ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Под редакцией ***В. К. РОМАНКО***

Москва
Лаборатория **Б**азовых **З**наний
ЮНИМЕДИАСТАЙЛ
ФИЗМАТЛИТ
2002

УДК 517.9
ББК 517.2
Р 69

Под редакцией В. К. Романко

Романко В. К.

Р 69 Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко. — М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. — 256 с.: ил.
ISBN 5-93208-120-1

Задачник обеспечивает практические занятия по курсу «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления». В начале каждого параграфа приводятся решения типовых задач. Ко всем задачам даны ответы.

Для студентов физико-математических, инженерно-физических и экономических специальностей.

УДК 517.9
ББК 517.2

Серия «Технический университет»

Учебное издание

Романко Василий Кириллович
Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению

Художественный редактор *Н. Лозинская*
Технический редактор *Т. Бленцева*

Оригинал-макет подготовлен в пакете LATEX 2_ε
с использованием кириллических шрифтов семейства LH
Гарнитура Computer Modern

Лицензия на издательскую деятельность № 066140
от 12 октября 1998 г.

Подписано в печать 13.03.02. Формат 70x100$^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,64. Тираж 5000 экз. Заказ 1374

ООО Издательство «Лаборатория Базовых Знаний»
Адрес для переписки: 103473, Москва, а/я 9
Телефон (095)955-0398. E-mail: lbz@aha.ru

Гигиеническое заключение 77.99.2.953.П.9816.3.00 от 22.03.2000 г.

Отпечатано с готовых диапозитивов в полиграфической фирме
«Полиграфист». 160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.

ISBN 5-93208-120-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник составлен на основании многолетнего опыта преподавания курса обыкновенных дифференциальных уравнений в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

В сборнике содержится большое число оригинальных задач, составленных преподавателями кафедры высшей математики МФТИ. Значительная часть задач сборника подготовлена авторами. Н. Х. Агаханов укомплектовал задачами § 6 и § 13 сборника, В. В. Власов совместно с В. К. Романко подобрали задачи § 8 и § 11 сборника, Л. И. Коваленко составила задачи § 7 и совместно с В. К. Романко подобрала задачи §§ 2—4 и § 9 сборника. Подбор задач остальных параграфов сборника и общая редакция сборника осуществлены В. К. Романко.

В начале каждого параграфа сборника помещены примеры решений типовых задач. Начало решения задачи отмечается значком △, а конец решения — значком ▲. В конце каждого параграфа приведены ответы к задачам параграфа.

В сборнике предлагается большое количество задач по основным темам программы курса обыкновенных дифференциальных уравнений. Это позволяет использовать сборник преподавателями для аудиторной работы, для домашних заданий, для составления контрольных работ, а студентами для самостоятельной работы.

Авторы сборника выражают глубокую благодарность коллективу кафедры высшей математики МФТИ, чья многолетняя творческая деятельность способствовала появлению этого сборника. Авторы сборника особенно благодарны профессору Г. Н. Яковлеву и профессору М. И. Шабунину за помощь при написании сборника.

Глава 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Составление уравнений заданного семейства плоских кривых. Приближенное изображение интегральных кривых уравнений

Пусть семейство плоских непрерывно дифференцируемых кривых задано уравнением $\Phi(x, y, C) = 0$, где y — неявная функция x при каждом значении параметра C. Если система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \cdot y' = 0, \\ \Phi(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

позволяет исключить параметр C, то получается дифференциальное уравнение заданного семейства кривых.

В случае, когда семейство кривых задано уравнением $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, зависящим от двух параметров C_1 и C_2, исключение параметров C_1, C_2 и получение дифференциального уравнения семейства кривых достигается с помощью нахождения второй производной от Φ по x.

Пример 1. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $\operatorname{tg} y = Ce^{-x^2}$.

Δ Продифференцируем по x заданное соотношение, считая y неявной функцией x:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = -2xCe^{-x^2}.$$

Подставляя сюда найденное из заданного соотношения $C = e^{x^2} \operatorname{tg} y$, получаем искомое уравнение

$$y' + x\sin 2y = 0. \qquad \blacktriangle$$

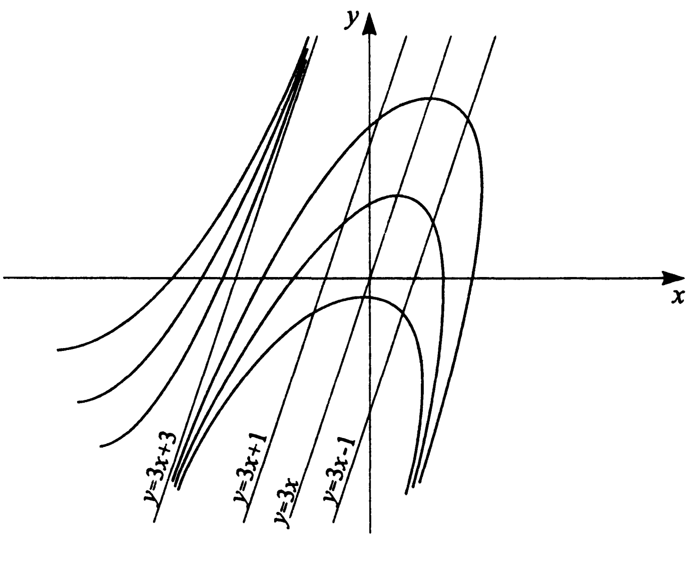
Чтобы приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, необходимо рассмотреть несколько изоклин уравнения и найти линии, на которых могут находиться точки экстремума и точки перегиба интегральных кривых.

Пример 2. Построить приближенно интегральные кривые уравнения

$$y' = y - 3x.$$

Δ Правая часть уравнения удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши на всей плоскости (x, y). Поэтому интегральные кривые не могут ни пересекаться, ни касаться. Изоклины уравнения имеют вид $y - 3x = k$, где $k = \text{const}$. При $k = 0$ изоклина $y = 3x$ делит плоскость на две части. Слева от прямой $y = 3x$ $y' > 0$ и, значит, интегральные кривые там возрастают, а справа от прямой $y = 3x$ $y' < 0$ и, значит, интегральные кривые там убывают. Следовательно, на прямой $y = 3x$ находятся точки максимума интегральных кривых.

Возьмем еще две изоклины. Изоклина $y = 3x + 1$ пересекает интегральные кривые в точках, в которых касательные к ним образуют с осью Ox углы $\frac{\pi}{4}$. Изоклина $y = 3x - 1$ пересекает интегральные кривые в точках, в которых касательные к ним образуют с осью Ox углы $\frac{3\pi}{4}$.



Из уравнения найдем $y'' = y' - 3 = y - 3x - 3$. Прямая $y = 3x + 3$ делит плоскость на две части. Слева от прямой $y = 3x + 3$ $y'' > 0$ и, значит, интегральные кривые выпуклые вниз, а справа от этой прямой $y'' < 0$ и, значит, интегральные кривые выпуклые вверх. Прямая $y = 3x+3$ является интегральной кривой, в чем можно убедиться подстановкой в уравнение. Поэтому интегральные кривые не пересекают эту прямую и, следовательно, они не имеют точек перегиба.

Проведенное исследование позволяет приближенно построить интегральные кривые заданного уравнения (см. рис.). ▲

Составить дифференциальные уравнения семейства кривых (1—18):

1. $y = Cx^2 - x$.

2. $y = x^2 + Cx$.

3. $y = (x - C)^2$.

4. $(y - C)^2 = 2x$.

5. $(x - C)^2 + y^2 = 1$.

6. $x^2 + (y - C)^2 = 1$.

7. $2x^2 + Cy^2 = 1$.

8. $(y - C)^2 = \dfrac{1}{x}$.

9. $x^2 + 2x - (y - C)^2 = 2$.

10. $y = \operatorname{tg}(x + C)$.

11. $Cx = \sin Cy$.

12. $Cy = \operatorname{tg} Cx$.

13. $x^2 = (C + y)e^y$.

14. $y^2 + 2Cxy + x^2 + 2x = 0$.

15. $y = A\cos(x + \varphi)$.

16. $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

17. $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2x$.

18. $y^2 = C_1x^2 + C_2x$.

Построить приближенно интегральные кривые уравнений (19—38):

19. $y' = \dfrac{y-1}{x-1}$.

20. $y' = \dfrac{y}{x+1}$

21. $y' = \dfrac{1-x}{y-1}$.

22. $y' = \dfrac{x+1}{1-y}$.

23. $y' = \dfrac{1-y}{x}$.

24. $y' = \dfrac{y}{1-x}$.

25. $y' = (x - 1)y$.

26. $y' = x(y + 1)$.

27. $y' = \dfrac{2x+y}{x-2y}$.

28. $y' = \dfrac{y-2x}{2y+x}$.

29. $y' = 2x + 2y + 1$.

30. $y' = 2x - 2y - 1$.

31. $y' = y - x^2 - 2x - 2.$

32. $y' = y - x^2 + 2x.$

33. $y' = -x^2 - \dfrac{y}{x}.$

34. $y' = \dfrac{y}{x} + x^2.$

35. $y' = y - x^3.$

36. $y' = 2xy - 2.$

37. $y' = x^2 + y^2 - 1.$

38. $y' = x^2 - y^2 - 1.$

39. Пусть задано уравнение $y' = f(x, y)$ с непрерывной функцией $f(x, y)$ на всей плоскости (x, y). Показать, что если это уравнение имеет периодическое решение периода T, то необходимо $f(x, y)$ является периодической функцией x периода T.

40. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения $y' = f(x, y)$ с непрерывной функцией $f(x, y)$ на всей плоскости (x, y). Показать, что:

а) при $f(-x, y) = -f(x, y)$ функция $y = \varphi(-x)$ также решение уравнения,

б) при $f(x, -y) = -f(x, y)$ функция $y = -\varphi(x)$ также решение уравнения,

в) при $f(-x, -y) = f(x, y)$ функция $y = -\varphi(-x)$ также решение уравнения.

41. Пусть $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция на всей плоскости (x, y) и пусть $f(x, y)$ — периодическая функция по x периода T и $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} > 0$.

Доказать, что уравнение $y' = f(x, y)$ не может иметь более одного периодического решения.

Ответы к задачам § 1

1. $xy' - 2y = x.$

2. $xy' - y = x^2.$

3. $y'^2 = 4y.$

4. $2xy'^2 = 1.$

5. $y^2 \left(y'^2 + 1\right) = 1.$

6. $\left(1 - x^2\right) y'^2 = x^2.$

7. $\left(2x^2 - 1\right) y' = 2xy.$

8. $4x^3 y'^2 = 1.$

9. $\left(x^2 + 2x - 2\right) y'^2 = (x + 1)^2.$

10. $y' = 1 + y^2.$

11. $\dfrac{1}{y'} = \cos \dfrac{y\sqrt{y'^2 - 1}}{|xy'|}.$

12. $y' \cos^2 \dfrac{x\sqrt{y' - 1}}{|y|} = 1.$

13. $\left(x^2 + e^y\right) y' = 2x.$

14. $x\left(y^2 - x^2 - 2x\right) y' = y\left(y^2 - x^2\right).$

15. $y'' + y = 0.$

16. $y'' - 2y' + y = 0.$

17. $x^2 y'' + xy' - y = 0.$

18. $x^2\left(yy'' + y'^2\right) = y(2xy' - y).$

§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными. Ортогональные траектории. Однородные уравнения

Для решения уравнения с разделяющимися переменными

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

необходимо уравнение сначала умножить или разделить на такое выражение, чтобы в результате получилось уравнение, одна часть которого содержит только dx и некоторую функцию x, а другая часть содержит только dy и некоторую функцию y. При делении уравнения надо следить, чтобы не потерять решений уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x+2)\left(1 + y^2\right) dx + (x+1)y^2 dy = 0.$$

Δ Разделив уравнение на $(x+1)\left(1 + y^2\right)$, получаем уравнение с разделенными переменными

$$\frac{x+2}{x+1}dx + \frac{y^2}{1+y^2}dy = 0.$$

При делении на $(x + 1)$ можно потерять решение $x = -1$. Подстановка $x = -1$ в заданное уравнение показывает, что $x = -1$ действительно является решением уравнения.

Далее имеем

$$\int \frac{x+2}{x+1}dx + \int \frac{y^2 dy}{1+y^2} = C,$$

где C — произвольная постоянная. Найдя интегралы, получаем

$$x + y + \ln|x+1| - \operatorname{arctg} y = C. \quad \blacktriangle$$

Для получения ортогональных траекторий заданного семейства плоских кривых нужно сначала составить дифференциальное уравнение семейства кривых $F(x, y, y') = 0$. Затем заменить в этом уравнении y' на $\left(-\dfrac{1}{y'}\right)$. Это дает дифференциальное уравнение искомых ортогональных траекторий.

Пример 2. Найти ортогональные траектории семейства кривых

$$y = \operatorname{tg}(\ln Cx).$$

△ Сначала составим дифференциальное уравнение заданного семейства кривых. Дифференцируя по x уравнение заданного семейства и исключая параметр C, получаем уравнение

$$y' = \frac{1}{x \cdot \cos^2(\ln Cx)} = \frac{1}{x}\left[1 + \operatorname{tg}^2(\ln Cx)\right] = \frac{1 + y^2}{x}.$$

Заменяя в этом уравнении y' на $\left(-\dfrac{1}{y'}\right)$, находим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$-x = \left(1 + y^2\right) y'.$$

Заменив y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и решив полученное уравнение с разделенными переменными, находим уравнение ортогональных траекторий $3x^2 + 2y^3 + 6y = C$. ▲

Однородные уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ решаются с помощью замены $y = x \cdot z$, приводящей их к уравнениям с разделяющимися переменными.

Пример 3. Решить уравнение $2xydx = \left(x^2 + y^2\right) dy$.

△ Замена $y = xz$ приводит заданное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$x\left(1 + z^2\right) dz + z\left(z^2 - 1\right) dx = 0.$$

Заметим, что $z = 0, \pm 1$ — решения этого уравнения. Тогда из замены следует, что $y = 0$ и $y = \pm x$ — решения исходного уравнения. При $z \neq 0, \pm 1$ уравнение с разделяющимися переменными можно записать в виде

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{2z}{z^2 - 1} - \frac{1}{z}\right) dz = 0.$$

Решив это уравнение и использовав замену $z = \dfrac{y}{x}$, получаем решения заданного уравнения:

$$x^2 - y^2 = Cy, \qquad y = 0. \qquad \blacktriangle$$

Уравнение вида $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ в том случае, когда прямые $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ и $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ пересекаются, приводится к однородному уравнению с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых.

Решить уравнения (1—23):

1. $y' = y^2 - y$.

2. $\left(x^2 + x\right) y' - (2x + 1)y = 0$.

3. $xy' \cos y + \sin y = \sin^2 y$.

4. $y' \cos x + y(1 + y) \sin x = 0$.

5. $2xydx = \left(1 - x^2\right) dy$.

6. $x^3ydy = (x - 1)dx$.

7. $yy' \cos x = (1 - y) \sin x$.

8. $x \left(1 - y^2\right) y' = y \left(1 + y^2\right)$.

9. $\left(x^2 - 1\right) ydx = x \left(x^2 + 1\right) dy$.

10. $x(y + 1)dy = \left(1 - y^2\right) dx$.

11. $xy' + y^2 \left(\dfrac{1}{x} - 3x\right) = 0$.

12. $\left(1 - x^2\right)^2 yy' + x = 0$.

13. $(x + 1)y' + y(y + 1) = 0$.

14. $\left(1 + y^2\right) ydx = x \left(1 + 2y^2\right) dy$.

15. $x^2 \left(x^2 + 4\right) y' = \cos^2 y$.

16. $y' \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg} y = 0$.

17. $(1 + \cos x)yy' = \left(1 + y^2\right) \sin x$.

18. $ye^x dy + xe^{y^2} dx = 0$.

