных щелях взаимно перпендикулярны? Какова поляризация света в нулевом, четных и нечетных дифракционных максимумах?

11.47. Наблюдается дифракция Фраунгофера монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм на плоской решетке. Как изменятся расстояния между дифракционными максимумами и интенсивность нулевого максимума, если каждую вторую щель закрыть полимерной пленкой толщиной $d = 13,5$ мкм, показатель преломления которой $n = 1,1$? Отражением света от пленки пренебречь.

11.48. Наблюдается дифракция Фраунгофера монохроматического циркулярно поляризованного излучения на плоской решетке. Как изменяются расстояния между дифракционными максимумами и интенсивность нулевого максимума, если щели закрыть пластинками

в $\lambda/2$ так, что главные оси пластинок в соседних щелях будут взаимно перпендикулярны?

11.49. Плоская монохроматическая линейно поляризованная световая волна падает нормально на периодическую структуру, состоящую из чередующихся полосок поляроида, главные плоскости которых взаимно перпендикулярны. Отношение ширины полосок разных типов равно трем. Направление колебания электрического вектора волны составляет угол α с главной плоскостью полоски с меньшей шириной. Определить направления на главные максимумы первого порядка и их интенсивности, если интенсивность волны в нулевом максимуме равна \mathcal{I}_0 .

11.50*: Линейно поляризованное лазерное излучение с длиной волны $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$ падает нормально на тонкую магнитооптическую прозрачную пленку с чередующейся одномерной доменной структурой. Свет, проходящий через соседние домены, испытывает поворот плоскости поляризации в противоположные стороны на угол $\pi/2$. Ширина доменов одинакова и равна d . Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы. Определить интенсивность света в дифракционных максимумах нулевого, 1-го и 2-го порядков, если известно, что при освещении тем же излучением обычной амплитудной решетки, состоящей из чередующихся прозрачных и непрозрачных полосок шириной d , интенсивность в максимуме 1-го порядка оказывается равной \mathcal{I} .

11.51. Световые волны с одинаковыми частотой и линейной поляризацией распространяются в плечах двухлучевого интерферометра. На выходе из него фотоприемник регистрирует интенсивность света \mathcal{I} . Оказалось, что при изменении оптического пути в одном из плеч она колеблется между \mathcal{I}_{\max} и \mathcal{I}_{\min} так, что видность картины $V = (\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}) / (\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}) = 1$. Какой будет ее наименьшая величина, если в одно из плеч интерферометра поместить прозрачную кристаллическую пластинку $\lambda/4$? Считать, что поток проходит через пластинку однократно.

11.52. Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией падает нормально на систему из пластиинки $\lambda/2$ и поляроида. Какова будет интенсивность прошедшей волны, если между ними разместить некоторое произвольное число пластинок $\lambda/4$? Главные оси всех пластинок и поляроида параллельны. Интенсивность падающей волны \mathcal{I}_0 .

11.53. Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией падает на систему из пластиинки $\lambda/4$, нескольких пластинок $\lambda/2$ и поляроида. Главные направления всех пластинок и поляроида параллельны. Какова будет интенсивность прошедшей волны, если интенсивность падающей \mathcal{I}_0 ?

11.54. Параллельный пучок естественного света интенсивностью \mathcal{I}_0 и длиной волны λ падает на систему из двух скрещенных поляроидов P_1 и P_2 и клина K из кварца с малым преломляющим углом α . Показатели преломления кварца равны n_e и n_o . Оптическая

ось клина параллельна его ребру и составляет угол 45° с разрешенными направлениями поляроидов (рис. 559). Пройдя через систему, свет падает на белый экран \mathcal{E} . Найти распределение интенсивности света $\mathcal{I}(x)$ на экране. Что увидит наблюдатель на экране \mathcal{E} , если между ним и поляроидом P_2 расположить линзу так, чтобы экран оказался в ее фокальной плоскости?

11.55. На систему, состоящую из

чередующихся $N + 1$ поляроидов и N пластинок кварца, вырезанных параллельно оптической оси, падает плоская монохроматическая волна длиной λ (рис. 560). Главные направления всех поляроидов параллельны и составляют угол 45° с оптической осью пластинок. Волна поляризована вдоль главного направления поляроида. Толщины пластинок равны $d, 2d, \dots, 2^{N-1}d$.

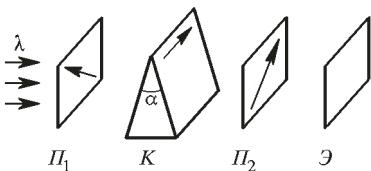


Рис. 559

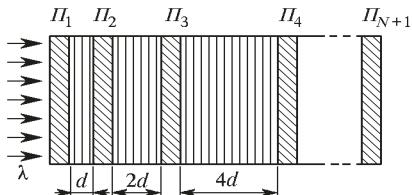


Рис. 560

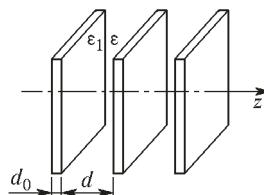


Рис. 561

Показатели преломления кварца равны n_o и n_e . Определить амплитуду A волны на выходе из системы, если на входе она равна A_0 . Отражением света на границах пластинок и поляроидов пренебречь. Чему равен коэффициент пропускания этой системы?

11.56. На периодическую структуру, состоящую из тонких параллельных диэлектрических пластин, падает плоская монохроматическая волна (рис. 561). Толщины пластин равны d_0 , расстояние между ними d , диэлектрическая проницаемость пластин равна ϵ_1 , окружающей среды ϵ . Длина волны значительно больше d_0 и d . Показать, что структура аналогична одноосному кристаллу, и определить показатели преломления обычного n_o и необыкновенного n_e лучей.

11.57. Для модуляции линейно поляризованного света существует устройство, состоящее из двух параллельных двулучепреломляющих пластинок, две из которых в $\lambda/4$ неподвижны, а третья в $\lambda/2$, расположенная между ними, совершающая заданное во времени вращение на угол $\theta(t)$ вокруг оси системы (рис. 562). Определить зависимости от времени амплитуды, фазы

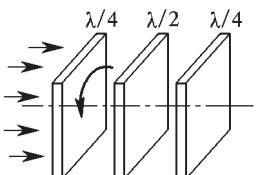


Рис. 562

и поляризации модулированного света, если нормально падающее на первую пластинку в $\lambda/4$ монохроматическое излучение линейно поляризовано в плоскости, составляющей с ее оптической осью угол, равный 45° .

11.58* Оптическое волокно можно представить в виде протяженной двулучепреломляющей пластинки, главные оси которой поворачиваются на некоторый угол, зависящий от расстояния z от входного сечения. Пусть $\theta(z) = az$, где a — некоторая константа, и на вход волокна падает линейно поляризованный свет, плоскость поляризации которого совпадает с одной из главных осей. При каких значениях величины a возможен переход этого состояния поляризации в круговое, если разность показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн равна Δn , а длина волны λ ?

11.59. Между двумя скрещёнными поляроидами расположена анизотропная кристаллическая пластинка с заданными Δn и d , вырезанная параллельно оптической оси. Разрешенные направления поляроидов составляют угол 45° с оптической осью. Система освещается параллельным пучком амплитудно-модулированного света. При какой частоте модуляции система пропустит боковые гармоники, отфильтровав несущее колебание?

11.60. Показатель преломления кристаллического кварца для длины волны $\lambda = 589$ нм равен $n_o = 1,544$ для обыкновенного луча и $n_e = 1,553$ для необыкновенного луча. На пластинку из кварца, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает линейно поляризованный свет указанной длины волны, занимающий спектральный интервал $\Delta\lambda = 40$ нм. Найти толщину пластинки d и направление поляризации падающего света, если свет после пластинки оказался неполяризованным.

11.61. Расположив пластинку, вырезанную из исландского шпата, параллельно его оптической оси, между скрещёнными николями, можно осуществить монохроматор, позволяющий, например, задержать одну из линий дублета натрия и пропустить другую. Найти, какой должна быть при этом минимальная толщина d_{min} пластинки и как ее нужно ориентировать. Показатели преломления исландского шпата для линии $\lambda_1 = 589,0$ нм равны $n_{e1} = 1,48654$ и $n_{o1} = 1,65846$, для линии $\lambda_2 = 589,6$ нм — $n_{e2} = 1,48652$ и $n_{o2} = 1,65843$.

11.62. Кварцевая пластинка $\lambda/2$ используется как анализатор степени поляризации лазерных импульсов. Оценить минимальную длительность лазерных импульсов, для которых еще можно пользоваться таким анализатором, если длина волны света $\lambda = 0,63$ мкм, а коэффициенты преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей в кварце $n_o = 1,5442$ и $n_e = 1,5533$ соответственно. Дисперсией показателей преломления пренебречь.

11.63. Ограниченный импульс длительностью τ линейно поляризованного излучения нормально падает на двулучепреломляющую пластинку толщиной d . Пластинка вырезана параллельно оптической

оси. Плоскость поляризации света составляет угол 30° относительно одного из главных направлений. Найти значения d , при которых за пластинкой будут наблюдаться два раздельных импульса. Как поляризованы эти импульсы и каковы максимальные значения их амплитуд, если максимальное значение амплитуды исходного импульса равно E_0 ? Разность $\Delta n = n_o - n_e$ считать известной и не зависящей от частоты света.

11.64. На поверхность плоскопараллельной пластинки толщиной $L = 0,1$ см нанесено высокоотражающее покрытие с энергетическим коэффициентом отражения $\rho = 0,9$. На пластинку нормально падает монохроматический пучок неполяризованного света ($\lambda = 600$ нм). Свет на выходе из пластинки оказался почти полностью линейно поляризованным вследствие слабой анизотропии материала пластиинки. Оценить минимальную величину анизотропии показателя преломляющей пластиинки $\Delta n = n_e - n_o$, при которой возможен этот эффект.

11.65. Призма Волластона (рис. 563) сделана из исландского шпата ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$), угол $\alpha = 15^\circ$. Рассчитать, на какой угол φ будут разведены обыкновенный и необыкновенный лучи.

11.66. Две поляризационные призмы с воздушной прослойкой изготовлены из исландского шпата. В одной призме оптическая ось перпендикулярна, в другой — параллельна плоскости падения (рис. 564). Опишите действие каждой призмы. Как будет поляризован проходящий свет? Какая призма будет пропускать больше света? В каких пределах должен быть заключен угол α , чтобы из призмы выходил линейно поляризованный свет? Для исландского шпата $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$. Свет падает на грань призмы перпендикулярно.

11.67. Два николя N_1 и N_2 повернуты один относительно другого на угол α ; между ними помещен николь N_3 (рис. 565). На систему падает параллельный пучок неполяризованного света. Предполагая, что необыкновенный луч проходит через каждый николь без потерь,

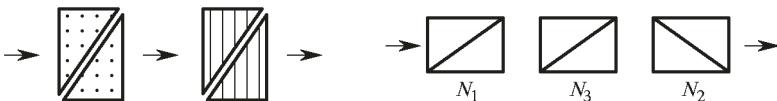


Рис. 564

Рис. 565

найти ориентацию николя N_3 относительно николя N_1 при которой интенсивность проходящего света максимальна. Определить интенсивность проходящего света в этих положениях, если интенсивность падающего света равна I_0 .

11.68* На пластинку кварца, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает белый свет, поляризованный по кругу. За пластинкой поставлен поляроид, главное направление которого

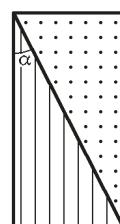


Рис. 563

составляет угол 45° с осью пластинки. Прошедший свет попадает на щель спектрографа. Сколько темных полос k получится в спектре, если толщина кварцевой пластинки $d = 2$ мм, $n_e = 1,55$, $n_o = 1,54$. Падающий свет занимает интервал длин волн от $\lambda_1 = 4000 \text{ \AA}$ до $\lambda_2 = 5000 \text{ \AA}$, в котором $n_e - n_o = \text{const}$.

11.69. Между скрещёнными николями помещена пластинка кварца, вырезанная параллельно оптической оси. Оптическая ось пластинки составляет угол 45° с главными направлениями николей. Рассчитать минимальную толщину пластинки, при которой одна линия водорода $\lambda_1 = 6563 \text{ \AA}$ будет сильно ослаблена, а другая $\lambda_2 = 4102 \text{ \AA}$ будет обладать максимальной интенсивностью. Величина анизотропии кварца $\Delta n = 0,009$.

11.70. Найти интенсивность света, прошедшего через кристаллическую пластинку, помещенную между двумя николями, главные плоскости которых образуют с одним из главных направлений пластинки углы α и β . Исследовать случаи скрещённых и параллельных николей.

11.71. Клин из двоякпреломляющего вещества помещен на пути монохроматического света, поляризованного по кругу (рис. 566).

Оптическая ось клина параллельна ребру клина. Свет, прошедший через клин, рассматривается через поляроид, главное направление которого составляет угол 45° с ребром клина. Найти число темных полос m , наблюдаемых на поверхности клина. Максимальная толщина клина $d_{\max} = 0,05 \text{ см}$, $n_o = 1,54$, $n_e = 1,55$, $\lambda = 5000 \text{ \AA}$.

11.72* На квартовую пластинку толщиной 3 мм, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает пучок белого линейно поляризованного света, плоскость поляризации которого составляет угол 45° с осью пластинки. Выходящий из пластинки свет сначала вновь проходит через николь, скрещённый с первичным поляризатором светового пучка, а затем падает на щель спектроскопа. Сколько темных полос будет наблюдаться в спектре между длинами волн $\lambda_D = 5890 \text{ \AA}$ и $\lambda_F = 4860 \text{ \AA}$, если обычновенный (n_o) и необыкновенный (n_e) показатели преломления кварца для этих длин волн имеют следующие значения: для $\lambda_D - n_o = 1,5442$, $n_e = 1,5533$, а для $\lambda_F - n_o = 1,5497$, $n_e = 1,5589$.

11.73. Между двумя скрещёнными николями помещена кристаллическая пластинка толщиной $d = 0,045 \text{ mm}$ с показателями преломления $n_e = 1,55$, $n_o = 1,54$. Пластинка вырезана параллельно оптической оси кристалла и ориентирована так, что главное направление первого николя составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с ее оптической осью. На систему нормально падает естественный свет с длиной волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ и интенсивностью \mathcal{I}_0 . Найти интенсивность \mathcal{I} света, прошедшего через систему.

11.74* Два когерентных пучка квазимохроматического неполяризованного света равной интенсивности дают на экране интерференционные полосы. Какой толщины кристаллическую пластинку надо ввести на пути одного из этих пучков, чтобы интерференционные полосы исчезли и притом так, чтобы их нельзя было восстановить никакой стеклянной пластинкой, вводимой в другой пучок? Как изменится картина, если за кристаллической пластинкой поставить поляроид? При каком положении поляроида интерференционных полос не будет?

11.75* Как отличить свет левополяризованный по кругу от право-поляризованного?

11.76* Как отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу, и от смеси естественного света с поляризованным по кругу?

11.77* Как отличить друг от друга: 1) эллиптически поляризованный свет; 2) смесь естественного света с линейно поляризованным светом (отчасти линейно поляризованный свет); 3) смесь естественного света с эллиптически поляризованным светом (отчасти эллиптически поляризованный свет)?

11.78. Между скрещёнными николями помещена кристаллическая пластинка толщиной $d_1 = 0,02$ мм с величиной анизотропии $\Delta n_1 = -0,05$. На нее в параллельном положении положена другая пластинка толщиной $d_2 = 0,02$ мм с $\Delta n_2 = 0,025$. В какой цвет окрашено поле зрения? В какой цвет будет оно окрашено, если верхнюю пластинку и верхний николь повернуть на 90° от первоначального положения?

П р и м е ч а н и е. Параллельным положением называется такая ориентировка пластинок, при которой направление колебаний волны, распространяющейся с большей (меньшей) скоростью в одной пластинке, совпадает с направлением колебаний волны, распространяющейся с большей (меньшей) скоростью во второй пластинке.

11.79. Поверхности кристаллической пластинки толщиной $d = 1$ мм, обладающей слабой анизотропией, покрыты отражающими покрытиями с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 0,9$. Пластинка вырезана параллельно оптической оси и освещается параллельным пучком неполяризованного света ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). Оценить минимальную величину анизотропии Δn , при которой свет на выходе из пластинки окажется практически полностью поляризованным ($n_o = 1,62$).

11.80. Поверхности плоскопараллельной кварцевой пластинки толщиной $d = 0,5$ мм, вырезанной параллельно оптической оси, покрыты высокоотражающими покрытиями с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 0,9$. Пластинка освещается параллельным пучком света с круговой поляризацией (длина волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см). Какова поляризация и интенсивность света, прошедшего пластинку, если интенсивность падающего света \mathcal{I}_0 ? Главные показатели преломления $n_o = 1,5442$, $n_e = 1,5534$.

11.81* На кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, падает нормально свет, поляризованный по кругу. Прошедший свет рассматривается через анализатор.

1) Определить интенсивность света, если главная плоскость анализатора составляет угол α с одним из главных направлений пластиинки.

2) Под каким углом надо поставить анализатор, чтобы получить максимальную и минимальную интенсивности?

11.82* Клин из двоякопреломляющего вещества помещен на пути монохроматического света, поляризованного по кругу. Оптическая ось параллельна ребру клина. Описать наблюдаемую через николь картину, когда клин неподвижен и когда он поворачивается вокруг направления распространения света.

11.83. Две одинаковые плоские густые решетки из параллельных тонких идеально проводящих проволок расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $l = 1,5$ см одна от другой так, что образующие их проволоки взаимно перпендикулярны. Плоскость поляризации волны $\lambda = 8,5$ см, падающей на систему решеток под углом $\alpha = 45^\circ$, наклонена на угол $\theta = 45^\circ$ к плоскости падения. Определить характер поляризации отраженной волны для случая, когда плоскость падения параллельна направлению проволок 1-й решетки.

11.84. Параллельный пучок монохроматического излучения (длина волн в вакууме $\lambda = 496$ мкм), поляризованного по кругу, падает нормально на решетку, изготовленную в виде натянутых проволочек с расстоянием между ними $d \ll \lambda$. При таких условиях решетка полностью пропускает излучение, поляризованное так, что электрический вектор направлен перпендикулярно проволочкам, и отражает излучение с поляризацией, повернутой на 90° . Найти врачающий момент M и силу F , действующие на решетку, если интенсивность потока в пучке $\mathcal{J} = 10$ Вт/см², а облучаемая поверхность решетки $S = 10$ см².

11.85. Две одинаковые плоские густые решетки из параллельных тонких идеально проводящих проволок расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $l = 2$ см одна от другой так, что образующие их проволочки взаимно перпендикулярны. Волна $\lambda = 11,3$ см с правой эллиптической поляризацией падает на систему решеток под углом $\alpha = 45^\circ$. Большая ось эллипса лежит в плоскости падения, отношение осей эллипса равно 1,73. Определить характер отраженной волны для случая, когда плоскость падения параллельна направлению проволок первой решетки. Описать изменение ее характера при вращении системы решеток (их взаимное расположение и плоскости сохраняются).

11.86. При воздействии линейно поляризованного света в некоторых твердых телах наблюдается явление фотоиндцированной анизотропии. Через такой двоякопреломляющий кристалл толщиной $d = 1$ мкм с плоскопараллельными гранями последовательно пропуска-

ются монохроматические импульсы света с одинаковой интенсивностью \mathcal{I}_0 и длиной волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$, но с различной поляризацией. После прохождения кристалла измеряются интенсивности \mathcal{I}_{\parallel} и \mathcal{I}_{\perp} . Коэффициент отражения света от граней не зависит от поляризации: $\rho_{\parallel} = \rho_{\perp} = \rho = 0,05$. Оценить $(\mathcal{I}_{\parallel} - \mathcal{I}_{\perp})/\mathcal{I}_0$, если средняя величина показателя преломления $n_{\text{ср}} = 1,635$, а $n_{\parallel} - n_{\perp} = 0,005$. Поглощением света в кристалле пренебречь.

11.87. Пространство между зеркалами интерферометра Фабри–Перо с разрешающей способностью $R = \lambda/\delta\lambda = 10^8$ заполнено химически чистым нитробензолом. При наложении однородного поперечного электрического поля нитробензол становится слабоанизотропной средой, причем оптическая ось совпадает с направлением поля (эффект Керра). Интерферометр освещается монохроматическим пучком неполяризованного света ($\lambda = 600 \text{ нм}$). Оценить минимальную величину электрического поля, при которой на выходе интерферометра будет наблюдаться почти полностью линейно поляризованный свет. Постоянную Керра для нитробензола принять равной $B = 2 \cdot 10^{-5} \text{ ед. СГСЭ}$.

П р и м е ч а н и е. Постоянной Керра называют константу в выражении $n_e - n_o = \lambda BE^2$.

11.88. Нелинейный интерферометр Фабри–Перо представляет собой тонкую пластинку из вещества, нелинейный показатель преломления которого пропорционален квадрату амплитуды напряженности электрического поля: $n = n_0 + n_2 E^2$. Пластинка покрыта высокоотражающими покрытиями с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 99\%$. Определить уровень плотности S мощности лазерного излучения с $\lambda = 1,051 \text{ мкм}$, пропускаемого таким интерферометром, если $n_0 = 3,5$, $n_2 = 10^{-9} \text{ ед. СГСЭ}$, а толщина пластинки $d = 12 \text{ мкм}$.

11.89. Явление самофокусировки объясняется зависимостью показателя преломления от интенсивности света ($n = n_0 + n_2 E^2$, где E_0 — амплитуда напряженности электрического поля в световой волне). Одним из самых больших значений n_2 обладает сероуглерод ($n_2 = 2 \cdot 10^{-11} \text{ ед. СГСЭ}$). Мощный пучок лазерного излучения с параболической зависимостью интенсивности от расстояния от центра пучка ($\mathcal{I} = \mathcal{I}_0(1 - r^2/r_0^2)$ при $r < r_0$ и $\mathcal{I} = 0$ при $r > r_0$) проходит сквозь слой сероуглерода толщиной $L = 5 \text{ см}$. Найти, на каком расстоянии от кюветы с сероуглеродом сфокусируется лазерный пучок $\mathcal{I}_0 = 5 \cdot 10^8 \text{ Вт/см}^2$, $r_0 = 5 \text{ мм}$.*).

11.90. Гауссов пучок неодимового лазера ($\lambda = 1 \text{ мкм}$) с радиальным распределением поля по сечению $E = E_0 e^{-r^2/R^2}$ ($R = 3 \text{ мм}$)

*.) Здесь и далее в задачах нелинейной оптики под интенсивностью понимается не $\overline{|E|^2}$, как обычно, а величина, равная плотности потока энергии, т. е. $\mathcal{I} = \overline{S} = \frac{c}{4\pi} \frac{E_0^2}{2}$.

и с плоским волновым фронтом падает на плоскопараллельную пластинку толщиной $d = 1$ см, сделанную из нелинейного вещества, показатель преломления которого зависит от интенсивности: $n = n_0 + n_2 E^2$ ($n_2 = 10^{-11}$ ед. СГСЭ). Оценить, при какой мощности лазера возможно уменьшить диаметр пучка (фокусировка) после прохождения пластиинки.

11.91. У большинства веществ показатель преломления уменьшается с ростом температуры (вследствие теплового расширения). Пучок лазерного излучения видимого диапазона спектра проходит сквозь слой слабопоглощающей жидкости толщиной $L = 1$ см так, что в жидкости устанавливается распределение температуры $t = t_0 + t_1(1 - r^2/r_0^2)$ при $r < r_0$ и $t = t_0$ при $r > r_0$, где r — расстояние от центра пучка, $t_1 = 2^\circ\text{C}$, $r_0 = 2$ мм. Найти фокусное расстояние и знак наведенной в жидкости линзы, если $dn/dt = -4 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

11.92. Плоская монохроматическая световая волна, поляризованная по кругу, нормально падает на пластиинку $\lambda/2$. В пластиинке имеется круглое отверстие размером в одну зону Френеля для точки P , лежащей на оси системы. Интенсивность падающей волны равна \mathcal{I}_0 . Определить интенсивность \mathcal{I} и отношение полуосей эллипса колебаний электрического вектора световой волны в точке P .

11.93. Плоская монохроматическая световая волна, поляризованная по кругу, нормально падает на пластиинку $\lambda/2$. В пластиинке имеется круглое отверстие размером в $1/3$ зону Френеля для точки P , лежащей на оси системы. Интенсивность падающей волны равна \mathcal{I}_0 . Определить интенсивность \mathcal{I} и отношение полуосей эллипса колебаний электрического вектора световой волны в точке P .

11.94. При падении на поляроид естественного света энергетический коэффициент пропускания составляет $t = 0,4$, при этом проходящий свет оказывается полностью линейно поляризованным. Найти коэффициент пропускания T естественного света для системы из четырех таких поляроидов, повернутых относительно друг друга на углы $\varphi = 60^\circ$.

11.95*: Неполяризованный свет проходит через два одинаковых скрещённых под углом $\theta = 45^\circ$ неидеальных поляроида. Энергетические коэффициенты пропускания света, поляризованного по двум взаимно перпендикулярным осям поляроидов, равны a^2 и b^2 , при этом $a^2 > b^2$. Определить, какая часть светового потока пройдет через систему из двух поляроидов. Провести числовой расчет при $a^2 = 0,9$ и $b^2 = 0,1$.

11.96. В заполненной нитробензолом кювете с прозрачными окнами расположен плоский конденсатор. Пучок света круговой поляризации с длиной волны λ и интенсивностью $\mathcal{I}_{\text{вх}}$ проходит внутри конденсатора с пластиинками длиной $l = 6$ см, а затем через поляроид P с разрешенным направлением, составляющим угол $\alpha = 45^\circ$ с направлением электрического поля в конденсаторе (рис. 567). Как

зависит интенсивность $\mathcal{J}_{\text{вых}}$ пучка света на выходе системы от напряженности поля E в конденсаторе? При каком значении E система окажется непрозрачной для света? Постоянная Керра нитробензола $B = 2 \cdot 10^{-5}$ ед. СГСЭ.

11.97. Заполненная нитробензolem кювета с прозрачными окнами и расположенным в ней плоским конденсатором помещена между скрещенными поляризаторами P_1 и P_2 , разрешенные направления которых составляют угол $\alpha = 45^\circ$ с направлением электрического поля в конденсаторе (рис. 568). На систему падает пучок неполяризованного света с длиной волны λ и интенсивностью $\mathcal{J}_{\text{вх}}$. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 0,8$ см, их длина в направлении лу-ча $l = 6,4$ см. Как зависит интенсивность $\mathcal{J}_{\text{вых}}$ пучка света на выходе

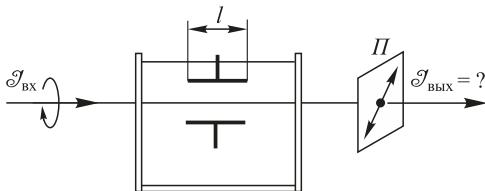


Рис. 567

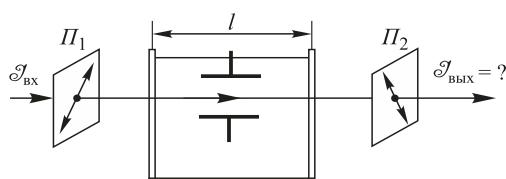


Рис. 568

системы от напряжения U между пластинами конденсатора? При каком напряжении интенсивность $\mathcal{J}_{\text{вых}}$ достигает максимального значения? Постоянная Керра нитробензола $B = 2 \cdot 10^{-5}$ ед. СГСЭ.

11.98* Одноосные кристаллы CdSe могут быть выращены в виде тонких (десятка микрон) пластинок оптического качества с высокой степенью параллельности поверхностей, причем оптическая ось лежит в плоскости пластинки. Из такого кристалла изготовлена пластинка $\lambda/4$ на длину волны 1000 нм. Толщина пластинки $L = 50$ мкм, показатели преломления $n_o = 2,500$ и $n_e = 2,475$. На эту пластинку перпендикулярно оптическим поверхностям падает параллельный световой пучок с указанной длиной волны и линейной поляризацией, направленной под углом 45° к оптической оси. Определить состояние поляризации прошедшего и отраженного света (линейная, круговая, эллиптическая; если эллиптическая, то каково отношение полуосей и как ориентирован эллипс относительно оптической оси?).

11.99. Из одноосного кристалла с показателями преломления $n_o = 2,400$ и $n_e = 2,406$ изготовлена пластинка $\lambda/4$ на длину волны 1000 нм толщиной $L = 0,1875$ мм с высокой степенью параллельности оптических поверхностей. Оптическая ось лежит в плоскости пластиинки. На эту пластиинку перпендикулярно оптическим поверхностям падает параллельный световой пучок с указанной длиной волны и линейной поляризацией, направленной под углом 45° к оптической оси. Определить состояние поляризации прошедшего и отраженного света (линейная, круговая, эллиптическая; если линейная, то как направлен вектор поляризации; если эллиптическая, то каково отношение полуосей и как ориентирован эллипс относительно оптической оси?).

11.100. Слюдя легко расщепляется на тончайшие пластиинки (до единиц микрон) оптического качества с высокой степенью параллельности поверхностей, поэтому из нее можно изготовить пластиинку $\lambda/4$ или $\lambda/2$. На такую пластиинку толщиной $L = 20$ мкм перпендикулярно оптическим поверхностям падает параллельный линейно поляризованный световой пучок с длиной волны 2,4 мкм, плоскость поляризации которого составляет угол 45° с быстрой и медленной оптическими осями пластиинки. При этом оптические оси перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости пластиинки. Определить состояние поляризации прошедшего и отраженного света (линейная, круговая, эллиптическая; если линейная, то как направлен вектор поляризации; если эллиптическая, то каково отношение полуосей и как ориентирован эллипс относительно быстрой и медленной оптических осей). Показатели преломления $n_{\text{быстр}} = 1,53$ и $n_{\text{медл}} = 1,56$.

11.101. При исследовании кварцевой пластиинки, вырезанной параллельно оптической оси кристалла ($n_e = 1,552$; $n_o = 1,543$), были проведены эксперименты с двумя источниками линейно поляризованного света, лучи от которых направлялись перпендикулярно поверхности пластиинки.

Когда через пластиинку пропускали излучение гелий-неонового лазера ($\lambda = 630$ нм), то оказалось, что свет за пластиинкой является линейно поляризованным при любом значении угла α между оптической осью пластиинки и вектором колебаний \mathbf{E} в падающей волне.

Когда через пластиинку пропускали свет газоразрядной неоновой лампы ($\lambda = 630$ нм, $\Delta\lambda = 2$ нм), то оказалось, что при некотором значении угла $\alpha = \alpha_1$ свет после прохождения пластиинки становится полностью неполяризованным.

1) Что можно сказать о толщине d пластиинки на основании этих экспериментов?

2) Определить значение угла α_1 .

3) Определить состояние поляризации выходящего света при $\alpha = \alpha_2 = \alpha_1 \pm 45^\circ$.

11.102. Немонохроматический свет ($\lambda = 600$ нм, $\Delta\lambda = 100$ нм), поляризованный по кругу, пропускается через две последовательно расположенные кристаллические пластиинки, вырезанные параллельно

оптическим осям кристаллов, при этом свет распространяется перпендикулярно поверхностям пластинок. Первая пластина толщиной $d_1 = 1$ см вырезана из кварца ($n_e = 1,552$; $n_o = 1,543$), вторая — из исландского шпата ($n_e = 1,486$; $n_o = 1,658$). Эксперименты показали, что при определенном значении угла $\alpha = \alpha_1$ между оптическими осями пластинок свет на выходе оказывается полностью поляризованным, а при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ — полностью неполяризованным.

1) При какой толщине d_2 второй пластины это возможно?

2) Определить угол α_1 , учтя, что кварц и шпат — одноосные кристаллы разных знаков.

3) Каково состояние поляризации света после прохождения 1-й пластины?

11.103. В интерференционном опыте Юнга одна из щелей прикрыта поляроидом, а вторая — изотропной пластинкой с коэффициентом пропускания по интенсивности, равным 0,5. Какова видность наблюдаемой интерференционной картины, если используется точечный монохроматический источник неполяризованного света?

11.104. Параллельный пучок света от натриевой лампы проходит сквозь пару поляризатор–анализатор, у которых разрешенные направления колебаний прошедшей волны параллельны. Между ними помещена двояколучепреломляющая пластина из кальцита, вырезанная параллельно оптической оси. Желтый дублет натрия состоит из двух близких линий: $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм. Показатели преломления кальцита зависят от длины волны, так что в желтой области спектра $n_o = 1,4860$, $n_e = 1,6595$ нм $^{-1}$, $dn_o/d\lambda = -3,53 \cdot 10^{-5}$ нм $^{-1}$, $dn_e/d\lambda = -5,88 \cdot 10^{-5}$ нм $^{-1}$. Определить, при какой минимальной толщине пластины через анализатор пройдет только одна из линий дублета натрия, причем с максимальной интенсивностью. Как в этом случае должна быть ориентирована оптическая ось?

11.105. Кварцевая пластина, вырезанная параллельно главной оптической оси, помещена между двумя скрещёнными поляроидами P_1 и P_2 так, что ее оптические оси составляют угол 45° с плоскостями пропускания поляроидов (рис. 569). Через эту систему пропускают излучение, в спектре которого содержится дублет $\lambda_1 = 456,0$ нм и $\lambda_2 = 452,2$ нм. Пренебрегая дисперсией показателей преломления $n_o = 1,552$ и $n_e = 1,561$ в этой области спектра, определить, при какой минимальной толщине пластины свет с длиной волны λ_1 будет проходить через эту систему с максимальной интенсивностью, а свет с λ_2 будет сильно ослаблен.

11.106. На пути плоской квазимонохроматической неполяризованной световой волны (интенсивность \mathcal{I}_0 , длина волны λ) установлен круглый диск из поляроидной пленки, плоскость которого нормальна волновому вектору волны (рис. 570). Показатель преломления плен-

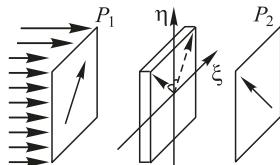


Рис. 569

ки для разрешенного направления поляризации равен n , радиус диска R . При какой толщине пленки d интенсивность света в точке P , находящейся на оси за диском на расстоянии, при котором на диске укладывается $m = 1,5$ зоны Френеля, окажется максимальной? Чему равна эта интенсивность?

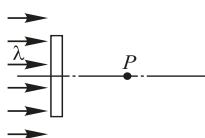


Рис. 570

11.107. В пластинке из поляроида вырезано круглое отверстие размером в 2,5 зоны Френеля для точки A , лежащей на оси отверстия (рис. 571). Отверстие затянуто поляроидной пленкой, разрешенное направление в которой составляет угол 90° с разрешенным направлением пластиинки. Пластиинка освещается параллельным пучком неполяризованного света интенсивностью \mathcal{I}_0 . Найти интенсивность света в точке A .

11.108. На непоглощающий поляризатор падает смесь естественного и линейно-поляризованного света общей интенсивностью \mathcal{I}_0 .

Вектор поляризации света параллелен оси поляризатора. Интенсивность света после поляризатора равна $3\mathcal{I}_0/4$. Каково отношение α интенсивностей в падающем свете?

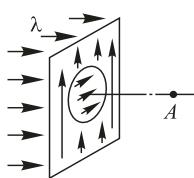


Рис. 571

11.109. Решетка с числом штрихов N , периодом d и шириной щелей $b = d/2$ освещается плоской волной неполяризованного света с длиной волны λ . Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы, расположенной за решеткой. Как изменится интенсивность, положение и число наблюдаемых дифракционных максимумов, а также их ширины, если перед решеткой установить поляроид, разрешенное направление которого параллельно щелям решетки, а щели решетки накрыть кристаллическими пластиинками в $\lambda/4$, оптические оси которых взаимно перпендикулярны в двух соседних щелях (параллельно и перпендикулярно щелям). Нарисовать сравнительные графики (качественные картины) распределения интенсивности в фокальной плоскости: $\mathcal{I}_1(x)$ — до установки поляроида и пластиинок и $\mathcal{I}_2(x)$ — после их установки.

11.110. Решетка с числом штрихов N , периодом d и шириной щелей b освещается плоской монохроматической волной неполяризованного света с длиной волны λ . Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы. Как изменится положение, интенсивность и ширина главных дифракционных максимумов, если перед решеткой установить поляроид, разрешенное направление которого параллельно щелям решетки, а все щели решетки накрыть пластиинками в $\lambda/2$, оптические оси которых взаимно перпендикулярны щелям в двух соседних щелях (параллельно и перпендикулярно щелям). Нарисовать сравнительные графики (качественные картины) распределения интенсивности $\mathcal{I}_1(x)$ — до установки поляроида и пластиинок, и $\mathcal{I}_2(x)$ — после их установки.

11.111. Система состоит из двух поляроидов, между которыми поставили двулучепреломляющую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси. Угол между разрешенными направлениями поляроидов $\alpha = 60^\circ$, а ось пластинки ориентирована вдоль биссектрисы

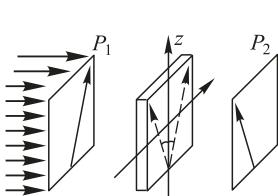


Рис. 572

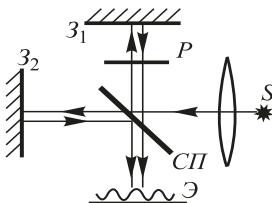


Рис. 573

этого угла (рис. 572). Полученную конструкцию освещают неполяризованным квазимохроматическим светом интенсивностью \mathcal{I}_0 , для которого данная пластинка оказывается пластинкой $\lambda/3$. Найти интенсивность света на выходе из системы.

11.112. В интерферометре Майкельсона (рис. 573) используется монохроматический точечный источник света S . В одно из плеч интерферометра вносится поляроид P . При этом видность интерференционной картины на экране \mathcal{E} оказалась равной $0,7 \approx 1/\sqrt{2}$. Найти коэффициент отражения по интенсивности R зеркала Z_2 , полагая, что зеркало Z_1 идеально отражает ($R_1 = 1$), а светоделительная пластинка SP половину света пропускает, а половину отражает.

11.113. Оптическая система состоит из двух идеальных поляроидов P_1 и P_2 , развернутых относительно друг друга на угол 45° , и расположенной между ними пластинки P (рис. 574), вырезанной из одноосного кристалла параллельно оптической оси. Если пучок неполяризованного света с длиной волны λ и интенсивностью \mathcal{I}_0 падает на систему со стороны поляроида P_1 , то после прохождения через пластинку свет оказывается поляризованным по кругу. Если же тот же пучок падает на систему со стороны поляроида P_2 , то свет после прохождения через пластинку оказывается линейно поляризованным.

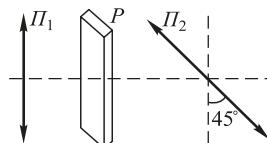


Рис. 574

- 1) Какая пластинка расположена между поляроидами?
- 2) Как ориентированы ее оси относительно разрешенного направления поляриода P_1 ?
- 3) Определить интенсивности света \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 , проходящего через систему, в обоих случаях.

11.114. Оптическая система состоит из поляриода P , кристаллической двоюкапреломляющей пластинки P , вырезанной параллельно оптической оси, и идеального зеркала Z (рис. 575). На систему падает пучок неполяризованного света с интенсивностью \mathcal{I}_0 , для ко-

торого кристаллическая пластина является пластинкой в $\lambda/4$. Найти зависимость интенсивности $\mathcal{J}(\varphi)$ света, отраженного от системы, от угла φ разворота главных осей (ξ, η) пластины относительно разрешенного направления поляризатора P . При каких значениях угла φ интенсивность отраженного света обращается в нуль?

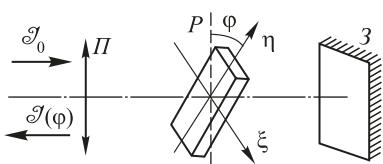


Рис. 575

11.115. Двухлучевой интерферометр, схема которого показана на рис. 576 a , состоит из следующих

элементов: а) монохроматический источник неполяризованного света S ; б) четыре идеальных поляроида P_0, P_1, P_2, P ; в) экран для наблюдения интерференционных полос. На схеме L_1 и L_2 обозначают

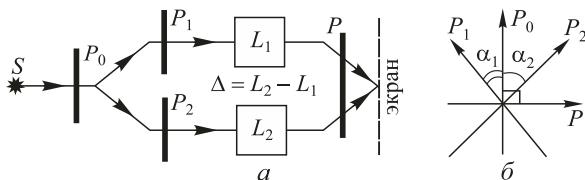


Рис. 576

оптические пути, которые проходит свет от источника до точки наблюдения на экране. Взаимное положение разрешенных направлений поляроидов изображено на рис. 576б. Рассмотреть случай $\alpha_1 = 15^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

- 1) Определить видность интерференционных полос.
- 2) Какая полоса (светлая или темная) будет наблюдаться в центре экрана при $\Delta = L_2 - L_1 = 0$?

11.116. Двухлучевой интерферометр, схема которого показана на рис. 577 a , состоит из следующих элементов: а) монохроматический источник неполяризованного света S ; б) три идеальных поляроида

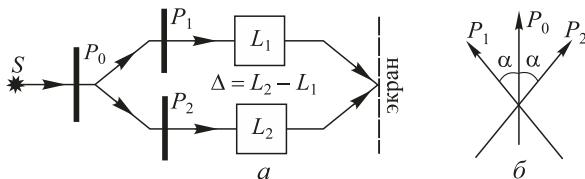


Рис. 577

P_0, P_1, P_2 ; в) экран. На схеме L_1 и L_2 обозначают оптические пути, которые проходит свет от источника до точки наблюдения на экране. Взаимное положение разрешенных направлений поляроидов представлено на рис. 577б. Определить видность V интерференционной картины для двух случаев: 1) $\alpha = \alpha_1 = 30^\circ$ и 2) $\alpha = \alpha_2 = 60^\circ$.

Какая полоса (светлая или темная) будет наблюдаться в центре интерференционной картины (при разнице хода $\Delta = 0$)?

11.117. Излучение точечного источника неполяризованного света в интерферометре Майкельсона содержит две близкие спектральные линии одинаковой интенсивности: $\lambda_1 = 5000 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 5050 \text{ \AA}$. В одно из плеч интерферометра устанавливается «монохроматор» — два скрещённых поляроида (с ортогональными разрешенными направлениями), между которыми располагается кристаллическая пластинка в $\lambda/2$ для линии λ_1 (рис. 578). Главные оси пластинки составляют угол 45° с разрешенными направлениями поляроидов, а $\Delta n = n_e - n_o = 0,005$. 1) При какой минимальной толщине пластины «монохроматор» не пропустит (отфильтрует) компоненту λ_2 ? 2) Какова при этом будет видность наблюданной интерференционной картины?

11.118. В интерференционной схеме (см. рис. 578) используется точечный источник естественного света, излучение которого содержит две близкие спектральные линии $\lambda_1 = 5000 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 5100 \text{ \AA}$ одинаковой интенсивности. В одном из плеч интерференционной схемы установлен фильтр, представляющий собой два поляроида P_1 и P_2 с совпадающими разрешенными направлениями, между которыми расположена кристаллическая пластина в $\lambda/2$ для линии λ_2 . Главные направления пластинки составляют угол 45° с разрешенными направлениями поляроидов, а $\Delta n = n_e - n_o = 0,005$. 1) Какова

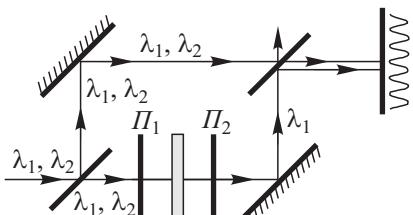


Рис. 578

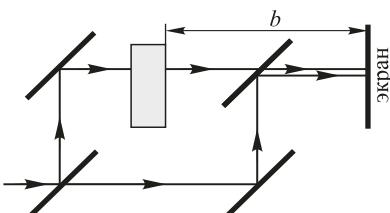


Рис. 579

минимальная толщина кристаллической пластины, если на выходе пластины свет с длиной волны λ_1 оказался поляризованным по кругу? 2) Какова при этом видность наблюданной на экране Э интерференционной картины?

11.119. На пути одного из лучей в интерферометре Рождественского помещена плоская кювета с жидкостью, коэффициент преломления которой зависит от интенсивности \mathcal{J} проходящего света: $n = n_0 - a\mathcal{J}$, где $a = 2,5 \cdot 10^{-20}$ ед. СГСЭ. Через интерферометр проносится мощный лазерный пучок с длиной волны $\lambda = 0,53 \text{ мкм}$ и параболической зависимостью интенсивности по сечению пучка: $\mathcal{J}(r) = \mathcal{J}_0(1 - r^2/a^2)$, где $a = 5 \text{ мм}$ — радиус пучка и $\mathcal{J}_0 = 5 \cdot 10^9 \text{ Вт/см}^2$ (рис. 579). При этом на экране, расположенном на расстоянии $b = 10 \text{ см}$ от кюветы, появляются интерференционные

кольца. Определить число появившихся колец, если толщина слоя жидкости $l = 1$ см.

11.120. В пространство между зеркалами интерферометра Жамена на пути одного из лучей помещена плоская кювета с жидкостью (толщина слоя жидкости $l = 1$ см), коэффициент преломления которой зависит от интенсивности \mathcal{I} проходящего света: $n = n_0 + \beta\mathcal{I}$. Через интерферометр пропускается мощный лазерный пучок с длиной волны $\lambda = 0,53$ мкм и параболической зависимостью интенсивности по сечению пучка: $\mathcal{I}(r) = \mathcal{I}_0(1 - r^2/a^2)$, где $a = 5$ мм — радиус пучка и $\mathcal{I}_0 = 5 \cdot 10^9$ Вт/см² (рис. 580). На экране, расположенным от кюветы на расстоянии $b = 2$ м вдоль луча, наблюдается интерференционная картина, состоящая из 25 колец. Найти значение коэффициента β , определяющего нелинейный эффект.

11.121. Некоторые жидкости под действием электрического поля приобретают свойства одноосного кристалла, причем оптическая ось оказывается направленной по полю (электрооптический эффект Керра). Фазовый сдвиг между обычновенной и необыкновенной волной

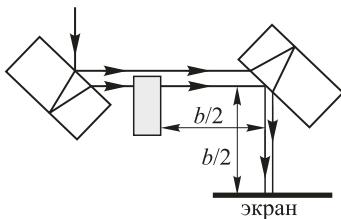


Рис. 580

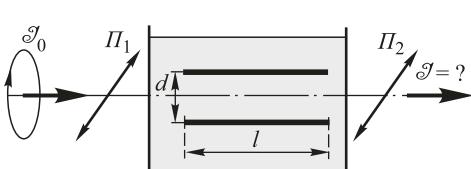


Рис. 581

дается соотношением $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)(n_e - n_o)l = 2\pi BlE^2$. Здесь l — толщина слоя вещества, B — так называемая константа Керра. Наибольшим значением B из всех исследованных жидкостей обладает нитробензол, для которого $B = 2,2 \cdot 10^{-5}$ ед. СГСЭ.

На рис. 581 изображена кювета с нитробензолом, в которой расположен конденсатор. С обеих сторон к кювете примыкают два идеальных поляроида, разрешенные направления которых параллельны и направлены под углом $\alpha = 45^\circ$ к направлению поля в конденсаторе. Пластины конденсатора имеют длину $l = 5$ см, расстояние между ними $d = 5$ мм. К конденсатору приложено напряжение $U = 2910$ В. Определить интенсивность \mathcal{I} света на выходе второго поляроида, если на первый поляроид падает свет с интенсивностью \mathcal{I}_0 , поляризованный по кругу.

11.122. Некоторые жидкости под действием электрического поля приобретают свойства одноосного кристалла, причем оптическая ось оказывается направленной по полю (электрооптический эффект Керра). Фазовый сдвиг между обычновенной и необыкновенной волной дается соотношением $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)(n_e - n_o)l = 2\pi BlE^2$. Здесь l — толщина слоя вещества, B — так называемая константа Керра. Наи-

большим значением B из всех исследованных жидкостей обладает нитробензол, для которого $B = 2,2 \cdot 10^{-5}$ ед. СГСЭ.

На рис. 582 изображена кювета с нитробензolem, в которой расположен конденсатор. С обеих сторон к кювете примыкают два скрещённых поляроида P_1 и P_2 , разрешенные направления которых составляют угол $\alpha = 45^\circ$ с направлением поля в конденсаторе. На поляроид P_1 падает неполяризованный свет с интенсивностью \mathcal{I}_0 . Определить интенсивность \mathcal{I} света на выходе второго поляроида при следующих параметрах установки: $l = 10$ см, $d = 1$ см, напряжение на конденсаторе $U = 8250$ В.

11.123. Круглый диск диаметром d , изготовленный из поляроидной пленки, освещается нормально падающей плоской волной естественного света (длина волны λ , интенсивность света \mathcal{I}_0). Во сколько раз изменится интенсивность света в точке P , если вплотную к диску поместить собирающую линзу диаметром $2d$, и при этом точка P окажется в фокусе линзы (рис. 583)? Диск закрывает 1,5 зоны Френеля для точки P и для разрешенного направления вносит фазовую задержку, кратную 2π . Толщина линзы на краях равна нулю.

11.124. Широкая пластинка из поляроида освещается параллельным пучком неполяризованного монохроматического света с интенсивностью \mathcal{I}_0 (рис. 584). Для «разрешенного» направления колеба-

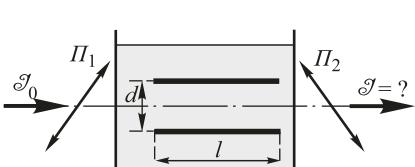


Рис. 582

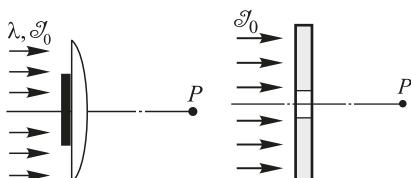


Рис. 583

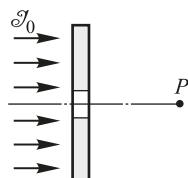


Рис. 584

ний пластинка вносит фазовую задержку $\Delta\phi = 2\pi m \pm \pi/2$ (m — некоторое целое число). Как изменится интенсивность света в точке P , если в пластинке проделать круглое отверстие в одну зону Френеля?

11.125. Оценить плотность мощности \mathcal{J} световой волны, при которой в оптических материалах начинают проявляться нелинейные эффекты. Учесть, что для этого достаточно, чтобы нелинейная добавка к показателю преломления составила 10^{-4} .

Указание. Отношение нелинейной добавки к показателю преломления по порядку величины равно $\Delta n_{\text{нл}}/n \sim E/E_{\text{вн}}$, где $E_{\text{вн}}$ — внутриатомное поле, создаваемое зарядом ядра для внешних электронов.

11.126. Экспериментатор, недовольный малым коэффициентом преобразования лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 1064$ нм (неодимовый лазер) во вторую гармонику ($\lambda = 532$ нм), решил после первого кристалла-удвоителя поставить еще один кристалл, чтобы перекачать остаток инфракрасного излучения во вторую гармонику

(рис. 585). Каково должно быть расстояние L между кристаллами? Показатели преломления воздуха для данных длин волн равны соответственно $n_1 = 1,0002742$ и $n_2 = 1,0002782$.

11.127. Оценить расстояние L , которое должен пройти в стекле фемтосекундный импульс лазерного излучения, чтобы его форма существенно исказилась за счет зависимости показателя преломления стекла от интенсивности света. Временная форма импульса — колоколообразная с плавным нарастанием до максимума и плавным спадом. Длительность импульса на полувысоте $\tau = 100$ фс, плотность мощности в максимуме $\mathcal{J} = 10^{11}$ Вт/см², линейный показатель преломления $n = 1,5$, а $n_2 = 2 \cdot 10^{-13}$ ед. СГСЭ.

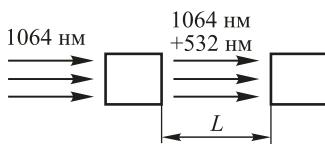
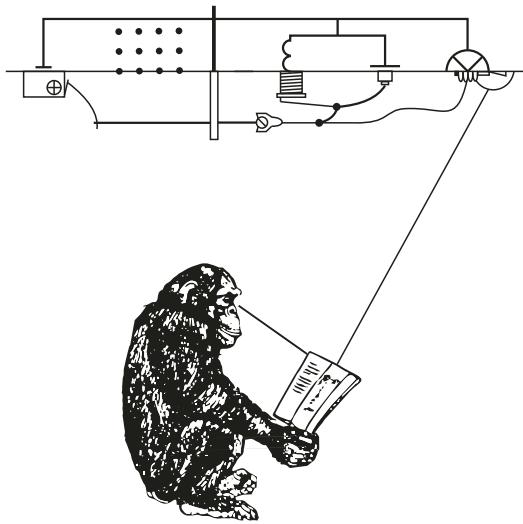


Рис. 585

11.128. Наблюдатель находится в тумане между двух фонарей одинаковой мощности: красного (длина волны $\lambda_1 = 700$ нм) и синего ($\lambda_2 = 400$ нм) цветов, расстояние между которыми равно $L = 500$ м. На каком расстоянии от красного фонаря яркости обоих источников для наблюдателя одинаковы? Считать, что рассеяние света в тумане подчиняется закону Рэлея.



**О твeты
и избpaнnyе решения**

§ 1. Электрический заряд и напряженность электрического поля. Диполь. Теорема Гаусса

$$1.1. \frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{\gamma m^2} = \begin{cases} 1,24 \cdot 10^{36} & \text{для протонов,} \\ 4,17 \cdot 10^{42} & \text{для электронов,} \end{cases}$$

где γ — гравитационная постоянная.

$$1.2. Q = \frac{2\sqrt{2} + 1}{4} q.$$

$$1.3. E = \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

1.4*. Решение. Разложим вектор \mathbf{p} (рис. 586) на составляющую \mathbf{p}_{\parallel} вдоль радиуса \mathbf{r} и составляющую \mathbf{p}_{\perp} , к нему перпендикулярную. Соответствующие им поля в точке наблюдения A :

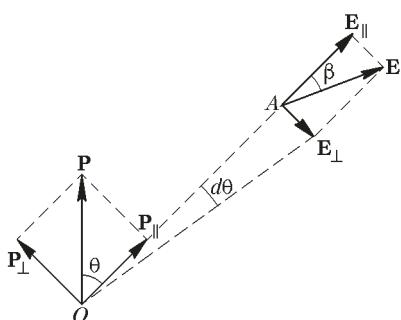


Рис. 586

Угол β между радиусом \mathbf{r} и электрической силовой линией определяется формулой

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{p_{\perp}}{2p_{\parallel}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta.$$

Проекция бесконечно малого участка силовой линии на направление вектора \mathbf{p}_{\perp} может быть, с одной стороны,

представлена как $drtg\beta = (dr \operatorname{tg} \theta)/2$; с другой стороны — как $r \operatorname{tg} \theta$. Поэтому $(dr \operatorname{tg} \theta)/2 = r d\theta$. Интегрируя это уравнение, получаем искомое уравнение электрической силовой линии: $r = r_0 \sin^2 \theta$. Постоянная r_0 имеет смысл длины радиуса-вектора \mathbf{r} в экваториальной плоскости, т. е. при $\theta = \pi/2$.

$$1.5. \text{ а) } W = -(\mathbf{pE}); \text{ б) } W = -\frac{(\mathbf{pE})}{2} = -\frac{\alpha E^2}{2}.$$

$$1.6. E = \frac{3qa^2}{r^4}.$$

1.7. $F = \frac{2qp}{d^3}$. Диполь будет притягиваться к заряду, если он обращен к нему противоположно заряженным концом, и отталкиваться в противном случае.

1.8. Возможны, и притом на любом расстоянии от диполя. Плоскость круговой орбиты заряда перпендикулярна к оси диполя. Угол α между направлением дипольного момента и радиусом-вектором, проведенным от диполя к движущемуся заряду, определяется выражением $\cos \alpha = \mp \sqrt{1/3}$, где знак «минус» относится к положительному заряду, а «плюс» — к отрицательному.

1.9. $F = \frac{6p_1 p_2}{d^4}$. Диполи притягиваются, если они обращены друг к другу противоположно заряженными концами, и отталкиваются в противном случае.

1.10. $E = \sigma\Omega$, где $\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}\right)$ — телесный угол, под которым виден диск из данной точки.

$$\text{1.11. } E = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < r < R \text{ или } R_3 < r < \infty; \\ -\frac{Q}{r^2} \frac{1 - R_3/R_2}{1 - R_3/R_1}, & \text{если } R_1 < r < R_2; \\ +\frac{Q}{r^2} \frac{1 - R_1/R_2}{1 - R_1/R_3}, & \text{если } R_2 < r < R_3. \end{cases}$$

1.12.* $E = 2\pi\sigma$.

Решение. Пусть σ — поверхностная плотность заряда на сфере. Тогда поле вблизи ее наружной поверхности $E = 4\pi\sigma$; внутри сферы $E = 0$. То же самое поле может быть представлено как сумма поля малого диска с поверхностной плотностью σ , вырезанного из сферы, и поля остальной части поверхности. Поле вблизи центра диска, как известно, равно $E = \pm 2\pi\sigma$ (знак зависит от стороны диска). Следовательно, поле остальной части сферы составляет $2\pi\sigma$.

$$\text{1.13. } \sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2),$$

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2);$$

$$E = 2\pi(q_1 - q_2),$$

$$E' = 2\pi(q_1 + q_2).$$

$$\text{1.14. } E = \frac{8\pi d}{d^2 + 4h^2}.$$

1.15. Поле перпендикулярно к поверхности слоя и направлено, как указано на рис. 587а. Вне слоя $E = \pm 2\pi\rho d$, внутри слоя $E = 4\pi\rho dx$. Ось X перпендикулярна к поверхности слоя, $x = 0$ в середине слоя. Изменение напряженности поля E в зависимости от x изображено на рис. 587б.

$$\text{1.16. } T = \sqrt{\frac{\pi m d}{\rho_0 p}}.$$

1.17. $\rho(r) = \text{const} = \frac{3e}{4\pi R^3}$; $v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$, где m — масса электрона.

1.18. $T = 2\pi d \sqrt{\frac{2J}{q_1 q_2 l}}$, где q_1 и q_2 — заряды шарика и кружка, а J — момент инерции стрелки.

1.19.* Решение.

1) Вычислим поле внутри шара. Ввиду сферической симметрии

$$\mathbf{E} = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

или, в координатной форме,

$$E_x = E(r) \frac{x}{r}, \quad E_y = E(r) \frac{y}{r}, \quad E_z = E(r) \frac{z}{r}.$$

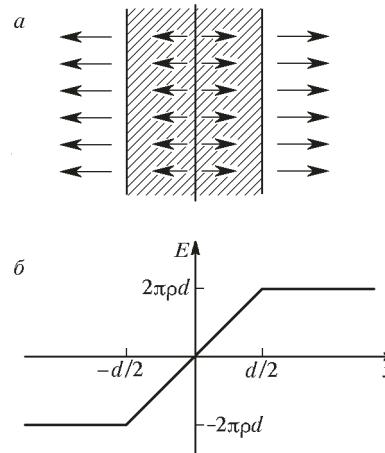


Рис. 587

Дифференцируя E_x и учитывая, что $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ (последнее получается дифференцированием равенства $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), находим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE}{dr} \frac{x^2}{r^2} - \frac{E}{r^3} x^2 + \frac{E}{r}.$$

Написав аналогичные соотношения для производных $\frac{\partial E_y}{\partial y}$, $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ и сложив, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E).$$

Внутри шара

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) = 4\pi\rho,$$

откуда

$$E = \frac{4\pi}{3} \rho r + \frac{C}{r^2}.$$

Постоянная C должна равняться нулю, так как напряженность поля E в центре шара конечна, как это ясно из физических соображений.

Вне шара на расстоянии r от центра

$$E = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3 \rho}{r^2}.$$

2) Аналогично вычисляется поле внутри пластины:

$$E = \begin{cases} 4\pi\rho x & \text{внутри пластины,} \\ 4\pi\rho h = 2\pi\sigma & \text{вне пластины.} \end{cases}$$

1.20. $\rho = 1,33 \cdot 10^{-9}$ ед. СГСЭ.

1.21. $\rho(r) = \frac{E_0}{2\pi r}$.

1.22. $\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho \mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = \overrightarrow{OO'}$. Поле однородно.

1.23. $\sigma = \frac{3E_0}{4\pi} \cos\theta$; вне сферы — поле точечного диполя с дипольным моментом $\mathbf{p} = -R^3 \mathbf{E}$.

1.24. $\sigma(\theta) = \frac{E_0}{2\pi} \cos\theta$.

1.25. Поле на поверхности шара (рис. 588) $\mathbf{E}_A = 3E_0 \cos\theta \frac{\mathbf{r}}{r}$.

а) $|E_A| = |E_0|$ при $\cos\theta = \pm\frac{1}{3}$; б) $|\cos\theta| = \frac{2}{3}$.

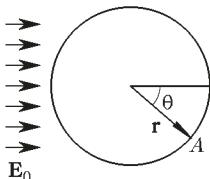


Рис. 588

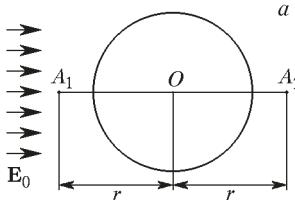
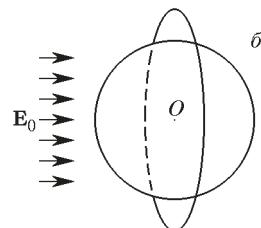


Рис. 589



1.26. В точках A и B напряженность поля возрастает в три раза, в точках C и D обратится в ноль.

1.27. а) См. рис. 589 a . Поле удваивается в точках A_1 и A_2 , лежащих на расстоянии $r = \sqrt[3]{2}R$ от центра O шара.

б) Поле уменьшается втрое в точках окружности радиусом $r = \sqrt[3]{3/2}R$ с центром, совпадающим с центром шара O (рис. 589 b). Плоскость этого круга перпендикулярна вектору \mathbf{E}_0 .

1.28. У вершины $E_1 = 3E_0$, у основания $E_2 = 0$. Пробоя не будет.

1.29. $F = -\frac{6E_0^2 a^6}{r^4}$ — сферы притягиваются.

1.30. $F = \frac{3E_0^2 a^6}{r^4}$ — сферы отталкиваются.

§ 2. Потенциал. Метод электрических изображений

2.1. $v = \sqrt{(\sqrt[3]{4} - 1) \frac{q^2}{mr}}$.

2.2. 1) Нет. 2) Внутри будет, снаружи нет.

2.3. Поле будет иметь вид, показанный на рис. 590. Потенциал внешнего шара $\frac{Q}{R_3}$, а потенциал внутреннего $Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$. Если внешний шар

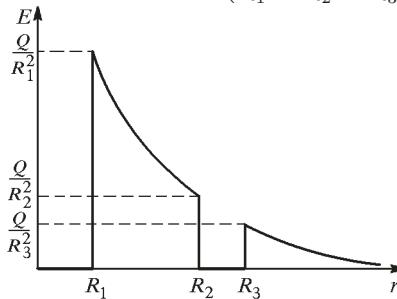


Рис. 590

заземлить, то его потенциал будет равен нулю, а потенциал внутреннего шара будет равен $Q(R_2 - R_1)/(R_1 R_2)$.

2.4. $\varphi_A(1) = \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3}$, где r — расстояние от центра системы до точки A ; $\varphi_A(2) = \frac{Q_1}{r} - \frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{R_3}$; $\Delta\varphi = \varphi_A(2) - \varphi_A(1) = (Q_1 + Q_2) \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right)$.

2.5. $\varphi(x) = \left(\frac{\varphi_0}{d} + 2\pi\rho d \right) x - 2\pi\rho x^2$, где координата x отсчитывается от заземленной пластины.

2.6* $\rho = -\frac{\varphi_0}{2\pi d^2}$.

Решение. Если x — расстояние от пластины с потенциалом φ_0 , то напряженность поля по теореме Гаусса определяется уравнением

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho.$$

Так как потенциал φ связан с напряженностью поля E равенством

$$E = -\frac{d\varphi}{dx},$$

то

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho.$$

Общее решение последнего уравнения

$$\varphi = -2\pi\rho x^2 + Cx + C_1.$$

Учитывая условия задачи, находим константы C и C_1 , и ответ.

2.7* В точке на расстоянии r от оси цилиндров потенциал

$$\varphi = \frac{\varphi_0 + \pi\rho(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1} - \pi\rho(r^2 - R_1^2).$$

Решение. По теореме Гаусса для кольцевого слоя радиусом r толщиной dr

$$E \cdot 2\pi r - \left(E - \frac{dE}{dr} dr \right) \cdot 2\pi(r - dr) = 4\pi\rho \cdot 2\pi r dr,$$

где E — напряженность поля. Отсюда

$$\frac{dE}{dr} + \frac{1}{r}E = 4\pi\rho,$$

или для потенциала

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = -4\pi\rho.$$

Частное решение этого уравнения $\varphi_1 = -\pi\rho r^2$. Решение соответствующего однородного уравнения $\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0$ имеет вид $\varphi_2 = C \ln r + C_1$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = C \ln r + C_1 - \pi\rho r^2.$$

Подставляя сюда заданные в условии задачи значения потенциала, находим C и C_1 и получаем ответ.

2.8. $V = \frac{mv_0^2}{2e} \frac{L}{H} = 14 \text{ мкВ}$, где m и e — масса и заряд электрона.

2.9. $E = \frac{4\mathcal{J}}{D} \sqrt{\frac{m_p}{W}} = 1,7 \text{ ед. СГСЭ} = 5,1 \text{ кВ/см};$

$V = \mathcal{J} \sqrt{\frac{m_p}{W}} = 4,3 \text{ ед. СГСЭ} = 1,3 \text{ кВ}$, где m_p — масса протона.

2.10. $E = \frac{q}{5h^2} \sqrt{26 - 2\sqrt{5}}.$

2.11. $\sigma(r) = \frac{qR}{2\pi(R^2 + r^2)^{3/2}}$, где r — расстояние от перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость.

2.12. $F_1 = \frac{4Q_1^2}{R^2}; \quad F_2 = \frac{4Q_2^2}{R^2}.$

2.13. $F_{\text{врп}} = -\frac{Q^2}{l^2} + \frac{Q^2}{4h^2 + l^2} \left(1 + 4\frac{h^2}{l^2}\right)^{-1/2};$

$$F_{\text{верт}} = mg + \frac{Q^2}{4h^2} \left[1 + \left(1 + \frac{l^2}{4h^2}\right)^{-3/2}\right].$$

2.14. $F = \frac{q}{2d^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$. Сила F направлена к вершине двугранного угла O .

2.15. $F = \frac{3}{8} \frac{p^2}{L_0^4} \approx 0,54 \text{ дин}; \quad A = \frac{p^2}{8L_0^3} \left(1 - \frac{L_0^3}{L^3}\right) \approx 0,16 \text{ эрг}.$

2.16. $F = \frac{3}{8} (3\sqrt{2} - 1) \frac{p^2}{a^4}.$

2.17. $\sigma = -\frac{Q}{2\pi H(l+H)} = -8 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/см}^2.$

2.18. $\sigma = -\frac{Q}{\pi R^2} \left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}}\right) \approx -9 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/см}^2.$

2.19. $R = \frac{dn}{n^2 - 1}; \quad H = \frac{d}{n^2 - 1}.$

Указание. Взять за начало координат точку, в которой находится меньший заряд, направить ось X в сторону большего заряда и записать потенциал в точке (x, y) плоскости, проходящей через линию соединения зарядов, а затем приравнять его нулю.

2.20. 1) $F = \frac{dr}{(d^2 - r^2)^2} q^2; \quad$ 2) $F = \left[\frac{dr}{(d^2 - r^2)^2} - \frac{r}{d^3} \right] q^2.$

2.21. 1) $A = \frac{rq^2}{2(d^2 - r^2)}; \quad$ 2) $\frac{r^3 q^2}{2d^2(d^2 - r^2)}.$

2.22. 1) $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}; \quad$ 2) $\varphi = \frac{q}{R},$

$$3) \sigma_B = \frac{q}{4\pi(r-d)^2} \left(1 + \frac{d}{r}\right), \quad \sigma_C = \frac{q}{4\pi(r+d)^2} \left(1 - \frac{d}{r}\right).$$

2.23* $\varphi = \frac{q}{d} + \frac{Q}{r}.$

Решение. Потенциал точки O равен

$$\varphi = \frac{q}{d} + \sum \frac{\Delta Q_i}{R_i} = \frac{q}{d} + \frac{Q}{R}.$$

Потенциал шара будет иметь то же значение.

2.24* Решение. Введем электрические изображения в сфере и плоскости, как указано на рис. 591. Сгруппируем заряды попарно: 1) q с $-q$;

2) q' с $-q'$. Каждая пара в плоскости $ACDB$ создает нулевой потенциал. Сгруппируем теперь те же заряды по-другому: 1) q с q' ; 2) $-q$ с $-q'$. При такой

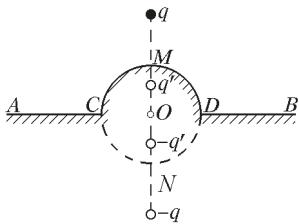


Рис. 591

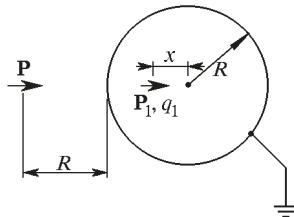


Рис. 592

группировке каждая пара будет создавать нулевой потенциал на сфере $CMDN$. Ясно поэтому, что потенциал четырех зарядов $q, -q, q', -q'$ обращается в ноль на поверхности $ACMDB$. Следовательно, поле этих зарядов в верхнем полупространстве будет тождественно с полем, которое требуется рассчитать.

$$2.25. \varphi = \begin{cases} \frac{Q}{R} + \frac{q}{d}, & \text{если } d > R, \\ \frac{Q}{R} + \frac{q}{R}, & \text{если } d \leq R, \end{cases} \quad (\text{см. решение задачи 2.23}).$$

$$2.26. q^* = -qr/d.$$

2.27. 1) Для заземленной сферы:

точка A (см. рис. 13 на с. 16): $\frac{E_1}{E_0} = 1 + \frac{R}{r} = 11$; точка B : $\frac{E_1}{E_0} = 1 - \frac{R}{r} = 9$.

2) Для незаземленной сферы:

$$\text{точка } A: \frac{E_1}{E_0} = 3 - \frac{r}{R} = 2,9; \quad \text{точка } B: \frac{E_1}{E_0} = 3 + \frac{r}{R} = 3,1.$$

2.28. Заряд-изображение состоит из диполя $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}/8$ и заряда $q_1 = -p/(4R)$, расположенных на расстоянии $x = R/2$ от центра сферы (рис. 592). Сила взаимодействия $F = \frac{8}{27} \frac{p^2}{R^4}$.

2.29. При $a \gg R$ в центре сферы диполь-изображение с моментом $p = 2B^3q$; $\frac{\Delta F}{F} = 16 \left(\frac{R}{a} \right)^3$, где $\Delta F = \frac{q^2}{4a^2} \cdot 16 \left(\frac{R}{a} \right)^3$ — добавочная сила притяжения, возникающая из-за наличия сферы.

$$\text{Без сферы } F = \frac{q^2}{4a^2}.$$

$$2.30. F = \frac{8q^2}{9R^2}; \quad \sigma_{\text{внутр}} = -\frac{3q}{2\pi R^2}; \quad \sigma_{\text{внеш}} = \frac{q+Q}{4\pi R^2}.$$

2.31. $\sigma_{\text{внутр}} = \frac{q}{18\pi R^2}$; $\sigma_{\text{внеш}} = -\frac{q}{4\pi R^2}$. После заземления $\sigma'_{\text{внутр}} = \sigma_{\text{внутр}}$; $\sigma'_{\text{внеш}} = 0$.

$$2.32^*. F \approx -\frac{3p^2 R^3}{a^7} \quad (\text{сила притяжения}).$$

Решение. Приведем два решения: оценочное и точное.

а) *Оценочное решение.* Из условия видно, что $a \gg R$. Таким образом, можно считать, что сфера находится (приближенно, конечно) в однородном поле E . Дипольный момент сферы $p' = R^3 E = \left(-\frac{p}{a^3}\right) R^3$. Теперь, когда получена оценка дипольного момента сферы, считаем, что этот дипольный момент \mathbf{p}' находится в неоднородном поле диполя \mathbf{p} . Поле диполя в перпендикулярном к его оси направлении $E = -\frac{p}{r^3}$. Сила взаимодействия $F = p' \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right) \Big|_{r=a} = -\frac{3p^2 R^3}{a^7}$. Это сила притяжения.

б) *Точное решение.* Известно, что для расчета взаимодействия точечного заряда с незаряженной сферой пользуются методом изображений (см. задачу 2.20 или Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Т. 3, § 23). Заряд-изображение q^* помещается на отрезке прямой, соединяющей заряд q и центр O сферы (рис. 593). Смещение заряда q^* относительно центра сферы $x = R^2/a$. Сам же заряд $q^* = -\frac{R}{a}q = -\frac{x}{R}q$. Таким образом,

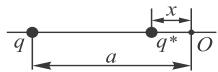


Рис. 593

$$q \xrightarrow{\text{отобразится}} -\frac{x}{R}q.$$

Малое смещение da заряда q приведет к малому смещению dx заряда-изображения:

$$|dx| = \frac{R^2}{a^2} |da| = \frac{x}{a} |da| = \frac{x^2}{R^2} |da|.$$

Применимально к плечу диполя обозначим $da = l$, $dx = l'$. Таким образом,

$$l \xrightarrow{\text{отобразится}} \frac{x^2}{R^2} l.$$

Нетрудно понять, что и в нашем случае, когда диполь перпендикулярен оси, также справедливо полученное отображение. Поскольку $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$, то

$$\mathbf{p} \xrightarrow{\text{отобразится}} \mathbf{p}' = -\left(\frac{x}{R}\right)^3 \mathbf{p}.$$

Используя известное соотношение для силы взаимодействия двух параллельных диполей (задача 1.30), получим

$$F = \frac{3pp'}{(a - R^2/a)^4} = -\frac{3p^2 a R^3}{(a^2 - R^2)^4} \approx -\frac{3p^2 R^3}{a^7}.$$

Заметим, что приближенный результат получен при допущении $a \gg R$, и он совпадает с оценочным решением.

2.33. $E(A) = \frac{3p}{R^3}$; $E(B) = 0$.

2.34. $F = \frac{128}{27} \frac{p^2}{R^4}$ — сила притяжения.

2.35. $F = \frac{64}{9} \frac{p^2}{R^4}$ — сила отталкивания, поскольку диполь и диполь-изображение однородны, т. е. оба отталкиваются от центра сферы.