19. $x(1 + y)y' + \left(\sqrt{x} + \ln x\right) \left(1 + y^2\right) = 0$.

20. $(x - 1)yy' + \left(x^2 + 1\right) (y + 1)^2 = 0$.

21. $x^2dx + \left(1 + x^6\right) \sqrt{1 - 2y}dy = 0$.

22. $y'\sqrt{1 - x^4} + x \left(1 + e^y\right) = 0$.

23. $y' \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + e^{-y}\sqrt{1 + e^y} = 0$.

С помощью линейной замены переменных привести уравнения к уравнению с разделяющимися переменными и решить их (24—27):

24. $(2x + y + 2)dx - (4x + 2y + 9)dy = 0$.

25. $(4 - x - 2y)dx - 2(1 + x + 2y)dy = 0$.

26. $(2y - x + 1)dx + (4y - 2x + 6)dy = 0$.

27. $(y-3x+2)dx+(3x-y-1)dy=0.$

Найти решение уравнений, удовлетворяющее заданному начальному условию (28—39):

28. $2y\left(1+y^2\right)dx+x\left(3y^2+y+3\right)dy=0,\ y(1)=1.$

29. $x(2y-1)y'+4y^2=0,\ y(-1)=-1.$

30. $x(1+y)y'=y^2,\ y(1)=1.$

31. $3x(x+1)y'=(x+2)y,\ y(1)=-1.$

32. $(y+2)y'=\sin 2x,\ y(0)=1.$

33. $\left(e^x+1\right)^2y'+\left(e^{2x}-1\right)y=0,\ y(0)=\dfrac{1}{4}.$

34. $\left(x^2+x\right)y'-\left(x^2+x+1\right)y=0,\ y(1)=\dfrac{e}{2}.$

35. $\left(x^3+x\right)y'-\left(3x^2-1\right)y=0,\ y(-1)=-4.$

36. $y'+3y^2=3y,\ y(0)=\dfrac{1}{2}.$

37. $y'=\left(y+y^4\right)\operatorname{th}x,\ y(0)=1.$

38. $xy'+y(1+y)\sin x=0,\ y(0)=1.$

39. $2y'=\left(y^2-2y\right)e^{x^2},\ y(0)=1.$

Найти ортогональные траектории для заданных семейств плоских кривых (40—50):

40. $y=C(x+1)e^{-x}.$

41. $y^2=Ce^{x^2+y^2}.$

42. $\left(Ce^{-x^2}-1\right)y=2.$

43. $y=C\sin x-2.$

44. $y\left(1+Ce^x\right)=1.$

45. $y=C\cos x+2.$

46. $e^x=C\left(1-e^{-y}\right).$

47. $1+e^y=C\left(1+x^2\right).$

48. $y^2=Ce^{-(x+y)}.$

49. $xy=Ce^y.$

50. $2x+y-1=Ce^{2y-x}.$

51. Найти ортогональные траектории семейства эллипсов, имеющих общую большую ось.

52. Найти ортогональные траектории семейства гипербол, имеющих общую мнимую ось.

53. Семейство кривых задано в полярных координатах уравнением $r(\varphi) = Cf(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий. Найти ортогональные траектории семейства кривых $r = Ce^{\varphi}$.

54. Семейство кривых в полярных координатах задается уравнением $r'(\varphi) = rf(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — непрерывная функция. Составить дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий. Найти ортогональные траектории семейства кривых $r = C\cos\varphi$.

55. Доказать, что решение задачи Коши существует и единственно при любых начальных данных для уравнения $y' = a(x)\cdot b(y)$, где $a(x)$, $b(y)$ заданные и непрерывные соответственно на интервалах (α, β), (γ, δ) функции, причем $b(y) \neq 0$.

56. Пусть функции $f(x)$, $g(y)$ непрерывны на всей числовой оси, причем

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad 0 < g(y) \leqslant B(1+|y|),$$

где A, B, ε — положительные постоянные.

Доказать, что при любых x_0, y_0 существует единственное, определенное при $-\infty < x < +\infty$ решение уравнения

$$y' = f(x)\cdot g(y),$$

удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ и имеющее конечные $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

Решить уравнения (57—78):

57. $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$.

58. $xy' = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

59. $xdy = \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx$.

60. $xydx = \left(x^2 - y^2\right)dy$.

61. $xdy = \left(y - \sqrt{x^2+y^2}\right)dx$.

62. $(x+2y)dx + ydy = 0$.

63. $\left(xy+y^2\right)y'=y^2.$

64. $(2x+y)y'=x+2y.$

65. $\left(x^3+y^3\right)y'=x^2y.$

66. $(x+2y)y'+y=0.$

67. $(y-x)y'=x+y.$

68. $x^2y'=2y^2-xy.$

69. $x^2y'=y^2+2xy.$

70. $2xyy'+x^2-y^2=0.$

71. $(3xdy-ydx)\left(x^2+y^2\right)+x^2ydy-xy^2dx=0.$

72. $(x+y+1)dx+(x-y+3)dy=0.$

73. $(2x-y-2)dx+(x+y-4)dy=0.$

74. $(x+2y-5)dx+(y-x-4)dy=0.$

75. $(x-1)y'+3x+2y+3=0.$

76. $(x+y-2)y'+x-y=0.$

77. $(2x+y-3)y'+y+1=0.$

78. $(x+2y)y'+2x+5y-1=0.$

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданному начальному условию (79—83):

79. $y'=\dfrac{2x+y}{x-2y},\ y(1)=0.$

80. $y'=\dfrac{y-2x}{x+2y},\ y(1)=0.$

81. $\left(y^2-3x^2\right)y'+xy=0,\ y(1)=\sqrt{6}.$

82. $xyy'=(x-2y)^2,\ y(1)=2.$

83. $(x-y)^2y'=4xy,\ y(-1)=2.$

Решить уравнения, приведя их с помощью замены вида $y=z^m$ к однородным уравнениям (84—87):

84. $\left(4x^2+y^4\right)dy-2xydx=0.$

85. $\left(3x^2y^2+1\right)y'+3xy^3=0.$

86. $y'=4x^2-\dfrac{y^2}{x^4}.$

87. $y'=x+\dfrac{x^3}{y}.$

88. Найти интегральные кривые уравнения

$$xy'=2\left(y+\sqrt{y^2-x^4}\right),$$

проходящие через а) точку $(2,5)$, б) точку $(1,1)$.

89. Найти ортогональные траектории семейства окружностей, проходящих через начало координат, центры которых лежат на оси абсцисс.

90. Составить дифференциальное уравнение траекторий, пересекающих под углом $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ параболы с общей вершиной и общей осью.

91. а) Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства кривых

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 xy.$$

б) Найти ортогональные траектории семейства кривых

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 xy.$$

Указание. Перейти к полярным координатам.

92. Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей, имеющих центр на прямой $y = x$ и проходящих через начало координат.

Ответы к задачам § 2

1. $y\left(1 + Ce^x\right) = 1$, $y = 0$.

2. $y = C\left(x^2 + x\right)$.

3. $x \sin y = C(1 - \sin y)$.

4. $y = \dfrac{C \cos x}{1 - C \cos x}$, $y = -1$.

5. $\left(x^2 - 1\right) y = C$.

6. $y^2 = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} + C$, $x = 0$.

7. $(y - 1)e^y = C \cos x$.

8. $x\left(y^2 + 1\right) = Cy$, $y = 0$.

9. $y^2 = C\left(x^2 - 1\right)^2 e^{x^2}$, $x = 0$.

10. $x(y - 1) = C$, $y = -1$.

11. $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = C - 3x$, $y = 0$.

12. $y^2 + \dfrac{1}{1 - x^2} = C$.

13. $(x + 1)y = C(y + 1)$, $y = -1$.

14. $x^2 = Cy^2\left(1 + y^2\right)$, $y = 0$.

15. $\operatorname{tg} y = -\dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{8} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + C$, $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

16. $\ln|\cos y| - \operatorname{ctg} x - x = C$, $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

17. $\left(1 + y^2\right)(1 + \cos x)^2 = C$.

18. $e^{-x^2} + 2(x + 1)e^{-x} = C$.

19. $4\sqrt{x} + \ln^2 x + 2 \operatorname{arctg} y + \ln\left(1 + y^2\right) = C$.

20. $\dfrac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)^2+\ln|y+1|+\dfrac{1}{1+y}=C$, $y=-1$.

21. $\operatorname{arctg} x-\sqrt{(1-2x)^3}=C$.

22. $\dfrac{1}{2}\arcsin x^2+y-\ln(1+e^y)=C$.

23. $2\sqrt{1+e^y}-\dfrac{1}{\sin x}=C$.

24. $y+2x+4=Ce^{x-2y}$.

25. $(x+2y)^2-3x+4y=C$.

26. $2y-x+2=Ce^{x+2y}$.

27. $2y-6x+1=Ce^{2y-2x}$.

28. $\ln x^2+3\ln y+\operatorname{arctg} y=\dfrac{\pi}{4}$.

29. $\ln\left(x^4y^2\right)+\dfrac{1}{y}+1=0$.

30. $\ln\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=1$.

31. $2x^2+(x+1)y^3=0$.

32. $y^2+4y+\cos 2x=6$.

33. $y=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

34. $y=\dfrac{xe^x}{x+1}$.

35. $y=\dfrac{\left(1+x^2\right)^2}{x}$.

36. $y=\dfrac{1}{1+e^{-3x}}$.

37. $y\sqrt[3]{2-\operatorname{ch}^3 x}=\operatorname{ch} x$.

38. $y(2e^{\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt}-1)=1$.

39. $y(1+e^{\int_0^x e^{t^2}dt})=2$.

40. $x^2=Ce^{y^2-2x}$.

41. $x^2+Cy^2=C$.

42. $xe^{y^2+\frac{1}{3}y^3}=C$.

43. $Ce^{\frac{1}{2}y^2+2y}=\cos x$.

44. $x=\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{3}y^3+C$.

45. $e^{2y-\frac{1}{2}y^2}\cdot\sin x=C$.

46. $e^y-y+x=C$.

47. $x^2+\ln\left(x^2\right)+4\left(y-e^{-y}\right)=C$.

48. $(y+2)^2e^{x-y}=C$.

49. $(y-1)e^{y+\frac{1}{2}x^2}=C$.

50. $(2x+y)^2-6x+2y=C$.

51. $x^2+y^2=2a^2\ln Cx$.

52. $x^2+y^2+2b^2\ln Cy=0$.

53. $f'\cdot r'+f\cdot r=0$, $r=Ce^{-\varphi}$.

54. $f\cdot r'+r=0$, $r=C\sin\varphi$.

57. $y=xe^{Cx}$.

58. $Cx=(y-x)^2e^{\frac{y}{x}}$.

59. $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$, $x=0$.

60. $y=Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$.

61. $y+\sqrt{x^2+y^2}=C$, $x=0$.

62. $x+y=Ce^{-\frac{x}{x+y}}$.

63. $x=Cy+y\ln|y|$, $y=0$.

64. $(y-x)^3=C(y+x)$, $y=-x$.

65. $y=Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$.

66. $y^2+xy=C$.

67. $x^2+2xy-y^2=C$.

68. $x-y=Cx^2y$, $y=0$.

69. $x^2+xy=Cy$, $y=0$.

70. $x^2+y^2=Cx$.

71. $\ln\left|\dfrac{y^3}{x}\right|+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=C$, $x=0$, $y=0$.

72. $x^2+2xy-y^2+2x+6y=C$.

73. $y^2+2x^2-4y-8x+12=Ce^{\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{y-2}{(x-2)\sqrt{2}}}$.

74. $x^2+y^2+xy-x-5y+7=Ce^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2y+1}{(x+1)\sqrt{3}}}$.

75. $x+y+2=C(x-1)e^{\frac{3}{x-1}}$, $x=1$.

76. $x^2+y^2-2x-2y+2=Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-1}}$.

77. $(y+1)(x-2)^3=C(3x+y-5)$.

78. $x^2+2y^2+3xy+2y=C\dfrac{x+2y}{x+y+1}$.

79. $x^2+y^2=e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

80. $\left(x^2+y^2\right)e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}=1$.

81. $y^3=3\sqrt{6}\cdot\sqrt{y^2-2x^2}$.

82. $3y-x=5(y-x)\cdot e^{\frac{2-2x}{2}}$.

83. $2(y+x)^3(y-3x)=5y$.

84. $y^2=Ce^{\frac{2x^2}{y^4}}$.

85. $y^2e^{3x^2y^2}=C$.

86. $x^5\left(y-x^3\right)=C\left(y+4x^3\right)$.

87. $\left(y-x^2\right)^2\left(2y+x^2\right)=C$.

88. а) $y=\dfrac{x^4}{4}+1$, б) $y=x^2$, $y=\dfrac{x^4+1}{2}$.

89. $y=C\left(x^2+y^2\right)$.

90. $(x-2y)y'=x+2y$.

91. а) $x\left(3y^2-x^2\right)dx=y\left(3x^2-y^2\right)dy$, б) $y^2-x^2=C\left(x^2+y^2\right)^2$.

92. $y'=\dfrac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}$.

§ 3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли и уравнения Риккати

Для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения $y' + a(x)y = f(x)$ необходимо сначала найти общее решение соответствующего линейного однородного уравнения, а затем применить метод вариации постоянной.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$xy' = y - 2x^2.$$

Δ Найдем общее решение линейного однородного уравнения $xy' = y$. Для этого, положив $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и разделив переменные, получаем уравнение

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

При делении переменных потеряно решение $y = 0$. Отсюда находим общее решение однородного уравнения $y = Cx$, где C — произвольная постоянная.

Для получения общего решения заданного уравнения применим метод вариации постоянной, т. е. ищем решение заданного уравнения в виде $y = C(x) \cdot x$, где $C(x)$ — неизвестная пока непрерывно дифференцируемая функция. Для определения функции $C(x)$ подставим $y = C(x) \cdot x$ в исходное уравнение. Имеем

$$x[C'(x) \cdot x + C(x)] = C(x) \cdot x - 2x^2,$$

$$C'(x) = -2,$$

$$C(x) = -2x + A,$$

где A — произвольная постоянная. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = Ax - 2x^2. \qquad \blacktriangle$$

Уравнение Бернулли $y' + a(x)y = b(x)y^m$ заменой $z = y^{1-m}$ приводится к линейному уравнению.

Пример 2. Решить уравнение $xy' + 4y = 3xy^2$.

Δ Очевидно, что $y = 0$ — решение. При $y \neq 0$, разделив уравнение на y^2 и положив $z = \frac{1}{y}$, получаем линейное уравнение $xz' - 4z + 3x = 0$. Решив это уравнение методом вариации постоянной, находим $z = Cx^4 + x$, где C — произвольная постоянная. Следовательно, $y = 0$ и $\frac{1}{y} = Cx^4 + x$ — все множество решений заданного уравнения. $\blacktriangle$

Если известно какое-нибудь решение $y_0(x)$ уравнения Риккати $y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$, то заменой $y = z + y_0(x)$ оно сводится к уравнению Бернулли.

Пример 3. Решить уравнение $x^2y' + 2x^2y^2 - 5xy + 4 = 0$.

Δ Проверкой можно убедиться, что $y_0(x) = \frac{1}{x}$ является решением заданного уравнения. После замены $y = z + \frac{1}{x}$ получаем уравнение Бернулли $z' = \frac{z}{x} - 2z^2$. Замена $u = \frac{1}{z}$ при $z \neq 0$ дает линейное уравнение $u' + \frac{u}{x} = 2$.

Метод вариации постоянной для этого уравнения дает решение $u = \frac{C}{x} + x$, где C — произвольная постоянная. Отсюда получаем решение заданного уравнения

$$y = \frac{x}{C + x^2} + \frac{1}{x}. \qquad \blacktriangle$$

Найти общее решение уравнений (1—31):

1. $y' + y = 2e^x$.

2. $xy' = y - 2x^2$.

3. $y^2dx + (xy - 1)dy = 0$.

4. $2ydx + \left(\frac{3}{y} - x\right) dy = 0$.

5. $x\left(4 - x^2\right) y' = 2x^2y + 1$.

6. $xy' = x^2 + y$.

7. $y' = \frac{y}{x} - x$.

8. $(x + y)dx = xdy$.

9. $2x^3y' = 2x^2y - 3$.

10. $ydx - \left(x + y^2\right) dy = 0$.

11. $ydx = \left(3x - y^2\right) dy$.

12. $y' = y + 2xe^x$.

13. $\left(x + y^2 \cos y\right) dy = ydx$.

14. $xy' = x^2 + y - \frac{1}{x}$.

15. $y' = \frac{y}{x} - 2x^2$.

16. $x^4dy = \left(2 - x^3y\right) dx$.

17. $ydx = (2y - x)dy$.

18. $dx = (2x + e^y)\,dy$.

19. $x^3y' + 2x^2y = 2\ln x$.

20. $(\sin x - 1)y' + y\cos x = \sin x$.

21. $y' + 2xy = 2\left(1 + 2x^2\right)$.

22. $xy' - 2y = 2x^4$.

23. $x^4y' + 2x^3y = 1$.

24. $x^2y' + 2xy = 1$.

25. $xy' - 3y = 4x^2$.

26. $x^3y' + x^2y = x^2 - 1$.

27. $4y' + 12x^2y = 3x^2$.

28. $xy' + \left(1 + x^2\right)y + x = 0$.

29. $x\left(y - \sqrt{1 + x^2}\right)dx + \left(1 + x^2\right)dy = 0$.

30. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = e^x\cos x$.

31. $\left(1 + y^2\right)dx + \left(xy - y^3\right)dy = 0$.

Уравнения (32—35) искусственным приемом решаются короче, чем методом вариации постоянной.

32. $xy' - y = x^2$.

33. $\left(y + x^3\cos x\right)dx - xdy = 0$.

34. $x^2y' + xy + 1 = 0$.

35. $\left(1 + y^2\right)dx + (2xy - 1)dy = 0$.

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданному начальному условию (36—45):

36. $xy' + 2y = 3x$, $y(-1) = 1$.

37. $x^2y' = 5xy + 6$, $y(1) = 1$.

38. $xy' = 7y + x^4$, $y(1) = -\dfrac{1}{3}$.

39. $xy' = 5y + 3x^2$, $y(-1) = -1$.

40. $\left(1 + x^2\right)y' = 2xy - 2x$, $y(0) = 2$.

41. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \sin x$, $y(0) = 0$.

42. $\left(x^2 + x\right)y' - \left(x^2 + x + 1\right)y + x^3 = 0$, $y(1) = 1$.

43. $xy' = 3y + 2x^5$, $y(-1) = 1$.

44. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 1$.

45. $x^2y' + y = 4$, $y(-1) = 5$.

46. Найти ортогональные траектории семейства кривых $y + x = Ce^{-x} + 1$.

Решить уравнения (47—72):

47. $4xy' + (4x + 1)y^2 - 4y = 0$.

48. $2xy' + 2y = x^2y^2$.

49. $y' = xy^2 + \dfrac{y}{x}$.

50. $2xy' = 3y - 4xy^3$.

51. $xy' - y + 2xy^2 \ln x = 0.$

52. $2xy' + 2xy^3 = y.$

53. $2x^2y' + xy = 2y^3.$

54. $xy' + 4y = 3xy^2.$

55. $y' - \dfrac{y}{x} = y^2.$

56. $xy' = 2y - 4x^2y^2.$

57. $y' - y + 2xy^3 = 0.$

58. $xy' + 3xy^2 = 2y.$

59. $xy' - y + 4y^3 = 0.$

60. $y' + y \operatorname{tg} x + 4y^2 \sin x = 0.$

61. $xy' + 3y = 4x^2y^2.$

62. $xy' + 2xy^2 = 3y.$

63. $y(y+1)dx + (x+1)dy = 0.$

64. $y' \cos x + y \sin x + 3y^2 \cos x = 0.$

65. $5xy^4y' = y^5 + 4.$

66. $y\left(4xy^2 - 3\right)dx + 2xdy = 0.$

67. $8y' + 3x^2y\left(y^2 - 4\right) = 0.$

68. $ydx + \left(2x^2y - 3x\right)dy = 0.$

69. $3x^2dx - \left(x^3 + y + 1\right)dy = 0.$

70. $y^3dx + \left(x^3 \ln y - xy^2\right)dy = 0.$

71. $ydx + \left(4x^3 - x\right)dy = 0.$

72. $\left(y^2 - 1\right)dx - y\left[x + \left(y^2 - 1\right)\sqrt{x}\right]dy = 0.$

73. Найти решение уравнения $4xyy' - 3y^2 + x^2 = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

74. Найти интегральную кривую уравнения $ydx - 4\left(x + y^2\sqrt{x}\right)dy = 0$, проходящую через точку $(0, 1)$.

75. Найти интегральную кривую уравнения $dx - xy\left(1 + xy^2\right)dy = 0$, пересекающую биссектрисы обоих координатных углов при $x = 1$.

Уравнения задач (76—81) искусственным приемом решаются короче, чем методом сведения к линейному уравнению.

76. $xy' - y + xy^2 = 0.$

77. $x^3y' - x^2y - y^3 = 0.$

78. $ydx - x\left(xy^2 + 1\right)dy = 0.$

79. $4xy' + 4xy^2 = 4y - y^2.$

80. Найти решение уравнения $\sin^2 x(y' \sin x - y \cos x) = y^2 \cos x$, удовлетворяющее условию $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

81. Найти решение уравнения $\cos^2 x(y' \cos x + y \sin x) + y^2 \sin x = 0$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

С помощью подбора какого-либо решения найти общее решение уравнений (82—95):

82. $2x^2y' + x^2y^2 + 4 = 2xy$.

83. $x^2y' + x^2y^2 + 2xy = 2$.

84. $4y' = y^2 + \dfrac{4}{x^2}$.

85. $xy' = y^2 + 2(x+1)y + x^2 + x$.

86. $x^2y' = x^2y^2 + 3xy + 3$.

87. $x^2y' = y^2 + 2xy - 2x^2$.

88. $y' = y^2 - 2xy + x^2$.

89. $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3$.

90. $y' + e^{-x}y^2 + y = 3e^x$.

91. $y' - e^xy^2 + 3y = e^{-x}$.

92. $y' = y^2 - 2y\sin x + \cos x + \sin^2 x$.

93. $y' + y^2 - 2y\cos x + \sin x + \cos^2 x = 0$.

94. $x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 8 = 0$.

95. $\left(3x^2 + 2y\right)(1+y)dx + \left(2x - x^3\right)dy = 0$.

96. Доказать, что уравнение $y' = ky + f(x)$, где $k = \mathrm{const} \neq 0$, $f(x)$ — непрерывная и периодическая функция, имеет только одно периодическое решение. Найти его.

97. Доказать, что у уравнения $xy' + ay = f(x)$, $x > 0$, где $a = \mathrm{const} \neq 0$, $f(x)$ — непрерывная ограниченная функция, существует только одно решение, ограниченное при $x > 0$.

98. Доказать, что у уравнения $xy' + \alpha y = f(x)$, $0 < x < a$, где $\alpha = \mathrm{const} > 0$, $a > 0$, $f(x)$ — непрерывная функция при $0 < x \leqslant a$ и $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \beta$, существует только одно решение, ограниченное при $0 < x < a$ и имеющее предел при $x \to +0$. Найти этот предел.

99. Доказать, что у уравнения $y' = a(x)y + b(x)$, $0 < x < +\infty$, где $a(x)$, $b(x)$ — непрерывные при $0 \leqslant x < +\infty$ функции, $b(x)$ — ограничена, $a(x) \geqslant a_0 = \mathrm{const} > 0$, существует только одно решение, ограниченное при $0 < x < +\infty$.

100. Пусть $a(x)$, $b(x)$ — непрерывные при $0 \leqslant x < +\infty$ функции, имеющие конечные $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = A > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = B$. Доказать, что существует единственное решение $y_0(x)$ уравнения $y' = a(x)y + b(x)$, $0 < x < +\infty$, имеющее конечный предел при $x \to +\infty$.

Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} y_0(x)$.

Указание. Рассмотреть ограниченное решение и доказать, что оно имеет конечный предел при $x \to +\infty$. Можно воспользоваться правилом Лопиталя.

101. Пусть $a(x)$, $b(x)$ — непрерывные при $0 \leqslant x < +\infty$ функции, причем существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = A > 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} xb(x) = 1$. Пусть $y_0(x)$ — решение уравнения $y' = a(x)y + b(x)$, $0 < x < +\infty$, имеющее конечный предел при $x \to +\infty$. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} y_0(x)$.

Ответы к задачам § 3

1. $y = Ce^{-x} + e^x$.

2. $y = Cx - 2x^2$.

3. $xy = C + \ln|y|$, $y = 0$.

4. $x = C\sqrt{y} + \dfrac{1}{y}$.

5. $y = \dfrac{C + \ln|x|}{4 - x^2}$.

6. $y = Cx + x^2$.

7. $y = Cx - x^2$.

8. $y = Cx + x\ln|x|$, $x = 0$.

9. $y = Cx + \dfrac{1}{2x^2}$.

10. $x = Cy + y^2$, $y = 0$.

11. $x = Cy^3 + y^2$, $y = 0$.

12. $y = \left(C + x^2\right)e^x$.

13. $x = y(C + \sin y)$, $y = 0$.

14. $y = Cx + x^2 + \dfrac{1}{2x}$.

15. $y = Cx - x^3$.

16. $y = \dfrac{C}{x} - \dfrac{1}{x^3}$, $x = 0$.

17. $xy - y^2 = C$.

18. $x = Ce^{2y} - e^y$.

19. $y = \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{\ln^2 x}{x^2}$.

20. $y = \dfrac{C - \cos x}{\sin x - 1}$.

21. $y = Ce^{x^2} + 2x$.

22. $y = \dfrac{C}{x^2} + x^4$.

23. $y = \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{x}{3}$.

24. $y = \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{1}{x}$.

25. $y = Cx^3 - 4x^2$.

26. $y = \dfrac{C}{x} + 1 + \dfrac{1}{x^2}$.

27. $y = Ce^{-x^3} + \frac{1}{4}$.

28. $y = \frac{C}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x}$.

29. $y = \frac{C + x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$.

30. $y = (C + e^x)\cos x$.

31. $\left(3x - y^2 + 2\right)\sqrt{1+y^2} = C$.

32. $y = Cx + x^2$.

33. $y = Cx + x^2\sin x + x\cos x$, $x = 0$.

34. $xy + \ln|x| = C$.

35. $x\left(1 + y^2\right) = y + C$.

36. $y = x + \frac{2}{x^2}$.

37. $y = 2x^5 - \frac{1}{x}$.

38. $y = -\frac{1}{3}x^4$.

39. $y = -x^2$.

40. $y = x^2 + 2$.

41. $y = \frac{1 - \cos 2x}{\cos x}$.

42. $y = x$.

43. $y = -2x^3 + x^5$.

44. $y = x^4$.

45. $y = e^{-\frac{x+1}{x}} + 4$.

46. $(x + y + 1)e^{-y} = C$.

47. $\frac{1}{y} = \frac{C}{x} + \frac{2x+1}{4}$.

48. $\frac{1}{y} = Cx - \frac{1}{2}x^2$.

49. $\frac{1}{y} = \frac{C}{x} - \frac{1}{3}x^2$.

50. $\frac{1}{y^2} = \frac{C}{x^3} + x$.

51. $\frac{1}{y} = \frac{C}{x} + x\ln x - \frac{1}{2}x$.

52. $\frac{1}{y^2} = \frac{C}{x} + x$.

53. $\frac{1}{y^2} = Cx + \frac{1}{x}$.

54. $\frac{1}{y} = Cx^4 + x$.

55. $\frac{1}{y} = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$.

56. $\frac{1}{y} = \frac{C}{x^2} + x^2$.

57. $\frac{1}{y^2} = Ce^{-2x} + 2x - 1$.

58. $\frac{1}{y} = \frac{C}{x^2} + x$.

59. $\frac{1}{y^2} = \frac{C}{x^2} + 4$.

60. $\frac{1}{y} = \frac{C}{\cos x} - 2\cos x$.

61. $\frac{1}{y} = Cx^3 + 4x^2$.

62. $\frac{1}{y} = \frac{C}{x^3} + \frac{x}{2}$.

63. $(x + 1 - C)y = C$.

64. $(3\sin x + C)y = \cos x$, $y = 0$.

65. $y^5 + 4 = Cx.$

66. $y^2\left(x^4 + C\right) = x^3$, $y = 0$.

67. $y^2\left(e^{-x^3} + C\right) = 4C.$

68. $x\left(y^4 + 1\right) = 2Cy^3$, $y = 0$.

69. $x^3 + y + 2 = Ce^y.$

70. $y^2 = x^2\left(\ln^2 y + C\right)$, $x = 0$.

71. $x^2\left(4y^2 + C\right) = y^2$, $x = 0$.

72. $3\sqrt{x} = y^2 - 1 + C\left|y^2 - 1\right|^{\frac{1}{4}}$, $x = 0$, $y = \pm 1$.

73. $y = \sqrt{2x^{\frac{3}{2}} - x^2}.$

74. $x = 4y^4 \ln^2 y.$

75. $x\left(2 - y^2\right) = 1.$

76. $y\left(Cx^2 + 1\right) = 2Cx.$

77. $x^2 e^{\frac{x^2}{y^2}} = C$, $y = 0$.

78. $x\left(Cy^3 + 1\right) = 3Cy$, $y = 0$.

79. $y\left(2x^2 + x + C\right) = 4x$, $y = 0$.

80. $y = \sin^2 x.$

81. $y = \cos^2 x.$

82. $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{Cx + x\ln|x|}.$

83. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{16}{Ce^{4x} - 4x - 1}.$

84. $y = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x(C - \ln|x|)}.$

85. $y = -x + \dfrac{2Cx^2}{1 - Cx^2}.$

86. $y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{C - x^2}.$

87. $y = x + \dfrac{3x^4}{C - x^3}.$

88. $y = x + 1 + \dfrac{2Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}.$

89. $y = x - 2 + \dfrac{4}{1 + Ce^{4x}}.$

90. $y = e^x + \dfrac{4}{Ce^{3x} - e^{-x}}.$

91. $y = e^{-x} + \dfrac{e^{-x}}{C - x}.$

92. $y = \sin x + \dfrac{1}{C - x}.$

93. $y = \cos x + \dfrac{1}{C - x}.$

94. $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2x}{x^2 + C}.$

95. $C(1 + y) = \left(2y + x^2\right)x.$

96. $y = \displaystyle\int_{+\infty}^{x} e^{k(x-t)} f(t)\,dt$, $k > 0$; $y = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{k(x-t)} f(t)\,dt$, $k < 0$.

98. $\dfrac{\beta}{\alpha}.$

100. $-\dfrac{B}{A}.$

101. $0.$

§ 4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Замена переменных

Дифференциальное уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, заданное в области D, называется уравнением в полных дифференциалах, если найдется такая непрерывно дифференцируемая в D функция $u(x,y)$, что $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Для такого уравнения решения задаются формулой $u(x,y) = C$, где C — произвольная постоянная. Функция $u(x,y)$ находится из системы уравнений $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.