Указание. Следует учесть не только диполь-изображение, но и компенсационный заряд, который расположен там же, где и диполь-отражение, т. е. вне сферы.

$$\mathbf{2.36.} F \propto \frac{1}{d^5}.$$

2.37. На оси кольца на расстояниях $x = \pm R/\sqrt{2}$ равновесие устойчиво. В центре кольца — неустойчиво.

$$\mathbf{2.38.} q = -2(\sqrt{2} - 1)Q.$$

$$\mathbf{2.39.} F = \frac{q^2}{R^2} \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{25} + \frac{1}{16} \right) = \frac{737}{3600} \frac{q^2}{R^2} \approx 0,2 \frac{q^2}{R^2}.$$

$$\mathbf{2.40.} F = \frac{Q^2}{R^2} \left[1 - \frac{r}{R} + \frac{r/R}{(1 - r^2/R^2)^2} \right].$$

$$\mathbf{2.41*.} Q = q\alpha \frac{1 - (1 - \alpha^2)^2}{(1 - \alpha^2)^2}, \text{ где } \alpha = \frac{R}{d}.$$

Решение. Поляризованный шар в условиях задачи (рис. 594) может быть заменен парой зарядов: $q' = -qR/d$ на расстоянии $b = R^2/d$ от центра и $Q' = Q - q'$ в центре (Q — полный заряд шара). Сила взаимодействия

$$F = \frac{qq'}{(d-b)^2} + \frac{qQ'}{d^2} = -q^2 \frac{dR}{(d^2-R^2)^2} + q^2 \frac{R}{d^3} + qQ \frac{1}{d^2}.$$

Из условия $F = 0$ имеем

$$Q = q \frac{R}{d} \frac{d^4 - (d^2 - R^2)^2}{(d^2 - R^2)d} = q\alpha \frac{1 - (1 - \alpha^2)^2}{(1 - \alpha^2)^2},$$

где $\alpha = R/d$.

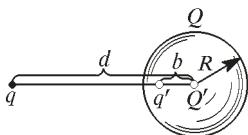


Рис. 594

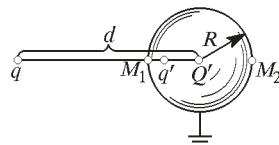


Рис. 595

$$\mathbf{2.42*.} \sigma_1 = -\frac{q}{4\pi(d+R)^2} \left(\frac{d}{R} - 1 \right), \quad \sigma_2 = -\frac{q}{4\pi(d-R)^2} \left(\frac{d}{R} + 1 \right).$$

Решение. Поле снаружи шара совпадает с полем пары зарядов q и q' (рис. 595). С другой стороны, поверхностная плотность заряда на сфере связана с полем вблизи его поверхности: $\sigma = \frac{1}{4\pi} E$. В окрестности точки M_2 имеем

$$E_2 = \frac{q}{(d+R)^2} + \frac{q'}{(b+R)^2}, \quad \text{где } q' = -q \frac{R}{d}, \quad b = \frac{R^2}{d},$$

отсюда

$$E_2 = -\frac{q}{(d+R)^2} \left(\frac{d}{R} - 1 \right).$$

Аналогично, в окрестности точки M_1

$$E_1 = -\frac{q}{(d-R)^2} \left(\frac{d}{R} + 1 \right).$$

$$\mathbf{2.43.} \varphi = \left(1 + \frac{L}{R}\right)^{5/2} \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} \left(\frac{mg}{2}\right)^{1/2} = 130 \text{ ед. СГСЭ.}$$

$$\mathbf{2.44.} v_0 = \frac{Qr}{(L+R)^2} \sqrt{\frac{r}{m}} = 240 \text{ см/с.}$$

$$\mathbf{2.45.} F = \frac{2x^2}{R(1-r^2/R^2)}.$$

$$\mathbf{2.46*} q_3 = q_2^2/q_1.$$

Решение. Потенциалы проводников являются линейными однородными функциями их зарядов: $\varphi_i = \sum_k A_{ik} q_k$. В силу симметрии все коэффициенты A_{ik} с одинаковыми индексами равны между собой. Точно так же равны все коэффициенты с разными индексами. Обозначая эти коэффициенты через A и B соответственно, можем записать $\varphi_1 = Aq_1 + B(q_2 + q_3)$ и аналогично для остальных проводников. При зарядке первого шара он получает потенциал $\varphi_1 = Aq_1$. При зарядке остальных двух шаров потенциал первого шара меняется, но его значения для решения не нужны. При зарядке второго шара его потенциал становится равным также $\varphi_1 = Aq_2 + Bq_1$. Аналогично, для третьего шара $\varphi_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2)$. Таким образом, $Aq_1 = Aq_2 + Bq_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2)$. Отсюда получаем ответ.

$$\mathbf{2.47*} E_x = \frac{V_y}{hd}; \quad E_y = \frac{V_x}{hd}.$$

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рис. 596 (ось Z перпендикулярна к плоскости рисунка и параллельна длинным сторонам пластин). Искомое поле потенциально и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

На проводнике BD (т. е. при $y = 0$) потенциал должен обращаться в постоянную, которую мы примем равной нулю. Искомое решение есть $\varphi = \alpha xy + \beta y$, где α и β — постоянные. В силу симметрии потенциал φ не должен меняться при замене y на $-y$, а потому $\beta = 0$. Для напряженности поля получаем

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\alpha y, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\alpha x.$$

Постоянная α найдется по разности потенциалов между точками B и A (или между точками D и C). Потенциалы точек A и D равны соответственно $\varphi_A = +V/2$, $\varphi_D = -V/2$. Напряженность поля E_y на поверхности пластины AB (т. е. при $x = -d/2$) равна $E_y = -V/(2h) = ad/2$, откуда $\alpha = -V/(hd)$. Окончательно

$$E_x = \frac{V_y}{hd}, \quad E_y = \frac{V_x}{hd}.$$

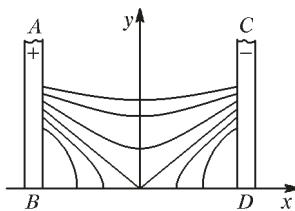


Рис. 596

Уравнение силовой линии $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}$ имеет вид $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$, откуда $y^2 - x^2 = C$, т. е. силовыми линиями являются равносторонние гиперболы. При $C > 0$ оси гипербол совпадают с осью Y , при $C < 0$ — с осью X . Для выяснения смысла постоянной C обозначим через a расстояние от вершины гиперболы до начала координат. При $C > 0$ координатами вершины гиперболы будут $(0; a)$. Они должны удовлетворять уравнению $a^2 - 0^2 = C$, откуда $C = a^2$. Аналогично, для второго случая ($C < 0$) $C = -a^2$. Таким образом, получаются два семейства гипербол: $y^2 - x^2 = a^2$ и $x^2 - y^2 = a^2$, асимптотами которых являются биссектрисы соответствующих координатных углов (рис. 596). Гиперболические силовые линии первого семейства легко воспроизводятся экспериментально обычным демонстрационным методом. Силовые линии второго семейства экспериментально получить трудно из-за малости составляющей поля E_x .

2.48. $\Delta\varphi_{\max} = E_{\max}d \left(1 - \frac{d}{2b}\right) \ln\left(\frac{2b}{d} - 1\right) \approx E_{\max}d \ln\left(\frac{2b}{d}\right) \approx 207 \text{ кВ}$, где E_{\max} — поле пробоя воздуха.

2.49. $\sigma_A = \sigma'_A = -\frac{1}{4\pi}E_A$, где E_A — электрическое поле в точке A .

$$E_A = \frac{2q}{a^2} \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots\right) \approx 1,82 \frac{q}{a^2}.$$

С точностью 1% отбрасываем все члены, начиная с $\frac{1}{13^2}$; $\sigma_A = -0,145 \frac{q}{a^2}$.

2.50* $\alpha = 0$.

Решение. На рис. 597 изображено электрическое поле точечного заряда, размещенного над металлической плоскостью на высоте H . Для ответа

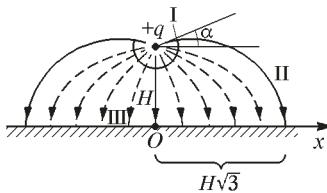


Рис. 597

на вопрос задачи предлагается вычислить поток через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями: I — часть сферической поверхности, окружающей точечный заряд $+q$ в малой окрестности этого заряда (рис. 597); II — силовыми линиями, заканчивающимися на плоскости на расстоянии $x = H\sqrt{3}$; III — плоскостью, проведенной вблизи металлического листа. Таким образом, внутри поверхности I-II-III нет электрических зарядов, а значит, поток вектора \mathbf{E} через эту замкнутую поверхность $\Phi_E = \oint (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 0$. Рассмотрим составляющие этого потока по поверхностям I, II, III. Сразу очевидно, что поток $\int_{\text{II}} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 0$. Поток вектора \mathbf{E} через поверхность I $\int_{\text{I}} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = -q\Omega$, где Ω — телесный угол, охватывающий часть сферы I. Для того чтобы вычислить поток вектора \mathbf{E} через поверхность III, следует предварительно вычислить поле $E(x)$ вблизи металлического листа. Используя зеркальное изображение заряда $+q$, легко найти

$$E(x) = \frac{2qH}{(x^2 + H^2)^{3/2}}.$$

Таким образом,

$$\int_{\text{III}} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 2qH \int_0^{H\sqrt{3}} \frac{2\pi x dx}{(x^2 + H^2)^{3/2}} = 2\pi q.$$

Итак, $\Phi_E = \oint (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = -q\Omega + 2\pi q = 0$, откуда $\Omega = 2\pi$, а значит, искомый угол $\alpha = 0$.

2.51. $D = 2H$.

2.52. $r_{\max} = 10\sqrt{\frac{3S}{\pi}} \approx 9,77\sqrt{S}$.

2.53. $F = -3\left(\frac{SV}{2\pi}\right)^2 \frac{R^3}{r^7}$; шарик притягивается к конденсатору.

§ 3. Электрическое поле в веществе.

Энергия электрического поля.

Энергетический метод вычисления пондеромоторных сил

3.1. $\epsilon = 1 + 4\pi r^3 n$.

3.2. $x = \frac{\epsilon - 1}{4\pi n_0 z e} E = 2 \cdot 10^{-16}$ см, где n_0 — число Лошмидта.

3.3. $\beta = \frac{3}{4} a^3 = 0,11 \cdot 10^{-24}$ см³.

Указание. Учитывая, что $r \ll a$, и используя распределение электрона в атоме, по теореме Гаусса вычислить $E(r) = -\frac{4}{3} \frac{er}{a^3}$. Далее следует определить смещение r_0 электронного облака при наложении внешнего поля E_0 . Записав дипольный момент атома $p = er_0$, найти коэффициент β при поле E_0 .

3.4. $\beta = a^3 = 0,15 \cdot 10^{-24}$ см³;

3.5. $\omega_0 = \sqrt{\frac{d_0 E_0}{J}}$. В отсутствие переменного поля, пренебрегая тепловым движением, можно полагать все диполи выстроеными по полю \mathbf{E}_0 .

3.6. $\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\beta E^2}{2kT} = 1,2 \cdot 10^{-7}$.

3.7. $\mathbf{E}_A = 2\pi \mathbf{P}_0$; $\frac{E_A}{E_B} = \left(\frac{l}{r}\right)^2$.

3.8. $E_C = E_A \frac{2h}{D} = 12$ В/см.

3.9. $\mathbf{E} = -8 \frac{l}{L} \mathbf{P}$; $\mathbf{D} = 4 \left(\pi - 2 \frac{l}{L} \right) \mathbf{P}$.

3.10. $\mathbf{E}_A = -\frac{hl}{2R^2} \mathbf{P}$; $\mathbf{D}_A = \left(4\pi - \frac{hl}{2R^2} \right) \mathbf{P}$.

3.11. $\mathbf{E}_A = -\frac{2a}{R} \mathbf{P}$; $\mathbf{D}_A = 2 \left(2\pi - \frac{a}{R} \right) \mathbf{P}$.

3.12. $\mathbf{E}_O = \frac{\pi h}{R} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \mathbf{P}$.

3.13. Поле в пластине $E_1 = 4\pi P_0 \left(\frac{x^2}{d^2} - 1 \right)$; вне пластины $E_2 = 0$. Разность потенциалов $V = \frac{16\pi}{3} P_0 d$.

$$3.14. \mathbf{E} = \frac{4h}{R} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{R}{l} \right) \mathbf{P}.$$

3.15. $E' = (\epsilon - 1)E/3$. Если поляризация диэлектрической среды P , то $(\epsilon - 1) = 4\pi P$. Напряженность поля в центре сферической полости $E' = 4\pi P/3$. В самом деле (рис. 598),

$$E' = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{P \cos \theta R^2 \sin \theta d\varphi}{R^2} \cos \theta = 2\pi P \int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} P.$$

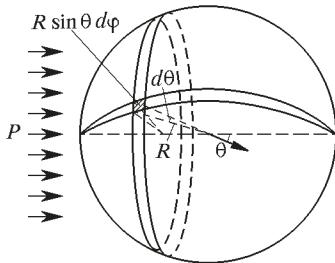


Рис. 598

$$3.17. F \approx \frac{3p^2}{l^4} = \frac{(\epsilon - 1)^2}{3} \frac{V^2}{d^2} \frac{r^6}{l^4} \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ дин (отталкивание).}$$

$$3.18. F \approx \frac{2}{3}(\epsilon - 1)^2 \frac{V^2}{d^2} \frac{r^6}{l^4} \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ дин (притяжение).}$$

$$3.19. E_1 = D_1 = 4\pi P \frac{h}{d} - \text{в зазоре};$$

$$E_2 = -4\pi P \left(1 - \frac{h}{d} \right) - \text{в пластине}; \quad D_2 = D_1.$$

$$3.20. \mathbf{E} = \frac{2\mathbf{E}_0}{\epsilon + 1}; \quad \mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{\mathbf{E}_0}{2\pi}.$$

$$3.21. E \approx \frac{D}{1 + 4\pi n_0 \beta_0} \left[1 - \frac{D^2}{(1 + 4\pi n_0 \beta_0)^3} \frac{4\pi n_0 \beta_0^2}{kT} \right], \text{ где } D = \frac{Q}{r^2}.$$

$$3.22. \sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right).$$

$$3.23. 1) \Phi_E = \pi R^2 E_0 \cos \theta \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}; \quad 2) \oint_{\Gamma} D dl = -(\epsilon - 1) E_0 l_1 \sin \theta. \quad \text{Заметим,}$$

что поток вектора \mathbf{D} , как и положено, равен нулю.

$$3.24. C = 35 \text{ см};$$

$$3.25. U = \frac{\epsilon V}{1 + (\epsilon - 1)d/l} = 500 \text{ В.}$$

$$3.26. C = \frac{S(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{4\pi d \ln(\epsilon_1/\epsilon_2)}.$$

Указание. Так как диэлектрическая проницаемость между обкладками меняется по закону $\epsilon = \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d}x$, где x — расстояние от первой пластины, то разность потенциалов между обкладками можно записать так:

$V = \int_0^d E dx = D d \int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 d + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x}$, где E — напряженность поля, $D = 4\pi\sigma$ — электрическая индукция.

$$\mathbf{3.27. } E(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \left(3\pi\sigma + \frac{2\pi\sigma}{d^2} x^2 \right) & \text{при } 0 \leq x \leq d, \\ -\pi\sigma & \text{при } x < 0, \\ +\pi\sigma & \text{при } x > d. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.28. } E = \frac{4\pi Q}{\varepsilon_1 \Omega_1 + \varepsilon_2 \Omega_2} \frac{1}{r^2}, \quad \text{где } r \text{ — расстояние от центра шара; } C = \frac{\Omega_1 \varepsilon_1 + \Omega_2 \varepsilon_2}{4\pi} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

$$\mathbf{3.29. } E = \frac{4\pi}{\varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2} \frac{Q}{lr}, \quad \text{где } r \text{ — расстояние от центра конденсатора;} \\ C = \frac{\varphi_1 \varepsilon_1 + \varphi_2 \varepsilon_2}{4\pi \ln(R_2/R_1)} l.$$

$$\mathbf{3.30. } S_2 = \frac{\varepsilon - n}{\varepsilon - 1} \frac{S_1}{n} = 200 \text{ см}^2, \quad \text{где } n = 40.$$

$$\mathbf{3.31. } h = \frac{\varepsilon - n}{\varepsilon - 1} \frac{d}{n} = 0,2 \text{ мм, где } n = 50.$$

$$\mathbf{3.32. } C = \frac{8\pi\beta q}{\sqrt{1 + 32\pi\beta q} - 1} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} \right)^{-1}.$$

$$\mathbf{3.33. } C = \frac{8\pi\beta q}{\sqrt{1 + 16\pi\beta q} - 1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

$$\mathbf{3.34. } \rho_{\text{cb}} = \frac{2V_0}{\pi R_1 r}.$$

$$\mathbf{3.35. } \rho_{\text{пол}}(r) = -\frac{2P_0}{R} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r}{R} \right); \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Big|_{r \leq R} = -4\pi P_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \frac{\mathbf{f}}{R}; \quad E \Big|_{r > R} = 0; \quad D = 0 \text{ всюду.}$$

$$\mathbf{3.36. } \rho = \frac{2\pi(\varepsilon - 1)n^2}{(e/m)} \approx 4,8 \cdot 10^{-13} \text{ ед. СГСЭ;}$$

$$q = -\frac{m}{e} 2\pi^2 (\varepsilon - 1) n^2 R^2 H \approx -0,15 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ.}$$

$$\mathbf{3.37. } \varphi = \frac{q}{\varepsilon R}.$$

$$\mathbf{3.38. } \sigma_1 = \frac{q}{2\pi r^2 (1 + \varepsilon/\varepsilon_1)}; \quad \sigma_2 = \frac{q}{2\pi r^2 (1 + \varepsilon_1/\varepsilon)}.$$

$$\mathbf{3.39. } F = \frac{2}{3} \left(\frac{q}{R} \right)^2 \left(\frac{r_0}{R} \right)^3 (\varepsilon - 1).$$

$$\mathbf{3.40. } F = \frac{q^2}{4L^2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}; \quad \sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{qL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}, \quad \text{где } r \text{ — расстояние от перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость.}$$

$$\mathbf{3.41. } F \propto r^{-5}.$$

$$\mathbf{3.42. } W = \frac{q^2}{2R}.$$

$$\mathbf{3.43.} W = \frac{3q^2}{5R}.$$

$$\mathbf{3.44.} 1) R = \frac{3}{5} \frac{e^2}{mc^2} \approx 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ см}; 2) R = \frac{e^2}{2mc^2} \approx 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

$$\mathbf{3.45.} H = \frac{A}{2\pi\rho q d} = 1,3 \text{ см}.$$

$$\mathbf{3.46.} T = T_0 \frac{CU^2}{12P_0V_0} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ К}.$$

$$\mathbf{3.47.} A = \frac{11}{16} \frac{q^2}{R}.$$

$$\mathbf{3.48.} A = \frac{11}{8} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q^2}{R}.$$

$$\mathbf{3.49.} W = \frac{2}{3} \pi^2 \rho^2 R^2 l^3.$$

$$\mathbf{3.50.} P = 2\pi\sigma^2 = \frac{2\pi Q^2}{(4\pi R^2)^2} = \frac{Q^2}{8\pi R^4}.$$

Указание. Пусть σ — поверхностная плотность зарядов на сфере. Напряженность поля снаружи у поверхности сферы равна $4\pi\sigma$, а внутри равна нулю. Выделим мысленно элемент поверхности dS . Поле у поверхности можно рассматривать как результат наложения двух полей: во-первых, поля зарядов, находящихся на элементе dS и создающих напряженность $2\pi\sigma$ снаружи и внутри, и во-вторых, поля всех остальных зарядов. Следовательно, поле остальных зарядов равно $2\pi\sigma$ и направлено наружу. Отсюда сила, действующая изнутри на элемент dS , равна $2\pi\sigma dS$. Поэтому давление будет $2\pi\sigma^2$.

$$\mathbf{3.51*.} F = \frac{Q^2}{8R^2}.$$

Решение. На единицу поверхности сферы действует выталкивающая сила $\mathbf{f} = Q^2 \mathbf{n}/(8\pi R^2)$. Отсюда интегрированием легко получить ответ.

$$\mathbf{3.52.} F = \frac{Q(Q+2q)}{8R^2}.$$

$$\mathbf{3.53.} F = \frac{9}{16} E_0^2 R^2 = 9 \text{ дин}.$$

Указание. Учитывая, что проводящий шар в однородном поле \mathbf{E}_0 поляризуется, следует найти поле на поверхности шара как функцию угла θ между направлением вектора \mathbf{E}_0 и точкой на поверхности шара: $E_{\text{ш}} = 3E_0 \cos \theta$. Проекция (на ось симметрии) сил давления, оказываемых полем на половинки шара, $f_{\parallel} = \frac{E_{\text{ш}}^2}{8\pi} \cos \theta$. Далее интегрированием по углу θ получается полная сила отталкивания, действующая на каждую из половинок шара.

$$\mathbf{3.54.} F = \frac{\chi^2}{\pi R}.$$

$$\mathbf{3.55.} W_2 = \varepsilon W_1.$$

$$\mathbf{3.56.} Q = \frac{1}{2}(R_1\varphi_1^2 + R_2\varphi_2^2 + R_3\varphi_3^2) - \frac{1}{2}(R_1 + R_2 + R_3)\varphi^2 \approx 4,16 \text{ эрг}, \text{ где}$$

φ — установившийся потенциал системы после соединения всех шаров.

$$\mathbf{3.57.} x = \frac{d}{\frac{\varepsilon^2 S \ell^2}{8\pi d A} - \varepsilon}.$$

$$3.58. Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{4}; \quad R > \frac{\Delta t}{C} \approx 10^8 \text{ ед. СГСЭ.}$$

3.59. $F = \frac{S}{8\pi} \left(\frac{V\epsilon}{l_1\epsilon + l_2} \right)^2$; при $l \rightarrow 0$ $F = \frac{SV^2\epsilon^2}{8\pi l_2^2} = \frac{D}{8\pi} S = w_3 S$, где D — индукция, w_3 — плотность энергии электрического поля.

3.60. Пробой диэлектрика наступит раньше.

3.61. 1) $C = \frac{(1+\epsilon)S}{8\pi d}$. 2) $E = \frac{2V}{d(1+\epsilon)}$; напряженность поля одинакова в воздухе и в жидкости. 3) В воздухе $\sigma = \frac{V}{2\pi d(1+\epsilon)}$; в жидкости $\sigma' = \frac{\epsilon V}{2\pi d(1+\epsilon)}$. 4) $\Delta W = \frac{SV^2}{8\pi d} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}$. За счет энергии ΔW совершена работа при подъеме жидкости между пластинами конденсатора. Уровень жидкости между пластинаами будет выше, чем в сосуде.

3.62* Изменение энергии конденсатора: 1) $\Delta W_1 = \frac{(1-\epsilon)CV^2}{2} \approx -318$ эрг; 2) $\Delta W_2 = \frac{(\epsilon - 1)Q^2}{2C\epsilon} \approx +1590$ эрг. Работа, совершаемая при удалении стеклянной пластины: $A_1 = +318$ эрг; $A_2 = +1590$ эрг.

Решение. В обоих случаях не только изменяется энергия конденсатора, но и затрачивается работа на удаление пластины. Эта работа во втором случае больше, так как по мере выдвижения пластины напряженность поля в конденсаторе увеличивается, в то время как в первом случае она остается неизменной. В первом случае при удалении пластины из конденсатора не только совершается механическая работа, но и уменьшается энергия конденсатора, и увеличивается энергия батареи. Работа, совершенная против ЭДС батареи, $A = \Delta Q V$, где ΔQ — изменение заряда конденсатора после удаления пластины. Так как $\Delta Q = (\epsilon - 1)CV$, то $A = (\epsilon - 1)CV^2$ и при удалении пластины совершается механическая работа $A_1 = A + \Delta W_1 = (\epsilon - 1)CV^2/2 = +318$ эрг. Во втором случае при удалении пластины совершается механическая работа, равная увеличению энергии конденсатора: $A_2 = \Delta W_2 = +1590$ эрг.

$$3.63. F = \frac{\epsilon - 1}{(\epsilon + 1)^2} \frac{V^2 \sqrt{S}}{2\pi d}.$$

$$3.64. h = \frac{V^2(\epsilon - 1)}{\pi \rho g (D_1^2 - D_2^2) \ln(D_1/D_2)} \approx 5 \text{ мм.}$$

$$3.65. \oint_L (\mathbf{D} dl) = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} V.$$

3.66. $\Delta C \approx r^3/d^2 \approx 8 \cdot 10^{-6}$ см. Эта оценка не учитывает «исчезновение» поля в объеме шарика. Величина неучтеннной энергии порядка механической работы по переносу шарика в заданную точку. Таким образом, $\Delta C \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$ см.

3.67. $M = \frac{(\epsilon - 1)R^2 V^2}{16\pi d}$. Момент сил M стремится втянуть диэлектрическую пластину внутрь конденсатора.

$$3.69. V = \sqrt{\frac{8\pi Mgd}{l}} = 15,7 \text{ ед. СГСЭ} = 4,71 \text{ кВ.}$$

$$3.70. F = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} \left(\frac{Q}{R} \right)^2.$$

3.71. $F \approx \frac{2\alpha R^2 V^2}{(l + R)^5} \approx 10^{-5}$ дин, если $\alpha \approx r^3$.

$$\text{3.72. } \frac{\Delta n}{n_0} = \frac{n_2 - n_1}{n_0} = e^{-\frac{W_1}{kT}} - e^{-\frac{W_2}{kT}} \approx \frac{W_1 - W_2}{kT} = 0,85 \cdot 10^{-6}.$$

3.73. $x_0 = \frac{1}{\varepsilon - 1} \left(\sqrt{\frac{2\pi q^2(\varepsilon - 1)}{mg} \frac{d}{a}} - a \right)$ — высота подъема диэлектрической пластины при выполнении условия равновесия.

3.74. $\rho_{\text{пол}}(x) = \frac{3x^2}{4\pi d^3} E_0$; $\sigma_{\text{пол}}(x = -d) = -\frac{E_0}{4\pi}$; $\sigma_{\text{пол}}(x = d) = -\frac{E_0}{4\pi}$. Объемный (положительный) заряд, отнесенный к единице поверхности пластины $Q = \frac{E_0}{2\pi} > 0$; суммарный заряд на обеих поверхностях $q = -\frac{E_0}{2\pi} = -Q \left[\frac{\text{заряд}}{\text{см}^2} \right]$.

В целом пластина электрически нейтральна.

$$\text{3.75. 1) } \rho_{\text{пол}}(x) = \frac{Q \cdot 2x}{\varepsilon_0 S d^2}; \quad 2) \quad Q_{\text{пол}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad 3) \quad \sigma_{\text{пол}}(0) = -\frac{Q(\varepsilon_0 - 1)}{\varepsilon_0 S}; \quad \sigma_{\text{пол}}(d) = \frac{Q(\varepsilon_0 - 2)}{\varepsilon_0 S}; \quad q_{\text{пол}}(0) = \sigma_{\text{пол}}(0) \cdot S; \quad q_{\text{пол}}(d) = \sigma_{\text{пол}}(d) \cdot S.$$

$$\text{3.76. 1) } q_{\text{пол}}(R_1) = -\frac{q_0(\varepsilon_1 - 1)}{\varepsilon_1} < 0; \quad q_{\text{пол}}(R_2) = \frac{q_0}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) > 0; \quad q_{\text{пол}}(R_3) = \frac{q_0}{\varepsilon_2} (\varepsilon_2 - 1) > 0; \quad 2) \quad \rho_{\text{пол}} = 0; \quad Q_{\text{пол}}^{\text{об}} = 0; \quad 3) \quad V = \frac{q_0}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q_0}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right).$$

$$\text{3.77. } \oint_L \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = 4\pi P l_0;$$

$$\text{3.78. } \Phi_{\mathbf{D}} = 0; \quad \Phi_{\mathbf{E}} = -4\pi^2 R^2 P.$$

$$\text{3.79. 1) } \sigma_{\text{пол}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} (\varepsilon - 1) E_0 \cos\theta > 0; \quad 2) \quad P = E_0 \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \sqrt{\cos^2\theta + \varepsilon^2 \sin^2\theta},$$

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{P_{\tau}}{P_n} = \varepsilon \operatorname{tg}\theta, \text{ где } \theta' \text{ дает направление } \mathbf{P} \text{ внутри пластины.}$$

$$\text{3.80. } F = \frac{2\pi^2 q^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin^2 \alpha_1}{R^2 (\varepsilon_1 \Omega_1 + \varepsilon_2 \Omega_2)^2}. \text{ При } \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \text{ имеем } \Omega_1 = \pi. \text{ Тогда } F = \frac{3q^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2R^2 (\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)^2}.$$

$$\text{3.81. } F = \frac{18q^2}{\pi R l} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2)^2}.$$

3.82. $R = \frac{3q^2}{5mc^2}$. Для электрона $r_e = 1,7 \cdot 10^{-13}$ см; для протона $r_p = 0,92 \cdot 10^{-16}$ см. Заметим, что классический радиус электрона $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см. В ядерной физике радиус протона оценивается величиной $0,8 \cdot 10^{-13}$ см, что отличается от полученного размера на три порядка.

3.83. $E_0 = E_{\text{пр}}/3 = 10 \text{ кВ/см}$ (если представлять каплю воды как идеально проводящий шарик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \rightarrow \infty$). В другой модели, считая воду диэлектриком с $\varepsilon = 81$, дипольный момент шара $\mathbf{p} = r^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}$. Тогда $\mathbf{E}_{\text{max}} = \mathbf{E} + \frac{2\mathbf{p}}{r^3} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} \mathbf{E} \approx 3\mathbf{E}$, откуда следует тот же ответ.

$$\text{3.84. } L = \sqrt[3]{\frac{4\pi C d}{\varepsilon S}} = 7,48 \text{ см}; \quad r = \frac{\pi L^3}{2S_{\text{полн}}} = 1,6 \text{ мкм, где } S_{\text{полн}} = \frac{4\pi C d}{\varepsilon} = 4,19 \cdot 10^6 \text{ см}^2 = 419 \text{ м}^2 \text{ — полная поверхность всех шариков.}$$

§ 4. Постоянный ток. Токи в неограниченной среде

4.1. $\mathcal{J} = 0,75 \text{ А}$. Вольтметр покажет ноль, так как падение напряжения внутри каждого элемента равно ЭДС элемента.

4.2. $\mathcal{J}_1 = 1,05 \text{ А}$ (по направлению ЭДС); $\mathcal{J}_2 = 0,87 \text{ А}$ (против направления ЭДС); $V = 1,8 \text{ В}$.

4.3. 1) $V = r_1 \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}{r_1 + r_2 + r_3} - \mathcal{E}_1$; 2) $V = 0$.

4.4. $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}$.

4.5. $I = \frac{\mathcal{E}_0(1 + R_3/R_2) + \mathcal{E}_1}{R_0(1 + R_3/R_2) + R_3}$.

4.6. $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$; $\mathcal{J}_R = 0$ при условии $\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{R_1}{R_2}$.

4.7. $N_1 = N_4 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2}{4R}$; $N_2 = N_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{4R}$.

4.8. $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)$; $\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} - \frac{\mathcal{E}_3}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)$.

4.9. $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 + \frac{R_1}{R_2} \mathcal{E}_2}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$.

4.10. $V_i = \frac{V R_i}{R_1 + R_2 + R_3}$, где $i = 1, 2, 3$.

4.11. $\mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{J} R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$; $\mathcal{J}_2 = \frac{\mathcal{J} R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$;

$\mathcal{J}_3 = \frac{\mathcal{J} R_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$.

4.12. 1) Если диаметр вращается по часовой стрелке (рис. 599), то лампа вспыхнет при $\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{V_{\text{заж}}}{V}$, погаснет при $\beta = \frac{\pi}{2} \frac{V_{\text{разж}}}{V}$.

2) $V_{\min} = V_{\text{заж}}$, лампа загорится при $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$.

4.13. $V = \frac{ESRn}{2\pi} = 6,67 \cdot 10^{-4} \text{ ед. СГСЭ} = 0,2 \text{ В}$.

4.14.* $\mathcal{J} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{\mathcal{E}}{h} vb$, где b — ширина пластины.

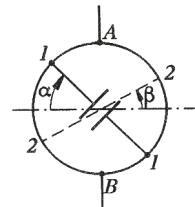


Рис. 599

Решение. Заряд, приходящий на пластины за время dt :

$$dq = \sigma v b dt,$$

где поверхностная плотность поляризационных зарядов на диэлектрике

$$\sigma = P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{\mathcal{E}}{h}.$$

Отсюда

$$\mathcal{J} = \frac{dq}{dt} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{\mathcal{E}}{h} vb \quad [\text{ед. СГСЭ}].$$

4.15* $N = \mathcal{E}\mathcal{J} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{bv\mathcal{E}^2}{h}$ [эрг/с], где v — мгновенная скорость диэлектрика, b — ширина пластины. Работа батареи расходуется на увеличение электрической энергии конденсатора и кинетической энергии диэлектрика поровну.

Решение.

$$Ndt = \mathcal{E}dq = dW + \delta A,$$

$$dW = d\left(\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\right) = \frac{\mathcal{E}^2}{2}dC, \quad \delta A = \frac{\mathcal{E}^2}{2}dC, \quad dW = \delta A, \quad C = C_0 + \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{b}{h}x,$$

$$N dt = 2dW = 2\frac{\mathcal{E}^2}{2}dC = \mathcal{E}^2 \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{b}{h}v dt.$$

4.16* $R = \frac{V}{\mathcal{J}} \approx \frac{1}{\pi\lambda a} \ln \frac{b}{r_0}$.

Решение. Поскольку $\lambda_1 \gg \lambda$, то можно считать, что цилиндрические проводники по всей своей длине имеют постоянные потенциалы. Поэтому для определения поля следует рассматривать электростатическую задачу. Пусть линейная плотность зарядов на проводниках есть $\pm\kappa$. По теореме Гаусса поле E вокруг цилиндрического стержня на расстоянии r от его оси равно

$$E = \pm \frac{2\kappa}{r}.$$

Разность потенциалов между стержнями получим путем интегрирования поля E :

$$V = 2\kappa \int_{r_0}^{b-r_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr = 4\kappa \ln \frac{b_0 - r_0}{r_0} \approx 4\kappa \ln \frac{b}{r_0}.$$

Полный ток \mathcal{J} найдем, принимая во внимание, что вблизи каждого из стержней поле практически не зависит от заряда другого стержня ($b \gg r_0$). Полагая, что плотность тока постоянна по толщине листа, получим для полного тока, вытекающего из цилиндрического проводника,

$$\mathcal{J} = 2\pi r_0 a j = 2\pi r_0 a \lambda E = 4\pi\kappa\lambda a.$$

Следовательно, искомое сопротивление

$$R = \frac{V}{\mathcal{J}} \approx \frac{1}{\pi\lambda a} \ln \frac{b}{r_0}.$$

4.17. $R = \frac{2l}{\pi\lambda\delta(D-d)} \ln \frac{D}{d}$.

4.18. $R = \frac{1}{\pi\lambda\delta} \left(\frac{l}{D} + \ln \frac{D}{d} \right)$.

4.19. $R_{AB} = \frac{\sqrt{7}-1}{3} a_1 \rho \approx 0,55 a_1 \rho = 0,55 \text{ Ом.}$

4.20. $\varphi(\theta) = (\varphi_1 - \varphi_2) \left\{ \frac{\ln [\operatorname{tg}(\theta/2)]}{2 \ln [\operatorname{tg}(\theta_0/2)]} + 1 \right\}.$

4.21. $\varphi_{\max} = RE_{\text{np}} = 4,5 \cdot 10^6 \text{ B}; \quad \mathcal{J}_{\max} = \frac{lvE_{\text{np}}}{2\pi} = 1 \text{ mA.}$

4.22. $E = \frac{\mathcal{E}}{r_2 - r_1}.$

4.23. $q = \frac{\mathcal{J}}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} \right) = 78 \text{ ед. СГСЭ} \approx 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$

4.24. $C = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$ (на единицу длины); $\mathbf{E} = \frac{2V_0}{R_2^2 - R_1^2} \mathbf{r}; \quad \rho = \frac{V_0}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}.$

4.25. $\sigma = \frac{V}{4\pi} \frac{\varepsilon_2 \lambda_1 - \varepsilon_1 \lambda_2}{d_1 \lambda_2 + d_2 \lambda_1}.$

4.26. $\Lambda = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$ где R_1 и R_2 — радиусы сферических обкладок конденсатора.

4.27. $\lambda(r) \propto r^{-4}.$

4.28. $\lambda(r) \propto r^{-1}.$

4.29. $\rho = \frac{l j}{4\pi [\lambda_1 l + (\lambda_2 - \lambda_1)x]^2},$ где x — текущая координата, отсчитанная от точки A по направлению к точке $B.$ Заметим, что если λ и ε — константы, не зависящие ни от координат, ни от времени, то объемная плотность ρ свободных зарядов в проводнике, по которому течет постоянный ток, равна нулю.

4.30. $Q \approx \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k.$

4.31. $D = 3,3 \text{ см.}$

4.32. $R = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1 \lambda_1} + \frac{1}{r_2 \lambda_2} \right).$

4.33. Решение. Представим себе электростатическое поле между проводниками A и B , находящимися под определенной разностью потенциалов V , причем пространство между ними ничем не заполнено. Сравним это поле с полем электрических сил, когда пространство между этими проводниками заполнено однородной проводящей средой (удельное сопротивление ρ) и к ним приложена та же разность потенциалов $V.$ Так как среда однородна и поверхности проводников являются эквипотенциальными поверхностями, то напряженность поля E в обоих случаях одинакова. В случае электростатического поля $CV = Q = \int \sigma dS,$ где σ — поверхностная плотность заряда на элементе dS поверхности и интеграл берется по поверхности одного из проводников. Так как $E = 4\pi\sigma$, то

$$CV = \frac{1}{4\pi} \int E dS. \quad (1)$$

В случае постоянного тока

$$\frac{V}{R} = \mathcal{J} = \int j dS.$$

где j — плотность тока и интеграл берется по поверхности того же проводника. Для всех точек пространства закон Ома дает $E = j\rho.$ Следовательно,

$$\frac{V}{R} = \frac{1}{\rho} \int E dS. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем $R = \rho/(4\pi C).$

4.34. $R = \rho / (2\pi r)$.

Указание. Для решения нужно применить результаты предыдущей задачи.

$$\mathbf{4.35.} R = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\rho_1}{C_1} + \frac{\rho_2}{C_2} \right).$$

$$\mathbf{4.36.} Q_1 = \frac{\mathcal{E}r_2}{\frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}; \quad Q_2 = \frac{\mathcal{E}r_1}{\frac{r_1}{r_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

4.37. $q = |e|$. Поскольку подвижности ионов постоянны, то постоянны и скорости ионов v_1 и v_2 , и ток. При этом в момент времени t_1 прихода одного из ионов на пластину величина тока скачком меняется. Обозначив через x путь первого иона, а $(d - x)$ — путь второго, получаем

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 = \frac{|e|}{d}(v_1 + v_2), \quad 0 < t < t_1 = \frac{x}{v_1};$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_2 = \frac{|e|}{d}v_2, \quad t_1 \leq t < t_2 = \frac{d - x}{v_2}.$$

$$\mathbf{4.38.} q_{\text{пол}} = \frac{\mathcal{J}}{4\pi} \left[\frac{\epsilon_1 - 1}{\lambda_1} - \frac{\epsilon_2 - 1}{\lambda_2} \right]; \quad \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = -q_{\text{пол}}.$$

§ 5. Магнитное поле. Закон Био–Савара–Лапласа.

Теорема о циркуляции в вакууме.

Индуктивность проводников. Теорема взаимности

$$\mathbf{5.1.} B = \frac{2\pi \mathcal{J}a}{cb^2} = \frac{\pi}{9} \Gamma \text{с} \approx 0,349 \text{ Гс.}$$

$$\mathbf{5.2.} B = \frac{2\pi \mathcal{J}}{ca} = \frac{\pi}{25} \Gamma \text{с} \approx 0,126 \text{ Гс.}$$

$$\mathbf{5.3.} B = \frac{\mathcal{J}}{cR} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right).$$

$$\mathbf{5.4.} B = 0.$$

Указание. Рассмотреть более общий случай — три подводящих провода (рис. 600) к вершинам треугольной пластины. Пустить ток \mathcal{J} от A к B , такой же ток от B к C и ток \mathcal{J} от вершины C к A .

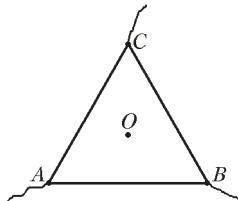


Рис. 600

$$\mathbf{5.5.} B = \frac{2\pi N \mathcal{J}}{cl} (\cos \beta - \cos \alpha).$$

$$\mathbf{5.6.} \sigma = \frac{E}{2\pi} = 15,9 \text{ ед. СГСЭ} = 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2; \quad B = \frac{v}{c} E = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Гс.}$$

5.7. $B = \frac{2\mathcal{J}}{cr} \left(\frac{2\pi R}{d} - 1 \right)^{-1}$ при $r < R$ и $r \gg d$; на оси трубы ($r = R$) $B \approx 0,01 \text{ Гс}$, $B \approx \frac{2\mathcal{J}}{cr} \left(1 - \frac{d}{2\pi R} \right)^{-1}$ при $r \gg R$, где r — расстояние от середины щели.

$$\text{5.8. } B = \begin{cases} \frac{2\mathcal{J}_r}{cR_2^2} \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_2^{-1} (1 - R_1^2 R_2^{-2})} & \text{при } r \leq R_1, \\ \frac{2\mathcal{J}}{cr} \frac{1 + \rho_1 \rho_2^{-1} (r^2 R_1^{-2} - 1)}{1 + \rho_1 \rho_2^{-1} (R_2^2 R_1^{-2} - 1)} & \text{при } R_1 < r < R_2, \\ \frac{2\mathcal{J}}{cr} & \text{при } r \geq R_1. \end{cases}$$

5.9. В цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с осью витка, следует проанализировать поведение составляющих магнитного поля $B_z(r)$ и $B_r(r)$. Ответ на вопрос задачи определяется знаком производной $B'_0(0)$ на оси витка. Поле в плоскости витка *минимально* в его центре.

5.10. Внутри сферы поле соответствует полю прямого бесконечно длинного проводника с током \mathcal{J} , а вне сферы поле $B = 0$.

$$\text{5.11. } B = \frac{\pi \mathcal{J}(N+1)}{R}.$$

Указание. $\sum_{n=1}^N \sin^2 \frac{\pi n}{2N} = \frac{1}{2}(N+1).$

$$\text{5.12. } B = \frac{2\pi i}{c} \left(\frac{r}{R} \right)^2.$$

$$\text{5.13. } B = \frac{\pi^2 i}{c}.$$

$$\text{5.14. 1) } B = \frac{2\kappa\Omega}{c} \approx 0,67 \cdot 10^{-7} \text{ Гс в металле}; B = 0 \text{ в воздухе.}$$

$$2) B = \frac{2\kappa\Omega}{c} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \approx 0,44 \cdot 10^{-7} \text{ Гс в диэлектрике}; B = 0 \text{ в воздухе.}$$

$$\text{5.15*} B = \frac{4\pi\mathcal{J}}{c} = \frac{4\pi}{c} k\omega r^2.$$

Решение. Объемная плотность связанных зарядов

$$\rho_{\text{связ}} = -\text{div } \mathbf{P} = -k \text{div } \mathbf{r} = -k \left(\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} \right) = -2k,$$

т. е. постоянна во всем объеме цилиндра. Вращаясь с угловой скоростью ω , связанные заряды создают токи с объемной плотностью

$$j = \omega r \rho_{\text{связ}} = -2k\omega r.$$

Магнитное поле в точке r создают только внешние кольцевые токи, т. е. такие токи, которые текут на расстояниях больше, чем r . Сила таких токов, приходящаяся на единицу длины цилиндра,

$$\int_r^R j dr = -2k\omega \int_r^R r dr = k\omega(r^2 - R^2).$$

На поверхности поляризованного цилиндра возникают связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{связ}} = P = kR$. Кольцевой ток, создаваемый на единице длины цилиндра этими поверхностными зарядами, равен $k\omega R^2$. Сложив его с кольцевым током объемных зарядов, найдем полный внешний кольцевой ток, приходящийся на единицу длины цилиндра: $\mathcal{J} = k\omega r^2$. Такой ток создает внутри цилиндра магнитное поле

$$B = \frac{4\pi\mathcal{J}}{c} = \frac{4\pi}{c} k\omega r^2,$$

направленное параллельно оси цилиндра.

$$\mathbf{5.16.} \left(\frac{B}{E}\right)_{\max} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \approx 1,6 \cdot 10^{-6}.$$

$$\mathbf{5.17*} 1) \mathbf{B} = \frac{qR^2}{3c} \left[\frac{3(\omega r)\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} \right]; \quad 2) \mathbf{B} = \frac{qR^2}{5c} \left[\frac{3(\omega r)\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} \right]. \quad (\text{Вектор } \mathbf{r} \text{ проведен из центра шарика.})$$

Решение. Рассмотрим, например, случай 1). Возьмем на поверхности шарика бесконечно узкий поясок, заключенный между углами θ и $\theta + d\theta$ (рис. 601). Вращаясь с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, такой поясок эквивалентен

круговому току $d\mathcal{J} = \omega q \sin \theta d\theta / (4\pi)$ с магнитным моментом

$$d\mathfrak{M} = S \frac{d\mathcal{J}}{c} = \pi R^2 \frac{q\omega \sin \theta}{4\pi c} d\theta.$$

Интегрируя по θ , находим магнитный момент всего шарика: $\mathfrak{M} = qR^2\omega/(3c)$. Отсюда и получается результат, приведенный в ответе.

$$\mathbf{5.18.} \mathfrak{M} = \frac{5}{6} \frac{\pi l^3}{c} \omega.$$

$$\mathbf{5.19.} \mathfrak{M} = \frac{QR^2}{8c} \omega.$$

5.20* Нет. Не может.

Решение. Магнитный момент равномерно заряженного по объему шара радиусом R , вращающегося с угловой скоростью ω , равен (см. решение задачи 5.17)

$$\mathfrak{M} = \frac{qR^2\omega}{5c},$$

где q — полный заряд шара, т. е. в условиях задачи — Земли. Введем величину $x = \frac{q_p - q_e}{q_p}$ и запишем заряд одного атома в виде

$$Z(q_p - q_e) = Zxq_p.$$

Если Земля состоит из атомов с атомным номером Z и относительной атомной массой A , то отношение ее полного заряда q к массе M_3 равно

$$\frac{q}{M_3} = \frac{Zxq_p}{m_h A},$$

где $m_{\text{н}}$ — масса нуклона. С помощью этого соотношения выражение для магнитного момента Земли можно представить в виде

$$\mathfrak{M} = x \frac{Z}{A} \frac{q_p}{m_{\text{н}}} \frac{4\pi}{15c} \rho_3 \omega_3 R_3^5.$$

Если бы Земля обладала таким магнитным моментом, то индукцию магнитного поля B на полюсе можно было бы определить из выражения $B = 2\mathfrak{M}/R_3^3$ (это максимальное значение). Отсюда

$$x = \frac{A}{Z} \frac{m_{\text{н}}}{q_p} \frac{15c}{16\pi^2} \frac{B_3 T_3}{\rho_3 R_3^2} \approx 2,6 \cdot 10^{-19}.$$

Однако данные опытов (условие задачи) свидетельствуют о том, что эта величина еще меньше ($x < 10^{-21}$). Таким образом, гипотеза о том, что источником магнитного поля Земли являются некомпенсированные заряды протонов и электронов, вращающихся вместе с Землей, не подтверждается опытами.

5.21. $B(r) = \frac{4\mathcal{I}r}{ca^2} \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right)$ при $r \leq a$ (внутри цилиндра);

$$B(r) = \frac{2\mathcal{I}}{cr} \quad \text{при } r \geq a \quad (\text{вне цилиндра}).$$

5.22. $\frac{B_0}{B_u} = \frac{N}{\pi} \approx 3 \cdot 10^3$.

5.23. $B = \frac{2\pi}{c} jd = 3140 \text{ Гс}$. Поле B перпендикулярно к линии AB и направлено вверх, оставаясь в плоскости рис. 78.

5.24. $\mathbf{B} = \frac{2\pi}{c} j[\mathbf{l}\mathbf{d}]$, где \mathbf{l} — единичный вектор, направленный вдоль тока, а вектор \mathbf{d} проведен от оси провода к оси цилиндрической полости.

5.25. $\rho(r, z) = \frac{V}{2\pi d^3} z; \quad Q = \frac{VR^2}{4d}; \quad B(r) = \frac{8\pi}{3c} \frac{V}{d} \lambda_0 \sqrt{Rr}.$

5.26. $\Phi = \frac{\mathcal{I}\pi^2 R_0^2}{cR} = \frac{\mathcal{I}\pi^2 R_0}{10c}.$

5.27. $\operatorname{tg} \beta = \frac{B_y}{B_x} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = -26,5^\circ.$

5.28. $L = 0,24 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$

Указание. Индукция магнитного поля B внутри трубки на расстоянии r от оси равна $B = 2\mathcal{I}/(cr)$ (краевыми эффектами пренебрегаем). Вне трубки магнитного поля нет. Поэтому поток через радиальную перегородку

$\Phi = \frac{2\mathcal{I}l}{c} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r}$, где l — длина трубки, r_0 — радиус провода, r_1 — внутренний радиус трубки. На единицу длины имеем $\frac{L}{l} = 2 \ln \frac{r_1}{r_0} \approx 6$, откуда $L = 240 \text{ см.}$

5.29. $L \approx 4l \ln \left(\frac{d}{r} - 1\right) \approx 8,79l \text{ [см];} \quad L_{\text{уд}} \approx 8,79 = 8,79 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$

5.30. $M = \sqrt{L_1 L_2} = 0,6 \text{ Гн.}$

5.31. $\Phi_{21} = \frac{4\pi N n S \mathcal{I}}{lc} = 10^5 \text{ Мкс} = 10^{-3} \text{ Вб.}$

5.32. $\Phi = \frac{2a\mathcal{I}}{c} \ln \left(1 + \frac{a}{b}\right).$

$$5.33. M = 2aN \ln \left(1 + \frac{b}{R} \right).$$

$$5.34. \Phi = 4\pi n \mathfrak{M}.$$

$$5.35. \Phi_{21} = \frac{2Nnb\mathcal{J}}{c} \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right) \approx 10^5 \text{ Мкс} = 10^{-3} \text{ Вб.}$$

$$5.36. L = L_0 + L_1 + 2M = L_0 + 4\pi n^2 lS + 8\pi n\sigma N \cos \theta.$$

$$5.37. L = L_0 \left(1 + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} \right).$$

$$5.38. B = \begin{cases} \frac{2\mathcal{J}}{cR}, & \text{при } r \leq R, \\ \frac{2\mathcal{J}}{cr}, & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

$$5.39. d_{\max} = \frac{a^2}{2} L = 50L.$$

$$5.40. \varphi(\mathcal{J}) = \frac{2\pi SNn}{Rk} \left(\frac{\mathcal{J}}{c} \right)^2 = 0,8\pi \left(\frac{\mathcal{J}}{c} \right)^2; \quad \varphi(\mathcal{J} = 1 \text{ А}) = 1,44^\circ.$$

$$5.41. \mathcal{J} = c \sqrt{\frac{k\varphi}{4\pi SNn \cos \varphi}} = 0,7 \text{ А.}$$

$$5.42. C = \frac{1}{2 \ln \frac{a}{r_0} + \ln 2}.$$

$$5.43. L = 2 \ln \frac{a}{r_0} + \ln 2.$$

$$5.44. r_e = 5\mathfrak{M}_B/e = 9,7 \cdot 10^{-11} \text{ см.}$$

$$5.45. L_{\text{ед}} = 1 + 2 \ln \frac{R}{r}.$$

§ 6. Магнитное поле в веществе. Векторы **B** и **H**.

Теорема о циркуляции в веществе.

Сверхпроводники в магнитном поле

$$6.1. \mathcal{J} = cI/n.$$

6.2. Внешние поля **B** и **H** совпадают. Поле **B** непрерывно на границах, а поле **H** внутри определяется соотношением $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I}$ (рис. 602). Если по аналогии с электрическим полем ввести связанные «магнитные заряды»,

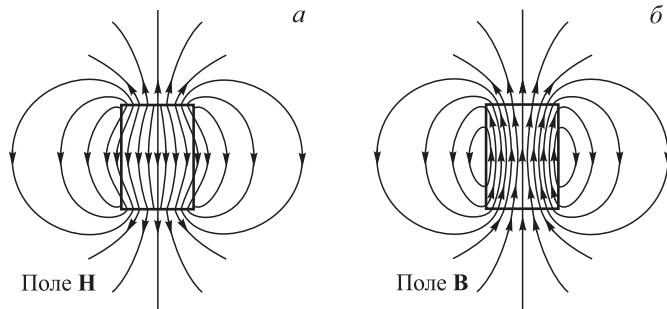


Рис. 602

поверхностная плотность которых на торцах бруска равна σ , то после построения этой модели получится аналогичное электростатике соотношение $\sigma = I$.

6.3. Внутри пластины $\mathbf{B} = \mathbf{0}$; $\mathbf{H} = -4\pi\mathbf{I}$. Вне пластины $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$.

6.4. Внутри пластины $\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{I}$; $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Вне пластины $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$.

6.5. $B_A = 2\pi I$, $B_A/B_C = (l/r)^2$. Картина полей B и H представлена в решении задачи 6.2.

6.6. $B_C = B_A \frac{2h}{D} = 100$ Гс.

6.7* $l \geq 14,1 r\sqrt{\mu - 1}$.

Решение. Пусть внутри цилиндра конечной длины магнитная индукция равна B , при этом $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}$, $B \neq B_0$. Поскольку $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, то

$$4\pi\mathbf{I} = (\mu - 1)\mathbf{H} = \frac{\mu - 1}{\mu}\mathbf{B}.$$

С другой стороны, индукция B в центре стержня длиной l и радиусом r (см. задачу 6.5) равна

$$B = B_0 + 4\pi I \left(1 - 2\frac{r^2}{l^2}\right) = B_0 + \frac{\mu - 1}{\mu} B \left(1 - 2\frac{r^2}{l^2}\right),$$

откуда

$$B = \frac{\mu B_0}{1 + (\mu - 1) \cdot 2r^2/l^2}.$$

Искомое отношение по условию должно удовлетворить неравенству

$$\frac{\mu B_0 - B}{\mu B_0} = 1 - \frac{B}{\mu B_0} = \frac{(\mu - 1) \cdot 2r^2/l^2}{1 + (\mu - 1) \cdot 2r^2/l^2} \geq 0,01.$$

Решая неравенство, находим, что

$$l \geq 10\sqrt{2} r\sqrt{\mu - 1} \approx 14,1 r\sqrt{\mu - 1}.$$

Этот же результат можно легко получить, пользуясь непрерывностью тангенциальной составляющей поля \mathbf{H} в точке C (см. рис. 88 к задаче 6.5). Поле H в этой точке равно

$$H = B_0 - 4\pi I \frac{2r^2}{l^2}.$$

Но этой же величине оно равно и внутри стержня (в его центре), кроме того, $H = B/\mu$, откуда после несложных преобразований следует ответ.

6.8. $l \leq 10^{-2} \frac{2\mu r}{\mu - 1} \approx 0,02 r$.

6.9. 1) $\Phi_H = \oint_S (\mathbf{H} d\mathbf{s}) = \frac{\mu - 1}{\mu} \pi R^2 B_0 \cos \theta$. Поток вектора \mathbf{B} через поверх-

ность сферы, равен нулю.

2) $\oint_L (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = (1 - \mu) l B_0 \sin \theta$.

$$6.10. \Phi = \frac{4Na^2\mu\mathcal{J}}{cD} = 32000 \text{ Mкбв.}$$

$$6.11. \Phi = \frac{4\pi Na^2\mu\mathcal{J}}{c(\pi D + (\mu - 1)d)} \approx 24300 \text{ Mкбв.}$$

$$6.12. B = \frac{\pi\mu\mathcal{J}N}{cl \left[1 + \frac{3}{8} \frac{d}{l}(\mu - 1) \right]}.$$

$$6.13. B = \frac{4\pi\mathcal{J}N\mu_1\mu_2}{c[2d\mu_1\mu_2 + (L/2 - d)(\mu_1 + \mu_2)]}.$$

$$6.14. B = I_0 \frac{(4\pi - 2d/R)}{\sqrt{1 + (2d/R)^2}} \approx 5390 \text{ Гс, где } R = \frac{r_1 + r_2}{2} = 2 \text{ см.}$$

$$6.15. \mathcal{J} = \frac{cl}{4\pi N} H_{\text{нac}}; \quad d \geqslant \frac{N}{cl}(\mathcal{J} - \mathcal{J}_0).$$

$$6.16. \oint_S (\mathbf{H} d\mathbf{S}) = \frac{4\pi}{c} n\mathcal{J}(1 - \mu)\sigma < 0.$$

$$6.17. B \approx 15 \text{ кГс.}$$

$$6.18. B = \frac{2\pi IL}{L + \pi R/\mu}.$$

$$6.19. B_2 = B_1 \frac{(l + \pi R/\mu)r^2}{16R^3}.$$

$$6.20^*. \frac{B_1}{B_2} = 1 + \frac{l\mu}{2\pi R + l} \approx 1 + \frac{l\mu}{2\pi R}.$$

Решение. 1) Пусть магнитик с намагниченностью I вставлен в левый зазор, а правый зазор пуст. Запишем теорему о циркуляции для вектора \mathbf{H} :

$$\oint (\mathbf{H} dl) = (B - 4\pi I)l + \frac{B}{\mu} \cdot 2\pi R + Bl = 0,$$

откуда поле в зазоре или металле сердечника

$$B = \frac{2\pi Il}{l + \pi R/\mu}.$$

Правый зазор пуст. Поэтому на этом зазоре и рассеивается магнитный поток (рис. 603). Зазор является источником магнитного поля. И левый зазор тоже есть источник магнитного поля (рис. 603). Однако левый зазор заполнен

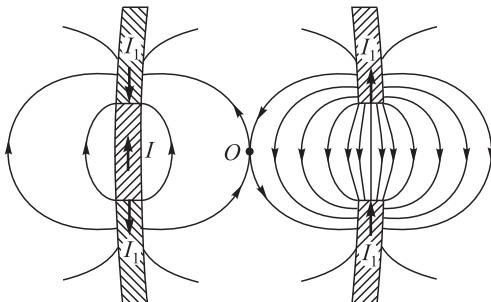


Рис. 603

магнитом с намагниченностью \mathbf{I} . Намагниченность материала в сердечнике \mathbf{I}_1 . Поэтому поле в центре O обусловлено магнитным диполем с намагниченностью \mathbf{I}_1 (правый зазор) и магнитным диполем с намагниченностью $(\mathbf{I} - \mathbf{I}_1)$ (левый зазор). В конечном счете поле B_1 в точке O определяется магнитным моментом \mathfrak{M} магнитика $\mathfrak{M} = IV$, где V — объем магнитика. Поле магнитного диполя в вакууме в перпендикулярном направлении равно

$$B_1 = \frac{\mathfrak{M}}{R^3} = \frac{IV}{R^3}.$$

2) Рассмотрим второй случай. Правый зазор заполнен материалом сердечника, т. е. теперь один из источников поля для точки O отсутствует (нет правого зазора). С помощью теоремы о циркуляции вычислим поле в сердечнике

$$B' = \frac{4\pi Il}{l + \frac{2\pi R + l}{\mu}}.$$

Найдем намагниченность I'_1 материала сердечника

$$I'_1 = \frac{B' - H'}{4\pi} = \frac{B' - B'/\mu}{4\pi} \approx \frac{B'}{4\pi} \quad (\mu \gg 1).$$

Поле B_2 в точке O определяется рассеянием на левом зазоре, т. е. разностью намагниченостей

$$I - I'_1 = I - \frac{4\pi Il}{4\pi \left(l + \frac{2\pi R + l}{\mu} \right)} = I \frac{2\pi R + l}{l\mu + 2\pi R + l}.$$

Найдем это поле: $B_2 = \frac{\mathfrak{M}'}{R^3} = \frac{(I - I'_1)V}{R^3}$. Искомое отношение полей

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{I}{I - I'} = \frac{l\mu + 2\pi R + l}{2\pi R + l} \approx 1 + \frac{l\mu}{2\pi R}.$$

6.21. $N = \frac{cB(l + \mu a)}{4\pi\mu\mathcal{J}_{\max}} \approx 3020$ витков; $V = \frac{\mathcal{J}_{\max}N\pi d\rho}{S} = 29$ В.

6.22. $I = \frac{B_0 H_k}{\beta B_0 + (4\pi - \beta)H_k} \approx 11,9$ Гс.

Под коэффициентом размагничивания β понимают (см. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Т. III, § 61) коэффициент в соотношении $H_0 - H = \beta I$, где H_0 — внешнее поле, которое в нашем случае выключено, т. е. равно нулю.

6.23* $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) - \frac{3R^3(\mathbf{B}_0 \mathbf{r})}{2r^5} \mathbf{r}; \quad i(\theta) = \frac{3c}{8\pi} B_0 \sin \theta.$

Решение. Введем предположение, оправдываемое последующим расчетом, что вне шара на однородное поле B_0 накладывается поле точечного диполя с магнитным моментом \mathfrak{M} . Диполь помещен в центре шара (рис. 604). Тогда

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{3(\mathfrak{M}\mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathfrak{M}}{r^3}.$$

Момент \mathfrak{M} определится из условия, чтобы нормальная составляющая вектора \mathbf{B} на поверхности шара обращалась в ноль:

$$B_n \Big|_{r=R} = B_0 \cos \theta + \frac{2\mathfrak{M}}{R^3} \cos \theta = 0.$$

Этому условию при любых значениях угла θ удовлетворяет

$$\mathfrak{M} = -\frac{R^3}{2} \mathbf{B}_0.$$

Таким образом, искомое поле B вне шара

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) - \frac{3R^3(\mathbf{B}_0 \mathbf{r})}{2r^5} \mathbf{r}.$$

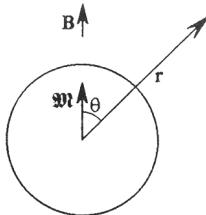


Рис. 604

На экваторе, т. е. при $r = R$, $\theta = 90^\circ$, получаем $\mathbf{B} = 3\mathbf{B}_0/2$. Поверхностный ток сверхпроводимости течет вдоль параллелей $\theta = \text{const}$. Из граничных условий на тангенциальную компоненту вектора \mathbf{H} следует

$$(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{дип}})_t \Big|_{r=R} = \frac{4\pi}{c} i(\theta).$$

Откуда

$$i(\theta) = \frac{3c}{8\pi} B_0 \sin \theta.$$

При этом учитывалось, что $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, поскольку $\mu = 1$.

$$\mathbf{6.24. } r_{\min} = r_0 \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r_0} \right)^3}.$$

$$\mathbf{6.25. } i_{\text{пов}}(\theta) = \frac{cB_0}{2\pi} \sin \theta. \text{ Ток течет параллельно оси проволоки (рис. 604).}$$

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{2R^2(\mathbf{B}_0 \mathbf{r})}{r^4} \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор, перпендикулярный к оси проволоки, проведенный от оси к точке наблюдения. Поле на поверхности проволоки максимально при $\theta = 90^\circ$ и равно $2\mathbf{B}_0$.

$$\mathbf{6.26. } \mu = 1 - 2\pi r^3 n.$$

$\mathbf{6.27. }$ Без шарика поле $B_0 = \frac{2\pi \mathcal{J}}{cR}$ перпендикулярно плоскости тора. С шариком появится дополнительная составляющая, лежащая в плоскости тора, $B_1 = \frac{\mathcal{J}N}{cR} \left(\frac{r_0}{R} \right)^3$.

$$6.28. \Delta L = -\left(\frac{4\pi N}{l}\right)^2 \frac{r^3}{2} = -200 \text{ см} = -2 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

6.29. Максимальным будет поле у поверхности шарика в экваториальной плоскости: $\mathbf{B}_{\max} = \mathbf{B}_0 - \frac{\mathfrak{M}}{r^3} = \frac{3}{2} \mathbf{B}_0$; $B_{\max} = \frac{6\pi}{c} n \mathcal{J}$.

$$6.30. \Delta L = -\frac{\pi^2}{4} \frac{R^4}{h^3} = -2,5 \cdot 10^{-3} \text{ см} = -2,5 \cdot 10^{-12} \text{ Гн.}$$

$$6.31. \Delta L = -\frac{\pi^2}{8} \frac{R^4}{h^3} = -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ см} = -1,2 \cdot 10^{-12} \text{ Гн.}$$

$$6.32. \mathcal{J} = \frac{c\pi R^2 B}{L} = 9,4 \cdot 10^{10} \text{ ед. СГСЭ} = 31 \text{ А.}$$

6.33. $i = \frac{\mathcal{J}h}{\pi r^2}$, где r — расстояние между проводом и точкой на поверхности в сечении, перпендикулярном проводу. Сверхпроводящий ток параллелен току \mathcal{J} и течет в противоположном направлении.

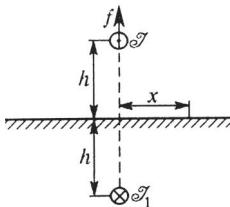


Рис. 605

$$6.34. H = \frac{8}{h} \sqrt{\frac{mg}{3}} \approx 80 \text{ Э.}$$

$$6.35. \mathcal{J} \geq c \sqrt{\frac{mgh}{2\pi R}} = 8,4 \cdot 10^{10} \text{ ед. СГСЭ} = 28 \text{ А.}$$

$$6.36. h = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 \rho_l g} \approx 0,2 \text{ см.}$$

$$6.37. i(x) = \frac{\mathcal{J}h}{\pi(h^2 + x^2)} \text{ (см. рис. 605)}, \quad f = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 h} = 1 \text{ дин/см.}$$

$$6.38. \bar{I} = \frac{(\mu - 1)c\pi}{\omega L} \mathcal{E}_0 \approx 12,7 \text{ Гс.}$$

$$6.39. L = 2\Lambda \left(\frac{\mu - 1}{2} + \ln \frac{r_3}{r_1} + \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right) \approx 10^4 \text{ см.}$$

$$6.40. L = 2\Lambda \left(\mu \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right) \approx 58 \text{ см.}$$

$$6.41. Q = \frac{B\Delta H}{2} La^2 \frac{t}{T} = 120 \text{ Дж.}$$

$$6.42. \mathcal{J} = \frac{\mathcal{J}_0}{1 - \frac{v^2 t^2}{\mu R^2} (\mu - 1)} \text{ при } 0 \leq t \leq \frac{R}{v}; \quad \mathcal{J}_{\max} = \mu \mathcal{J}_0 = 50 \text{ А}; \quad t_{\max} = \frac{R}{v} =$$

$$= 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

$$6.43. a = \sqrt[3]{2/5} R.$$

$$6.44. r = 2a.$$

6.45. Шарики отталкиваются, так как $F_{\text{маг}} > F_{\text{эл}}$. При поле $B_3 = 2\sqrt{2}E_3$ шарики не взаимодействовали бы.

6.46. $\mathcal{J} = \frac{2\sqrt{2}Ec}{4\pi n} = 7,5 \text{ А.}$

6.47. $F = \frac{6\mathcal{J}^2 S^2 R^3}{c^2 r^7}$ (отталкивание).

6.48. $d = \frac{l}{\mu - 1} \approx \frac{l}{\mu}.$

6.49. $\mu = \frac{9l}{2d} = 9000.$

6.50. $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = \frac{M_0 - M}{M_0} = \frac{\sqrt{L_1 L_2} - \frac{1}{2}(L - L_1 - L_2)}{\sqrt{L_1 L_2}} = 0,16 \text{ (16%).}$

6.51. 1) $i_m = \frac{c}{4\pi}(\mu - 1)B_0 \sin \theta$; согласно рисунку в условии токи направлены «на нас».

2) $I = \sqrt{I_{2\tau}^2 + I_{2n}^2} = B_0 \frac{\mu - 1}{\pi\mu} \sqrt{\cos^2 \theta + \mu^2 \sin^2 \theta}$; направление вектора I определяется углом: $\operatorname{tg} \widehat{\mathbf{n}\mathbf{I}} = \mu \operatorname{tg} \theta$.

6.52. $\oint (\mathbf{H} d\mathbf{S}) = -4\pi I\sigma.$

6.53. $\Phi_H = -4\pi^2 IR^2 \cos \alpha.$

6.54. $\frac{dB}{dz} = \frac{\rho g}{\chi B} = -0,33 \cdot 10^5 \frac{\text{Гс}}{\text{см}}.$

§ 7. Электромагнитная индукция.

Энергия и силы в магнитном поле.

Сохранение магнитного потока в сверхпроводящих контурах

7.1. $\mathcal{J} = 0,314 \text{ А.}$

7.2. $\mathcal{J} = 0,314 \text{ А}$ (сравните с предыдущей задачей).

7.3. $I = \frac{c^2 V}{4\pi a v \ln(1 + a/b)} = 9 \cdot 10^8 \text{ ед. СГСЭ} = 0,3 \text{ А.}$

7.4. $V = \frac{4\pi Sn}{c^2} \frac{\mathcal{J}_0}{\tau} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ ед. СГСЭ} = 12 \text{ мВ, когда движок находится в положениях 1, 2, 3. } V = 24 \text{ мВ, когда движок вернется в точку 1.}$

7.5. В воздухе $E = \frac{2\pi r_0^2 n \dot{\mathcal{J}}}{rc^2} = \frac{\pi}{3} \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ В/м.}$ В диэлектрике $E' = E$; $D' = 2D$.

7.6. $E = \frac{\epsilon\omega}{2\pi cr} \Phi_0 \sin \omega t.$

7.7. $V_1 = \frac{\omega B R_1^2 (1 - R_2/R_1)^2}{2c} \frac{1 + C_1/C_2}{1 + C_2/C_1}; \quad V_2 = \frac{\omega B R_1^2}{2c} \frac{(1 - R_2/R_1)^2}{1 + C_2/C_1}.$

7.8. $v = \frac{c^2 mgr - c\mathcal{E}IB}{B^2 l^2 (1 + r/R)} \approx 5 \text{ м/с.}$ Если вес проводника $mg > \frac{\mathcal{E}IB}{cr}$, то он движется вниз, в противном случае — вверх.

7.9. $v = \frac{3mgRc^2}{2B^2 l^2} \approx 1,5 \text{ см/с.}$

$$7.10. \overline{M} = \frac{(BSn)^2\omega}{2(R+r)}; \quad \overline{N} = \overline{M}\omega \text{ (СИ).}$$

$$7.11. \mathcal{E}_c = \frac{2\pi}{c^2} SN n a_0^2 \omega J_k \sin 2\omega t.$$

$$7.12^*. \mathcal{E}_{c0} = \frac{2\pi}{c} n \mathfrak{M} a_0^2 \sqrt{\frac{B_0 \mathfrak{M}}{J}}; \quad \omega_c = 2 \sqrt{\frac{B_0 \mathfrak{M}}{J}}.$$

Решение. Магнитная стрелка с магнитным моментом \mathfrak{M} эквивалентна маленькой катушечке (или просто витку с током) с таким же магнитным моментом \mathfrak{M} . Магнитный момент витка с током $\mathfrak{M} = \frac{J}{c} S$.

Для определения потока, посыпанного стрелкой через соленоид, воспользуемся теоремой взаимности. Этот поток равен потоку, посыпанному соленоидом (рис. 606) через эквивалентный стрелке виток

$$\Phi = \frac{4\pi}{c} n J S \cos \alpha = 4\pi n \mathfrak{M} \cos \alpha.$$

Если магнитную стрелку поместить во внешнее поле B_0 , отклонить ее от положения равновесия на угол α_0 и отпустить, то стрелка начнет колебаться: $J\ddot{\alpha} = -B_0 \mathfrak{M} \alpha$, где в правой части — момент сил, действующих на стрелку, $\mathbf{M} = [\mathfrak{M} \mathbf{B}_0]$. Отсюда следует, что частота этих колебаний равна

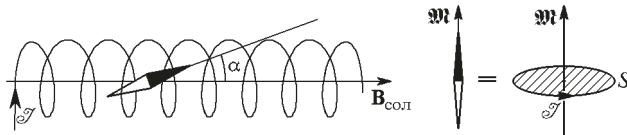


Рис. 606

$\omega = \sqrt{B_0 \mathfrak{M} / J}$, а закон колебаний стрелки $\alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega t$. В соленоиде при таких колебаниях возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_c = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} 4\pi n \mathfrak{M} \frac{d}{dt} [\cos(\alpha_0 \cos \omega t)].$$

Дифференцируя, получаем ответ задачи.

$$7.13. \mathcal{I}(t) = \frac{2\mathfrak{M}\alpha^2\omega}{cRl^3} \sin \omega t.$$

7.14. $\mathcal{E} = -\frac{IN^2S^2}{4c^2a^3}\omega$, где знак минус означает, что эта дополнительная ЭДС убывает при экранировании. При этом под \mathcal{E} понимают действующее значение ЭДС.

Указание. Хорошо проводящий лист металла эквивалентен сверхпроводящему «магнитному зеркалу», в котором и возникает «отражение» катушки.

$$7.15. \mathcal{I}(t) = \frac{\pi^2 r^2 \omega}{\sqrt{2} c^2 R R_0} i_0 \sin \omega t.$$

$$7.16. V_{\text{действ}} = \frac{\pi r^2 l \omega B}{2\sqrt{2} R c} \quad (\text{показание вольтметра переменного тока}).$$

$$7.17. \text{Показание миллиамперметра } \Delta \Phi = \Phi = \frac{B_0 m}{\pi l \rho}.$$

$$7.18. \mathcal{I} = \frac{6\mathfrak{M}\pi R^2 v}{cL^4 r} = 18\pi \cdot 10^4 \text{ ед. СГСЭ} \approx 0,19 \text{ mA.}$$

$$7.19. \mathfrak{M} = \frac{\varphi DRc}{4\pi bn}.$$

$$7.20. v \geq B \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho}} \approx 120 \text{ см/с.}$$

$$7.21. v = B_0 \sqrt{\frac{R^3}{2m}} = 20 \text{ м/с.}$$

$$7.22. \mathfrak{M} = \frac{R}{2\pi cn} \frac{(h^2 + a^2)^{3/2}}{ba^2} \varphi, \text{ где } b \text{ имеет размерность } \left[\frac{\text{рад}}{\text{ед. заряда}} \right].$$

$$7.23. Q = \frac{B_1 SN}{cR} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ ед. СГСЭ} \approx 10^{-3} \text{ Кл, где } B_1 \text{ — начальная магнитная индукция в щели.}$$

Если H_1 — поле внутри магнетика, то $H_1 = -(4\pi/3)I_1$, где I_1 — остаточная намагниченность шара, а коэффициент $4\pi/3$ — размагничивающий фактор шара (см. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Т. III, § 61), $B_1 = \frac{8\pi}{3} \frac{I_0}{\sqrt{(4\pi/3)^2 + 1}} = 973 \text{ Гс.}$

$$7.24. Q = \frac{4\pi IVn}{cR} \approx 3,75 \cdot 10^8 \text{ ед. СГСЭ} \approx 0,125 \text{ Кл.}$$

$$7.25. 1) Q_1 = \frac{\pi n^2 \mathcal{J}_0^2}{c^2} V; \quad 2) Q_2 = \frac{1}{2} Q_1.$$

$$7.26. \mathcal{J}(t) = \mathcal{J}_0 \left(1 - \frac{1}{2} e^{-t/\tau} \right), \text{ где } \tau = \frac{4\pi N^2 S}{cLR}.$$

$$7.27. L = \frac{cB_0 S \cos \theta}{\mathcal{J}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

$$7.28. q = \frac{\pi B_0 a^3}{cR\rho}.$$

$$7.29. \frac{\mathcal{J}_{\text{петли}}}{\mathcal{J}_{\text{сол}}} = \frac{L}{L - L_0/N^2}.$$

$$7.30. \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_0} = \frac{1 + l\mu/(2L)}{1 + l\mu/L}.$$

$$7.31. B = B_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 = 5 \cdot 10^6 \text{ Гс}; \quad P = \frac{B^2}{8\pi} \approx 10^{12} \text{ дин/см}^2 = 10^6 \text{ атм.}$$

$$7.32. \mathcal{J}_0 = \frac{\mathcal{J}}{1 + (\mu - 1)l/L}.$$

$$7.33. \mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \left(1 + \frac{a}{l_0} \cos \omega t \right).$$

$$7.34*. P = \frac{2\pi}{c^2} \mathcal{J}^2 n^2.$$

Решение. Способ 1. Сначала определим давление магнитного поля как плотность магнитной энергии $P = w_m = \frac{B^2}{8\pi} = \frac{2\pi}{c^2} \mathcal{J}^2 n^2$. Заметим, что сила магнитного давления направлена наружу (в ту область, где нет поля или оно меньше) в отличие от электрического поля. Например, пластины заряженного плоского конденсатора притягиваются друг к другу, т. е. сила давления электрического поля направлена в область поля.