Если D — односвязная область и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ — непрерывны в D, то достаточным условием того, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, служит равенство $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Пример 1. Решить уравнение

$$\left(3x^2 + y - 1\right) dx + \left(x + 3y^2 - 1\right) dy = 0.$$

Δ Заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, поскольку оно задано на всей плоскости (x,y) и $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Функцию $u(x,y)$ находим из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y - 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 3y^2 - 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $u(x,y) = x^3 + x(y-1) + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция y. Подставляя выражение для $u(x,y)$ во второе уравнение системы, получаем уравнение $\varphi'(y) = 3y^2 - 1$. Отсюда находим $\varphi(y)$, а, значит, и функцию $u(x,y)$. В данном примере можно взять $u(x,y) = x^3 + y^3 + xy - x - y$. Следовательно, решения заданного уравнения задаются формулой

$$x^3 + xy + y^3 - x - y = C. \qquad \blacktriangle$$

Если уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, то можно пытаться найти его интегрирующий множитель. Общего метода отыскания интегрирующего множителя не существует. В некоторых случаях удается решить уравнение, применяя метод выделения полных дифференциалов некоторых выражений и замену переменных.

Пример 2. Решить уравнение $\left(y-4xy^3\right)dx=\left(2x^2y^2+x\right)dy$.
Δ Заметим сначала, что $y=0$ — решение уравнения. Пусть $y\neq 0$. Уравнение запишем в следующем виде

$$ydx-xdy=2y^2\left(x^2dy+2xydx\right).$$

Если разделить уравнение на y^2, то уравнение примет вид

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=2d\left(x^2y\right).$$

Получили уравнение в полных дифференциалах, из которого находим, что $x=2x^2y^2+Cy$, где C — произвольная постоянная. Отметим, что интегрирующим множителем заданного уравнения служит функция $\frac{1}{y^2}$.

Таким образом, все множество решений заданного уравнения описывается формулами $x=2x^2y^2+Cy$, $y=0$. ▲

Решить уравнения (1—18):

1. $\left(1-3x^2-y\right)dx=\left(x-3y^2\right)dy$.

2. $\left(y^2-2x^3\right)dx+2xydy=0$.

3. $\left[(x-y)^2-x\right]dx+\left[y-(x-y)^2\right]dy=0$.

4. $(y-\sin x)dx+(x+e^y)\,dy=0$.

5. $(y-x)dx+\left(x+2e^{2y}\right)dy=0$.

6. $(x+y)dy=\left(2e^{2x}-y\right)dx$.

7. $(y+\sin x)dx+(x+\cos y)dy=0$.

8. $\left(2x+y^3\right)dx+3xy^2dy=0$.

9. $\left(y^2-2x\right)dx+(2xy-\sin y)dy=0$.

10. $\left(y-3x^2+1\right)dx+(x+\ln y)dy=0$.

11. $\left(y^2+\ln x\right)dx+(2xy-\ln y)dy=0$.

12. $(e^x+y)\,dx+\left(x+2y\cos y^2\right)dy=0$.

13. $(1+3x^2\ln y)\,dx+\left(3y^2+\dfrac{x^3}{y}\right)dy=0.$

14. $\left(2x-\dfrac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx+\left(2y+\dfrac{\sin 2y}{x}\right)dy=0.$

15. $\left(\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{1}{y}\right)dx-\left(\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{x}+2y\right)dy=0.$

16. $e^{\frac{y}{x}}\left(1-\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(1+e^{\frac{y}{x}}\right)dy=0.$

17. $\dfrac{y}{x}dx+[1+\ln(xy)]dy=0,\ x>0,\ y>0.$

18. $\left(1+\dfrac{2x}{y^3}\right)dx+\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3x^2}{y^4}\right)dy=0.$

Найдя интегрирующий множитель или сделав подходящую замену переменных, решить уравнения (19—60):

19. $2xydx+\left(y^2-x^2\right)dy=0.$

20. $2xydx=\left(x^2-2y^3\right)dy.$

21. $(3\sqrt{x-y}-2x)\,dx=(3\sqrt{x-y}-2y)\,dy.$

22. $\left(y-3x^2y^3\right)dx-\left(x+x^3y^2\right)dy=0.$

23. $\left(2xy^2+y\right)dx-\left(x^2y+2x\right)dy=0.$

24. $ydx=\left(x-2y^3\right)dy.$

25. $x^3dy+2\left(y-x^2\right)ydx=0.$

26. $y^2dx=(2y-e^x)\,dy.$

27. $xdy=y\,(1-ye^x)\,dx.$

28. $y'=\dfrac{y}{x}+2x^2.$

29. $x^2dy=\left(xy+y^3\right)dx.$

30. $y^2dx=x(2y-x)dy.$

31. $x^2dy=\left(xy-2x^2y^2\right)dx.$

32. $xdy=y(2+3xy)dx.$

33. $\left(\frac{1}{x} - y\right) dx = \frac{1}{y} dy.$

34. $\left(2x^3y + x^2y^4\right) dx + \left(x^4 + x^3y^3\right) dy = 0.$

35. $\left(3x^2y + 7y^2\right) dx - \left(2x^3 + 5xy\right) dy = 0.$

36. $\left(2y - x^2y^2\right) dx = \left(x^3y - x\right) dy.$

37. $\left(4x^3y + 3y^2\right) dx - \left(2x^4 + xy\right) dy = 0.$

38. $(3xdy - ydx)\left(x^2 + y^2\right) + x^2ydy - xy^2dx = 0.$

39. $\left(3x^2 + 2y\right)(1 + y)dx + \left(2x - x^3\right) dy = 0.$

40. $\left(xy^3 + 2y\right) dx + \left(x - x^2y^2\right) dy = 0.$

41. $3xdy + ydx + xy^3(xdy + ydx) = 0.$

42. $xy^2dx + \left(x^2y - x\right) dy = 0.$

43. $x\left(x^2 + y^2\right) dy + y(ydx - xdy) = 0.$

44. $\left(xy^3 + y\right) dx + \left(2x + x^2y^2\right) dy = 0.$

45. $2x^4(xdx + ydy) + \left(x^2 + y^2\right)^2 (xdy - 3ydx) = 0.$

46. $y(2ydx - xdy) + x^2(ydx + 2xdy) = 0.$

47. $\left(y^2 - 3x^2\right) dy + xydx = 0.$

48. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx.$

49. $xdy - 2ydx + xy^2(2xdy + ydx) = 0.$

50. $x^2y^3dx + \left(x^3y^2 + x\right) dy = 0.$

51. $5xdy + ydx + xy^5(xdy - ydx) = 0.$

52. $xdy + ydx + xy^2(xdy - 5ydx) = 0,\ x > 0,\ y > 0.$

53. $2xdy + ydx + xy^3(xdy + 2ydx) = 0.$

54. $\left(y^2 + y\right) dx + \left(xy + 2x + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$

55. $\left[\left(3x^2 + 2\right) y + 3x\right] dx + \left(2x - x^3\right) dy = 0.$

56. $xy' - y = 2x^3e^{-\frac{y}{x}}.$

57. $2xy^3dx + x^2y^2dy = \left(1 - y^2\right) dy.$

58. $\left(2xy^2 - y\right) dx + \left(y^2 \ln y + x - y\right) dy = 0.$

59. $x^2yy' + x^3 = \left(x^2 + y^2\right)^2.$

60. $4x^2y^2dx + x^3(2y - 1)dy = 0.$

61. Найти интегральную кривую уравнения $\left(1 - x^2y\right) dx + x^2(y - x)dy = 0$, пересекающую прямую $x = \dfrac{1}{2}$ под прямым углом.

Ответы к задачам § 4

1. $y^3 - x^3 - xy + x = C.$

2. $y^2 = \dfrac{C}{x} + \dfrac{x^3}{2}$, $x = 0.$

3. $2(y - x)^3 = 3\left(y^2 - x^2\right) + C.$

4. $xy + \cos x + e^y = C.$

5. $x^2 + C = 2xy + 2e^{2y}.$

6. $y^2 + 2xy = 2e^{2x} + C.$

7. $xy - \cos x + \sin y = C.$

8. $y^3 = \dfrac{C}{x} - x$, $x = 0.$

9. $xy^2 - x^2 + \cos y = C.$

10. $x(y + 1) - x^3 + y(\ln y - 1) = C.$

11. $xy^2 + x(\ln x - 1) + y(1 - \ln y) = C.$

12. $e^x + xy + \sin y^2 = C.$

13. $x^3 \ln y + x + y^3 = C.$

14. $x^2 + y^2 + \dfrac{\sin^2 y}{x} = C.$

15. $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} - y^2 = C.$

16. $y + xe^{\frac{y}{x}} = C.$

17. $y \ln(xy) = C.$

18. $x + \dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} = C.$

19. $x^2 + y^2 = Cy$, $y = 0.$

20. $x^2 = Cy - y^3$, $y = 0.$

21. $x^2 - y^2 = 2(x - y)^{\frac{3}{2}} + C.$

22. $x - x^3y^2 = Cy$, $y = 0.$

23. $x + x^2y^2 = Cy^2$, $y = 0.$

24. $x = Cy - y^2$, $y = 0.$

25. $x^2 - 2y \ln |x| = Cy$, $x = 0$, $y = 0.$

26. $y^2e^{-x} = y + C.$

27. $x = ye^x + Cy$, $x = 0$, $y = 0.$

28. $y = Cx + x^3.$

29. $\dfrac{x^2}{y^2} + 2x = C$, $y = 0.$

30. $y^2 - xy = Cx$, $x = 0.$

31. $x - x^2y = Cy$, $y = 0$.

32. $x^3y + x^2 = Cy$, $y = 0$.

33. $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{y} = C$.

34. $x^7y^4\left(7x + 4y^3\right) = C$.

35. $\dfrac{x^9}{y^6} + \dfrac{3x^7}{y^5} = C$, $y = 0$.

36. $xye^{\frac{1}{x^2y}} = C$, $x = 0$, $y = 0$.

37. $x^2 = Cy \cdot e^{\frac{y}{2x^3}}$, $x = 0$, $y = 0$.

38. $\ln\left|\dfrac{y^3}{x}\right| + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$, $x = 0$, $y = 0$.

39. $\dfrac{x^3 + 2xy}{1 + y} = C$, $y = -1$.

40. $\dfrac{1}{x^2y} + \dfrac{y}{x} = C$, $x = 0$, $y = 0$.

41. $xy = Ce^{\frac{1}{xy^3}}$, $x = 0$, $y = 0$.

42. $xy - \ln|y| = C$, $x = 0$, $y = 0$.

43. $xe^y = C\sqrt{x^2 + y^2}$, $y = 0$.

44. $xy = Ce^{\frac{1}{xy^2}}$, $x = 0$, $y = 0$.

45. $\dfrac{1}{x^2 + y^2} = \dfrac{y}{x^3} + C$, $x = 0$.

46. $xy^2 = Ce^{\frac{y}{x^2}}$, $x = 0$.

47. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = Cy$, $y = 0$.

48. $xe^x = C\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

49. $ye^{xy^2} = Cx^2$, $x = 0$.

50. $y^2e^{x^2y^2} = C$, $x = 0$.

51. $y = Cxe^{\frac{1}{xy^5}}$, $x = 0$, $y = 0$.

52. $(xy)^{11} = C\left(11xy^2 - 1\right)^6$.

53. $x^5y^{10} = C\left(1 + 5xy^3\right)^3$.

54. $Cy(xy + 1) = y + 1$.

55. $(4xy + 3)C = \left(2 - x^2\right)^2$, $x = 0$.

56. $e^{\frac{y}{x}} = x^2 + C$.

57. $y = C\left(x^2 + 1\right)y^2 + C$.

58. $x^2 + y(\ln y - 1) - \ln y - \dfrac{x}{y} = C$.

59. $\left(x^2 + y^2\right)(Cx + 2) = x$.

60. $x^4y^2e^{\frac{1}{y}} = C$, $y = 0$.

61. $y = x + \sqrt{x^2 + 8 + \dfrac{2}{x}}$.

§ 5. Исследование задачи Коши

Важную роль в исследовании задачи Коши играет условие Липшица.

Говорят, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x в некоторой области G плоскости $R^2_{(x,y)}$, если найдется такое число $L > 0$, называемое постоянной Липшица, что для любых

$(x, y_1) \in G$ и $(x, y_2) \in G$ выполняется неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|.$$

Следующий пример дает удобные для практики достаточные условия на $f(x, y)$, обеспечивающие выполнение условия Липшица по y равномерно по x на компакте (ограниченной замкнутой области) плоскости $R^2_{(x,y)}$.

Пример 1. Доказать, что если функции $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в области G плоскости $R^2_{(x,y)}$, то $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x на каждом компакте $K \subset G$.

Δ Рассуждаем от противного. Пусть утверждение неверно. Тогда найдутся компакт $K_0 \subset G$ и последовательности $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$, $L_n > 0$, $\forall n \in N$, $\{(x_n, y'_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset K_0$, $\{(x_n, y''_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset K_0$ такие, что

$$|f(x_n, y'_n) - f(x_n, y''_n)| > L_n|y'_n - y''_n|.$$

Так как K_0 — компакт, то из последовательностей точек (x_n, y'_n) и (x_n, y''_n) можно выбрать сходящиеся подпоследовательности $(x_{n_k}, y'_{n_k}) \to$ $\to (x_0, y'_0) \in K_0$, $(x_{n_k}, y''_{n_k}) \to (x_0, y''_0) \in K_0$ при $k \to \infty$. Рассмотрим функцию

$$F(x, y', y'') = \frac{f(x, y') - f(x, y'')}{y' - y''}, \quad y' \neq y'',$$

в достаточно малой окрестности точки (x_0, y'_0, y''_0). Если $y'_0 \neq y''_0$, то из непрерывности $f(x, y)$ следует ограниченность функции $F(x, y', y'')$ в этой окрестности. Если же $y'_0 = y''_0 = y_0$, то из непрерывности $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ следует выполнение условия Липшица по y равномерно по x в окрестности точки (x_0, y_0), что означает ограниченность $F(x, y', y'')$ и в этом случае. Но ограниченность $F(x, y', y'')$ противоречит нашему предположению о компакте K_0 при достаточно больших n_k. Это доказывает утверждение примера 1. $\blacktriangle$

Пример 2. Выполнено ли условие Липшица по y равномерно по x для функции $f(x, y)$ в полукруге $x^2 + y^2 < R^2$, $y > 0$, $R > 0$, если:

а) $f(x, y) = x^2 \sin x + y^3$, б) $f(x, y) = x + |y|$, в) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$?

Δ В случае а) для любых двух точек (x, y_1) и (x, y_2) из полукруга имеем:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1^3 - y_2^3| = |y_1 - y_2| \cdot |y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{2}(y_1^2 + y_2^2)|y_1 - y_2| \leqslant 3R^2 |y_1 - y_2|.$$

Значит в случае а) условие Липшица выполнено. В случае б) условие Липшица тоже выполнено, так как

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \big||y_1| - |y_2|\big| \leqslant |y_1 - y_2|.$$

Покажем, что в случае в) условие Липшица не выполняется. Рассуждаем от противного. Пусть это условие выполнено в полукруге с некоторой постоянной Липшица $L > 0$. Тогда для точек $(0, 1)$ и $(0, y)$, где $0 < y < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и достаточно мало, имеем

$$|f(0,y) - f(0,1)| = |\sqrt{y} - 1| \leqslant L|y - 1|.$$

Отсюда $L(\sqrt{y} + 1) \geqslant 1$, что невозможно при достаточно малых $y > 0$. Противоречие. Условие Липшица не имеет места. $\blacktriangle$

Пример 3. Указать какой-либо отрезок, на котором существует решение задачи Коши, если:

а) $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0$, $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, б) $y' = x + \sin(x^2 + y)$, $y(0) = 0$, $|x| \leqslant 1$, в) $y' = |x| + \sin y^2 + \cos y^2$, $y(0) = 0$.

Δ Известно, что решение задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, где $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(x,y) : |x - x_0| \leqslant \alpha,\ |y - y_0| \leqslant \beta\}$, всегда существует на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где $\delta = \min\left(\alpha, \dfrac{\beta}{M}\right)$, $M = \max|f(x,y)|$ при $(x, y) \in \Pi$.

В случае а) имеем $\alpha = \beta = 1$, $M = 2$ и, значит, решение существует при $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

В случае б) имеем $\alpha = 1$, $\beta = \infty$, $M = 2$ и, значит, решение существует при $|x| \leqslant 1$.