Способ 2. Рассмотрим второй подход, основанный по существу на расчете силы, действующей на ток в магнитном поле. Возьмем элемент тока $\mathcal{J} dl$. Этот элемент тока соленоида находится в магнитном поле B , созданном всеми элементами обтекаемого током соленоида, кроме выделенного. Сила, дей-

ствующая на элемент тока $\mathcal{J}dl$, находящийся в магнитном поле, равна $\frac{\mathcal{J}}{c}dlB$. Указанное поле B может быть найдено из следующих соображений. Внутри длинного соленоида поле вблизи элемента тока $\mathcal{J}dl$ складывается из поля B , создаваемого всеми элементами тока соленоида, кроме данного элемента тока, и поля B' , создаваемого данным элементом тока. Сумма этих двух полей одинакового направления равна $4\pi n\mathcal{J}/c$, т. е. $B + B' = 4\pi n\mathcal{J}/c$. Вне длинного соленоида сумма этих полей вблизи рассматриваемого элемента тока, как известно, равна нулю вследствие того, что поле B' меняет свое направление на обратное. Поэтому $B - B' = 0$. Из записанных двух уравнений находим $B = 2\pi n\mathcal{J}/c$, откуда сила, действующая на элемент тока, $\frac{2\pi\mathcal{J}^2}{c^2}ndl$, а искомое

давление $P = \frac{2\pi\mathcal{J}^2}{c^2}n^2$, как при энергетическом рассмотрении (способ 1).

$$7.35. F = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 R^2} \frac{b}{\pi}.$$

$$7.36. P_m = \frac{B^2}{8\pi}; \quad f = 0.$$

$$7.37. 1) M = m\mathcal{J}(2 - \sqrt{2}); \quad 2) x = l(\sqrt{2} - 1).$$

$$7.38. P(r) = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 \pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

$$7.39. \Delta P = \frac{\mathcal{J}B}{ca} = 10^4 \text{ дин/см}^2 = 10^{-2} \text{ атм} = 1 \text{ кПа}.$$

$$7.40*. \mathcal{J} = 600 \text{ А.}$$

Решение. Сила, действующая на столб ртути в трубке, $F \approx \mathcal{J}DB/c$. Такая сила эквивалентна разности давлений на концах трубы $P_2 - P_1 = 4F/(\pi D^2)$. Подставляя эту разность в формулу Пуазейля (см. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Т. I, § 97), получим

$$\mathcal{J} \approx \frac{32V\eta cL}{BD^3} = 1,8 \cdot 10^{12} \text{ ед. СГСЭ} = 600 \text{ А.}$$

$$7.41. \Delta h = \frac{\lambda VBL}{ac\rho g} \approx 0,6 \text{ см.}$$

$$7.42. F = \frac{2\mathcal{J}^2 d}{c^2 (R^2 - r^2)}. \text{ Сила направлена от оси цилиндра к оси стержня.}$$

$$7.43. 1) A = 8 \ln 2 [\text{эрг}]. 2) \text{Увеличится на } \Delta W_m = 8 \ln 2 [\text{эрг}].$$

$$7.44. A = \frac{2a\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2}{c^2} \ln \left(1 + \frac{a}{b}\right) \approx 2,7 \text{ эрг.}$$

$$7.45. f = \frac{2\pi\mathcal{J}v\sigma}{c^2} \approx 6,3 \cdot 10^{-10} \text{ дин/см} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

$$7.46. F = \frac{2\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2}{c^2} \left(\frac{l}{L}\right)^2 \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ дин.}$$

7.47. $\Omega = \frac{qB}{2mc}$. Обратите внимание на то, что угловая скорость прецессии не зависит от скорости вращения кольца и от угла между направлениями векторов \mathbf{B} и ω .

$$7.48. \Omega \approx \frac{\omega}{40} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

7.49. Стрелка повернется на угол $\varphi = \frac{2\pi i \mathfrak{M}}{cf}$.

7.50. $\mathcal{J} \geq \frac{2\pi c R^2 \rho g}{B_0} \approx 2400 \text{ A}$.

7.51. $\omega = \frac{3}{2} \frac{\pi N B}{mc} Q = 0,1 \text{ c}^{-1}$.

7.52. $N = \frac{cD^2}{16l} BE = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ эрг/c} = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Вт}$ при $\frac{D}{d} = \sqrt{e}$, где e — основание натурального логарифма.

7.53. $P_1 = \frac{2\pi i^2}{c^2} \mu_1$, $P_2 = \frac{2\pi i^2}{c^2} \mu_2$ — давления на ленты; $P_{12} = \frac{2\pi i^2}{c^2} (\mu_1 - \mu_2)$ — давление на границе раздела магнетиков. В целом система сбалансирована — не движется.

7.54. $L = 4\pi \frac{d}{a}$; $P = \frac{2\pi \mathcal{J}^2}{c^2 a^2}$.

7.55. 1) $L = 2l \ln \frac{l}{r}$ при $l \gg r$; 2) $L_{\text{ед}} = \frac{1}{2} + 2 \ln \frac{R}{r}$.

7.56. $L = 2 \frac{Fc^2}{\mathcal{J}^2} l = 10^7 \text{ см} = 10^{-2} \text{ Гн}$.

7.57. $F = 6 \left(\frac{\mathcal{J} S N}{cl^2} \right)^2 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ дин}$; $M = \frac{2S^2 N^2}{l^3} \approx 20 \text{ см}$.

7.58. $F = \frac{\mu - 1}{8\pi} B^2 S$.

7.59. $L = \frac{2c^2 Fl}{(\mu - 1)\mathcal{J}^2} = 10^6 \text{ см} = 10^{-3} \text{ Гн}$.

7.60. $h = \frac{2\pi n^2 \mathcal{J}^2}{c^2 \rho g} (\mu - 1)$.

7.61. $A = \frac{2\pi S}{(\mu + \frac{L}{l}) L} \left(\frac{\mu N \mathcal{J}}{c} \right)^2$; $\mu \gg 1$, $L \gg 1$.

7.62. $F(d) = - \left[\frac{r \mathcal{J} N}{c(R/\mu + d/\pi)} \right]^2$; $F(0) = - \left(\frac{r \mathcal{J} N \mu}{c R} \right)^2$.

7.63. $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2$.

7.64. $F \approx 49 \text{ H}$.

7.65. $\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{B_1}{B_0} \frac{l S}{L^3} \approx 0,1 \text{ рад} \approx 6^\circ$.

7.66. $\frac{\Delta \Omega}{\Omega} = \frac{IB}{\rho gl} = \pm 10$.

7.67. $\mathcal{J}_0 = c \sqrt{\frac{a F}{2\pi R}}$.

7.68. $\mathcal{J}_{\text{пах,магн}} = \frac{cd B_{\text{кп}}}{2\pi} \approx 480 \text{ A}$ — этот ток определяется предельным магнитным полем, разрушающим сверхпроводимость; $\mathcal{J}_{\text{пах,мех}} = c \sqrt{\frac{F_p d}{\pi D}} \approx 400 \text{ A}$.

Таким образом, предельный ток определяется прочностью обмотки.

7.69. $F = \frac{9}{64} B_0^2 R^2 = 9 \cdot 10^6 \text{ дин}$.

$$7.70. F = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 R} \left(\ln \frac{8R}{r} - 1 \right).$$

$$7.71. P = \frac{B_0^2}{8\pi} \left(\frac{S}{S-\sigma} \right)^2.$$

7.72. $P_m S^2 = \text{const}$, где P_m — магнитное давление на стенки соленоида, S — поперечное сечение соленоида.

7.73. Линейная плотность поверхностного тока $i = \frac{\mathcal{J}}{2\pi r}$; давление направлено внутрь сверхпроводника: $P_1 = \frac{\mathcal{J}^2}{2\pi c^2 R_1}$; $P_2 = \frac{\mathcal{J}^2}{2\pi c^2 R_2} < P_1$.

$$7.74. r_{\max} = \frac{3B_{kp}^2}{32\pi\rho g} \approx 1,7 \text{ см.}$$

$$7.75. A = \frac{1}{2} L \mathcal{J}_0^2 \frac{L_c/N^2}{(L - L_c/N^2)}.$$

7.76. $r(F_{\max}) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \approx 5 \text{ см}; F_{\max} = \alpha V B_0^2 \sqrt{\frac{\alpha}{e}} \approx 0,1 \text{ дин, где } e \text{ — основание натурального логарифма.}$

$$7.77. F = 10^5 \text{ дин} = 1 \text{ Н.}$$

$$7.78. F_2(x) = F_1(x) \frac{\mathcal{J}_2^2}{\mathcal{J}_1^2} \left[1 - \frac{2c^2}{\mathcal{J}_1^2 L_0} \int_0^x F_1(x) dx \right]^{-2}.$$

При $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$ $F_2(x) > F_1(x)$ ($x > 0$).

Указание. При изменении x сохраняется магнитный поток.

7.79. $M = \pm \frac{4\pi}{c^2} \mathcal{J}^2 n N S \sin \theta$. Катушки стремятся развернуться так, чтобы их собственные поля были направлены в одну сторону.

$$7.80. F = \mathfrak{M} \frac{dB}{dx} = \mathfrak{M} \frac{2\pi \mathcal{J} n}{c R}.$$

7.81. $F(x) = \left(\frac{2\pi}{c} \mathcal{J} R^2 \right)^2 \frac{3r^3 x}{2(R^2 + x^2)^4}$, где r — радиус шарика. При $x = \pm \frac{R}{\sqrt{7}}$ сила отталкивания максимальна (см. график на рис. 607).

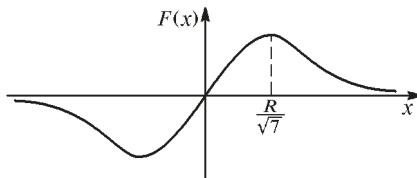


Рис. 607

$$7.82. f = \frac{B^2}{8\pi} \text{ (давление, направленное к центру цилиндра).}$$

$$7.83. h = \frac{1}{2} \left(\frac{3\mathfrak{M}^2}{mg} \right)^{1/4} \approx 2,1 \text{ см.}$$

$$7.84. \mathcal{J} = \frac{cA}{B_0 S}.$$

7.85. Энергия стрелки компаса $W_m = \frac{M^2}{8h^3}(1 + \cos^2 \alpha)$ минимальна при $\alpha = \pm 90^\circ$ или 0. При этом устойчиво лишь $\alpha = \pm 90^\circ$ (α — угол между направлением M и нормалью к поверхности сверхпроводника).

$$\mathbf{7.86.} \quad \overline{N} = \frac{B_0^2 \omega^2}{16c^2} \pi a^4 b \lambda.$$

$$\mathbf{7.87.} \quad \overline{N} = \frac{\mathcal{J}^2 \omega^2}{c^4} \lambda \pi^3 R^4 \mu^2 n^2.$$

$$\mathbf{7.88.} \quad q = \frac{4\pi n M}{cR}.$$

$$\mathbf{7.89.} \quad Q = \frac{4\pi^2}{c^2} \frac{\mathcal{E} r^2 N n}{R_1 R_2}.$$

$$\mathbf{7.90.} \quad A = \frac{L}{2} (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)^2.$$

$$\mathbf{7.91.} \quad F = (f_E + f_B) L d = \left[\frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2 + \frac{\lambda E B L}{2c} \right] L d, \text{ где } E = \frac{\mathcal{E}}{d}.$$

$$\mathbf{7.92.} \quad F_z = \frac{3\pi D^2 \mathcal{J}}{2cz^4} M \cos \alpha > 0 \text{ (отталкивание от кольца). } M = \frac{\pi D^2 \mathcal{J}}{2cz^3} M \sin \alpha;$$

M = [M, B], направлен «на нас» согласно рис. 155.

$$\mathbf{7.93.} \quad 1) \quad M = \frac{N_1 N_2 S_1 S_2}{2r^3}; \quad 2) \quad W_{12} = \frac{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2}{2c^2} \frac{N_1 N_2 S_1 S_2}{r^3}; \quad 3) \quad A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2c^2} \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \times \\ \times \frac{N_1 N_2 S_1 S_2}{r^3}.$$

7.94. $F = \frac{\mu - 1}{2} \left(\frac{\pi D^2}{8} \right)^2 \frac{d^2 I_0^2 l}{x^5}$; при замене образца на «лепешку» сила уменьшится в μ раз.

7.95. $F_z = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi D^2 \mathcal{J} N}{c} \right)^2 \frac{R^3}{z^7} > 0$ — отталкивание, направление силы не зависит от направления тока в витках.

7.96. До изменения поля $F = 0$; сразу же после изменения $F = \frac{9}{16} B^2 R^6$ — отталкивание.

$$\mathbf{7.97.} \quad F = \frac{1}{h} \left[\frac{V^2}{4(\ln \frac{4h}{d})^2} - \frac{\mathcal{J}^2}{c^2} \right] = 2,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{дин}}{\text{см}}.$$

§ 8. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. ЭДС Холла. Движение тел при наличии пондеромоторных сил

$$\mathbf{8.1.} \quad v = e \sqrt{\frac{2}{ma}} = 2,2 \cdot 10^4 \text{ см/с, где } m \text{ — масса электрона.}$$

$$\mathbf{8.2.} \quad v = c \sqrt{\frac{1 + \frac{2mc^2 a}{e^2}}{1 + \frac{mc^2 a}{e^2}}} \text{. Нерелятивистское приближение справедливо при}$$

$a \gg \frac{e^2}{mc^2} = r_{\text{кл}} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см} — \text{классический радиус электрона.}$

$$\mathbf{8.3.} \quad \text{Скорость минимальна при } x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e}{E}} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

8.4. $n(r) = \frac{c(1+q)}{4\pi evR} B_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{q-1}$; $E(r) = \frac{c}{v} B_0 \left(\frac{r}{R}\right)^q$; где $v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$ — скорость электронов.

8.5* $x = 12$ см.

Решение. Задача решается в предположении, что пучок расширяется медленно, так что продольное электрическое поле можно не учитывать. Тогда для нахождения поперечного электрического поля можно применить теорему Гаусса

$$2E = 4\pi k,$$

где $k = i/v$ — погонный заряд пучка, приходящийся на единицу площади пучка в направлении длины щели, v — его продольная скорость. Подставляя эти соотношения в уравнение движения граничного электрона в направлении поперек пучка и считая, что время $t = x/v$, получим дифференциальное уравнение для границы пучка $y = y(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\pi ei}{mv^3}.$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием $y(0) = d/2$ и потребовав, чтобы при $x = l$ толщина пучка удвоилась ($y(l) = d$), получим уравнение для определения искомого расстояния l , из которого и найдем

$$x = \sqrt{\frac{dmv^3}{2\pi(-ei)}}.$$

Определяя v как $v = \sqrt{2W/m}$, получим числовой ответ.

8.6* $\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2e\mathcal{J}}{mc}} \approx 2,4 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$; $v = \frac{\omega}{2\pi} = 0,38 \cdot 10^9 \text{ Гц}$.

Решение. Уравнение радиального движения протона в поле электрического пучка (действием магнитного поля пренебрегаем)

$$mr'' + eE_r = 0,$$

где E_r — абсолютная величина радиальной составляющей электрического поля пучка. По теореме Гаусса $E_r = \frac{2q}{r}$, где $q = en\pi r^2$ — заряд внутри трубы радиусом r , приходящийся на единицу длины, n — концентрация электронов. Электрический ток $\mathcal{J} = env\pi R^2 \approx en\pi R^2$ (с учетом того, что $v \approx c$). Подстановка в уравнение радиального движения даст ответ задачи.

8.7. $j_{\max} \approx \frac{\delta m}{\pi e l^2} \left(\frac{2W}{m}\right)^{3/2} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ ед. СГСЭ} = 5 \text{ mA/cm}^2$.

8.8. Со скоростью от 56 до 60 В вследствие неэквипотенциальности нити лампы, вдоль которой есть падение напряжения 4 В. Такое распределение скоростей будет иметь место, если анодный ток мал по сравнению с током накала, что обычно имеет место.

8.9. $\frac{F_K}{F_A} = \left(\frac{c}{v}\right)^2 = \frac{c^2 m}{2eV} \approx 25,6$.

$$8.10. n = n_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

8.11. $\mathcal{J} \geq \frac{mc^3}{2e} \beta \gamma \approx 17 \text{ кА}$, где $\beta = \frac{v}{c}$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$; $\gamma \beta \approx 2$. Результат задачи совпадает с током Альфвена $\mathcal{J} = \frac{mc^3}{e} = 17 \text{ кА}$.

$$8.12. AC = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{Be}.$$

8.13. $B = \frac{W}{Re} = \frac{V}{R} = 1,07 \cdot 10^7 \text{ Гс}$ (ускоряющее напряжение, соответствующее энергии W , равно $V = 7,6 \cdot 10^{10} \text{ В} = 2,53 \cdot 10^8 \text{ ед. СГСЭ}$).

Указание. Протоны считать ультрарелятивистскими. Их скорость настолько близка к скорости света, что энергия покоя протона пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией. При таких условиях кинетическую энергию можно вычислить по формуле $W = mc^2$, где m — релятивистская масса протона.

$$8.14^*: \mathcal{J}p = Te.$$

Решение. Радиус кривизны траектории частицы в магнитном поле $\rho = cp/(eB)$. На единицу длины натянутого проводника действует нормальноупругая сила T/ρ_1 , которая уравновешивается амперовой силой $\mathcal{J}B/c$. Это дает для радиуса кривизны проводника $\rho_1 = Tc/(\mathcal{J}B)$. При выполнении условия $\rho_1 = \rho$, т. е. $\mathcal{J}p = Te$, форма траектории будет совпадать с формой проводника.

$$8.15. F = \frac{\mathcal{J}}{e} \sqrt{2Wm} \approx 0,14 \text{ Н}, \text{ где } m \text{ и } e \text{ — масса и заряд протона.}$$

8.16. Для ${}^7\text{Li}$ $V = Er \ln(r_2/r_1) \approx E(r_2 - r_1) \approx 245 \text{ В}$; $E = 408 \text{ В/см}$. Для ${}^6\text{Li}$ $V = 229 \text{ В}$; $E = 381 \text{ В/см}$.

8.17. $B \leq \frac{c\Delta m}{\delta} \sqrt{\frac{2W}{me}} \approx 4000 \text{ Гс}$; $t = \frac{Me}{Amp\mathcal{J}} \approx 2,5 \text{ года}$, где m — масса атома урана, Δm — разность масс атомов ${}^{238}\text{U}$ и ${}^{235}\text{U}$, $A = 238$ — относительная атомная масса ${}^{238}\text{U}$, m_p — масса протона.

$$8.18. \frac{M}{q} = \frac{R_t^2 B^2}{c^2 V} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

$$8.19. \frac{e}{m} = \frac{8Vc^2}{d^2 B^2} \sin^2 \alpha \approx 5,3 \cdot 10^{17} \text{ ед. СГСЭ}.$$

$$8.20. B \leq \frac{3mcb}{el^2} \sqrt{\frac{W}{2m}} = 11 \text{ Гс}, \text{ где } m \text{ и } e \text{ — масса и заряд электрона.}$$

$$8.21^*. \omega_z = \frac{eB_z(r_0)}{mc} \sqrt{n}.$$

Решение. При отклонении частиц от горизонтальной плоскости возникает возвращающая (квазиупругая) сила, зависящая от компоненты магнитного поля B_r . Поскольку в зазоре магнита $\mathbf{B} \sim \mathbf{H}$ и $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$, имеем

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r},$$

откуда при малых z получим, что

$$Br = \frac{\partial B_z}{\partial r} z = -\frac{n}{r_0} B_z z.$$

Составляющая силы Лоренца F_z запишется в виде

$$F_z = \frac{e}{c} v B_r = -\frac{e}{c} \omega_0 n B_z z = -\omega_0^2 n m z,$$

где v — линейная скорость частицы на орбите, $\omega_0 = eB_z(r_0)/(mc)$ — (циклотронная) частота. Из уравнения вертикальных колебаний

$$m\ddot{z} = -n\omega_0^2 m z$$

следует

$$\omega_z = \omega_0 \sqrt{n} = \sqrt{n} \frac{eB_z(r_0)}{mc}.$$

$$\mathbf{8.22^*} \omega_r = \sqrt{2-n} \frac{eB_z(r_0)}{mc}.$$

Решение. Равновесная орбита устойчива по отношению к малым радиальным отклонениям частицы, если сила Лоренца изменяется с изменением радиуса r медленнее, чем центробежная сила. При малых отклонениях $\rho = r - r_0$ можно записать

$$B_z(r) = B_z(r_0) + \frac{\partial B_z}{\partial r}(r - r_0) = B_z(r_0) - \frac{n}{r_0} B_z(r_0) \rho.$$

Радиальная составляющая силы Лоренца имеет вид

$$\begin{aligned} F = \frac{e}{c} v B_z(r) &= \frac{e}{c} \omega r B_z(r) = \frac{e}{c} \omega_0 \frac{r_0^2}{r} B_z(r_0) \left(1 - \frac{n}{r_0} \rho\right) = \\ &= \frac{e}{c} \omega_0 r_0 B_z(r_0) \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right) \left(1 - \frac{n}{r_0} \rho\right) \approx F(r_0) - m\omega_0^2(1+n)\rho. \end{aligned}$$

При написании этого выражения использован закон сохранения момента импульса $\omega_0 r_0^2 = \omega r^2$, где $\omega_0 = eB_z(r_0)/(mc)$ — круговая (циклотронная) частота вращения частицы на равновесной орбите.

Запишем теперь выражение для центробежной силы:

$$F_{\text{цб}} = m\omega^2 r = \frac{m\omega_0^2 r_0^4}{r^3} \approx m\omega_0^2 r_0 \left(1 - 3\frac{\rho}{r_0}\right).$$

Уравнение радиальных колебаний частицы примет вид

$$m\ddot{\rho} = -m\omega_0^2(2-n)\rho.$$

Видно, что колебательный режим (устойчивость стационарной орбиты) возможен при $n < 2$. В этом случае

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{2-n}.$$

8.23. Для устойчивости радиального движения необходимо, чтобы $n < 1$ (при этом $F(r_0 + \Delta r) < 0$).

$$\mathbf{8.24^*} x_{\max} = 5 \text{ см}; \quad T = 0,8 \text{ с}.$$

Решение. Траектория заряженной частицы — спираль с уменьшающимся диаметром витков и уменьшающимся шагом при приближении к концам соленоида ($x = 0$ соответствует середине соленоида). На рис. 608 дан

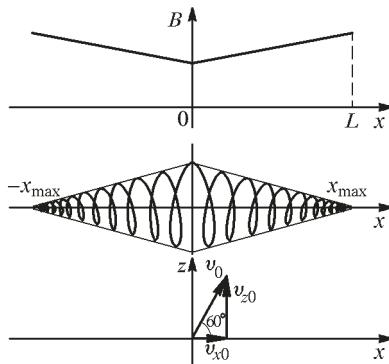


Рис. 608

график изменения поля соленоида $B(x)$, под ним — вид траектории частицы, а также вектор скорости в центральном сечении соленоида при $x = 0$

$$B = B_0 + B_0 \frac{|x|}{L}.$$

Известно, что адиабатический инвариант такого движения $\frac{\mathcal{E}}{\omega} = \text{const}$, где $\mathcal{E} = \frac{mv_z^2}{2}$ — кинетическая энергия частицы, а $\omega = \frac{eB}{mc}$ — циклотронная частота. Таким образом, $\frac{v_z^2}{B} = \frac{v_{z0}^2}{B_0}$. Далее $v_x = \sqrt{v_{z0}^2 + v_{x0}^2 - v_z^2} = \sqrt{v_{x0}^2 - v_{z0}^2 \frac{x}{L}}$. Получаем $x_{\max} = L \frac{v_{x0}^2}{v_{z0}^2} = L \operatorname{ctg}^2 60^\circ = 5 \text{ см}$ — это и есть амплитуда колебаний. Период колебаний подсчитаем так:

$$T = 4 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{v_x} = 4 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{v_{x0}^2 - v_{z0}^2 \frac{x}{L}}} = \frac{8L v_{x0}}{v_{z0}^2} = 0,8 \text{ с.}$$

8.25* $\mathcal{J} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ А.}$

Решение. Оценку легко выполнить для частиц, покидающих столб газового разряда со среднеквадратичной скоростью $v = \sqrt{3kT/m_e}$, направленной перпендикулярно поверхности столба. Магнитное поле вблизи поверхности столба есть

$$B = \frac{2\mathcal{J}}{cR}.$$

В этом поле вылетевшая из столба частица будет двигаться по окружности, радиус которой определяется выражением

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e}{c} v B.$$

В итоге получим

$$\mathcal{J} = \frac{c^2}{2e} \frac{R}{r} \sqrt{3kTm_e} \approx 8,6 \cdot 10^{14} \text{ ед. СГСЭ} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ А.}$$

8.28. $v_0 = \frac{Be}{2\pi mc} \approx 164 \text{ кГц}$, где $m = 28 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ — масса иона азота, $\Delta v > \frac{cE}{2RB} = 16,7 \text{ кГц}$.

8.29. $r = R/2$; $T = \frac{2\pi mc}{qB} \approx 60 \text{ лет.}$

8.30. $B_0(t) = \overline{B(t)}/2$.

8.31. Сила Лоренца $F_L \sim 10^{-19} \text{ дин}$, гравитационная сила $F_{\text{гр}} \sim 10^{-28} \text{ дин.}$

8.32. $\frac{\Delta W}{W} = 2 \frac{u}{v}$.

8.33. $\Delta W = 2vum$; $\frac{\Delta W}{W} = \frac{4u}{v}$.

8.34. $T = \frac{2\pi m_e c}{eB}$; $l = \frac{2\pi m_e c^2 E}{eB^2}$. Траектория частицы совпадает с траекторией точки колеса (циклоида) радиусом $R = \frac{m_e c^2 E}{eB^2}$, катящегося без проскальзывания вдоль оси x (рис. 609).

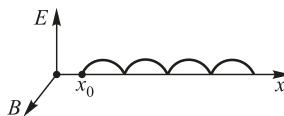


Рис. 609

8.35. $x(t) = r(1 - \cos \omega t)$; $y(t) = r \sin \omega t + \frac{cE}{B}t$, где $\omega = \frac{eB}{m_e c}$ и $r = \frac{m_e c}{eB} \left(c - \frac{cE}{B} \right)$. Ось Ox параллельна электрическому полю, а ось Oy перпендикулярна к обоим полям.

8.36. $\Delta\varphi = \frac{\pi en\delta^2}{2} = 0,00075 \text{ ед. СГСЭ} = 2,26 \text{ В. } v_d = \frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c^2} x = 3,18 \cdot 10^7 \text{ см/с} \ll c$, где $\omega_{\text{пл}}^2 = \frac{4\pi ne^2}{m_e}$ — плазменная частота, $\omega_c^2 = \frac{eB}{m_e c}$ — циклотронная частота.

8.37. $\mathcal{J}_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\ln \frac{r_2}{r_0}}{\ln \frac{r_2 r_0}{r_1^2}} \frac{mv_0^3}{e} \text{ [ед. СГСЭ].}$

8.38. $\omega_0 = \frac{eB}{2m_e c} = \frac{2\pi ne\mathcal{J}}{m_e c^2} \approx 10^9 \text{ с}^{-1}$.

8.39. $v = \text{const} = \sqrt{\frac{2e}{m}\varphi_0}$, где φ_0 — потенциал на оси пучка: $\varphi_0 = \frac{1}{3}\varphi_a$; $\mathcal{J}_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2e}{m}} \varphi_a^{3/2}$.

8.40. $\mathcal{J}_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{mv_0^3}{e} \text{ [ед. СГСЭ].}$

8.41. $v = \frac{v_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_1}{v_{\text{др}}}\right)^2}}$; $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_1}{v_{\text{др}}}$, где φ — угол в плоскости движения

между вектором установившейся скорости \mathbf{v} и силой тяжести.

8.42. $v = \frac{v_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_1 B}{c E}\right)^2}}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_1}{v_{\text{др}}} = -\frac{v_1 B}{c E}$.

8.43. $\omega_0^2 = \frac{v}{c} \frac{pB}{J_0}$.

8.44. Капля движется по окружности радиусом $r = R/2$ с постоянной скоростью $v = \frac{qR}{2c} \frac{B}{E}$.

8.45. Кольцо вращается с частотой $\omega(t) = \frac{qB(t)}{2mc}$.

8.46. $v = v_{\text{уст}}(1 - e^{-t/\tau})$, где $v_{\text{уст}} = -\frac{mc^2 R g}{(\pi r^2 a B_0)^2}$ — установившаяся скорость, $\tau = \frac{mc^2 R}{(\pi r^2 a B_0)^2}$.

8.47. $v = v_0 \exp\left(-\frac{a^4 k^2 t}{c^2 R m}\right)$.

8.48. $p = \left(\frac{\mathcal{J}_0}{2\pi c}\right)^2 \frac{b^2}{2Rl} \frac{\ln(1 + a/l)}{1 + l/a}$.

8.49. $v \approx 25 \text{ м/с.}$

Решение. В силу того, что полосы, по которым течет ток, достаточно широкие, а промежуток между ними мал, магнитное поле токов будет сосредоточено в основном в этом промежутке. Пренебрегая краевыми эффектами, определим поле B , полагая также, что линейная плотность тока $i = \mathcal{J}/a$. Таким образом,

$$B = \frac{4\pi}{c} \frac{\mathcal{J}}{a}.$$

Давление магнитного поля P направлено на пластины. Именно оно создает пондеромоторную силу F , приложенную к бруски:

$$P = \frac{B^2}{8\pi} = \frac{2\pi \mathcal{J}^2}{c^2 a^2}; \quad F = Pal = \frac{2\pi \mathcal{J}^2 l}{c^2 a}.$$

Исходя из того, что время действия этой силы ограничено длительностью импульса тока Δt , определим искомую скорость бруска

$$v = \frac{F \Delta t}{m} = \frac{2\pi \mathcal{J}^2 l \Delta t}{mc^2 a} \approx 25 \text{ м/с.}$$

8.50. $v = \frac{2\mathcal{J}}{ca} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \approx 40 \text{ м/с.}$

8.51. $L = \frac{Q}{2c} r_0^2 B_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с.}$

8.52.* $\varphi = \frac{m_e c B R h}{e \sqrt{2kM}} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$

Решение. Магнитное поле внутри цилиндра равно нулю. Достигается это поверхностными токами, как бы намагничивающими сверхпроводящий

цилиндр. $B_{\text{внутр}} = 0 = H + 4\pi I$, откуда $I = \frac{H}{4\pi} \approx \frac{B}{4\pi}$, где B — внешнее магнитное поле. Магнитный момент всего цилиндра объема V

$$\mathfrak{M} = IV = \frac{B}{4\pi} \cdot \pi R^2 h = \frac{BR^2 h}{4}.$$

Гиромагнитным отношением Γ называется отношение магнитного момента \mathfrak{M} к механическому моменту импульса тела:

$$\Gamma = \frac{\mathfrak{M}}{L} = -\frac{e}{2m_e c}.$$

Отсюда $|L| = \frac{\mathfrak{M}}{\Gamma} = \frac{2m_e c}{e} \mathfrak{M} = \frac{mcBR^2 h}{2e}$. L — это механический момент импульса, который получает цилиндр сразу же после выключения магнитного поля B . $L = J\dot{\varphi}$, где J — момент инерции цилиндра относительно его оси, $\dot{\varphi}$ — максимальная угловая скорость, которую получает цилиндр перед началом вращения. Из закона сохранения энергии $\frac{k\varphi^2}{2} = \frac{J\dot{\varphi}}{2}$, откуда $k\varphi^2 = \frac{L^2}{J}$, $\varphi = \frac{L}{\sqrt{kJ}}$. Имея в виду, что $J = \frac{MR^2}{2}$, получим ответ

$$\varphi = \frac{mcBhR}{e\sqrt{2kM}} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

8.53. $\omega - \omega_0 = \pm \frac{qB}{2mc} = \pm \frac{VrB}{2mc} \approx 10^{-6} \text{ с}^{-1}$. Частота ω возрастет, если векторы **B** и ω направлены противоположно друг другу, и уменьшится, если они направлены в одну сторону.

8.54. При включении поля B частота обращения шарика изменяется на $\Delta\omega = \pm \frac{Bq}{2mc}$. Кинетическая энергия шарика уменьшится на $\Delta W_{\text{кин}} = -\frac{BqL \sin^2 \alpha}{4c} \left(\frac{Bq}{2mc} + 2\sqrt{\frac{g}{L}} \right)$, если ω и **B** параллельны, и возрастет на ту же величину, если антипараллельны. При выключении (и включении) поля **B** возникает вихревое электрическое поле, тормозящее (или ускоряющее) движение шарика.

8.55. $\omega = \frac{5}{2} \frac{m_e c R B}{M e} = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$.

8.56. $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \approx 0,3 \text{ с.}$

8.57. $h \approx \frac{(IV)^2}{8mg a^3} \approx 4 \text{ см.}$

8.58. $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} \right)^{1/4} = 2$.

8.59. $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/8} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8.60. $\omega^2 = \frac{8b^2}{d^3 M}$.

Решение. Поле в зазоре эквивалентно полю от бесконечной цепочки частиц с чередующимися зарядами. Однако для оценки достаточно учесть лишь ближайшие изображения, что дает точность около 3%. При смещении

монополя на расстояние x от положения равновесия ближайшая пара создает силу

$$F_1 = \frac{b^2}{d^2} \left[\frac{1}{\left(1 + 2\frac{x}{d}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 - 2\frac{x}{d}\right)^2} \right] \approx -\frac{8b^2x}{d^3} = -kx,$$

откуда частота колебаний $\omega^2 = \frac{k}{M} = \frac{8b^2}{d^3 M}$.

$$\mathbf{8.61. } T \approx \frac{\pi c a^2}{2\mathcal{J}} \sqrt{\frac{\rho}{2|\kappa|}} \approx 1,2 \text{ с.}$$

$$\mathbf{8.62. } h = \frac{\Phi_0^2}{2mgL} = 500 \text{ см.}$$

$$\mathbf{8.63. } v \lesssim rB\sqrt{\frac{r}{2m}}.$$

$$\mathbf{8.64. } V = \frac{\mathcal{J}B}{ecan}.$$

$$\mathbf{8.65. } \sigma = \frac{B\omega R}{4\pi c} \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ ед. СГСЭ} = 2 \cdot 10^{-16} \text{ Кл/см}^2.$$

8.66. Решение. 1) На заряд e , вращающийся вместе с цилиндром, действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] = \frac{e}{c} [[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\mathbf{B}] = \frac{e}{c} (\boldsymbol{\omega}\mathbf{B})\mathbf{r}.$$

Она вызывает такую же поляризацию диэлектрика, как электрическое поле с напряженностью $\frac{1}{c}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{B})\mathbf{r}$, т. е.

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha}{c} (\boldsymbol{\omega}\mathbf{B})\mathbf{r} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi c} (\boldsymbol{\omega}\mathbf{B})\mathbf{r}.$$

Отсюда, так как $\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = 2$,

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{\epsilon - 1}{2\pi c} (\boldsymbol{\omega}\mathbf{B}).$$

$$2) q = \int \rho_{\text{связ}} dV = -\frac{\epsilon - 1}{2c} (\boldsymbol{\omega}\mathbf{B})(r_2^2 - r_1^2).$$

3) Поверхностная плотность связанных зарядов на внутренней и внешней поверхностях цилиндра:

$$\sigma_{1\text{ связ}} = -\frac{\epsilon - 1}{4\pi c} (\boldsymbol{\omega}\mathbf{B})r_1, \quad \sigma_{2\text{ связ}} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi c} (\boldsymbol{\omega}\mathbf{B})r_2.$$

Полный заряд цилиндра остается равным нулю.

$$\mathbf{8.67. } V = \kappa \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2.$$

$$\mathbf{8.68. } V = \frac{2\mathcal{J}^2}{\pi n e c^2 (R_2^2 - R_1^2)} \left[\frac{1}{2} - \frac{\ln(R_2/R_1)}{(R_2/R_1)^2 - 1} \right].$$

$$\mathbf{8.69. } N = \left[\frac{Bvd}{c \left(\frac{d}{\lambda S} + R \right)} \right]^2 R.$$

$$\mathbf{8.70. } \sigma = \frac{B}{4\pi} \frac{v}{c} = 3 \cdot 10^8 \text{ ед. СГСЭ.}$$

$$8.71. V = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon c} |[\mathbf{vB}]| d; |\sigma| = P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon c} |[\mathbf{vB}]|.$$

Указание. В лабораторной системе отсчета есть только поле $\mathbf{B}, \mathbf{E} = 0$ (вне диэлектрика). Следует перейти в систему отсчета, связанную с движущейся жидкостью: $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}] = \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]$; $\mathbf{D}' = \mathbf{E}' = \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]$ (вне диэлектрика). Внутри диэлектрика $\mathbf{D}' = \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]$; $\mathbf{E}'' = \frac{1}{\varepsilon c}[\mathbf{vB}]$. Далее следует вернуться в лабораторную систему отсчета и получить ответ.

$$8.72. \Delta T = \frac{6\pi M m_0}{m(\gamma M)^{3/2} R^{1/2}}. При этом границы периода обращения планеты$$

$$\sqrt{\frac{\gamma m M}{R^3} + \frac{3 m m_0}{R^5}} \leq T \leq \sqrt{\frac{\gamma m M}{r^3} - \frac{3 m m_0}{r^5}}.$$

$$8.73. T = 2\pi l \sqrt{\frac{\pi\rho}{3B_0 B}} \approx 7,5 \text{ с.}$$

$$8.74. T = \frac{2\pi^2 L}{B} \sqrt{\frac{2\rho l L}{3S}} = 1,27 \text{ с.}$$

$$8.75. T = \frac{4\pi^2 L}{B} \sqrt{\frac{\rho l L}{3S}} = 25,3 \text{ с.}$$

$$8.76. \tau = \frac{4c^2\rho}{\lambda B^2} = 7,2 \text{ с.}$$

$$8.77. T = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{2g}} \left[\frac{\ln(R/r)}{mg} \right]^{1/4}.$$

$$8.78. 1) v_{\max} = \frac{2}{3^{3/4} R} \sqrt{\frac{pQ}{m}}; \quad 2) x_0 = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}; \quad 3) \frac{3^{5/4}\pi R^2}{2} \sqrt{\frac{m}{pQ}}.$$

$$8.79. T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

$$8.80. v_{dp} = \frac{cE}{B} = \frac{c^2\rho}{4\pi\delta}. Электрон дрейфует в сторону перемычки.$$

$$8.81. \mathcal{J} > \frac{mc^3\gamma\beta}{2e} \frac{R}{R-r} = 41,2 \text{ кА, где } \beta = \frac{v}{c} = 0,89, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{eV}{mc^2} = 2,17. Нерелятивистское решение } \mathcal{J} > \frac{mc^3}{2e} \frac{R}{R-r} \approx 21,3 \text{ кА, как видим, дает весьма заниженный результат.}$$

$$8.82. \mathcal{J} > \frac{mc^3\gamma\beta l}{4\pi\delta e} = 37,4 \text{ кА, где } \beta = \frac{v}{c} = 0,94, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{eV}{mc^2} = 2,96. Нерелятивистское решение } \mathcal{J} > \frac{mc^3l}{4\pi\delta e} \approx 13,5 \text{ кА, как видим, дает весьма заниженный результат.}$$

$$8.83. \omega^2 = \frac{16q^2(\varepsilon - 1)^2}{C_0 S v (\varepsilon + 1)^3}. Колебаний не будет, если конденсаторы соединить параллельно. При изменении знака зарядов на одном из конденсаторов частота колебаний не изменится.$$

8.84. $\sigma = \frac{1}{4\pi} \left[\varepsilon \frac{V}{d} \pm (\varepsilon - 1) \frac{v}{c} B \right] = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$ при знаке «+» или $1,3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$ при знаке «-»; $\sigma_{\text{пол}} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \left[\frac{V}{d} \pm \frac{v}{c} B \right] = 0,27 \cdot 10^{-3}$ ед. СГСЭ = $= 0,91 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$ или $0,86 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$.

8.85. 1) $\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{8q^2(\varepsilon - 1)^2}{C_0 S(\varepsilon + 1)^3} \pm k \right)$, где знак «+» в случае a , а знак «-» в случае b ; 2) $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

8.86. $\begin{cases} x(t) = vt - \frac{v}{\omega} \sin \omega t; \text{ ось } x - \text{ по скорости ветра, ось } z - \text{ по полю } \mathbf{B}; \\ y(t) = \frac{v}{\omega} (1 - \cos \omega t), \text{ где } \omega = \frac{qB}{mc} = 0,12 \text{ рад/с}, \frac{v}{\omega} = 33,2 \cdot 10^7 \text{ см}. \end{cases}$

8.87. $r_{\max} = 2 \frac{v}{\omega} = 1,67 \cdot 10^8 \text{ см}$, где $\omega = \frac{qB}{mc} = 1,2 \text{ рад/с}$.

8.88. $\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{3}qp}{mr^4}}$.

8.89. $\tau = \frac{\pi M_a c}{2eB} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ с}$; $x = \tau \frac{cE}{B} = 2,2 \text{ см}$; $y = r_H = 1,6 \text{ см}$, где r_H — циклотронный радиус иона водорода H^+ .

8.90. Частицы встречаются через $\tau = \frac{\pi mc}{eB} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ с}$, т. е. через половину периода своего циклотронного вращения. Циклотронные радиусы: $r_e = \frac{v'_e mc}{eB} = 3,8 \text{ см}$ и $r_p = \frac{v'_p m_p c}{eB} = 1,9 \text{ см}$, где $v'_e = v_e - v_{dp} = 2 \cdot 10^8 \text{ см/с}$; $v'_p = v_p - v_{dp} = 10^8 \text{ см/с}$, скорость дрейфа частиц $v_{dp} = \frac{cE}{B} = 10^8 \text{ см/с}$. Вдоль оси X частицы проходят расстояние $\tau v_{dp} = 6 \text{ см}$. Поэтому встреча и аннигиляция состоятся в точке $x = 6 \text{ см}$ и $y = 3,8 \text{ см}$.

8.91. $T = \frac{\sqrt{2LM}}{RB}$.

8.92. $T = \frac{4\pi\sqrt{2L^3J}}{p}$.

8.93. $T = \frac{2c}{r} \sqrt{\frac{mR^3}{6\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2}}$.

8.94. $V = \mathcal{E}_{\max}^{\text{инд}}$ при $z = \pm \frac{R}{2}$. При этом $V = \frac{96\pi\mathfrak{M}\omega}{25\sqrt{5}cR^2}$.

8.95. $T = \frac{4\pi\sqrt{2L^3J}}{\mathfrak{M}}$.

8.96. $\mathcal{J} = \frac{B_0 r^2 \omega}{2cR - 4\pi n r^2 \frac{\omega}{c}}$. Результирующая магнитная индукция $B' = B_0 \pm B$, где $B = \frac{4\pi n \mathcal{J}}{c}$ — магнитное поле катушки, а два знака перед B позволяют описать вращение диска в двух направлениях. $B' = \mathcal{J} \frac{2cR}{r^2 \omega}$. Зависимости $\mathcal{J}(\omega)$ и $B'(\omega)$ даны на рис. 610.

8.97. $E = -\frac{vB(\varepsilon - 1)}{c(\varepsilon + 1)}$; $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, где $\sigma_0 = P = \frac{vB(\varepsilon - 1)}{2\pi c(\varepsilon + 1)}$. Векторы \mathbf{E} и \mathbf{P} перпендикулярны полю \mathbf{B} , а также вектору \mathbf{v} . Заметим, что действие одно-

родного магнитного поля на движущиеся связанные заряды в этой задаче аналогично действию внешнего однородного электрического поля, распределение поверхностных зарядов при этом аналогично задачам 1.24 и 3.20, поляризация однородна.

8.98. При $R \gg R_{\text{кр}} = 2BSN\sqrt{L/J}$.

8.99. $\Delta W = mc^2$; $\Delta L = \frac{c}{\pi f_0} = 3,2$ см. Заметим, что электроны релятивистские, поэтому $T = \frac{2\pi mc^2}{ecB} \left(\frac{W_{\text{кин}}}{mc^2} + 1 \right)$ — период вращения электрона.

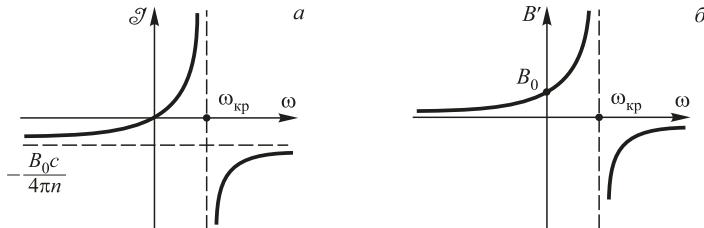


Рис. 610

8.100. Ускорение протонов прекратится, когда протоны начнут проходить дуанты в замедляющем поле. Это произойдет, когда период обращения увеличится на $T_0/4$, где $T_0 = \frac{2\pi mc^2}{ceB}$. $W_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{4} \approx 250$ МэВ.

8.101. Переменное поле резонатора при первом пролете электронов формирует сгустки электронов, модулируя их по скорости. Далее эти сгустки попадают в поле отражателя, возвращаются обратно и в этот момент должны тормозиться электрическим полем E_{\sim} , т. е. отрицательной волной этого поля, таким образом, сгустки должны попасть в фазу волны $\left(n - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{f}$. При таком торможении отдается энергия сгустков. $E_1 = \frac{2f\sqrt{2meV_0}}{e\left(n - \frac{1}{4}\right)} = \frac{5}{n - \frac{1}{4}}$ ед. СГСЭ = $= \frac{1500}{n - \frac{1}{4}} \frac{\text{Б}}{\text{см}}$; $n = 1, 2, 3, \dots$

8.102. $B_0 = \frac{4\pi^2 I}{\mathfrak{M} T_{\text{в}}^2} \approx 0,55$ Гс; $B_{\text{роп}} = \frac{4\pi^2 I}{\mathfrak{M} T_{\text{р}}^2}$; $\cos \theta = \frac{B_{\text{роп}}}{B_0} = \frac{T_{\text{в}}^2}{T_{\text{р}}^2} = 0,276$; $\theta = 74^\circ$. Здесь $I = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ — момент инерции бруска.

8.103. $v_{\text{пред}} = \frac{cr_0}{2\pi \mathfrak{M}} \left(\mathcal{E} - \frac{F_{\text{тр}} cr_0^2 R}{\mathfrak{M}} \right) = 123,8 \text{ об/с} = 7425 \text{ об/мин}$, где $\mathfrak{M} = \frac{4}{3}\pi r_0^3 I = 40,2 \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$ — магнитный момент шара.

§ 9. Переходные процессы в электрических цепях. Свободные колебания*)

9.1. $R \gg \frac{\Delta t}{c} \approx 10^8$ Ом; $Q_{\text{дж}} = \frac{1}{4} C \mathcal{E}^2$.

9.2. $q_1 = \frac{q_0}{1 + \frac{C_2}{C_1}} \left[1 + \frac{C_2}{C_1} \exp \left(-\frac{C_1 + C_2}{RC_1 C_2} t \right) \right]$. При $R \rightarrow 0$ $q_1 \rightarrow \frac{q_0}{1 + \frac{C_2}{C_1}}$.

Прирост энергии $\Delta W = \frac{q_0^2}{2(C_1 + C_2)} \frac{C_2}{C_1}$.

9.3. $\kappa = \frac{V}{\mathcal{E}} = 1,5 \cdot 10^{-3}$; $\Delta t \ll \frac{L}{R} \approx 0,1$ с.

9.4. $\mathcal{J}(t) = (\varepsilon - 1) \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$.

9.5. $\frac{\omega}{\omega_0} = 2$. 1) $\mathcal{J}_{\max} = \mathcal{J}_{\max 0}$; $\frac{q_{\max}}{q_{\max 0}} = \frac{1}{2}$. 2) $\frac{\mathcal{J}_{\max}}{\mathcal{J}_{\max 0}} = 2$; $q_{\max} = q_{\max 0}$.

9.6. $\rho = \frac{4\pi\tau_1\tau_2}{\varepsilon(\tau_1 - \tau_2)}$.

9.7. $\varepsilon = C \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$; $\rho = \frac{4\pi R_1 R_2}{C(R_2 - R_1)} \frac{t}{\ln 2}$ (СГСЭ).

9.8. $\mathcal{J}(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 + \frac{L_1 - L_2}{L_2} e^{-t/\tau} \right)$, где $\tau = \frac{L_2}{R}$.

9.9. $\mathcal{J}_1 = \left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2} \right) \mathcal{J}_0 = \frac{3}{4} \mathcal{J}_0$. В дальнейшем ток возрастает до значения \mathcal{J}_0 .

9.10. $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 1) $q_{\max} = q_{\max 0}$; $\frac{\mathcal{J}_{\max}}{\mathcal{J}_{\max 0}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2) $\frac{q_{\max}}{q_{\max 0}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\mathcal{J}_{\max}}{\mathcal{J}_{\max 0}} = \frac{3}{4}$.

9.11. $V(t) = 5(1 - e^{-4 \cdot 10^4 t})$ [В].

9.12. $B(t, r, \theta) = \frac{V_0 a}{c\tau} \frac{1 - \cos\theta}{r} e^{-t/\tau} = \frac{2}{3} \frac{1 - \cos\theta}{r} e^{-10^7 t}$ [Γ с], где $\tau = Ra \approx 10^{-7}$ с (СГСЭ).

Указание. Циркуляция вектора \mathbf{B} по окружности радиусом r с центром на оси симметрии $\oint(\mathbf{B} d\mathbf{l}) = B \cdot 2\pi r = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{E} d\mathbf{S})$, где $\int_S (\mathbf{E} d\mathbf{S})$ — поток вектора \mathbf{E} , равный $Q\Omega$, где Q — телесный угол, под которым видна поверхность S , натянутая на контур — окружность радиусом r : $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$.

9.13. $V(t) = \mathcal{E} \left[1 - e^{-\delta t} \left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin\omega t \right) \right]$, где $\delta = \frac{R}{2L}$ и $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}$.

Минимальное напряжение, на которое должен быть рассчитан конденсатор, не меньше $2\mathcal{E}$.

9.14. $\mathcal{J}(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - e^{-\delta t} \left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin\omega t \right) \right]$, где $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$.

*) Ответы этого раздела даются в СИ, кроме особо оговоренных случаев.

9.15. $V(t) = V_0 e^{-\delta t} \left[\cos \omega t + \left(\frac{\delta}{\omega} - \frac{1}{\omega R C} \right) \sin \omega t \right]$, где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\delta = \frac{R}{2L}$; $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$. Начальное условие на ток $\mathcal{J}(0) = -\frac{V_0}{R}$ ($\dot{q} < 0$, т. е. ток падает).

9.16. $\frac{V_{\max}}{V_0} = \frac{r}{R}$. Чем меньше r , тем меньше V_{\max} . Однако слишком малым r брать не следует во избежание больших нагрузок на источник тока. Достаточно, чтобы V_{\max} не превышало V_0 , т. е. r должно быть меньше или порядка R .

9.17. Частота увеличится в $\sqrt{2}$ раз. Амплитуда колебаний и энергия возрастут вдвое.

$$\mathbf{9.18.} \quad \mathcal{J}(t) = \frac{V_0}{R} \exp \left[-\frac{t(C_1 + C_2)}{RC_1 C_2} \right].$$

$$\mathbf{9.19.} \quad Q_{\text{дж}} = \frac{q^2}{4C}.$$

$$\mathbf{9.20.} \quad \mathcal{J} = \frac{\lambda \mathcal{E}^{3/2}}{[1 + \lambda \sqrt{\mathcal{E}} t / (2C)]^3}.$$

$$\mathbf{9.21.} \quad \mathcal{J} = \frac{1}{2R} \left[(\mathcal{E} - a) + \sqrt{(\mathcal{E} - a)^2 - 4Rb} \right].$$

$$\mathbf{9.22.} \quad \mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R+r}; \quad \mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{E}}{1+L_2/L_1}; \quad \mathcal{J}_2 = \frac{\mathcal{E}}{1+L_1/L_2}.$$

$$\mathbf{9.23.} \quad F_{\max} = \frac{2\pi\sigma\mathcal{E}^2}{c^2 r R S} \text{ (СГСЭ).}$$

$$\mathbf{9.24.} \quad Q_{\text{дж}} = \frac{2\mathcal{E}^2 \sigma^2}{c^2 \pi r^2 R R_0 r_0} \text{ (СГСЭ).}$$

$$\mathbf{9.25.} \quad \Delta R = \frac{\pi^2 n^2 D^2 v}{c^2} = 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ ед. СГСЭ} = 0,125 \text{ Ом.}$$

$$\mathbf{9.26.} \quad Q_1 = Q_2; \quad \tau_1 = \tau_2.$$

$$\mathbf{9.27.} \quad q = \frac{q_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$$\mathbf{9.28.} \quad C \geq \frac{L}{R^2 n^2} = 1 \text{ мкФ.}$$

$$\mathbf{9.29.} \quad \frac{Q_\infty}{Q_R} = 1 + \frac{L}{C R r} \approx 34.$$

$$\mathbf{9.30.} \quad \omega_0 = \frac{2n}{\tau} = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1} (\approx 320 \text{ Гц}).$$

$$\mathbf{9.31.} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{3LC}}.$$

$$\mathbf{9.32.} \quad V(t) = \frac{L_1 \mathcal{J}_0}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} \sin \omega t; \quad \mathcal{J}(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \mathcal{J}_0 \cos \omega t, \quad \text{где } \omega = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}.$$

$$\mathbf{9.33.} \quad N_2 = N_1/2.$$

9.34. Пробойное напряжение на разрядном промежутке свечи (равное 3000 В) $U_{\text{разр}} \approx \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E} Q \sin \omega t$, где добротность $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 28$. Из этого уравнения $t \approx 3,2 \text{ мкс.}$

$$\mathbf{9.35.} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad d = \frac{\pi}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

9.36. $t = \sqrt{LC} = 10^{-4}$ с; $\mathcal{J}_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{e} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,37$ А, где e — основание натурального логарифма.

$$\mathbf{9.37.} Q = \frac{V_0^2}{2N} \sqrt{\frac{C}{L}} = 100.$$

$$\mathbf{9.38.} 1) \mathcal{J}_L = \mathcal{J}_0 e^{-\delta t} \left[\cos \omega t - \left(\frac{\delta}{\omega} + \frac{\omega_0^2 q_0}{\omega \mathcal{J}_0} \right) \sin \omega t \right];$$

$$V_C = V e^{-\delta t} \left[\cos \omega t + \left(\frac{\delta}{\omega} + \frac{\mathcal{J}_0}{\omega q_0} \right) \sin \omega t \right].$$

$$2) t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega \mathcal{J}_0}{\delta \mathcal{J}_0 + \omega_0^2 q_0}, \text{ где } \mathcal{J}_0 = \frac{V}{R_2}; \quad q_0 = CV; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \delta = \frac{R_1 + R_2}{2L}; \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2; \quad \delta < \omega_0.$$

9.39. $n = \frac{\tau}{T}$, где $\tau = \frac{8mc^2R}{B^2l^2}$ — время релаксации, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — период (СГСЭ).

$$\mathbf{9.40.} \mathcal{J}_2 = \frac{\mathcal{J}_1}{n}.$$

$$\mathbf{9.41.} B = \frac{c}{\pi r} \sqrt{2\pi\nu_0 m R} \approx 800 \text{ Гс (СГСЭ).}$$

$$\mathbf{9.42.} W_R = \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \frac{L_1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}}{r} \right)^2; \quad W_2 = \frac{M^2}{2L_2} \left(\frac{\mathcal{E}}{r} \right)^2.$$

$$\mathbf{9.43.} Q = \frac{L_1 \mathcal{J}_1^2}{2} - \frac{L_2 \mathcal{J}_2^2}{2}, \text{ где } \mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

$$\mathbf{9.44.} 1) T_1 = n \cdot 2\pi\sqrt{LC}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$2) T_2 = (2n+1) \cdot \pi\sqrt{LC}; \quad V_{\max} = 2V_0, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathbf{9.45.} 1) a = \frac{mg}{m + CB^2l^2}; \quad 2) \mathcal{J} = \frac{mgBlC}{m + CB^2l^2}.$$

$$\mathbf{9.46.} x = \frac{mgL}{B^2l^2} (1 - \cos \omega t), \text{ где } \omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}.$$

9.47. Скорость будет расти, пока сила взаимодействия между индуцированным током и магнитным полем не достигнет величины, равной весу проводника. Это наступит при значении $v_{\text{уст}} = PR/(Bl)^2$.

9.48* Координата положения равновесия

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \right] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{mgL}{(Bl)^2},$$

где $\delta = \frac{(Bl)^2}{2mR}$; $\omega_0 = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Координата x отсчитывается вниз от исходного положения перемычки.

Решение.

$$\ddot{x} = mg + Bl(\mathcal{J}_L + \mathcal{J}_R), \quad L\dot{\mathcal{J}}_L = -Bl\dot{x}, \quad R\mathcal{J}_R = Bl\dot{x}.$$

После подстановки в уравнение динамики значений токов \mathcal{J}_L и \mathcal{J}_R получим

$$\ddot{x} + \frac{(Bl)^2}{mR}\dot{x} + \frac{(Bl)^2}{mL}x = g, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\delta = \frac{(Bl)^2}{2mR}$; $\omega_0 = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Отсюда после интегрирования при нулевых начальных условиях получаем

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\delta t} (\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t) \right].$$

9.49. $\mathcal{J}(t) = \frac{Blgc}{L\omega^2} (1 - \cos \omega t)$, где $\omega^2 = \frac{B^2 l^2}{Lm} + \frac{c^2}{LC}$.

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} \left(1 - \frac{B^2 l^2}{m L \omega^2} \right) + \frac{B^2 l^2 g}{m L \omega^4} (1 - \cos \omega t) \text{ (СГСЭ).}$$

9.50. $\mathcal{J}(t) = \frac{q_0 v_0}{d} (\cos \omega_0 t - 1)$, где $\omega_0^2 = \frac{c^2}{LC_0}$ (СГСЭ).

9.51. $q(t) = \frac{E_0 S}{4\pi} (\cos \omega_0 t - 1)$, где $\omega_0^2 = \frac{c^2}{LC_0}$, $C_0 = \frac{S}{4\pi d}$ (СГСЭ).

9.52. $q(t) = Q (1 - \cos \omega_0 t)$, где $\omega_0^2 = \frac{c^2}{LR}$ (СГСЭ).

9.53. $V_0 = \frac{V}{\pi n R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

9.54. $T = \frac{5}{2}\tau = 0,05$ с, $V_C(t) = \begin{cases} \mathcal{E}_0 (1 - \cos \omega t) & \text{(рис. 611).} \\ 0. & \end{cases}$

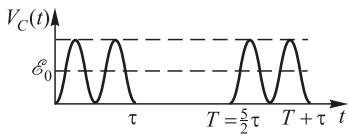


Рис. 611

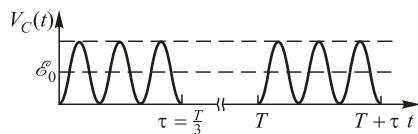


Рис. 612

9.55. $T = \frac{T}{3} = 0,03$ с, $V_C(t) = \begin{cases} \mathcal{E}_0 (1 - \cos \omega t) & \text{(рис. 612).} \\ 0. & \end{cases}$

9.56. $\mathcal{J}_{\max} = \frac{2\mathfrak{M}}{NS} = 40$ мА; $v = \frac{2l}{T} = 100$ м/с. В СГСЭ: $\mathcal{J}_{\max} = \frac{2\mathfrak{M}c}{NS}$.

9.57. $Q = \frac{2c}{\pi \lambda \mu_0 \omega^2} \sqrt{LC}$ (в СГСЭ).

9.58. $|\mathbf{M}| = \frac{R_1 R_2 q}{\mathcal{E}} = 150$ мГн.

9.59. $L_1 = \frac{R_2^2 q^2}{L_2 \mathcal{J}_0^2} = 200$ мГн.

9.60. $M \leq \frac{cV^2}{2lg} \approx 0,2$ кг.

9.61. 1) $V_{\max} = \mathcal{E}Q = 500$ В; 2) если φ — фаза напряжения в искомый момент, то $\operatorname{tg} \varphi = Q - \frac{1}{2Q} \approx 50$, откуда $\varphi = 88,8^\circ \approx \pi/2$. Отсюда $\tau = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f_0} = 0,5$ мс.

9.62. 1) $\frac{Q_1}{Q_0} = \sqrt{1 - \frac{M^2}{L^2}} = \frac{3}{5}$; 2) $\frac{Q_2}{Q_0} = 1 - \frac{M^2}{L^2} = \frac{9}{25} = 0,36$.

9.63. Условие генерации: $\delta = \left(\frac{L}{R_0 C} + R_h \right) \frac{1}{2L} < 0$; $1 + \frac{R_h}{R_0} > 0$. Отсюда $R_0^{kp} = -\frac{L}{CR_h} \approx -260$ Ом.

9.64. $|R_0^{\max}| = \frac{L}{CR_h} = 312,5$ Ом $> R_h$; $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{1 - \frac{R_h}{R_0}}{LC}} = 58,3 \cdot 10^6$ с⁻¹, $v_{\max} = 9,28$ МГц. Генерация возможна, если $\frac{L}{CR_h} > |R_0| > R_h$.

9.65. 1) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4$ с⁻¹; 2) условие возникновения незатухающих колебаний $\operatorname{Re} \hat{z} = R_3 + \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \leqslant 0$, откуда $R_3 \lesssim -\frac{L}{CR} = -1$ Ом; 3) $Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 100$.

§ 10. Вынужденные колебания. Резонанс. Метод комплексных амплитуд*)

10.1. 1) $I_1 = \frac{3\mathcal{E}}{n(9r + 2R)}$; 2) $I_2 = \frac{6\mathcal{E}}{n(9r + 2R)}$. Токи противоположного направления.

$$\mathbf{10.2.} N = \frac{1}{2R}(V^2 - V_1^2 - V_2^2).$$

$$\mathbf{10.3.} N = \frac{R}{2}(I^2 - I_1^2 - I_2^2).$$

$$\mathbf{10.4.} \mathcal{J}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \times \\ \times [R \cos(\omega t + \varphi) + \omega L \sin(\omega t + \varphi) - e^{-Rt/L} (R \cos \varphi + \omega L \sin \varphi)];$$

при $L = 0$ колебания начнутся сразу.

$$\mathbf{10.5.} \mathcal{J}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin \omega t.$$

$$\mathbf{10.6.} \omega L = R; \quad \left| \frac{V_{bx}}{V_{вых}} \right| = 3.$$

$$\mathbf{10.7.} \cos \varphi' = \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{Z/Z_1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \right] \approx 0,7.$$

$$\mathbf{10.8.} I = \frac{\mathcal{E}RC\omega}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{R}{\omega L}.$$

10.9. $\mathcal{J} = \frac{V_0 \omega C (1 - \omega^2 LC)}{2\omega^2 LC - 1} \sin \omega t$; $\mathcal{J}_{\min} = 0$ при $\omega^2 = \frac{1}{LC}$; $\mathcal{J}_{\max} = \infty$ при $\omega^2 = \frac{1}{2LC}$.

$$\mathbf{10.10.} \omega_2 / \omega_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15.$$

10.11. Сила тока останется без изменения. Резонансная частота возрастет в $\sqrt{2}$ раз.

*) Здесь, как и в § 9, ответы и решения даны в СИ, кроме особо оговоренных случаев.

10.12. Указание. Преобразовать обычную формулу для амплитуды силы тока в контуре $\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + [L\omega - 1/(\omega C)]^2}}$, подставив в нее $\mathcal{J}_0 = \mathcal{E}/R$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1/\sqrt{LC}$ и частоту внешней силы $\omega = 2\pi(f_0 + \Delta f)$. Пренебречь квадратами и более высокими степенями $\Delta f/f_0$.

$$\mathbf{10.13. } \varphi_{\max} = \frac{\Phi_0}{1 - e^{-\delta T/2}}.$$

$$\mathbf{10.14. } \Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \frac{1}{\tau} = 1 \text{ c}^{-1}.$$

$$\mathbf{10.15. } \text{Энергия уменьшится в два раза; } \tau = \frac{1}{2\pi\Delta f} \approx 0,16 \text{ с.}$$

$$\mathbf{10.16. } R = \frac{V_0}{\mathcal{J}_0} = 10 \text{ Ом; } \tau = \frac{2L}{R} = 0,2 \text{ с.}$$

$$\mathbf{10.17. } V = \frac{m l La \omega^3}{e R} \varphi_0 \sin \omega t, \text{ где } m \text{ и } e — \text{ масса и заряд электрона.}$$

$$\mathbf{10.18. } Q_2 = 2Q_1, \text{ где } Q = f/\Delta f — \text{ добротность.}$$

$$\mathbf{10.19. } \frac{V(f_0)}{V(f_1)} = \sqrt{Q^2 \left[1 - \left(\frac{f_1}{f_0} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{f_1}{f_0} \right)^2} \approx 300.$$

$$\mathbf{10.20. } V_1 \approx V_0 \left(\frac{f_0}{f_1} \right)^2 = 10 \text{ мВ.}$$

$$\mathbf{10.21. } R = \frac{V}{I_0} = 10 \text{ Ом; } L = \frac{V}{2\pi f_1 I_1} = 0,1 \Gamma_H; C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} = \frac{f_1 I_1}{2\pi f_0^2 V} = 0,1 \text{ мкФ.}$$

$$\mathbf{10.22. } \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{2\Delta V}{V}} \approx 4,5 \cdot 10^{-6}.$$

$$\mathbf{10.23. } \Delta d = \frac{d}{Q} \sqrt{\frac{2\Delta V}{V}} = 14 \cdot 10^{-7} \text{ см.}$$

10.24. Добротность контура должна быть $Q > 500$, т. е. логарифмический декремент затухания контура менее 0,6%.

10.25. Резонансу напряжений соответствует частота $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Резонансу токов соответствует $\omega_1 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{LC}} \approx \frac{0,52}{\sqrt{LC}}$ и $\omega_2 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{LC}} \approx \frac{1,93}{\sqrt{LC}}$. График $\varphi(\omega)$ — фазовой характеристики цепи — изображен на рис. 613.

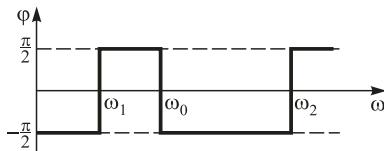


Рис. 613

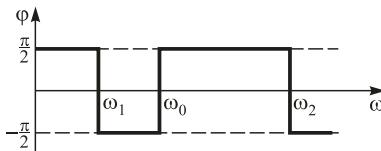


Рис. 614

$$\mathbf{10.26. } \text{Указание. Импеданс цепи } \hat{Z} = i \left(\omega \frac{L}{2} - \frac{1}{2\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} \right).$$

Резонанс токов соответствует величине $Z = \infty$. Он произойдет на частоте

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Резонанс напряжений соответствует $Z = 0$. Он произойдет на частотах $\omega_1 = \frac{0,52}{\sqrt{LC}}$ и $\omega_2 = \frac{1,93}{\sqrt{LC}}$. Фазовая характеристика цепи $\varphi(\omega)$ изображена на рис. 614. Заметим, что если бы в цепи была активная нагрузка, то скачки фазы на частотах ω_0 , ω_1 и ω_2 отсутствовали и были бы плавные переходы от $+\pi/2$ к $-\pi/2$ и наоборот.

10.27. См. рис. 615. $L = 3,2 \text{ Гн}$; $C = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ мкФ}$; $R = 100 \text{ Ом}$.

10.28. Возможны два варианта схемы:

- 1) см. рис. 616; $R = 1 \text{ кОм}$; $C = 32 \text{ мкФ}$; $L = 3,14 \text{ мГн}$;
- 2) см. рис. 617; $R = 1 \text{ кОм}$; $C = 13 \text{ мкФ}$; $L = 30 \text{ мГн}$.

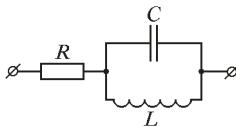


Рис. 615

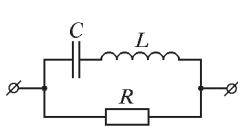


Рис. 616

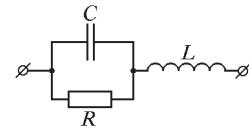


Рис. 617

$$\mathbf{10.29.} r = \frac{R}{1 + (R/X)^2}; \quad x = \frac{X}{1 + (X/R)^2}.$$

$$1) r = \frac{X^2}{R}, \quad x \approx X, \quad r \ll x; \quad 2) r \approx R, \quad x \approx \frac{R^2}{X}, \quad r \gg x.$$

$$\mathbf{10.30.} C = \frac{I}{2\pi f \sqrt{\epsilon^2 - V^2}} \approx 8,4 \text{ мкФ}; \quad \varphi = 60^\circ.$$

$$\mathbf{10.31.} R = 137 \text{ Ом}; \quad L = 1,16 \text{ Гн}.$$

$$\mathbf{10.32.} \epsilon = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2\pi f \epsilon_0 \rho} = 2,5, \text{ где } \epsilon_0 \text{ — электрическая постоянная в СИ.}$$

$$\mathbf{10.33.} \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi^2 f D \mu_0}{16\rho n} = 5 \cdot 10^{-3}, \text{ где } \mu_0 \text{ — магнитная постоянная в СИ.}$$

$$\mathbf{10.34.} L = \frac{V}{4\pi f I} = 1,2 \text{ Гн.}$$

10.35. Искры не будет, если $\operatorname{tg} \omega t = \frac{\omega L}{R}$. При этом ток в первичной цепи

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{J}_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}.$$

$$\mathbf{10.36.} \operatorname{tg} \omega t = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; \quad \mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{J}_0 R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_0 \text{ при } \omega L =$$

$$= \frac{1}{\omega C}.$$

10.37. $\frac{N}{N_0} = \frac{(1+n)(1+2n^2)}{1+4n^2} = 13,1$, где N_0 — мощность при разомкнутой, а N — при замкнутой цепи.

10.38. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{n_1}{1+n_2(n_1+n_2)}$. При $n_1 = n_2 = 10$ получим $\varphi = -3^\circ$. Ток отстает по фазе от напряжения.

10.39. $\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{C \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right)}}$. Резонанс недостижим, если $M^2 = L_1 L_2$.

10.40. $L = \frac{1}{4C} \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right)$; $M = \frac{1}{4C} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right)$.

10.41. $M = -L_2$.

10.42. $M = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_1^2 C_2} - L_2 \right)$.

10.43. $L = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right)$; $M = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right)$.

10.44*: $Q = \frac{\rho c^2}{2\pi^2 f D \delta} = 18$ (СГСЭ).

Решение. Здесь под добротностью катушки понимается добротность колебательного контура, все потери в котором сосредоточены в катушке. Добротность можно определить как

$$Q = \frac{W_0}{\Delta W_{\text{пот}}/(2\pi)} = \omega \frac{W_0}{N_{\text{пот}}} = 2\pi f \frac{W_0}{N_{\text{пот}}},$$

где W_0 — амплитудное значение энергии в катушке, $\Delta W_{\text{пот}}$ — потери энергии за период колебаний, $N_{\text{пот}}$ — мощность потерь энергии. $W_0 = \frac{B_0^2}{8\pi} Sl$, где $S = \frac{\pi D^2}{4}$, B_0 — амплитуда магнитной индукции, l — длина трубы. Потери энергии связаны главным образом с вихревыми токами в стенках трубы. Эти токи — кольцевые. Причина вихревых токов — ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} S \frac{dB}{dt}.$$

Отсюда мощность потерь на нагрев трубы

$$N_{\text{пот}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}^2}{2R} = \frac{1}{2R} \left(\frac{\omega B_0 S}{c} \right)^2.$$

Здесь $R = \rho \frac{\pi D}{l \delta}$ — сопротивление трубы вихревым токам, l — длина трубы. Таким образом,

$$Q = 2\pi f \frac{W_0}{N_{\text{пот}}} = \frac{c^2 R l}{4\pi S \omega} = \frac{\rho c^2}{2\pi^2 f D \delta} = 18.$$

10.45. $N = Q^2 = 10^4$ витков.

10.46. $\frac{Q_2}{Q_1} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = \sqrt{2}$.

10.47. $Q = \frac{2\omega}{\pi\mu\lambda} \left(\frac{c}{\omega r} \right)^2$ (СГСЭ).

10.48. $\omega_{\text{рез}} \approx \frac{c}{l} = 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Более грубая, но прямая оценка дает $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx 10^{10} \text{ с}^{-1}$, где $\lambda = 2l$.

$$\mathbf{10.49.} f_{\text{рез}} = \frac{c}{\pi D} \left[\frac{a}{2d} \ln \left(1 + \frac{2a}{D} \right) \right]^{-1/2} \approx 7 \cdot 10^7 \text{ Гц (СГСЭ).}$$

$$\mathbf{10.50.} \omega_{\text{рез}} = \frac{2c}{a} \sqrt{\frac{d}{\pi a}} = 0,428 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}; f_{\text{рез}} = 682 \text{ МГц (СГСЭ).}$$

10.51. В случаях 1) и 3) $\omega^2 = \frac{1}{LC}$; в случае 2) нет резонанса токов.

$$\mathbf{10.52.} L = R^2 C; \operatorname{tg} \varphi = -\omega R C.$$

$$\mathbf{10.53.} C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \approx 220 \text{ мкФ.}$$

$$\mathbf{10.54.} \omega R C = 1.$$

10.55. $\Omega^2 LC = 1; U = V \frac{CR^2 - L}{CR^2 + R}$. Векторная диаграмма изображена на рис. 618.

10.56. $\Omega^2 LC = 1; \hat{U} = -i \frac{2R\sqrt{LC}}{L + CR^2} \hat{V}$ или $|U| = V \frac{2R\sqrt{LC}}{L + CR^2}$. На рис. 619 изображена векторная диаграмма напряжений цепи, где V_{R_1} — вектор напряжения на левом резисторе R в схеме, V_{R_2} — на правом резисторе R . $\hat{U} = \hat{V}_{R_1} - \hat{V}_{R_2}$.

$$\mathbf{10.57.} \omega R C = 1; V/U = 3.$$

$$\mathbf{10.58.} U_0 = \frac{V_0}{\sqrt{2m^2 + 2m + 5}}.$$

$$\mathbf{10.60.} Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}; \text{ при } \omega > \frac{2}{\sqrt{LC}} \text{ потребления мощности не будет.}$$

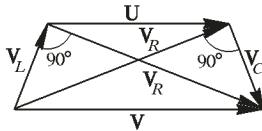


Рис. 618

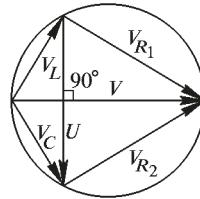


Рис. 619

10.61. В случае a : $\hat{z} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(-\frac{i}{2\omega\sqrt{LC}} + \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega^2 LC}} \right) \rightarrow \sqrt{\frac{L}{C}}$ при $\omega^2 LC \gg 1$;

$$N = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega^2 LC}} \rightarrow \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \sqrt{\frac{C}{4}} \text{ (при } \omega^2 LC \gg 1).$$

В случае b : $\hat{z} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{i\omega\sqrt{LC}}{2} + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} \right) \rightarrow \sqrt{\frac{L}{C}}$ при $\omega^2 LC \ll 1$;

$$N = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} \rightarrow \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ (при } \omega^2 LC \ll 1).$$

Заметим, что мощность $\bar{N} = \frac{1}{2} E_0 J_0 \cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\hat{z}|} \cdot \frac{\operatorname{Re} \hat{z}}{|\hat{z}|} = \frac{E_0^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{Re} \hat{z}}{|\hat{z}|^2}$.

10.62. Амплитуды на входе и выходе одинаковы. Сдвиг фазы выходного напряжения относительно входного определяется формулой $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega RL}{\omega^2 L^2 - R^2}$.

10.63. $\omega L = R$; $U_0 = V_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$.

10.64. $\tau = RC = R_1 C_1$. Достаточные условия баланса моста $R_1 = R$; $C_1 = C$.

10.65. $\frac{\Delta \omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{\pi} (\%)$.

10.66. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}$, где R_2 , L_2 , C_2 — параметры второго контура.

10.67. $\omega^2 LC = 1$.

10.68. $V_1 = V_0 Q / \pi$; $V_2 = V_0 Q$, откуда $V_2/V_1 = \pi$, где Q — добротность контура.

10.69. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{J}R \left[1 + \frac{2\pi\mu_0\mu S N^2 a f \sin 2\pi ft}{Rl_0^2 \left(1 + \frac{a}{l_0} \cos 2\pi ft \right)^2} \right] = 2(1 + 0,08 \sin 2\pi ft) [\text{В}]$.

10.70. Условие возникновения автоколебаний $\hat{Z}_{\text{конт}} + \hat{Z} = 0$, где $\hat{Z}_{\text{конт}}$ — импеданс колебательного контура; $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{a^2 b}{R^2 L}$; $A = \frac{|a|}{R}$.

10.71. Отклонение катушки $\bar{\varphi} = \bar{k} \mathcal{J}_1(t) \mathcal{J}_2(t)$, а коэффициент k определяется соотношением $\varphi_0 = k \mathcal{J}_0^2$. Таким образом, $\bar{\varphi} = \varphi_0 \frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2\mathcal{J}_0^2} = -6^\circ$.

10.72. $r_C = 9,8 \Omega$. $C = \frac{1}{2\pi f X_C} \approx 14,4 \text{ мкФ}$, где $X_C = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - r_C^2} = 219,8 \Omega$.

Решение. Активное сопротивление r_C конденсатора определяется не только сопротивлением R утечки, но и потерями энергии, затрачиваемыми на переполяризацию диэлектрика (сегнетоэлектрика), т. е. полная мощность потерь $N_{\text{пот}} = N_{\text{ут}} + N_{\text{пол}}$, а активное сопротивление $r_C = N_{\text{пот}}/I^2$.

Мощность, рассеиваемая на сопротивлении утечки, $N_{\text{ут}} = U^2/R = 4,84 \text{ Вт}$, а мощность, расходуемая на переполяризацию,

$$N_{\text{пол}} = \oint \frac{E dD}{4\pi} Vf = \frac{S}{4\pi} Vf = 4,97 \text{ Вт},$$

где использовано очевидное выражение для площади петли гистерезиса $\oint E dD = S$.

Итак, полная мощность потерь $N_{\text{пот}} = 9,81 \text{ Вт}$. Импеданс цепи \hat{Z} легко вычислить: $|\hat{Z}| = U/I = 220 \Omega$. Активное сопротивление конденсатора тоже уже можно определить: $r_C = N_{\text{пот}}/I^2 = 9,81 \Omega$. Реактивное сопротивление X_C конденсатора $X_C = \sqrt{Z^2 - r_C^2} = 219,8 \Omega$, откуда искомая емкость $C = 1/(\omega X_C) \approx 14,4 \text{ мкФ}$.

10.73. $R = 12 \Omega$; $L = \frac{X_L}{2\pi f} = 0,7 \text{ Гн}$, где $X_L = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = 219,7 \Omega$.

Указание. Площадь петли гистерезиса $S = \oint (\mathbf{H} d\mathbf{B})$ определяет мощность потерь на перемагничивание ферромагнетика $N_{\text{пер}} = \frac{S}{4\pi} Vf$ (СГСЭ).

10.74. $F = \frac{6\pi^4 \omega^2 L r^8 \mathcal{J}_0^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \frac{1}{l^7}$. Сила — отталкивающая.

Если $\omega L \gg R$, то $F \approx \frac{6\pi^4 r^8 \mathcal{J}_0^2}{L} \frac{1}{l^7}$.

В другом предельном случае $\omega L \ll R$ имеем $F \approx \frac{6\pi^4 \omega^2 L r^8 \mathcal{J}_0^2}{R^2} \frac{1}{l^7}$.

10.75. $\mathbf{M} = \frac{\omega^2 S^2 LB_0 \cos \varphi}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} [\mathbf{B}_0 \mathbf{n}]$. Возможны два положения равновесия:

- 1) плоскость кольца перпендикулярна к магнитному полю (неустойчивое равновесие); 2) плоскость кольца параллельна магнитному полю (устойчивое равновесие).

При $\omega L \gg R$ $M \equiv M_1 \approx \frac{B_0^2 S^2}{2L} \sin \varphi \cos \varphi$.

При $\omega L \ll R$ $M \equiv M_2 \approx \frac{\omega^2 B_0^2 S^2 L}{2R^2} \sin \varphi \cos \varphi = M_1 \left(\frac{\omega L}{R} \right)^2$.

Во втором случае вращающий момент меньше.

10.76. $\Delta f = \frac{f \Delta L}{2L} = 5 \cdot 10^3$ Гц, где $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\delta}{d} = 10^{-3}$ — изменение индуктивности катушки.

10.77. $N = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi f S B_{\text{нac}}} \approx 990$ витков.

10.78. $R_{\text{эфф}} = \frac{2\pi^3 \lambda \omega^2 N^2}{c^4 l} [r^4 - (r - \delta)^4]$ (СГСЭ).

10.79. $\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$; $A = \frac{L(\varepsilon - 1)V_0^2}{16\pi dk} Q$.

10.80. $A \approx \frac{\pi(\mu - 1)n^2 S \mathcal{J}_0^2}{3c^2 m \omega_0^2}$ (вынужденные колебания стержня вдали от резонанса).

10.81. $Q = \sqrt{\frac{R}{2r}} \approx 30$.

10.82. 1) $Q_1 = \frac{1}{2\pi f_1 C R} \approx 90$; $Q_2 = \frac{1}{2\pi f_2 C R} \approx 80$. 2) $L = \frac{f_2^2}{(f_2^2 - f_1^2) 16\pi^2 C f_1^2} = 0,1 \text{ Гн}$; $M = \frac{2f_1^2 - f_2^2}{(f_2^2 - f_1^2) 16\pi^2 C f_1^2} = 0,06 \text{ Гн}$.

10.83. $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

10.84. $V_{\text{max}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L - \frac{M^2}{L_1}}{C}} \frac{M}{L_1} \mathcal{E}_0$; $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L - \frac{M^2}{L_1}}{C}}$.

10.85. $K(\Omega) = \frac{x}{\sqrt{1 + 7x^2 + x^4}}$, где $x = \Omega R C$.

10.86. 1) $\hat{K}(\Omega) = \frac{1}{3ix + 1 - x^2}$, где $x = \omega R C$; 2) $\omega_0 = \frac{1}{RC}$; 3) $\left| \frac{V_{\text{вых}}}{V_{\text{вх}}} \right| = \frac{1}{3}$.

$$10.87. 1) \hat{K}(\omega) = \frac{R}{R + \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}}; \quad |\hat{K}(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left[\frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}\right]^2}};$$

2) $V_{\text{вых}} = |\hat{K}(\omega)| V_{\text{bx}}$. График этой зависимости приведен на рис. 620;

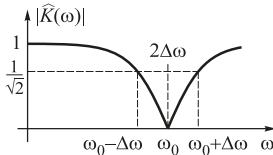


Рис. 620

$$3) \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{1 + 2\omega_0 RC} \approx \frac{1}{200}; \quad \Delta\omega = 50 \text{ с}^{-1}.$$

$$10.88. f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 4 \text{ кГц}; \quad R_{\text{рез}} = \frac{2L}{CR} = 2 \text{ Ом}; \quad Q = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 50.$$

$$10.89. 1) \operatorname{tg} [\arg \hat{K}(\omega)] = \frac{1 - x^2}{2x}, \text{ где } x = \frac{\omega L}{R}. \text{ Искомое } x = \frac{\omega L}{R} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,27; \quad 2) \frac{V_{\text{вых}}}{V_{\text{bx}}} = \frac{x}{1 + x^2} = 0,25.$$

$$10.90. 1) \Delta\varphi = \arg \hat{K}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{1 - x^2}{2x}, \text{ где } x = \omega RC. \text{ Искомое } x = \sqrt{2} - 1;$$

$$2) \frac{V_{\text{вых}}}{V_{\text{bx}}} = \frac{x}{1 + x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,353.$$

10.91. $\mathcal{J}_1 = Q\mathcal{J}_0 = 100 \text{ А}$, т. е. ток через соленоид превышает амплитудное значение переменного напряжения в Q раз.

$$10.92. L = 100 \text{ мГн}; \quad C = 10 \text{ мкФ}; \quad \delta = 10 \text{ с}^{-1}; \quad Q = 50; \quad \mathcal{E} = 2 \text{ В}; \quad R = 200 \text{ Ом}.$$

$$10.93. \omega_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}; \quad Q = 50; \quad \delta = 20 \text{ с}^{-1}; \quad L = 50 \text{ мГн}; \quad C = 5 \text{ мкФ}; \quad R = 2 \text{ Ом}.$$

§ 11. Элементы спектрального анализа. Автоколебания. Параметрический резонанс. Шумы*)

$$11.1. 1) f(t) = A \cos^2 \omega_0 t = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cos 2\omega_0 t;$$

$$2) f(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t \approx \\ \approx A \cos \omega_0 t + \frac{mA}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t] + \frac{mA}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t];$$

$$3) f(t) = A \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t) \approx \\ \approx A \cos \omega_0 t + \frac{mA}{2} \cos \left[(\omega_0 - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{mA}{2} \cos \left[(\omega_0 + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right].$$

$$11.2. 1) g(t) \sim A^2(1 + m \cos \Omega t)^2; \text{ при } m \ll 1 \quad g(t) \sim A^2(1 + 2m \cos \Omega t).$$

$$2) g(t) \sim A^2 = \text{const.}$$

$$3) g(t) \sim (mA)^2 + (mA)^2 \cos 2\Omega t.$$

$$4) g(t) \sim A^2(1 + 2m \cos \Omega t).$$

*) Ответы и указания даны в СИ, кроме особо оговоренных случаев.

11.3. а) $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega_n t)$, где $C_n = A \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T}$, $\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$;

б) $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$;

в) $g(\omega) = A \frac{\tau}{2} \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\tau/2]}{(\omega - \omega_0)\tau/2} + A \frac{\tau}{2} \frac{\sin[(\omega + \omega_0)\tau/2]}{(\omega + \omega_0)\tau/2}$, где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.*)

11.4. $\mathcal{J}(t) = \frac{2e}{\tau^2} t$. Полагая $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(t) e^{-i\omega t} dt$, получим $g(\omega) =$

$$= \frac{2e}{(\omega\tau)^2} (e^{-i\omega\tau} + 1) - \frac{2e}{i\omega\tau} e^{-i\omega\tau}, \text{ или иначе (см. сноску к задаче 11.3) } g(\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(t) e^{i\omega t} dt = \frac{e}{\pi(\omega\tau)^2} (e^{i\omega\tau} - 1) + \frac{e}{i\pi\omega\tau} e^{i\omega\tau}.$$

11.5. $\mathcal{J} = \begin{cases} -\mathcal{J}_0 & \text{при } -\tau < t < 0, \\ \mathcal{J}_0 & \text{при } 0 < t < \tau, \end{cases}$ где $\tau = \frac{d}{v_0}$; $\mathcal{J}_0 = \frac{ev_0}{d}$.

Спектр сигнала $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{2ev_0}{i\omega d} \left(1 - \cos \frac{\omega d}{v_0} \right)$, или иначе

$$(см. сноску к задаче 11.3) g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(t) e^{i\omega t} dt = \frac{iev_0}{\pi\omega d} \left(1 - \cos \frac{\omega d}{v_0} \right).$$

11.6. Можно. Это электрический аналог опыта Мандельштама. Амплитуда колебаний в контуре максимальна при $\Omega = |\omega_0 - \omega|$.

11.7. Частотные характеристики фильтров (рис. 621) $\hat{\lambda}_1(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}$;
 $\hat{\lambda}_2(\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}$,

1) $g(t) \approx f(t)$, если $\omega_{\max} \ll \frac{1}{RC}$ (дифференцирующая цепочка).

2) $g(t) \approx f(t)$, если $\omega_{\max} \gg \frac{1}{RC}$ (интегрирующая цепочка).

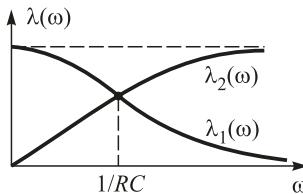


Рис. 621

11.8. 1) $A_1 = \frac{\omega_0}{2\delta} \left(1 + \frac{m}{2} \right) A$; 2) $A_2 = \frac{\omega_0 + 2\Omega}{2\delta} \frac{mA}{4}$.

11.9. Резонанс наступает на частотах ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$; $m = \frac{2\sqrt{2}}{n} \approx 0,7$.

*) Существует и другое, принятое в спектроскопии определение интеграла Фурье: $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} dt$, где $g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$.

$$\mathbf{11.10.} \quad \mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}_0}{2R} \cos 2\Omega t; \quad \mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2(R_1 + R)}.$$

$$\mathbf{11.11.} \quad \mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}_0}{2R}; \quad \mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{E}_0 \cos(2\Omega t - \varphi)}{2\sqrt{(R_1 + R)^2 + 1/(2\Omega C)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2(R + R_1)\Omega C_1}.$$

11.12. Спектр выходного напряжения содержит три компоненты на частотах ω , $\omega - \Omega$, $\omega + \Omega$ с амплитудами $V_0/2$, $\sqrt{3}aV_0/4$ и $\sqrt{3}aV_0/4$ соответственно. Боковые компоненты сдвинуты по фазе на $(5/6)\pi$ относительно основной частоты.

11.13. Спектр выходного напряжения содержит компоненту основной частоты ω с амплитудой $V_0/\sqrt{2}$ и две боковые компоненты на частотах $\omega \pm \Omega$ с амплитудами $aV_0/4$, сдвинутые по фазе на $\pi/4$ относительно основной частоты.

$$\mathbf{11.14.} \quad V_{\text{вых}} = V_0[1 + m_1 \cos(\Omega t + \varphi)] \cos \omega_0 t, \quad \text{где } m_1 = \frac{m}{\sqrt{1 + Q^2 \frac{4\Omega^2}{\omega_0^2}}} \approx 0,89m; \\ \operatorname{tg} \varphi \approx Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \approx 0,5.$$

$$\mathbf{11.15.} \quad \frac{V_2^{\text{вых}}}{V_1^{\text{вых}}} = \frac{2}{3Q} \frac{V_2^{\text{вх}}}{V_1^{\text{вх}}} \approx 0,0047, \quad \text{где } V_2^{\text{вх}} = \frac{A}{2\pi} \quad \text{— вторая гармоника входной последовательности прямоугольных импульсов амплитудой } A, \quad V_1^{\text{вх}} = \frac{A}{\pi\sqrt{2}} \quad \text{— первая гармоника.}$$

$$\mathbf{11.16.} \quad V_R(t) = \frac{1}{2} |\cos \omega_0 t|.$$

$$\mathbf{11.17.} \quad V_R(t) = \frac{1}{2} |\cos \omega_0 t|.$$

$$\mathbf{11.18.} \quad \mathcal{J}_1^{\max} \approx 0,71 \text{ А.}$$

Решение. Разложим в спектр входной сигнал генератора. По условию достаточно определить две первых гармоники V_1 и V_2 . По теореме Фурье о представлении периодической функции $f(t)$ в виде ряда

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t),$$

$$\text{где } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_0 nt) dt, \quad b_n =$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_0 nt) dt. \quad \text{В нашем случае входной сигнал — четная функция. Поэтому } b_n \equiv 0 \text{ для любого } n. \quad \text{Определим } a_1 = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{2};$$

$a_2 = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \cos(2\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) dt = \frac{2}{3\pi}$. Поскольку амплитуда входного сигнала $V = 100$ В, то амплитуды гармоник равны $V_1 = \frac{1}{2}V$, $V_2 = \frac{2}{3\pi}V$. Основная (первая) гармоника представляет собой синусоидальный сигнал с частотой $\omega = \omega_0$. Контур L , C , R настроен на первую гармонику по условию. При резонансе $\omega_1 L = \frac{1}{\omega_1 C} = \rho_1$. Добротность контура $Q = \frac{\rho_1}{R}$. При резонансе со- противление контура имеет активный характер, поэтому $\mathcal{J}_1 = \frac{V_1}{R+r}$. Однако

вторая гармоника — вне резонанса, точнее, вдали от него: $R + r \ll \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}$. Таким образом,

$$\mathcal{J}_2 = \frac{V_2}{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}} = \frac{V_2}{2\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1} = \frac{2V_2}{3\rho_1}.$$

Отношение гармоник тока

$$\beta = \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \frac{9QR\pi}{8(R+r)},$$

откуда $R = \frac{8\beta r}{9\pi Q - 8\beta}$. Считая, что β равно как минимум 100, определим $R \approx 20$ Ом. Понятно, что это значение сопротивления R определяет максимально возможное значение амплитуды первой гармоники тока

$$\mathcal{J}_1^{\max} = \frac{V_1}{r+R} = \frac{V}{2(r+R)} = \frac{5}{7} \approx 0,71 \text{ А.}$$

11.19. $\mathcal{J}_1^{\max} = \frac{V_1}{r+R} = 0,47 \text{ А, где } V_1 = \frac{\sqrt{2}V}{\pi}, R = \frac{2\beta r}{3\sqrt{2}Q - 2\beta} = 45 \text{ Ом.}$

11.20. $\frac{V_4^{\text{вых}}}{V_0^{\text{вых}}} = \frac{V_4^{\Delta}}{V_0^{\Delta} \sqrt{1 + \frac{\omega_4^2 L^2}{R^2}}} = \frac{3}{10}, \text{ где } \omega_4 = 4\omega^2 \text{ — четвертая гармоника}$

(максимальная частота напряжения на выходе детектора V^{Δ}).

11.21. $\frac{V_4^{\text{вых}}}{V_0^{\text{вых}}} = \frac{V_4^{\Delta}}{V_0^{\Delta} \sqrt{1 + 16\omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{6}.$

11.22. $n = \frac{UT}{Re} \approx 2 \cdot 10^7.$

Указание. Требуется показать, что прибор будет фактически регистрировать напряжение, равное нулевой компоненте разложения входного напряжения в ряд Фурье $V_0 = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt$.

11.23. $i = \frac{\omega S}{Rc} \sqrt{\mu_1 \mu_2} A^2 \sin 2\omega t + \frac{\mu_2 \omega S}{4Rc} A^3 (\cos \omega t - \cos 3\omega t)$, где $A = \frac{2N}{cr} \mathcal{J}_0$ (СГСЭ). Таким образом, в спектре тока — три гармоники с частотами ω , 2ω и 3ω .

11.24. $i = \frac{1}{c} S \omega^2 C (\mu_1 H_0 - \frac{1}{4} \mu_2 H_0^3) \sin \omega t + \frac{1}{c} \frac{3S}{4} C \omega^2 \mu_2 H_0^3 \sin 3\omega t$, где $H_0 = \frac{2N\mathcal{J}_0}{cr}$ (СГСЭ).

11.25. $V_{\text{вых}} = V_0 \cos(\omega t - \frac{2m\omega L_0}{R} \cos \Omega t - \alpha)$, где $\alpha = \frac{2\omega L_0}{R} \ll 1$. Спектр выходного напряжения содержит три компоненты на частотах ω , $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ с амплитудами V_0 , $2m\omega L_0 V_0 / R$, $2m\omega L_0 V_0 / R$ и фазами 0 , $-\pi/2$ и $-\pi/2$ соответственно.

11.26. $V_{\text{вых}} = V_0 \cos(\omega t + \frac{2m}{\omega C_0 R} \cos \Omega t + \alpha)$, где $\alpha = \frac{2}{\omega C_0 R} \ll 1$. Спектр выходного напряжения содержит три компоненты на частотах ω , $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$

с амплитудами V_0 , $2mV_0/(\omega C_0 R)$, $2mV_0/(\omega C_0 R)$ и фазами 0 , $\pi/2$ и $\pi/2$ соответственно.

11.27. Вольтметр измеряет \bar{V} . С диодом $V = \frac{\sqrt{2}}{\pi} V_{\text{эфф}} \approx 100$ В, где $V_{\text{эфф}}$ — действующее значение напряжения переменного тока (220 В).

11.28. Вольтметр измеряет $V_{\text{эфф}} = \sqrt{\bar{V}^2}$. С диодом $V = \frac{V_{\text{эфф}}}{\sqrt{2}} \approx 155$ В.

11.29. $\frac{\delta V}{V_0} = \frac{1}{fRC} \approx 0,02$.

11.30. $\frac{\delta \mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = 1 - e^{-T/\tau} \approx \frac{T}{\tau} = \frac{R_1}{fL} = 0,02$.

11.31. Амплитуда сохранится близкой к максимальному значению в течение времени, необходимого для сдвига $\omega(t)$ на полуширину резонансной кривой $t \approx \frac{R}{4aL}$. Максимум будет достигнут через $t_1 = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} - \Omega \right)$.

11.32. Через время $t \geq \frac{R}{4aL}$ боковые гармоники сместятся относительно резонансной частоты на ширину резонансной кривой, т. е. через это время боковые гармоники практически исчезнут.

11.33. $V(t) \approx \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[Qm \sin(\omega - \Omega)t + \frac{\omega_0}{\Omega} \cos \omega t \right]$.

11.34. $V(\omega_0) = Q\mathcal{E}_0 e^{-i\frac{\pi}{2}}$; $V(\omega_0 + \Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} mQ\mathcal{E}_0 e^{\frac{3\pi}{4}i}$;

$V(\omega_0 - \Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} mQ\mathcal{E}_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

11.35. $C = \frac{4\tau_0^2}{\pi^2 L_0} = 10^{-9}$ Ф; $R_{\max} = \frac{\Delta L}{4\tau_0} = 10$ Ом.

11.36. $|\Delta C| > \frac{RC^2 T}{2\tau^2} \approx 5 \cdot 10^{-12}$ Ф, где $T = 2\pi\sqrt{LC} \approx 4 \cdot 10^{-6}$ с. $\left| \frac{\Delta C}{C} \right| \approx 10^{-2}$.

11.37. $R_{\max} = S \frac{\sqrt{LL_{\text{cb}}}}{C} = 8$ Ом. При $R = 2R_{\max} = 16$ Ом, $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 12$ (без обратной связи). При наличии обратной связи $Q_1^* = 25$ (положительная связь), $Q_2^* = 8$ (отрицательная связь).

11.38. $\Delta \mathcal{J}_{\min} \approx \sqrt{\frac{2e\mathcal{J}}{\tau}} = 1,7 \cdot 10^{-11}$ А.

11.39. $l_2 = l_1 \sqrt{T_1/T_2} \approx 8$ км. Здесь T_1 — комнатная температура.

11.40. Имея в виду, что это — дифференцирующая цепочка, $U(t) = \frac{L}{R} \frac{dV}{dt} = A(t) \cos \left(\omega_0 t + m \cos \Omega t + \frac{\pi}{2} \right)$, где $A(t) = \frac{V_0 L \omega_0}{R} \left[1 + m \frac{\Omega}{\omega_0} \cos \left(\Omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]$. Глубина амплитудной модуляции равна $\frac{m\Omega}{\omega_0}$.

11.41. $\hat{H}(\omega) = \left(1 + \frac{i\omega L}{R} \right)^{-1}$ — частотная характеристика цепочки.

$\frac{U(\omega_0 + \Omega)}{U(\omega_0 - \Omega)} = \frac{|H(\omega_0 + \Omega)|}{|H(\omega_0 - \Omega)|} = \frac{\sqrt{41}}{5}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} \hat{H}(\omega)}{\operatorname{Re} \hat{H}(\omega)} = -\frac{\omega L}{R}$ — фазовая характеристика.

ристика цепочки; $\operatorname{tg} \varphi(\omega_0 + \Omega) = -\frac{5}{4}$; $\operatorname{tg} \varphi(\omega_0 - \Omega) = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{tg} \varphi(\omega_0) = -1$, $\Delta \varphi(\omega_0 + \Omega) = \arctg(-\frac{1}{9})$; $\Delta \varphi(\omega_0 - \Omega) = \arctg(-\frac{1}{7})$.

11.42. Имея в виду, что это — дифференцирующая цепочка, $U(t) \approx RC \frac{dV}{dt} = A(t) \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t + \frac{\pi}{2})$, где $A(t) = V_0 RC \omega_0 \left[1 + m \frac{\Omega}{\omega_0} \cos(\Omega t + \frac{\pi}{2}) \right]$.

Глубина амплитудной модуляции равна $\frac{m\Omega}{\omega_0}$.

11.43. $\hat{H}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}$ — частотная характеристика цепочки; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} \hat{H}(\omega)}{\operatorname{Re} \hat{H}(\omega)} = -\omega RC$ — фазовая характеристика цепочки. Отношение амплитуд боковых гармоник $\frac{U(\omega_0 + \Omega)}{U(\omega_0 - \Omega)} = \frac{|H(\omega_0 + \Omega)|}{|H(\omega_0 - \Omega)|} = \frac{5}{\sqrt{41}}$; $\operatorname{tg} \varphi(\omega_0) = -1$; $\operatorname{tg} \varphi(\omega_0 + \Omega) = -\frac{5}{4}$; $\operatorname{tg} \varphi(\omega_0 - \Omega) = -\frac{3}{4}$.

11.44. 1) Контур настроен на 7-ю гармонику входного сигнала $C_7 = \frac{U_0}{7\pi}$. Искомая добротность $Q = 28\pi \approx 88$. 2) Ближайший резонанс наступает на 5-й гармонике. При этом амплитуда напряжения $V'_C/V_C = 7/5$ (возрастает в 1,4 раза).

$$\text{11.45. 1) } V_C = \frac{2Q\mathcal{E}}{5\pi} = 6,4 \text{ В. 2) } \Omega_1 = 3\Omega; \quad V'_C = \frac{2Q\mathcal{E}}{3\pi} = 10,5 \text{ В.}$$

$$\text{11.46. } V(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} - 10\mathcal{E}_0 \sin \omega_0 t - \frac{\mathcal{E}_0}{6} \cos 2\omega_0 t.$$

$$\text{11.47. } V(t) = -100\mathcal{E}_0 \sin \omega_0 t + m \frac{\mathcal{E}_0}{6} \sin 2\omega_0 t.$$

$$\text{11.48. } \frac{\mathcal{E}_2^{\text{вых}}}{\mathcal{E}_1^{\text{вых}}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{V_2^{\text{вых}}}{V_1^{\text{вых}}} = \frac{1}{6Q} = \frac{1}{600}.$$

11.49. $\frac{V_1}{V_3} = 24Q = 2400$. После уменьшения емкости конденсатора в 9 раз:

$$\frac{V'_1}{V'_3} = \frac{9}{8Q} = 0,011. \text{ Отсюда искомое отношение } \frac{V_1/V_3}{V'_1/V'_3} \approx 210000.$$

$$\text{11.50. } Q^* = \frac{Q}{1 + |M|SQ\omega_0} = 200.$$

$$\text{11.51. } Q^* = \frac{Q}{1 - \frac{Q}{\pi} \frac{\Delta L}{L}} = 64.$$

11.52. 1) $\epsilon_{\min} = \pi R_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = 6,3 \cdot 10^{-3}$, где $R_0 = 2 \text{ Ом}$ — сопротивление лампочки на линейном участке ее вольт-амперной характеристики (ВАХ).

2) Если $\epsilon = 3\%$, то $R = \frac{\epsilon}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} = 9,55 \text{ Ом}$ задает нагрузочную прямую $V = \mathcal{J}R$. По заданной на графике вольт-амперной характеристике находим действующее значение напряжения на лампочке $U_{\text{л}} = 1,75 \text{ В}$. Его амплитудное значение $2,5 \text{ В}$. Амплитуда тока $\mathcal{J}_0 = \sqrt{2} I = 0,26 \text{ А}$.

$$\text{11.53. 1) } \epsilon_{\min} = \pi R_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = 6,3 \cdot 10^{-3} \quad (0,63\%), \quad \text{где } R_0 = \frac{2V_0}{\mathcal{J}_0} = 2 \text{ Ом};$$

2) $V_{\max} = \mathcal{J}_{\max} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 100 \text{ В},$ где $\mathcal{J}_{\max}^2 = \left(\epsilon \sqrt{\frac{L}{C}} - 1\right) \frac{8\mathcal{J}_0^2}{3\pi R_0} \approx 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ А}^2,$ т. е. $\mathcal{J}_{\max} \approx 0,1 \text{ А}.$

11.54. 1) $\epsilon_{\min} = 2\pi A \sqrt{\frac{C}{L}} = 6,3 \cdot 10^{-3}$ (0,63%). Здесь $R_{\min} = A$ (малые колебания). 2) При $\epsilon = 5\epsilon_{\min} = 3,15\%$ амплитуда колебаний тока установится при значении сопротивления н. э., равном $R = \frac{\epsilon}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} = 10 \text{ Ом}.$ $\mathcal{J}_0 = (R - A) \frac{\sqrt{2}}{B} \approx 2,8 \text{ А}.$

11.55. Эквивалентная индуктивность $L_{\text{экв}} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}.$ Подкачка энергии в контур осуществляется за счет изменения $L_{\text{экв}}$ при $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\max}$, т. е. $\Delta W = \Delta \left(\frac{\Phi^2}{2L_{\text{экв}}} \right).$ Если $Q = \frac{1}{2} \mathcal{J}_m^2 \frac{RT}{2}$ — потери за период изменения индуктивности, то условие возбуждения колебаний $\Delta W \geq Q.$ Отсюда следует, что $\Delta M \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \pi R \sqrt{LC}.$

11.56. $\alpha_0 = 45^\circ$, накачка энергии в контур происходит дважды за период колебаний при уменьшении угла, т. е. когда $\Delta\alpha < 0.$ $R \leq \left(\frac{2\pi N n S_0}{a} \right)^2 \frac{|\Delta\alpha|}{\pi L_0 \sqrt{LC}}.$ Заметим, что здесь $L_{\text{экв}} = L - \frac{M^2}{L_0} \approx L$ (по условию задачи).

11.57. $\alpha_0 = 45^\circ$, накачка энергии в контур происходит дважды за период при $\mathcal{J} = \mathcal{J}_m$ и при $\Delta\alpha < 0.$ $|\Delta\alpha| \geq \frac{\pi R \sqrt{LC} L_0}{\left(\frac{4\pi N n S_0}{cl} \right)^2}.$

§ 12. Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны. Волноводы и резонаторы. Плазма

$$12.2^*: \frac{W_{\text{M}}^{\max}}{W_{\text{9}}^{\max}} \approx 0,5 \cdot 10^{-14}.$$

Решение. Электрическая энергия (в гауссовой системе)

$$W_{\text{9}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{2d\mathcal{J}_0^2 \sin^2 \omega t}{\epsilon \omega^2 R^2}.$$

Магнитное поле внутри конденсатора создается током смещения. На расстоянии r от оси конденсатора оно найдется из соотношения

$$H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}_{\text{cm}} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \mathcal{J},$$

откуда

$$H = \frac{2r}{cR^2} \mathcal{J} = \frac{2r}{cR^2} \mathcal{J}_0 \cos \omega t.$$

Магнитная энергия, локализованная в конденсаторе,

$$W_{\text{M}} = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{\mu d\mathcal{J}_0^2 \cos^2 \omega t}{4C^2}.$$

Отношение максимальных энергий

$$\frac{W_M^{\max}}{W_9^{\max}} = \frac{\epsilon\mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2c} \right)^2 \approx 0,5 \cdot 10^{-14}.$$

$$12.3. W_M = \frac{2\pi^2 \mu R^2 N^2}{c^2 l} \mathcal{J}_0^2 \cos^2 \omega t; \quad W_9 = \frac{\epsilon \mu^2 \pi^2 \omega^2 R^4 N^2}{4c^4 l} \mathcal{J}_0^2 \sin^2 \omega t; \quad \frac{W_9^{\max}}{W_M^{\max}} = \frac{\epsilon \mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2c} \right)^2 \approx 1,3 \cdot 10^{-15}.$$

12.4* $H = 0$.

Решение. Если σ — поверхностная плотность электричества на положительной обкладке, то $D = 4\pi\sigma$ и, следовательно, $j_{cm} = \frac{1}{4\pi} \dot{D} = \dot{\sigma}$. По закону сохранения электрического заряда $j = \dot{\sigma}$. Следовательно, $j_{полн} = j + j_{cm} = 0$. Магнитное поле в конденсаторе равно нулю.

$$12.5* H = \frac{2\mathcal{J}}{cr} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Решение. В силу симметрии магнитные силовые линии будут коаксиальными окружностями с общей осью, совпадающей с осью конденсатора. Поле H найдется по формуле

$$\oint (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = 2\pi r H = \frac{4\pi}{c} (\mathcal{J} + \mathcal{J}_{cm}),$$

где $\mathcal{J}_{cm} = \mathcal{J}r^2/R^2$ — ток смещения, пронизывающий круг радиусом r . В результате получим ответ.

12.6. $H = \frac{\epsilon\omega r}{2cd} V_0 \cos \omega t$, где r — расстояние от оси конденсатора. Магнитные силовые линии имеют форму коаксиальных окружностей с общей осью, совпадающей с осью конденсатора.

12.7. $H_0 = \frac{\omega}{c} \frac{V_0 r}{2d} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Э}$; $B_0 = H_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Гс}$; $H_1 = \epsilon H_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Э}$; $B_1 = \mu H_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Гс}$.

12.8. Поток энергии равен нулю (см. задачу 12.5).

12.9. Поток электрической энергии вытекает из конденсатора через его края, втекает внутрь провода и там превращается во внутреннюю (тепловую) энергию.

12.10. 1) $j_{cm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = 0$; 2) $j_{cm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \frac{V_u}{d^2}$. 3) Изменится знак тока смещения.

$$12.11* \mathbf{P} = \frac{V}{4\pi c} [\mathbf{EB}]; \quad |\mathbf{P}| \approx 0,88 \cdot 10^{-4} \text{ г} \cdot \text{см}/\text{с}.$$

Решение. Ввиду осевой симметрии полный электромагнитный импульс поля равен нулю. В результате разрядки конденсатора он измениться не может. Поэтому не может измениться и полный механический импульс системы. Но в результате разрядки электромагнитный импульс, локализованный в конденсаторе, уменьшается на $\frac{V}{4\pi c} [\mathbf{EB}]$, а электромагнитный импульс поля вне конденсатора увеличивается на такую же величину. В соответствии

с этим конденсатор приобретает механический импульс $\frac{V}{4\pi c} [\mathbf{EB}]$, равный $\sim 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}/\text{с}$. Соленоид получит такой же, но противоположно направленный импульс. Искру можно рассматривать как ток проводимости. Если бы всё электрическое поле конденсатора было локализовано только внутри него, то магнитное поле искры вне конденсатора было бы полностью компенсировано магнитным полем тока смещения. На самом деле часть тока смещения проходит вне конденсатора и создает там магнитное поле. Это магнитное поле действует на токи, текущие в соленоиде, и меняет импульс последнего. Решение остается в силе, если разорвать цепь питания батареи, оставив заряженным конденсатор.

$$12.12. P = \frac{E_0 V B}{4\pi c} = 10^{-6} \text{ г} \cdot \text{см}/\text{с}.$$

$$12.13. \varphi_0 = \frac{QBR^2}{2c\sqrt{Jf}} = 10^4 \text{ рад.}$$

$$12.14. \mathcal{J} = \frac{2\pi\hbar c^2}{Le} = 124 \text{ ед. СГСЭ} \approx 0,041 \text{ мкА.}$$

$$12.15. Q = \frac{2\pi\hbar}{eR} \approx 12,4 \cdot 10^{-6} \text{ ед. СГСЭ} \approx 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ Кл.}$$

12.16* Не является.

Решение. Токи Фуко в меди должны быть меньше, чем в железе, потому что магнитная проницаемость меди меньше, чем у железа, более чем в 1000 раз. $\mathcal{J}_{\text{Фуко}} \propto E/\rho \propto \frac{|\text{rot } \mathbf{E}|}{\rho}$, где ρ — удельное электрическое сопротивление. Согласно закону Фарадея $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, где μ — магнитная проницаемость. Так как $\mu_{\text{Cu}} \sim 1$, $\rho_{\text{Cu}} \approx 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$; $\mu_{\text{Fe}} \approx 1000$; $\rho_{\text{Fe}} \approx 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, то

$$\frac{\mathcal{J}_{\text{Фуко Fe}}}{\mathcal{J}_{\text{Фуко Cu}}} = \frac{\mu_{\text{Fe}} \rho_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{Cu}} \rho_{\text{Cu}}} \approx 10000.$$

Таким образом, железный цилиндр будет нагреваться значительно быстрее медного вне зависимости от наличия или отсутствия гистерезиса.

$$12.17. \frac{\mathcal{E}_{\text{си}}}{\mathcal{E}_0^{\text{си}}} = \frac{1}{2} \frac{\pi \mu \omega a^2}{c^2}.$$

12.18. $B_0 \approx 840 \text{ Гс}$. Толщина скин-слоя $\delta = 1,56 \text{ мм}$ мала по сравнению с толщиной «блина» $h = 2,2 \text{ см}$ (в поле). Таким образом, поле вне ртути похоже на поле сверхпроводника такой же формы. Сила давления поля $F_{\text{маг}} = 2\pi rhP_{\text{маг}}$, где $P_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{8\pi}$. Сила магнитного давления с силами поверхностного натяжения уравновешивает силу тяжести. Отсюда и вычисляется искомое поле B_0 .

$$12.19. \mathcal{J} = \frac{2\omega^2 a^2 b}{c^2 d R} V_0 \cos \omega t.$$

$$12.20. 1) E = \frac{\pi r_0}{c^2} \frac{d\mathcal{J}}{dt} n = 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ В/м};$$

$$2) E_1 = E; D_1 = 2D.$$

12.21. $\Phi(t) = \Phi(0) - a\pi r^2 t + L \frac{a\pi r^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})$ (в СИ), в СГСЭ постоянная времени $\tau = \frac{L}{c^2 R}$.

$$\mathbf{12.22.} Q = \lambda \pi h \left(\frac{\pi v B_0 a^2}{2c} \right)^2 \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ эрг/с} = 0,11 \text{ Вт.}$$

$$\mathbf{12.23.} V_0 = \frac{4\pi d \mathcal{J}_0}{\epsilon S \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{4\pi}{\rho \epsilon}\right)^2}}.$$

$$\mathbf{12.24.} W = \left(\frac{\pi a^3}{c^2 S} \right)^2 \frac{Q_0^2}{2r\tau^3}.$$

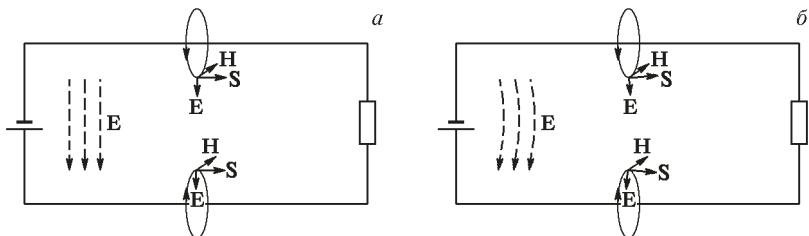


Рис. 622

12.25. См. рис. 622 (*a* — линия без потерь; *b* — линия с конечным сопротивлением проводов). При наличии сопротивления проводов существует падение напряжения вдоль проводов, а значит, на поверхности проводов и в пространстве между проводами существует тангенциальная составляющая вектора \mathbf{E} , вследствие чего вектор Пойнтинга отклонён в сторону проводов. Часть энергии течет к нагрузке, а часть — в провода и превращается в тепло.

12.26. 1) См. рис. 623; 2) $S \cdot 2\pi rl = \frac{c}{4\pi} EH \cdot 2\pi rl = \frac{1}{4\pi} \frac{V}{l} \frac{2\mathcal{J}}{r} 2\pi rl = V\mathcal{J}$.

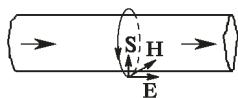


Рис. 623

12.27. $S_z = \frac{\mathcal{J}^2 R}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}$; $S_\varphi = \frac{\mathcal{J}^2 R n}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}$. Поток энергии через сечение катушки направлен в сторону резистора и равен $W = \int_{r_1}^{r_2} S_z \cdot 2\pi r dr = \mathcal{J}^2 R$.

$$\mathbf{12.28.} W = \frac{\mu_0 N^2 \mathcal{E}^2 \pi r^2}{2lR^2} = \frac{L\mathcal{J}^2}{2} \text{ (СИ).}$$

12.29. Модуль вектора Пойнтинга вне пучка $S_{\text{ex}} = \frac{\pi R^4 (ne)^2}{r^2} \sqrt{\frac{2W}{m}}$; модуль вектора Пойнтинга внутри пучка $S_{\text{in}} = \pi r^2 (ne)^2 \sqrt{\frac{2W}{m}}$. Направление вектора в обоих случаях — в направлении вектора скорости электронов.

12.30. $\mathbf{S} = \frac{\pi r^2 j^3}{nec^2} \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z — единичный вектор в направлении тока.

12.31. Вне плоского слоя $S_{\text{ex}} = 4\pi(nea)^2 \sqrt{\frac{2W}{m}}$; внутри плоского слоя на расстоянии x от центрального сечения $S_{\text{in}} = 4\pi(ne)^2 \sqrt{\frac{2W}{m}} x^2$. Направление вектора в обоих случаях совпадает с направлением вектора скорости электронов.

$$\mathbf{12.32^*} S(r, t) = \frac{V_0^2 r}{2\pi a^2 dR} e^{-2t/\tau}; \quad W = \frac{C_0 V_0^2}{2}.$$

Решение. Емкость конденсатора $C_0 = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$, где $S = \pi a^2$. Конденсатор разряжается через сопротивление R , при этом напряжение на нем меняется по закону $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$, где $\tau = RC_0$. Электрическое поле внутри конденсатора $E = V/d$. Плотность тока смещения, пронизывающего конденсатор, $j_{\text{cm}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{V_0}{\pi a^2 R} e^{-t/\tau}$. Ток смещения замыкает собой объемный ток разряда конденсатора. Найдем поле H внутри конденсатора по теореме о циркуляции:

$$H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j_{\text{cm}} \cdot \pi r^2,$$

$$\text{откуда } H = \frac{2\pi}{c} j_{\text{cm}} r = \frac{2V_0 r}{ca^2 R} e^{-t/\tau}.$$

Легко понять, что вектор Пойнтинга \mathbf{S} направлен наружу конденсатора по радиусу. Поскольку $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, то

$$S(r, t) = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{V_0^2 r}{2\pi a^2 dR} e^{-2t/\tau}.$$

$$\text{При } r = a \quad S = \frac{V_0^2}{2\pi adR} e^{-2t/\tau} [\text{эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2)].$$

Физический смысл вектора Пойнтинга — это плотность потока электромагнитной энергии, направленного к месту его поглощения. В данном случае — к резистору. Рассчитаем полную электромагнитную энергию W , вытекшую через боковую поверхность конденсатора за всё время разряда:

$$W = \int_0^\infty S \cdot 2\pi ad dt = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC_0} dt = \frac{C_0 V_0^2}{2}.$$

Этот результат можно было предсказать и без вычислений — это начальная энергия заряженного конденсатора.

$$\mathbf{12.33.} \quad S = \frac{\mathcal{E}^2 r}{8\pi} \frac{d}{d^3}; \quad W(r, t) = \int_0^t S d \cdot 2\pi r dt = \frac{\mathcal{E}^2 r^2}{4} \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d(t)} \right).$$

12.34. $\mathbf{S} = -\frac{4\pi}{nec^2} j^2 y^2 \mathbf{j}$, где y — расстояние от центрального сечения до точки наблюдения. Вектор \mathbf{S} антипараллелен вектору плотности тока \mathbf{j} .

$$\mathbf{12.35.} \quad n_i = n_e \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right); \quad S = \pi(n_e e r)^2 \frac{v^3}{c^2}.$$

$$\mathbf{12.36.} S = \frac{L}{2c^2V} r \alpha^2 t; \Phi_S = \frac{4\pi}{3c^2} R^3 \frac{L}{V} \alpha^2.$$

$$\mathbf{12.37.} S = \frac{A^2 r}{8\pi d^2} t. \text{ Вектор } \mathbf{S} \text{ направлен по радиусу к оси конденсатора.}$$

$$\Phi_S = \frac{R^2 L}{4d^2} A^2.$$

$$\mathbf{12.38.} \text{ Вектор Пойнтинга } \mathbf{S} \text{ направлен к оси кабеля; } S = \frac{\mathcal{J}}{\pi c^2 r} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \ln \frac{R_0}{r}.$$

Считая известной погонную индуктивность кабеля $L = 2 \ln \frac{R_0}{r_0}$, получим электромагнитную энергию, перенесенную за время затухания на единицу длины кабеля:

$$W(r_0) = \frac{\mathcal{J}_0^2}{c^2} \ln \frac{R_0}{r_0} = \frac{L \mathcal{J}_0^2}{2c^2} \quad (\text{СГСЭ}).$$

12.39. Так как \mathbf{E} и \mathbf{H} одновременно меняют свое направление, то вектор \mathbf{S} не изменяет направления.

12.40. Так как моменты изменения направлений векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на обратные сдвинуты между собой на четверть периода, то вектор \mathbf{S} каждую четверть периода меняет свое направление на обратное. Действительно, в этом случае

$$\int_0^T \frac{EH}{4\pi} dt = \int_0^T \frac{1}{4\pi} E_0 \sin \omega t H_0 \cos \omega t dt = 0.$$

Энергия колеблется в отдельных участках провода, но не течет в одном направлении (стоячие волны).

12.41.* Энергия минимальна при $r_2/r_1 = e \approx 2,718$.

Решение. После срабатывания ключей в линии будет содержаться определенный запас энергии, равный (в СГСЭ)

$$W = \frac{L \mathcal{J}^2}{2c^2} + \frac{CU^2}{2},$$

где

$$U = \mathcal{J}R, \quad R = 60 \text{ Ом} = \frac{2}{c} \text{ ед. СГСЭ.}$$

Поскольку все омические сопротивления линии пренебрежимо малы, то весь этот запас энергии перейдет в излучение. Величины индуктивности L и емкости C линии определяются известными соотношениями

$$L = 2l \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad C = \frac{l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Таким образом, запас энергии

$$W = \frac{\mathcal{J}^2 l}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mathcal{J}^2 R^2 l}{4 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\mathcal{J}^2 l}{c^2} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right],$$

так что $W \propto (x + \frac{1}{x})$, где $x = \ln \frac{r_2}{r_1}$. Это выражение минимально при $x = 1$, откуда следует ответ.

12.42. Без учета сопротивления проводов $V(x, t) = V_0 \frac{\cos(kx + \delta) \cos \omega t}{\cos \delta}$; $A = \frac{V_0}{\cos \delta}$, где $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $\delta \leq \pi/2$.

$$\mathbf{12.43^*} v_{\min} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon} 4l} = 3,75 \text{ МГц}; \quad Q = 400.$$

Решение. Средняя энергия электрического поля за период T , очевидно, равна половине W_{\max} :

$$W_E = \frac{1}{T} \int_0^T dt \iiint_V \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dV = \frac{1}{2} W_{\max},$$

потери энергии за период

$$W_{\text{пот}} = \int_0^T dt \iiint_V \lambda E^2 dV.$$

Добротность системы

$$Q = 2\pi \frac{W_{\max}}{W_{\text{пот}}} = \frac{\epsilon}{2T\lambda}.$$

На рис. 624 показано распределение напряжения и тока по длине кабеля в случае наименьшей частоты (наибольшей длины волны). На отрезке ка-

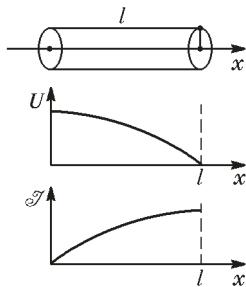


Рис. 624

беля длиной l установится четверть длины волны. Поэтому $v_{\min} = \frac{c}{4l\sqrt{\epsilon}} = 3,75 \text{ МГц}$, откуда $T = \frac{1}{v_{\min}}$ и $Q = \frac{\epsilon}{2T\lambda} = 400$.

$$\mathbf{12.44^*} Q \approx \frac{c\sqrt{\epsilon}}{4\lambda b} = 5 \cdot 10^6; \quad v_{\min} = \frac{c\sqrt{1 + \frac{b^2}{l^2}}}{2b\sqrt{\epsilon}} \approx \frac{c}{2b\sqrt{\epsilon}} = 5 \text{ ГГц}.$$

Решение. Средняя энергия электрического поля за период T равна половине W_{\max} :

$$W_E = \frac{1}{T} \int_0^T dt \iiint_V \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dV = \frac{1}{2} W_{\max}.$$

Потери энергии за период

$$W_{\text{пот}} = \int_0^T dt \iiint_V \lambda E^2 dV.$$

Добротность резонатора $Q = 2\pi \frac{W_{\text{ макс}}}{W_{\text{ пот}}} = \frac{\epsilon}{2T\lambda}$. Для резонатора справедливо:

$$\omega = \frac{kc}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2},$$

где $k_x = n_1\pi/a$, $k_y = n_2\pi/b$, $k_z = n_3\pi/l$. Частота наименьшая, когда одно из целых чисел n_i ($i = 1, 2, 3$) равно нулю, а остальные — единице. Исходя из размеров резонатора, очевидно, необходимо, чтобы $n_1 = 0$, а $n_2 = n_3 = 1$. Тогда $k_x = 0$; $k_y = \pi/b$; $k_z = \pi/l$. Итак,

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2}} = \frac{\pi c}{b\sqrt{\epsilon}} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{l}\right)^2};$$

$$v_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{c}{2b\sqrt{\epsilon}} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{l}\right)^2} \approx \frac{c}{2b\sqrt{\epsilon}} = 5 \text{ ГГц}.$$

Далее можно подсчитать и добротность: $Q = \frac{\epsilon}{2T\lambda} = \frac{\epsilon v_{\min}}{2\lambda} \approx \frac{\sqrt{\epsilon}c}{4b\lambda} = 5 \cdot 10^6$.

12.45* $E_{\text{вых}}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_{0z}L) + \frac{E_0}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t - k_{1z}L]$; $v \approx 22,4c$.

Решение. Минимальная частота для электромагнитной волны, бегущей вдоль по оси z прямоугольного волновода, определяется из условия $\omega_{\min} = \frac{\pi c}{a}$; $v_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{c}{2a} \approx 2998 \text{ МГц}$. Такая частота называется критической, или граничной. Волна с меньшей частотой не жизнеспособна в данном волноводе (сечением $a \times a$).

Волновод возбуждается модулированным колебанием, в спектре которого только три гармоники. Основная — $v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3001 \text{ МГц}$ — и две «боковых» — $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$ (2997 и 3005 МГц соответственно). Очевидно, что мода с частотой 2997 МГц $< v_{\min}$ не способна распространяться в данном волноводе. Таким образом, в спектре распространяющейся в волноводе волны присутствуют только две моды: v_0 и v_1 . Им соответствуют волновые числа

$$k_{0z} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad k_{1z} = \sqrt{\frac{(\omega_0 + \Omega)^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

Запишем закон изменения выходного электрического поля:

$$E_{\text{вых}}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_{0z}L) + \frac{E_0}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t - k_{1z}L].$$

Найдем фазовую скорость волны с частотой ω_0 :

$$v = \frac{\omega_0}{k_{0z}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega_0 a}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega_0}\right)^2}} \approx 22,4c.$$

$$\mathbf{12.46.} v_{\min} = 3 \text{ МГц}; \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{kp}}{v_0 + v}\right)^2}} \approx 27,4c; \quad v_{kp} = \frac{c}{2a} \approx 2998 \text{ МГц}.$$

12.47. $\mathbf{S}(t, x, y, z) =$

$$= -\frac{cE_0^2}{16\pi\sqrt{2}} \left[\mathbf{e}_x \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \mathbf{e}_y \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \right] \sin 2\omega t,$$

где \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — единичные векторы в направлении соответствующих осей.

Указание. В резонаторе основная мода электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$ $\cos \omega t$. Далее,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -c \frac{E_0 \pi}{a} \left[\mathbf{e}_x \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} - \mathbf{e}_y \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right] \cos \omega t,$$

откуда следует выражение для поля \mathbf{H} . Основная мода в резонаторе имеет частоту $\omega = c \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{a^2}} = \frac{c\sqrt{2}\pi}{a}$.

$$\mathbf{12.48.} E_0^2 = \frac{16QN\lambda}{Vc}; \quad E_0 \approx 4,6 \text{ ед. СГСЭ} = 1,4 \text{ кВ/см.}$$

12.49. $N = \frac{E_0^2 hac}{16\sqrt{2}Q} = 0,4 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ = 40 Вт. Предельная мощность определяется предельным электрическим полем.

12.50. $\mathbf{S}(t, x, y, z) =$

$$= \frac{c^2 E_0^2}{4\pi\omega} \left[\mathbf{e}_y \frac{\pi}{4a} \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \sin 2(\omega t - kz) + \mathbf{e}_z k \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) \right],$$

где \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z — единичные векторы в направлении осей y и z , $\omega = c\sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}}$.

Возможна запись в виде бегущей волны

$$\mathbf{S} = \frac{c^2 E_0^2}{4\pi\omega} \left[\mathbf{e}_y \frac{\pi}{2a} \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) e^{-i\pi/2} + \mathbf{e}_z k \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right] e^{2i(\omega t - kz)}.$$

12.51. $n = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \approx 3,6$; из формулы Френеля амплитудный коэффициент отражения $r = \frac{n-1}{n+1} \approx 0,57$, а КСВ = $\frac{1+r}{1-r}n \approx 3,6$.

12.52. $k = \frac{1+r}{1-r} = 3$. Здесь $r^2 = \frac{N_0 - N_h}{N_0} = 0,25$ — коэффициент отражения по мощности, r — коэффициент отражения по амплитуде.

$$\mathbf{12.53.} n_e = \frac{3\pi m_e c^2}{4e^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2} \right).$$

$$\mathbf{12.54*} n_e = \frac{3m_e}{16\pi e^2} \left(\omega_0^2 - \frac{\pi^2 c^2}{b^2} \right).$$

Решение. Направим ось z прямоугольного волновода по направлению распространения электромагнитной волны. Запишем дисперсионное соотношение для волновода:

$$\frac{\epsilon\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\pi^2}{a^2} m^2 + \frac{\pi^2}{b^2} n^2 + k_z^2,$$

где $k_z = k = 2\pi/\lambda$.

Низшая волна, т. е. волна, имеющая наименьшую возможную частоту для данного волновода, при $a < b$ сразу определяет значения целых чисел m и n . Для $\omega = \omega_{\min}$ необходимо потребовать, чтобы $m = 0$ и $n = 1$.

Тогда в том случае, когда плазмы еще нет, $\epsilon = 1$ и $\omega = \omega_0$, дисперсионное соотношение принимает вид

$$\frac{\epsilon\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + k_1^2. \quad (1)$$

Однако когда в волноводе появилась плазма, диэлектрическая проницаемость ϵ уменьшилась:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}$ — плазменная частота. При этом по условию задачи длина волны удвоилась: $\lambda_2 = 2\lambda_1$, но тогда $k_2 = k_1/2$. Дисперсионное соотношение в этом случае

$$\frac{\epsilon\omega_0^2}{c^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + k_2^2$$

Заметим, что ω_0 — частота генератора и она не меняется. Из соотношения (1) получим

$$k_1^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{b^2}. \quad (2)$$

Подстановкой k_1^2 в (2) найдем

$$\frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\omega_0^2}{4c^2} - \frac{\pi^2}{4b^2},$$

откуда получаем необходимое выражение для плазменной частоты

$$\omega_p^2 = \frac{3}{4} \left(\omega_0^2 - \frac{\pi^2 c^2}{b^2} \right).$$

С другой стороны, $\omega_p^2 = 4\pi n_e e^2 / m_e$. Приравнивая оба выражения, найдем искомую концентрацию электронов образовавшейся плазмы.

$$\mathbf{12.55. } \varphi(x) = V \frac{\operatorname{sh}(x/D)}{\operatorname{sh}(a/D)}, \text{ где } D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi n_0 e^2}}.$$

$$\mathbf{12.56. } \frac{\omega'}{\omega_0} = \sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}; \omega' = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha} \approx 1,435\omega_0, \text{ где } \alpha = \frac{4\pi \mathcal{J}_e}{S\omega_0^2 \sqrt{2mE}} \approx 1,06.$$

Указание. Наличие электронного пучка приводит к изменению диэлектрической проницаемости среды в конденсаторе: $\epsilon(\omega') = 1 - \frac{4\pi n_e e^2}{m\omega'^2} = 1 - \alpha \frac{\omega_0^2}{\omega'^2}$.

12.57. 1) $P_0 = \frac{\mathcal{J}^2}{2\pi c^2 R^2} = 6,37 \cdot 10^5 \text{ дин/см}^2 = 6,37 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$; $P_0 < P$, поэтому плазменный цилиндр расширяется. 2) $P = P_0$ при $\mathcal{J} \approx 1,25 \cdot 10^5 \text{ А}$.

12.58* $T(0) = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 \pi R^2 n k} \approx 1,47 \cdot 10^7$ К, где k — постоянная Больцмана.

Решение. Плотность силы магнитного давления $\mathbf{f}(r) = -\frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}]$ [дин/см³] действует по радиусу к центру плазменного шнуря на объем dV , представляющий собой тонкое кольцо толщиной dr , высотой l ($dV = 2\pi r dr l$). Магнитное поле на расстоянии r от оси шнуря по теореме о циркуляции

$$B(r) = \frac{2\pi}{c} jr.$$

Магнитное давление, оказываемое на стенки этого элементарного объема,

$$dp = -f dr = -\frac{2\pi}{c^2} j^2 r dr.$$

Интегрированием найдем распределение магнитного давления внутри плазменного шнуря:

$$\begin{aligned} \int_{P(R)}^{P(r)} dp &= -\frac{2\pi}{c^2} j^2 \int_R^r r dr = \frac{\pi R^2}{c^2} j^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right); \\ P(r) &= P(R) + \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 \pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \end{aligned}$$

Магнитное давление, направленное к центру шнуря, уравновешивается газокинетическим давлением плазмы $P(r) = nkT(r)$. При этом мы воспользовались моделью идеального газа (плазма в целом электрически нейтральна, и нам требуется всего лишь *оценить* температуру на оси):

$$T(r) = \frac{P(R)}{nk} + \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 \pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{1}{nk}.$$

Первый член в этой формуле — температура на периферии шнуря $T(R)$. Считая ее малой по сравнению с температурой на оси $T(0)$, получаем:

$$T(0) = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 \pi R^2 n k} \approx 1,47 \cdot 10^7 \text{ К.}$$

12.59. $B = \sqrt{8\pi n k T} \approx 60$ кГс.

12.60. $t = \frac{R^2}{2\mu V} \ln \frac{R}{r} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ с.

12.61. $R_x \approx \frac{B_0 R_0^2 c}{2\mathcal{J}} \approx 0,04$ мм.

12.62. $T(0) \approx \frac{\mathcal{J}^2}{k c^2 N}$.

12.63. $B(t) = \frac{p_0 \omega}{2\sqrt{2c} R^2} \cos \omega t$; $\frac{2\pi c}{\omega}$ — длина волны, излучаемой диполем.

Условие $R \ll \frac{2\pi c}{\omega}$ означает, что поле диполя можно вычислять по электростатической формуле.

$$12.64. B(t) = \frac{2\rho\omega a^2}{cR^4} \sin 2\omega t; \text{ см. также ответ задачи 12.63.}$$

$$12.65. R_H = \frac{2\ln(r_2/r_1)}{c\sqrt{\epsilon}} = 1,41 \cdot 10^{-10} \text{ Ом} = 127,3 \text{ Ом.}$$

$$12.66. R_H = \frac{2\pi n}{c} \sqrt{2(r_2^2 - r_1^2)} = 2971 \cdot 10^{-11} \text{ Ом} = 26,74 \text{ кОм.}$$

$$12.67. v = c; z_H = R_{\text{согл}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L_{\text{ед}}}{C_{\text{ед}}}} = \frac{4\pi d}{cl} = 4,2 \cdot 10^{-10} \text{ м/с} = 37,7 \text{ Ом.}$$

12.68. $v_{011} = 9 \text{ ГГц}; v_{012} = 12,5 \text{ ГГц}$. Вычисления производятся по формуле $\omega_{mnl} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{L^2}}$, где m, n, l — целые числа: 0, 1, 2, ...

$$Q = \frac{\epsilon}{2T\lambda} = \frac{\epsilon\omega}{4\pi\lambda}; \frac{Q_{011}}{Q_{012}} = 0,72.$$

12.69. Разность набегов фазы мод с индексами m_1 и m_2 $\Delta\phi = (k_z m_1 - k_z m_2)z \approx \frac{\pi}{4}(m_2^2 - m_1^2) \frac{\lambda_0}{d^2} z$; $E_x(y, 0, t) = E_x(y, z, t)$, если $\Delta\phi = 2\pi n$. Отсюда $\Delta z = \frac{8d^2}{\lambda_0} = 6,4 \text{ м}$ (при этом $m_2^2 - m_1^2 = n$ — целое число).

12.70. Фазовая скорость волн H_{10} и H_{01} различна, и по мере распространения волн в волноводе нарастает разность фаз. Во входном сечении ($z = 0$) E_x и E_y синфазны, и в любой точке (x, y) этого сечения волна линейно поляризована. По мере распространения линейная поляризация суммарной волны превращается в эллиптическую, которая вновь становится линейной с той же ориентацией вектора \mathbf{E} , если разность фаз $\Delta\phi = [(k_z)_{01} - (k_z)_{10}]L = 2\pi$, откуда $L = \frac{8}{\lambda_0(b^{-2} - a^{-2})} = 3,2 \text{ м}$.

12.71. $S = \frac{i^2 \rho}{\delta}$. Вектор \mathbf{S} направлен параллельно плоскостям в сторону перемычки.

12.72. $\mathcal{J}_{\text{см}} = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-t/\tau}; \mathcal{J}_{\text{пр}} = \frac{\mathcal{E}}{R+r}(1 - e^{-t/\tau}); B = \frac{2\mathcal{E}}{ca(R+r)} \left(1 + \frac{R}{r} e^{-t/\tau}\right)$;
где $\tau = \frac{CRr}{R+r}; C = \frac{a^2}{4d}, R = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{\pi a^2}$.

$$12.73. \mathcal{J}_{\text{см}} = \frac{\mathcal{E}\omega C_0 R}{\sqrt{(r+R)^2 + (\omega C_0 Rr)^2}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{(R+r)^2 + r^2}} = \mathcal{J}_{\text{пр}}.$$

$$B_0 = \frac{2\mathcal{E}\sqrt{2}x}{a^2 c \sqrt{(R+r)^2 + r^2}}.$$

12.74*. Решение. Отраженная и прошедшая волны отсутствуют, если волновое сопротивление линии $R_{\text{волн}} = R_H$ (сопротивление нагрузки). $R_{\text{волн}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L_{\text{ед}}}{C_{\text{ед}}}}$, где $L_{\text{ед}} = \frac{4\pi a}{b}; C_{\text{ед}} = \frac{b}{4\pi a}$ (погонные индуктивность и емкость). Таким образом, $R_{\text{волн}} = \frac{1}{c} \frac{4\pi a}{b}$. Сопротивление нагрузки для тока, замыкающего шины, $R_H = \frac{\rho a}{db}$, откуда $\frac{\rho}{d} = \frac{4\pi}{c} = R_{\text{вак}}$. В СИ это же отношение равно $R_{\text{вак}} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \text{ Ом}$ и называется «волновое сопротивление вакуума». Искомое $\rho = R_{\text{вак}} \cdot d = 0,0377 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

12.75. $\delta = \frac{\rho}{R_{\text{Бак}}} \approx 1,2$ мм, где $R_{\text{Бак}} = \left(\frac{4\pi}{c}\right)_{\text{Гаусс}} = \left(\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\right)_{\text{СИ}} \approx 377$ Ом (см. предыдущую задачу).

12.76. $F_x = F_y = \frac{QN}{2\omega_{\min}a} = \frac{QN}{2\sqrt{2}c\pi} = 0,037$ дин. Силу F_z можно грубо оценить как $F_z = \bar{w}_{\text{ЭМ}}a^2 = 0,22$ дин, где $\bar{w}_{\text{ЭМ}} = \frac{QN}{\omega_{\min}V}$, $V = a^2b$ — объем резонатора. Однако точный расчет показывает, что $F_z = 0$.

$$\mathbf{12.77.} \left| \frac{\Delta B_0}{B_0} \right| = \frac{\pi R^2 \omega}{c^2 \rho} \approx 10^{-3}.$$

12.78. Полное поле в центре сферы $B_{\text{сф}}(t) = \frac{4}{3} \frac{\pi R h \omega B_0}{c^2 \rho} \sin \omega t$.

$$\mathbf{12.79.} E = \frac{1}{c} v B; \quad \sigma = \frac{3\pi}{4c} v B \cos \theta; \quad V_{AB} = \frac{v}{c} B R.$$

$$\mathbf{12.80.} V_0 = \frac{4d\rho \mathcal{J}_0}{R^2 \sqrt{(4\pi)^2 + 25\omega^2 \rho^2}}.$$

$$\mathbf{12.81.} B(r)|_{r \leq R_1} = -\frac{2\mathcal{J}_r}{c[\epsilon R_2^2 - (\epsilon - 1)R_1^2]};$$

$$B(r)|_{r \geq R_1} = \frac{2\mathcal{J}_r}{cr} \left[\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{\epsilon r^2 - (\epsilon - 1)R_1^2}{\epsilon R_2^2 - (\epsilon - 1)R_1^2} \right];$$

$$B(R_2) = 0.$$

12.82. $L = \frac{qB_0}{2c}(R_2^2 - R_1^2)$, закручивание против часовой стрелки.

12.83. $L = \frac{qB_0}{2c}(R_2^2 - R_1^2)$, закручивание по часовой стрелке.

12.84. $\left[\frac{dW_M}{dt} \right]_{\max} = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{E}^2}{R} = 25 \text{ Вт}; \quad \tau = \frac{L}{R} \ln 2 \approx 0,7 \text{ с (СИ)}$.

12.85. $\left[\frac{dW_{\text{ЭЛ}}}{dt} \right]_{\max} = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{E}^2}{R} = 12 \text{ мВт}; \quad \tau = RC \ln 2 \approx 0,02 \text{ с (СИ)}$.

12.86. $\mathbf{S} = -\frac{2\pi n^2 \mathcal{E}^2}{LR} e^{-t/\tau} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \mathbf{r}$, где $\tau = \frac{L}{c^2 R}$ (направлен к оси);
 $\dot{W} = -\frac{2\pi^2 r_0^2 \ln^2}{R^2 c^2} \mathcal{E}^2 = \frac{L}{2c^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2$.

12.87. $\mathbf{S} = \frac{2\pi n^2 \mathcal{E}^2}{LR} \mathbf{r}_0 e^{-2t/\tau}$, где $\tau = \frac{L}{c^2 R}$ (направлен наружу); $\dot{W} = \frac{2\pi^2 r_0^2 n^2 \mathcal{E}^2 l}{R^2 c^2} = \frac{L}{2c^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2$.

12.88. $Q = 2\pi f \frac{W_{\max}}{N} = 203$, где $W_{\max} = 2 \cdot \frac{E_{\text{пп}}^2}{8\pi} abl \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 906 \text{ эрг} \approx 9,1 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$, где $l = 3,96 \text{ см}$.

12.89. $\Delta z = \frac{2\pi}{\Delta k_z} = 43,2 \text{ см}$.

Здесь $\Delta k_z = k_{z2} - k_{z1} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2b}\right)^2} - \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}$, где $\lambda_0 = \frac{\lambda_{\text{kp}}}{3} = \frac{2a}{3}$.

12.90. $\Delta z = \frac{2\pi}{\Delta k_z} = 13,3 \text{ см.}$ Здесь $\Delta k_z = k_{z1} - k_{z2};$ $k_{z1} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2};$ $k_{z2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - 2^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2};$ $\omega = 5\omega_{kp} = 5\frac{\pi c}{a}.$

12.91. $Q = \frac{\sqrt{\epsilon} f_0}{2\lambda} = 140.$

12.92. $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4\pi\lambda l}{\sqrt{\epsilon} c} = 2,6 \cdot 10^{-3} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ (3%).}$

12.93. $r_D^2 \approx \frac{kT_i}{4\pi n_0 e^2};$ $r_D \approx 0,15 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$

12.94. $r_D^2 = \frac{kT_i T_e}{4\pi n_0 e^2(T_e + T_i)} \approx \frac{kT_e}{4\pi n_0 e^2};$ $r_D = 0,74 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$

12.95. $N_e = \frac{m_e}{4\pi e^2} \omega_p^2 \approx 2,5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3},$ где $\omega_p^2 = \frac{9}{4} \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta a} \right)^2 = 8,2 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-2}.$

12.96. $N_e = \frac{m_e}{4\pi e^2} \omega_p^2 \approx 6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3},$ где $\omega_p^2 = -2\omega^3 \frac{\Delta r}{\Delta \omega} \approx 2 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-2}.$

12.97. $\omega_{рез} = \omega_p \sqrt{1 - \frac{h}{d}}.$

12.98. $\omega_{рез} = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}.$

12.99. $N = \frac{\pi m c^2}{4e^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \approx 4,5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}.$

12.100. $N = \frac{\pi m \omega_p^2}{4\pi e^2} = 2,1 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3},$ где $\omega_p^2 = 4\pi^2 c^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4a^2} \right) = 6,79 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-2}.$

12.101. $S = \frac{c E_0 \mu_1 \sin \theta}{4\pi R^3} = 1,76 \cdot 10^6 \frac{\text{эр}}{\text{с} \cdot \text{см}^2} = 1,76 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$ (**S** направлен на запад); $L = \frac{\pi h E_0 \mu_1 \sin \theta}{4c} = 2,54 \cdot 10^{17} \text{ эрг} \cdot \text{с} = 2,54 \cdot 10^4 \text{ МДж} \cdot \text{с}$ (**L** направлен на север).

12.102* $\Delta_{\max} = \frac{\pi a^3 h E_0^2}{8mg} = 0,049 \text{ см} \approx 0,5 \text{ мм.}$

Решение. Электрический дипольный момент шарика $P(z_0 t) = a^3 E_z(z_0, t) = a^3 E_0 \cos \frac{\pi z_0}{2l} \cos \omega t.$ Здесь z_0 — координата центра шарика. Сила, действующая на шарик, $F_{\text{эл}} = \overline{|P \frac{\partial E}{\partial z}|}_{z=z_0} = \frac{a^3 E_0^2 \pi}{2l} \cos \frac{\pi z_0}{2l} \sin \frac{\pi z_0}{2l} \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{a^3 \pi E_0^2}{8l} \sin \frac{\pi z_0}{l}.$ Если h — высота подвеса шарика, а Δ — отклонение по горизонтали от положения равновесия, то можно записать равенство моментов сил $F_{\text{эл}}$ и тяжести

$$F_{\text{эл}} \cdot h = mg \Delta,$$

откуда

$$\Delta = \frac{F_{\text{эл}} h}{mg} = \frac{\pi a^3 h E_0^2}{8emg} \sin \frac{\pi z_0}{l}.$$

Очевидно, что максимальное отклонение шарика достигается при $z_0 = \frac{l}{2}$.
Поэтому

$$\Delta_{\max} = \frac{\pi a^3 h E_0^2}{8mgl} = 0,049 \text{ см} \approx 0,5 \text{ мм.}$$

12.103. $H_0 = \sqrt{\frac{16mgl\Delta}{\pi a^3 h}} = 14,3 \text{ Э.}$

12.104. $\Delta d = 2d \frac{\Delta f}{f_0} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ см} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ мкм.}$

ОПТИКА

§ 1. Геометрическая оптика и элементы фотометрии

1.1. $f = g/(2\omega^2) = 490$ см.

1.2* Решение. Из законов отражения света следует, что продолжение отраженного луча CB (рис. 625) пересечет перпендикуляр AA' к плоскости зеркала в точке A' , отстоящей от этой плоскости на такое же расстояние, что и точка A . Значит, $A'C = AC$, а длина светового пути ACB равна длине

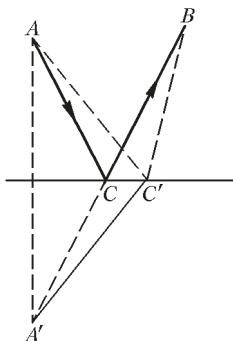


Рис. 625

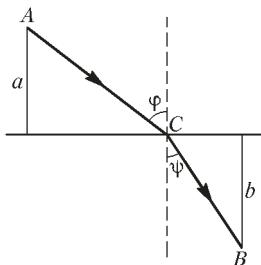


Рис. 626

отрезка $A'B$. Если бы свет распространялся по пути $AC'B$, то длина этого пути равнялась бы длине ломаной $A'C'B$. Сравнение длины ломаной $A'C'B$ с длиной отрезка $A'CB$ дает решение задачи.

1.3* Решение. Не нарушая общности, можно считать, что показатель преломления первой среды равен единице. Для оптической длины L ломаной, соединяющей точки A и B (рис. 626), имеем

$$L = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{nb}{\cos \psi}.$$

При этом должно выполняться дополнительное соотношение

$$a \operatorname{tg} \varphi + b \operatorname{tg} \psi = \text{const},$$

которое выражает условие постоянства длины проекции ломаной ACB на плоскость раздела сред. Для минимума необходимо

$$\frac{dL}{d\varphi} = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{n b \sin \psi}{\cos^2 \psi} \frac{d\psi}{d\varphi} = 0.$$

Из дополнительного условия следует

$$\frac{a}{\cos^2 \varphi} + \frac{b}{\cos^2 \psi} \frac{d\psi}{d\varphi} = 0.$$

Сопоставляя это соотношение с предыдущим, находим

$$\sin \varphi - n \sin \psi = 0.$$

т. е. закон преломления света. В том, что этот закон действительно выражает условие минимума оптической длины пути светового луча, а не просто условие ее экстремума, можно убедиться, либо исследуя знак второй производной $\frac{d^2L}{d\varphi^2}$, либо непосредственно из геометрических соображений.

1.4. $f = 30,8$ мм.

1.5. $f = 9$ см.