В случае в) для всех $|x| \leqslant a$ при любом $a > 0$ имеем $\alpha = a$, $\beta = \infty$, $M = 2$. Следовательно, решение существует для $|x| \leqslant a$ при любом $a > 0$, т. е. для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. $\blacktriangle$

Пример 4. Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши: $y' + y = x + 1$, $y(0) = 0$.

Δ В нашем случае последовательные приближения задаются формулами

$$y_0(x) \equiv 0, \ y_k(x) = \int\limits_0^x [\xi + 1 - y_{k-1}(\xi)]\, d\xi, \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Методом математической индукции можно проверить, что $y_k(x) = x + (-1)^k \frac{x^k}{k!}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Отсюда следует, что при $|x| \leqslant a$ для любого $a > 0$ $y_k(x)$ при $k \to \infty$ равномерно стремится к x. Значит, $y = x$ является решением задачи Коши. ▲

Пример 5. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0, \ y_n(x) = 2\frac{1-x}{x} - \frac{1}{9}\int\limits_1^x y_{n-1}^2(t)dt, \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

сходится равномерно на $[1, 2]$ и не сходится равномерно на $[1,8]$.

Δ Заданная последовательность функций служит последовательными приближениями решения задачи Коши вида

$$y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{y^2}{9}, \quad y(1) = 0.$$

Рассмотрим сначала эту задачу в области $G = \{(x, y) : x \in [1, 2], \ |y| \leqslant b, \ b > 0\}$. В этой области G $\max\left|-\frac{2}{x^2} - \frac{y^2}{9}\right| = M \leqslant 2 + \frac{b^2}{9}$ и $\max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max\left|-\frac{2y}{9}\right| = N \leqslant \frac{2b}{9}$.

Из теоремы существования решения задачи Коши следует, что последовательные приближения сходятся равномерно на $[1, 1 + \delta]$, где число $\delta > 0$ одновременно удовлетворяет двум оценкам: $\delta < \dfrac{b}{M} = \dfrac{b}{2 + \frac{b^2}{9}}$, $\delta < \dfrac{1}{N} = \dfrac{9}{2b}$. Выбирая число b так, чтобы обе оценки совпали, получаем $b = 3\sqrt{2}$, $\delta < \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$. Ясно, что $\delta = 1$ удовлетворяет этому неравенству.

Решая на $[1,8]$ уравнение Риккати, получаем $y = \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x + Cx^{\frac{2}{3}}}$. Из начального условия $C = -2$. При $x \to 8$ получаем $y \to \infty$, что противоречит равномерной сходимости. ▲

При исследовании зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных используются уравнения в вариациях.

Пример 6. Найти $\dfrac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial y_0}$ от решения $y = \varphi(x,1,y_0)$ задачи Коши $y' = 2y + x^3y^2 - x^2y^3$, $y(1) = y_0$.

△ Очевидно, что решением заданного уравнения при начальном условии $y(1) = 0$ является $y = \varphi(x,1,0) \equiv 0$.

Известно, что искомая функция $u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ должна быть решением уравнения в вариациях по y_0

$$\frac{\partial u}{\partial x} = [2 + 2x^3y - 3x^2y^2]u,$$

где $y = \varphi(x,1,0) \equiv 0$, при начальном условии $u\,|_{x_0=1} = 1$.

Другими словами, для нахождения функции $u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ необходимо решить задачу Коши вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2u, \quad u(1) = 1.$$

Искомым решением является $u = e^{2(x-1)}$. ▲

Пример 7. Найти $\dfrac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial x_0}$ от решения $y = \varphi(x,x_0,1)$ задачи Коши $y' = y - 1 + 2xy^2(y^2 - 1)$, $y(x_0) = 1$.

△ Очевидно, что решением заданного уравнения при начальном условии $y(0) = 1$ является $y = \varphi(x,0,1) \equiv 1$.

Известно, что искомая функция $v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ должна быть решением уравнения в вариациях по x_0

$$\frac{\partial v}{\partial x} = [1 + 8xy^3 - 4xy]v,$$

где коэффициент при v берется при значении $y \equiv 1$ и при начальном условии $v\,|_{x=0} = -[y - 1 + 2xy^2(y^2 - 1)]\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 0$.

Следовательно, для нахождения функции v нужно решить задачу Коши вида

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (1+4x)v, \quad v(0) = 0.$$

Отсюда искомое решение $v \equiv 0$. ▲

1. Выполнено ли условие Липшица для функции $f(y)$, если:

а) $f(y) = y^2$, $|y| \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$,

б) $f(y) = |y|$, $|y| \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$,

в) $f(y) = \sqrt{|y|}$, $|y| \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$?

2. Доказать, что из выполнения условия Липшица для функции $f(y)$ на $[\alpha, \beta]$ следует непрерывность $f(y)$ на $[\alpha, \beta]$.

3. Выполнено ли условие Липшица по y равномерно по x для функции $f(x, y)$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $R > 0$, если

а) $f(x, y) = x^2 + y^2$,

б) $f(x, y) = x \cdot |y|$,

в) $f(x, y) = x\sqrt{|y|}$?

4. Доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна по x в области G и удовлетворяет в G условию Липшица по y равномерно по x, то $f(x, y)$ — непрерывна в G.

5. Показать, что не дифференцируемые по y при $y = 0$ функции $f_1(x, y) = |y|(1+\sin x)$ и $f_2(x, y) = |y|(1+\cos x)$ удовлетворяют условию Липшица по y равномерно по x на всей плоскости $R^2_{(x,y)}$.

6. Показать, что функция $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x в полосе $|x| \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$, если только $a(x)$ и $b(x)$ — непрерывные функции при $|x| \leqslant \alpha$.

7. Показать, что функция $f(x, y) = [1+a^2(x)]y^2$, где $a(x)$ — непрерывная функция при $|x| \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$, не удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x в полосе $|x| \leqslant \alpha$.

8. Доказать, что функция $f(x, y) = P(x) + Q(\sin y, \cos y)$, где $P(x)$ и $Q(u, v)$ — многочлены, удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x на всей плоскости $R^2_{(x,y)}$.

9. Доказать, что функция $f(x,y) = x \cdot y$ не удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x на всей плоскости $R^2_{(x,y)}$.

10. Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши, если:

а) $y' + y = x + 1,\ y(0) = 1$, б) $y' + y = 2e^x,\ y(0) = 1$,

в) $y' - y = 1 - x,\ y(0) = 1$, г) $y' - y = e^{2x},\ y(0) = 1$.

11. Методом последовательных приближений найти приближения $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ к решению задачи Коши, если:

а) $y' = y^2 - x,\ y(0) = 1$, б) $y' = y^2 + x^3,\ y(0) = 0$,

в) $y' = 2y^2 + x,\ y(0) = 1$, г) $y' = x^2 - 2y^2,\ y(0) = 0$.

12. Оценить погрешность, получаемую при замене решения $y(x)$ задачи Коши его последовательным приближением $y_3(x)$, если:

а) $y' = y^2 + 2x$, $y(0) = 0$, $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$,

б) $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0$, $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

13. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0,$$

$$y_n(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2} + \int\limits_0^x [2y_{n-1}(t)e^{-t} - y_{n-1}^2(t)]dt,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

сходится равномерно на $[0, 0.2]$ и не сходится равномерно на $[0, 1]$.

14. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0,$$

$$y_n(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2) + \int\limits_1^x \frac{1}{t}[(2t+1)y_{n-1}(t) - y_{n-1}^2(t)]dt,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

сходится равномерно на $[1, 1.1]$ и не сходится равномерно на $[1, 2]$.

15. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0,$$

$$y_n(x) = \cos x - 2 - \int\limits_0^x \sin t[y_{n-1}(t) - \cos t]^2 dt, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

сходится равномерно на $[0, 0.1]$ и не сходится равномерно на $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

16. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0,$$

$$y_n(x) = x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t) y_{n-1}(t)dt, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

17. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0,$$

$$y_n(x) = 5\cos x - 4 + 2\int\limits_0^x (1 - e^{t-x}) y_{n-1}(t)dt, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

18. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0,$$

$$y_n(x) = 4 + 5\int\limits_0^x \sin(x-t) y_{n-1}(t)dt, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

19. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0,$$

$$y_n(x) = 5(\cos x + \sin x) + \int\limits_0^x [1 + 2(x-t)] y_{n-1}(t)dt, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

20. Используя какое-либо достаточное условие единственности решения задачи Коши, указать области, через каждую точку которых проходит единственная интегральная кривая уравнения:

а) $y' = y^2 + x^4$, б) $y' = x + \sqrt[3]{y - x}$, в) $y' = y^3 + \sqrt{x + y}$,

г) $(x + y)y' = x \ln y$, д) $xy' = e^x + \operatorname{ctg} y$, е) $y' = y + \sqrt{y - x^2}$,

ж) $y' = (y + 1)(y - 1)^{\frac{2}{3}}$.

21. Найти значения вещественных параметров α, β и линии на плоскости, в каждой точке которых нарушается единственность решения уравнения:

а) $y' = y^\alpha(1 - y)^\beta$, б) $y' = y^\alpha \ln^\beta \dfrac{1}{y}$, в) $y' \ln y = y^\alpha(1 - y)^\beta$.

22. При каких начальных данных x_0, y_0, y_1 задача Коши $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ имеет единственное решение, если:

а) $f(x, y, y') = \dfrac{1}{x}(y' + \sqrt{y - 1})$, б) $f(x, y, y') = \dfrac{1}{yy'} \ln(xy - 1)$,

в) $f(x, y, y') = \dfrac{1}{y'} \sqrt[3]{y - x}$, г) $f(x, y, y') = \dfrac{1}{y}(\cos y' + x^2 \ln y')$,

д) $f(x, y, y') = \dfrac{1}{y}(x - \sqrt[3]{y' - y})$, е) $f(x, y, y') = x^3 e^y + \sin(y' - x^2)^{\frac{2}{3}}$.

23. Показать, что уравнение $y'' = 3(y')^{\frac{2}{3}}$ при начальных условиях $y(0) = y'(0) = 0$ имеет два решения. Почему это не противоречит теореме существования и единственности решения задачи Коши?

24. Показать, что уравнение $y'' = 2\sqrt{|y'|}$ при начальных условиях $y(0) = y'(0) = 0$ имеет два решения. Почему это не противоречит теореме существования и единственности решения задачи Коши?

25. Могут ли две интегральные кривые уравнения пересекаться в некоторой точке (x_0, y_0):

а) для уравнения $y' = x^2 + y^3$? б) для уравнения $y'' = x^2 + y^3$?

26. Могут ли две интегральные кривые уравнения касаться друг друга в некоторой точке (x_0, y_0):

а) для уравнения $y' = x^2 + y^3$? б) для уравнения $y'' = x^2 + y^3$?

в) для уравнения $y''' = x^2 + y^3$?

27. Сколько существует решений уравнения $y^{(n)} = x^2 + y^2$ при $n = 1, 2, 3$, удовлетворяющих одновременно двум условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$?

28. При каких $n \in N$ уравнение $y^{(n)} = f(x,y)$, где $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ — непрерывны на всей плоскости $R^2_{(x,y)}$, могут иметь среди своих решений две функции:

а) $y_1 = x$, $y_2 = x + x^2$? б) $y_1 = 1 - \cos x$, $y_2 = \dfrac{1}{2}x^2$?

29. Найти производную по параметру λ при $\lambda = 0$ от решения $y = \varphi(x,\lambda)$ задачи Коши:

а) $y' = y + \lambda(x^2 + y^2)$, $y(0) = 0$, б) $y' = -y + \lambda(x + y^2)$, $y(0) = 0$,

в) $y' = 2y + \lambda(y^2 - x^2)$, $y(0) = 0$, г) $y' = -3y + \lambda(y^2 - x)$, $y(0) = 0$,

д) $y' = y - y^2 + \lambda(x + y^3)$, $y(0) = 0$, е) $y' = y^2 - y + \lambda(y^4 - x)$, $y(0) = 0$,

ж) $y' = 2xy + \lambda(y^4 + 2x)$, $y(0) = 0$, з) $y' = -2xy + \lambda(y^3 - 2x)$, $y(0) = 0$.

30. Найти $\dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$ при $y_0 = 0$ от решения $y = \varphi(x,x_0,y_0)$ задачи Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, если:

а) $y' = 2y + x^2y^2 - y^3$, $y(0) = y_0$, б) $y' = y + 2xy^2 + y^3$, $y(0) = y_0$,

в) $y' = -2y + 2x^2y^2 + y^3$, $y(0) = y_0$, г) $y' = -y - y^2 - x^2y^3$, $y(0) = y_0$.

31. Показать, что $\dfrac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial x_0} = 0$ для решения $y = \varphi(x,x_0,0)$ задачи Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = 0$, если:

а) $y' = y + x(y^3 + y^2)$, $y(0) = 0$, б) $y' = -y + 2x(y^3 - y^2)$, $y(0) = 0$,

в) $y' = 2y - x(y^2 + y^4)$, $y(0) = 0$, г) $y' = -2y - x^2y(y^2 + 2y)$, $y(0) = 0$.

32. Найти с точностью до $O(x,\lambda^2)$ решение задачи Коши:

а) $y' = 2xy + \lambda(2x + y^2)$, $y(0) = 0$, б) $y' = -2xy + \lambda(y^2 - 2x)$, $y(0) = 0$,

в) $y' = y^2 + y + \lambda(1 + x)$, $y(0) = 0$, г) $y' = y^2 - y + \lambda x$, $y(0) = 0$,

д) $y' = -y^2 + y + \lambda x$, $y(0) = 0$, е) $y' = -y^2 - y + \lambda x$, $y(0) = 0$.

33. Пусть $y = \varphi(x,\lambda)$ решение задачи Коши $y' = y + \sin y$, $y(0) = \lambda$. Найти $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda}$ и $\dfrac{\partial^2\varphi(x,0)}{\partial\lambda^2}$.

34. Пусть $y = \varphi(x,\lambda)$ решение задачи Коши $y' = \lambda(1-x) + y - y^2$, $y(0) = 0$. Найти $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda}$ и $\dfrac{\partial^2\varphi(x,0)}{\partial\lambda^2}$.

35. Пусть $y = \varphi(x,\alpha,\beta)$ решение задачи Коши $y'' = \alpha y - y^2$, $y(0) = 1$,

$y'(0) = \beta$. Найти $\dfrac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial\alpha}$ и $\dfrac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial\beta}$.

36. Пусть $y = \varphi(x,\alpha,\beta)$ решение задачи Коши $y'' = y + 3\sin y$, $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$. Найти $\dfrac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial\alpha}$ и $\dfrac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial\beta}$.

37. Пусть $y(x)$ при $x \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению $y' = 1 + x + 100\sin y$ и начальному условию $y(0) = 0$. Доказать, что $y(x) > 0$ для всех $x > 0$.

38. Функция $y(x)$ при $x \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению $y' = 2 + x^2 + \sin^3 y$ и начальному условию $y(0) = 0$. Имеет ли нули $y(x)$ при $x > 0$?

39. Функция $y(x)$ при $x \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению $y' = x + \cos y$. Имеет ли $y(x)$ асимптоту при $x \to +\infty$?

40. Функция $y(x)$ при $x \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению $y' = x + \dfrac{1}{1+y^2}$. Существует ли конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$?

41. Доказать, что каждое решение уравнения $y' = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ определено при $-\infty < x < +\infty$ и имеет конечные пределы при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

Ответы к задачам § 5

1. а) Да. б) Да. в) Нет.

3. а) Да. б) Да. в) Нет.

10. а) $y = x + e^{-x}$. б) $y = e^x$. в) $y = x + e^x$. г) $y = e^{2x}$.

11. а) $y_0(x) \equiv 1$, $y_1(x) = 1 + x - \dfrac{x^2}{2}$, $y_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{20}$.