1.6* Решение. Для примера выведем формулу тонкой линзы. Пусть P — точечный источник света, расположенный на главной оптической оси линзы, а P' — его изображение (рис. 627). Согласно принципу таутокро-низма, оптические длины всех лучей, вышедших из P и собравшихся в P' ,

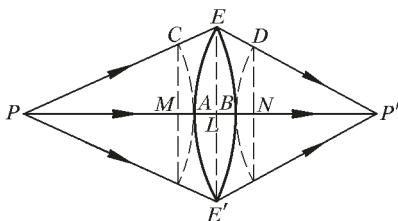


Рис. 627

одинаковы. Опишем из P и P' , как из центров, окружности с радиусами PA и $P'B$ соответственно. Тогда на основании равенства оптических длин лучей можем записать

$$(CED) = (AB),$$

где круглые скобки обозначают оптические длины лучей, заключенных в эти скобки. Если лучи PE и EP' параксиальные, то можно принять, что длина ломаной CED приближенно равна длине ее проекции MN на главную оптическую ось. В этом приближении предыдущее соотношение можно записать в виде

$$MN = nAB \quad \text{или} \quad AM + BN = (n - 1)(AL + LB), \quad (1)$$

где точка L — проекция точки E на главную оптическую ось. Для тонкой линзы приближенно:

$$AL = \frac{(EL)^2}{2R_1}, \quad LB = -\frac{(EL)^2}{2R_2},$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны сферических поверхностей линзы.

Аналогично, при выполнении условия параксиальности справедливы выражения

$$AM = -\frac{(EL)^2}{2x_1}, \quad BN = \frac{(EL)^2}{2x_2},$$

где через x_1 и x_2 обозначены соответственно длины PA и BP' . Подставляя написанные выражения в формулу (1), получим

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

1.7. $n = 1,5$.

1.8. $l_2 = l_1 + d/n = 18$ см.

1.9. $n = \frac{\sin \frac{A+\delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$.

1.10. $\delta = A(n-1) \left[1 + \frac{n(n+1)}{24} A^2 \right]$.

1.11. $\delta = 48^\circ 12'$.

1.12. $h_{\min} = a \left[\sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \varphi}} \right) \right]^{-1}$.

1.13. $l = 10$ см.

1.14. Два.

1.15. $\alpha = \begin{cases} 2 \arcsin \sqrt{n^2 - 1} & \text{при } n < \sqrt{2}, \\ \pi & \text{при } n \geq \sqrt{2}. \end{cases}$

1.16. $n = \sqrt{2} \approx 1,41$.

1.17. $\sin(\alpha/2) \geq 1/n = 0,752$; $\alpha \geq 97^\circ 30'$.

1.18. $h' = \frac{h \cos^3 \varphi}{n \cos^3 \psi} = 0,215$ м.

1.19. $\Delta t \approx 1,1 \cdot 10^{-7}$ с.

1.20. $\frac{d_{\text{вепр}}}{d_{\text{двиг}}} = \frac{\omega_{\text{двиг}}}{\omega} = \frac{2\pi n}{60} \sqrt{\frac{2dL}{gD}} \approx 73$.

Указание. Поверхность жидкости, вращающейся с угловой скоростью ω : $y = kx^2 = (\omega^2/2g)x^2$. Фокусное расстояние параболического зеркала $f = (4k)^{-1}$. Далее для системы с положительным фокусом $f = Ld/D$, где L — расстояние от Земли до Луны, D — диаметр Луны, а d — размер изображения.

1.22. $D \approx 2$ см.

1.23. $L_2 \approx 14$ м.

1.24. Фокус отодвинется на расстояние $d(n-1)/n = 2$ мм.

1.25. $\Gamma_2 = 1$.

1.27. $h = \sqrt{h_1 h_2}$.

1.28. $f = \frac{L^2 - l^2}{4L} = 12$ см.

1.29. $f = \frac{R_1 R_2}{2(n-1)R_2 + 2nR_1}$.

1.30. $\frac{f_1}{f_2} = \frac{n}{n-1}$.

1.31. Собирающую линзу с фокусным расстоянием 30 см.

1.32. $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}$, $f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - l}$.

Расстояние главных плоскостей H и H' системы от первой и второй линз

$$O_1 H = -\frac{f_1 l}{l - f_1 - f_2}, \quad O_2 H' = \frac{f_2 l}{l - f_1 - f_2}.$$

1.33. «Эквивалентную» линзу следует поместить в передней главной плоскости системы двух линз; $f = f_1 f_2 (f_1 + f_2 - l)^{-1}$.

1.34. Главные плоскости совпадают с центром линзы. Фокальные плоскости расположены на расстоянии 28,2 см от линзы в воздухе и 37,5 см в воде. Узловые точки совпадают и расположены в воде на расстоянии 9,3 см от линзы.

1.35. Фокусное расстояние объектива в воде должно быть 48 см, а в воздухе 12 см. Увеличение трехкратное.

1.36. $37,5 \text{ см} \leq L \leq 38 \text{ см}$.

1.37. $f'_1 = 36 \text{ см}; f'_2 = 4 \text{ см}; f_1 = 45 \text{ см}; f_2 = 5 \text{ см}$.

1.38. $\Delta l = 0,5 \text{ см}$.

1.39. Система телескопическая.

1.40. Изображение получается на 5 см правее крайней правой линзы системы.

1.41. $l_1 = f_1 + \frac{(f_2 + l_2)f_1^2}{(d - f_1)(f_2 + l_2) - f_2l_2} = 1,0613 \text{ см}; \alpha = \frac{f_1l_2}{d(l_1 - f_1) - l_1f_1} = 152$.

1.42. Обе главные плоскости совпадают и проходят через центр шара. 1) $f = -f' = (R/2) \cdot n(n-1)^{-1} = 2R$; фокальные точки лежат снаружи шара на расстоянии R от его поверхности. 2) $f = 1,5R$; фокальные точки лежат снаружи шара на расстоянии $R/2$ от его поверхности. Фокальные точки не выходят наружу при $n \geq 2$.

1.43. 1) $x' = 15 \text{ см}$. 2) Увеличение $y'/y = 1,5$.

1.44. $f = 50 \text{ см}$. 1) 148 см от плоской поверхности; 2) 143 см от выпуклой поверхности. В обоих случаях изображение находится с противоположной стороны линзы по отношению к объекту.

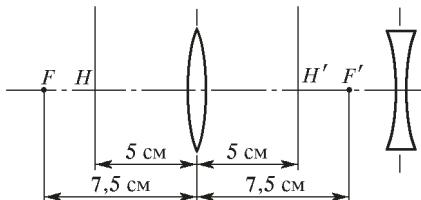


Рис. 628

1.45. $f = 6 \text{ см}$. Главные плоскости лежат внутри линзы на расстояниях 1 см и 1,6 см от поверхности линзы с большим радиусом кривизны.

1.46. $f = 2,5 \text{ см}$. Положения фокальных точек и главных плоскостей изображены на рис. 628.

1.47. $E = \pi B$.

1.48. $E = \pi B$.

1.49. $E = \pi B/k = 1,1 \cdot 10^5 \text{ лк}$.

1.50. $E = E_0 \frac{D^2}{f^2 a^2} = 3,28 \cdot 10^8 \text{ лк}$.

1.51. $B = \frac{4}{\pi} \left(\frac{R}{D} \right)^2 E = 1,5 \cdot 10^9 \text{ кд}/\text{м}^2$.

$$1.52. E = \frac{2\pi}{3} k \frac{R_C^2 R_{\perp}^2}{R_0^2 R_1^2} B_C = 0,096 \text{ лк.}$$

$$1.53. D_{\kappa} = D \frac{L}{f_1}; E = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{f_2} \right)^2 B.$$

$$1.54. \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{1}{1 + k(S - S_1)/S_1} = \frac{1}{3}.$$

$$1.55. N = \frac{4Sk_1^2 k_2^2 v}{H\chi\eta a^2} \approx 400 \text{ Вт.}$$

1.56. Яркость изображения в первом случае не зависит от диаметра линзы, а во втором пропорциональна квадрату диаметра (для параксиальных лучей).

1.57. 1) 1; 2) 1; 3) 0,25. Вообще яркость $B = 1$ при $N \leq \frac{D}{d}$ и $B = \left(\frac{1}{N} \frac{D}{d} \right)^2$ при $N \geq D/d$, где N — увеличение трубы, D — диаметр объектива, а d — диаметр зрачка глаза.

$$1.58^*: 1) 0,16; 2) 0,0625.$$

Решение. Рассмотрим произвольную оптическую систему, крайним элементом которой является глаз. Пусть эта система удовлетворяет условию синусов

$$n y \sin u = n' y' \sin u', \quad (1)$$

где y и y' — линейные размеры объекта и его изображения на сетчатке глаза, n и n' — показатели преломления пространства предметов и стекловидного

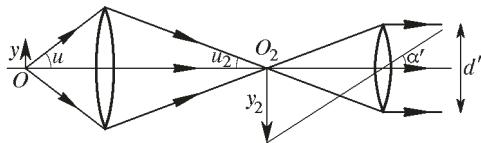


Рис. 629

тела глаза (на рис. 629 глаз и изображение на сетчатке не показаны). Условие (1) должно выполняться для любого угла наклона u , но в дальнейшем под u мы будем понимать угол, образуемый с оптической осью крайними лучами, которые еще могут пройти через оптическую систему и попасть на сетчатку глаза. Если яркость объекта B постоянна, то световой поток, попадающий в систему,

$$\Phi = BS \int_0^u \cos \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \pi BS \sin^2 u,$$

где S — площадь объекта. Световой поток, попадающий в глаз,

$$\Phi' = B'S' \int_0^{u'} \cos \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \pi B'S' \sin^2 u',$$

где B' — яркость, S' — его площадь. Если пренебречь потерями света при прохождении через систему, то $\Phi = \Phi'$. Так как $S \sim y^2$, $S' \sim y'^2$, то, учиты-

вая (1), получаем

$$\frac{B}{n^2} = \frac{B'}{n'^2}. \quad (2)$$

Субъективная (или зрительная) оценка яркости определяется освещенностью сетчатки:

$$E = \frac{\Phi'}{S'} = \pi B' \sin^2 u' = \pi B \frac{n'^2}{n^2} \sin^2 u'. \quad (3)$$

Определим ширину d' пучка, вышедшего из O под углом u , непосредственно за окуляром. (Обычно изображение y_2 получается в переднем фокусе окуляра, так что за окуляром пучок световых лучей параллелен.) Так как угол u_2 всегда мал, то

$$d' = 2au_2 = 2a \sin u_2 = \frac{2an \sin u}{y_2} y,$$

где a — расстояние от точки O_2 до передней главной плоскости окуляра, причем мы воспользовались условием синусов для точек O и O_2 . Введем увеличение микроскопа N , равное по определению отношению угла α' , под которым предмет виден в микроскоп, к углу α , под которым он был бы виден невооруженным глазом, если бы был помещен на наименьшем расстоянии ясного зрения L . (Для среднего глаза $L \approx 25$ см.) Считая эти углы малыми, можем написать

$$\alpha = \frac{y}{L}, \quad \alpha' = \frac{y_2}{a},$$

откуда

$$\frac{y}{y_2} = \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{L}{a} = \frac{1}{N} \frac{L}{a}.$$

Следовательно,

$$d' = \frac{2Ln \sin u}{N}. \quad (4)$$

Следует различать три случая.

Случай 1. Максимальное ограничение светового пучка производит зрачок глаза: величина d' равна диаметру зрачка d , однако угол u меньше предельного угла u_{\max} , допускаемого апертурой микроскопа. В этом случае угол u' определяется только диаметром зрачка и не зависит от увеличения. Согласно (3) не зависит от увеличения освещенность сетчатки E , а с ней и зрительная оценка яркости. Рассматриваемый случай соответствует относительно малому увеличению. Такое увеличение невыгодно, поскольку при нем используется не вся апертура объектива микроскопа. Примером разобранного случая является невооруженный глаз. Здесь зрительная оценка яркости не зависит от расстояния: предметы с одинаковой поверхностью яркостью, помещенные на различных расстояниях, воспринимаются глазом также как одинаково яркие.

Случай 2. Зрачок глаза и оправа объектива одинаково ограничивают световые пучки: $d' = d$, $u = u_{\max}$. Согласно (4) увеличение в этом случае равно

$$N = N_{\text{норм}} = \frac{2Ln \sin u_{\max}}{d} \quad (5)$$

и называется нормальным увеличением. Применение больших увеличений не может привести к увеличению разрешающей способности оптической системы микроскоп–глаз. Полагая $d = 2$ мм и $L = 25$ см, получаем

$$N_{\text{норм}} = 250n \sin u_{\max}. \quad (6)$$

Случай 3. Максимальное ограничение световых пучков производит оправа объектива: $d' < d$. Угол u' (пропорциональный d') уменьшается в отношении d/d' . В этом же отношении согласно (4) увеличивается N . Для освещенности сетчатки (3) дает

$$E = E_{\text{норм}} \left(\frac{N_{\text{норм}}}{N} \right)^2, \quad (7)$$

где $E_{\text{норм}}$ — освещенность при нормальном или меньшем увеличении. Таким образом, если $N \leq N_{\text{норм}}$, то освещенность сетчатки не зависит от увеличения; если же $N > N_{\text{норм}}$, то она обратно пропорциональна квадрату увеличения. Освещенность равна: 1) 0,16; 2) 0,0625.

1.59. 1) Четырнадцатая; 2) шестидесятикратное; 3) девятая–десятая.

1.60* $a = \frac{4fd}{D} \simeq 15$ см.

Решение. При фотографировании пейзажа фотоаппарат сфокусирован на бесконечность, т. е. фотопленка находится в фокальной плоскости, и при этом изображение бесконечно удаленной точки будет «точкой» в фокальной плоскости. Изображение же точечной снежинки, располагающейся на конечном расстоянии a от линзы, будет точкой за фокальной плоскостью. На пленке в этом случае получится несфокусированное изображение снежинки — кружок конечного диаметра \tilde{D} , а на фотокарточке получится кружок диаметром $D = (10 \text{ см}/24 \text{ мм}) \cdot \tilde{D} \simeq 4\tilde{D}$.

Считаем, что снежинка находится на главной оптической оси. Размер кружка на пленке определяется лучами, идущими от снежинки в самый край объектива (лучами максимального наклона). Тангенс угла наклона этих лучей к оси линзы равен $(d/2) \cdot a^{-1}$. Этот же тангенс может быть вычислен и как $(\tilde{D}/2) \cdot f^{-1} = D \cdot (8f)^{-1}$ (размер кружка на пленке получается построением вспомогательного луча, проходящего через центр линзы параллельно «лучу максимального наклона» до пересечения с пленкой). Полагая $(d/2) \cdot a^{-1} = D \cdot (8f)^{-1}$, находим расстояние до снежинки $a = 4fd \cdot D^{-1} \simeq 15$ см.

§ 2. Формулы Френеля. Световое давление

2.2. $\rho = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$. Для воды $\rho = 2\%$, для стекла $\rho = 4\%$.

2.3. $\tau = \frac{4n}{(n+1)^2} = 96\%$.

2.4. $100(1 - 0,96^8) = 28\%$.

2.5. $\frac{R_\perp}{E_\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \cos \psi}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \cos \psi}, \quad \frac{R_\parallel}{E_\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \psi}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \psi},$

$$\frac{D_\perp}{E_\perp} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \cos \psi}, \quad \frac{D_\parallel}{E_\parallel} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \psi},$$

где E_{\parallel} и E_{\perp} — амплитуда напряженности электрического поля падающей на границу раздела электромагнитной волны соответствующей поляризации (\parallel — вектор E лежит в плоскости падения, \perp — в перпендикулярной ей плоскости), R_{\parallel} и R_{\perp} (D_{\parallel} и D_{\perp}) — амплитуды напряженности электрического поля отраженной (преломленной) волны.

2.6* Решение. Если отражение не является полным, то, как следует из закона преломления света, каждому углу падения соответствует вещественный угол преломления ψ . Поэтому оба отношения

$$\frac{R_{\perp}}{E_{\perp}} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad \frac{R_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}$$

вещественны. Физически это означает, что при отражении либо совсем нет изменения фазы, либо это изменение составляет 180° . Если падающая волна линейно поляризована, то разность фаз между ее компонентой с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости падения, и компонентой с электрическим вектором, лежащим в этой плоскости, равна либо 0° , либо 180° . На основании изложенного такая же разность фаз будет и у компонент отраженной волны. При сложении такие компоненты дают линейно поляризованную волну.

2.7. $\operatorname{tg}\delta = \cos(\varphi - \psi)\operatorname{tg}\alpha; \operatorname{tg}\rho = -\frac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos(\varphi + \psi)}\operatorname{tg}\alpha.$

2.8. 1) $56^\circ 19'$; 2) $\Delta = \frac{4n^2 - (1 + n^2)^2}{4n^2 + (1 + n^2)^2} \approx -0,08$.

2.9. $57^\circ 05'$.

2.10. $\Delta = \frac{\mathcal{J}_{\perp} - \mathcal{J}_{\parallel}}{\mathcal{J}_{\perp} + \mathcal{J}_{\parallel}} = \frac{\cos^2(\varphi - \psi) - \cos^2(\varphi + \psi)}{\cos^2(\varphi - \psi) + \cos^2(\varphi + \psi)}; \quad \Delta = 0; 0,82; 1,0; 0.$

2.11. $\frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_e} = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 = 0,074.$

2.12. Электрический вектор должен лежать в плоскости падения. Угол падения равен углу Брюстера. Показатель преломления призмы должен быть равен $n = \operatorname{tg}^{-1}(\alpha/2) = \sqrt{3} = 1,73$ (ход луча через призму симметричен).

2.13. $A = \pi - 2\varphi_B = 68^\circ$.

2.14. Результат получается непосредственно из формул Френеля.

2.15* Свет внутри слоя диэлектрика испытывает многократные отражения на его границах (рис. 630). Если $\delta = 2\pi nl/\lambda$ — разность фаз, соответствующая двукратному прохождению света через слой (т.е. от одной его границы до другой и обратно), то с учетом многократных отражений для комплексной амплитуды отраженной волны можно записать

$$\frac{R}{E} = r_1 + d_1 d'_1 r_2 e^{-i\delta} + d_1 d'_1 r'_1 r_2^2 e^{-2i\delta} + d_1 d'_1 r'^2 r_2^3 e^{-3i\delta} + \dots,$$

откуда

$$\frac{R}{E} = r_1 + \frac{d_1 d'_1 r_2 e^{-i\delta}}{1 - r'_1 r_2 e^{-i\delta}},$$

или, с учетом того, что $r' = -r$, $r^2 + dd' = 1$, получаем

$$\frac{R}{E} = \frac{r_1 + r_2 e^{-i\delta}}{1 + r_1 r_2 e^{-i\delta}}.$$

2.16. При отражении от идеального зеркала может меняться только фаза, но не амплитуда волны. Поэтому для коэффициента Френеля (см. задачу

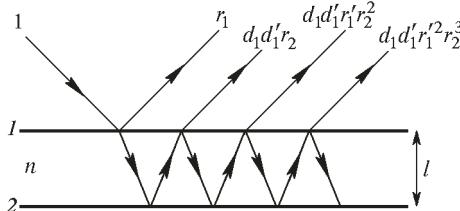


Рис. 630

2.15) при таком отражении можно записать $r_2 = e^{i\alpha}$. Подставляя значение в формулу, получим ответ предыдущей задачи:

$$\frac{R}{E} = \frac{r_1 + e^{i(\alpha-\delta)}}{1 + r_1 e^{i(\alpha-\delta)}},$$

откуда

$$\left| \frac{R}{E} \right|^2 = \frac{r_1^2 + 1 + 2r_1 \cos(\alpha - \delta)}{1 + r_1^2 + 2r_1 \cos(\alpha - \delta)} = 1.$$

2.17. $\rho = \rho_1 + \rho_2 \tau_1^2 + \rho_2 \tau_1^2 \rho_1 \rho_2 + \dots = \rho_1 + \frac{\rho_2 \tau_1^2}{1 - \rho_1 \rho_2}$, $\tau = \tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_2 \rho_1 \rho_2 + \dots = \frac{\tau_1 \tau_2}{1 - \rho_1 \rho_2}$.

$$\text{2.18* } \rho_m = \frac{m\rho}{1 + (m-1)\rho}; \quad \tau_m = \frac{1 - \rho}{1 + (m-1)\rho}.$$

Решение. Присоединим к системе m плоскостей одну такую же $(m+1)$ -ю плоскость. Первые m плоскостей можно заменить одной плоскостью с коэффициентами отражения и пропускания ρ_m и τ_m . Тогда задача будет сведена к предыдущей, и мы получим для коэффициентов отражения и пропускания $(m+1)$ плоскостей

Рис. 631

$$\rho_{m+1} = \rho_m + \rho \frac{\tau_m^2}{1 - \rho \rho_m}, \quad \tau_{m+1} = \frac{\tau \tau_m}{1 - \rho \rho_m}.$$

Отсюда методом математической индукции нетрудно получить ответ.

$$\text{2.19. } \rho_N = \frac{2N}{2N + 5,76}; \quad \tau_N = \frac{5,76}{2N + 5,76} \quad (\text{см. рис. 631}).$$

$$\text{2.20. } -0,0142; -0,0878; -0,19; -0,468.$$

2.21* Решение. Из формулы Френеля

$$\frac{R_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}$$

следует, что R_{\parallel} меняет знак при переходе через угол Брюстера. Физически это означает, что при таком переходе R_{\parallel} претерпевает скачкообразное изменение фазы на π . При строгой справедливости формулы Френеля это не вело бы к нарушению непрерывности электромагнитного поля, так как для угла Брюстера $R_{\parallel} = 0$. В действительности R_{\parallel} не обращается в ноль ни при каком угле падения. Поэтому должна существовать окрестность угла Брюстера (обычно довольно узкая), при переходе через которую фаза R_{\parallel} меняется непрерывно от 0 до π . Для света, электрический вектор которого перпендикулярен к плоскости падения, подобной окрестности не существует. Поэтому из нестрогого соблюдения закона Брюстера вытекает эллиптическая поляризация отраженного света, о которой шла речь в условии задачи. Обратное заключение можно получить, если разложить падающую волну на компоненты с колебаниями в плоскости падения и перпендикулярно к ней и принять во внимание, что эти компоненты в линейном приближении отражаются независимо друг от друга (принцип суперпозиции).

2.22* Да, будет.

Решение. Если закон Брюстера имеет место, то угол Брюстера, при котором не отражается \parallel -компоненты электрического поля, определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_2 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1}}. \quad (1)$$

Возможен случай, когда не будет отражаться \perp -компонента. Угол, при котором это имеет место, определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi'_B = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\mu_2 \epsilon_1 - \mu_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}}. \quad (2)$$

Оба случая взаимно исключают друг друга, так как знаки подкоренных выражений в (1) и (2) противоположны. Если ϵ и μ существенно положительны, то всегда существует угол, при котором не отражается либо \parallel , либо \perp -компонента падающей волны. Для определения этого угла «полней поляризации» надо пользоваться той из формул (1) или (2), у которой подкоренное выражение положительно.

2.24. Искомый угол φ определяется из уравнения

$$\sin^4 \varphi - \frac{n^2 + 1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \varphi + \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{8} = 0,$$

которое дает $\varphi_1 = 60^\circ 32'$, $\varphi_2 = 38^\circ 42'$.

2.25. Левая.

2.26. $\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{2n^2}{1+n^2}}$; $\delta = 2 \operatorname{arctg} \frac{1-n^2}{2n}$, где n — показатель преломления второй (оптически менее плотной) среды относительно первой ($n < 1$).

2.27. $n \geq (\sqrt{2}-1)^{-1} \approx 2,41$.

2.28. Нельзя.

2.29. $n = \frac{1 + \sin(3\pi/8)}{\cos(3\pi/8)} = 5,028$. Так как веществ с показателем преломления 5 не существует, то в оптике осуществить этот случай нельзя. Его можно было бы осуществить с более длинными электромагнитными волнами.

2.30. $n > 3,732$.

2.31* $P = u(1+r)\cos^2\varphi$; $T = \frac{1}{2}u(1-r)\sin 2\varphi$, где u — плотность энергии падающей волны.

Решение. Если N — число фотонов падающей волны в единице объема, то импульс фотонов, упавших за 1 с на зеркало, равен $(Nh\nu/c)cS\cos\varphi$, где S — площадь зеркала. Так как $Nh\nu = u$, то этот импульс равен $\mathbf{p}_1 = uS\cos\varphi \mathbf{i}$, где \mathbf{i} — единичный вектор, проведенный в направлении падающего луча. Импульс отраженных за 1 с фотонов $\mathbf{p}_2 = ruS\cos\varphi \mathbf{i}'$, где \mathbf{i}' — единичный вектор в направлении отраженного луча. Таким образом, изменение импульса световой волны за 1 с вследствие отражения от зеркала

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = -uS(\mathbf{i} - r\mathbf{i}')\cos\varphi.$$

В силу закона сохранения импульса изменение импульса зеркала будет таким же по величине, но противоположным по направлению. Поэтому сила \mathbf{F} , действующая на зеркало со стороны излучения,

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = uS(\mathbf{i} - r\mathbf{i}')\cos\varphi,$$

а сила \mathbf{f} , действующая на единицу площади зеркала,

$$\mathbf{f} = u(\mathbf{i} - r\mathbf{i}')\cos\varphi.$$

Проектируя это выражение на нормаль к зеркалу и на плоскость зеркала, получим результаты, приведенные в ответе.

2.32* $P = u \left(\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi \right)$; $T = \frac{1}{2}u\sin 2\varphi$.

Решение. Если отражающая поверхность идеально матовая, то она отражает падающее на нее световое излучение целиком, причем после отражения получаются лучи всевозможных направлений, и все эти направления равновероятны. Вероятность того, что направление распространения отразившегося фотона составляет с нормалью к зеркалу угол между θ и $\theta + d\theta$, равна $(2\pi)^{-1}d\Omega = \sin\theta d\theta$, так как соответствующий элемент телесного угла $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$. Результирующий импульс всех отразившихся фотонов перпендикулярен к плоскости зеркала. Среднее значение проекции импульса одного отраженного фотона на нормаль к зеркалу равно

$$\int_0^{\pi/2} \frac{h\nu}{c} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} \frac{h\nu}{c}.$$

Следовательно, для результирующего импульса всех отразившихся фотонов получаем

$$\mathbf{p}_2 = NcS \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \frac{h\nu}{c} \mathbf{n} = \frac{1}{2} uS \cos \varphi \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности зеркала. Сила же \mathbf{f} , действующая на единицу площади зеркала,

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{S} = u \left(\mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{n} \right) \cos \varphi.$$

Проектируя это выражение на нормаль \mathbf{n} и плоскость зеркала, получим результаты, приведенные в ответе.

2.33. $F = -\frac{\mathcal{J}}{c} \frac{2(n-1)}{n+1} = -1,3 \cdot 10^{-3}$ дин/см². Удивительно то, что сила давления направлена против волнового вектора падающего света.

2.34. $M = \frac{\mathcal{J}}{4c} \pi D^2 d \frac{n^2 - 1}{n(n^2 + 1)} = 2 \cdot 10^{-3}$ дин · см. Если направление падения волны — слева от нормали к поверхности пластинки, то врачающий момент направлен по часовой стрелке.

В задачах 2.33 и 2.34 импульс фотона $p_\phi = \hbar k$, где k — волновое число: $k = \omega/v = \omega n/c$. Число фотонов, падающих на 1 см² поверхности за 1 с, равно $\frac{\mathcal{J}}{\hbar \omega} \cos \varphi$, где φ — угол падения. См. также задачи 2.31 и 2.32.

2.36. $P = u/3$, где u — плотность излучения.

2.37. 1) $P_1 = 0,45$ дин/м², или приблизительно полмиллиграмма на квадратный метр; 2) $P_2 = 2P_1 = 0,9$ дин/м²; 3) $P_3 = \frac{3}{2}P_1 = 0,675$ дин/м².

2.38* 1) $F = Su$; 2) $F = Su$; 3) $F = \frac{4}{3}Su$, где S — площадь диаметрального сечения шара; u — плотность энергии падающей волны.

Решение. Так как размеры шара велики по сравнению с длиной световой волны, то при решении задачи можно ограничиться приближением геометрической оптики и не учитывать дифракцию. Чтобы объединить оба

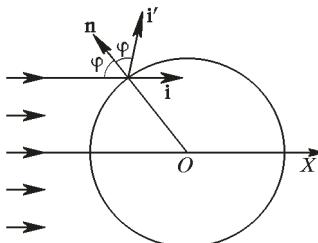


Рис. 632

первых случая, допустим, что коэффициент отражения поверхности шара равен r и не зависит от угла падения φ . Сила, действующая на единицу поверхности шара, равна $\mathbf{f} = u \cos \varphi (\mathbf{i} - r\mathbf{i}')$ (см. решение задачи 2.31). Направим ось X параллельно падающим лучам (рис. 632). В силу симметрии результирующая сила светового давления на шар должна быть направлена

вдоль оси X и равна $F = \int f_x dS$, где dS — элемент поверхности шара, а интегрирование ведется по освещенной половине этой поверхности. Имеем

$$f_x = u \cos \varphi - ru \cos \varphi \cos(\pi - 2\varphi) = (1 - r)u \cos \varphi + 2ru \cos^3 \varphi.$$

Далее, $dS = 2\pi a^2 \sin \varphi d\varphi$, где a — радиус шара. Интегрирование дает $F = \pi a^2 u$. Таким образом, сила F не зависит от коэффициента отражения и одинакова для абсолютно зеркального и абсолютно черного шаров. Решение в случае идеально матовой поверхности шара производится таким же методом и дает $F = 4\pi a^2 u/3$.

2.39* На идеально отражающий шар световое давление будет больше.

Решение. Если бы коэффициент отражения r не зависел от угла падения, то сила светового давления в обоих случаях была бы одинакова (см. решение предыдущей задачи) Однако в действительности r зависит от угла падения, и поэтому силы давления будут различаться. Пусть луч AB (рис. 633) падает на шар под углом падения $\varphi = 45^\circ$. Тогда отраженные фотоны будут распространяться перпендикулярно к падающему лучу и каждый из них передаст шару импульс $h\nu/c$. Если же фотон падает на шар в пределах поверхности, ограниченной окружностью BD , то, отразившись, он будет иметь составляющую импульса, направленную противоположно распространению падающего света; в этом случае он передаст шару импульс больше $h\nu/c$.

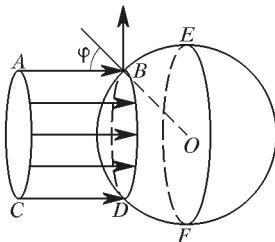


Рис. 633

Напротив, если фотон попадет на шар в пределах кольца $BEFD$, то переданный им импульс будет меньше $h\nu/c$. Если r не зависит от угла падения, то избытки переданных импульсов по сравнению с $h\nu/c$ на круге BD будут полностью компенсированы недостатками на кольце $BEFD$. В действительности r зависит от угла падения. Для неполяризованного света r возрастает с возрастанием угла падения. Поэтому недостатки переданных импульсов на кольце $BEFD$ будут превосходить по величине избытки их на круге D . Отсюда следует, что сила светового давления на шар, частично отражающий свет, будет меньше, чем в случае идеально отражающего шара.

2.40. $F_1 = 5,9 \cdot 10^{13}$ дин. $\frac{F_1}{F_2} = \frac{3}{16} \frac{uT^2}{\pi^2 a R_p} = 1,6 \cdot 10^{-14}$. Здесь a — радиус земного шара, R — расстояние от Земли до Солнца, T — время обращения Земли вокруг Солнца. По сравнению с силой тяготения сила светового давления ничтожно мала, и ее влияние на движение планет лежит далеко за пределами точности астрономических измерений.

2.41* $u' = u(1 \pm 4v/c)$, где u , u' — плотности энергии падающей и отраженной волн соответственно, а v — скорость движения зеркала. Знак плюс соответствует движению зеркала навстречу распространению света, а знак минус — противоположному случаю.

Решение. Вообразим бесконечно длинный цилиндр, в котором без трения медленно движется зеркальный поршень со скоростью v ($v \ll c$). В цилиндре в направлении движения поршня распространяется цуг волн, длина которого численно равна скорости света, т. е. $l = c \cdot 1c = c$. Пусть в момент времени $t = 0$ голова цуга достигла поршня. Тогда, как нетрудно рассчитать, конец цуга достигнет поршня в момент времени $t = c/(c - v)$. За это время поршень пройдет путь $x = vt = vc/(c - v)$, а головной фронт отраженной волны — путь ct . Поэтому длина отраженного цуга будет

$$l' = ct + x = c \frac{c+v}{c-v}.$$

Если площадь поршня равна единице, то изменение энергии световой волны в этом процессе равно $u'l' - ul$. При этом световое давление P произвело работу Px . Следовательно,

$$ul = u'l' + P.$$

При медленном движении поршня световое давление можно принять равным $P = 2u$, если пренебречь добавочными членами порядка $u(v/c)$. Подставляя в предыдущее выражение значения P , x , l , l' , получим результат, приведенный в ответе для удаляющегося поршня. Этот результат верен, если пренебречь величинами порядка $(v/c)^2$.

2.42* Напряженность электрического поля E_0 в нефокусированном пучке оценим по формуле $W = \frac{c}{4\pi} \bar{E} \bar{H} S = \frac{c}{4\pi} \bar{E}^2 S$, а давление излучения P_0 — по формуле $P_0 = \frac{W}{cS}$. Таким путем находим

$$E_0 \approx \sqrt{\bar{E}^2} = \sqrt{\frac{4\pi W}{cS}} = 1,45 \cdot 10^3 \text{ ед. СГСЭ} = 4,3 \cdot 10^5 \text{ В/см};$$

$$P_0 \approx 1,67 \cdot 10^5 \text{ дин/см}^2 \approx 0,16 \text{ атм.}$$

В фокусе можно пользоваться теми же формулами, вычислив предварительно ширину пучка. Для оценки будем считать, что весь свет концентрируется в пределах центрального светлого кружка с радиусом $R = 0,61f\lambda/r$ и площадью $\pi R^2 = \pi(0,61f\lambda/r)^2 = (0,61 \cdot \pi f\lambda)^2/S$, где r — радиус поперечного сечения падающего пучка. Эту площадь и надо подставить в предыдущие формулы вместо S . В результате получим

$$E \approx \sqrt{\bar{E}^2} \approx \frac{S}{0,61\pi f\lambda} E_0 = 1,5 \cdot 10^3 E_0 = 6,4 \cdot 10^8 \text{ В/см},$$

$$P = \left(\frac{S}{0,61\pi f\lambda} \right)^2 P_0 = 2,25 \cdot 10^6 P_0 \approx 3,6 \cdot 10^5 \text{ атм.}$$

2.43. 1) $P = \frac{\mathcal{E}}{c\tau S} (1+r) = \frac{2}{3}(1+r)$ дин/см², где r — коэффициент отражения поверхности; 2) $P \approx \frac{\mathcal{E}}{c\tau\lambda^2} \approx 150(1+r)$ атм; 3) $E \approx \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{8\pi\mathcal{E}}{c\tau}} \approx 6 \cdot 10^4$ ед. СГСЭ $\approx 1,8 \cdot 10^6$ В/см.

$$\mathbf{2.44.} E \approx \sqrt{\frac{4\pi J_C}{c} \frac{D}{\alpha_C F}} \approx 500 \text{ В/см.}$$

$$\mathbf{2.45.} f = \frac{\pi \mathcal{J} R^4}{4cF^2} \approx 0,42 \text{ дин} = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ Гц.}$$

§ 3. Интерференция монохроматического света

3.1* Решение. Интерferирующие волны можно записать в виде

$$E_1 = E_{10} e^{i(\omega t - k_{1x}x + \delta_1)} = \hat{E}_{10} e^{-ik_{1x}x},$$

$$E_2 = E_{20} e^{i(\omega t - k_{2x}x + \delta_2)} = \hat{E}_{20} e^{-ik_{2x}x},$$

где $k = 2\pi/\lambda$; $k_{1x} = k \sin \varphi_1$; $k_{2x} = k \sin \varphi_2$; $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi/2$.

Интенсивность светового поля $\mathcal{J}(x)$ в плоскости OXY , перпендикулярной оси OZ (рис. 634), найдем следующим образом:

$$\mathcal{J}(x) = \overline{(E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*)} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + 2\overline{E_{10}E_{20}} \cos \Delta\varphi(x).$$

где $\Delta\varphi(x) = k(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)x = kx \cdot 2 \sin(\varphi/2) \approx k\varphi x$. Таким образом, интенсивность

$$\mathcal{J}(x) \approx \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + 2\overline{E_{10}E_{20}} \cos k\varphi x.$$

Отсюда период интерференционной картины (рис. 634) найдем из условия $k\varphi\Delta x = 2\pi$ так что $\Delta x \approx \lambda/\varphi$.

Часто период интерференции обозначается как Λ , т. е. $\Lambda \approx \lambda/\varphi$.

Совершенно очевидно, чем меньше угол схождения интерферирующих волн φ , тем зорнее интерференционная картина. Так, чтобы $\Delta x \sim 1$ мм при

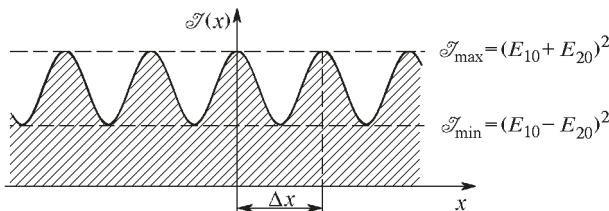


Рис. 634

$\lambda \approx 0,5$ мкм, необходимо, чтобы $\varphi \sim 0,5 \cdot 10^3$ рад. Таким образом, малость угла схождения в реальной оптике — необходимое требование.

Заметим, что задача решается совершенно аналогично, если интерферирующие волны записать не в комплексной форме, а в тригонометрической:

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t - k_{1x}x + \delta_1);$$

$$E_2 = E_{20} \cos(\omega t - k_{2x}x + \delta_2).$$

3.2. $\Delta x \approx \lambda/\varphi$, где $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

3.3. $\lambda = xd/a = 5 \cdot 10^{-5}$ см = 500 нм = 5000 Å = 0,5 мкм.

3.4. $n_{\text{Cl}} = n + N\lambda/l = 1,000865$. Интерференционные полосы смещаются в сторону трубки.

$$\mathbf{3.5.} \quad x = m\lambda \frac{a+b}{2a(n-1)\alpha}.$$

$$\mathbf{3.6.} \quad \Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} = 0,5 \text{ мм}; \quad N = \frac{4L(n-1)^2\alpha^2}{\lambda} = 10.$$

3.7. Максимальное число полос $N = \frac{l(n-1)\alpha}{\lambda} = 40$ получится при удалении экрана на $L = \frac{l}{4(n-1)\alpha} = 20$ м от бипризмы. Полосы исчезнут, если удалить экран от бипризмы не менее чем на $2L = 40$ м.

$$\mathbf{3.8.} \quad N = \frac{4ab}{a+b} \frac{(n-1)^2\alpha^2}{\lambda}.$$

3.9.* Решение. Пока источник S находился на оси системы, центр интерференционной картины получался в точке O (рис. 635).

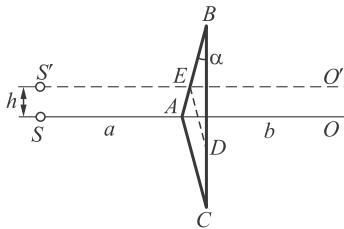


Рис. 635

Сместим источник вверх на расстояние h в положение S' , а затем вообразим, что от бипризмы отрезана часть $ACDE$. Эта часть действует как плоскопараллельная пластинка толщиной $d = 2ha$, смещающая картину вниз на $N = \frac{d(n-1)}{\lambda}$ полос. Центр картины O' переместится вниз на расстояние $x' = N\Delta x$, где $\Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} \frac{a+b}{a}$ — ширина полосы. Смещение полосы O' будет $x' = \frac{N\lambda}{2(n-1)\alpha} \frac{a+b}{a} = \frac{d(a+b)}{2aa}$. Подставляя значение a , получим $x' = h + \frac{hb}{a}$. Смещение из прежнего центра O будет $x = x' - h = hb/a$.

3.10. 1) Ширина полос уменьшится в $\frac{a}{a-4f} = 2$ раза. 2) Ширина полос уменьшится в $a/f = 8$ раз.

$$\mathbf{3.11.} \quad a = f\lambda/\Delta x = 0,6 \text{ мм}.$$

$$\mathbf{3.12.} \quad \Delta x \approx \frac{\lambda \cos \varphi_1}{2a\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi_1}}.$$

$$\mathbf{3.13.} \quad \alpha = \frac{\lambda}{2\Delta x \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi_1}} \approx 12''.$$

3.14. Приблизительно при $d < \lambda/4n = 10^{-5}$ см.

3.15. Оптическая толщина пленки должна быть равна четверти длины световой волны в вакууме. Показатель преломления пленки $n' = \sqrt{n}$, где n — показатель преломления стекла. Отражения не будет также в том случае, когда оптическая толщина пленки $\ln' = l\sqrt{n} = \lambda/4 + N\lambda/2$, где N — целое число. Однако при пользовании белым светом применять толстые пленки невыгодно.

$$\mathbf{3.16. } \alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x} \approx 8''.$$

$$\mathbf{3.17. } E \propto 4\mathcal{J}_0 \sin^2 \frac{2\pi x \alpha}{\lambda}, \text{ где } x \text{ — расстояние от ребра клина.}$$

3.18. Для обеих поляризаций есть потеря половины длины волны. Связано это с тем, что угол падения $\varphi_2 > \varphi_B \approx 83,7^\circ$ ($\operatorname{tg} \varphi_B \approx \sqrt{81} = 9$) для этих длин волн. Поэтому $\alpha_1 = \frac{\lambda}{4h} = 1^\circ 26'$, $\alpha_2 = \frac{3\lambda}{4h} = 4^\circ 18'$.

3.19. $\mathcal{J} = 2\mathcal{J}_0 \left[1 - \frac{\sin(2\pi\psi h/\lambda)}{2\pi\psi h/\lambda} \cos \frac{2\pi h \alpha}{\lambda} \right]$. При $\psi = \frac{\lambda m}{2h}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) $\mathcal{J} = 2\mathcal{J}_0$, где \mathcal{J}_0 — интенсивность принимаемого сигнала в отсутствие отражения.

3.20. $U_0 \propto \cos \frac{\pi L \sin \alpha}{\lambda}$, где $\alpha = \omega_3 t$ — угол поворота антенн от направления на источник за время t , ω_3 — угловая скорость вращения Земли. При малых значениях α период изменения амплитуды напряжения равен

$$T = \frac{\lambda T_3}{\pi L} = 2,3 \text{ мин.}$$

$$\mathbf{3.21. } \Delta\theta < \lambda/D = 2''.$$

$$\mathbf{3.22. } \frac{\Delta l}{l} = \frac{2h\alpha\sqrt{n^2 - 1}}{\lambda} = 0,75.$$

3.23. Будет видна картина, похожая на кольца Ньютона. Радиус m -го светлого кольца

$$r_m = \sqrt{a^2 - \frac{m\lambda}{n\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}}.$$

$$\mathbf{3.24. } \Delta l = 0,35 \text{ мм.}$$

$$\mathbf{3.25. } f = 137 \text{ см.}$$

$$\mathbf{3.26. } R = 1 \text{ м; } \lambda_{\text{кр}} = 0,7 \text{ мкм.}$$

$$\mathbf{3.27. } f = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{(n-1)m\lambda} = 54 \text{ см.}$$

$$\mathbf{3.28. } r = \sqrt{R\lambda/n} = 0,63 \text{ мм.}$$

$$\mathbf{3.29. } r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}}.$$

$$\mathbf{3.30. } r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}.$$

$$\mathbf{3.31. } f = \frac{r^2}{10\lambda(n-1)} = 1,1 \text{ м.}$$

3.32. $\frac{\mathcal{I}_{\max}}{\mathcal{I}_{\min}} = \left(\frac{n^2 + 1}{2n}\right)^2 = 1,17$. Интерференционная картина достаточно контрастна, чтобы ее можно было увидеть глазами.

$$\mathbf{3.33.} D = \frac{2(n-1)m\lambda}{r^2} = 0,25 \text{ дptr, где } m = 8.$$

3.34.* Решение. Каждое кольцо Ньютона можно определить как линию, вдоль которой разность хода между интерферирующими лучами постоянна. Легко видеть, что при удалении линзы от пластинки «кольца постоянной разности хода» будут сжиматься к центру картины, а при приближении — расширяться от центра. Центр картины попеременно будет темным и светлым.

$$\mathbf{3.35.} v = La/\lambda_0 = 100 \text{ кГц.}$$

$$\mathbf{3.36.} n = \sqrt{n_{\text{ст}}}$$

$$\mathbf{3.37.} R = 0,034 \text{ (коэффициент отражения по энергии).}$$

$$\mathbf{3.38.} R = 0,269 \text{ (коэффициент отражения по энергии).}$$

$$\mathbf{3.39. a) } \mathcal{I}(x) = 3 + 4 \cos \Omega x + 2 \cos 2\Omega x, \text{ где } \Omega = k \frac{d}{F}.$$

$$6) \text{ Координата первого минимума } x_0 = \frac{\lambda F}{3d} = 10^{-2} \text{ см.}$$

в) Отношение интенсивностей соседних минимумов: 9 : 1.

3.40. Щель должна располагаться в месте максимальной крутизны освещенности интерференционной полосы ($\Delta_0 = m\lambda \pm \frac{\lambda}{4}$); $a \geqslant \frac{10^{-8}\lambda}{4\pi} \approx 0,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}$. Для сравнения: радиус первой боровской орбиты атома водорода $r_1 \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, а ядра (протона) $r_p \simeq 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$.

3.41. Амплитуда излучателя 3 должна быть в $\sqrt{2}$ раз больше амплитуд излучателей 1 и 2. Минимумы нулевой интенсивности направлены под углом $\theta = \pm 60^\circ$ к линии источников 1–2–3.

4. Интерференция квазимохроматического света. Временная когерентность

4.1.* Решение. Двум длиnam волн соответствуют две системы колец Ньютона с незначительно отличающимися размерами. Если линза соприкасается с поверхностью пластинки, то в центре картины светлые (темные) кольца одной системы практически совпадают со светлыми (темными) кольцами другой системы. Поэтому вблизи центра кольца видны почти так же резко, как при монохроматическом свете. Но при некотором удалении от центра светлое кольцо одной системы может совпасть по положению с темным кольцом другой системы. В соответствующем месте кольца Ньютона не будут видны, а в окрестности этого места они будут видны нерезко.

Определим номер N -го светлого кольца для длины волны λ_2 , которое совпадает по положению с $(N+1)$ -м кольцом для длины волны λ_1 . Первому темному кольцу (точнее, центральному темному пятну) для длины волны λ_1 соответствует разность хода $\lambda_1/2$, второму темному кольцу — разность хода $\lambda_1 + \lambda_1/2$ и т. д., наконец $(N+l)$ -му темному кольцу — разность хода $N\lambda_1 + \lambda_1/2$. Та же разность хода $N\lambda_1 + \lambda_1/2$, очевидно, должна равняться $N\lambda_2$,

так как должно происходить наложение N -го светлого кольца для длины волны λ_2 на $(N+1)$ -е темное кольцо для длины волны λ_1 . Итак,

$$N\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{2} = N\lambda_2, \text{ откуда } N = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{5890}{12} \approx 490.$$

Отсюда следует, что кольца пропадут в окрестности четырехъярусного кольца. Легко видеть, что они опять будут резкими в окрестности $2 \cdot 490 = 980$ -го кольца. При удалении линзы от пластинки кольца стягиваются к центру (см. решение задачи 3.34). Если линзу переместить на $490\lambda_1$, то через поле зрения пройдет 490 колец, и в центре картины кольца исчезнут. При перемещении линзы на $2 \cdot 490\lambda_1 = 980\lambda_1$ кольца в центре снова будут резкими; при перемещении на $3 \cdot 490\lambda_1 = 1470\lambda_1$ — опять пропадут и т. д.

4.2. $\Delta\lambda/\lambda = 1/980; \Delta\lambda = 6,02 \text{ \AA}$.

4.3.* $\Delta\lambda = 0,75 \text{ \AA}$.

Решение. Разность хода между лучами, отразившимися от передней и задней поверхностей пластиинки, равна $2dn\cos\psi + \lambda/2$. Так как центр кольца темный, то эта величина должна содержать нечетное число полуволн. Первому темному кольцу соответствует такое приращение угла преломления ψ , что разность хода уменьшается на λ . Это дает $2dn(1 - \cos\psi) = \lambda$, или $4dn\sin^2(\psi/2) = \lambda$. Для малых углов $dn\psi^2 = \lambda$. Малые углы падения и преломления связаны соотношением $\varphi = n\psi$. Таким образом, $\varphi^2 = n\lambda/d$. Для радиуса первого темного кольца получаем $r = f\varphi = f\sqrt{n\lambda/d} = 9,5 \text{ мм}$. Величина $\Delta\lambda$ находится обычным способом по порядку интерференции, который равен $2dn/\lambda$. Это дает $\Delta\lambda = \lambda^2/(2dn) = 0,75 \text{ \AA}$.

4.4.* $N = 2$.

Решение. Максимальный угол падения $\varphi_{\max} = D/(6f)$. Поэтому из результатов решения предыдущей задачи получаем $N = \frac{dD^2}{36nf^2\lambda} = 2$.

4.5. $d_{\min} = \frac{36nf^2\lambda}{D^2} = 0,81 \text{ мм}$.

4.6. Если бы свет был монохроматическим, то в конце процесса в точке P порядок оказался бы равным $m = 50$. На самом деле в связи с немонохроматичностью света $m_{\max} = \lambda/\Delta\lambda = 10 < 50$. Наблюдатель увидит всего $N = 20$ полос.

4.7. $\alpha \leq \frac{c}{2h\Delta\nu} = 0,05$.

4.8. $A = 1 + \frac{dl}{fh} = 5$.

4.9. $\Delta P = \Delta P_1 \frac{2\omega}{\Delta\omega} = 200 \text{ мм рт. ст.}$

4.10.* 1) $\Delta x = \lambda/2\alpha = 0,94 \text{ мм}$.

2) Решение. Допустим сначала, что линия ртути — двойная с двумя длинами волн $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$. Пусть на отрезке x от вершины клина укладывается N интерференционных полос с длиной волны λ_1 и $N - \frac{1}{2}$ полос с длиной волны λ_2 , т. е. $N\lambda_1 = (N - \frac{1}{2})\lambda_2$. Тогда на конце этого отрезка интерференционные максимумы от длины волны λ_1 наложатся на интерференционные минимумы от длины волны λ_2 и интерференционные полосы про-

падут. Число N и будет искомым числом полос. Оно равно $N = \frac{\lambda_2/2}{\lambda_2 - \lambda_1}$, или, пренебрегая квадратами $\Delta\lambda$, $N = \frac{\lambda/2}{\Delta\lambda}$. Допустим теперь, что интервал между λ_1 и λ_2 непрерывно и равномерно заполнен длинами волн. Тогда всю спектральную линию можно считать состоящей из двух линий шириной $\Delta\lambda/2$, каждая с расстоянием между ними $\Delta\lambda/2$. К этим двум линиям применимы предыдущие рассуждения. Поэтому число полос N найдется из предыдущего результата заменой $\Delta\lambda \rightarrow \Delta\lambda/2$, что дает $N = \lambda/\Delta\lambda$. Таким образом, считая линию ртути сплошной, находим $N \approx \lambda/\Delta\lambda \approx 54600$.

$$3) x = N\Delta x \approx 51,3 \text{ м}; h = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} \approx 1,49 \text{ см.}$$

$$4) \delta\varphi \approx \sqrt{2\Delta\lambda/\lambda} \approx 0,006 \text{ рад} = 0,35^\circ.$$

$$4.11. V(\Delta) = \left| \frac{\sin(\Delta \frac{\pi\Delta v}{c})}{\Delta \frac{\pi\Delta v}{c}} \right|, \text{ где } \Delta \text{ — разность хода.}$$

$$4.12. R \geq \lambda/\Delta\lambda = m = \Delta/\lambda \approx 5 \cdot 10^8.$$

$$4.13. \Delta = c/\Delta v = 30 \text{ м.}$$

4.14. $\mathcal{J} \propto 2a^2 [1 + \cos(\frac{\omega}{c} lat)]$. Таким образом, спектр тока фотоприемника содержит постоянную составляющую и равную ей по амплитуде переменную составляющую на частоте $\Omega = \frac{\omega}{c} la$.

4.15. Здесь некогерентное наложение двух интерференционных картин $\mathcal{J}_1(x) = 2\mathcal{J}_{10} [1 + \cos(k + \frac{\Delta k}{2} \frac{d}{b} x)]$ и $\mathcal{J}_2(x) = 2\mathcal{J}_{20} [1 + \cos(k - \frac{\Delta k}{2} \frac{d}{b} x)]$, где d — расстояние между щелями, b — расстояние от щелей до экрана.

$V(x) = \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} \sin^2 \delta}$, где $\delta = \frac{\Delta k}{2} \frac{d}{b} x$; $\gamma = \frac{\mathcal{J}_{20}}{\mathcal{J}_{10}}$. При $\gamma = 3$ (по условию) $V(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 (\frac{\Delta k}{2} \frac{d}{b} x)}$.

4.16. Длина когерентности $l_{\text{ког}} \approx c/\Delta v \approx 0,3 \text{ см}$. Поэтому будет виден лишь нулевой порядок: вначале при отражении от передней грани при $\Delta x = 0$, затем от задней грани при $x = 2dn = 2 \text{ см}$. Затем будут следующие порядки интерференции убывающей интенсивности.

4.17. Ток фотоприемника $\mathcal{J} \propto I_1 I_2 + I(t) \cos(\frac{4\pi}{\lambda} vt)$, где $I^2(t) = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos \Delta\Omega t$, $\Delta\Omega = \frac{4\pi\delta\lambda}{\lambda^2} v$. Частота несущей $\Omega = \frac{4\pi}{\lambda} v$, период биений $\tau = \frac{2\pi}{\Delta\Omega} = 6,25 \text{ с}$; $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. Время измерений должно быть $\sim 6 \text{ с}$. График зависимости тока фотоприемника $\mathcal{J}(t)$ изображен на рис. 636.

4.18. $\mathcal{J}(t) \propto I_0 \Delta\omega [1 + \frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi ft} \sin(2\pi vt)]$, где $v = \frac{2v}{\lambda} = 400 \text{ Гц}$; $f = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} v = \frac{1}{250} \text{ Гц}$. Время измерения $\tau = \frac{1}{2f} = 125 \text{ с}$. График зависимости тока от времени изображен на рис. 637.

4.19*. 1) $\mathcal{J}_2/\mathcal{J}_1 \approx 1,9$; 2) $\Delta\lambda_1 = 0$; $\Delta\lambda_2/\lambda \approx 0,03$; 3) $h_1 = \lambda L / 2\Delta\lambda_1 = 4 \text{ м}$, где $\Delta\lambda_1 = 0,375 \text{ м}$ — ширина полосы первого (монохроматического) источника; $h_2 \approx \begin{cases} 4,6 \text{ м}, \\ 3,6 \text{ м} \end{cases}$ — возможные положения второго (квазимонохроматического) источника.

Решение. График $\mathcal{I}(x)$, приведенный в тексте задачи, является наложением двух интерференционных картин от двух некогерентных источников

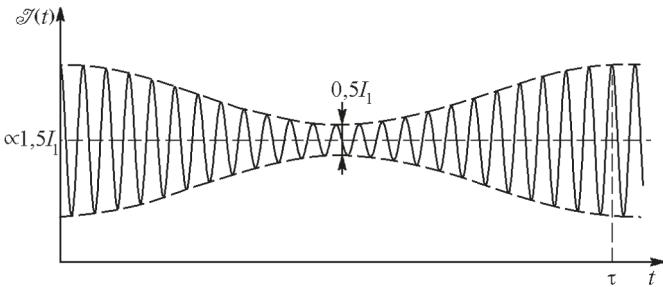


Рис. 636

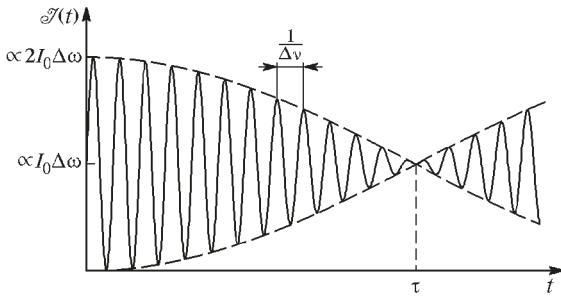


Рис. 637

ков. По характеру графика $\mathcal{I}(x)$ легко понять, что одна из компонент излучения, попадающего на точечный приемник — монохроматическая (пусть первая), а вторая — квазимонохроматическая ($\Delta\lambda_2 \neq 0$). Вторая компонента при $x \gtrsim 10$ м создает световой фон, не когерентный первой компоненте. Таким образом, с помощью графика устанавливаем, что $2\mathcal{I}_1 + 2\mathcal{I}_2 \approx 4,7 - 3,5 = 1,2$ у. е. Кроме того, устанавливаем, что $2\mathcal{I}_1 + 2\mathcal{I}_2 \approx 3,5$ у. е. откуда получаем, что $\mathcal{I}_2/\mathcal{I}_1 \approx 1,9$.

Поскольку первая компонента монохроматическая, то $\Delta\lambda_1 = 0$. Осцилляции интенсивности суммарного светового поля заканчиваются при $t \approx 30$. Связано это с тем, что здесь заканчиваются осцилляции в интерференционной картине второго квазимонохроматического источника. Таким образом, определяем, что $\Delta\lambda_2 = \lambda/m = 10^{-1}$ см, т. е. требуемая оценка $\Delta\lambda_2/\lambda = 1/m \approx 0,03$ (3%).

Для ответа на вопрос, где расположен монохроматический источник, оценим ширину его интерференционной полосы прямым измерением на графике:

$$\Lambda_1 = \frac{x_{\max}}{m} = \frac{15}{40} \approx 0,375 \text{ м.}$$

С другой стороны, оценивая угол схождения лучей на приемнике как $\varphi_1 \approx \frac{h_1}{L/2}$, запишем, что

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda}{\varphi_1} = \frac{\lambda L}{2h_1},$$

откуда определяем, что

$$h_1 = \frac{\lambda L}{2\Lambda_1} \approx 4 \text{ м.} \quad (*)$$

Положение второго источника можно оценить по биениям на графике $\mathcal{J}(x)$:

$$n\Lambda_2 = (n \pm 1)\Lambda_1.$$

Из графика видно, что $n = 8$. Поэтому $\Lambda'_2 = 7\Lambda_1/8 \approx 0,328 \text{ м}$ или $\Lambda''_2 = 9\Lambda_1/8 \approx 0,422 \text{ м}$. Воспользовавшись формулой (*) для положения первого источника, получим две возможных высоты второго, квазимонохроматического источника

$$h_2 = \frac{\lambda L}{2\Lambda_2} \approx \begin{cases} 4,6 \text{ м} \\ 3,6 \text{ м.} \end{cases}$$

4.20. 1) $\mathcal{J}_2/\mathcal{J}_1 \approx 1,9$;

2) $\lambda_1 = \Delta/m = 0,55 \text{ мкм}$ (монохроматическая компонента $\Delta\lambda_1 = 0$);

$\lambda_2 \approx \begin{cases} 500 \text{ нм;} \\ 600 \text{ нм;} \end{cases}$ (квазимонохроматическая компонента);

3) $\Delta\lambda_1 = 0$; $\Delta\lambda_2 = \frac{\lambda_2^2}{\Delta_{\max 2}} \approx \begin{cases} 13 \text{ нм;} \\ 18 \text{ нм.} \end{cases}$

4.21. $\alpha = \sqrt{\lambda_0 \Delta v/v} = 0,05$; $\Delta\lambda \lesssim \alpha^2 \lambda = 25 \text{ нм}$; $\tau \gtrsim 1/\Delta v = 0,2 \text{ с.}$

4.22. 1) $\alpha = \frac{\lambda k T}{l \Delta P_1} = 0,9 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$, где ΔP_1 берется из приведенного графика и соответствует интерференционному максимуму или минимуму. (Например, максимум $m = 8$. Тогда $\Delta P_1 = \frac{4400}{8} = 550 \text{ Па.}$)

2) Показатель преломления при нормальных условиях $n_0 = 1 + \alpha N_L = 1,00024$.

3) $\Delta\lambda/\lambda \approx 1/m_{\max} \approx 0,1$.

4.23. 1) $K = \frac{2l(n_0 - 1)}{\lambda} \Delta P_1 \approx 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ (для воды $K = 2,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$), где ΔP_1 — значение давления, при котором возникает интерференционный максимум 1-го порядка.

2) $\Delta\lambda/\lambda = \lambda/\Delta_{\max} = 1/7$ согласно приведенному графику.

4.24. $v = \frac{\lambda f}{2\alpha(n-1)} = 6,3 \text{ см/с}; \frac{\Delta f}{f} = \frac{2l}{D} = 2,5 \cdot 10^4$.

4.25. 1) $\alpha = \frac{1}{N(n-1)} = 0,035 \approx 2^\circ$.

2) $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{m} = 10 \text{ нм.}$

3) Число полос ограничивается немонохроматичностью волны, а не границами области интерференции. $V_{50} = \frac{\sin(\frac{\Delta k \beta}{2} x_{50})}{\frac{\Delta k \beta}{2} x_{50}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \approx 0,64$.

4.26. Пики степени когерентности $\gamma(\tau)$ (максимумы видности) определяются соотношением

$$V(m) = |\gamma(\tau)| \propto \left| \frac{\sin \frac{\delta\omega\tau}{2}}{\frac{\delta\omega\tau}{2}} \right| \cdot \left| \frac{\sin \frac{N\Omega\tau}{2}}{\sin \frac{\Omega\tau}{2}} \right|,$$

где $\Omega = \frac{2\pi c \Delta \lambda}{\lambda_0^2}$; $\tau = \frac{m \lambda_0}{c}$; $\Delta \lambda_0 = \frac{2\pi c \Delta \omega}{\omega_0^2}$; $\delta \omega = \frac{2\pi c \delta \lambda}{\lambda_0^2}$. Таким образом,

$$V(m) \propto \left| \frac{\sin \frac{\pi m \delta \lambda}{\lambda_0}}{\frac{\pi m \delta \lambda}{\lambda_0}} \right| \cdot \left| \frac{\sin \frac{\pi N m \delta \lambda}{\lambda_0}}{\sin \frac{\pi m \delta \lambda}{\lambda_0}} \right|.$$

Отсюда $m_{\max} = \frac{n \lambda_0}{\Delta \lambda}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $\Delta \lambda$ — интервал между дискретными компонентами спектра. Ширина пиков (отклонение от m_{\max} , при котором видность обращается в нуль) $\Delta m = \frac{\lambda_0}{N \Delta \lambda} = \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda_0}$. Здесь $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$.

§ 5. Протяженные источники света. Пространственная когерентность

$$5.1^* V(b) = \frac{\mathcal{J}_{\max} - \mathcal{J}_{\min}}{\mathcal{J}_{\max} + \mathcal{J}_{\min}} = \left| \frac{\sin \frac{\pi b d}{\lambda R_0}}{\frac{\pi b d}{\lambda R_0}} \right|.$$

Решение. На рис. 638 изображена схема интерферометра Юнга. Протяженный источник, размер которого равен b , освещает экран со щелями, находящийся на расстоянии R_0 от источника, расстояние между щелями равно d .

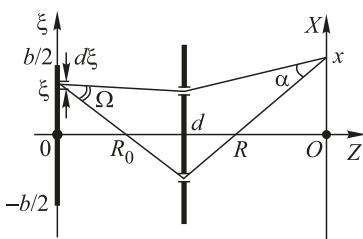


Рис. 638

Плоскость наблюдения расположена на расстоянии R от интерферометра. Проведем ось ξ вдоль по протяженному источнику, а ось OX — по экрану. Обозначим интенсивность от единицы длины протяженного источника через I_0 . Тогда элемент $d\xi$ источника дает интенсивность $I_0 d\xi$. Пусть этот элемент (точечный источник света) размещена на расстоянии ξ от центра источника, тогда интенсивность на экране в точке x , очевидно, будет равна

$$d\mathcal{J}_\xi = 2I_0 d\xi (1 + \cos k\Delta),$$

где $k = 2\pi/\lambda$, а разность хода $\Delta \approx \Omega \xi + \alpha x$, где в свою очередь угол Ω , называемый апертурным углом, или апертурой интерференции, равен $\Omega \approx d/R_0$, а угол схождения лучей $\alpha \approx d/R$.

Все элементы протяженного источника светят некогерентно, и каждый из них дает свою интерференционную картину. Осталось сложить эти картины от каждого из элементов:

$$\mathcal{J}(x) = \int_{-b/2}^{b/2} d\mathcal{J}_\xi = 2I_0 \int_{-b/2}^{b/2} d\xi \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{d}{R_0} \xi + \frac{d}{R} x \right) \right] \right\}.$$

Поскольку период интерференционной картины $\Lambda \approx \lambda/a = \lambda R/d$, то, подставив это значение, получим

$$\mathcal{J}(x) = 2I_0 \int_{-b/2}^{b/2} d\xi \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\Lambda} \left(x + \frac{R}{R_0} \xi \right) \right] \right\}.$$

Введем промежуточное обозначение $q = \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{R}{R_0}$. Тогда очевидно, что под знаком интеграла стоит косинус суммы: $\cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda} x + q\xi \right)$, который по формуле тригонометрии разлагается так: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. При интегрировании легко выясняется, что поскольку пределы интегрирования по ξ симметричны, то интеграл от произведения синусов равен нулю. Поэтому

$$\mathcal{J}(x) = 2I_0 b + 2I_0 \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x \int_{-b/2}^{b/2} \cos q\xi d\xi = 2\mathcal{J}_0 \left(1 + \frac{\sin(qb/2)}{qb/2} \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x \right).$$

Совершенно очевидно, что в полученном выражении коэффициент при $\cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda} x \right)$ есть видность V интерференционной картины, если поставить модуль:

$$V(b) = \frac{\mathcal{J}_{\max} - \mathcal{J}_{\min}}{\mathcal{J}_{\max} + \mathcal{J}_{\min}} = \left| \frac{\sin(qb/2)}{qb/2} \right|.$$

Преобразуем величину, стоящую под знаком синуса:

$$\frac{qb}{2} = \frac{\pi bd}{\lambda R_0} = \frac{\pi \Omega}{\lambda/b}.$$

Обычно в таком виде и записывают полученное выражение:

$$V(b) = \left| \frac{\sin \frac{\pi \Omega}{\lambda/b}}{\frac{\pi \Omega}{\lambda/b}} \right|.$$

Исследуем его. Если изменять размер b источника, оставляя неизменной базу интерферометра, то при некотором значении b^* видность картины превратится в ноль, а экран будет просто равномерно засвечен с интенсивностью $2\mathcal{J}_0$. Это предельное значение $b^* = \lambda/\Omega = \lambda R_0/d$. Обычно полагают, что при $b \geq b^*$ $V = 0$. На рис. 639 показан график $V(b)$, а на рис. 640 — график $\mathcal{J}(x)$. По мере приближения b к своему пределу b^* величина осцилляции уменьшается (по всей плоскости, ведь источник монохроматический).

Наоборот, если размер источника b зафиксировать, но изменять базу интерферометра d , то легко получить следующее неравенство. Пусть $\psi = b/R_0$ — угловой размер источника, каким мы его видим из места расположения интерферометра. Тогда осцилляции интенсивности на экране будут наблюдаться при условии, что

$$d \leq \frac{\lambda R_0}{b} = \frac{\lambda}{\psi}.$$

Эта предельная величина λ/ψ имеет смысл размера области когерентного освещения, или размера пятна пространственной когерентности. Величину $\lambda/\psi = \rho_{\text{kog}}$ также называют *радиусом пространственной когерентности*.

5.2. $D < \lambda/\alpha \approx 0,05$ мм.

5.3. $l > fDa/\lambda \approx 100$ см.

5.4. 1) Пусть источником света служат две одинаковые некогерентные светящиеся точки S_1 и S_2 (или светящиеся линии, параллельные прямой,

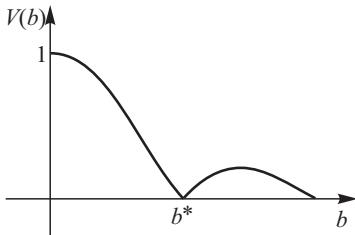


Рис. 639

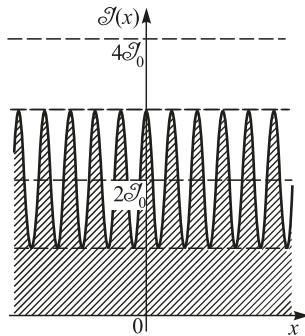


Рис. 640

вдоль которой пересекаются плоскости зеркал Френеля), отстоящие друг от друга на расстояние l . Их мнимые изображения S'_1 и S''_1 , S'_2 и S''_2 расположены так, как показано на рис. 641. Интерференционная картина на экране AB от пары мнимых источников S'_1 и S''_1 будет смещена относительно интерференционной картины от другой пары источников S'_2 и S''_2 на расстояние O_1O_2 ,

равное l . Если $l = \lambda/(2\varphi)$, где φ — угловое расстояние между источниками, то максимумы одной интерференционной картины наложатся на минимумы другой, и интерференционные полосы пропадут. Если источником служит светящаяся полоска шириной l , параллельная линии пересечения зеркал, то ее можно мысленно разбить на пары светящихся линий, расстояние между которыми равно $l/2$. В этом случае можно применить рассуждение, приведенное выше, заменив l на $l/2$. Полосы пропадут, когда $l = \lambda/\varphi$. Если источник имеет неправильную форму, то для получения резких интерференционных полос его по-перечные размеры в направлении, параллельном

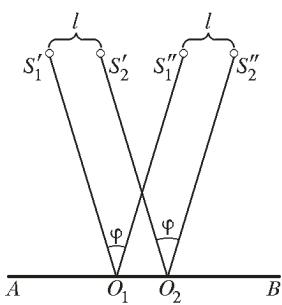


Рис. 641

линии, соединяющей соответствующие изображения и зеркала Френеля, должны быть малы по сравнению с λ/φ .

2) Размер источника в направлении, перпендикулярном к плоскости зеркала, должен быть мал по сравнению с расстоянием от источника до зеркала.

5.5. Число наблюдаемых полос $N \approx 60$; полосы размываются на расстоянии от центра $x = 0,6$ см; допустимый размер источника $l \approx 2 \cdot 10^{-2}$ см.

5.6. Интерференционная картина — кольца равного наклона с центром F . При наклоне пластиинки кольца становятся эллиптическими. Центр картины — в точке схождения параллельных лучей, падающих на пластиинку нормально.

мально. При наклоне пластиинки на угол α центр картины смещается на $x = f \operatorname{tg} \alpha \approx f \alpha \approx 5,3$ см.

5.7. Первое исчезновение полос будет при ширине щели

$$b = \frac{\lambda}{a} \frac{x-f}{x} \frac{(L-f)x-Lf}{x} = \frac{L-3f}{6a} \lambda = 0,58 \text{ мм.}$$

5.8. $b = 4d_1^2/d_2 = 0,2$ см.

5.9. $N = m_{\max} = 4L^2/d^2 \approx 10^4$; $\Delta\lambda/\lambda \approx m_{\max}^{-1} \approx 10^{-4}$.

5.10. $N \approx (2nL/d)^2 \approx 22500$.

5.11. $b < f\sqrt{\lambda/L} = 1,25$ мм.

5.12. $m = \Delta/\lambda \approx 360$, где $\Delta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$; угол схождения лучей Ω в силу симметрии примерно равен апертурному углу интерференции: $\Omega = (h/L) \operatorname{tg} \psi \cos^2 \varphi \approx 0,2 \cdot 10^{-4}$. Ширина интерференционных полос $\Lambda \approx \lambda/\Omega = 2,8$ см. Предельный размер источника $b \approx \Lambda \approx 2,8$ см. Допустимая немонохроматичность $\Delta\lambda \approx \lambda/m \approx 1,6$ нм.

5.13. $m_{\max} \approx 1000$; $m_{\min} \approx 720$; $\Delta\lambda \lesssim 0,5$ нм. Источник света может иметь любые размеры.

5.14. $\Delta\lambda \approx \lambda/m \approx 40$ нм; $\Omega = 0,5\lambda/b = 10^{-3}$ рад.

5.15* $b = \lambda/(2\Omega) = 2,5 \cdot 10^{-2}$ см; $m \approx 12$; $\Delta\lambda = \lambda/m \approx 40$ нм.

Решение. Из графика, изображенного на рис. 420, легко определяется видность интерференционной картины в центре: $V = \frac{3,3 - 0,7}{3,3 + 0,7} \approx 0,65$. В задаче 5.1 было получено аналитическое выражение для видности интерференционной картины протяженного источника:

$$V(b) = \left| \frac{\sin \frac{\pi b d}{\lambda L}}{\frac{\pi b d}{\lambda L}} \right| = \left| \frac{\sin \frac{\pi \Omega}{\lambda/b}}{\frac{\pi \Omega}{\lambda/b}} \right|,$$

где $\Omega = d/L$ — апертура интерференции, т. е. угол, под которым из точки, где расположен источник, видна база интерферометра. Если рассматривать видность как функцию размера источника, то при $b = \lambda/\Omega$ имеем $V = 0$. Таким образом, это значение b можно рассматривать как предельно допустимое: $b_{\max} = \lambda/\Omega$.

Однако в задаче требуется по виду интерференционной картины определить реальный размер b . Для этого необходимо решить следующее трансцендентное уравнение:

$$V = \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 0,65 \approx \frac{2}{3} \approx \frac{2}{\pi}.$$

Корень этого уравнения, очевидно, равен $x = \pi/2$, откуда следует $x = \frac{\pi\Omega}{\lambda/b} = \frac{\pi}{2}$ и $b = \lambda/(2\Omega) = 2,5 \cdot 10^{-2}$ см. Немонохроматичность источника оценивается так: $\Delta\lambda \approx \lambda/m \approx 50$ нм, где $m \approx 10$ мы определяем из графика — это максимально различимый порядок интерференционной картины.

5.16. 1) $\Lambda \approx 10^{-3}$ см; 2) $|x| \leq 0,25$ см (область локализации полос); 3) $m_{\max} \approx 250$, $m_{\min} = 0$, $N \approx 500$; 4) $\Delta\lambda \approx 20 \text{ \AA}$; 5) $b \leq 10^{-3}$ см.

5.17. 1) $\Lambda \approx 5 \cdot 10^{-3}$ см; 2) $N \approx 100$; 3) $-0,1 \text{ см} < x < 0,4 \text{ см}$ (область локализации); 4) $m_{\max} \approx 180$, $m_{\min} \approx 80$; 5) $b \leq 5 \cdot 10^{-3}$ см.

5.18. $\psi \approx \lambda/d \approx 1,9 \cdot 10^{-7}$ рад. Более точный расчет учитывает «круглость» звезды: $\psi \approx 1,22\lambda/d = 2,3 \cdot 10^{-7}$ рад = $0,047''$.

5.19. 1) $L = \frac{D}{4\alpha(n-1)} = 1$ м; $\Lambda = 5 \cdot 10^{-3}$ см; 2) $\Delta\lambda = \lambda/m_{\max} = 5$ нм, где $m_{\max} = 100$; 3) $\psi \leq \lambda/D = 2,5 \cdot 10^{-5} = 0,09''$.

5.20. 1) $L = \frac{D-a}{2\alpha} = 1$ м, где $\alpha = a/f = 10^{-2}$; $\Lambda = \lambda/\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ см; $N = 200$; 2) $m_{\max} = 100$; $\Delta\lambda = \lambda/m_{\max} = 5$ нм; 3) $b \leq \frac{2\lambda f}{D-a} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ см.

5.21. $V(L) = \left| \frac{\sin(0,1\pi L)}{0,1\pi L} \right|$; полосы размываются при $L = 10m$ [см], где $m = 1, 2, 3, \dots$

5.22. $V_0 \approx 0,41$; при $V = V_1 = 0,827$ имеем $z \approx 1$ м, $\Delta z \approx 0,5$ м; интерференционная картина размывается при $z \approx 33$ см, $\Delta z \approx 17$ см.

5.23. На экране наблюдаются кольца (полосы равного наклона), образующие изображение источника — два светлых кольца (по условию). Направление на второе светлое кольцо $\theta_2 = \sqrt{2\lambda/l} = 1,045 \cdot 10^{-2}$. Искомый минимальный диаметр источника $D = 2\theta_2 f \approx 2,1$ см.

5.24. $\psi \approx \lambda/2d = 5 \cdot 10^{-5}$ рад.

5.25. Здесь некогерентное наложение двух сдвинутых интерференционных картин разной интенсивности: $\mathcal{J}_1(x) = 2\mathcal{J}_{10}[1 + \cos(k\frac{d}{b}(x + \delta))]$ и $\mathcal{J}_2(x) = 2\mathcal{J}_{20}[1 + \cos(k\frac{d}{b}(x - \delta))]$, где d — расстояние между щелями, b — расстояние до экрана, $\delta = \frac{l}{2a}b$ — величина сдвига картины.

$$V = \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} \sin^2(k\frac{d}{b}\delta)}, \quad \gamma = \mathcal{J}_{20}/\mathcal{J}_{10};$$

по условию $\gamma = 3$: $V = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \cos^2(\frac{\omega d}{2cb})}$.

5.26. $\rho_{\parallel} \approx 8\lambda/\psi^2$; $\Delta\lambda/\lambda < \psi^2/8$.

5.27. $\Delta P = \Delta P_1 \frac{\Lambda}{\Delta x} m_{\max} = 120$ Па, где $\Lambda = \lambda F/d = 6 \cdot 10^{-3}$ см — ширина интерференционных полос; $m_{\max} = 400$ — максимальный порядок интерференции. $\psi \leq \lambda/d = 6 \cdot 10^{-5}$ рад.

5.28. 1) $\Lambda = 10^{-3}$ см; 2) $b \leq 10^{-3}$ см; 3) число наблюдаемых полос ограничено не немонохроматичностью источника, а геометрией интерферометра: $N = \frac{d^2}{L^2} \frac{D}{\lambda} = 500$.

5.29. 1) $\Delta x = \frac{\lambda}{2\delta(n-1)} = 50$ мкм; 2) $L = \frac{D}{4\delta(n-1)} = 25$ см; 3) $b = \frac{\lambda f}{D} = 40$ мкм.

5.30. $L \simeq \frac{cd}{\lambda\Delta f} \cdot 10^5$ см = 2 км.

5.31. $V_{\text{кор}} \simeq \lambda^3/\psi^2 \simeq 2 \cdot 10^{-9}$ см⁻³ ($\lambda = 5,5 \cdot 10^{-5}$ см).

5.32. $m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 50$. Максимальное число колец будет наблюдаться, если ограничение из-за пространственной некогерентности будет слабее, чем ограничение из-за временной некогерентности, т. е. при $m_2 > m_{\max}$, откуда искомое предельное смещение тубуса микроскопа $\delta = \frac{1}{2\psi} \sqrt{\frac{\lambda R}{m_{\max}}} = \frac{\sqrt{R\Delta\lambda}}{2\psi} = 0,2$ мм.

§ 6. Дифракция Френеля. Зонные пластинки

6.1. $\mathcal{J} \approx \mathcal{J}_0$; $E \approx 0$, в точке A — минимум освещенности.

6.2* Решение. Если E_1, E_2, E_3 — поля, создаваемые в точке A последовательными полными зонами Френеля, то искомое поле E в точке A представится рядом

$$E = \frac{1}{2} \underbrace{(E_1 + E_2 + \dots + E_{N-1})}_{\text{четное число}} + \frac{1}{2} E_N + (E_{N+1} + E_{N+2} + \dots).$$

При небольшом N первая скобка близка к нулю, а последняя — к $E_{N+1}/2$, так что

$$E \approx \frac{1}{2}(E_N + E_{N+1}) \approx 0.$$

В точке A будет минимум освещенности.

6.3. При четном N в точке A будет минимум освещенности ($E = 0$), при нечетном N — максимум, приблизительно такой же, как при одной открытой центральной зоне.

6.4* Амплитуда колебаний в точке S увеличится в $\sqrt{3}$ раз, а интенсивность — в три раза.

Решение. Колебание, вызываемое всеми зонами Френеля, изображается вектором \vec{OC} , колебание от одной трети первой зоны — вектором \vec{OA} (рис. 642). Вектор \vec{AC} представляет колебание, вызываемое волнами, отразившимися от внешней части экрана, расположенной за отверстием CD (см. рис. 434). Эти три вектора образуют равносторонний треугольник, если пренебречь уменьшением радиуса витка спирали на одном обороте. При смещении центрального круга к источнику на $\lambda/12$ фаза отраженной им волны увеличится на $2 \cdot 2\pi/12 = \pi/3$, и колебание изобразится вектором, равным и противоположно направленным вектору \vec{AC} . Интенсивность всей отраженной волны в точке S обратится в ноль. При смещении круга CD в противоположную сторону фаза колебания \vec{OA} уменьшится на $\pi/3$, и вектор \vec{OA} повернется в положение \vec{OC} . Результирующее колебание найдется сложением векторов \vec{AC} и \vec{OC} . Таким путем найдем, что амплитуда колебаний в точке S увеличится в $\sqrt{3}$ раз, а интенсивность — в три раза.

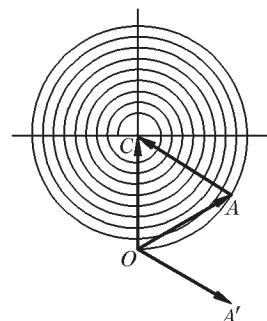


Рис. 642

6.5. $h = \frac{3}{8} \lambda$.

6.6. Энергия перераспределяется, причем в одних точках плоскости изображения плотность светового потока возрастает, а в других убывает. Весь поток через плоскость изображения возрастает в 2 раза.

6.7* $r = \sqrt{\frac{m\lambda}{a^{-1} + b^{-1}}}$. Центр колец темный, если m — четное число, и светлый, если m — нечетное число.

Решение. Освещенность в центре дифракционной картины можно найти, разбивая волновую поверхность ACB (рис. 643) на зоны Френеля. Если

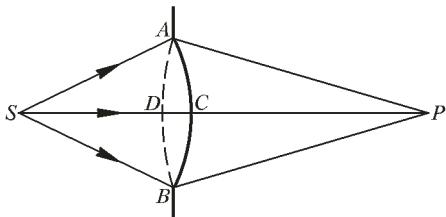


Рис. 643

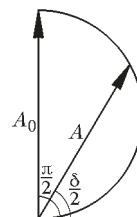


Рис. 644

в ней уложится четное число зон Френеля, то в P получится минимум освещенности; если нечетное — максимум. Построим сферу радиусом PA с центром в P . Число зон Френеля на волновой поверхности ACB , очевидно, равно длине CD , деленной на $\lambda/2$. Отсюда легко получить результат, приведенный в ответе.

6.8. а) $\mathcal{J} = 0$; б) $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0/4$.

6.9. $\mathcal{J}'/\mathcal{J} = 25/9$ ($\mathcal{J} = 2\mathcal{J}_0$; $\mathcal{J}' = 50\mathcal{J}_0/9$, где \mathcal{J}_0 — интенсивность в точке наблюдения в отсутствие экрана).

6.10. $\mathcal{J}'/\mathcal{J} = 4/9$ ($\mathcal{J} = 3\mathcal{J}_0$; $\mathcal{J}' = 4\mathcal{J}_0/3$, где \mathcal{J}_0 — интенсивность в точке наблюдения в отсутствие экрана).

6.11. $L = \frac{d^2}{4(2m+1)\lambda}$, $m = 0, 1, 2, \dots$; при $m = 0$ $L_{\max} = 0,5$ м.

6.12. Возрастет в 2 раза. Если источники когерентны, не изменится.

6.13. $\Delta b = \frac{D^2}{8\lambda} - b_1 = 12$ см.

6.14. $\mathcal{J} = 0$.

6.15. $y' = (b/a)y = 10,5$ мм. Опыт был поставлен Робертом Полем (1884–1976) с параметрами, указанными в задаче. Чтобы опыт удался, необходимо, чтобы глубина неровностей h удовлетворяла условию $h < \frac{\lambda}{D} \frac{ab}{a+b} = 180\lambda \approx 0,1$ мм. Шар можно заменить диском при условии $y < \frac{2a}{D} \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}} \approx 1$ м. Соответствующий опыт был поставлен Эрнстом фон Ангерером (1881–1951).

6.16. $h = \frac{2m+5/4}{2(n-1)}\lambda$, где $m = 0, 1, 2, \dots$

6.17. $h = 3 + 6k$ [см], где $k = 0, 1, 2, \dots$; $b_m = \frac{D^2}{4m\lambda} = 33,3; 11,1; 6,65$ [см]; ..., где $m = 1, 3, 5, 7, \dots$

6.18. $r_{\min} = \sqrt{m\lambda L} \approx 1,15$ мм, где $m = 1\frac{2}{3}$.

6.19. $d_{\min} = 2,236$ мм.

6.20. $h = \frac{(2m+1)\lambda}{2(n-1)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$; $\mathcal{J}_{\max} = 9\mathcal{J}_0$.

6.21* $\mathcal{J} \approx 0,41\mathcal{J}_0$.

Решение. Если r — радиус отверстия, то разность хода между лучами, приходящими от его края и от центра, равна $r^2/(2L)$, где L — расстояние от центра отверстия до точки наблюдения. Положим сначала $r = r_1$, а затем $r = r_1(1-\alpha)$, где r_1 — радиус центральной зоны Френеля. Тогда соответствующие разности фаз будут π и $\delta = \pi(1-\alpha)^2$. Как видно из векторной диаграммы (рис. 644), амплитуды колебаний A_0 и A в рассматриваемых двух случаях связаны соотношением $A = A_0 \sin(\delta/2)$, а интенсивности — соотношением $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \sin^2(\delta/2)$. При $\alpha = 1/3$ $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \sin^2(2\pi/9) \approx \mathcal{J}_0 \sin^2 40^\circ \approx 0,41\mathcal{J}_0$.

6.22. 1) $b_m = \frac{r^2}{m\lambda}$. Значения b_m приведены в таблице.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_m , см	200	100	66	50	40	33	29	25	22	20

2) См. рис. 645;

3) $\Delta b = 200$ см.

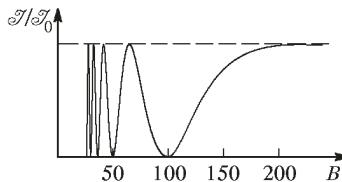


Рис. 645

6.23. $\mathcal{J}_P = \frac{9}{4}\mathcal{J}_0$.

6.24. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \left(\frac{1}{4} + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)$, где \mathcal{J}_0 — интенсивность света в отсутствие экрана, $\delta = \pi r^2 / (b\lambda)$ — разность фаз между лучами, пришедшими в точку наблюдения от краев и центра углубления. Подставляя численные значения, получим $\delta = \pi/2$, $\mathcal{J} = 5\mathcal{J}_0/4$. Интенсивность увеличится в 5 раз.

6.25. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = 10\mathcal{J}_0$, т. е. интенсивность возрастет в 5 раз (\mathcal{J}_1 и \mathcal{J}_2 — интенсивности соответствующих спектральных компонент в точке наблюдения, \mathcal{J}_0 — интенсивности этих же компонент в отсутствие диска).

6.26. Освещенность при наличии листа в два раза больше.

6.27. $\mathcal{J} = 3\mathcal{J}_0$.

6.28. Электрическое поле в диэлектрике максимально на оси пучка на таком расстоянии от поверхности, из которого диаметр пучка воспринимается

как диаметр первой зоны Френеля $b = D^2 n / (4\lambda) = 100$ см:

$$E_{\max} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{8\pi S}{c}} = 1200 \text{ В/см.}$$

6.29. $l = D^2 / (4\lambda) = 50$ см; $E_{\max} = \frac{5}{3} \sqrt{8\pi S / c} = 1500$ В/см.

6.30* $r = \sqrt{m\lambda fb / (b - f)} = 0,9\sqrt{m}$ мм, где $m = 1, 3, 5, \dots$

Решение. После линзы — сходящийся в фокус F пучок, причем в фокусе световые волны по-прежнему в фазе. Если из точки F провести сферическую поверхность радиусом f , касающуюся краев отверстия радиусом r и центра линзы, то высота сферического сегмента $h_f \approx r^2 / (2f)$. Если также из точки P на экране провести сферическую поверхность (рис. 646) радиусом $b_m = b - m\lambda/2$, где m — число открытых зон Френеля для точки P , то тогда $b_m^2 = (b - m\lambda/2)^2 = r^2 + (b - h_f)^2$. Кроме того, из рис. 646 следует, что $(f - h_f)^2 + r^2 = f^2$. Полагая, что $h_f \approx h$, находим ответ.

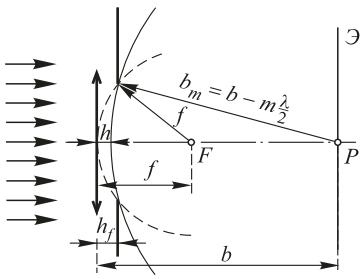


Рис. 646

$$= r^2 D / \lambda = 5,5.$$

6.32. $\mathcal{J} = 8\mathcal{J}_0$.

6.33. Интенсивность света увеличится в два раза.

6.34* $r = \sqrt{\frac{m\lambda}{|f^{-1} - a^{-1}|}}$. Центр колец темный, если m — четное число, и светлый, если m — нечетное число.

Решение. Метод решения такой же, как и в задаче 6.7. Разница только в том, что теперь сферическая волна не расходится, как было раньше, а сходится в точке S (рис. 647). Зоны Френеля для точки P строятся поэтому с вогнутой стороны сферической волновой поверхности. Число зон, укладывающихся в отверстии диафрагмы, будет равно длине CD , деленной на $\lambda/2$.

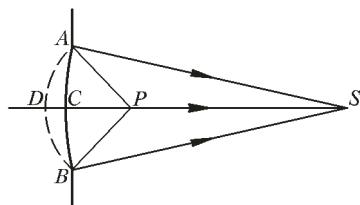


Рис. 647

6.37. $\mathcal{J} \approx 4\mathcal{J}_0$.

6.38. $\mathcal{J} \approx \mathcal{J}_0$.

6.39. $f_{\max} = r_1^2 / \lambda = 8$ м; $h = \frac{2m+1}{2(n-1)} \lambda$, $m = 0, 1, 2, \dots$; $\mathcal{J}_{\max} = 36\mathcal{J}_0$.

6.40. Основной фокус есть точка, для которой зоны, начерченные на пластинке, совпадают с зонами Френеля. Если r — радиус первой зоны, начертленной на пластинке, то основной фокус определяется выражением $f_0 = r^2 / \lambda$. Следующие фокусы получаются, когда в первой зоне, на-

6.35. На расстоянии 1,2 м.

6.36. $f = 90$ см; $r_1 = 0,672$ мм. Изображения, т. е. максимумы, расположенные на оси пластиинки, отодвинутся от последней.

черченной на пластинке, укладывается $3, 5, \dots, 2k + 1$ зон Френеля, т. е. когда $r^2/f_k = (2k+1)\lambda$. Следовательно, $f_k = \pm f_0/(2k+1)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Знаку «плюс» соответствуют действительные, а «минус» — мнимые фокусы.

6.41. Фокусы пластинки различных порядков: $f_k = \frac{ab}{(a+b)(2k+1)}$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Положения всех изображений определяются формулой $a^{-1} + b_k^{-1} = f_k^{-1}$.

6.42* $N \sim \alpha^{-2} \sim 400$.

Решение. Допустим сначала, что источник света S точечный, а зонная пластинка CD наклонена к его оптической оси под углом $\pi/2 - \alpha$ (рис. 648). Из рисунка видно, что $x^2 = a^2 + R^2 + 2aR \sin \alpha$. Извлекая квадратный корень и пренебрегая всеми степенями радиуса R , начиная с третьих, получим

$$x = a + R \sin \alpha + \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{2a}.$$

Аналогично,

$$y = b - R \sin \alpha + \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{2b}.$$

Отсюда для разности хода между лучами SCA и SOA находим:

$$\Delta = (x + y) - (a + b) = \frac{R \cos^2 \alpha}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

или $\Delta = \Delta_0 - \delta\Delta$, где Δ_0 — значение Δ при отсутствии наклона зонной пластинки, а $-\delta\Delta$ — приращение величины Δ , обусловленное наклоном:

$$\delta\Delta = \Delta_0(1 - \cos^2 \alpha) = \Delta_0 \sin^2 \alpha \approx \Delta_0 \alpha^2.$$

Если $\delta\Delta \ll \lambda$, то наклон пластинки не скажется существенно на работе зон, расположенных в пределах круга радиусом R . Если же $\delta\Delta \approx \lambda/2$, то все зоны, расположенные выше этого круга, становятся бесполезными и даже вредными. Из этого условия находится предельное значение разности хода $\Delta_0 \approx \lambda/(2a^2)$. Соответствующее число зон Френеля будет $N \approx \Delta_0/(\lambda/2) \approx 1/\alpha^2$.

Допустим теперь, что фотографируемый предмет не точечный, причем его центр расположен на оси зонной пластинки. Для периферийных точек предмета, не лежащих на оси пластинки, последняя действует как наклонная под углом α . Поэтому предельное число зон Френеля, при котором должно получиться наиболее отчетливое изображение, будет $N \sim \alpha^{-2} \sim 400$.

6.43. $\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = \left(\frac{\pi D^2}{4f\lambda} \right)^2 \approx 3,9 \cdot 10^7$; $b \approx \frac{2\lambda f}{\pi D} = 0,4 \cdot 10^{-3}$ см.

6.44. Фокусное расстояние пластинки $f = r_1^2/\lambda = 50$ см. Полное число зон Френеля $m = D^2/(4\lambda f) = 100$. $\mathcal{J}/\mathcal{J}_0 = m^2 = 10^4$; $b = 2\lambda f/D = 2r_1^2/D = 5 \cdot 10^{-3}$ см.

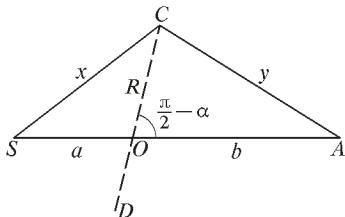


Рис. 648

$$6.45^* r_m = \sqrt{\left| \frac{m\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R}} \right|}.$$

Решение. Как видно из рис. 649, $SM^2 = (a - x)^2 + r_m^2$. Извлекая квадратный корень и пренебрегая квадратом малого отрезка x , находим $SM \approx a + r_m^2/(2a) - x$. Аналогично, $MS' \approx b + r_m^2/(2b) - x$. Далее, $x \approx r_m^2/(2R)$.

Радиус m -й зоны определяется из условия $|(|SM| + |MS'|) - (|SA| + |AS'|)| = m\lambda/2$. Подставляя сюда вычисленные значения, получим

$$r_m^2 = \left| \frac{m\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R}} \right|.$$

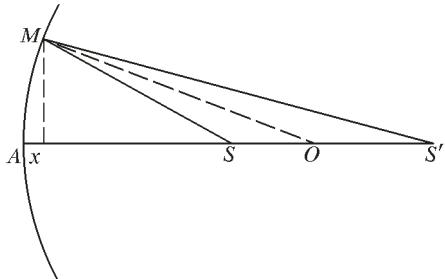


Рис. 649

Результат можно получить проще, если заметить, что в принятом приближении зоны Френеля можно строить не на поверхности зеркала, а на поверхности сходящейся волн.

ны, отразившейся от зеркала. Радиус кривизны этой поверхности a' найдется по формуле зеркала $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} - \frac{2}{R} = 0$. Для определения r_m теперь достаточно заменить в ответе к задаче 6.7 величину a на a' .

$$6.46^* b_0 \approx 1,33 \text{ см}, b_{+1} = 80 \text{ см}, b_{-1} = 400 \text{ см}.$$

Решение. Разность хода $(SMS') - (SAS')$ (рис. 649), возникающая при отражении лучей от соседних зон Френеля, равна нулю для изображения нулевого порядка и $\pm\lambda/2$ для изображений ± 1 -го порядков. При отражении от центральной и m -й зон она в m раз больше. Из этого условия получаем

$$\frac{r_m^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R} \right) = m\frac{\lambda}{2}.$$

Полагая здесь $|m| = 4$, находим ответ.

$$6.47. r_m = \left[\frac{m\lambda R}{b_1 - b_2} \left(R + \sqrt{R^2 + (b_1 - b_2)^2} \right) \right]^{1/2} \approx 0,7 \text{ см } (m = 5).$$

6.48. В задаче выполнено условие геометрической оптики: на ширине щели l , а тем более на расстоянии d умещается число зон Френеля $m \gg 1$. Ширина интерференционных полос $\Lambda = \lambda/a = \lambda f/d \approx 1,25 \cdot 10^{-3}$ см. Полосы исчезнут при $L \approx 2f - bd/\lambda = 30$ см.

6.49. Длина волны должна меняться в пределах $\lambda \approx 3,7 \div 3,0$ мм; при этом частота перестраивается от 89,1 до 108,9 кГц.

6.50. $\mathcal{J} = (3\pi A_0)^2 = 9\pi^2 \mathcal{J}_0$. Фаза колебаний в точке наблюдения $\varphi(z) = (kp^2/2)(1/z - 1/R_0)$, где p — координата плоскости экрана, отсчитываемая от центра отверстия. Локальный минимум наблюдается при $z = 3R_0$ (других нет), $m = 3(z - R_0)/z = 2$ — число зон Френеля, укладывающихся на отверстии для локального минимума.

6.51. $\mathcal{J} = (3\pi A_0)^2 = 9\pi^2 \mathcal{J}_0$. Локальные минимумы наблюдаются при $z_n = 3R_0/(2n + 3)$ (при $n = 1$ $z_1 = 3R_0/5$; при $n = 2$ $z_2 = 3R_0/7$).

6.52. $\mathcal{J}(2f) = \left(\frac{\pi D^2}{16f\lambda}\right)^2 A_0^2$, где $A_0 = \sqrt{\mathcal{J}_0}$. $\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} \simeq 4 \cdot 10^6$.

6.53. $\mathcal{J}(P') = \mathcal{J}_0$.

6.54. $d = 5/(6\alpha) \approx 0,83$ мм.

6.55. $D_{\max} = 4\rho_1/\psi = 2,4$ см; $\Delta\lambda/\lambda = \psi^2/4 = 2,5 \cdot 10^{-3}$.

6.56* $L = 2\lambda F^2/R^2 = 0,04$ см.

Решение. На плоскость Π , примыкающую к тонкой линзе справа (рис. 650), падает сходящаяся к точке A сферическая волна с радиусом кривизны F . Распределение фаз на этой плоскости во френелевом приближении описывается выражением

$$\Delta\varphi(\rho) = -\frac{k\rho^2}{2F}.$$

Вторичная волна от точки C до точки B , где наблюдается первый минимум, пробегает оптический путь r и приобретает дополнительный фазовый сдвиг $\frac{k\rho^2 L}{2(F-L)}$. Таким образом, в точке B суммируются вторичные волны с фазами

$$\frac{k\rho^2 L}{2F(F-L)},$$

где $0 \leq \rho \leq R$. Целое число зон Френеля m при $\rho = R$ определяется из соотношения

$$R^2 = m\lambda \frac{F(F-L)}{L}.$$

Здесь впервые минимум достигается при $m = 2$ (две зоны Френеля). Поскольку для точки A (фокус линзы) радиус линзы R открывает две зоны Френеля ($m = 2$), то $R^2 = 2\lambda F$. Отсюда получим ответ $L = 2\lambda F^2/R^2 = 0,04$ см.

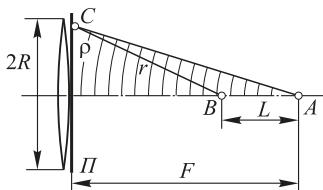


Рис. 650

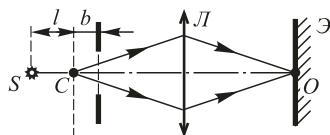


Рис. 651

6.57. Смещение $L = \frac{8}{5}a$.

6.58. При смещении линзы вместе с экраном на расстояние l точка, сопряженная с точкой O , смещается из точки S в точку C (рис. 651). Нулевая интенсивность в точке O на экране окажется, если отверстие содержит две зоны Френеля: $l = a - b = \frac{2}{3}a$.

6.59. Интенсивность в точке P увеличится в 2 раза.

6.60. Возможны три варианта:

$$1) h = \frac{5}{6} \frac{\lambda}{n-1} = 5 \text{ см}, \quad d = 2\sqrt{\frac{2}{3}\lambda L} = 28,3 \text{ см};$$

$$2) h = \frac{5}{6} \frac{\lambda}{n-1} = 5 \text{ см}, \quad d = 2\sqrt{\frac{8}{3}\lambda L} = 56,6 \text{ см};$$

$$3) h = \frac{\lambda}{6(n-1)} = 5 \text{ см}, \quad d = 2\sqrt{\frac{4}{3}\lambda L} = 40 \text{ см};$$

6.61. $d = 2\sqrt{\frac{7}{6}\lambda L} = 45,8 \text{ см}; \mathcal{J}(P) = \mathcal{J}_0(4 + 2\sqrt{3}) = 7,46\mathcal{J}_0$.

6.62. $\mathcal{J}(x_1 = L) = 144\mathcal{J}_0; \mathcal{J}(x_2 = L/2) = 0; \mathcal{J}(x_3 = L/3) = 144\mathcal{J}_0$.

6.63. $d = \frac{(3+4m)\lambda}{4(n-1)}$, где $m = 0, 1, 2, \dots$; $\mathcal{J}_{\max} = \left(\frac{3}{2}\pi + 1\right)^2 A_0^2 \approx 32,6\mathcal{J}_0$.

6.64. 0) $\mathcal{J} = 25\mathcal{J}_0$; 1) $\mathcal{J}_1 = 0$; 2) $\mathcal{J}_2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2 \mathcal{J}_0 \approx 70\mathcal{J}_0$.

§ 7. Дифракция Фраунгофера.

Разрешающая способность оптических инструментов

7.1. $L_{\min} > \frac{D^2}{4\lambda} \approx 10 \text{ м}$.

7.2. $v = \lambda v / \varphi = 10 \text{ см/с}$.

7.3. $L \approx ld/\lambda \approx 10 \text{ км}$, где $l \approx 1 \text{ м}$ — расстояние между фарами, $d \approx 5 \text{ мм}$ — диаметр зрачка глаза.

7.4. $b \approx \lambda/\theta \approx 4 \text{ мкм}$.

7.5. Не может. Диаметр зрачка глаза орла не превышает нескольких миллиметров. Если предположить, что он равен даже 10 мм, то минимальный угол, под которым орел может видеть раздельно две точки предмета, окажется примерно в 3 раза больше угловых размеров мышонка.

7.6. Освещенность не изменится.

7.7. $\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Phi_2/\Phi_1}{S_2/S_1} = \frac{256}{625} \approx 0,41$, где Φ — поток энергии, а S — площадь пятна.

7.8. $m \approx (1,22)^2 \frac{ll}{d^2} \approx 70$, где $l = 20 \text{ см}$ — разность длин плеч интерферометра Майкельсона.

7.9. Диаметр объектива $D \geqslant 1,22 \frac{\lambda h}{l} = 16,8 \text{ см}$; фокусное расстояние $f \geqslant \frac{h}{Nl} = 50 \text{ см}$. Таким образом, $\frac{D}{f} = \frac{1}{3}$.

7.10. $f \geqslant 40 \text{ см}; D \geqslant 10 \text{ см}; \tau \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$.

7.11. Нулевой максимум $\sin \theta = n \sin \alpha$, минимумы $b(\sin \theta - n \sin \alpha) = m\lambda$, где $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

7.12* Решение. Рассмотрим щель той же ширины, что и черный экран. Если на щель и экран падает одна и та же плоская волна, то количество энергии, поглощенной экраном, будет равно количеству энергии, падающей на щель. Согласно принципу Бабине (см. задачу 7.14), интенсивности света во всех направлениях, за исключением направления падающей волны, в обоих

случаях одинаковы. Следовательно, одинаковы и энергии, рассеянные экраном и щелью. Но в случае щели вся энергия рассеивается. Значит, энергия, поглощенная экраном, равна энергии, рассеянной им.

$$7.13. \mathcal{E} = \frac{4\pi c \hbar \lambda^3 L^4}{N d^4 D^4} = 3,4 \text{ эрг}, \text{ где } \hbar \text{ — постоянная Планка, } N = 14 \text{ (призм),}$$

$L \approx 380$ тыс. км — расстояние от Земли до Луны.

7.14.* Решение. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля напряженность E_1 поля волны, дифрагировавшей на первом экране, представляется некоторым интегралом по отверстиям этого экрана. Напряженность E_2 поля волны, возникшей при дифракции на дополнительном экране, представляется таким же интегралом по отверстиям этого экрана. Сумма $E_1 + E_2$ представляется интегралом по всей бесконечной плоскости, в которой расположены рассматриваемые экраны. Но таким же интегралом представилось бы поле за экраном, если бы этого экрана совсем не было, т. е. волна распространялась свободно. Следовательно, $E_1 + E_2 = E$, где E — напряженность поля волны в отсутствие экрана, т. е. поля падающей волны. Но в падающей волне свет распространяется только в одном направлении. Для всех других направлений $E = 0$, а следовательно, $E_1 + E_2 = 0$, откуда $E_1^2 = E_2^2$, или $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$.

$$7.15^*: x = \frac{b\lambda}{D} \text{ при условии } \frac{1}{2b^2} \left(\frac{b^2\lambda^2}{D^2} + \frac{D^2}{4} \right) \ll 1.$$

Решение. При малых углах дифракции ис-
комое расстояние x найдем из требования, чтобы
разность хода $r_2 - r_1$ крайних интерферирующих
лучей (рис. 652) была равна длине волны λ . Применяя теорему Пифагора и
извлекая квадратные корни с помощью формулы бинома Ньютона, для этой
разности нетрудно получить

$$r_2 - r_1 = \frac{xD}{b} - \frac{xD}{2b^2} \left(x^2 + \frac{D^2}{4} \right) + \dots = \lambda.$$

Ограничивааясь первым членом, найдем

$$x = \frac{b\lambda}{D}.$$

Ошибка при вычислении $r_2 - r_1$ должна быть мала по сравнению с λ . Отсюда получаем условие применимости предыдущей формулы:

$$\frac{1}{2b^2} \left(\frac{b^2\lambda^2}{D^2} + \frac{D^2}{4} \right) \ll 1.$$

7.16. $D = \sqrt{2,44\lambda L} \approx 0,35$ мм. Вообще Рэлей доказал, что наивыгоднейший диаметр отверстия в камере-обскуре подсчитывается по несколько иной формуле: $D = 1,8 \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}$, где a — расстояние до объекта (от отверстия), b — расстояние до экрана. При $a = \infty$, $b = L$ в условиях нашей задачи $D_{\text{опт}} = 1,8\sqrt{\lambda L} = 0,4$ мм.

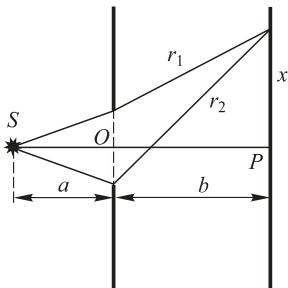


Рис. 652

7.17. $L \approx \frac{D^2}{2,44\lambda} \approx 1200$ км (более грубая оценка $L \sim D^2/\lambda$).

7.18. $\frac{E_\Phi}{E} \approx \frac{D^2}{R\lambda} \approx 10^4$.

7.19. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0/4$.

7.20. $b = \frac{\lambda}{2(n-1)} \left(m \pm \frac{1}{2} \right)$, где $m = 0, 1, 2, \dots$

7.21. $\theta = \frac{\lambda}{D} \left(m + \frac{1}{2} \right)$, где m — целое число.

7.22. $x = f\theta = \frac{\lambda f}{D} \left(m + \frac{1}{2} \right)$, где m — целое число.

7.23. $D \leq 0,45$ см.

7.24. $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{2\lambda}{N_2} = 12,5$ нм.

7.25.* $\mathcal{J} = \left[\frac{\sin(\frac{2\pi x}{\lambda}\alpha)}{\frac{2\pi x}{\lambda}\alpha} \right]^2 \left[\frac{\sin(\frac{2\pi y}{\lambda}\alpha)}{\frac{2\pi y}{\lambda}\alpha} \right]^2$.

Решение. Пусть O — фокус геометрического схождения лучей (рис. 653); r_0 — ближайшее расстояние от линзы до O . Опишем из O как из центра сферическую поверхность S радиусом r_0 . При вычислении светового

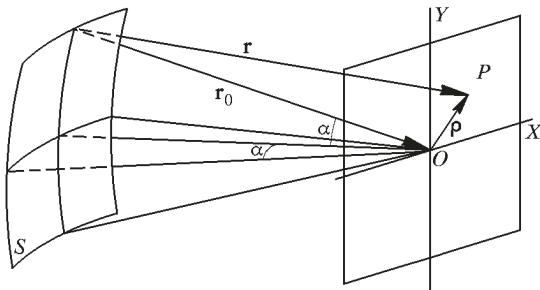


Рис. 653

поля на поверхности S можно ограничиться приближением геометрической оптики. Тогда световое поле на S в комплексной форме можно записать в виде

$$E_S = \frac{1}{r_0} e^{i(\omega t + kr_0)}.$$

Пусть P — точка наблюдения, dS — элемент поверхности на S , r — расстояние между dS и P . Световое поле в P найдется по принципу Гюйгенса по формуле

$$E_P = \int \frac{dS}{r_0 r} e^{i[\omega t - k(r - r_0)]}, \quad (1)$$

где интегрирование производится по той части сферической поверхности S , на которой поле отлично от нуля. Очевидно,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho},$$

где \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 — радиусы-векторы, проведенные из dS в точки P и O соответственно, а $\rho = \overrightarrow{OP}$. Отсюда

$$r = r_0 \sqrt{1 + \frac{2\rho\rho + \rho^2}{r_0^2}}.$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона, находим с точностью до величин, содержащих квадраты ρ :

$$r - r_0 = \frac{\mathbf{r}_0\rho}{r_0} + \frac{\rho^2}{2r_0} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{r}_0\rho)^2}{r_0^3} = \rho\mathbf{r}_1 + \frac{\rho^2}{2r_0} \sin^2(\rho\mathbf{r}_1),$$

а в линейном приближении

$$r - r_0 = \rho\mathbf{r}_1,$$

где \mathbf{r}_1 — единичный вектор в направлении \mathbf{r}_0 , т. е. $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0/r_0$. Ошибка, допустимая при вычислении $r - r_0$, должна быть много меньше длины волны. Поэтому линейным приближением можно пользоваться при условии

$$\frac{\rho^2}{r_0} \ll \lambda. \quad (2)$$

Вычислим световое поле в окрестности O в предположении, что условие (2) выполняется. Направление единичного вектора \mathbf{r}_1 можно характеризовать углами φ и ψ , которые он образует с плоскостями, проходящими через оптическую ось и параллельными сторонам диафрагмы. Очевидно, $dS = r_0^2 d\varphi d\psi$. Введем в плоскости наблюдения (экрана) прямоугольную систему координат с началом в точке O и с осями, параллельными сторонам квадратной диафрагмы. Координаты точки P обозначим через x и y . Тогда

$$r - r_0 = \mathbf{r}_1\rho = x\sin\varphi + y\sin\psi.$$

Если угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{D}{2r_0}$, под которым из O видна половина стороны квадратной диафрагмы, мал, то $\sin\varphi$ и $\sin\psi$ можно заменить на φ и ψ . Кроме того, в знаменателе (1) r можно приближенно заменить на r_0 . Окончательно

$$E_P = e^{+i\omega t} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-ik(x\varphi + y\psi)} d\varphi d\psi.$$

Если амплитуду в точке O принять равной единице, то амплитуда в точке P

$$A = \frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\alpha\right)}{\frac{2\pi x}{\lambda}\alpha} \frac{\sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\alpha\right)}{\frac{2\pi y}{\lambda}\alpha}, \quad (3)$$

а интенсивность

$$\mathcal{J} = \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\alpha\right)}{\frac{2\pi x}{\lambda}\alpha} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\alpha\right)}{\frac{2\pi y}{\lambda}\alpha} \right]^2. \quad (4)$$

Дифракционная картина получается такая же, как при дифракции Фраунгофера от квадратного отверстия. Расстояния между двумя соседними минимумами, а также от центра центрального максимума до первого минимума равны

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2a}. \quad (5)$$

Остается проверить, выполняется ли условие (2). Так как замечательная интенсивность по формуле (3) получается при ρ порядка Δx , то, подставляя в (2) $\rho \approx \lambda/a$, придадим (2) вид

$$a \gg \sqrt{\frac{\lambda}{r_0}}. \quad (6)$$

Последнее условие выполняется во всех оптических приборах с линзами или зеркалами.

Случай круглой диафрагмы существенно не отличается от случая квадратной диафрагмы. Интеграл (1) для круглой диафрагмы в линейном приближении может быть выражен через бесселеву функцию 1-го порядка. Дифракционная картина в фокальной плоскости имеет вид светлых и темных концентрических кругов со светлым центром. Радиусы R темных колец имеют следующие значения:

$$0,61 \frac{\lambda}{a}; \quad 1,21 \frac{\lambda}{a}; \quad 1,62 \frac{\lambda}{a}; \quad \dots \quad (7)$$

где a — угол, под которым виден радиус диафрагмы из точки O .

$$7.26. \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$7.27. \mathcal{J} = \frac{\mathcal{J}_0}{2} \left[\left(\frac{\sin \frac{vb \sin \varphi}{2}}{\frac{vb \sin \varphi}{2}} \right)^2 + 4 \left(\frac{\sin \frac{vb \sin \varphi}{8}}{\frac{vb \sin \varphi}{8}} \right)^2 \cos^2 \frac{3vb \sin \varphi}{8} \right].$$

$$7.28. \mathcal{J} \propto \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 (\tau_1 + \tau_2 + 2\sqrt{\tau_1 \tau_2} \cos \Delta\varphi), \quad \text{где } u = \frac{k a \sin \theta}{4}, \quad \Delta\varphi = k [h(n_1 - n_2) + \frac{a}{2} \sin \theta], \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{— волновое число. В центре получится темная полоса при условии } kh(n_1 - n_2) = (2m+1)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$7.29. \mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \left[\frac{\sin(kNa \sin \frac{\theta}{2})}{\sin(ka \sin \frac{\theta}{2})} \right]^2 \left(\frac{\sin \frac{k\Delta}{2}}{\frac{k\Delta}{2}} \right)^2, \quad \text{где } k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \Delta = h(n-1) - a \sin \theta.$$

Направления на главные максимумы определяются формулой $a \sin \theta_m = m\lambda$.

$$7.30. \rho_{0 \max} = \sqrt{\frac{\lambda R}{n}(1+2m)}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \mathcal{J}_A = \frac{16E_0^2 R^2}{\rho_0^4 n^2 k^2} \sin^2 \frac{k n \rho_0^2}{4R}.$$

$$7.31. \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = \left(\frac{D-2b}{D} \right)^2 = \frac{1}{9}.$$

$$7.32. \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi_0} = \frac{1}{6}, \quad \text{где } \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = \left(\frac{D-b}{D} \right)^2 = \frac{1}{4}; \quad \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{D}{D+b} = \frac{2}{3}.$$

$$7.33. \left(\frac{a}{a_0} \right)_{\max} = \lim_{d \rightarrow D} \frac{D}{D+d} = \frac{1}{2}.$$

7.34* Решение. В случае самосветящихся точек волны, ими излучаемые, некогерентны. На экране складываются интенсивности волн, исходящих из этих точек. Пусть обе точки расположены симметрично относительно главной оптической оси. Рассмотрим распределение интенсивности вдоль оси X (рис. 654). Положение точки наблюдения на этой оси можно характеризовать координатой $\xi = \frac{2\pi x}{\lambda} a$. Минимальное расстояние между центрами дифракционных кружков соответствует по Рэлею разности координат $\Delta\xi = \pi$ (см. решение задачи 7.25). На рис. 654 штриховые кривые изображают распределение интенсивностей от каждой из рассматриваемых двух самосветящихся точек, а сплошная кривая дает результирующую интенсивность. Мы видим, что интенсивность в центре картины почти на 20%

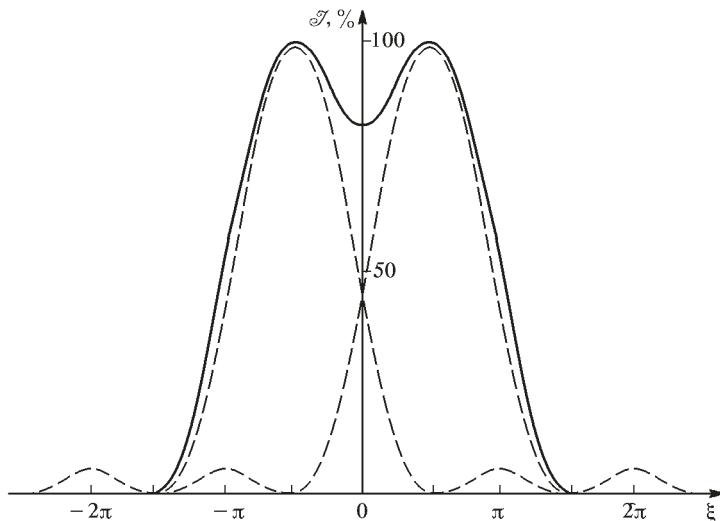


Рис. 654

меньше максимальной интенсивности, равной наибольшей интенсивности от одной светящейся точки. Поэтому при выполнении критерия Рэлея получается раздельное изображение самосветящихся точек.

7.35* Решение. Если изображаемые точки не самосветящиеся, а освещаются одним и тем же источником света, то волны, исходящие из них, когерентны. Складывать надо не интенсивности, а амплитуды колебаний, учитывая разность фаз между ними. Из решения задачи 7.25 следует, что в случае изображения одной точки фаза колебаний одна и та же в пределах каждого светлого кольца (в случае квадратной диафрагмы — светлого квадрата) и меняется на 180° при переходе через минимум освещенности в соседнее светлое кольцо.

1) Отверстия освещаются лучами, параллельными главной оптической оси. В этом случае волны исходят из них в одинаковых фазах. Так как до точки O (см. рис. 653) волны проходят одинаковые расстояния, то в точку O они приходят также в одинаковых фазах. Амплитуда результирующего ко-

лебания в точке O будет больше в 2 раза, а интенсивность в 4 раза, чем в случае изображения одного из отверстий. Распределение результирующей интенсивности дает кривая рис. 655. Она имеет лишь один максимум, а изображение в глазу будет такое же, как и от одной точки. Поэтому при рассматриваемом способе освещения раздельного изображения освещаемых точек не получится, если расстояние между ними равно минимальному расстоянию, требуемому критерием Рэлея. Чтобы получилось раздельное изображение, надо это расстояние увеличить примерно в 1,4 раза. В соответствии с этим в такое же число раз уменьшается и разрешающая способность по сравнению со случаем самосветящихся объектов.

2) Отверстия освещаются параллельными лучами, наклоненными под углом θ к главной оптической оси. В этом случае волны из отверстий выходят

не с одинаковыми фазами, а с разностью фаз $\delta = (2\pi d \sin \theta)/\lambda$, где d — расстояние между центрами отверстий. С такой же разностью фаз они придут и в точку O . Если $d \sin \theta = \lambda/4$, то $\delta = \pi/2$, интенсивность в точке O будет в два раза больше соответствующей интенсивности при наличии одного из отверстий. Разрешающая способность при таком освещении будет такая же, как и в случае самосветящегося объекта. Если $d \sin \theta = \lambda/2$, то $\delta = \pi$. Тогда волны приходят в точку O в противоположных фазах, и интенсивность там будет равна нулю. Разделение изображений будет весьма резким. При таком освещении расстояние между отверстиями может быть меньше предела Рэлея, и все же будут получаться их раздельные изображения.

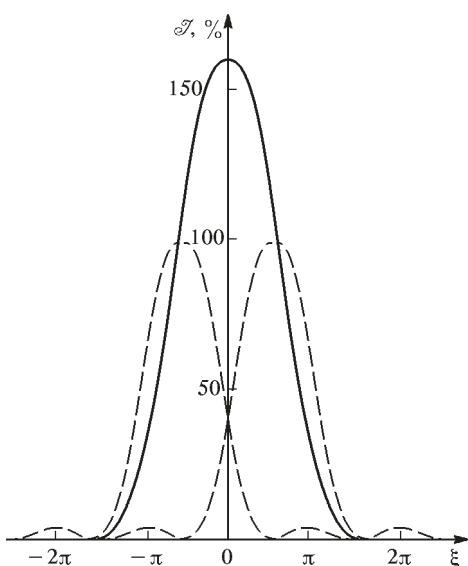


Рис. 655

3) Отверстия освещаются лучами всевозможных направлений. В этом случае получается практически такая же разрешающая способность, как и для самосветящихся объектов.

$$7.36. l_{\min} \approx 1 \text{ м.}$$

$$7.37^* f_2 = 6 \text{ см}; L \approx 600 \text{ м.}$$

Решение. Разрешающая способность объектива полностью используется при нормальном увеличении

$$\gamma_{\text{норм}} = \frac{D}{d} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Следовательно,

$$f_2 = \frac{d}{D} f_1 = 6 \text{ см.}$$

Угловое разрешение телескопа при визуальном наблюдении в раз $\gamma_{\text{норм}}$ выше, чем у невооруженного глаза. Минимальное расстояние, на котором с помощью телескопа можно читать книгу, определяется условием

$$\frac{d}{L} \gtrsim \frac{\lambda}{D}.$$

Отсюда вытекает, что

$$L \lesssim \frac{D}{\lambda} b \approx 600 \text{ м.}$$

Впрочем, строго говоря, с такого расстояния вряд ли можно прочитать текст, а вот пересчитать буквы возможно.

7.38. $D^2/f^2 \geq z^2\lambda^2 \approx 0,25$.

7.39.* $N \geq D/d$.

Решение. Пусть рассматриваемой объект виден невооруженным глазом под углом $\alpha = 1,22\lambda/D$, где D — диаметр объектива, т. е. под минимальным углом, который способен разрешить объектив. В трубу тот же объект будет виден под углом $\beta = N\alpha$. Угол β должен быть не меньше угла $\gamma = 1,22\lambda/d$, который способен разрешить глаз (d — диаметр зрачка глаза). Из условия $\beta \geq \gamma$ получаем

$$N \geq \frac{D}{d}.$$

Увеличение $N_{\text{норм}} = D/d$ называется нормальным. При меньших увеличениях используется только часть объектива, и разрешающая способность системы трубы–глаз понижается. Увеличения больше нормального нецелесообразны, так как при этом разрешающая способность системы не увеличивается, а яркость изображения уменьшается.

7.40. 1) Разрешаемое угловое расстояние зрительной трубы $\theta = 1,22\lambda/D$, где D — диаметр объектива. При визуальных наблюдениях можно принять $\lambda = 5500 \text{ \AA}$; тогда $\theta = 2,76''$. 2) При увеличении $N \geq D/d = 10$.

7.41. $\delta\theta = 1,22\lambda/D = 0,023''$.

7.42. Угловые размеры почти всех звезд много меньше разрешаемых угловых расстояний даже самых больших телескопов. При таких условиях величина изображения звезды на сетчатке глаза определяется исключительно дифракционными эффектами в оптической системе (телескоп+глаз) и не зависит от увеличения. Но яркость этого изображения пропорциональна световому потоку, поступающему в оптическую систему. Этот световой поток при пользовании телескопом во столько раз больше светового потока, проходящего через зрачок невооруженного глаза, во сколько раз площадь отверстия объектива больше площади зрачка глаза (если увеличение телескопа нормальное). Поэтому в телескоп можно видеть более слабые звезды, чем невооруженным глазом. При нормальном увеличении диаметр выходного зрачка равен диаметру зрачка глаза. Применение больших увеличений при рассматривании звезд бесполезно. При меньших увеличениях не весь свет, поступивший в телескоп, проходит через зрачок глаза.

7.43. $L \approx \frac{D^2}{2,44\lambda} \sim 1000 \text{ км}; S \approx \left(2,44 \frac{\lambda}{D}\right)^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-12}$.

7.44. $N \geq D/d$, где D — диаметр объектива, d — диаметр зрачка глаза.

7.45. $L < \frac{Dl}{1,22\lambda} = 3,7 \text{ м}$. То же условие соблюдается и при применении так называемого объективного отсчета на шкале, т. е. при проецировании светового зайчика, отраженного от зеркальца гальванометра на шкалу.

7.46. На Луне около 40 м, на Солнце около 20 км.

7.47. Около 57 км. Рассмотренная задача до сравнительно недавнего времени представляла интерес в связи с гипотезой о каналах на Марсе и их искусственном сооружении. Фотографирование поверхности Марса с помощью ракет и исследование его посредством управляемых аппаратов, спускаемых на поверхность Марса, не подтвердило эту гипотезу.

7.48. $r \gtrsim \sqrt{0,01} \frac{\lambda L}{d} \approx 4$ м, где $L \approx 4 \cdot 10^5$ км — расстояние от Земли до Луны.

7.49. $D \approx \sqrt{\frac{k\rho_1}{\rho_2}} \frac{2\lambda L}{D} \approx 6,5$ м, где $L \approx 4 \cdot 10^5$ км — расстояние от Земли до Луны.

7.50* $N \approx 10^{10}$ Вт; $B \approx 10^8$ Гс.

Решение. По условию $f/D = 1$. Поэтому диаметр пятна в фокальной плоскости $d \approx f\lambda/D \approx \lambda$. Ускорение электрона обусловлено электрическим полем E . Конечная скорость электрона найдется из условия

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2m_0 c^2, \text{ откуда } \beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,87.$$

Поскольку ускорение происходит в течение времени порядка $T/4$, пройденный путь будет $0,87cT/4 \approx 0,2 < d$ — диаметра пятна в фокусе.

Оценим теперь ускоряющее поле E :

$$\frac{4c}{T} = \frac{4c^2}{\lambda} \approx \frac{eE}{m_0}, \text{ откуда } E \approx \frac{4m_0 c^2}{\lambda e}.$$

При этом мощность лазера $N \approx \frac{c}{4\pi} E^2 \lambda^2 \approx \frac{m_0^2 c^5}{e^2} \approx 10^{10}$ Вт. Таким образом, мощность лазера N от длины волны λ не зависит.

Магнитное поле B в фокусе, очевидно, равно электрическому полю (в СГСЭ):

$$B \approx \frac{4m_0 c^2}{\lambda e} \approx 10^8 \text{ Гс.}$$

7.51* $L_2 = 5 \cdot 10^4$ км.

Решение. В первом случае в объектив с диаметром D_1 и фокусным расстоянием f_1 попадет излучение мощностью

$$N_1 = N_0 \left(\frac{D_1}{L_1} \right)^2.$$

Эта мощность распределяется по площади S_1 дифракционного пятна ($S_1 \approx \frac{\lambda^2}{D_1^2} f_1^2$) и создает освещенность

$$E_1 \approx \frac{N_0}{L_1^2} \frac{D_1^4}{\lambda^2 f_1^2}.$$

Освещенность фона в фокальной плоскости пропорциональна светосиле объектива

$$E_1^0 = a \left(\frac{D_1}{f_1} \right)^2,$$

где a — некоторый коэффициент. Таким образом, контраст изображения

$$\gamma_1 = \frac{E_1 + E_1^0}{E_1^0} = 1 + \frac{N_0 D_1^4 f_1^2}{L_1^2 \lambda^2 f_1^2 a D_1^2} = 1 + \frac{N_0 D_1^2}{a L_1^2 \lambda^2}.$$

При наблюдении в телескоп с объективом диаметром D_2

$$\gamma_2 = \frac{E_2 + E_2^0}{E_2^0} = 1 + \frac{N_0 D_2^2}{a L_2^2 \lambda^2}.$$

Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$ при условии

$$\frac{D_1^2}{D_2^2} = \frac{L_2^2}{D_2}, \text{ откуда } L_2 = L_1 \frac{D_2}{D_1} = 5 \cdot 10^4 \text{ км.}$$

7.52* $L_{\max} \approx 70$ км.

Решение. Угловая расходимость пучка света равна λ/D . Поэтому мощность излучения, рассеиваемого спутником,

$$N' = \rho N \frac{d^2}{4(\lambda/D)^2} = \frac{\rho N}{4} \left(\frac{dD}{\lambda L} \right)^2.$$

Так как спутник равномерно рассеивает оптическую мощность N' в телесный угол 2π , то принимаемая мощность равна

$$N' \frac{\pi(D^2/4)}{2\pi L^2} = \frac{N'}{8} \left(\frac{D}{L} \right)^2.$$

Записывая теперь условие обнаружения рассеянного сигнала, получаем

$$\frac{N'}{8} \left(\frac{D}{L} \right)^2 = \frac{\rho N}{32} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{D}{L} \right)^4 \geq N_{\text{поп}},$$

$$L \leq L_{\max} = \frac{D}{2} \sqrt[4]{\frac{\rho N d^2}{2 N_{\text{поп}} \lambda^2}} \approx 70 \text{ км.}$$

7.53. $L \lesssim \frac{dD}{c} \sqrt{\frac{N_{\text{в}}}{nh}} \approx 3,2 \cdot 10^{11} \text{ м} = 3,2 \cdot 10^8 \text{ км, где } h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} —$ постоянная Планка.

7.54. В $\sqrt{\alpha\beta} = 10$ раз.

7.55. В $\sqrt{\alpha\beta} = 10$ раз.

7.56.* $N_{\text{поп}} = 2n \frac{L}{d} \sin u.$

Решение. Пусть в микроскоп рассматривается объект, величина которого l равна наименьшему разрешаемому расстоянию его объектива. Для самосветящихся объектов или объектов, освещаемых диффузно, $l = 0,61\lambda/(n \sin u)$, где $n \sin u$ — числовая апертура объектива. Невооруженным глазом с расстояния ясного зрения L этот объект виден под углом $\alpha = l/L$.

В микроскоп он виден под углом $\beta = Na$, где N — увеличение микроскопа. Угол β должен быть не меньше минимального углового расстояния $\gamma = 1,22\lambda/d$, разрешаемого глазом (d — диаметр зрачка глаза). Условие $\beta \geq \gamma$ дает $N \geq (2L \sin u)/d$. Увеличение $N_{\text{норм}} = (2L \sin u)/d$ называется нормальным. Применять увеличения больше нормального нецелесообразно, так как при этом разрешающая способность микроскопа не повышается, а яркость изображения уменьшается.

7.57. Когда узкая щель вертикальна, на экране получается система горизонтальных полос. При горизонтальной щели полосы становятся вертикальными. Когда щель наклонена под углом 45° к горизонту, полосы также наклонены под тем же углом, но перпендикулярны к направлению щели. При широкой щели, независимо от ее направления, на экране получается подобное изображение проволочной сетки.

7.58. $N \geq D/d$.

7.59. 1) Около 0,3 мкм; 2) Около 0,19 мкм. Этот минимум достигается при когерентном освещении объекта.

7.60. $u^2 \approx \sqrt{\lambda/R}$, т. е. максимальное число колец будет наблюдаться при угловой апертуре $u \approx 2^\circ$. При этом $m_{\max} = 10^3$ колец.

7.61. Сильное поле необходимо для того, чтобы сделать пучок электронов параксимальным и, следовательно, изображение — геометрически подобным объекту. При этом разрешающая способность эмиссионного микроскопа равна $\Delta \approx \frac{kT}{eE}$, отсюда $E_1 = 5$ кВ/см, $E_2 = 500$ кВ/см.

7.62. $f_2 \leq \frac{ld}{2f_1 n \sin \alpha}$, где d — диаметр зрачка глаза.

7.63. $n \sin \alpha \geq \frac{D}{2f}$, $N \geq \frac{DL}{fd}$, где L — расстояние ясного зрения, d — диаметр зрачка глаза.

7.64. $U = \frac{12,24 \sin \Omega_{\text{опт}}}{\lambda \sin \Omega_{\text{эл}}} \approx 600$ В.

7.65. $\tau \approx \frac{1}{2\pi v} \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{2L} \right) \approx 10^{-6}$ с.

7.66. $\frac{E_2}{E_1} = k \left(\frac{d_2 D}{2,44 \lambda f} \right)^2 \approx 0,034$. Разрешение объектива $\Delta \approx \frac{\lambda}{D} f \approx 10$ мкм.

Поскольку $d_1 > D > d_2$, то изображения более мелких деталей дифракционные, а крупных — геометрические.

7.67. $\frac{E_B}{E_H} = k \left(\frac{D_2}{a f_2} \right)^2 \left(\frac{2\lambda f_1}{D_1^2} \right)^2 = 123$, где E_B — средняя освещенность изображения звезды в телескопе Борра, E_H — в телескопе Ньютона.

7.68. $d = \frac{c}{2\beta} = 0,5$ мм.

7.69. $h = \frac{\lambda(2m-1)}{2(n-1)}$, где $m = 1, 2, 3, \dots$

7.70. $\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = \left(\frac{D\lambda}{\psi d^2} \right)^2 = 2,5 \cdot 10^5$.

7.71. 1) $N \approx 2d/D = 40$; 2) $\varphi < \lambda/d = 5 \cdot 10^{-4} \simeq 1,7'$; 3) $\Delta\lambda < \lambda/m_{\max} \approx 25$ мм.

$$7.72. \mathcal{J}(x) = 2\mathcal{J}_0 \left[\frac{\sin \frac{kbx}{2F}}{\frac{kbx}{2F}} \right] (1 + \cos \frac{kd}{F}x); N \simeq 1 + 2\frac{d}{b}.$$

7.73. 1) $b = 3 \cdot 10^{-2}$ мм; 2) 0,6 мм; 3) $a = \frac{\lambda F}{2d} = 10^{-2}$ см; 4) $a_{\max} = \frac{\lambda F}{d} = 2 \cdot 10^{-2}$ см; 5) $\Delta\lambda_{\max} \approx 30$ нм.

$$7.74. \frac{E_2}{E_1} = \sqrt{2 \frac{S_2}{S_1}} = 2.$$

$$7.75. l = 4\lambda F^2/D^2 = 2.$$

7.76* Решение. Из условия таутохронизма для длиннофокусной линзы ($F \gg R$) получаем $nh + \frac{R^2}{2F} = n_0 h$, откуда фокусное расстояние линзы

$$F = \frac{R^2}{2(n_0 - n)h}.$$

Отношение интенсивностей \mathcal{J} в фокусе к интенсивности \mathcal{J}_0 падающего излучения

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{R^2}{\left(0,61 \frac{\lambda}{R} F\right)^2} = \frac{4(n_0 - n)^2 h^2}{(0,61\lambda)^2}.$$

Отсюда находим отношение напряженностей

$$\frac{E}{E_0} = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0}} = \frac{2(n_0 - n)h}{0,61\lambda} \simeq 6600.$$

Отношение напряженностей можно оценить и другим способом. Найдем число открытых зон Френеля из условия

$$R = \sqrt{m\lambda F} = \sqrt{m\lambda \frac{R^2}{2(n_0 - n)h}},$$

откуда $m = 4000$. Считаем, что линза выпрямляет в прямые отрезки длиной πE каждый все m полуокружностей в спирали Френеля. В итоге амплитуда в фокусе $E_F = m\pi E_0$. Откуда $E_f/E_0 = m\pi = 2\pi(n_0 - n)h/\lambda = 13000$.

Как видно, оценки практически совпадают. Отличие результата вдвое — это хорошее совпадение.

$$7.77. W = \frac{c\tau}{32} \left(\frac{1,22\lambda LE}{D} \right)^2 = 62 \text{ Дж.}$$

$$7.78. D = 1,22\lambda LE_0 \sqrt{\frac{c\tau}{32W}} = 3,74 \text{ м. (См. также задачу 7.77).}$$

7.79. а) Глубина модуляции $m = kd\theta = 4\pi\theta$; б) угловое разрешение $\theta_{\min} \approx 8 \cdot 10^{-4}$ рад. Сравнение с критерием Рэлея $\frac{\lambda/d}{\theta_{\min}} = 600$.

$$7.80. \alpha = \frac{2\lambda m}{d(n-1)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

7.81. Минимальная ширина фронта волны определяет размер антенны $\Delta x_{\min} \approx 2\sqrt{2,44\lambda l} \approx 310$ м. Более точный подход связан с представлением о раскрутке спирали Френеля в фокусе линзы. Он дает: $W = \frac{c\tau}{2\pi^2} \left(\frac{\lambda L E}{D} \right)^2 = 67,5 \text{ Дж.}$

7.82. 1) При $\varphi = \frac{\pi}{3}$ $\frac{\mathcal{J}(0)}{\mathcal{J}(x_0)} = 1,2$, т. е. интенсивность на оси в случае двух когерентных источников, излучающих с разностью фаз $\varphi = \frac{\pi}{3}$, превышает 20% интенсивность в точках геометрических изображений. 2) При $\cos\varphi = \frac{1}{4}$ «провал» в суммарной картине $\mathcal{J}(x)$ при $x = 0$ отсутствует.

7.83. При синфазно излучающих источниках ($\varphi = 0$) $\mathcal{J}(0) = 4|f_0(x_0)|^2 = 1,6\mathcal{J}_{\max}$, т. е. $\frac{\mathcal{J}(0)}{\mathcal{J}(x_0)} = 1,6$. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\mathcal{J}(0) = 0,8\mathcal{J}_{\max}$ («провал» в суммарной картине интенсивности такой же, как и в случае некогерентных источников).

§ 8. Спектральные приборы

8.1. $R \approx 1000$.

8.2. $b \approx 1$ см.

8.3* $b \ll 2.5 \cdot 10^{-3}$ мм.

Решение. Пусть $\delta\lambda$ — минимальная разность длин волн двух спектральных линий, разрешаемая призмой при бесконечно узкой коллиматорной щели. Согласно формуле для теоретической разрешающей способности $\lambda/\delta\lambda = a|dn/d\lambda|$, разность показателей преломления для этих спектральных линий $\delta n = \lambda/a$.

Благодаря различию в показателях преломления первоначально параллельный пучок лучей на выходе из призмы сделается расходящимся. Рассчитаем угловое расхождение вышедшего пучка в предположении, что на призму падал параллельный пучок. Имеем (см. рис. 656) $\sin\varphi_1 = n \sin\psi_1$. Отсюда при постоянном φ_1

$$\delta n \sin\psi_1 + n \cos\psi_1 \delta\psi_1 = 0.$$

Так как $\psi_1 + \psi_2 = A = \text{const}$ и, следовательно, $\delta\psi_1 + \delta\psi_2 = 0$, то

$$\delta n \sin\psi_1 = n \cos\psi_1 \delta\psi_2.$$

Далее, из $\sin\varphi_2 = n \sin\psi_2$ находим искомое угловое расхождение вышедшего пучка:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\sin\psi_2}{\cos\varphi_2} \delta n + \frac{n \cos\psi_2}{\cos\varphi_2} \delta\psi_2 = \left(\frac{\sin\psi_2}{\cos\varphi_2} + \frac{n \cos\psi_2}{\cos\varphi_2} \frac{\sin\psi_1}{n \cos\psi_1} \right) \delta n,$$

а при установке на угол наименьшего отклонения ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$; $\psi_1 = \psi_2 = \psi$)

$$\delta\varphi_2 = 2 \frac{\sin\psi}{\cos\varphi} \delta n = 2 \frac{\sin\psi}{\cos\varphi} \frac{\lambda}{a}.$$

Для полного использования теоретической разрешающей способности призмы необходимо, чтобы угловая ширина коллиматорной щели $\alpha = b/f$ была мала по сравнению с $\delta\varphi_2$. Это дает

$$b \ll 2 \frac{\sin\psi}{\cos\varphi} \frac{f\lambda}{a}.$$

Для $A/2 = \psi = 30^\circ$, $n = 1,73$ получаем

$$b \ll \frac{2}{\sqrt{4 - n^2}} \frac{f\lambda}{a} \approx \frac{2f\lambda}{a} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

8.4* $\mathcal{J} = C \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta} \right]^2$, где C — постоянная, а θ —

угол между нормалью к решетке и заданным направлением, к которому относится интенсивность \mathcal{J} .

Решение. Так как требуется рассчитать распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера на решетке, то можно считать, что экран, на котором наблюдается эта картина, отодвинут достаточно далеко. Лучи, приходящие из различных щелей решетки в любую точку экрана, можно считать параллельными. Выберем такую точку на экране, чтобы приходящие в нее лучи образовывали угол θ с нормалью к решетке. Разность фаз между соседними интерферирующими лучами равна $\delta = (2\pi d \sin\theta)/\lambda$. На векторной диаграмме колебание, приходящее в рассматриваемую точку от какой-либо щели решетки, можно изобразить вектором. Эти векторы образуют ломаную линию с равными звеньями и равными углами (рис. 657). Результирующее колебание изобразится геометрической суммой всех этих векторов. Сложение векторов на плоскости формально тождественно со сложением комплексных чисел. Если первый вектор изобразить комплексным числом a , то последующие изобразятся комплексными числами $ae^{i\delta}$, $ae^{2i\delta}$ и т. д. Их сумма равна

$$A = a \left[1 + e^{i\delta} + e^{2i\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} \right] = a \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}.$$

Квадрат модуля комплексного числа A дает относительную интенсивность света в рассматриваемой точке экрана:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = |A|^2 &= AA^* = |a|^2 \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} \frac{1 - e^{-iN\delta}}{1 - e^{-i\delta}} = \\ &= |a|^2 \frac{2 - (e^{iN\delta} + e^{-iN\delta})}{2 - (e^{i\delta} + e^{-i\delta})} = |a|^2 \frac{1 - \cos(N\delta)}{1 - \cos\delta}. \end{aligned}$$

Так как $|a|^2$ определяет интенсивность дифрагированного света на одной щели, то по известной формуле

$$|a|^2 = C \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta} \right]^2.$$

Подставляя это значение в предыдущее выражение, легко получить ответ. Постоянная C пропорциональна интенсивности падающего света и квадрату ширины щели b . Ни от каких других параметров решетки она не зависит.

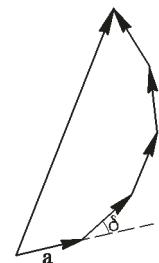


Рис. 657

8.5* Решение. Представим ответ предыдущей задачи в виде

$$\mathcal{J}(\theta) = C b^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

где $\alpha = \pi b \sin \theta / \lambda$, $\beta = \pi d \sin \theta / \lambda$, а постоянная C от параметров решетки не зависит. Подставляя значения α , получим

$$\mathcal{J}(\theta) = C \lambda^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\pi^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

Для дополнительной решетки

$$\mathcal{J}'(\theta) = C \lambda^2 \frac{\sin^2 \alpha'}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2,$$

где $\alpha' = [\pi(d - b) \sin \theta] / \lambda$, так что $\alpha + \alpha' = (\pi d \sin \theta) / \lambda = \beta$. Для главных максимумов $d \sin \theta = m\lambda$, $\alpha + \alpha' = m\lambda$. Поэтому $\sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha'$ и, следовательно, $\mathcal{J}'_{\text{пл}} = \mathcal{J}_{\text{пл}}$. При $m = 0$ рассуждение неприменимо, так как в этом случае в знаменателе $\sin \theta = 0$. Допустим теперь, что θ не есть угол на главный максимум. При больших значениях N главные максимумы очень резкие. Практически весь свет концентрируется в главных максимумах, занимающих очень узкие интервалы углов $\Delta\theta$, стремящиеся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Практическое значение имеют только углы, удовлетворяющие условию $d \sin \theta = m\lambda$, а также углы, отличающиеся от них чисто мало, а в этих случаях применимо доказательство, приведенное выше.

8.6. $b/d = 1/4$ или $b/d = 3/4$ (см. предыдущую задачу).

8.7* Решение. Введем обозначения $q = b/d$, $q(d - b)/d = 1 - q$. Суммарный поток энергии прошедшего света, распределяющийся по всем максимумам, пропорционален q , интенсивность нулевого максимума пропорциональна q^2 , а потому

$$\frac{\mathcal{J}_{\text{прош}}}{q} = \frac{\mathcal{J}'_{\text{прош}}}{q'}, \quad \frac{\mathcal{J}_0}{q^2} = \frac{\mathcal{J}'_0}{q'^2}.$$

По теореме Бабине для дополнительных решеток $\mathcal{J}_{\text{диф}} = \mathcal{J}'_{\text{диф}}$. Кроме того, $\mathcal{J}_{\text{прош}} = \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_{\text{диф}}$. Исключив из написанных соотношений $\mathcal{J}'_{\text{диф}}$ и \mathcal{J}'_0 , найдем $\mathcal{J}_{\text{диф}} = (1 - q)\mathcal{J}_{\text{прош}}$. Учитывая также, что $\mathcal{J}_{\text{прош}} = q\mathcal{J}_{\text{пад}}$, получим $\mathcal{J}_{\text{диф}} = q(1 - q)\mathcal{J}_{\text{пад}}$. Максимум для $\mathcal{J}_{\text{диф}}$ получается при $q = 1/2$. При этом $\mathcal{J}_{\text{диф}} = \mathcal{J}_{\text{пад}}/4$.

8.8. $N d \sin \theta = n\lambda$, но $d \sin \theta \neq k\lambda$, $b \sin \theta = m\lambda$, где n, m, k — целые числа. Условие минимума — выполнение хотя бы одного из этих равенств.

8.9. $d(\sin \theta - \sin \theta_0) = n\lambda$. Если $d \gg n\lambda$, то условие максимума принимает вид $d \cos \theta_0 (\theta - \theta_0) \approx n\lambda$, т. е. постоянная решетки как бы уменьшилась по сравнению со случаем нормального падения и стала равной $d \cos \theta_0$ вместо d . При этом углы $\theta - \theta_0$, определяющие направления на максимумы, отсчитываются от направления падающего света (или отраженного в отражающей решетке).

8.10. $\lambda = 0,573 \text{ \AA}$.

8.11. $m = nd/b$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

8.12. Исчезнут: 1) спектры порядков $2, 4, 6, \dots$; 2) спектры порядков $3, 6, 9, \dots$; 3) спектры порядков $4, 8, 12, \dots$

8.13. Максимальный порядок равен наибольшему из целых чисел, не превосходящих d/λ .

$$\mathbf{8.14.} \lambda = 6481 \text{ \AA}.$$

8.15. При нормальном падении $\lambda_{\max} = d$. Период решетки должен быть не менее $0,01 \text{ см}$, т. е. решетка должна иметь не более 10 штрих/мм . При скользящем падении на пропускающую решетку $\lambda_{\max} = 2d$.

8.16* Если угол падения близок к $\pi/2$, зеркальное отражение наблюдается всегда. При малых углах падения зеркальное отражение может наблюдаться, если шероховатость поверхности $h \ll \lambda$.

Решение. Пусть падающие лучи образуют угол θ с нормалью к плоскости, изображенной на рис. 658 штриховой линией. Рассмотрим интерференцию вторичных волн, исходящих от поверхности тела под углом θ' к нормали. Разность хода каких-либо двух лучей, идущих в рассматриваемом направлении, определяется выражением

$$\Delta = AD - BC = a(\sin \theta' - \sin \theta) + h(\cos \theta' + \cos \theta).$$

Здесь a может принимать какие угодно значения. Поэтому, если $\theta' \neq \theta$, то разность хода Δ может принимать также какие угодно значения, и притом для неправильной поверхности тела эти значения будут встречаться одинаково часто. Это показывает, что правильное отражение, если таковое возможно, может происходить лишь под углом $\theta' = \theta$. В таком случае

$$\Delta = 2h \cos \theta.$$

Отсюда видно, что, каков бы ни был размер h , можно подобрать достаточно большой угол θ , для которого $\Delta \ll \lambda$. При этом условии отражение будет правильное. При нормальном падении $\Delta = 2h$, и правильное отражение возможно лишь при соблюдении условия $h \ll \lambda$.

8.17. Не могут.

8.18. Углы дифракции не меняются. Интенсивности стремятся к нулю.

8.19. $h = \frac{2m-1}{2(n-1)}\lambda$, где $m = 1, 2, 3, \dots$ Интенсивность нулевого главного максимума равна нулю.

8.20. Углы дифракции не меняются. Интенсивности стремятся к нулю.

8.21. Интенсивность определяется формулой

$$\mathcal{J}(\sin \theta) = \mathcal{J}_1 \frac{1 - \cos n\delta}{1 - \cos \delta} \cdot 2[1 + \cos(N-n)\delta] = 4\mathcal{J}_1 \frac{\sin^2(n\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \cos^2\left(\frac{N-n}{2}\delta\right),$$

где $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$, $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$, $u = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$. График изображен на рис. 659.

$$\mathbf{8.22.} \frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}_{\text{пад}}} = \frac{(Nb)^2}{(Nd)^2} = \frac{1}{4}; \quad \frac{\mathcal{J}_{\pm 1}}{\mathcal{J}_{\text{пад}}} = \frac{4N^2 b^2}{\pi^2 N^2 d^2} \approx 0,1; \quad \frac{\mathcal{J}_{\pm 2}}{\mathcal{J}_{\text{пад}}} = 0.$$

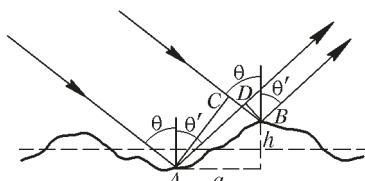


Рис. 658

8.23. $m > \frac{\delta}{f} \frac{a}{N\delta\lambda} = 2,5$; $m \geq 3$.

8.24. $l < \frac{Da\delta\lambda}{2\lambda^2}$. Кроме того, $l_{\min} \gg D$ (условие малости углов).

8.25. $D_{\min} = Nd = 5$ см; $f_{\min} = 250$ см.

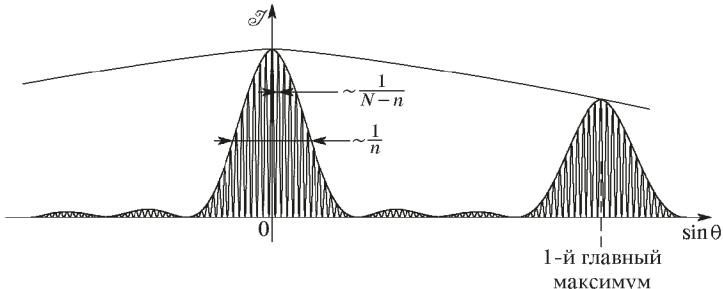


Рис. 659

8.26.* $\Delta x = 1$ см.