б) $y_0(x) \equiv 0$, $y_1(x) = \dfrac{x^4}{4}$, $y_2(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^9}{144}$.

в) $y_0(x) \equiv 1$, $y_1(x) = 1 + 2x + \dfrac{x^2}{2}$, $y_2(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8x^3}{3} + x^4 + \dfrac{x^5}{10}$.

г) $y_0(x) \equiv 0$, $y_1(x) = \dfrac{x^3}{3}$, $y_2(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2x^7}{63}$.

12. а) $|y(x) - y_3(x)| \leqslant \dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 e^{\frac{2}{3}}$.

б) $|y(x) - y_3(x)| \leqslant \dfrac{e}{4!}$.

16. $y = 2(x-1)e^x + x + 2$.

17. $y = 2\cos x + \sin x - e^x$.

18. $y = \dfrac{5}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) - 1$.

19. $y = 4e^{2x} + \cos x + 2\sin x$.

20. а) Вся плоскость (x, y). б) $y \neq x$. в) $x \neq 0$, $y > -x$.

г) $x \neq -y$, $y > 0$. д) $x \neq 0$, $y \neq k\pi$, $k \in Z$. е) $y > x^2$. ж) $y \neq 1$.

21. а) $\alpha < 1$, $y = 0$ и $\beta < 1$, $y = 1$. б) $\alpha < 1$, $y = 0$ и $\beta < 1$, $y = 1$.

в) $\alpha < 1$, $y = 0$ и $\beta < 2$, $y = 1$.

22. а) $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 1$, y_1 — любое. б) $x_0 y_0 > 1$, $y_0 \neq 0$, $y_1 \neq 0$.

в) $y_0 \neq x_0$, $y_1 \neq 0$. г) x_0 — любое, $y_0 \neq 0$, $y_1 > 0$.

д) x_0 — любое, $y_0 \neq 0$, $y_1 \neq y_0$. е) $x_0^2 \neq y_1$, y_0 — любое.

25. а) Нет. б) Да.

26. а) Да. б) Нет. в) Да.

27. При $n = 1$ нет решений, при $n = 2$ одно решение, при $n = 3$ бесконечно много решений.

28. а) $n \geqslant 3$, б) $n \geqslant 5$.

29. а) $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda} = 2e^x - x^2 - 2x - 2$. б) $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda} = e^{-x} + x - 1$.

в) $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda} = -\dfrac{1}{4}e^{2x} + \dfrac{1}{2}\left(x^2 + x + \dfrac{1}{2}\right)$.

г) $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda} = -\dfrac{1}{9}e^{-3x} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}$.

д) $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda} = e^x - x - 1$. е) $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda} = -e^{-x} - x + 1$.

ж) $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda} = e^{x^2} - 1$. з) $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda} = e^{-x^2} - 1$.

30. а) e^{2x}, б) e^x, в) e^{-2x}, г) e^{-x}.

32. а) $y = \lambda(e^{x^2} - 1) + O(x, \lambda^2)$, б) $y = \lambda(e^{-x^2} - 1) + O(x, \lambda^2)$,

в) $y = \lambda(2e^x - x - 2) + \lambda^2[4e^{2x} + 2e^x(3 - 2x - x^2) - x^2 - 6x - 10] + O(x, \lambda^2)$,

г) $y = \lambda(e^{-x} + x - 1) + \lambda^2[(x^2 - 2x - 4)e^{-x} - e^{-2x} + x^2 - 4x + 5] + O(x, \lambda^2)$,

д) $y = \lambda(e^x - x - 1) + \lambda^2[(x^2 + 2x - 4)e^x - e^{-2x} + x^2 + 4x + 5] + O(x, \lambda^2)$,

е) $y = \lambda(e^{-x} + x - 1) + \lambda^2[(4 + 2x - x^2)e^{-x} + e^{-2x} - x^2 + 4x - 5] + O(x, \lambda^2)$.

33. $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda} = 2(e^{2x} - 1)$, $\dfrac{\partial^2\varphi(x,0)}{\partial\lambda^2} = 0$.

34. $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda} = x$, $\dfrac{\partial^2\varphi(x,0)}{\partial\lambda^2} = -4e^x + 2x^2 + 4x + 4$.

35. $\dfrac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial\alpha} = 1 - \cos x$, $\dfrac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial\beta} = \sin x$.

36. $\dfrac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial\alpha} = \operatorname{ch} 4x$, $\dfrac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{4}\operatorname{sh} 4x$.

38. Нет.

39. Нет.

40. Нет.

§ 6. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Особые решения

Основным методом решений таких уравнений является метод введения параметра. Кандидаты в особые решения находятся с помощью дискриминантных кривых, а затем для них проверяется определение особых решений.

Пример. Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать качественную картину поведения интегральных кривых уравнения

$$x^2[(y')^2 - y'] + 2xyy' + y^2 = 0.$$

Δ Введем параметр $p = y'$. Тогда заданное уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} y' = p, \\ x^2[p^2 - p] + 2xyp + y^2 = 0. \end{cases}$$

Разрешив второе уравнение системы относительно y, получаем, что $y = -xp \pm x\sqrt{p}$, где $p \geqslant 0$. Найдя отсюда dy и подставив его в равенство $dy = pdx$, получаем уравнение

$$(2\sqrt{p} \mp 1)(2pdx + xdp) = 0.$$

Первая скобка может обращаться в нуль лишь при $\sqrt{p} = \frac{1}{2}$. Подставив $\sqrt{p} = \frac{1}{2}$ в формулу для y, получаем решение $y = \frac{1}{4}x$. При этом было учтено, что в формуле для y нужно брать только знак «плюс».

Приравнивая нулю выражение второй скобки, получаем уравнение с разделяющимися переменными. Все его решения задаются формулой $px^2 = C$, где $C \geqslant 0$. Подставляя $p = \frac{C}{x^2}$ в формулу для y, в которой берется только знак «плюс», получаем решение $y = -\frac{C}{x} + \sqrt{C} \cdot \operatorname{sign} x$, где $x \neq 0$, $C > 0$. Кроме того, при $p = 0$ имеем решение $y = 0$.

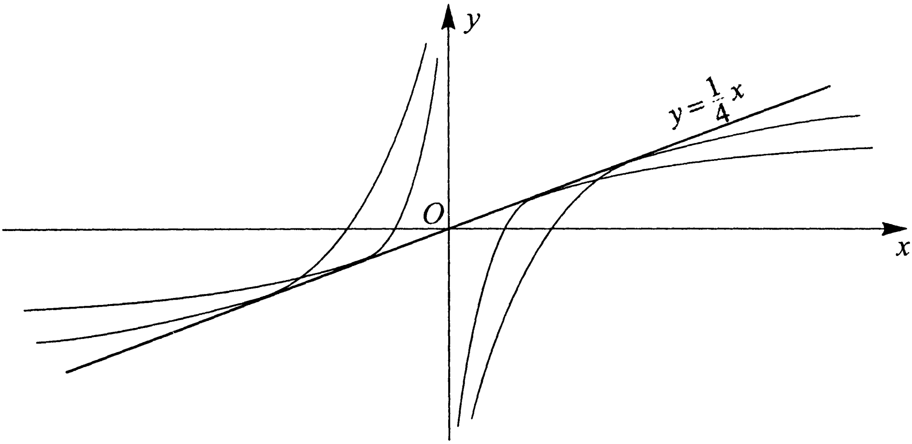
Дискриминантные кривые находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} y = -xp \pm x\sqrt{p}, \\ 0 = -x \pm \dfrac{1}{2\sqrt{p}}, \end{cases}$$

где второе уравнение получается дифференцированием по p первого уравнения. Исключая из этой системы параметр p, находим, что $y = \frac{1}{4}x$ задает дискриминантную кривую. Это единственный кандидат в особые решения нашего уравнения. Поскольку $y = \frac{1}{4}x$ — решение уравнения, то остается для него проверить выполнение определения особого решения. Для этого составляем систему уравнений относительно C:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}x = -\dfrac{C}{x} + \sqrt{C} \cdot \operatorname{sign} x, \ \ x \neq 0, \\[2ex] \dfrac{1}{4} = \dfrac{C}{x^2}. \end{cases}$$

Легко видеть, что найденное из второго уравнения $C = \frac{1}{4}x^2$ удовлетворяет и первому уравнению при $x \neq 0$. Следовательно, оба луча прямой $y = \frac{1}{4}x$, получаемые при $x \neq 0$, являются особыми решениями заданного уравнения.



Качественная картина поведения интегральных кривых уравнения показана на рисунке. Из рисунка, в частности, видно, как из найденных решений уравнения можно получать составные решения уравнения. ▲

Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать качественную картину поведения интегральных кривых уравнений (1—66):

1. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

2. $y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0$.

3. $8xy'^3 = y(12y'^2 - 9)$.

4. $x^2y'^2 - 4x(y+2)y' + 4y(y+2) = 0$.

5. $x^3y'^2 + x^2yy' + 1 = 0$.

6. $y'^2 - 3xy^{\frac{2}{3}}y' + 9y^{\frac{5}{3}} = 0$.

7. $y'^3 - 3x^2y' + 4xy = 0$.

8. $y^2y'^2 + 2xyy' - y^2 + 1 = 0$.

9. $y' = \ln \dfrac{y}{y'-1}$.

10. $xy'^2 - 2yy' + 2y = 0$.

11. $x^3y'^2 - 4x^2yy' + 4xy^2 + 4y' = 0$.

12. $8y^2y'^3 - 3y + 6(x-2)y' = 0$.

13. $5xy'^2 + 1 = yy'(1 + yy')$.

14. $x^3y^2y'^2 - 2x^2y^3y' + xy^4 + 2yy' = 0$.

15. $\dfrac{1}{4}y'^2 - y' + y = 2x - 3$.

16. $y'^2 - 8xy' + 8x^2 + 4y = 0$.

17. $y'^2 + xy^2y' + y^3 = 0$.

18. $2y^2y'^2 - 2xy'^2 + 4yy' + 1 = 0$.

19. $y'^2 - 2yy' + 4e^{2x} = 0$.

20. $x^4y'^2 + xy' + y = 0$.

21. $4y'^2 + 3x^5y' = 9x^4y$.

22. $(1-x^2)y'^2 + 2xyy' + x^2 = 0$.

23. $y = y' + \dfrac{1}{2}(x - \ln y')$.

24. $yy'(yy' - 1) = x - y^2$.

25. $4(xy' - 2y) = 4x^2 - y'^2$.

26. $2yy'^2 + x^2(y'^2 + 1) + 2xy' = 0$.

27. $3\left(1 - y - \frac{1}{4}y'^2\right) = \left(x + \frac{1}{2}y'\right)^2$.

28. $2xy = x^2y' + 3y'\left(\frac{x}{2y'}\right)^{\frac{4}{3}}$.

29. $y' = y^2 e^{-\frac{xy'}{y}}$.

30. $y = y'\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - y'^2\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

31. $yy'^2 - 2xy' + y = 0$.

32. $12yy' = 9xy'^2 + 4\sqrt[3]{x}$.

33. $y + y'^2\cos^4 x = y'\sin x\cos x,\ |x| < \frac{\pi}{2}$.

34. $(y - xy')^2 = y' + 1$.

35. $4y^3y'^2 - 4xy' + y = 0$.

36. $2xy^2y'^2 - y^3y' + 1 = 0$.

37. $xy'^3 - yy'^2 + 4 = 0$.

38. $8xy'^3 + 12yy'^2 - 9y^5 = 0$.

39. $x^5y'^3 + x^4yy'^2 - 1 = 0$.

40. $y'^3 - xy' + y = 0$.

41. $y'^2 + 4e^{-3x}y' + 6e^{-3x}y = 0$.

42. $3y'^2 - 4e^{2x}y' + 4ye^{2x} = 0$.

43. $4yy' = xy'^2 + x^3$.

44. $y' = \left(\frac{1 + y'}{y - x}\right)^2$.

45. $6yy'^2 = 2xy'^3 + 3x^4$.

46. $(xy' + y)^2 = -y^2y'$.

47. $(y + x)^2 = -y'^3(3y' + 5)^2$.

48. $(x - y)^2 = y'^5(5y' - 7)^2$.

49. $y' - \ln y' = y - x$.

50. $1 + yy' + y'\ln y' = xy'$.

51. $4y'^3 - 3x^2y' + 4xy = 0$.

52. $4yy'^2 - 2xy'^3 - x^2 = 0$.

53. $4xyy'^2 - 8x^2y'^3 = 1$.

54. $2xyy'^2 = 4x^3 + (x^2 + 1)y'^3$.

55. $2yy' + 2y - 3x = xy'^2$.

56. $4x^2y + y'^2 = 2x(x^2 + 1)y'$.

57. $\frac{y}{xy'} + \ln y' = 1$.

58. $xy' = y(1 + \ln y')$.

59. $xy'^2 = y' - \frac{3}{4}e^{-2y}$.

60. $4x^6y - x^7y' + \frac{1}{8}y'^2 = 0$.

61. $\frac{4}{9}y'^3 - 3x^4y' + 6x^3y = 0$.

62. $(xy' + y)^2 + 20x^2y' = 0$.

63. $x^8 + 5xy' + y'^2 = 5y + 4x^5 + 2x^4y'$.

64. $xy^4y' + 3y^5 + y'^4 = 0$.

65. $xy'^3 + 3yy'^2 + 27y^4 = 0$.

66. $x^4 + 3xy' + y'^2 = 3y + 2x^3 + 2x^2y'$.

Ответы к задачам § 6

1. $y = C(x - C)^2$, $27y = 4x^3$ — особое решение.

2. $y = Cx^2 + C^2$, $y = -\frac{1}{4}x^4$ — особое решение.

3. $y = 0$, $y^2 = C\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{4C}\right)^3$, $y = \pm\frac{3}{2}x$ — особые решения.

4. $y = -2 + 2(Cx + 1)^2$, $y = -2$ — особое решение.

5. $y = \frac{C}{x} + \frac{1}{C}$, $xy^2 = 4$ — особые решения.

6. $y = C^3(x - C)^3$, $y = \left(\frac{x}{2}\right)^6$ — особое решение.

7. $y = 3Cx^{\frac{4}{3}} - 16C^3$, $y = \pm\frac{x^2}{2}$ — особые решения.

8. $y^2 = C^2 + 2Cx + 1$, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ — особые решения.

9. $y = (x + C)[\ln(x + C) - 1]$, $y = -1$ — особое решение.

10. $4y^3 = C(3x - C)^2$, $y = x$ — особое решение при $x \neq 0$.

11. $y = C - \frac{1}{2}C^2x^2$, $2x^2y = 1$ — особое решение.

12. $y = 0$, $x = 2 + \frac{1}{2C} - \frac{4}{3}C^2y^4$, $4(x - 2)^3 + 9y^4 = 0$ — особое решение.

13. $x = -y^2 - Cy - \frac{1}{5}C^2$, $4x = y^2$ — особое решение.

14. $2y^2 + C^2x^2 = 2C$, $xy = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ — особые решения.

15. $y = -(x - C)^2 + 2C - 3$, $y = 2x - 2$ — особое решение.

16. $y = x^2 + Cx - \frac{1}{4}C^2$, $y = 2x^2$ — особое решение.

17. $y = 0$, $Cy(x - C) = 1$, $x^2y = 4$ — особое решение.

18. $x = -\frac{1}{2}y^2 - Cy + \frac{1}{2}C^2$, $x + y^2 = 0$ — особое решение.

19. $y = Ce^{2x} + \frac{1}{C}$, $y = \pm 2e^x$ — особые решения.

20. $y = \dfrac{C}{x} - C^2$, $4x^2y = 1$ — особое решение.

21. $y = Cx^3 + 4C^2$, $y = -\dfrac{1}{16}x^6$ — особое решение.

22. $y = \dfrac{1}{2}\left(Cx^2 - C - \dfrac{1}{C}\right)$, $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ — особые решения.

23. $y = e^{x+C} - \dfrac{1}{2}C$, $y = \dfrac{1}{2}(x + 1 + \ln 2)$ — особое решение.

24. $(x - C^2)^2 + y^2 = C^2$, $x = y^2 - \dfrac{1}{4}$ — особое решение.

25. $y = x^2 + Cx + \dfrac{1}{8}C^2$, $y = -x^2$ — особое решение.

26. $x^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}C^2\right)^2 = C^2$, $2y = 1 - x^2$ — особое решение.

27. $y = 1 - x^2 + Cx - \dfrac{1}{3}C^2$, $y = 1 - \dfrac{1}{4}x^2$ — особое решение.

28. $y = 2C^3x^2 + \dfrac{3}{8C}$, $x = \pm y^2$ — особые решения при $y \neq 0$.

29. $y = Ce^{Cx}$, $C \neq 0$, $exy = -1$ — особое решение.

30. $y = C\operatorname{ch} x - C^2$, $y = \dfrac{1}{4}\operatorname{ch}^2 x$ — особое решение.

31. $y = 0$, $x = Cy^2 + \dfrac{1}{4C}$, $x = \pm y$ — особые решения при $y \neq 0$.

32. $y = \dfrac{1}{4C}x^{\frac{4}{3}} + C$, $y = \pm x^{\frac{2}{3}}$ — особые решения при $x \neq 0$.

33. $y = C\operatorname{tg} x - C^2$, $y = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2 x$ — особое решение.

34. $y = (C^2 - 1)x + C$, $y = -x - \dfrac{1}{4x}$ — особое решение.

35. $y = 0$, $x = Cy^4 + \dfrac{1}{4C}$, $x = \pm y^2$ — особые решения при $y \neq 0$.

36. $x = Cy^2 - 2C^2$, $8x = y^4$ — особое решение.

37. $y = Cx + \dfrac{4}{C^2}$, $y = 3x^{\frac{2}{3}}$ — особые решения при $x \neq 0$.

38. $y = \pm\left(\dfrac{3C}{C-3x}\right)^{\frac{3}{2}}$, $xy = \pm\dfrac{2}{3}$ — особые решения.

39. $y = -\dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{C^2}$, $4x^2y^3 = 27$ — особое решение.

40. $y = Cx - C^3$, $27y^2 = 4x^3$ — особое решение.

41. $y = 4Ce^{-\frac{3}{2}x} - 6C^2$, $y = \dfrac{2}{3}e^{-3x}$ — особое решение.

42. $y = Ce^x - \dfrac{3}{4}C^2$, $3y = e^{2x}$ — особое решение.

43. $y = \dfrac{1}{4}Cx^4 + \dfrac{1}{4C}$, $y = \pm\dfrac{1}{2}x^2$ — особое решение.

44. $y = C - \dfrac{1}{x-C}$, $y = x \pm 2$ — особые решения.

45. $y = Cx^3 + \dfrac{1}{18C^2}$, $2y = \sqrt[3]{3}x^2$ — особое решение.

46. $y = \dfrac{C^2}{x-C}$, $y = -4x$ — особое решение.

47. $y = C - 3\left(\dfrac{x+C}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$, $y = -x \pm 2$ — особые решения.

48. $(y+C)^5 7^7 = 5^5(x+C)^7$, $y = x \pm 2$ — особые решения.

49. $y = e^{x+C} - C$, $y = x + 1$ — особое решение.

50. $y = \ln(x+C) + C$, $y = x - 1$ — особое решение.

51. $y = \dfrac{3}{4}Cx^{\frac{4}{3}} - C^3$, $y = \pm\dfrac{x^2}{4}$ — особые решения.

52. $y = Cx^2 + \dfrac{1}{16C^2}$, $4y = 3x^{\frac{4}{3}}$ — особое решение.

53. $x = C(y-C)^2$, $27x = 4y^3$ — особое решение.

54. $y = C(x^2+1) + \dfrac{1}{2C^2}$, $2y = 3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$ — особое решение.

55. $y = Cx^2 - x + \dfrac{1}{C}$, $y = x$ и $y = -3x$ — особые решения при $y \neq 0$.

56. $y = C(x^2+1) - C^2$, $y = \dfrac{1}{4}(x^2+1)^2$ — особое решение.

57. $y = C + C\ln\dfrac{x}{C}$, $y = x$ — особое решение.

58. $y = \dfrac{1}{C}e^{Cx-1}$, $y = x$ — особые решения при $x \neq 0$.

59. $x = 2Ce^y + 2C^2$, $3x = e^{2y}$ — особое решение.

60. $y = 2Cx^4 - 2C^2$, $y = \dfrac{1}{2}x^8$ — особое решение.

61. $y = \dfrac{3}{2}Cx^2 - 2C^3$, $2y = \pm x^3$ — особые решения.

62. $y = \dfrac{5C^2}{x} + 10C$, $y = -5x$ — особое решение.

63. $y = \dfrac{1}{5}x^5 + Cx + \dfrac{1}{5}C^2$, $y = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{5}{4}x^2$ — особое решение.

64. $y = 0$, $yC(x+C)^3 = -27$, $x^4y = 256$ — особое решение.

65. $(x+C)^3y = -C$, $27x^2y = -4$ — особое решение.

66. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + Cx + \dfrac{1}{3}C^2$, $y = -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$ — особое решение.

Глава 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

§ 7. Основные типы уравнений, допускающие понижение порядка уравнения

В § 7 рассматриваются уравнения вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где $y(x)$ — искомая функция, x — независимая переменная, $n \geqslant 2$.

1. Простые случаи понижения порядка уравнения. Порядок уравнения легко понижается, если его можно преобразовать в равенство полных производных по x от некоторых выражений.

Пример 1. Решить уравнение

$$y^2 y'' = yy'^2 - 2y'.$$

Δ Заметим, что $y = C$ — решение уравнения. Пусть далее $y \neq C$. Перенеся yy'^2 в левую часть уравнения, разделим обе его части на y^3. Получаем

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = -\frac{2y'}{y^3}, \quad \left(\frac{y'}{y}\right)' = \left(\frac{1}{y^2}\right)'.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{y^2} + C, \quad yy' = 1 + Cy^2.$$

В случае $C = 0$ имеем

$$yy' = 1, \quad (y^2)' = 2, \quad y^2 = 2x + \tilde{C}.$$

В случае $C \neq 0$ получаем

$$\frac{yy'}{1 + Cy^2} = 1, \quad \frac{1}{2C} \ln\left|1 + Cy^2\right| = x + C_0.$$

Последнюю формулу можно преобразовать к виду

$$y^2 = C_1 + C_2 e^{-\frac{2x}{C_1}}, \quad C_1 \neq 0.$$

Ответ. $y = C$, $y^2 = 2x + C$, $y^2 = C_1 + C_2 e^{-\frac{2x}{C_1}}$, где C, C_1, C_2 — произвольные постоянные, при этом $C_1 \neq 0$. ▲

В случае, когда уравнение не содержит y, порядок уравнения понижается, если сделать замену, взяв за новую неизвестную функцию производную от y наименьшего порядка, входящую в уравнение.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1.$$

△ Сделаем замену $y'' = z$. Тогда $y''' = z'$ и уравнение преобразуется к виду $x^2 z' + 2xz = \frac{1}{x^2}$. Отсюда $(x^2 z)' = \left(-\frac{1}{x}\right)'$, $x^2 z = -\frac{1}{x} + C$, $z = -\frac{1}{x^3} + \frac{C}{x^2}$.

Возвращаясь к y, имеем

$$y'' = \frac{C}{x^2} - \frac{1}{x^3}, \quad y' = \frac{C_1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C_2, \quad y = C_1 \ln|x| - \frac{1}{2x} + C_2 x + C_3.$$

Ответ. $y = C_1 \ln|x| + C_2 x + C_3 - \frac{1}{2x}$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. ▲

Когда уравнение не содержит x, порядок уравнения понижается, если за новую независимую переменную взять y и ввести новую неизвестную функцию $z(y) = y'$. При этом $y'' = z(y) \cdot z'(y)$.

Пример 3. Решить уравнение

$$y''(y-1) + y'(y-1)^2 = y'^2.$$

△ Заметим, что $y = C$ — решение уравнения. Пусть далее $y \neq C$. Положив $y - 1 = u$, получим уравнение

$$uu'' + u^2 u' = u'^2.$$

Возьмем u за новую независимую переменную и положим $u'(x) = z(u)$. Тогда $u''(x) = z \cdot z'(u)$ и уравнение примет вид $uz \cdot z' + u^2 z = z^2$.

Заметим, что $z \neq 0$, так как случай $z = 0$ дает $y = C$.

Сократив уравнение на z, получаем

$$uz' - z = -u^2, \quad \frac{uz' - z}{u^2} = -1, \quad \left(\frac{z}{u}\right)' = -1, \quad z = -u^2 + Cu.$$

Отсюда $u'(x) = -u^2 + Cu$.

В случае $C = 0$ $u = \dfrac{1}{x + C_0}$, а в случае $C \neq 0$ $\dfrac{1}{C}\ln\left|\dfrac{u}{C-u}\right| = x + C_0$. Полагая $u = y - 1$ и упростив полученное выражение, получаем ответ:

$$y = C, \quad y = 1 + \frac{1}{x + C}, \quad y = 1 + \frac{C_1 C_2 e^{C_2 x}}{1 + C_1 e^{C_2 x}},$$

где C, C_1, C_2 — произвольные постоянные. ▲

При решении задач с начальными условиями целесообразно использовать заданные условия в самом процессе решения.

Пример 4. Решить задачу Коши

$$2(y + x)y'' + y'^2 + 2y' + \frac{1}{(y + x)^2} = 0, \quad y(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}, \quad y'(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1.$$

△ Положив $u = y + x$, преобразуем уравнение к виду

$$2uu'' + u'^2 - 1 + \frac{1}{u^2} = 0.$$

Так как это уравнение не содержит x, то положим $u'(x) = z(u)$. При этом $u'' = z \cdot z'(u)$ и уравнение примет вид $2uzz' + z^2 - 1 + \dfrac{1}{u^2} = 0$.

Это уравнение Бернулли. Положив $w = z^2$, получаем $uw' + w = 1 - \dfrac{1}{u^2}$, $(uw)' = 1 - \dfrac{1}{u^2}$, $uw = u + \dfrac{1}{u} + C$, $w = u'^2 = 1 + \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{C}{u}$.

Учитывая начальные данные и равенство $u' = y' + 1$, находим, что $u'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $u(\sqrt{2}) = 1$. Тогда $C = 0$, $u'^2 = 1 + \dfrac{1}{u^2}$, $u' = \dfrac{\sqrt{1 + u^2}}{u}$, $\sqrt{1 + u^2} = x + C$. Из условия $u(\sqrt{2}) = 1$ следует, что $C = 0$. Тогда $\sqrt{1 + (y + x)^2} = x$. Учитывая начальные данные для y, получаем отсюда ответ. $y = \sqrt{x^2 - 1} - x$. ▲

Пример 5. Решить задачу Коши

$$yy'' = \left(y'^5 + y'^2\right)\operatorname{th} y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Δ Заметим, что $y = C$ — решения уравнения, но среди них нет решений задачи Коши, так как $y' = 0$. Пусть далее $y \neq C$.

Полагаем $y' = z(y)$. Тогда $y'' = zz'$ и после сокращения на $z \neq 0$ уравнение примет вид

$$yz' = z\left(z^3 + 1\right)\operatorname{th} y.$$

Заметим, что $z = -1$ — решение этого уравнения. Из замены тогда имеем $y' = -1$, $y = -x + C$.

Используя начальные условия, получаем решение задачи Коши $y = 1 - x$. Других решений задача Коши не имеет, поскольку при $y \neq 0$ для рассматриваемой задачи Коши выполняется теорема единственности решения. ▲

Решить уравнения (1—17):

1. $xy'' + xy'^2 + y' = 0$, $x \neq 0$.

2. $y''^3 + y'^5 = (y'' + y')y''y'^2$.

3. $y'' = \dfrac{y'}{x}\ln\dfrac{y'}{x} + \dfrac{y'}{x}$.

4. $4y''\sqrt{y} = 1$.

5. $yy'' - y'^2 = y'y^2$.

6. $3yy'y'' = y'^3 + 2$.

7. $5yy'^3y'' = y'^5 + 4$.

8. $yy'' = 7y'^2 + y^4y'$.

9. $yy'' = 2y'^2 - 4y^2y'^3$.

10. $\left(y^3 + y\right)y'' - \left(3y^2 - 1\right)y'^2 = 0$.

11. $yy''' - y'y'' = 0$.

12. $yy'' = 2y' + 2y'^2$.

13. $\left(1 + y^2\right)y'' + 2yy'^2 = y'$.

14. $\left(1 + y^2\right)y'' = y\left(y'^2 - 1\right)$.

15. $4xy'' - y''^2 = 4(y' + 1)$.

16. $2(1 - y)y'' = y'^2 + 1$.

17. $2yy'y'' - y''^2 = y'^3$.

Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям (18—38):

18. $y''\sin^3 x - \left(y'\sin^2 x + y'^2\right)\cos x = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

19. $y''\cos^3 x + \left(y'\cos^2 x + y'^2\right)\sin x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

20. $(x+1)y^{(n)} = y^{(n-1)}$, $n \geqslant 2$, $y^{(n-2-k)}(0) = (n-2-k)!$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, $y^{(n-1)}(0) = 0$.

21. $xy^{(n)} = y^{(n-1)}$, $n \geqslant 2$, $y^{(n-2-k)}(0) = (n-2-k)!$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, $y^{(n-1)}(0) = 0$.

22. $y'' = 5y\sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

23. $y'' = y'^2 + (1-y)y'$, $y(1) = y'(1) = 1$.

24. $y'' + y'^2 = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \dfrac{1}{2}$.

25. $yy'' - y'^2 + 2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

26. $yy'' = y^2y'^3 + y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

27. $3y'y'' = e^y$, $y(-3) = 0$, $y'(-3) = 1$.

28. $2yy'' = y'^2\left(3 - 4yy'^2\right)$, $y(4) = 1$, $y'(4) = -1$.

29. $yy'' - y'^2 = y^4$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -4$.

30. $yy'' = 5y'^2 + 3y^2y'$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

31. $yy'' = \left(4y'^4 - y'^2\right)e^y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

32. $2y^2y'' = 2y'^4 - yy'^2$, $y(1) = y'(1) = 1$.

33. $2y^2y'' + y'^2 = 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

34. $3y'y'' - y'^3 - y + 2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

35. $2\left(y^2 + y\right)y'' - \left(y^2 + y + 1\right)y'^2 + y^3 = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

36. $2\left(e^y + 1\right)^2 y'' + \left(e^{2y} - 1\right)y'^2 + 1 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

37. $y'' + \left(2 + 4y^2\right)y'^3 - 2yy'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{1}{2}$.

38. $y^3y'' + y'^4\ln y - y^2y'^2 = 0$, $y(0) = y'(0) = e$.

2. Случаи однородного и однородного в обобщенном смысле уравнений. Если уравнение является однородным относительно y и всех производных от y, т. е. уравнение не меняется при одновременной замене y на λy, $y^{(k)}$ на $\lambda y^{(k)}$, $\lambda \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то порядок уравнения можно понизить на единицу, если ввести новую неизвестную функцию $z(x)$ по правилу $y' = yz$. При такой замене $y'' = y(z' + z^2)$.

Пример 6. Решить уравнение

$$x^2yy'' - 5xyy' - x^2y'^2 = 6y^2, \quad x \neq 0.$$

Δ Заметим сначала, что $y = 0$ — решение уравнения. Пусть далее $y \neq$ $\neq 0$. Убедившись в однородности по y, y', y'' заданного уравнения, вводим новую функцию z с помощью равенства $y' = yz$. После сокращения на $y \neq 0$ получаем уравнение $x^2z' - 5xz = 6$.