Решение. Условие максимума m -го порядка (рис. 660)

$$d(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = m\lambda,$$

а максимума $(m+1)$ -го порядка

$$d(\sin \theta'_1 - \sin \theta'_2) = (m+1)\lambda.$$

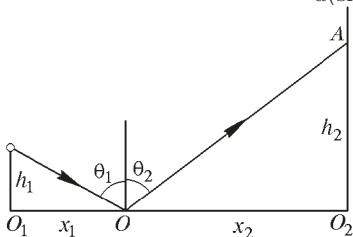


Рис. 660

При переходе от одного максимума к другому углы θ_1 и θ_2 получают приращения $\Delta\theta_1$ и $\Delta\theta_2$, связанные соотношением

$$d(\cos \theta_1 \Delta\theta_1 - \cos \theta_2 \Delta\theta_2) = \lambda.$$

Кроме того, $x_1 = h_1 \operatorname{tg} \theta_1$, $x_2 = h_2 \operatorname{tg} \theta_2$, причем $x_1 + x_2 = a = \text{const}$. Из этого условия получается второе соотношение

$$\frac{h_1}{\cos^2 \theta_1} \Delta\theta_1 + \frac{h_2}{\cos^2 \theta_2} \Delta\theta_2 = 0.$$

Из этих двух соотношений находим $\Delta\theta_1$ и $\Delta\theta_2$, а после этого расстояние между максимумами:

$$\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{h_1}{\cos^2 \theta_1} \Delta\theta_1 = -\frac{h_2}{\cos^2 \theta_2} \Delta\theta_2.$$

Вычисления можно упростить, заметив, что углы θ_1 и θ_2 мало отличаются от угла падения θ_0 , соответствующего правильному отражению света от пластиинки. Заменив эти углы на θ_0 , находим

$$\Delta x = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{\lambda}{d \cos^2 \theta_0}.$$

При этом $\cos\theta_0 \approx h_1/x_1 \approx h_2/x_2$, или $\cos\theta_0 = (h_1 + h_2)/(x_1 + x_2) = (h_1 + h_2)/a = 1/10$. Подстановка числовых значений дает ответ.

8.27. 1) 8,1 угл. с/Å; 2) 0,0197 мм/Å; 3) 50,7 Å/мм.

8.28. Около 0,12 мм.

8.29. $D = \frac{n}{d \cos \theta} = \frac{n}{d \sqrt{1 - (n\lambda/d)^2}} = 0,63 \cdot 10^4$ рад/см = 13 угл. с/Å.

8.30. 600 штрих/мм.

8.31. $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$.

8.32. Около 1000.

8.33. 12000 и 48000.

8.34. Нет.

8.35. Разрешающая способность не изменится. Дисперсионная область уменьшится вдвое.

8.36. $\Delta x = f\lambda/l = 3,3$ мкм.

8.37. $b \ll \frac{f\lambda}{Nd} \approx 0,001$ см.

8.38* $R_{\max} \approx 100$.

Решение. Радиус пространственной когерентности в плоскости решетки $r_{\text{ког}} \approx \lambda L/D$. Эффективно работающее число щелей $N_{\text{эфф}} \approx r_{\text{ког}}/d$, где d — период решетки. Разрешающая способность решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN_{\text{эфф}}, \quad m_{\max} \approx \frac{d}{\lambda}.$$

Отсюда максимальная разрешающая способность

$$R_{\max} \approx \frac{d}{\lambda} \frac{r_{\text{ког}}}{d} \approx \frac{L}{D} = 100.$$

8.39. $L_{\min} \approx D \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 10$ см.

8.40. $R_{\max} \approx 1/\psi = 10^3$.

8.41. $\psi \lesssim \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = 4 \cdot 10^{-4}$ рад.

8.42. $\frac{\delta\theta_2}{\delta\theta_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} \operatorname{tg}\theta}{\frac{1}{N} \operatorname{tg}\theta} = \frac{N}{\sqrt{t}} \approx 15$.

8.43* Нельзя. $\delta\lambda_{\text{деф}} \approx 3$ Å.

Решение. Зеемановское расщепление спектральной линии $\Delta\omega = \frac{eB}{2m_e c}$, откуда $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 eB}{4\pi m_e c^2} = 0,16$ Å.

Если решетка не имеет дефектов, то минимально разрешаемое $\delta\lambda = \lambda/(mN) = 0,06$ Å < $\Delta\lambda$, т. е. зеемановское расщепление разрешается бездефектной решеткой с теми же параметрами.

Для решетки с дефектом максимум 1-го порядка размыт между углами θ_1 и θ_2 , где $d_1 \sin\theta_1 = \lambda$, $d_2 \sin\theta_2 = \lambda$ (и $\theta_1 \approx \lambda/d_1$; $\theta_2 \approx \lambda/d_2$), откуда угловая полуширина максимума 1-го порядка

$$\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{d_2 - d_1}{2d_1 d_2} \lambda \approx \frac{\Delta d}{2d^2} \lambda,$$

где $\Delta d/d = 10^{-2}$ — относительное изменение периода решетки. При малых углах θ угловая дисперсия в первом порядке

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \approx \frac{m}{d} = \frac{1}{d},$$

откуда получим

$$\delta\lambda_{\text{деф}} \approx d \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta d}{2d} \lambda = 3 \text{ \AA} > \Delta\lambda.$$

Таким образом, разрешить зеемановское расщепление с помощью данной дефектной решетки нельзя.

8.44. $D_{\min} \approx \frac{1,22}{n} \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 1,5 \text{ см.}$

8.45. $\tau_\phi = D/c = 100 \text{ пс.}$

8.46. $\tau/\tau_0 \approx 6.$

8.47. $L \approx \frac{c\tau}{\lambda mn} = 100 \text{ см.}$

8.48. $D > \frac{\lambda d \cos \alpha}{m \delta\lambda} \approx 0,042 \text{ см};$ отражение в положительные порядки невозможны, т. е. $m = -2.$

8.49. $L = \frac{ct d^2 \cos^3 \varphi}{\lambda \delta\lambda} \approx 73 \text{ см, где } \lambda \approx \lambda_{\text{ср}} = 505 \text{ нм, } \sin \varphi = \lambda/d = 0,1.$

8.50. $\tau = \frac{l\lambda \delta\lambda}{cd^2} = 2,3 \cdot 10^{-12} \text{ с.}$

8.51. $d = 6\lambda_1 = 30 \text{ мкм.}$

8.52. $\frac{\Delta\omega_2}{\Delta\omega_1} \approx \frac{c\tau}{\Delta} = 3 \cdot 10^{-3}.$

8.53. $Q \approx 10.$

8.54.* Решение. Электрон периодически возбуждает в решетке тождественные возмущения, следующие друг за другом через время $\tau = d/v.$ Разность хода между возмущениями, распространившимися от соседних штрихов решетки A и B под углом θ к нормали $d \left[\frac{c}{v} - \sin \theta \right],$ должна быть равна $m\lambda,$ чтобы возмущения усиливали друг друга (угол θ может быть как положительным, так и отрицательным). Случай $m = 0$ и $m < 0$ исключаются, поскольку $c/v > 1.$ Таким образом, возможные значения m и λ должны удовлетворять условию

$$|\sin \theta| = \left| \frac{c}{v} - \frac{m\lambda}{d} \right| \leqslant 1.$$

8.55. $\Delta T < \frac{1}{Nma} \approx 1 \text{ К.}$

8.56.* $D \approx 4,4 \text{ см.}$

Решение. Условие автоколлимации (обратного отражения на дифракционной решетке) в 1-м порядке $2ds \sin \theta = \lambda,$ где $d = 1/N,$ θ — угол наклона решетки. Отсюда получаем

$$\sin \theta = \lambda \frac{N}{2}, \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda N}{2} \right)^2}.$$

Относительное расстояние между модами в интерферометре

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2L}.$$

Для выделения одной моды в 1-м порядке необходимо выполнение условия

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\lambda}{2L} \geq \frac{1}{N_1},$$

где $N_1 = \frac{DN}{\cos \theta}$ — число освещенных штрихов решетки. Отсюда

$$D \geq \frac{2L}{N\lambda} \cos \theta = L \sqrt{\frac{1 - (\frac{\lambda N}{2})^2}{\frac{\lambda N}{2}}} \approx 4,4 \text{ см.}$$

8.57. $\delta\lambda = \frac{\lambda^2 \operatorname{ctg} \varphi}{2D} = 0,2 \text{ \AA}.$

8.58. $\delta\lambda = \frac{\lambda}{2ad \frac{dn}{d\lambda}} = 35 \text{ \AA}.$

8.59.* $l_F \gg \frac{h^2}{\lambda} = 10^6 \text{ см} = 10 \text{ км.}$

Решение. На меньших расстояниях никакой фраунгоферовой картины не возникает. При $l \ll h^2/\lambda$ справедлива геометрическая оптика. За кристаллом получаются пучки дифрагированных лучей, а в местах их пересечения с плоскостью фотопластинки — система пятен. Нефраунгоферовый характер пятен проявляется в том, что в каждом пятне фаза колебаний меняется от точки к точке, тогда как в случае фраунгоферовой картины она практически одинакова в пределах каждого пятна. Однако направления пучков за кристаллом можно определить, проводя от кристалла прямые на (расположенные в бесконечности) фраунгоферовы максимумы. Этим и объясняется, почему при расчете указанных направлений можно пользоваться формулами фраунгоферовой дифракции.

8.60.* Решение. Пусть на решетку падает пучок параллельных лучей с длиной волны λ под углом скольжения α_0 . Направление дифрагированного пучка m -го порядка определяется условием $d(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) = m\lambda$. Для такого же пучка с близкой длиной волны λ' $d(\cos \alpha_0 - \cos \alpha') = m\lambda'$. Отсюда

$$d(\cos \alpha' - \cos \alpha) = m(\lambda - \lambda'), \quad \text{или} \quad d \sin \alpha \delta\alpha = m \delta\lambda,$$

где введены обозначения $\delta\alpha = |\alpha' - \alpha|$, $\delta\lambda = |\lambda' - \lambda|$. Для спектрального разрешения необходимо, чтобы оба пучка пространственно разделились. Если l — расстояние до фотопластинки, измеренное вдоль направления дифрагированного луча, то боковое смещение одного пучка относительно другого равно $x = l \delta\alpha$. Условие разрешения состоит в том, чтобы это смещение было не меньше ширины дифрагированного пучка, т. е. $x \geq h$. Ширина h определяется выражением $h = D \sin \alpha$, где D — ширина дифракционной решетки. В результате условие разрешения принимает вид

$$\frac{lm \delta\lambda}{d \sin \alpha} \geq D \sin \alpha.$$

Минимальному разрешаемому расстоянию $\delta\lambda$ соответствует знак равенства. Поэтому для разрешающей способности получаем

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{lm \lambda}{D d \sin^2 \alpha} = Nm \frac{l \lambda}{h^2}.$$

Так как $l\lambda/h^2 \ll 1$, то $\lambda/\delta\lambda \ll Nm$, т. е. разрешающая способность решетки в рентгеновской области спектра меньше, чем в оптической. Для повыше-

ния разрешающей способности надо применять узкие пучки, а фотопластинку помешать возможно дальше от решетки.

$$8.61. \delta\theta = \frac{\lambda}{2L \sin \varphi} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ рад.}$$

$$8.62. \tau = \frac{6 \lambda_0 f n}{v} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

$$8.63. \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{v}{c} \sin \theta = \frac{v}{c} \frac{m\lambda}{d} = 4 \cdot 10^{-9}.$$

8.64. $v = 2v/d = 10 \text{ кГц}$; частота изменения тока фотоприемника во вторых порядках $v_{\pm 2} = 4v/d = 20 \text{ кГц}$. Токи фотоприемников, установленных в точках P_1 и P_2 , сдвинуты по фазе.

8.65. Максимальный порядок спектра равен целому числу, содержащемуся в d/λ , т. е. $m = 3$. В этом порядке $\delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm} = 0,04 \text{ \AA}$; $\Delta x = \frac{fm\delta\lambda}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}} = 1 \text{ мм.}$

$$8.66*. R_{\text{реш}} = 3,3 \cdot 10^5; R_{\text{реш}}/R_{\text{пп}} = 33.$$

Решение. Из формулы решетки $d(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda$ следует $m\lambda \leq 2d$, откуда умножением на $N = b/d$ получаем $R_{\text{реш}} = 2b/\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ и $R_{\text{реш}}/R_{\text{пп}} = \frac{2/\lambda}{dn/d\lambda} = 33$.

$$8.67. d = \left| \frac{d\lambda}{dn} \right| = 10^{-3} \text{ см.}$$

$$8.68. d = m \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

$$8.69. D = \frac{(n^2 - 1) - \lambda n \frac{dn}{d\lambda}}{\lambda \epsilon}; \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \sqrt{n^2 - 1}}{2h \left(n^2 - 1 - \lambda n \frac{dn}{d\lambda} \right)}.$$

$$8.70. N = \frac{L \sqrt{n^2 - 1}}{2h} = 17.$$

$$8.71. L = \frac{\lambda^2}{(n^2 - 1)\delta\lambda} = 2,5 \text{ см.}$$

$$8.72. b = \frac{L(n^2 - 1)}{\lambda \frac{dn_{\text{пп}}}{d\lambda}} = 2,6 \text{ м.}$$

$$8.73. n = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2d(\lambda_2 - \lambda_1)} = 2,1.$$

$$8.74. 2L \cos \varphi = m\lambda; \Delta\varphi = -\frac{\lambda}{2L \sin \varphi}; \frac{d\varphi}{d\lambda} = -\frac{m}{2L \sin \varphi}; \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2L \cos \varphi}.$$

$$8.75. \Delta\lambda = 0,125 \text{ \AA}.$$

$$8.76. m \approx 36300.$$

8.77*. Решение. Пусть ρ — коэффициент отражения света (по интенсивности) от каждой посеребрённой поверхности пластины интерферометра. (Последние для простоты на рис. 661 изображены математическими плоскостями.) Если \mathcal{J}_0 — интенсивность падающего света, то интенсивности прошедших пучков 1, 2, 3, ... будут

$$\mathcal{J}_1 = (1 - \rho)^2 \mathcal{J}_0,$$

$$\mathcal{J}_2 = \rho^2 (1 - \rho)^2 \mathcal{J}_0,$$

$$\mathcal{J}_3 = \rho^4 (1 - \rho)^2 \mathcal{J}_0,$$

.....

а соответствующие амплитуды

$$\begin{aligned}A_1 &= (1 - \rho)A_0, \\A_2 &= \rho(1 - \rho)A_0, \\A_3 &= \rho^2(1 - \rho)A_0, \\&\dots\end{aligned}$$

где A_0 — амплитуда падающего света. Каждый пучок запаздывает по фазе относительно предыдущего пучка на $\Delta = (2h \cos \varphi)/\lambda$, где h — расстояние между отражающими плоскостями интерферометра, а φ — угол падения. С учетом запаздывания амплитуда результирующего колебания прошедшей волны представится геометрической прогрессией:

$$\begin{aligned}A &= A_0(1 - \rho)[1 + \rho e^{-i\Delta} + \rho^2 e^{-2i\Delta} + \dots] = \\&= \frac{A_0(1 - \rho)}{1 - \rho e^{-i\Delta}},\end{aligned}$$

а интенсивность

$$\mathcal{I} = \frac{A_0^2(1 - \rho)^2}{(1 - \rho e^{-i\Delta})(1 - \rho e^{i\Delta})} = \frac{\mathcal{I}_0(1 - \rho)^2}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2(\Delta/2)}.$$

Когда $\Delta = (2m + 1)\pi$, это выражение минимально: $\mathcal{I}_{\min} = \mathcal{I}_0 \left(\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right)^2$, или $\mathcal{I}_{\min} \approx \frac{\mathcal{I}_0}{4}(1 - \rho)^2 \approx 0$, так как отражательная способность ρ близка к единице. Когда $\Delta = 2m\pi$, величина \mathcal{I} достигает максимума: $\mathcal{I}_{\max} = \mathcal{I}_0$. Когда $(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2(\Delta/2) = 2(1 - \rho)^2$, т. е. $4\rho \sin^2(\Delta/2) = (1 - \rho)^2$, то максимальная интенсивность убывает вдвое. В максимуме $\Delta = 2m\pi$, в точке, где $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\max}/2$, $\Delta = 2m\pi + \delta\Delta$, причем $4\rho \sin^2(\delta\Delta/2) = (1 - \rho)^2$. Так как эта величина мала по сравнению с единицей, то синус можно заменить самим углом и таким путем получить $\delta\Delta = (1 - \rho)/\sqrt{\rho}$.

Пусть для угла падения φ интенсивность линии с длиной волны λ равна половине максимальной. Тогда

$$\frac{2h \cos \varphi}{\lambda} = 2m\pi + \delta\Delta.$$

Для более длинной волны λ' и того же угла падения интенсивность будет также равна половине максимальной при условии

$$\frac{2h \cos \varphi}{\lambda'} = 2m\pi - \delta\Delta.$$

Тогда расстояние между максимумами обеих линий как раз окажется равным полуширине линии, т. е. минимальному расстоянию, разрешаемому интерферометром. В этом случае $\lambda(2m\pi + \delta\Delta) = \lambda'(2m\pi - \delta\Delta)$, откуда

$$\frac{\lambda + \lambda'}{\lambda' - \lambda} = \frac{2m\pi}{\delta\Delta} = \frac{2m\pi}{1 - \rho} \sqrt{\rho},$$

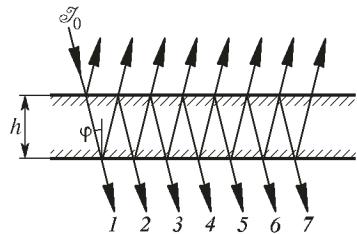


Рис. 661

или ввиду близости линий λ и λ'

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{m\pi}{1-\rho} \sqrt{\rho} \approx \frac{m\pi}{1-\rho} \approx \frac{\pi}{1-\rho} \frac{2h}{\lambda}.$$

Это выражение можно записать в том же виде, что и для дифракционной решетки, т. е. $\lambda/\delta\lambda = N_{\text{эфф}} m$. Роль эффективного числа штрихов играет величина $N_{\text{эфф}} = \pi/(1 - \rho)$. Полученные результаты справедливы и для случая, когда интерферометр работает в отраженном свете.

8.78. $Q = \omega \frac{W}{N_{\text{пот}}} = \frac{2\pi L}{\lambda(1-\rho)} = 10^9$, где $N_{\text{пот}}$ — мощность потерь. $\delta\nu = \frac{c}{\lambda Q} = 0,5 \text{ МГц}$; $\delta\nu = \frac{c}{2L} = 150 \text{ МГц}$.

8.79. $L_{2\min} = L_1/10 = 2,5 \text{ см}$; $R = f\sqrt{\lambda/L_2} = 0,45 \text{ см}$.

8.80.* $T \approx 1,5\%$.

Решение. Дисперсионная область интерферометра Фабри–Перо $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2L}$, где $m = 2L/\lambda$ — порядок интерференции, L — база интерферометра. Отсюда следует

$$L = L_{\max} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}.$$

Разрешающая способность интерферометра

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{2\pi L}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\pi\lambda}{\Delta\lambda(1-\rho)}.$$

Таким образом, максимальное значение коэффициента пропускания есть

$$T = 1 - \rho \approx \pi \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} \approx 1,5\%.$$

8.81. $\tau \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ с}$; $Q \approx 10^8$.

8.82. $\frac{dn}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \frac{\lambda}{2L\Delta\lambda}$.

8.83.* $R_{\text{ик}} \approx 2 \cdot 10^5$.

Решение. Разрешающая способность R интерферометра Фабри–Перо может быть оценена из следующих соображений. Минимальная разность хода между лучами, участвующими в образовании интерференционной картины в интерферометре Фабри–Перо, равна $2L$. Следовательно, порядок интерференции $m = 2L/\lambda$. Эффективное число лучей на выходе интерферометра есть $N \approx 1/(1 - \rho)$ (см. решение задачи 8.77). Проводя аналогию с дифракционной решеткой, запишем

$$R = \frac{\omega}{\Delta\omega} = mN \approx \frac{2L}{\lambda} \frac{1}{(1-\rho)} = \frac{\omega L}{c(1-\rho)}.$$

Отсюда

$$\Delta\omega \approx \frac{c(1-\rho)}{L}.$$

Так как $\omega = \omega_{\text{ИК}} + \omega_{\text{л}}$, где $\omega_{\text{л}} = \text{const}$ — частота лазерного излучения, $\omega_{\text{ИК}}$ — частота исследуемого источника в ИК-диапазоне, можно записать $\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{ИК}}$. Следовательно,

$$R_{\text{ИК}} = \frac{\omega_{\text{ИК}}}{\Delta\omega_{\text{ИК}}} = \frac{\omega_{\text{ИК}}}{\Delta\omega} = \frac{\omega_{\text{ИК}}}{\omega} R \approx \frac{\omega_{\text{ИК}} L}{c(1-\rho)} = \frac{2\pi L}{\lambda_{\text{ИК}}(1-\rho)} \approx 2 \cdot 10^5.$$

8.84* $T_2 = 354$ К.

Решение. Условие максимума в интерферометре Фабри–Перо с воздушным промежутком имеет вид $2Ln\cos\varphi = m\lambda$, где φ — угол наклона лучей, L — база интерферометра. Для выбранного кольца $m = \text{const}$, поэтому при изменении температуры будем иметь

$$n_1 \cos\varphi_1 = n_2 \cos\varphi_2, \quad \text{или} \quad n_1 \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) = n_2 \quad (\varphi_2 = 0).$$

Поскольку давление $P = \text{const}$, имеем $n - 1 = A/T$. Постоянная A находится по значению разности $n - 1$ при $T_1 = 293$ К. Это дает $A = 0,08497$. Таким образом,

$$n_1 \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) = n_2 = 1 + \frac{A}{T_2} = 1,00024.$$

Отсюда получаем ответ.

8.85. $\delta T \approx \frac{1}{\alpha R} \approx 0,1$ К, где $R \approx 10^7$ — разрешающая способность интерферометра Фабри–Перо.

8.86. $\delta P \lesssim \frac{1}{28 \cdot 10^{-10} R} \approx 150$ Па, где $R \approx 2,4 \cdot 10^6$ — разрешающая способность интерферометра Фабри–Перо.

8.87. $R_{\max} \approx \frac{D}{\lambda\varphi} = 2 \cdot 10^6$.

8.88. $R_{\max} \approx \frac{fD}{\lambda d} = 5 \cdot 10^5$.

8.89. $L_{\min} \approx 0,0085$ см; $L_{\max} \approx 0,53$ см.

8.90. На длине $l = 1$ м неон поглощает 2,5% энергии излучения.

8.91. Серия затухающих импульсов длительностью $\tau = 10^{-11}$ с, следующих через интервалы $\Delta t = 2L/c = 3 \cdot 10^{-11}$ с. Импульсы затухают по экспоненциальному закону со временем затухания $t = R\lambda/c = 1,6 \cdot 10^{-9}$ с.

8.92* $Q \approx 18D^2/\lambda^2$.

Решение. Функция пропускания резонатора

$$\frac{\mathcal{J}_{\text{вых}}}{\mathcal{J}_{\text{вх}}} = \frac{1}{1 + (4\rho/T^2)\sin^2(kL\cos\psi)},$$

где ρ — коэффициент отражения; $T = 1 - \rho$; ψ — угол падения. При $\psi = 0$ максимум пропускания имеет место при $kL = m\pi$. Добротность резонатора

$$Q = \frac{\omega}{\delta\omega} = \frac{2\pi m \sqrt{\rho}}{T}.$$

Для малых углов $\psi \ll 1$:

$$\frac{\mathcal{J}_{\text{вых}}}{\mathcal{J}_{\text{вх}}} = \frac{1}{1 + Q^2\psi^4/4}.$$

Из-за дифракции на зеркалах угол ψ лежит в пределах $-\lambda/D \lesssim \psi \lesssim \lambda/D$.

Диаметр выходного пучка возрастет в три раза, если резонатор будет пропускать волны в угловом диапазоне

$$-\frac{\lambda}{3D} \lesssim \psi \lesssim \frac{\lambda}{3D}.$$

Из условия $\frac{Q^2 \psi^4}{4} \approx 1$ найдем $Q \approx \frac{2}{\psi^2} \approx \frac{18D^2}{\lambda^2}$.

8.93. $\tau \sim \frac{4\pi L}{(1 - \rho)c}$.

8.94. $A_{\max} = \frac{1 + \sqrt{\rho}}{\sqrt{1 - \rho}} A_0 \approx 8,8A_0$; $A_{\min} = \frac{1 - \sqrt{\rho}}{\sqrt{1 - \rho}} A_0 \approx 0,11A_0$.

8.95. $R \approx \frac{2\pi L}{\lambda(1 - \rho)} \approx 10^7$, где $\rho = \left(\frac{a - 1}{a + 1}\right)^2 \approx 0,957$.

8.96. $l_{\min} = \frac{\lambda}{2n} = 206$ нм.

8.97. $l_m = \frac{\lambda}{4n}(2m + 1) = 8,75 \cdot 10^{-2}(2m + 1)$ мкм, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Указание. Следует исследовать на минимум функцию $|E_{\text{отр}}/E_{\text{пад}}|^2$, откуда можно найти амплитудный коэффициент отражения ($r = -2/7$), а затем и показатель преломления n ($n = 1,8$).

8.98. Квазипериодические осцилляции (броски) фототока возникнут при $\tau < 2L/c = 1$ нс, где $2L/c$ — период серии импульсов света, приходящих в фотоприемник. Частота колебаний фототока $v = 10^9$ Гц, характерное время затухания $T \approx \frac{\lambda}{c} Q \approx 3 \cdot 10^{-7}$ с. Число колебаний за время затухания $N \approx 300$ ($Q \approx 1,5 \cdot 10^8$ — добротность резонатора Фабри–Перо).

8.99. $L \gtrsim \frac{c}{2\Delta v} = 15$ см; $\rho_{\max} = 1 - \frac{2\pi L}{cT} \approx 0,97$.

8.100. $\mathcal{J}_L = \mathcal{J}_0 \frac{(1 - \rho)l^2}{4\pi^2 L^2} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ Вт/м².

8.101. 1) $m = \frac{n - 1}{\lambda} b = 10\,000$; 2) $\theta = \frac{\lambda}{a} = 51,5''$.

8.102. $b = \frac{Nh(n - 1)}{\lambda \frac{dn_{\text{np}}}{d\lambda}} = 2,6$ м.

8.103. $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \leq \frac{d\varphi}{d\lambda} D = kD = 900$. Для разрешения дублета Na необходима большая разрешающая способность (порядка 1000).

8.104. 1) $G = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{h(n - 1)} = 0,5$ нм; $R = mN = 10^4$. 2) Допустимый разброс определяется тем, что между волной после первой и волной после десятой пластинки разность хода должна быть меньше $\lambda/2$. Отсюда $\Delta h < \frac{\lambda}{2N(n - 1)} = \frac{\lambda}{10}$.

8.105. $\theta_1 = \sqrt{2\lambda/d} = 0,158 \simeq 9^\circ$; $R = L/d = 4 \cdot 10^4$.

8.106. $b \approx \frac{\lambda L}{2d} = 5 \cdot 10^{-3}$ см; $l = \frac{\lambda L}{d} = 10^{-2}$ см; $\delta = b = 5 \cdot 10^{-3}$ см.

8.107. 1) $\Delta m = \frac{2d}{\lambda} \Delta n \approx -9$ («исчезнет» 9 колец); 2) $\Delta \lambda = G = \lambda/m = \lambda^2/(2d) \simeq 0,2$ нм.

8.108.* Решение. Двумерная решетка эквивалентна двум примыкающим друг к другу последовательно расположенным (вдоль оси x) одномерным решеткам со взаимно перпендикулярными щелями. При дифракции на решетке с вертикальными штрихами максимумы будут лежать на оси x , причем

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{и} \quad \frac{A_m}{A_0} = \frac{\sin \frac{\pi m \lambda / d}{\lambda / b}}{\frac{\pi m \lambda / d}{\lambda / b}}.$$

При дифракции на решетке с горизонтальными штрихами каждый максимум расщепится на серию максимумов, лежащую на прямой, параллельной оси y , углы между которыми $\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{b}$, а отношение амплитуд $\frac{A_n}{A_0}$ аналогично первой решетке. Таким образом, отношение амплитуды максимума с координатами ($x_m = m \frac{\lambda}{d} f$, $y_n = n \frac{\lambda}{d} f$) к амплитуде нулевого максимума ($x = 0$, $y = 0$) равно

$$\frac{A_{mn}}{A_{00}} = \frac{\sin \frac{\pi m \lambda / d}{\lambda / b}}{\frac{\pi m \lambda / d}{\lambda / b}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi n \lambda / d}{\lambda / b}}{\frac{\pi n \lambda / d}{\lambda / b}}.$$

При $d/b = 6$; $m = 2$; $n = 3$, получаем

$$\frac{A_{23}}{A_{00}} = \frac{\sin \pi/3}{\pi/3} \cdot \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi^2}, \quad \frac{\mathcal{J}_{23}}{\mathcal{J}_{00}} = 0,277.$$

При дифракции на решетках, показанных на рис. 487, возникнет картина, содержащая максимумы, лежащие на осях x и y (нет перекрестной дифракции).

8.109. $\frac{\mathcal{J}_{(1,2)}}{\mathcal{J}_{(-1,0)}} = \left[\frac{\sin \left(\pi \frac{2\lambda/d}{\lambda/b} \right)}{\pi \frac{2\lambda/d}{\lambda/b}} \right]^2 = \left(\frac{\sin 2\pi/3}{2\pi/3} \right)^2 = 0,17$ (см. решение задачи 8.108). Серия максимумов разместится вдоль по оси x , а также по прямой, проходящей через $(0,0)$ и перпендикулярной наклонным штрихам.

8.110. Разрешающая способность спектрографа

$$R = b \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| = b \frac{8\pi^2 c^2 A}{\lambda^3} \simeq 360.$$

Для разрешения дублета Na нужен спектральный прибор с разрешающей способностью $R \gtrsim \frac{\lambda_{\text{cp}}}{\lambda_2 - \lambda_1} \approx 10^3$.

8.111. 1) $b > 5,7$ см. 2) Для призменного спектрографа потребовалась бы призма с $b \gtrsim 80$ см, что практически нереализуемо. $R > 8 \cdot 10^4$ — такую разрешающую способность можно реализовать с помощью дифракционной решетки с параметрами $n = 10^4 \text{ см}^{-1}$; $L = 10$ см; $m = 1$, откуда $R = 10^5$.

$$\mathbf{8.112.} \quad b \gtrsim \frac{R}{|dn/d\lambda|} \approx 4,2 \text{ см.}$$

$$\mathbf{8.113.} \quad \tau = \frac{L}{c \left(1 + \frac{\lambda R}{L}\right)} = 5,37 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

8.114. 1) Разрешение пленки $n \geq (2\Delta l)^{-1} = 85$ штрих/мм, где $\Delta l = \delta\theta F_0 = \frac{\lambda F_0}{D_0}$ — полуширина главных дифракционных максимумов; 2) $b \leq \frac{\lambda F_0}{D_0} = 6 \cdot 10^{-4}$ см; 3) $R = mN_{\text{эфф}} = 4 \cdot 10^3$.

8.115. Не годится ни одна решетка.

№	$\sin \theta_{\max} = m\lambda/d$	m_{\max}	R^{\max}	$\delta\lambda^{\min} = \lambda/R_{\max}$
1	0,3; 0,6; 0,9	3	$1,5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^{-3} > 2 \cdot 10^{-3}$
2	0,6	1	10^5	$6 \cdot 10^{-3} > 2 \cdot 10^{-3}$
3	> 1	—	$2 \cdot 10^5$	—

8.116. Возможны два решения: 1) $a/b = 1/3$; 2) $a/b = 3$.

8.117. Допустимое изменение показателя преломления $\Delta n \simeq 1/N$, откуда $\Delta P \simeq \frac{\Delta n}{3 \cdot 10^{-9}} = 3300$ Па.

8.118. Интенсивность не изменится.

8.119. Интенсивность не изменится.

$$\mathbf{8.120.} \quad \frac{I'(m=0)/I'(m=3)}{I(m=0)/I(m=3)} = \left(\frac{d}{b} - 1\right)^2 = 25.$$

8.121. 1) Толщина нитей $b - \frac{2\lambda}{\Psi} = 0,05$ мм; расстояние между нитями $d = \frac{\lambda}{\varphi/10} = 0,25$ мм; откуда число нитей на 1 см длины $n = \frac{1}{d} = 40 \text{ см}^{-1}$.

2) Размер колбы фонаря $l = \frac{\lambda}{2d} L = 5$ см.

$$\mathbf{8.122*} \quad v/c \geq d/L = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Решение. Частота падающего света из-за эффекта Доплера $v = v_0(1 + \frac{v}{c})$. При этом длина волны $\lambda = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{1 + v/c} \approx \lambda_0(1 - \frac{v}{c})$, т. е. $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_0 \frac{v}{c}$. Разрешение дифракционной решетки в первом порядке ($m = 1$) $R = \frac{\lambda}{8\lambda} = N = \frac{L}{d}$. Условие на разрешение полученного сдвига $\Delta\lambda$: $\Delta\lambda \geq \delta\lambda$, т. е. $\frac{\lambda_0 v}{c} \geq \frac{\lambda d}{L}$. Отсюда $\frac{v}{c} \gtrsim \frac{d}{L} = 2 \cdot 10^{-4}$.

$$\mathbf{8.123*} \quad V_0 = \left| \frac{\sin \frac{kbd_0}{2z}}{\frac{kbd_0}{2z}} \right| = \frac{\sin 0,4\pi}{0,4\pi} = 0,76; \quad \Delta d_0 = \frac{\lambda z}{D} = 10^{-3} \text{ см.}$$

Решение. Радиус пространственной когерентности источника, освещающего две щели в опыте Юнга (без дифракционной решетки)

$$\rho = \frac{\lambda}{\Psi} = \frac{\lambda z}{D} = 10^{-3} \text{ см} < d_0 = 2 \text{ мм.}$$

Таким образом, действительно интерференция на экране не наблюдается.

Если же источник накрыть дифракционной решеткой, то каждая ее щель шириной b освещает щели S_1 и S_2 когерентно:

$$\rho_0 = \frac{\lambda z}{b} = 0,5 \text{ см} > d_0 = 2 \text{ мм.}$$

Каждая щель решетки создает вполне четкую картину интерференции $I_0(x)$ с видностью

$$V_0 = \left| \frac{\sin \frac{\pi b d_0}{\lambda z}}{\frac{\pi b d_0}{\lambda z}} \right| = \frac{\sin 0,4\pi}{0,4\pi} = 0,76.$$

При этом разные щели создают некогерентные поля на экране, интенсивность которых вычисляется сложением интенсивностей картин, сдвинутых друг относительно друга.

Щель, находящаяся на оси симметрии, создает картину интерференции

$$\mathcal{I}(x) = 2\mathcal{I}_0 \left(1 + V_0 \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x \right),$$

где $\Lambda = \lambda z / d_0$ — ширина полосы на экране \mathcal{E} ; n -я щель создает картину, сдвинутую по оси x на экране на расстояние $\Delta x_n = nd$, т. е.

$$\mathcal{I}_n(x) = 2\mathcal{I}_0 \left[1 + V_0 \cos \frac{2\pi}{\Lambda} (x - nd) \right].$$

Результирующая интенсивность

$$\mathcal{I}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{I}_n(x) = 2N\mathcal{I}_0 + 2\mathcal{I}_0 V_0 \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda} x - \frac{2\pi d}{\Lambda} n \right).$$

Из условия задачи: коэффициент при n

$$\frac{2\pi d}{\Lambda} = \frac{2\pi d d_0}{\lambda z} = 2\pi.$$

Отсюда сумма $\sum_{n=0}^{N-1} \cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda} x - 2\pi n \right) = N \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x$.

Таким образом, результирующая интенсивность

$$\mathcal{I}(x) = 2\mathcal{I}_0 N \left(1 + V_0 \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x \right).$$

Поэтому искомая видность в этом случае $V = V_0$. Но интенсивность картины возрастает в $N = D/d = 200$ раз! При таком подборе чисел ($\frac{dd_0}{\lambda z} = 1$) все слагаемые «колебания» синфазны.

Однако если $\frac{2\pi}{\Lambda} d = 2\pi + \frac{2\pi}{N}$, то колебания исчезнут. Достигается это, очевидно, изменением, например, расстояния между щелями d_0 на величину Δd_0 :

$$\frac{2\pi d(d_0 + \Delta d_0)}{\lambda z} = 2\pi + \frac{2\pi}{N},$$

откуда

$$\frac{2\pi d}{\lambda z} \Delta d_0 = \frac{2\pi}{N}, \quad \text{или} \quad \Delta d_0 = \frac{\lambda z}{Nd} = \frac{\lambda z}{D} = 10^{-3} \text{ см.}$$

Если не изменять расстояние между щелями, то «испортить» картину можно, изменив длину волны на $\Delta\lambda$. Этот вопрос содержится в задаче 8.124.

Заметим также, что суммирование выражения $\sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x - \frac{2\pi d}{\Lambda}n\right)$ сильно упрощено данными задачи, где оказалось, что $\frac{d}{\Lambda} = \frac{dd_0}{\lambda z} = 1$. Однако суммирование также легко провести и без этого упрощения. Достаточно перейти на комплексную плоскость. Тогда указанная сумма станет такой:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\Omega x} e^{-i\Omega dn} = e^{i\Omega x} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\Omega dn},$$

где обозначено $\Omega = 2\pi/\Lambda$ и далее $\Omega d = \delta$, т. е. сумма

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\delta n} = 1 + e^{-i\delta} + e^{-2i\delta} + \dots + e^{-i(N-1)\delta} = \frac{1 - e^{-iN\delta}}{1 - e^{-i\delta}}.$$

Это суммирование аналогично суммированию при вычислении поля, излучаемого всеми щелями дифракционной решетки. Квадрат модуля полученной величины

$$\left| \frac{1 - e^{-iN\delta}}{1 - e^{-i\delta}} \right|^2 = \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos \delta} = \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Теперь можно перейти обратно к суммированию косинусов:

$$e^{i\Omega x} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\Omega dn} \rightarrow \cos \Omega x \frac{\sin \frac{N\Omega d}{2}}{\sin \frac{\Omega d}{2}}.$$

Тогда результирующая интенсивность $\mathcal{J}(x)$ будет равна

$$\mathcal{J}(x) = 2\mathcal{J}_0 N \left[1 + \frac{V_0}{N} \left(\frac{\sin \frac{N\pi d d_0}{\lambda z}}{\sin \frac{\pi d d_0}{\lambda z}} \right) \cos \frac{2\pi d_0}{\lambda z} x \right],$$

что никак не противоречит полученному выше частному результату.

8.124. $\rho = \lambda z / D = 2 \cdot 10^{-3}$ см — радиус пространственной когерентности. Он меньше $d_0 = 2 \cdot 10^{-1}$ см. Интерференции нет.

$$V = \left| \frac{\sin \frac{\pi b d_0}{\lambda z}}{\frac{\pi b d_0}{\lambda z}} \right| = \frac{\sin 0,3\pi}{0,3\pi} = 0,86.$$

Интерференция исчезнет и в том случае, если изменить длину волны на $\Delta\lambda = \lambda/N = 1,27 \cdot 10^{-7}$ см. См. также задачу 8.123.

8.125. Условиям задачи удовлетворяет интерферометр № 3. У первого (№ 1) недостаточна дисперсионная область: $G_1 \approx 2 \cdot 10^{-3}$ нм $< 4 \cdot 10^{-3}$ нм. У второго (№ 2) недостаточно разрешение: $R_2 = 10^7 < 3,2 \cdot 10^7$.

8.126. Частота модуляции $F = nv \approx 1,8 \cdot 10^4$ Гц, а частота света $f = c/\lambda \approx 5,5 \cdot 10^{14}$ Гц. Относительная ширина спектральной линии должна быть $\Delta\lambda/\lambda < F/f \simeq 3 \cdot 10^{-11}$. Отсюда в случае а) эксперимент невозможен, а в случае б) такой эксперимент можно провести.

8.127. Максимумы возникают из-за интерференции волн, отраженных от двух граней пленки, как у низкодобротного интерферометра Фабри–Перо. Используя график, можно получить $B \approx 1,25$ мкм.

8.128. $d = \frac{\lambda^2}{2\sqrt{\epsilon}\Delta\lambda}$, где λ — резонансное значение длины волны, $\Delta\lambda$ — интервал между соседними модами. Полагая, что $\epsilon = \text{const}$, получаем условие $\Delta\lambda \propto \lambda^2$. Используя график для нескольких межмодовых интервалов, можно получить набор значений d . Усредняя их, оцениваем $d \approx d_{\text{ср}} = 2,2$ мкм.

$$\mathbf{8.129.} \quad d = 2f\sqrt{\lambda/L} \approx 0,32 \text{ см.}$$

8.130. Двулучевое приближение:

$$\frac{\mathcal{J}_{\max}}{\mathcal{J}_{\min}} = \frac{1 + 2\sqrt{R_{kp}R_{ct}}}{1 - 2\sqrt{R_{kp}R_{ct}}} = 1,574.$$

Точное решение:

$$\frac{\mathcal{J}_{\max}}{\mathcal{J}_{\min}} = \left(\frac{1 + \sqrt{R_{kp}R_{ct}}}{1 - \sqrt{R_{kp}R_{ct}}} \right)^2 = 1,566.$$

8.131. Направление на первое светлое кольцо $\varphi = \sqrt{\lambda/L}$. Пространственная частота $\Omega_0 = k \sin \varphi_0 \approx \frac{2\pi}{\lambda} \varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda L}} \approx 360 \frac{\text{рад}}{\text{см}}$.

8.132. Точка A находится в ближней дифракционной зоне, и для нее открыто $m = 9/5$ зон Френеля. Цилиндрическая вставка есть интерферометр Фабри–Перо, у которого коэффициент отражения по амплитуде $r = 9/25$. Интенсивность волны на выходе из вставки $\mathcal{J} = 0,22\mathcal{J}_0$ (\mathcal{J}_0 — интенсивность падающей волны). Для точки A искомое отношение $\frac{\mathcal{J}_A}{\mathcal{J}_0} = \frac{\mathcal{J}_A}{\mathcal{J}} \cdot \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} \approx 0,09$.

$$\mathbf{8.133.} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L \left(\lambda \frac{dn}{d\lambda} - n \right)} = 2,3 \text{ \AA}.$$

8.134. $L > \frac{\lambda}{\delta\lambda} \cdot \frac{\lambda(1-\rho)}{2\pi} \approx 0,8$ мм, где $\lambda/\delta\lambda$ — разрешающая способность интерферометра Фабри–Перо; $\lambda/\delta\lambda$ должна быть больше $\lambda/\Delta\lambda$. Относительная ширина линии неона $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{kTN_A}{\mu_{Ne}}} \approx 2,6 \cdot 10^{-6}$.

8.135. Ширина резонанса $\delta\lambda = \lambda/R$, соответствующая $\delta v = c\delta\lambda/\lambda^2$; $R = \frac{2\pi Ln\sqrt{\rho}}{\lambda(1-\rho)}$ (здесь ρ — коэффициент отражения по мощности). Искомая длительность импульсов за пластинкой $\tau = \lambda R/c \approx 170$ пс.

8.136. $\frac{L(1-\rho)}{\pi n\sqrt{\rho}} \approx 1,66$ см $\leq L_{\text{этал}} \leq \frac{c}{n\Delta v_0} \approx 5,71$ см. Одно из возможных значений $L_{\text{этал}} = 3,7$ см (из условия резонанса).

$$\mathbf{8.137. } L_{\text{max}} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} = 10 \text{ см}; R_{\text{max}} = \frac{2\pi L_{\text{max}}}{\lambda(1-\rho)} \approx 2 \cdot 10^7.$$

8.138. Решетка с заданными параметрами может работать только в 1-м порядке дифракции. Ее разрешения недостаточно.

§ 9. Элементы фурье-оптики и голограммы

$$\mathbf{9.1. } V_{\text{max}} \approx 4a \text{ при } z = \frac{n\frac{\lambda}{2}}{1 - \cos\alpha}; V_{\text{min}} = 0 \text{ при } z = \frac{n\frac{\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{4}}{1 - \cos\alpha}.$$

9.2. $F(u) = \delta(u) + \frac{a}{2}\delta(u - \Omega) + \frac{a}{2}\delta(u + \Omega)$, где δ — дельта-функция, $u = k \sin\theta$. Спектр состоит из трех плоских волн, распространяющихся в направлениях $k \sin\theta = 0, \pm\Omega$, с амплитудами 1, $a/2$, $a/2$ соответственно.

$$\mathbf{9.3. } F_1(u) \sim \frac{\sin(au/2)}{au/2}, \text{ где } u = k \sin\theta, k \text{ — волновое число.}$$

$$F_2(u) \sim \frac{\sin(bu/2)}{bu/2} \frac{\sin(Ndu/2)}{du/2}.$$

9.4. Комплексная амплитуда волны за решеткой

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2} e^{i\Omega x} + \frac{1}{4} e^{i2\Omega x} - e^{-i\Omega x} - \frac{1}{2} e^{-i2\Omega x} - \frac{1}{2} \right),$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{d} = 2\pi \cdot 10^3$ см $^{-1}$ (пространственная частота). За решеткой распространяются пять плоских волн в направлениях $k \sin\theta = 0; \pm\Omega; \pm 2\Omega$.

9.5.* Период изменения показателя преломления жидкости равен длине ультразвуковой волны Λ .

Решение. Показатель преломления жидкости зависит только от ее плотности. Поэтому задача сводится к определению пространственного



Рис. 662

периода изменения плотности жидкости. На рис. 662 черными кружками изображены узлы скоростей в стоячей звуковой волне, а стрелками показаны направления движения частиц

жидкости в некоторый момент времени. В стоячей волне все частицы жидкости между двумя соседними узлами скорости движутся в одном направлении. При переходе через узел скорости направление движения частиц меняется на противоположное. Пусть смещения частиц жидкости в некоторый момент времени достигли своих максимальных значений. Тогда при направлениях скоростей, указанных на рис. 662, в узлах A, B, \dots будут сгущения, и в узлах C, D, \dots — разрежения. Через половину периода в узлах A, B, \dots будут разрежения и в узлах C, D, \dots — сгущения. Расстояние между двумя со-

седними сгущениями или разрежениями равно пространственному периоду изменения плотности, а следовательно, и показателя преломления жидкости. Оно, как видно из рис. 662, равно длине ультразвуковой волны Λ .

9.6.* Решение. Так как частота звуковых колебаний очень мала по сравнению с частотой световых колебаний, то можно считать, что жидкость, в которой распространяется свет, неподвижна. Такая жидкость представляет собой неоднородную среду, показатель преломления которой меняется периодически в направлении, параллельном AB . Расчет светового поля в такой неоднородной среде представляет очень трудную задачу. Однако, как бы ни распространялся свет внутри жидкости, можно утверждать, что световое поле в плоскости CD при выходе из кюветы будет периодически меняться в направлении CD с периодом Λ . Для определения светового поля за кюветой можно, по принципу Гюйгенса, заменить реальные источники света виртуальными, распределенными по поверхности CD . При этом расстояние между двумя соседними одинаковыми виртуальными источниками будет равно длине ультразвуковой волны Λ (см. решение предыдущей задачи). Таким образом, задача сводится к дифракции света на двумерной плоской решетке.

$$9.7. v = \frac{f\lambda\nu}{\Delta x} = 1200 \text{ м/с.}$$

9.8.* При отсутствии затухания нельзя.

Решение. Пространственный период изменения показателя преломления жидкости в обоих случаях равен длине ультразвуковой волны Λ , поэтому в обоих случаях углы дифракции будут одинаковы. Более того, одинаковым будет и распределение интенсивности света в дифракционных спектрах, ибо в обоих случаях показатель преломления как функция координат (при фиксированном времени) меняется по одному и тому же синусоидальному закону. При заметном затухании ультразвука характер изменения показателя преломления в пространстве в стоячей и бегущей волнах уже не будет одинаковым. В этом случае по характеру дифракционной картины бегущую волну в принципе можно отличить от стоячей.

$$9.9.* d = \frac{\Lambda}{2}.$$

Решение. Если бы глаз мгновенно реагировал на световое раздражение и не обладал способностью сохранять зрительные впечатления, то, взглянув на жидкость, мы увидели бы светлые и темные полосы, расстояние между которыми равнялось бы расстоянию между двумя соседними сгущениями, т. е. Λ . Через половину периода звуковых колебаний на месте каждой светлой полосы образовалась бы темная, и наоборот. В действительности глаз сохраняет зрительные впечатления в течение примерно 0,1 с, т. е. в течение времени, которое чрезвычайно велико по сравнению с периодом ультразвуковых колебаний. Поэтому глаз не состоянии видеть смену полос. Он фиксирует некоторую среднюю освещенность сетчатки, получающуюся путем усреднения мгновенной освещенности по времени, которое очень велико по сравнению с периодом ультразвуковых колебаний. При таком усреднении интенсивность света во всех узлах скоростей сделается одинаковой. Во всех пучностях скоростей интенсивность будет также одинаковой, но отличающейся от интенсивности в узлах. Поэтому период видимой картины должен равняться расстоянию между соседними узлами, т. е. $\Lambda/2$.

Примечание. Для полного исследования вопроса необходимо было бы показать, почему при усреднении получается система полос, а не равномерное освещение жидкости. Такое исследование требует подробного рассмотрения сложного вопроса о распространении световой волны в сильно неоднородной среде, каковой является жидкость при наличии в ней ультразвукового поля. Это исследование, в согласии с опытом, показывает, что полосы должны наблюдаться. Цель рассмотренной нами задачи состояла в том, чтобы, принимая наличие полос как опытный факт, определить расстояние между ними.

9.10. Дифрагированный свет имеет две компоненты $v_{1,2} = c/\lambda \pm v_{\text{зв}}$, где $v_{\text{зв}} = \frac{v \sin \varphi}{\lambda}$; $\Delta v = 2v_{\text{зв}} = 480 \text{ МГц}$; $\rho = 1 - \frac{2\pi L}{\lambda R} \approx 0,9$, где $R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{v}{\Delta v} = 10^6$.

9.11. Комплексная амплитуда волны за решеткой

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2} e^{i\Omega x} + \frac{1}{4} e^{i(2\Omega x - \pi/2)} + \frac{1}{2} e^{-i\Omega x} + \frac{1}{4} e^{-i(2\Omega x - \pi/2)} \right).$$

За решеткой распространяются четыре плоские волны в направлениях $k \sin \theta = \pm \Omega$ и $\pm 2\Omega$.

9.12. $\Delta z_{\max} = \frac{4\pi k}{\Omega^2} m$; $\Delta z_{\min} = \frac{4\pi k}{\Omega^2} \left(m + \frac{1}{2}\right)$; $m = 1, 2, 3, \dots$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. $\mathcal{J}_{\max} = \frac{\mathcal{J}_0}{16}$; $\mathcal{J}_{\min} = 0$.

9.13. $\omega = \frac{\Omega^2 v}{2k}$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\frac{\mathcal{J}_{\max}}{\mathcal{J}_{\min}} = 9$.

9.14. Частота изменения интенсивности 1-й спектральной компоненты $\Omega_1 = \frac{\pi v}{d^2} \lambda_1$, 2-й — $\Omega_2 = \frac{\pi v}{d^2} \lambda_2$. Суммарная интенсивность изменяется по закону, изображенному на рис. 505б. Налицо «биения». «Медленная» частота (огибающая) равна $\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}$. «Быстрая» частота равна $\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$. В одном периоде «медленной» частоты содержится $n = 30$ «быстрых» колебаний. Поскольку $\lambda \propto \Omega$, то $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta \Omega}{\Omega} = n^{-1} = \frac{1}{30}$.

9.15. $\Delta l = d/2 = 37,5 \text{ мкм}$, где $d = v/\nu = 75 \text{ мкм}$ — период фазовой решетки. $L_{\max} = \frac{Dd}{2\lambda} = \frac{Dv}{2\lambda\nu} = 300 \text{ см}$.

9.16. $d_{\max} \approx 2\lambda f/\Lambda = 0,1 \text{ мм}$; $d_{\min} \approx 2\lambda f/D = 0,01 \text{ мм}$.

9.17. $\mathcal{J}(x) \propto 1 + 2m \cos \Omega x$ (для пластинки $\pi/2$);

$\mathcal{J}(x) \propto 1 - 2m \cos \Omega x$ (для пластинки $3\pi/2$).

9.18. Следует поставить пластинку $\lambda/2$, которая изменит ориентацию осевой компоненты E_0 на E_1 . Если поляроид установить так, что пройдет только E_0 ($P \parallel E_0$), то через поляроид пройдут только боковые компоненты пространственного спектра, при этом видность $V = 1$ (интерференция на экране). Если разрешенное направление поляроида $P \parallel E_1$, то пройдет лишь осевая компонента, и $V = 0$.

9.19. $V = 0,04$.

9.20. Контрастность изображения определяется видностью интерференционной картины $V = 1/3$.

9.21. Пластинка $\lambda/4$ (превращает осевую компоненту в линейно поляризованную с амплитудой E_0). Если поставить поляроид так, что его разрешенное направление $P \perp E_0$, то осевая компонента будет исключена. На экране

возникнет интерференционная картина от боковых спектральных компонент. При этом видность будет максимальна ($V = 1$). Если поставить поляроид так, что $P \parallel E_0$, то $V \approx m\sqrt{2}$.

9.22. $d = \sqrt{2\lambda\Delta L}; l = \frac{d^2}{\lambda} \left(m + \frac{1}{2}\right) = \Delta L(2m + 1)$, где $m = 1, 2, 3, \dots$

9.23. $\tau = \frac{1}{12v} = \frac{1}{12}$ с.

9.24. $\tau = \frac{1}{12v} = \frac{1}{12}$ с.

9.25. $n = \frac{h}{h - \Delta z} = 1,5$.

9.26. $N_{\max} = \frac{L}{2d}$.

9.27. Распределение поля в плоскости Π изображения:

$$g(x) = a_0 \left[1 + m e^{i3\pi/4} \cos(\Omega x - \pi/4) \right],$$

или

$$g(x) = a_0 \left[1 + m e^{i\pi/4} \cos(\Omega x + \pi/4) \right].$$

Чтобы получить изображение чисто амплитудной решетки, необходимо повернуть осевую компоненту либо на угол $\Delta\varphi = 3\pi/4$, либо на $\Delta\varphi = \pi/4$. Для этого необходимо сдвинуть плоскость Π на расстояние $l_{\min} = \frac{3\pi k}{2\Omega^2}$ или $\frac{\pi k}{2\Omega^2}$.

9.28. $\frac{\mathcal{J}_+}{\mathcal{J}_-} = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 \approx 1 - 4m; \Delta\varphi = \pi$.

9.29. $d_{\max} = \sqrt{\lambda L} = 0,1$ мм.

9.30. Изображение подобно предмету при условии $\frac{2\pi}{D} < \Omega < \frac{\pi D}{\lambda f}$, или $\frac{2\lambda f}{D} < d < D$, где $d = \frac{2\pi}{\Omega}$ — период решетки.

9.31. $\lambda = \frac{d^2}{L_1} = 5 \cdot 10^{-5}$ см; $\Delta\lambda = \frac{2d^2}{L_2} \approx 10^{-5}$ см.

9.32. См. рис. 663.

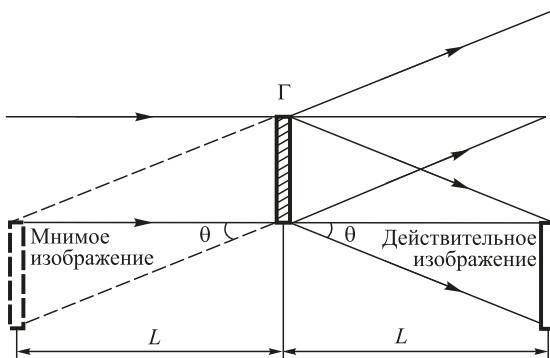


Рис. 663

9.33. $\tau(x) \propto 1 + \cos[kL + kx^2/(2L)]$. Положение изображений при записи с нормально падающей плоской волной изображено на рис. 664a; положение

изображений при записи с наклонной волной — на рис. 664б. Минимальный размер голограммы $a_{\min} \approx n\lambda L$. Размер восстановленного изображения $b \approx 1/n$.

$$9.34. \Delta\lambda < 2L\lambda^2/r^2 = 0,2 \text{ нм.}$$

$$9.35. D > \lambda L/b = 2,5 \text{ см}; \Delta\lambda < 8b^2/L = 1,6 \text{ нм.}$$

9.36. Минимальный размер деталей $d \approx aL = 10^{-2} \text{ см}$. Требуемая монохроматичность $\Delta\lambda \lesssim 8a^2L \approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ см}$.

9.37. Минимальный размер деталей $d \approx \sqrt{\Delta\lambda L/8} \approx 10^{-3} \text{ см}$. Требуемый размер голограммы $D \approx \lambda L/d \approx 6 \text{ см}$.

$$9.38. v \leq \lambda L/(D\tau) \approx 0,05 \text{ см/с}; \Delta l_{\max} \approx \lambda L/D \approx 5 \text{ мкм.}$$

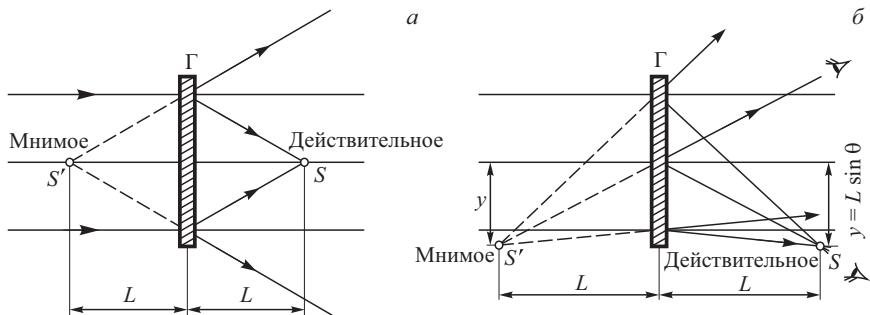


Рис. 664

9.39. $\mathcal{J}(x) = \frac{5}{16} + \frac{1}{4} \cos[kx \sin \gamma + kL(1 - \cos \gamma)]$, где $\sin \gamma = \Omega/k$; $k \cos \gamma = \sqrt{k^2 - \Omega^2}$. Положение восстановленных изображений определяется построением. Действительное и мнимое изображения находятся на расстоянии L от голограммы по обе ее стороны. Требуемый размер экрана $l = \frac{2\lambda}{D}F$.

9.40. $N = \frac{h}{d} = 5$ слоев, где $d = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)}$ — расстояние между почернениями по нормали к фотоэмulsionии.

9.41. Спектр плоских волн: $10\mathcal{J}_0 e^{i\Omega x}$, $4\mathcal{J}_0 e^{-i\Omega x}$, $4\mathcal{J}_0 e^{i3\Omega x}$. Самая мощная распространяется под углом α .

9.42. Фильтрующая маска должна полностью пропустить ± 2 -е порядки и ослабить нулевой максимум с помощью пластинки с коэффициентом пропускания $\tau = 2 \frac{\sin(2\pi b/d)}{2\pi b/d} = \frac{6}{5\pi}$. При этом ± 1 -е порядки должны быть перекрыты. Все остальные более высокие порядки также перекрываются.

$$9.43. \mathcal{J}_{\pm 1}(t) = a^2 \left[\frac{1}{16} + \frac{m}{8} \cos \left(\Omega vt \pm \frac{\pi}{2} \right) \right]; \Delta\varphi = \pi.$$

$$9.44^*: d \lesssim \lambda f/L = 10^{-3} \text{ см}; D \gtrsim \lambda f/\delta = 1 \text{ см}; b \approx 2d/N = 2 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Решение. Дифракционная решетка, расположенная в фокальной плоскости Φ линзы \mathcal{L}_1 , преобразует каждую исходную плоскую волну в суперпозицию плоских волн: $\sin a_m = m\lambda/d$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ В выходной же плоскости \mathcal{P}_1 располагается система дифракционных максимумов, отстоящих друг

от друга на $\lambda f/d$. Набор этих максимумов и является *размноженным изображением каждой отдельной точки объекта*.

Запишем условие неперекрытия соседних элементов размноженного изображения: $\lambda f/d \gtrsim L$. Отсюда и получается первый ответ: период дифракционной решетки должен быть $d \lesssim \lambda f/L = 10^{-3}$ см. При этом размер дифракционного изображения точки должен быть меньше δ — размера мельчайших деталей объекта. Отсюда общий размер решетки должен быть не менее $\lambda f/\delta = 1$ см.

Для оценки ширины щелей решетки b надо воспользоваться тем, что требуемое число повторяющихся изображений $N = 10$ должно быть равно числу главных дифракционных максимумов $N \simeq 2d/b$, откуда и получается ответ: $b \approx 2d/N = 2 \cdot 10^{-4}$ см.

9.45. $d \lesssim \lambda f/l = 5 \cdot 10^{-3}$ см; $b \lesssim 2d/m = 10^{-3}$ см, где $m = 10$; $N \gtrsim l/\delta = 500$.

9.46. Линза оставляет мнимое изображение мнимым, расположенным от голограммы на расстоянии $z_1 = -|f| \frac{L}{L+|f|} = -6,7$ см. Бывшее действительное изображение станет мнимым, расположенным на расстоянии $z_2 = -|f| \frac{L}{L-|f|} = -20$ см. Кроме того, на расстоянии $z_3 = -|f| = -10$ см (в фокусе линзы) появится мнимое изображение восстанавливающей волны.

9.47. Линза превращает мнимое изображение в действительное, расположенное на расстоянии $z_1 = f \frac{L}{L-f} = 10$ см. Бывшее действительное изображение останется действительным, перешедшим в точку, расположенную на расстоянии $z_2 = f \frac{L}{L+f} = 3,3$ см. Кроме того, на расстоянии $z_3 = f = 5$ см появится действительное изображение восстанавливающей волны.

9.48. 1) $\mathcal{J}(\rho) \propto 1 + \frac{1}{2} \exp\left(ik \frac{\rho^2}{2R}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2R}\right)$. 2) $R = R_0 \frac{\lambda_0}{\lambda} < R_0$.

9.49. 1) $\mathcal{J}(\rho) \propto 1 + \left(\cos k_1 \frac{\rho^2}{2L}\right)$, где $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$. 2) $R = \pm L \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \pm 128$ см. Действительное изображение — справа от голограммы на расстоянии 128 см, а мнимое изображение — слева на расстоянии — 128 см от голограммы.

9.50. 1) $E \propto \exp\left(ik \frac{\rho^2}{2L_2}\right) + \frac{1}{2} \exp\left[ik \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\right] + \frac{1}{2} \exp\left[ik \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2}\right)\right]$.
 2) $R_{\text{мнимое}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = 0,48$ м; $R_{\text{действ}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 - L_2} = 2,4$ м.

9.51. Минимально разрешимый поперечный размер деталей изображения не изменится.

9.52. После фотообработки в «среде» возникает решетка зеркальных слоев — плоскостей, составляющих угол $\beta = \alpha/2$ с осью z . Расстояние между плоскостями $d = \frac{\lambda}{2\sin\beta}$, а их число при толщине среды L составляет $N = \frac{2L\sin^2\beta}{\lambda} = 50$. Таково же и число отраженных от этих плоскостей интерферирующих волн, длина волн которых λ' определяется условием Брэгга–Вульфа $2d\sin\beta = \lambda'$, откуда следует, что $\lambda' = \lambda$ (!). Относительная ширина спектра $\Delta\lambda/\lambda = 1/N = 1/50 = 0,02$.

9.53. $N = \frac{L}{\lambda/2}$ — число отражающих слоев, укладывающихся на толщине фотоэмulsionии; разрешающая способность объемной решетки $R = \lambda/\delta\lambda = mN = 2L/\lambda = 200$; $\delta\lambda = \lambda/N = 25 \text{ \AA}$.

$$\mathbf{9.54.} 1) a = a_0 - a_1 - a_2 = 0; z = \frac{\lambda}{2d_1^2} = 25 \text{ см}; 2) z = \frac{\lambda}{a_1^2} = 50 \text{ см}.$$

$$\mathbf{9.55.} 1) \mathcal{J}(O) = (a_0 + a_1 + a_2)^2 = 4a_0^2 = 4\mathcal{J}_0; 2) z = \frac{\lambda}{2a_1^2} = 25 \text{ см}; 3) \mathcal{J} = \mathcal{J}_{\max} \text{ при } z = \frac{2\lambda}{a_1^2} = 1 \text{ м.}$$

$$\mathbf{9.56.} F = 2L_1 - L_2 = 30 \text{ см}; d_0 = \frac{2Fd_2}{L_2 - F} = 1,2 \text{ мм.}$$

9.57. Плоскость изображения следует сместить к линзе на расстояние $x = \frac{n-1}{n}(b-F) = 20 \text{ см}$; $d_0 = \frac{2Fd}{b-F} = 0,12 \text{ см}$.

$$\mathbf{9.58.} L = \frac{Dd}{2\lambda} = 50 \text{ см}; n = \frac{D}{2d} \approx 25; \Delta\lambda = \frac{\lambda}{n} = 20 \text{ нм.}$$

9.59. $N = \frac{D}{2d} = 50$ (в монохроматическом свете), в немонохроматическом свете $N = 10$.

$$\mathbf{9.60.} \Delta\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\max} - \mathcal{J}_{\min} = 4m\mathcal{J}_0; v = \frac{\lambda v_0}{2d^2}.$$

$$\mathbf{9.61.} d = \sqrt{\lambda l} = 10^{-2} \text{ см}; m \approx V/2 = 0,05.$$

9.62. $A(x) = ae^{ikz_0}[1 + m\sin^2\Omega x]$. В плоскости $z = z_0$ будет видно смещенное изображение амплитудной решетки.

$$\mathbf{9.63.} 1) A(x) = ae^{ikz_0} \left[1 + \frac{im}{2} \left(1 + e^{-i\frac{2\Omega^2}{k}z_0} \cos 2\Omega x \right) \right].$$

2) При указанных параметрах $A(x) \approx ae^{ikz_0}e^{im\sin^2\Omega x}$, т. е. с точностью до постоянного фазового сдвига восстанавливается «невидимое» сдвинутое изображение фазовой решетки.

9.64. 1) В спектре две плоские волны $\frac{aA}{2}e^{i\Omega x}$ и $\frac{aA}{2}e^{-i\Omega x}$, распространяющиеся под углами $\sin\alpha = \pm\frac{\Omega}{k}$.

2) $\mathcal{J}(x) = \left(\frac{aA}{2}\right)^2 (1 + \cos 2\Omega x)$, период интерференционной картины в 2 раза меньше периода транспаранта.

3) При данном условии в плоскости изображения $\mathcal{J}(x) = 0$ (отсутствует максимум нулевого порядка).

$$\mathbf{9.65.} z = 53,3 \text{ см}; I_{\max} = I_{\phi} + I_{\text{син.}}$$

$$\mathbf{9.66.} 1) d = \lambda f/d_0 = 1 \text{ мм}; 2) L = 2\lambda(f/d_0)^2 = 4 \text{ м.}$$

$$\mathbf{9.67.} 1) d_0 = \lambda f/d = 5 \cdot 10^{-2} \text{ см}; 2) L = 2\lambda(f/d_0)^2 = 25 \text{ см.}$$

$$\mathbf{9.68.} 1) d_0 = f\sqrt{2\lambda/l_1} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ см}; 2) d = \lambda f/d_0 = 1 \text{ мм}; 3) a < d = 1 \text{ мм.}$$

9.69. При просвечивании полученной голограммы плоской волной получается коэффициент пропускания $\tau \propto \mathcal{J}_{\phi} \propto 1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{ik\rho'^2}{2R}\right) - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{ik\rho'^2}{2R}\right)$, где ρ' — расстояние до центра колец на фотопленке, $R = 2R_0$ — расстояние от фотопленки до изображения.

9.70. $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} = 1,5$ м. Прозрачность полученной голограммы $\tau \propto 1 + \frac{1}{2} \exp\left(ik \frac{\rho^2}{2R}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2R}\right)$. Действительные и мнимые изображения находятся на расстоянии 1,5 м от голограммы.

9.71. 1) $\mathcal{J}(\rho) \propto 1 - \cos \frac{k\rho^2}{4\rho}$; $m = \frac{r_0^2}{\lambda R} = 200$; 2) Ширина крайнего кольца на фотопленке $\Delta l = \frac{R\lambda}{r_0} = 5 \cdot 10^{-3}$ см. Подсчет показывает, что $\frac{\Delta l}{L} = 2 \cdot 10^{-4} > 1,22 \frac{\lambda}{d} = 1,22 \cdot 10^{-4}$. Глаз разрешает даже крайнее кольцо, но на пределе своих возможностей. 3) В результате просвечивания полученной голограммы освещенность $E \propto \mathcal{J}(\rho) \propto 1 - \frac{1}{2} \exp\left(ik \frac{\rho^2}{4R}\right) - \frac{1}{2} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{4R}\right)$. Точки фокуса находятся на расстоянии $2R$ от голограммы.

9.72. Прозрачность голограммы $\tau(\rho) \propto \frac{3}{2} + \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2R_0}\right) + \exp\left(-\frac{ik\rho^2}{2R_0}\right) + \frac{1}{4} \exp\left(ik \frac{\rho^2}{R_0}\right) + \frac{1}{4} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{R_0}\right)$. Два действительных и два мнимых изображения на расстояниях R_0 и $2R_0$ от голограммы.

9.73. На фотопластинке при записи

$$\mathcal{J}(\rho) = A^2 \left[\frac{17}{4} + \exp\left(ik_1 \frac{3\rho^2}{8R_0}\right) + \exp\left(-ik_1 \frac{3\rho^2}{8R_0}\right) \right].$$

При просвечивании голограммы светом с волновым числом k_2 в плоскости $z = 0^+$ освещенность $E(\rho) \propto \tau \propto \mathcal{J} \propto \frac{17}{4} + \exp\left(ik_2 \frac{k_1 \cdot 3\rho^2}{k_2 \cdot 8R_0}\right) + \exp\left(-ik_2 \frac{k_1 \cdot 3\rho^2}{k_2 \cdot 8R_0}\right) = \frac{17}{4} + \exp\left(ik_2 \frac{\rho^2}{4R_0}\right) + \exp\left(-ik_2 \frac{\rho^2}{4R_0}\right)$. Первая волна — паразитная (плоская); вторая волна дает мнимое изображение слева от голограммы на расстоянии $2R_0$; третья волна — действительное изображение на $2R_0$ справа от голограммы.

9.74. При записи $\mathcal{J}(\rho) = 2A^2 \left[1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{ik_1 \rho^2}{R_0}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{ik_1 \rho^2}{R_0}\right) \right]$. Положение изображений: 1) на расстоянии $0,5R_0$ слева от голограммы — мнимое (паразитное) изображение просвечивающего источника; 2) на расстоянии $\frac{R_0/2}{k_1/k_2 + 1}$ — мнимое изображение; 3) на расстоянии $\frac{R_0/2}{k_1/k_2 - 1}$ — действительное изображение. При $k_1/k_2 \rightarrow 1$ действительное изображение $\rightarrow \infty$, а мнимое $\rightarrow R_0/4$. При $k_1/k_2 < 1$ оба изображения источника мнимые. Заметим, что есть мнимое изображение просвечивающего источника, не имеющего отношения к записи голограммы.

9.75. 1) Оба изображения находятся на расстоянии $b = 150$ см симметрично относительно голограммы; 2) $\Delta\lambda/\lambda \lesssim 8b\lambda/D^2 = 8 \cdot 10^{-4}$; $\Delta\lambda \lesssim 0,5$ нм.

9.76. 1) Слева от голограммы — мнимое изображение, $R_{\text{мн}} = 60$ см; справа — действительное изображение, $R_{\text{д}} = 300$ см; 2) $n \approx 300$ линий/мм.

9.77. При просвечивании возникнет 5 плоских волн с относительными амплитудами $3/2$; 1 ; 1 ; $1/4$; $1/4$. Их пространственные частоты 0 ; $\pm 2k \sin \alpha_0$; $\pm 4k \sin \alpha_0$. Направления распространения 0 ; $\pm \alpha_1$; $\pm \alpha_2$, где $\sin \alpha_1 = 2 \sin \alpha_0$; $\sin \alpha_2 = 4 \sin \alpha_0$. Все 5 волн существуют, если $\sin \alpha_0 \leqslant 1/4$.

9.78. Оба изображения (действительное и мнимое) находятся на расстоянии $R = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 180$ см.

$$\mathbf{9.79.} \Delta z = \frac{2\lambda f^2}{d^2} = 100 \text{ см.}$$

9.80. $z_{\min} \approx 19$ см. Кроме того на расстоянии $z = 9,5$ см будет располагаться чисто желтое изображение решетки, сдвинутое на $d/2$.

§ 10. Дисперсия света. Эффект Доплера в оптике

$$\mathbf{10.1.} u = \frac{\omega' - \omega}{k' - k} = \frac{\delta\omega}{\delta k}.$$

$$\mathbf{10.2.} u = v - \lambda \frac{dv}{dk}, \text{ где } \lambda \text{ — длина волны в среде (формула Рэлея); } u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right).$$

$$\mathbf{10.5.} 1) u = a = v; \quad 2) u = \frac{a\sqrt{\lambda}}{2} = \frac{v}{2}; \quad 3) u = \frac{3}{2} \frac{a}{\sqrt{\lambda}} = \frac{3}{2}v; \quad 4) u = \frac{2a}{\lambda} = 2v;$$

$$5) u = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + b^2 \lambda^2}} = \frac{c^2}{v}; \quad 6) u = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{c^2}{v \left[1 + \frac{\omega}{2\epsilon\mu} \frac{d(\epsilon\mu)}{d\omega}\right]}.$$

$$\mathbf{10.6.} \epsilon = 1 + \frac{A}{\omega^2}, \text{ где } A \text{ — постоянная.}$$

$$\mathbf{10.8.} u = \frac{c^2}{v} = c \sin \alpha.$$

10.9. Метод вращающегося зеркала дает групповую скорость $u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right)$. Так как $n = \frac{c}{v}$, то $\frac{c}{u} = \frac{n}{1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}} = 1,76$. Майкельсон на опыте нашел $c/u = 1,75$.

10.10. $\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m_e \omega^2} - \sum \frac{4\pi q_i^2 N_i}{m_i \omega^2}$, где N_e и N_i — концентрации электронов и ионов, e , q_i , m_e , m_i — их заряды и массы. Суммирование ведется по всем ионам. В силу квазинейтральности ионосферы концентрация положительных ионов с большой точностью равна сумме концентраций электронов и отрицательных ионов. Поэтому последним слагаемым в выражении для ϵ можно пренебречь, поскольку масса иона велика по сравнению с массой электрона. Сделав это и опуская индекс «э», получим $\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, где $\omega_0 = \frac{4\pi Ne^2}{m}$.

10.11. Может: $n < 1$ для радиоволн в ионосфере; $n < 1$ для рентгеновских лучей.

10.12. Полагая $\sqrt{\epsilon} = \pm i\omega$, преобразуем выражение $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ к виду $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm \omega t} e^{i\omega t}$, или $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\mp \omega t} e^{i\omega t}$. В вещественной форме

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm \omega t} \cos \omega t, \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\omega t} \cos \omega t.$$

Это — стоячие волны. Амплитуда первой волны экспоненциально возрастает, а второй — экспоненциально затухает в направлении оси Z . Выбор знака

перед κ должен определяться физическими условиями. В обоих случаях есть затухание, но нет поглощения.

10.13. Если $\omega > \omega_0$, то волна пройдет через ионосферу; если $\omega < \omega_0$, то волна полностью отразится. Здесь $\omega_0 = \sqrt{4\pi N_{\max} \frac{e^2}{m}} = 5,64 \cdot 10^4 \sqrt{N_{\max}} [\text{с}^{-1}]$, где N_{\max} — концентрация электронов на такой высоте, где она максимальна.

$$\mathbf{10.14. } N = \frac{\pi m v^2}{e^2} = 1,24 \cdot 10^{-8} v^2.$$

10.15. Чтобы радиоволна могла достигнуть Земли, ее длина волны должна быть $\lambda < \frac{3,34 \cdot 10^6}{\sqrt{N}}$ см = $2,36 \cdot 10^2$ см = 2,36 м.

$$\mathbf{10.16. } v = \sqrt{c^2 + \frac{Ne^2}{\pi m_e} \lambda^2}.$$

$$\mathbf{10.17. } \Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{\lambda_3^2} \delta \lambda = 50 \text{ нм}.$$

$$\mathbf{10.18^*. } N \approx 0,24 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}; \quad v \approx 3,3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}; \quad u \approx 2,7 \cdot 10^{10} \text{ см/с}.$$

Решение. Диэлектрическая проницаемость ϵ плазмы определяется выражением

$$\epsilon = n^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2/m_e}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где ω_p — плазменная частота, e и m_e — заряд и масса электрона. Отсюда концентрация электронов

$$N = \frac{(1 - n^2)m\omega^2}{4\pi e^2} \approx 0,24 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}.$$

Найдем теперь фазовую скорость радиоволн:

$$v = \frac{c}{n} \approx 3,3 \cdot 10^{10} \text{ см/с} > c.$$

Для определения групповой скорости u нужно знать зависимость $v(\lambda)$. Эта зависимость может быть легко установлена из выражения для n^2 , если принять во внимание, что $n = c/v$, $\omega = 2\pi v/\lambda$:

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{Ne^2}{\pi m_e} \lambda^2}.$$

Используя соотношение Рэлея $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$, получим

$$u = \frac{c^2}{v} = cn \approx 2,7 \cdot 10^{10} \text{ см/с} < c.$$

$$\mathbf{10.19. } d_1 = \frac{c \ln 10}{4\pi v \kappa} \approx 13,5 \text{ м}, \quad d_2 = 2d_1 \approx 27 \text{ м}. \quad \text{Здесь } n = \pm i\kappa = \pm i \cdot 0,508.$$

$$\mathbf{10.20.} n = \frac{2\pi c}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \frac{\Delta t}{r_0} \approx 4 \cdot 10^{17}. \bar{N} = \frac{n}{ct_0} = \frac{2\pi}{r_{\text{кл}}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \frac{\Delta t}{t_0} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}.$$

Здесь $r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{mc^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона.

$$\mathbf{10.21.} L = \frac{2\pi m_e c \Delta t}{Ne^2} \frac{v_1^2 v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx \frac{2\pi m_e c \Delta t}{Ne^2} v_1^2 \approx 7 \cdot 10^{20} \text{ см} \approx 700 \text{ св. лет.}$$

$$\mathbf{10.22.} \frac{\Delta v}{v} = \frac{Ne^2}{2\pi m_e c v^2} = 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

$$\mathbf{10.23^*.} v_{\min} \approx 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Гц.}$$

Решение. Поправки, обусловленные теорией относительности, составляют $(v/c)^2$ часть от измеряемых величин. Показатель преломления $n = \sqrt{\epsilon}$ для плазмы отличен от единицы на величину

$$\Delta n = \sqrt{\epsilon} - 1 \approx \frac{2\pi Ne^2}{m_e \omega^2},$$

где e и m_e — заряд и масса электрона. Поскольку состояние ионосферы (плотность электронов) меняется неконтролируемым образом, для надежного обнаружения эффектов, предсказываемых теорией относительности, ошибка измерения параметров орбиты не должна превышать Δn . Таким образом,

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \geq \Delta n \approx \frac{2\pi Ne^2}{m_e \omega^2}.$$

Отсюда

$$v_{\min} = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{ec}{2\pi v} \sqrt{\frac{2\pi N}{m_e}} \approx 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Гц.}$$

10.24. $\frac{N}{n} = \frac{\pi c^2 m_e A}{\lambda^2 e^2 N_A \rho} = 0,31 \approx \frac{1}{3}$, где N — концентрация свободных электронов в серебре, n — концентрация атомов, λ — длина волны, соответствующая энергии фотона \mathcal{E} .

10.25. $\varphi \approx \frac{D}{R} \frac{Z\rho N_A e^2 \lambda^2}{\pi A m_e c^2} \approx 10^{-6}$ рад. Дифракционная расходимость $\Delta\varphi \approx \approx \lambda/D \approx 10^{-9}$ рад $\ll \varphi$.

10.26. $h = \frac{\lambda}{2(1-n)} \left(\frac{3}{4} + 2m \right) \approx 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{3}{4} + 2m \right)$ см; $\mathcal{J}_{P_{\max}} = \mathcal{J}_0 (1 + \sqrt{2})^2$, где $1-n \approx \frac{Nr_{\text{кл}}\lambda^2}{2\pi} \approx 0,02$, где $r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона, \mathcal{J}_0 — интенсивность падающего излучения.

10.27. $D = 2\sqrt{\lambda L} = 10^{-2}$ см; $h = \frac{\lambda}{2(1-n)} (2m+1) = \frac{\pi}{Nr_{\text{кл}}\lambda} (2m+1) = 0,24 \cdot 10^{-4} \cdot (2m+1)$ см; $\mathcal{J}_P = 9\mathcal{J}_0$, где $r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона, \mathcal{J}_0 — интенсивность падающего излучения.

$$\mathbf{10.28^*.} \varphi \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Решение. Энергия рентгеновского излучения 2 кэВ превышает энергию связи электронов (их четыре). Поэтому все электроны можно считать «свободными». Их концентрация $N = ZN_A \rho/A \approx 4,9 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$.

Рассчитаем длину волны рентгеновского излучения по формуле

$$\lambda [\text{\AA}] \approx \frac{12000}{E [\text{эВ}]} = 6 \text{\AA}.$$

Показатель преломления берилля для рентгеновского излучения

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}}.$$

Заменяя комбинацию $\frac{e^2}{mc^2}$ на $r_{\text{кл}}$, известную как классический радиус электрона $r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см, а также $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, преобразуем:

$$n \approx 1 - \frac{2\pi Ne^2}{m\omega^2} = 1 - \frac{Nr_{\text{кл}}\lambda^2}{2\pi}.$$

Принимая также во внимание, что при скользящих углах падения (см. рис. 458 на с. 204) $\varphi \approx 4\alpha$, получим из условия полного отражения

$$n = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \cos\frac{\varphi}{4} \approx 1 - \frac{\varphi^2}{32}.$$

Таким образом, $\frac{\varphi^2}{32} \approx \frac{Nr_{\text{кл}}\lambda^2}{2\pi}$, откуда $\varphi = 4\lambda\sqrt{\frac{Nr_{\text{кл}}}{\pi}} \approx 5 \cdot 10^{-2}$ рад, где предварительно была подсчитана концентрация электронов.

10.29. $n - 1 = -7,2 \cdot 10^{-6}$; $\beta = 3,8 \cdot 10^{-3}$.

10.30* $n \approx 1,7 \cdot 10^{12}$ Вт.

Решение Электрический пробой наступит в том случае, когда электрон в результате действия на него электрического поля световой волны приобретет энергию $10 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-11}$ эрг. Эта энергия значительно меньше энергии покоя электрона $m_0c^2 \approx 10^{-6}$ эрг, т. е. скорость электрона v при пробое много меньше c . За один период колебания электрон смещается на расстояние порядка v/ν , где ν — частота света. Это значительно меньше длины волны света $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см и длины свободного пробега электрона $l_{\text{пр}} \approx 10^{-4}$ см.

Таким образом, целесообразно рассмотреть действие световой волны на свободный электрон

$$m\ddot{x} = -eE_0 \cos\omega t,$$

где E_0 — амплитуда световой волны. Интегрируя, получаем выражение для скорости электрона: $v = -(eE_0/m\omega) \sin\omega t$. Максимальная кинетическая энергия электрона

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{m_e}{2} \left(\frac{eE_0}{m_e\omega} \right)^2 = eU.$$

Отсюда

$$E_0^2 = \frac{2Um_e\omega}{e}.$$

Плотность потока энергии лазерного луча (модуль вектора Пойнтинга)

$$|\mathbf{S}| = \frac{N}{\pi d^2/4} = \frac{c}{4\pi} \overline{E^2} = \frac{c E_0^2}{8\pi},$$

откуда получим

$$N = \frac{cd^2 E_0^2}{32} = \frac{cd^2 U m_e \omega^2}{16e} \approx 1,7 \cdot 10^{19} \text{ эрг/с} \approx 1,7 \cdot 10^{12} \text{ Вт},$$

где $\omega = 2\pi c/\lambda \approx 3,8 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

10.31. $\tau_{\text{вых}} = \tau + \frac{L}{u} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \approx 10^{-8} \text{ с.}$ (Поскольку $d \gg \lambda$, то следует воспользоваться представлениями геометрической оптики.)

10.32* $n \approx 2 \cdot 10^5$ каналов.

Решение. Из-за дисперсии сигналы на разных частотах проходят путь до спутника и обратно за разное время. Для оценки ширины полосы Δv предполагается, что различие во времени прохождения $\Delta \tau$ на частотах, отличающихся на Δv , связано соотношением неопределенностей $\Delta v \Delta \tau \approx 1$. Полное время задержки сигнала $\tau \approx \frac{2L}{u}$, где $L = R_3 \left(\sqrt[3]{\frac{g}{\omega^2 R_3}} - 1 \right) = 36 \cdot 10^3 \text{ км}$ — расстояние до геостационарного спутника, u — групповая скорость; $u = \frac{c}{n + (dn/dv)v}$, где n — показатель преломления; $n \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_p}{v} \right)^2$ (v_p — плазменная частота, $v_p^2 = \frac{\omega_p^2}{4\pi^2} = \frac{Ne^2}{\pi m_e}$). Отсюда $\tau = \frac{2L}{c} \left(n + \frac{dn}{dv} v \right)$.

Перейдя от дифференциалов к конечным приращениям, получим

$$\Delta \tau \approx \frac{2L}{c} \frac{dn}{dv} v.$$

Заменив $\Delta \tau$ на $\frac{1}{\Delta v}$, получаем $(\Delta v)^2 = \frac{c}{2L} \frac{1}{dn/dv} = \frac{c}{2L} \frac{v^3}{v_p^2}$;

$$\Delta v = \sqrt{\frac{c}{2L} \frac{v^3 \pi m_e}{Ne^2}} \approx 6 \cdot 10^8 \text{ Гц.}$$

Разделив эту полосу на ширину полосы телефонного канала, получим

$$n \approx \frac{\Delta v}{\Delta f} = 2 \cdot 10^5 \text{ каналов.}$$

10.33* $D \gg 10^{-5} \text{ см}; R \gtrsim 10 \text{ см.}$

Решение. Для рентгеновского излучения ($\omega \gg \omega_0$) $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$, где $\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}$; φ — угол падения; ψ — угол преломления. Обозначив θ угол скольжения, запишем условие распространения волны в рентгеноводе:

$$n = \sin \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}; \quad \sin \theta_{\max} \approx \theta_{\max} = \frac{\omega_p}{\omega} = 1,2 \cdot 10^{-3}.$$

Оценка была выполнена для $N \sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$.

Условие на диаметр D капилляра: дифракционное уширение пучка должно укладываться в разрешенный диапазон углов скольжения θ :

$$D \gg \lambda/\theta_{\max} \approx 10^{-5} \text{ см.}$$

Условие на допустимый радиус изгиба R рентгеновода $\cos \theta = \frac{R}{R+D} > \cos \theta_{\max}$, откуда следует, что $R \gtrsim 10$ см.

$$\mathbf{10.34*} n \approx 1 + 2\pi\alpha \frac{P_0}{kT} \left(1 - \frac{mg_B h}{kT} \right); r \approx -10^2 \text{ км.}$$

Решение. Показатель преломления газа определяется соотношением

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\alpha N},$$

где α — поляризуемость молекул газа (в гауссовой системе), а N — их концентрация. Принимая во внимание, что

$$N(h) = \frac{P_0}{kT} \exp \left(-\frac{mg_B h}{kT} \right),$$

где P_0/kT — концентрация молекул при $h = 0$, получим

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\alpha \frac{P_0}{kT} \exp \left(-\frac{mg_B h}{kT} \right)} \approx 1 + 2\pi\alpha \frac{P_0}{kT} \left(1 - \frac{mg_B h}{kT} \right).$$

Радиус кривизны луча, пущенного горизонтально вблизи поверхности планеты, есть

$$r = \frac{n}{dn/dh} \approx -\frac{(kT)^2}{2\pi\alpha P_0 m g_B} \approx -10^2 \text{ км.}$$

Так как $r < 0$, центр кривизны располагается при $h < 0$. Таким образом, горизонтальные и близкие к ним лучи не могут выйти за пределы атмосферы Венеры ($|r| < r_B$).

В атмосфере Венеры возможна круговая рефракция, при которой луч света огибает планету на некоторой высоте.

10.35. Радиус кривизны горизонтального луча в атмосфере Земли $r = -\frac{kT}{mg(n_0 - 1)} \approx -2,9 \cdot 10^4$ км. Для круговой рефракции давление (и плотность) должно быть в 4,5 раза больше.

10.36. $\Delta z = -\frac{\Delta n}{n} \frac{\mu g}{RT} \frac{x^2}{2} \approx 1,8$ см, где R — газовая постоянная, μ — средняя молярная масса воздуха, $x = 1$ км, $\Delta n/n = 3 \cdot 10^{-4}$.

$$\mathbf{10.37.} a = \frac{v(n-1)^2}{R\lambda_0 \frac{dn}{dl}} = -0,75 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

10.38. Длительность импульса увеличится в $\frac{1}{1 - al/c} \approx 1,1$ раз. Частота уменьшится в $\frac{1}{1 - al/c} \approx 1,1$ раз.

$$\mathbf{10.39.} \tau = 5,5\tau_0 = 5,5 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

$$\mathbf{10.40.} t = \frac{l}{c} \left(n_0 + \frac{[n(\omega) - n_0]\omega_0}{|\bar{\omega} - \omega_0|} \right) = 1,2 \text{ нс.}$$

$$\mathbf{10.41^*.} z_{\min} = \frac{T}{2\pi B}.$$

Решение. Периодически повторяющийся сигнал $f(t)$ может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний вида

$$\sum f(t - nT) = \sum C_m e^{im\omega_0 t},$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ — частота основной гармоники. Соответственно волновое возмущение, распространяющееся в среде, $S(t, z) = \sum C_m \exp[i(m\omega_0 t - k(m\omega_0)z)]$.

Разность фазовых набегов $[k(m\omega_0 - k(\omega_0))z] = \Delta\varphi_m$ (между любой m -й гармоникой и основной гармоникой) равна $\Delta\varphi_m = B(m^2 - 1)\omega_0^2 z$. Минимальная разность фаз (между второй и основной гармоникой) $\delta\varphi = 3B\omega_0^2 z$ должна быть кратной 2π , откуда $z = \frac{2\pi}{3B\omega_0^2} n$. Тогда $\Delta\varphi_m = \frac{2\pi}{3}(m^2 - 1)n$. Минимальное значение $n = 3$ (тогда все $\Delta\varphi_m$ кратны 2π). Таким образом, $z_{\min} = \frac{2\pi}{B\omega_0^2} =$

$$= \frac{T}{2\pi B}.$$

$$\mathbf{10.42.} \omega_{0\min} = \sqrt[4]{\frac{2\pi}{BL}}.$$

$$\mathbf{10.43.} \tau = \frac{m_e \omega^2}{\mu \pi c e^2}.$$

$$\mathbf{10.44.} v = \sqrt{\frac{cB\omega}{4\pi Ne}} = 0,5 \cdot 10^{10} \text{ см/с} = \frac{1}{6}c \text{ — фазовая скорость; } u = \frac{d\omega}{dk} = 2v_\phi = 10^{10} \text{ см/с} = \frac{1}{3}c \text{ — групповая скорость.}$$

$$\mathbf{10.45^*.} v = v_0 \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos\alpha)(1 - \beta \cos\theta)}; R \gtrsim 10^9.$$

Решение. Перейдем в систему, в которой спутник покоятся. Частота приходящего на спутник сигнала

$$v' = v_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c)\cos\alpha} = v_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos\alpha}.$$

Такую же частоту в системе, связанной со спутником, будет иметь отраженный сигнал. Перейдя теперь снова к системе, связанной с Землей, обнаружим в точке B сигнал с частотой

$$v = v' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos\theta} = v_0 \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos\alpha)(1 - \beta \cos\theta)}.$$

Релятивистская поправка к частоте есть

$$\left(\frac{v_0}{\Delta v} \right)_{\text{рел}} \approx \beta = \frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-9}.$$

Отсюда следует, что разрешающая способность R спектрального прибора должна быть

$$R \gtrsim \left(\frac{v_0}{\Delta v} \right)_{\text{рел}} \approx 10^9.$$

10.46. $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{A}} \sqrt{\ln 2} \approx 0,042 \text{ \AA}$, где A — атомная масса водорода.

10.47. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{vn}{c} \cos\theta$, где θ — угол между направлением наблюдения и направлением движения.

10.48* $N \geq 1,2 \cdot 10^5$.

Решение. Интерференционное отражение света происходит только от тех звуковых волн, для которых выполнено условие Брэгга–Вульфа. Доплеровский сдвиг частоты рассеянного света определяется соотношением

$$\Delta\nu = 2v \frac{v}{c/n} \sin \frac{\theta}{2}.$$

где θ — угол рассеяния.

Условие разрешения $R = mN \geq v/\Delta\nu$. Отсюда при $m = 1$ получим

$$N \geq \frac{c}{2vn \sin(\theta/2)} \approx 1,2 \cdot 10^5.$$

10.49. $N \gtrsim \frac{\alpha_c}{4} \left(\frac{c}{v_3} \right)^2 \approx 2,5 \cdot 10^5$.

10.50. Дифракционная решетка должна обладать разрешающей способностью $R \gtrsim \frac{c}{2} \sqrt{m_{\text{Ne}}/kT} \approx 10^5$, где m_{Ne} — масса атома неона. При работе в 1-м порядке $L = Rd \gtrsim 10 \text{ см}$.

10.51. При $\tau = 10$ сут получим $N \gtrsim 10^3$. При $\tau = 10$ лет расщепление спектральных линий значительно меньше их ширины.

10.52. Расстояние между звездами $L = 2R = \frac{2vT}{\pi} = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ см}$, где $v = \frac{c}{2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 3 \cdot 10^7 \text{ см/с}$. Масса одной из звезд $M = \frac{4v^2 R}{\gamma} = 4,3 \cdot 10^{32} \text{ кг}$, где γ — гравитационная постоянная.

10.53* $v \gtrsim v_t \approx 10^4 \text{ м/с}; N \gtrsim 1,5 \cdot 10^4$.

Решение. Для надежного обнаружения движения космического корабля по доплеровскому сдвигу спектральных линий необходимо, чтобы этот сдвиг был больше ширины спектральной линии, обусловленной тепловым движением молекул на поверхности Солнца (т. е. чтобы линейная скорость корабля превосходила среднеквадратичную скорость молекул водорода, равную при температуре $T = 6000 \text{ К}$ $v_t \approx 10^4 \text{ м/с}$). Отсюда следует, что

$$v \gtrsim v_t \approx 10^4 \text{ м/с.}$$

Минимальное число штрихов дифракционной решетки определяется соотношением

$$R = mN \gtrsim \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{c}{v}.$$

При $m = 2$ получим $N \gtrsim 1,5 \cdot 10^4$. Приведенная оценка не учитывает доплеровский сдвиг, обусловленный вращением Солнца.

10.54. Эффект обусловлен изменением оптических длин путей для встречных волн: $\Delta\nu = \frac{\Omega l}{c}\nu$.

10.55. $T \approx \frac{\mu c^2}{8RN^2 \ln 2} \approx 400$ К.

10.56. $N_{kp} = \frac{\pi \cos^2 \varphi}{r_{kl} \lambda^2}$, где $r_{kl} = \frac{e^2}{m_e c^2}$ — классический радиус электрона.

10.57. $L = -\frac{c}{2v\Delta\lambda \frac{dn}{d\lambda}} = 2,42 \cdot 10^5$ см = 2,42 км.

10.58. $r_f = \frac{\lambda}{D} f = 2 \cdot 10^{-3}$ см, где $f = \frac{R}{1-n} = 500$ м; $1-n = \frac{Nr_{kl}\lambda^2}{2\pi} = 0,12 \cdot 10^{-2}$, $r_{kl} = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см.

10.59. $\lambda_{min} = \psi h \approx 1$ м; $\lambda_{max} = \frac{mc}{2Ne^2} \approx 34$ м, т. е. $1 \text{ м} < \lambda < 34 \text{ м}$.

10.60. $\tau = \frac{l}{u} = 11,3$ с, где групповая скорость $u = \frac{3a}{2\sqrt{\lambda}} = 53$ см/с, $a = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho}}$, а длина волны $\lambda = \left(\frac{a}{v_0}\right)^{2/3} = 0,35$ см.

10.61. $\lambda_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = 1,7$ см; $v_{min} = \sqrt[4]{\frac{4\sigma g}{\rho}} = 23$ см/с; $\omega_{min} = 85,7 \text{ с}^{-1}$; $f_{min} = 13,6$ Гц.

10.62. $\frac{a_2}{a_1} = \sqrt[4]{\frac{H_1}{H_2}} = 4,3$; $a_2 \simeq 13$ м.

10.63. $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2\pi h}{\lambda}} \sin \alpha_0 \simeq 0,065$; $\alpha = 3,7^\circ$.

10.64. Групповая скорость $u = \frac{g}{2\omega}$; $t = \frac{L}{u}$, откуда и следует искать расстояние. Для расчета следует построить график $\omega(t)$, исходя из таблицы, приведенной в условии. Это прямая, угловой коэффициент которой $0,062 [\text{с}^{-1}/\text{ч}]$. $L = 285$ км.

10.65. $v = \sqrt{\frac{g(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\pi}} = 0,3$ м/с, где λ_1 и λ_2 — длины волн слева и справа от препятствия: $\lambda_1 = 0,54$ см, $\lambda_2 = 5,4$ см. Они находятся как корни квадратного уравнения $\frac{g\lambda^2}{2\pi} - v^2\lambda + \frac{2\pi\sigma}{\rho} = 0$. Река течет (в соответствии с рисунком в условии) слева направо.

10.66. $\tau = \frac{nb}{c(1 - \frac{\lambda}{n} \frac{R}{b})} = 5,7 \cdot 10^{-10}$ с.

10.67. $h_{kp} = \frac{\pi f_0^2 m}{ae^2} = 2 \cdot 10^6$ см = 20 км; $\tau = \frac{4h_{kp}}{c} = 0,27$ мс.

10.68. $N_e = \frac{(1-\varepsilon)m\pi f_0^2}{e^2} = 0,93 \cdot 10^6$ см⁻³.

10.69. $\Delta\omega/\omega = -\dot{n}l/c$; $v = -\dot{n}l$.

10.70. $\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{2\pi\alpha l \dot{P}}{ckT}$.

10.71. $\Delta\omega/\omega_0 = (1-n) \frac{v}{c} \operatorname{tg} \alpha$.

10.72. $\Delta f = \frac{e^2}{2\pi mc f_0} \cdot 5 \cdot 10^9 = 0,13$ Гц; $v = -\frac{\Delta f c}{f_0} = -0,8$ м/с (ракета падает вниз).

10.73. Ошибка в тропосфере $\Delta_{\text{тр}} = 2 \cdot 10^{-4} H/2 = 1,5$ м; в ионосфере $\Delta_{\text{ион}} = \frac{2\pi e^2}{m\omega_0^2} \int_0^L N_e dh = 5,3$ м; всего $\Delta = 6,8$ м.

10.74. $\omega = 2,75 \cdot 10^{10}$ с⁻¹; $f = 4,38$ ГГц; $\lambda = 6,8$ см.

10.75. $N_e = \frac{3}{4}\pi\Delta f \frac{c}{v} \frac{mf_1}{e^2} = 4,14 \cdot 10^5$ см⁻³.

10.76. $\Delta\varphi = \frac{\omega_p^2 H}{4\pi f c} = 4,2$ рад (сместится на 0,67 полосы), $\omega_p^2 = 1,8 \cdot 10^7$ с⁻¹ — плазменная частота ионосферы.

10.77. $z \ll cv_0^3 t^2 / v_p^2 \simeq 10$ км, где $v_p = c/\lambda_{\text{кр}} = 30$ МГц.

10.78* $\tau > \frac{v_{\text{кр}}}{v} \sqrt{\frac{L}{cv}} \simeq 5 \cdot 10^{-10}$ с.

Решение. В диспергирующей среде закон дисперсии

$$k(\omega_0 + \Delta\Omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \Delta\Omega + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\Delta\Omega)^2 + \dots$$

Радиоимпульс бежит с групповой скоростью $u = d\omega/dk$ без искажения своей формы, если в пределах частотной полосы сигнала $2\Delta\Omega$ ($\omega_0 - \Delta\Omega < \omega < \omega_0 + \Delta\Omega$) зависимость $k(\omega)$ можно считать линейной, т. е. при достаточном условии

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\Delta\Omega)^2 z \ll \pi.$$

Здесь $\Delta\Omega$ определяется из соотношения неопределенностей $\Delta\Omega\tau \simeq 2\pi$, т. е. $\Delta\Omega \approx \frac{2\pi}{\tau}$. Таким образом, условие линейности (неискаженности формы) становится таким:

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 L \ll \pi.$$

Закон дисперсии в волноводе $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{кр}}^2}{\omega^2}}$. Здесь критическая (граничная) частота

$$v_{\text{кр}} = \frac{c}{2a} = 0,3 \cdot 10^{10} \text{ Гц} \ll 10^{10} \text{ Гц}.$$

Таким образом, $k(\omega) \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_{\text{кр}}^2}{2\omega^2} \right)$, откуда

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} + \frac{\omega_{\text{кр}}^2}{2c\omega^2}; \quad \frac{d^2k}{d\omega^2} = -\frac{\omega_{\text{кр}}^2}{c\omega^3} = -\frac{v_{\text{кр}}^2}{2\pi cv^3}.$$

Отсюда и из условия неискаженности формы сигнала

$$\tau^2 \gtrsim \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} \frac{(2\pi)^2}{\pi} L = \frac{v_{\text{кр}}^2}{cv_0^3} L; \quad \tau \simeq \frac{v_{\text{кр}}}{v_0} \sqrt{\frac{L}{cv_0}} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ с}.$$

§ 11. Поляризованный свет.

Элементы кристаллооптики и нелинейной оптики

11.1. $d = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 0,014$ мм.

11.2. $L \approx 0,03$ мм.

11.3. $\Delta = 5,16$ мкм.

11.4. $d = \frac{\lambda}{4(n_1 - n_2)} = 0,027$ мм.

11.5. Лучи, исходящие из какой-либо точки A удаленного предмета и падающие в глаз наблюдателя, практически параллельны. Каждый луч при вступлении в плоскопараллельную кристаллическую пластинку распадается на два луча. Оба луча после выхода из пластиинки остаются параллельными, хотя они и испытывали различные боковые смещения. Глаз собирает оба луча в одной и той же точке сетчатки, поскольку он аккомодирован на рассматривание удаленных предметов (на бесконечность). Эта точка схождения лучей и будет (единственным) изображением точки A .

11.6. $f = 5$ см.

11.7. В стекле и фарах автомашины главные плоскости поляроидов должны быть параллельны между собой и составлять угол 45° с горизонтом. При этом у всех машин они должны быть повернутыми в одну и ту же сторону (считая по ходу машины).

11.8. На экране образуются 4 пятна. Интенсивности относятся как $1 : 3 : 1 : 3$.

11.9. При введении пластиинки в полволны интерференционные полосы смещаются на половину ширины полосы; при повороте поляроида на 90° они смещаются в противоположную сторону на половину ширины полосы относительно начального положения; если убрать поляроид, то положение интерференционных полос не изменится, но интенсивность их возрастет вдвое. При введении пластиинки в четверть длины волны происходит смещение полос на четверть ширины полосы; если в этом случае убрать поляроиды, то интерференционные полосы пропадут.

11.10*: $\Delta = 1/2$; $\mathcal{J}_{\max}/\mathcal{J}_{\min} = 3$.

Решение. Пусть \mathcal{J}_n — интенсивность поляризованного света, \mathcal{J}_e — интенсивность естественного света. При первом положении николя интенсивность прошедшего света равна $\mathcal{J}_n + \frac{\mathcal{J}_e}{2}$, а при втором

$$\mathcal{J}_n \cos^2 60^\circ + \frac{\mathcal{J}_e}{2} = \frac{\mathcal{J}_n}{4} + \frac{\mathcal{J}_e}{2}.$$

По условию

$$\mathcal{J}_n + \frac{\mathcal{J}_e}{2} = 2 \left(\frac{\mathcal{J}_n}{4} + \frac{\mathcal{J}_e}{2} \right),$$

откуда $\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_e$. Максимальная интенсивность $\mathcal{J}_{\max} = \frac{3}{2}\mathcal{J}_n$, минимальная $\mathcal{J}_{\min} = \frac{\mathcal{J}_n}{2}$; $\Delta = \frac{1}{2}$, $\frac{\mathcal{J}_{\max}}{\mathcal{J}_{\min}} = 3$.

11.11. $\mathcal{J}_2/\mathcal{J}_1 = 0,5$.

11.12. $\varphi = 45^\circ$.

11.13. $\frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_l} = \frac{\sin^2 \alpha - p/100}{p/200} = \frac{1}{2}$.

11.14. $\frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_l} = \frac{2}{m^2 - 1} = \frac{2}{3}$.

11.15. $\frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_l} = 2 \left(\frac{\sqrt{m} - 1}{\sqrt{m} + 1} \right)^2 \approx 0,058$.

11.16. $\frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_e} = \frac{m - 1}{2} = 1$.

11.17. Свет будет поляризован по левому кругу.

11.18. Свет останется линейно поляризованным, но плоскость колебаний электрического вектора повернется на угол 2α и станет расположенной симметрично со своим исходным положением относительно оси пластиинки в полволны.

11.19.* $\beta_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = -35^\circ$,

$\beta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = +55^\circ$.

Решение. Свет не пройдет через второй николь, если электрический вектор перпендикулярен к главной плоскости этого николя, т. е. параллелен прямой AB , перпендикулярной к той же плоскости (рис. 665). Ось пластиинки должна быть ориентирована по биссектрисе угла AON_1 или угла N_1OB , ему дополнительного до π . Это дает два значения угла β , приведенные в ответе.

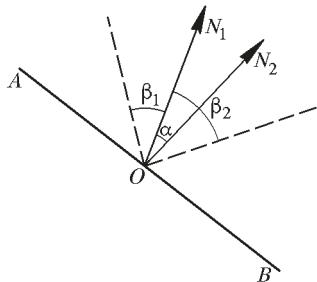


Рис. 665

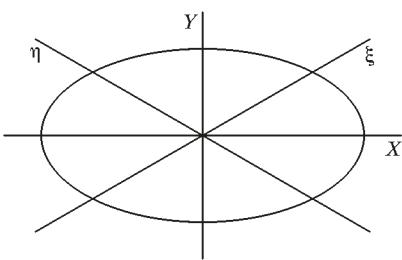


Рис. 666

лен прямой AB , перпендикулярной к той же плоскости (рис. 665). Ось пластиинки должна быть ориентирована по биссектрисе угла AON_1 или угла N_1OB , ему дополнительного до π . Это дает два значения угла β , приведенные в ответе.

11.20. $\frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{100} \right)^2 \cos^2 \alpha = 0,1$.

11.21. $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$, $\varphi = 53^\circ$.

11.22. $\Delta = \frac{\mathcal{J}_k + \mathcal{J}_l}{\mathcal{J}_e + \mathcal{J}_k + \mathcal{J}_l} = m_1 + m_2 + 3$, где \mathcal{J}_e — интенсивность неполяризованного света, \mathcal{J}_k — интенсивность света с круговой поляризацией, \mathcal{J}_l — интенсивность света с линейной поляризацией.

11.23. $\frac{b}{a} = \sqrt{2 \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} - 1}$, где b — длина малой, a — большой полуоси эллипса.

11.24* Решение. В системе главных осей X , Y эллиптическое колебание описывается уравнениями $E_X = a \cos \omega t$, $E_Y = b \sin \omega t$ (рис. 666). Переидем к новой системе ξ , η , оси которой являются биссектрисами прежних координатных углов. В этой системе то же колебание представится в виде

$$E_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cos(\omega t - \varphi),$$

$$E_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a \cos \omega t + b \sin \omega t) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cos[\omega t - (\pi - \varphi)],$$

где φ — острый угол, определяемый уравнением $\operatorname{tg} \varphi = b/a$. Колебания вдоль осей ξ и η совершаются с одинаковыми амплитудами $\sqrt{(a^2 + b^2)/2}$, причем колебание вдоль оси ξ опережает по фазе колебание вдоль оси η на угол $\delta = \pi - 2\varphi$. Внесем кристаллическую пластинку так, чтобы ее оси были ориентированы вдоль ξ и η и чтобы она изменила разность фаз до $\pm\pi/2$. Для этого должно быть выполнено соотношение

$$(\omega t - \varphi - k_\xi l) - (\omega t - \pi + \varphi - k_\eta l) = \pm \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$l = \frac{2\varphi - \pi \pm \pi/2}{k_\eta - k_\xi} = \lambda \frac{\varphi/\pi - 1/2 \pm 1/4}{n_\eta - n_\xi}.$$

Тогда волна перейдет в волну, поляризованную по кругу. Знак «плюс» соответствует тому же направлению вращения, что и в исходной эллиптически поляризованной волне, а знак «минус» — противоположному. Такой же результат получится, если толщину пластинки изменить на $t\lambda/(n_\eta - n_\xi)$, где t — целое число.

11.25. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0/4$. Свет поляризован по кругу.

11.26. $d = \frac{m\lambda}{n-1}$, где $m = 1, 2, 3, \dots$; $\mathcal{J}_{\max} = \frac{5}{8}\mathcal{J}_0$.

11.27. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0/2$.

11.28. $\Delta = \sqrt{5}/3$.

11.30. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0/2$. В общем случае поляризация эллиптическая. Если же толщина пластинки такова, что разность фаз равна $t\pi$, поляризация линейная.

11.31. $d = \frac{\lambda(2m+1)}{2(n-1)}$, где $m = 1, 2, 3, \dots$; $\mathcal{J}_{\max} = 5\mathcal{J}_0$.

11.32. $\mathcal{J} = 2\mathcal{J}_0$. Свет поляризован линейно.

11.33. $\mathcal{J} = 3\mathcal{J}_0$.

11.34. $\mathcal{J} = 5\mathcal{J}_0$.

11.35. $\mathcal{J} = 5\mathcal{J}_0$.

11.36. 1) Интенсивность света возрастет в 25 раз. 2) Интенсивность света возрастет в 9 раз.

11.37. $\mathcal{J} = 5\mathcal{J}_0$.

11.38. Если N — полное число зон Френеля, то интенсивность света в фокусе пластинки будет приблизительно в N^2 раз больше, чем при свободном распространении света.

11.39. $\mathcal{J} = 2\mathcal{J}_0$.

11.40. $\mathcal{J} = 8\mathcal{J}_0$.

11.41. $\mathcal{J}(\theta) = 3\mathcal{J}_0 \left[1 + \frac{2}{3} \cos \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \sin \theta \right) \right]$, откуда $V = \frac{2}{3}$; $\Lambda = \frac{\lambda f}{2d} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ см.

11.42. $V = \frac{2}{3}$; $\Lambda = \frac{\lambda f}{2d} = 2,5 \cdot 10^{-2}$ см.

11.43. Полная разность фаз света, приходящего в максимум m -го порядка между двумя взаимно перпендикулярными колебаниями,

$$\Delta\varphi_m = \frac{\pi}{2}(m+1).$$

При $m = 0$ $\Delta\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ — круговая поляризация с сохранением вращения падающего света; при $m = \pm 1$ $\Delta\varphi_1 = \pi$; $\Delta\varphi_{-1} = 0$ — линейно поляризованный свет; при $m = \pm 2$ — круговая поляризация с противоположным по отношению к падающему вращением.

В общем случае: в нечетных максимумах свет линейно поляризован; при $m = 0, \pm 4, \pm 8, \dots$ круговая поляризация с сохранением направления вращения; при $m = \pm 2, \pm 6, \pm 10, \dots$ круговая поляризация с противоположным вращением.

11.44. Уменьшится вдвое независимо от поляризации падающего света.

11.45. Разрешающая способность не изменится.

11.46. Расстояние между главными максимумами уменьшится вдвое. Интенсивность света в нулевом максимуме уменьшится в два раза. Поляризация света в главных максимумах круговая. Четные максимумы отличаются от нечетных направлением вращения вектора \mathbf{E} (по часовой или против часовой стрелки).

11.47. Расстояния между главными максимумами, так же как и интенсивность света в нулевом максимуме, уменьшатся в два раза.

11.48. Интенсивность нулевого максимума равна нулю. Расстояния между главными максимумами уменьшатся в два раза.

11.49. $\sin\theta_1 = \pm \frac{\lambda}{4d}$;

интенсивность главного максимума $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 N^2 d^2 (1 + 8 \sin^2 \alpha)$.

11.50* Решение. Доменная структура пленки представляет собой фазовую решетку с фазовым сдвигом π в соседних полосках шириной d . Период равен $2d$. Решетку можно представить как сумму двух амплитудных подрешеток с периодом $2d$, сдвинутых относительно друг друга на расстояние d и вносящих фазовый сдвиг π . Интенсивность четных максимумов равна нулю. Интенсивность первого максимума составляет $4\mathcal{J}$.

11.51. $V = \frac{(2 + \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$.

11.52. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0/2$.

11.53. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0/2$.

11.54. $\mathcal{J} = \frac{\mathcal{J}_0}{4} [1 - \cos kax(n_e - n_o)]$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; координата x отсчитывается от ребра клина. При установке линзы будут наблю-

даться два светлых пятна на расстоянии $L = \alpha(n_e - n_o)f$, где f — фокусное расстояние линзы.

11.55. $A = \frac{A_0}{2^N} \left| \frac{\sin(2^N \varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right|$; $T = \left| \frac{A}{A_0} \right|^2 = \prod_{k=1}^N \cos^2 \frac{2^{k-1}\pi(n_e - n_o)d}{\lambda}$, где $\varphi = (2\pi/\lambda)d(n_e - n_o)$. Такая система называется интерференционно-поляризационным фильтром Лио.

11.56. $n_o = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 d_0 + \varepsilon d}{d + d_0}}$, $n_e = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_1 \frac{d + d_0}{\varepsilon d_0 + \varepsilon_1 d}}$. Ось z является оптической осью.

11.57. Линейно поляризованный свет с неизменной амплитудой и фазой, модулированной по закону $\varphi(t) = 2\theta(t)$, т. е. на выходе волна $E = E_0 \sin[\omega t + 2\theta(t)]$.

11.58* $a = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n \frac{1+2l}{2+4m}$, где m и l — целые числа.

Решение. Пусть на входе волокна световая волна линейно поляризована:

$$E_{x0} = \cos \omega t, \quad E_{y0} = 0.$$

Будем рассматривать распространение света в системе координат главных осей (X', Y') .

Если Y — «медленная» ось, то

$$E_{x'} = \cos \omega t \cos \theta(z), \quad E_{y'} = -\cos [\omega t - \varphi(z)] \sin \theta(z).$$

Круговая поляризация возникнет, если

$$\varphi(z) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n z = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

и

$$\theta(z) = az = \frac{\pi}{4} + l \frac{\pi}{2},$$

где m и l — целые числа. Тогда

$$a = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n \frac{1+2l}{2+4m}.$$

11.59. Пластина должна иметь толщину λ для несущей частоты и $\lambda/2$ для боковых гармоник: $\Delta n d = m \frac{2\pi c}{\omega_0} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi c}{\omega_0 + \Omega} = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi c}{\omega_0 - \Omega}$, откуда $\Omega = \frac{\pi c}{\Delta n d}$.

11.60. $d > \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda (n_e - n_o)} = 1$ мм, падающий свет должен быть поляризован под углом 45° к оптической оси пластиинки.

11.61. Оптическая ось пластиинки должна быть ориентирована под углом 45° к разрешенным направлениям поляроидов. Для одной из линий дублета натрия пластиинка должна быть пластиинкой в полволны $\lambda/2$, а для другой — в целую длину волны λ . Минимальная толщина пластиинки $d_{\min} = 5,06$ мм.

11.62. $\tau \approx \frac{\lambda n}{c(n_o - n_e)} \approx 3,4 \cdot 10^{-13}$ с.

11.63. $d > \frac{c\tau}{\Delta n}$. Поляризации импульсов линейные, ортогональные и параллельные главным направлениям пластиинки. Амплитуды $\frac{1}{2}E_0$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}E_0$.

11.64. $\Delta n \gtrsim \frac{\lambda(1-\rho)}{2\pi L} = \frac{1}{R_0}$ ($R_0 = R/n$ — добротность того же резонатора без вещества); $\Delta n \gtrsim 10^{-5}$.

11.65. $\varphi = 5^\circ 17'$.

11.66. Через призмы проходит необыкновенный луч. Вторая призма пропускает больше света. В обоих случаях угол α должен удовлетворять условию $\frac{1}{n_o} < \sin \alpha < \frac{1}{n_e}$, откуда $37^\circ 6' < \alpha < 42^\circ 18'$, $\delta = 6^\circ 15'$.

11.67. Возможны два решения: 1) $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\mathcal{J} = \frac{\mathcal{J}_0}{2} \cos^4 \frac{\alpha}{2}$; 2) $\beta = \frac{\alpha - \pi}{2}$, $\mathcal{J} = \frac{\mathcal{J}_0}{2} \sin^4 \frac{\alpha}{2}$; где β — угол, на который должен быть повернут николь N_3 относительно николя N_1 .

11.68* $k = 10$.

Решение. Условие образования темной полосы минимального порядка будет либо $d(n_e - n_o) = m\lambda_2 + \lambda_2/4$, либо $d(n_e - n_o) = m\lambda_2 + 3\lambda_2/4$, в зависимости от направления вращения и ориентации николя. Здесь λ_2 — наибольшая длина волны в падающем свете, для которой m есть целое число. Аналогичное условие для минимальной длины волны λ_1 будет либо $d(n_e - n_o) = (m+k)\lambda_1 + \lambda_1/4$, либо $d(n_e - n_o) = (m+k)\lambda_1 + 3\lambda_1/4$. Исключая m , в обоих случаях получим

$$k = \frac{d(n_e - n_o)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2} = 10.$$

11.69. $d = 0,07$ мм.

11.70. $A^2 = a^2 [\cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2(\delta/2)]$;

$A^2 = a^2 \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\delta/2)$ (николи скрещены);

$A^2 = a^2 [1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\delta/2)]$ (николи параллельны).

Здесь δ — разность фаз между двумя главными компонентами прошедшей волны, которая вводится пластинкой, a — амплитуда падающей на пластинку волны.

11.71. $m \approx d_{\max}(n_e - n_o)/\lambda \approx 10$ полос.

11.72* 12 полос.

Решение. Разность хода между необыкновенным и обыкновенным лучами, вносимая кварцевой пластинкой, $\Delta = d(n_e - n_o)$. Подставляя сюда численные значения d , n_e , n_o , нетрудно убедиться, что эта разность для длин волн λ_D и λ_F практически одинакова. Число длин волн λ_D , укладывающихся на интервале Δ , будет $k_1 = \Delta/\lambda_D$. Соответственно $k_2 = \Delta/\lambda_F$. Число темных полос равно $k_2 - k_1 = 12$, так как темные полосы получаются в местах спектра, соответствующих тем длинам волн, для которых состояние поляризации не изменяется в результате прохождения через кварцевую пластинку, т. е. для которых разность хода Δ составляет целое число длин волн.

11.73. $\mathcal{J} = \frac{\mathcal{J}_0}{2} \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} = 0,19 \mathcal{J}_0$, где $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_e - n_o) \approx \frac{3}{2}\pi$.

11.74* Решение. Разложим мысленно световую волну на две составляющие, электрические векторы которых взаимно перпендикулярны и параллельны главным осям пластинки. При введении пластинки интерференционные полосы от каждой составляющей смешиваются. Если введенная пластинка

является пластинкой в полволны, то разность смещений составит половину ширины. В этом случае при введении пластиинки интерференционные полосы пропадут. При введении поляроида они появятся вновь. Исключение составляет случай, когда оси поляроида наклонены под углом 45° к осям пластиинки. В этом случае интерференционные полосы наблюдать не будут.

11.75* Решение. Поставим на пути света пластиинку в четверть длины волны и николь. После прохождения пластиинки свет становится линейно поляризованным, причем направление колебания электрического вектора составляет угол $\pm 45^\circ$ с осью кристалла. На рис. 667 a указано это направление для правополяризованного и левополяризованного света в случаях, когда пластиинка сделана из положительного одноосного кристалла (это направление определяется с помощью анализатора); рис. 667 b относится к случаю, когда пластиинка сделана из отрицательного кристалла.

11.76* Решение. Поставим на пути света пластиинку в четверть длины волны и николь. Если при вращении николя и при любом положении пластиинки интенсивность не меняется, — естественный свет, если интенсивность

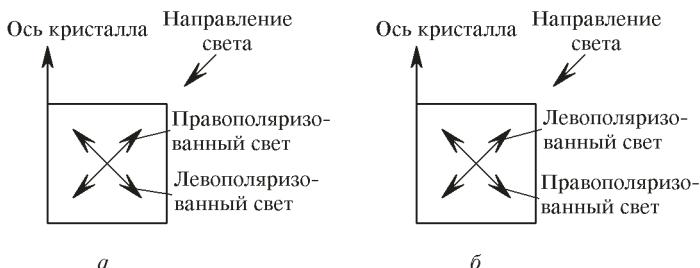


Рис. 667

меняется и падает до нуля, — поляризованный по кругу свет, если же интенсивность меняется, но не падает до нуля, — частично поляризованный по кругу свет.

Вместо пластиинки можно применять компенсатор Бабине и установить его так, чтобы он вносил разность хода в $\lambda/4$.

11.77* Решение. Надо поместить на пути распространения света пластиинку в четверть длины волны, а за ней николь. Если вращением пластиинки вокруг направления луча можно найти такое положение, при котором свет, прошедший через неё, можно погасить последующим вращением николя, то падающий свет был эллиптически поляризован. Если это сделать не удается, то мы имеем дело либо со смесью естественного света с линейно поляризованным, либо со смесью естественного света с эллиптически поляризованным. Для того чтобы отличить друг от друга эти два последних случая, на пути света ставят сначала только один николь и устанавливают его на минимум интенсивности проходящего света. Затем перед николем помещают пластиинку в четверть длины волны. Вращением пластиинки и николя снова добиваются минимума интенсивности. Если этот минимум интенсивности получается при прежнем положении николя (или при повороте его на 180°), то мы имеем смесь естественного света с линейно поляризованным. Если же

для получения минимума требуется повернуть николь на некоторый угол, — то смесь естественного света с эллиптически поляризованным.

Вместо пластиинки четверть волны можно применять компенсатор Бабине. Не обязательно устанавливать компенсатор так, чтобы он вносил разность хода точно в $\lambda/4$, а лишь приближенно. Большой точности в такой установке не требуется.

11.78. 1) Николи скрещены и пластиинки параллельны: разность хода $\Delta = d_1\Delta n_1 + d_2\Delta n_2 \approx 3\lambda_1$, где $\lambda_1 \approx 6000 \text{ \AA}$. Поле зрения окрашено в красный цвет (3-го порядка).

2) Николи параллельны, а пластиинки скрещены: разность хода $\Delta = d_1\Delta n_1 - d_2\Delta n_2 \approx \lambda_2 \approx 5000 \text{ \AA}$. Поле зрения окрашено в зеленый цвет (первого порядка).

$$\mathbf{11.79.} \Delta n \approx \frac{\lambda(1-\rho)}{2d} \approx 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ (грубая оценка).}$$

Более точно, при $\Delta n = \frac{\lambda(1-\rho)}{4\pi d} \approx 0,1 \cdot 10^{-5}$ интенсивность необыкновенной волны, прошедшей через резонатор, уменьшается вдвое, т. е. λ_e сдвинута относительно λ_o на полуширину резонансной кривой (на уровне 1/2).

11.80. Обыкновенная волна не проходит через резонатор. Для необыкновенной волны выполнено условие резонанса (на толщине $2d$ умещается $m_1 = 2589$ длин волн).

$$\mathcal{J}_{\text{прош}} = \frac{1}{2}\mathcal{J}_{\text{пад}} = \frac{1}{2}\mathcal{J}_0.$$

11.81.* Решение. 1) Если свет поляризован по кругу, то слагающие колебания по координатным осям могут быть представлены в виде

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t.$$

После прохождения через кристаллическую пластиинку, сообщающую некоторую разность хода, уравнения колебаний могут быть написаны так:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin(\omega t + \delta).$$

При угле α между главной плоскостью анализатора и одним из главных направлений пластиинки результирующее колебание на выходе из анализатора будет

$$\begin{aligned} a \cos \alpha \cos \omega t + a \sin \alpha \sin(\omega t + \delta) &= \\ &= a(\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta) \cos \omega t + a \sin \alpha \cos \delta \sin \omega t. \end{aligned}$$

Отсюда получаем для интенсивности

$$\mathcal{J} = a^2 \left[(\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta)^2 + (\sin \alpha \cos \delta)^2 \right] = a^2 (1 + \sin 2\alpha \sin \delta).$$

2) При постоянном значении δ интенсивность достигает максимума или минимума, когда $\cos 2\alpha = 0$, т. е. при $a = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. Если $\sin \delta > 0$, то первому

значению соответствует максимум, а второму — минимум; при $\sin \delta < 0$ — наоборот.

11.82* Решение. Согласно предыдущей задаче интенсивность света, прошедшего через анализатор,

$$\mathcal{I} = a^2(1 + \sin 2\alpha \sin \delta).$$

При постоянном угле α интенсивность будет минимальной, когда

$$\sin \delta = -1, \text{ т. е. при } \delta = 3\pi/2, 7\pi/2, \dots;$$

максимальной, когда

$$\sin \delta = 1, \text{ т. е. при } \delta = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, \dots,$$

при условии, что $\sin 2\alpha > 0$.

Если же $\sin 2\alpha < 0$, то в первом случае будет минимум, а во втором — максимум интенсивности. Следовательно, в поле зрения будут видны чередующиеся светлые и темные полосы. При вращении клина будет меняться угол α и, следовательно, в каждой точке клина будет изменяться интенсивность.

При углах $\alpha = 90^\circ, 180^\circ$ весь клин будет освещен равномерно, а при углах $\alpha = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ будет наблюдаться наиболее резкая разница в интенсивности темных и светлых полос, причем при переходе через углы $\alpha = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ темные полосы будут переходить в светлые, а светлые — в темные.

11.83. Падающую волну можно представить как сумму двух линейно поляризованных компонент одинаковой амплитуды. Компонента, поляризованная в плоскости падения, отражается от 1-й решетки, компонента, поляризованная перпендикулярно плоскости падения, отражается от 2-й решетки. Фазовый сдвиг между ними после отражения

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2l \sin \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, отраженная волна будет поляризована по кругу.

$$\mathbf{11.84.} M = \frac{\mathcal{J}S\lambda}{2\pi c} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ Н} \cdot \text{м}; F = \frac{\mathcal{J}}{c} S = 3 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

11.85. Отраженный свет поляризован линейно. Угол вектора \mathbf{E} с плоскостью падения $\theta = \arctg 1,73 = 30^\circ$. Поляризация будет линейной всякий раз, когда оси эллипса совпадают с направлениями проволок. При других углах отражения — эллиптически поляризованный свет.

$$\mathbf{11.86.} \frac{\mathcal{J}_{\parallel} - \mathcal{J}_{\perp}}{\mathcal{J}_0} = \frac{8\pi d\rho}{\lambda} (n_{\perp} - n_{\parallel}) \sin \frac{4\pi d n_{\text{cp}}}{\lambda} = -3 \cdot 10^{-3}.$$

$$\mathbf{11.87.} E_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt{R\lambda B}} \approx 2,88 \text{ ед. СГСЭ} \approx 900 \text{ В/см.}$$

$$\mathbf{11.88.} S = \frac{c}{8\pi} n_0 E^2 (1 - \rho) = 1,4 \cdot 10^{14} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} = 1,4 \cdot 10^7 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}, \quad \text{где} \quad E^2 = \frac{m\lambda - 2dn_0}{2dn_2} = \frac{1}{3} \cdot 10^7 \text{ ед. СГСЭ}.$$

$$11.89. F = R = \frac{cr_0^2}{16\pi n_2 \mathcal{J}_0 L} \approx 3 \text{ м.}$$

11.90. Фокусировка пучка возможна, если плотность потока энергии $S > \frac{c}{8\pi} E_0^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{\lambda}{8n_2 d} \frac{\text{эр}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}. N = \frac{cR^2\lambda}{128n_2 d} \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ эрг/с} = 2 \cdot 10^7 \text{ Вт.}$

$$11.91. F = \frac{r_0^2}{2Lt_1 \frac{dn}{dt}} = -25 \text{ см.}$$

$$11.92. \mathcal{J} = 5\mathcal{J}_0; \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = 3.$$

11.93. $\mathcal{J} = 2\mathcal{J}_0$; отношение полуосей эллипса колебаний вектора **E** равно 0 (или ∞).

$$11.94. T = \frac{1}{2}\tau(\tau \cos^2 \varphi)^3 = \frac{1}{2}\tau^4 \cos^6 \varphi = 0,0032, \text{ где } \tau = 2t = 0,8.$$

$$11.95^*. \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)^2 = \frac{1}{4}.$$

Решение. После прохождения первого поляроида амплитуды колебаний (некогерентных) по осям поляроида $A_{x1} = E_0 \frac{a}{\sqrt{2}}$, $A_{x2} = E_0 \frac{b}{\sqrt{2}}$. После прохождения второго поляроида по каждой оси возникнут некогерентные вклады:

$$\text{по оси } x_2 : E_0 \frac{a}{\sqrt{2}} a \cos \theta \quad \text{и} \quad E_0 \frac{b}{\sqrt{2}} a \sin \theta;$$

$$\text{по оси } y_2 : E_0 \frac{a}{\sqrt{2}} b \sin \theta \quad \text{и} \quad E_0 \frac{b}{\sqrt{2}} b \cos \theta.$$

Сложение происходит некогерентно, т. е. интенсивностями:

$$\mathcal{J}_{x2} = E_0^2 \frac{a^4}{2} \cdot \frac{1}{2} + E_0^2 \frac{(ab)^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\mathcal{J}_0}{4}(a^4 + a^2b^2);$$

$$\mathcal{J}_{y2} = \frac{\mathcal{J}_0}{4}(b^4 + a^2b^2).$$

Коэффициент пропускания системы из двух поляроидов

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = \frac{\mathcal{J}_{x2} + \mathcal{J}_{y2}}{\mathcal{J}_0} = \frac{1}{4}(a^4 + b^4 + 2a^2b^2) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$11.96. \mathcal{J}_{\text{вых}} = \frac{\mathcal{J}_{\text{вх}}}{2} [1 + \cos \Delta\varphi(E)].$$

Здесь $\Delta\varphi(E) = kI\Delta n \pm \frac{\pi}{2} = 2\pi(BlE^2 \pm \frac{1}{4})$; $\Delta n = n_e - n_o = \lambda BE^2$.

$\mathcal{J}_{\text{вых}} = \mathcal{J}_{\min} = 0$ при $E = \frac{1}{2\sqrt{Bl}} = 45,6$ ед. СГСЭ = 13,7 кВ/см.

$$11.97. \mathcal{J}_{\text{вых}} = \frac{\mathcal{J}_{\text{вх}}}{8} [1 + \cos \Delta\varphi(U)].$$

Здесь $\Delta\varphi(U) = \pi(1 + 2BlE^2) = \pi[1 + 2Bl(\frac{U}{d})^2]$.

$\mathcal{J}_{\text{вых}} = \mathcal{J}_{\min}$ при $U = \frac{d}{\sqrt{2Bl}} = 50$ ед. СГСЭ = 15 кВ.

11.98* Отраженный свет линейно поляризован параллельно оптической оси пластинки. Прошедшее излучение поляризовано эллиптически с соотношением полуосей 1 : 0,7 (для амплитуд); при этом большая полуось перпендикулярна оптической оси пластиинки.

Решение. Поскольку поверхности строго параллельны, существенные интерференционные эффекты (пластинка является интерферометром Фабри–Перо). Для обыкновенного луча $n_0 \cdot L = 125$ мкм = 125λ , т. е. целое число полуволн. При этом пропускание равно 1, отражение — 0. Для необыкновенного луча $n_e \cdot L = 123,75$ см = $123,75\lambda$, т. е. налицо максимум отражения. По формулам для пропускания эталона Фабри–Перо найдем коэффициент отражения r по интенсивности для необыкновенного луча (r — коэффициент отражения по интенсивности от поверхности кристалла):

$$\rho = \frac{4r}{(1-r)^2 + 4r} = 0,517 \approx 0,52; \quad r = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = 0,18.$$

Пропускание по интенсивности $T = 1 - R \approx 0,48$. Амплитуда прошедшей волны $A = \sqrt{T} \approx 0,7$. Таким образом, в отраженном свете будет присутствовать одна поляризация, параллельная оптической оси пластиинки, а прошедшее излучение будет эллиптически поляризованным с соотношением полуосей 1 : 0,7 (для амплитуд) и с направлением большой полуоси перпендикулярно оптической оси.

11.99. Отраженный свет линейно поляризован параллельно оптической оси пластиинки. Прошедшее излучение поляризовано эллиптически с соотношением полуосей 1 : 0,71 (для амплитуд), большая ось эллипса направлена перпендикулярно оптической оси пластиинки.

11.100. Отраженный свет линейно поляризован параллельно быстрой оптической оси. Прошедшее излучение поляризовано эллиптически с соотношением полуосей 1 : 0,92 (для амплитуд); большая ось эллипса направлена параллельно медленной оптической оси пластиинки.

11.101. 1) $d \geq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda(n_e - n_0)} = 2,2$ см; 2) $\alpha_1 = 45^\circ$; 3) выходящий свет будет линейно поляризован при $\alpha_2 = (0^\circ; 90^\circ)$.

11.102. 1) $d_2 = -\frac{\Delta_1}{(n_e - n_0)_{\text{шпат}}} = 0,52$ мм, где $\Delta_1 = d_1(n_e - n_0)_{\text{кварц}} = 9 \cdot 10^{-3}$ см; 2) компенсация разности хода Δ_1 при таком d_2 происходит при $\alpha_1 = 0^\circ$ (при $\alpha_2 = 90^\circ$ общая разность хода становится больше); 3) после первой пластиинки свет деполяризован.

11.103. $V = \frac{\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}}{\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, где $\mathcal{I}_{\max} = \left(\frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\mathcal{I}_0}{4}$; $\mathcal{I}_{\min} = \left(\frac{A_0}{2} - \frac{A_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\mathcal{I}_0}{4}$.

11.104. $d = \frac{\frac{\lambda + \delta\lambda}{2\delta\lambda}}{\frac{n_e - n_0}{\lambda} + \frac{dn_0}{d\lambda} - \frac{dn_e}{d\lambda}} = 0,154$ см $\approx 1,5$ мм.

При этом $m = d(n_e - n_0)/\lambda \approx 455$ — близко к целому числу. Пластиинку надо расположить под 45° к разрешенному направлению поляризаторов.

11.105. $d = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(n_e - n_0)(\lambda_1 - \lambda_2)} = 0,302$ см. При этом $m = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} = 60$ — целое число.

$$11.106. d = \frac{m + \frac{5}{8}\lambda}{n-1}, \text{ где } m = 0, 1, \dots; \mathcal{J} = (2 + \sqrt{2})\mathcal{J}_0.$$

$$11.107. \mathcal{J}_A = \frac{3}{2}\mathcal{J}_0.$$

$$11.108. \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_e} = 1.$$

11.109. Интенсивность главных максимумов в картине $\mathcal{J}_1(x) \propto \mathcal{J}_0 N^2$, где \mathcal{J}_0 — интенсивность падающего света; после установки поляроида и пласти-

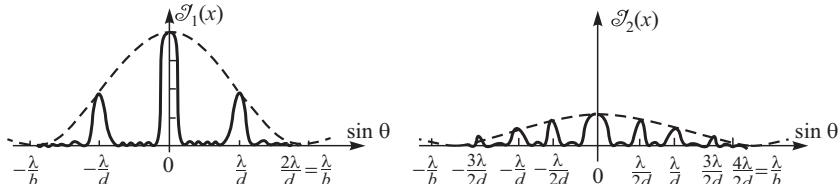


Рис. 668

нок в $\lambda/4$ $\mathcal{J}_2(x) \propto \frac{1}{4}\mathcal{J}_0 N^2$ (вчетверо меньше), (рис. 668). Полуширина максимумов не изменится, положение максимумов станет вдвое чаще: $\sin\theta_m = m \frac{\lambda}{2d}$.

11.110. После установки поляроида и пластинок в $\lambda/2$ интенсивность максимумов уменьшится в 2 раза, ширина максимумов не меняется, четные мак-

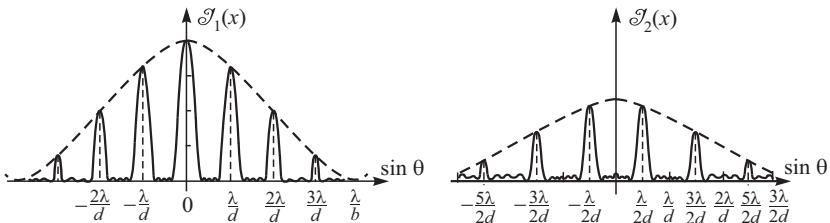


Рис. 669

симумы ($m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$) исчезают, а нечетные ($m = \pm 1, \pm 3, \dots$) появляются (см. рис. 669).

11.111. $\mathcal{J} = E_1^2 \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16} - \frac{2}{16} \sqrt{9} \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{13}{16} E_1^2 = \frac{13}{32} \mathcal{J}_0$, где $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_0/2 = E_1^2$ — интенсивность волны после первого поляроида.

$$11.112. R = 1/2.$$

11.113. 1) Пластишка $\lambda/4$. 2) Направление одной из осей пластишки совпадает с разрешенным направлением P_2 и повернуто на 45° относительно направления P_1 . 3) $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_0/4$.

11.114. $\mathcal{J}(\varphi) = \frac{\mathcal{J}_0}{2} \cos^2 2\varphi; \mathcal{J}(\varphi) = 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Здесь пластишка работает как $\lambda/2$ в проходящем свете, поскольку свет дважды проходит через пластишку $\lambda/4$.

11.115. 1) $V = \frac{\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}}{\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2) В центре экрана, где $\Delta = 0$, будет наблюдаться темная полоса ($\Delta\varphi = \pi$).

11.116. 1) $V = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,5$; в центре экрана светлая полоса. 2) $V = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 0,5$; в центре экрана темная полоса.

11.117. 1) $d = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\Delta n(\lambda_2 - \lambda_1)} = 5,05$ мм; 2) $V = 2/5$; здесь максимальная интенсивность $\mathcal{I}_{\max} = \frac{7}{2}\mathcal{I}_0$, минимальная — $\mathcal{I}_{\min} = \frac{3}{2}\mathcal{I}_0$.

11.118. 1) $d = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4\Delta n(\lambda_2 - \lambda_1)} = 1,275$ мм; 2) $V = \frac{2\sqrt{2}}{9}$; здесь $\mathcal{I}_{\max} = \frac{9}{4}\mathcal{I}_0 + \frac{\mathcal{I}_0}{\sqrt{2}}$; $\mathcal{I}_{\min} = \frac{9}{4}\mathcal{I}_0 - \frac{\mathcal{I}_0}{\sqrt{2}}$.

$$\mathbf{11.119.} m = \frac{a^2}{2\lambda L} = 21.$$

$$\mathbf{11.120.} \beta = \frac{a^2}{2l\mathcal{I}_0 \left(b - \frac{a^2}{2m\lambda} \right)} = 2,4 \cdot 10^{-20} \text{ ед. СГСЭ.}$$

11.121. $\mathcal{I} = \frac{\mathcal{I}_0}{4}(1 + \cos \Delta\varphi) \approx 0,49\mathcal{I}_0$, где $\Delta\varphi = 2\pi Bl \left(\frac{U}{d} \right)^2 = 0,26$ рад = $= 14,9^\circ$.

$$\mathbf{11.122.} \mathcal{I} = \frac{\mathcal{I}_0}{4} \left[1 + \cos \left(2\pi Bl \left(\frac{U}{d} \right)^2 \right) \right] = \frac{I_0}{8}.$$

$$\mathbf{11.123.} \frac{\mathcal{I}_{\text{с линзой}}}{\mathcal{I}_{\text{без линзы}}} = \frac{36\pi^2 + 4,5^2\pi^2 + 2}{2} = 278,6 \approx 280.$$

11.124. Увеличится в 9 раз.

$$\mathbf{11.125.} \mathcal{I} = \frac{cn}{8\pi} \left(\frac{\Delta n_{\text{нл}}}{n} \right)^2 E_{\text{вн}}^2 \simeq 2 \cdot 10^{14} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2},$$

где $E_{\text{вн}} \approx \frac{e}{r^2} \simeq 5 \cdot 10^6$ ед. СГСЭ — внутриатомное поле.

11.126. Волна второй гармоники должна быть задержана относительно основной на целое число длин волн, т. е. $L = \frac{m\lambda_2}{n_2 - n_1} = 13,3 \cdot m$, где $m = 1, 2, 3, \dots$

11.127. Существенная деформация формы импульса будет, если вершина импульса отстанет от краев на время порядка длительности импульса. Поэтому $L = \frac{nc^2\tau}{8\pi n_2 \mathcal{I}} \approx 27$ см.

$$\mathbf{11.128.} l = \frac{L}{1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^4} = 451,8 \text{ м.}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Т а б л и ц а I. Перевод выражений и формул из гауссовой системы в систему СИ и обратно

Величина	Гауссовая система	Система СИ
Скорость света	c	$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$
Напряженность электрического поля, потенциал	\mathbf{E}, φ	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{E}, \varphi)$
Электрическая индукция (смещение)	\mathbf{D}	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}} \mathbf{D}$
Заряд, плотность заряда, ток, плотность тока, вектор поляризации	$q, \rho, \mathcal{J}, j, \mathbf{P}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} (q, \rho, \mathcal{J}, j, \mathbf{P})$
Магнитная индукция, магнитный поток	\mathbf{B}, Φ	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} (\mathbf{B}, \Phi)$
Напряженность магнитного поля	\mathbf{H}	$\sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{H}$
Магнитный момент, намагниченность	\mathfrak{M}, \mathbf{I}	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} (\mathfrak{M}, \mathbf{I})$
Электрическая проницаемость, магнитная проницаемость (относительные)	ϵ, μ	ϵ, μ
Электрическая поляризуемость, магнитная восприимчивость	α, κ	$\frac{1}{4\pi} (\alpha, \kappa)$
Удельная электрическая проводимость	λ	$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}$
Сопротивление	R	$4\pi\epsilon_0 R$
Емкость	C	$\frac{C}{4\pi\epsilon_0}$
Индуктивность	L	$\frac{4\pi}{\mu_0} L$

Значения $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$; $4\pi\epsilon_0 = 1,11 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м}$;
 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$; $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,25666 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$;
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

Таблица II. Перевод числовых значений физических величин

Наименование	Обозначение	СИ	Гауссова система
Длина	l	метр (м)	10^2 см
Масса	m	килограмм (кг)	10^3 г
Время	t	секунда (с)	1 с
Сила	F	ньютон (Н)	10^5 дин
Работа, энергия	A, \mathcal{E}, W	дюйм (Дж)	10^7 эрг
Мощность	N	ватт (Вт)	10^7 эрг/с
Давление	P	паскаль (Па)	10 дин/см ²
Сила электрического тока	I	ампер (А)	$3 \cdot 10^9$
Электрический заряд	q	кулон (Кл)	$3 \cdot 10^9$
Электрический потенциал	φ	вольт (В)	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$
Напряженность электрического поля	E	(В/м)	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$
Вектор поляризации	P	(Кл/м ²)	$3 \cdot 10^5$
Электрическая индукция (электрическое смещение)	D	(Кл/м ²)	$12\pi \cdot 10^5$
Электрическая емкость	C	фарад (Ф)	$9 \cdot 10^{11}$ см
Электрическое сопротивление	R	ом (Ом)	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ с/см
Удельное электрическое сопротивление	ρ	(Ом · м)	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$ с
Электрическая проводимость	$\Lambda = 1/R$	сименс (См)	$9 \cdot 10^{11}$ см/с
Удельная электрическая проводимость (удельная электропроводность)	λ	(См/м)	$9 \cdot 10^9$ с ⁻¹
Магнитный поток	Φ	вебер (Вб)	10^8 Мкс (максвелл) Мкс = Гс · см ²
Магнитная индукция	B	tesла (Тл)	10^4 Гс
Напряженность магнитного поля	H	(А/м)	$4\pi \cdot 10^{-3}$ Э (эрстед)
Намагниченность	I	(А/м)	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^4$ Гс (гаусс)
Магнитный момент	M	$A \cdot m^2$	10^3 эрг/Гс
Индуктивность	L	генри (Γ_h)	10^9 см

Наименование	Обозначение	СИ	Гауссова система
Сила света	I	кандела (кд)	
Световой поток	$\Phi = \int_{\Omega} I d\Omega$	люмен (лм) 1 лм соответствует мощности ($\lambda \approx 5550\text{\AA}$) 0,0016 Вт (механический эквивалент света)	
Освещенность	$E = \frac{d\Phi}{dS}$	люкс (лк)	
Яркость протяженного источника (в направлении угла θ)	$B_0 = \frac{d\Phi}{d\Omega dS \cos \theta}$	(кд/м ²)	стильб (сб) = $= 1 \text{ кд}/\text{см}^2$

П р и м е ч а н и е. Множители 3 (кроме входящих в показатели степени) при точных расчетах следует заменить на 2,99792458 в соответствии с точным значением скорости света. Например, в строке «электрическая индукция» вместо $12\pi \cdot 10^5$ при точных расчетах следует брать $2,99792458 \cdot 4\pi \cdot 10^5$. В тех случаях, когда для гауссовых единиц существует общепринятое наименование, оно приведено в таблице. В остальных случаях приведено только число таких единиц.

Для перевода формулы электродинамики из гауссовой системы в систему СИ следует все величины в этой формуле умножить на коэффициент, приведенный в последнем столбце таблицы I. Все чисто механические величины при этом не преобразуются (коэффициенты равны единице). Исключение составляет скорость света в вакууме c , которая заменяется на $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

П р и м е р 1. В гауссовой системе напряженность магнитного поля H бесконечного прямого провода в вакууме определяется формулой

$$H = \frac{2\mathcal{J}}{cr}.$$

Для перевода в систему СИ умножим, согласно таблице, H на $\sqrt{4\pi\mu_0}$, ток \mathcal{J} — на $\sqrt{4\pi\epsilon_0}$, c заменяем на $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, r оставляем без изменения. Получаем

$$\sqrt{4\pi\mu_0} H = \frac{2\mathcal{J}}{\sqrt{2\pi\epsilon_0}} \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \frac{1}{r},$$

или, после сокращения,

$$H = \frac{\mathcal{J}}{2\pi r}.$$

Для выполнения обратного преобразования из системы СИ в гауссову надо пользоваться обратными значениями «коэффициентов перехода».

П р и м е р 2. В СИ

$$B = \mu_0(H + I).$$

Умножая на соответствующие коэффициенты, получим

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} B = \mu_0 \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}} H + \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} I \right).$$

После сокращения получаем формулу гауссовой системы

$$B = H + 4\pi I.$$

Таблица III. Фундаментальные физические константы

Скорость света в вакууме

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/с} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Постоянная Планка

$$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 6,58 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с},$$

$$h = 2\pi\hbar \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ эрг} \cdot \text{с.}$$

Постоянная Больцмана

$$k = 1,380 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К} = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} = 8,62 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ/К.}$$

Универсальная газовая постоянная

$$R \approx 8,314 \cdot 10^7 \text{ эрг/(К} \cdot \text{моль}) = 8,314 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль}).$$

Число Авогадро

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Элементарный заряд

$$e = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Масса электрона, энергия покоя электрона

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ г; } m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ.}$$

Масса протона, энергия покоя протона

$$m_p \approx 1,673 \cdot 10^{-24} \text{ г; } m_p c^2 \approx 938,3 \text{ МэВ.}$$

Масса нейтрона, энергия покоя нейтрона

$$m_n \approx 1,675 \cdot 10^{-24} \text{ г; } m_n c^2 \approx 939,6 \text{ МэВ.}$$

Энергия, соответствующая 1 а. е. м. (1 а. е. м. $\approx 1,66 \cdot 10^{-24}$ г),

$$(1 \text{ а. е. м.}) c^2 \approx 931,5 \text{ МэВ.}$$

Температура, соответствующая энергии 1 эВ,

$$T_{\text{эВ}} = 11606 \text{ К.}$$

Гравитационная постоянная

$$\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2 / \text{г}^2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2.$$

Удельный заряд электрона

$$\frac{e}{m_e} \approx -5,273 \cdot 10^{17} \text{ ед. СГСЭ} \approx -1,759 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.}$$

Удельный заряд протона

$$\frac{e}{m_p} \approx 2,872 \cdot 10^{14} \text{ ед. СГСЭ} = 0,958 \cdot 10^8 \text{ Кл/кг.}$$

Т а б л и ц а IV. Некоторые внесистемные единицы

1 кал = 4,1868 Дж = $4,1868 \cdot 10^7$ эрг (1 Дж = 0,2388 кал).

1 Å = 10^{-8} см = 10^{-10} м = 0,1 нм = 10^{-4} мкм.

1 св. год = $9,5 \cdot 10^{17}$ см.

1 год = $3,16 \cdot 10^7$ с.

1 дптр = 1 м⁻¹.

1 а. е. м. = $1,66054 \cdot 10^{-24}$ г = $1,66054 \cdot 10^{-27}$ кг.

1 эВ = $1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

1 мм рт. ст. = 133,3 Па = 1333 дин/см².

Интернет-магазин литературы по физике и математике

www.fizmatkniga.org

Учебное издание

*Козел Станислав Миронович
Лейман Владимир Георгиевич
Локшин Геннадий Рафаилович
Овчинкин Владимир Александрович
Прут Эдуард Вениаминович*

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ
Часть 2. Электричество и магнетизм. Оптика

Издание седьмое, исправленное

Редактор *A. K. Розанов*

Набор и верстка выполнены в издательстве «Физматкнига»

Операторы *A. B. Жулдыбин, B. M. Курашов, A. K. Розанов, P. D. Стрекалов*

Графика *M. B. Ивановский, I. P. Казанский, A. K. Розанов*

Издательство «Физматкнига»

141701, Московская область, г. Долгопрудный, ул. Первомайская, д. 5

Тел. (499) 390-51-38

E-mail publishers@mail.mipt.ru

<http://www.fizmatkniga.org>

Подписано в печать 01.03.2023. Формат 60×88/16.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 29,3. Уч.-изд. л. 30,0. Тираж 500 экз.

Отпечатано в полном соответствии с качеством

предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»

109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н