Общим решением этого линейного уравнения первого порядка является $z = Cx^5 - \dfrac{1}{x}$. Отсюда и из замены находим, что

$$\frac{y'}{y} = Cx^5 - \frac{1}{x}.$$

Решая это уравнение, получаем ответ:

$$y = \frac{C_1}{x}e^{C_2x^6},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. ▲

Пример 7. Решить уравнение

$$xyy'' + xy'^2 = 3yy', \quad x \neq 0.$$

Δ Данное уравнения является однородным по y, y', y'' и его можно решить, понизив порядок уравнения с помощью рекомендуемой замены.

Однако уравнение можно решить и по-другому. Заметим, что $y = C$ — решение уравнения. Пусть далее $y \neq C$. Если иметь ввиду, что

$$(xyy')' = xyy'' + xy'^2 + yy',$$

то заданное уравнение можно записать в виде

$$(xyy')' = 4yy' \text{ или } (xyy')' = (2y^2)'.$$

Отсюда

$$xyy' = 2y^2 + C \text{ или } (xy^2)' = 4y^2 + 2C.$$

Полагая $y^2 = u$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$xu' = 4u + 2C.$$

Интегрируя его, получаем ответ. $y^2 = C_1 x^4 + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. ▲

Пусть теперь уравнение является однородным в обобщенном смысле, т. е. существует такое число s, что уравнение не меняется при одновременной замене x на λx, y на $\lambda^s y$, $y^{(k)}$ на $\lambda^{s-k} y^{(k)}$, где $\lambda \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

При $x > 0$ вводим новую независимую переменную t и новую неизвестную функцию $z(t)$ с помощью замены

$$x = e^t, \quad y = ze^{st}.$$

Тогда уравнение приводится к виду, в который не входит t. Следовательно, порядок уравнения понижается по правилу, изложенному в п. 1.

При $x < 0$ полагаем $x = -e^t$.

Пример 8. Решить задачу Коши

$$x^2(y'' + 2yy') + 2xy^2 - 2y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -3.$$

△ Подставив в уравнение λx вместо x, $\lambda^s y$ вместо y, $\lambda^{s-1} y'$ вместо y' и $\lambda^{s-2} y''$ вместо y'', потребуем, чтобы параметр λ входил в одинаковой степени во все слагаемые. Если это возможно, то после сокращения на множитель с такой степенью λ получим опять то же уравнение. Для определения числа s имеем равенства

$$2 + s - 2 = 2 + s + s - 1 = 1 + 2s = s,$$

которые выполняются при $s = -1$. Полагая $x = e^t$, $y = z(t)e^{-t}$, находим, что

$$y'(x) = \left[z(t)e^{-t}\right]' \cdot e^{-t} = (z' - z)e^{-2t},$$
$$y''(x) = \left[(z' - z)e^{-2t}\right]' \cdot e^{-t} = (z'' - 3z' + 2z)e^{-3t}.$$

После подстановки в уравнение выражений для x, y, y', y'' и сокращения на e^{-t}, получаем уравнение

$$z'' - 3z' + 2zz' = 0,$$

в которое не входит t.

Заметим, что $z = C$ — решение этого уравнения. Из замены следует, что $y = \dfrac{C}{x}$ — решение исходного уравнения. При $C = 3$ такое решение удовлетворяет заданным начальным условиям. В силу теоремы единственности решения задачи Коши, которая в нашем случае выполняется при $x \neq 0$, других решений заданная задача Коши не имеет.

Ответ. $y = \dfrac{3}{x}$. ▲

Решить уравнения (39—53):

39. $xyy'' - (x+1)yy' = xy'^2$, $x \neq 0$.

40. $yy'' - y'^2 + y^2 \sin x = 0$.

41. $yy'' + \dfrac{yy'}{x} - y'^2 = 0$.

42. $xyy'' + yy' = xy'^2 + y^2$, $x \neq 0$.

43. $y^2y''' - 3yy'y'' + 2y'^3 + y^3 \sin x = 0$.

44. $x^2yy'' = (xy' + y)^2$, $x \neq 0$.

45. $xyy'' - yy' = 2xy'^2$, $x \neq 0$.

46. $yy'' + yy' \operatorname{tg} x + 2y'^2 = 0$.

47. $yy'' + yy' \operatorname{tg} x = 2y'^2$.

48. $yy'' - \dfrac{yy'}{x+1} = 2y'^2$.

49. $xyy'' + 2xy'^2 = 2yy'$, $x \neq 0$.

50. $xyy'' + xy'^2 + yy' = 0$, $x \neq 0$.

51. $y^2y'' - yy'\left(y' + \dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{4}{x}y'^3 = 0$.

52. $yy'y'' - \dfrac{yy'^2}{x} - y'^3 = x^3y^3$.

53. $(x+1)yy'' + yy' = xy'^2$, $x \neq -1$.

Найти решение уравнения при заданных начальных условиях (54—67):

54. $yy'' = (1-x)y'^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

55. $(yy'' - y'^2)\sin x + y^2 = (\sin x - \cos x)yy'$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

56. $xyy'' - xy'^2 + y'(y' + y)\sin x = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

57. $4xyy'' - 4yy' + y'^2 = 0$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = -4$.

58. $xyy'' - 4xy'^2 + 4yy' = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

59. $2xy^2y'' - 2xyy'^2 + 2xy'^3 = y'y^2$, $y(1) = y'(1) = -1$.

60. $(1 - \sin x)yy'' + yy'\cos x = y'^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

61. $y^2(y'' - y') = y'^2(y - 2xy')$, $y(1) = y'(1) = e$.

62. $xyy'' + x(2\ln x - 1)y'^2 = yy'$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

63. $xyy'' + \left(1 + x^2\right)yy' + xy^2 = xy'^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

64. $y^2y'' - \dfrac{3}{2}x^2y^2y' + \dfrac{3}{8}x^2y'^3 - yy'^2 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

65. $x^2y'' + 2x^2yy' + 2xy^2 - 2y = 0$, а) $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$, б) $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$.

66. $x^4y'' - xyy' + 2\left(y - x^2\right)y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

67. $x^4y'' - x^2yy'^2 + 2xy'y^2 = y^3$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$.

3. Разные задачи. Все задачи этого пункта можно решать методами, изложенными в п. 1 и п. 2.

68. С помощью подстановки $y = z^2$ решить уравнение

$$2x^2yy'' + 4y^2 = x^2y'^2 + 2xy(y' + \sqrt{y}), \quad x \neq 0.$$

Решить уравнения (69—87):

69. $yy'' - 2y'^2 = 0$.

70. $\left(y^2 + y\right)y'' - (2y + 1)y'^2 = 0$.

71. $3yy'' - 5y'^2 = 0$.

72. $4yy'^2y'' = y'^4 + 3$.

73. $x^2y'' = 2y'(y - x)$, $x \neq 0$.

74. $xy'' = y' + 2x^2yy'$, $x \neq 0$.

75. $yy'' + 4y' = y'^2$.

76. $y'' = \left(\dfrac{y'}{x}\right)^2 + 2\dfrac{y'}{x}$.

77. $2y(xy'' + y') = x(x + 2)y'^2$, $x \neq 0$.

78. $x^2yy'' = (xy' - 2y)^2$, $x \neq 0$.

79. $yy'' = \left(y^3 + y'\right)y'$.

80. $yy'' + 2y'^2 = 3yy'$.

81. $(y+1)y'' + \dfrac{y'}{y + 1} = y'^2$.

82. $2x^2yy'' + 4y^2 = x^2y'^2 + 2xyy'$, $x \neq 0$.

83. $x^2yy'' + x^2y'^2 - 5xyy' + 4y^2 = 0$, $x \neq 0$.

84. $x^4y'' - x^2(xy' - y) - (xy' - y)^3 = 0$, $x \neq 0$.

85. $y'y''' = y''^2 - \left(\dfrac{y'}{x}\right)^2$. **86.** $y'y''' = 3y''^2$.

87. $x^2y'y''' - x^2y''^2 + y'^2 = 0$, $x \neq 0$.

Найти решение уравнения при заданных начальных условиях (88—95):

88. $xyy'' + y^2 = xy'^2 + (x-1)yy'$, $y(1) = y'(1) = 2$.

89. $(1+y)y'' + xy'^2 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

90. $y(y'' + y') = y'^2\left(xy^2 - 1\right)$, $y(0) = y'(0) = 1$.

91. $(y+2)y'' + y'^2 = \cos 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

92. $2\left(yy'' - y'^2\right) = \left(y'^2 - 2y'y\right)e^{x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

93. $x\left(yy'' - y'^2\right) = yy' \ln \dfrac{y}{y'}$, $y(1) = y'(1) = 1$.

94. $xy''' - y'' = x^2 \cos x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

95. $3y''y''' - 2y''^3 = 16$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -2$.

Найти интегральные кривые, а) касающиеся прямой $y = 1$, б) пересекающие прямую $y = 1$ под углом $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ или $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$, для уравнений (96—97):

96. $2\left(yy'' - y'^2\right) + 3yy'^4 = 0$.

97. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.

98. Для уравнения $\left(1 + y'^2\right)y''' = 3y'y''^2$ найти интегральные кривые, пересекающие ось ординат под прямым углом и имеющие в точке пересечения кривизну, равную а) нулю, б) единице.

Найти решение уравнения при заданных условиях (99—102):

99. $y'' + 2(1-y)y' = 0$, $y'(x) \geqslant 0$ в $(x, 1)$.

100. $yy'' - 2y'^2 = 2y^4y'$, $y(2) = \sqrt[4]{y'(2)} \neq 0$.

101. $2yy'' - y'^2 + 2yy'^4 = 0$, $y(1) \cdot y'^2(1) = 1$.

102. $yy'' + yy' \operatorname{tg} x = (1 - \sin x)y'^2$, $y(0) \cdot y'(0) < 0$.

Ответы к задачам § 7

1. $e^y = C_1 \ln(C_2 x)$, $y = C$.

2. $e^y(x + C_1) = C_2$, $(y + C_1)(C_2 - x) = 4$, $y = C$.

3. $2y = x^2 + C$, $yC_1^2 = e^{C_1 x}(C_1 x - 1) + C_2$.

4. $4(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{3}{2}} - 12C_1(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{1}{2}} = C_2 \pm 3x$.

5. $y\left(1 + C_2 e^{C_1 x}\right) = C_1$, $y(C - x) = 1$.

6. $yC_1 = \left(\dfrac{2}{3}C_1 x + C_2\right)^{\frac{3}{2}} + 2$, $y = C - x\sqrt[3]{2}$.

7. $yC_1 = \left(\dfrac{4}{5}C_1 x + C_2\right)^{\frac{5}{4}} + 4$, $y = C - x\sqrt[5]{4}$.

8. $y^3\left[1 + C_2 e^{C_1\left(x - \frac{1}{y^3}\right)}\right] = C_1$.

9. $y^4 + C_1 = y(3x + C_2)$, $y = C$.

10. $\left(1 + y^2\right)(C_1 x + C_2) = 1$.

11. $y + \sqrt{y^2 + C_1} = C_2 e^{C_3 x}$, $y = C_1 \sin(C_2 x + C_3)$, $y = C_1 x + C_2$.

12. $y\left(1 - C_2 e^{\frac{2x}{C_1}}\right) = C_1\left(1 + C_2 e^{\frac{2x}{C_1}}\right)$, $\operatorname{arctg}(C_1 y) + C_1 x = C_2$, $y + x = C$.

13. $(y - C_1)^2 + \left(C_1^2 + 1\right)\ln(y + C_1)^2 = 2x + C_2$, $y = C$.

14. $y + \sqrt{1 + y^2 + C_1^2} = C_2 e^{\frac{x}{C_1}}$, $y = \sqrt{C_1^2 - 1}\sin\left(\dfrac{x}{C_1} + C_2\right)$, $y = \pm x + C$.

15. $y = C_1 x^2 - C_1^2 x - x + C_2$, $3y = x^3 - 3x + C$.

16. $2x = C_1(2t + \sin 2t) + C_2$, $y = 1 - C_1 \cos^2 t$.

17. $2y = C_2 e^{C_1 x} + C_1$, $y(x + C) + 2 = 0$.

18. $4y = 2x - \pi - \sin 2x$.

19. $4y = 2x + \sin 2x$.

20. $y = x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1$.

21. $y = Cx^n + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1.$ **22.** $y(x+2)^4 = 16.$

23. $y = e^{x-1}.$ **24.** $(2-x)e^y = 2.$

25. $y = \cos(x\sqrt{2}).$ **26.** $y = \sqrt[3]{1-9x}.$

27. $x^3 e^y + 27 = 0.$ **28.** $y = \left(7 - \frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}.$

29. $y(2x-1) = 2.$ **30.** $xy = 1.$

31. $2y = 2 - x.$ **32.** $4y = (x+1)^2.$

33. $y = 1 - 2x.$ **34.** $y = 1 - \left(1 - \frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}.$

35. $4y = (x-4)^2.$ **36.** $y + e^y = x.$

37. $y = \sqrt{x+1}.$ **38.** $\ln y = \sqrt{2x+1}.$

39. $\ln(C_2 y) = C_1(x-1)e^x$, $y = 0.$ **40.** $\ln(C_2 y) = C_1 x + \sin x$, $y = 0.$

41. $y = C_1 |x|^{C_2}.$ **42.** $y = C_1 e^x |x|^{C_2}.$

43. $\ln(C_3 y) = C_2 x^2 + C_1 x - \cos x$, $y = 0.$ **44.** $\ln(C_2 y\sqrt[3]{x}) = C_1 x^3$, $y = 0$

45. $y(C_1 + C_2 x^2) = 1$, $y = 0.$ **46.** $y = \sqrt[3]{C_1 + C_2 \sin x}.$

47. $y(C_1 + C_2 \sin x) = 1$, $y = 0.$ **48.** $y\left[C_1 + C_2(x+1)^2\right] = 1$, $y = 0.$

49. $y = \sqrt[3]{C_1 x^3 + C_2}.$ **50.** $y^2 = C_1 \ln|x| + C_2.$

51. $\ln\left(C_2 y^2\right) = \pm\sqrt{x^2 + C_1}$, $y = C.$ **52.** $\ln\left(C_2 y^3\right) = \pm\left(x^2 + C_1\right)^{\frac{3}{2}}$, $y = 0.$

53. $y|C_1 x + C_1 + 1|^{\frac{1}{C_1}} = C_2$, $y = Ce^{-x}$, $y = C.$ **54.** $x \ln y = 2(x-1).$

55. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$ **56.** $\ln y = 1 - x.$

57. $y = (2x+1)^2.$ **58.** $y\sqrt[3]{2 - x^3} = x.$

59. $\ln(-y) = 2(\sqrt{x} - 1).$ **60.** $\ln y = \ln(1 + \cos x) + \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

61. $\ln y = \sqrt{2x-1}.$ **62.** $y = 1 - 2\ln x.$

63. $xy = 1.$ **64.** $\ln y = 2(1-x).$

65. а) $y\left(1 + 2x^3\right) = 6x^2$, б) $xy + 1 = 0.$ **66.** $y\left(1 + 5x^3\right) = 6x^2.$

67. $y = x$. **68.** $16y = x^2\left(\ln^2|x| + C_1\ln|x| + C_2\right)^2$, $y = 0$.

69. $y(C_1x + C_2) = 1$, $y = 0$. **70.** $\left(1 - C_2e^{C_1x}\right)y = C_2e^{C_1x}$.

71. $y|x + C_2|^{\frac{3}{2}} = C_1$, $y = C$. **72.** $C_1y = \left(\frac{3}{4}C_1x + C_2\right)^{\frac{4}{3}} + 3$.

73. $C_1x \cdot \operatorname{arctg}(C_1y) = C_2x - 1$, $y\left(C_2e^{\frac{2C_1}{x}} - 1\right) = C_1\left(C_2e^{\frac{2C_1}{x}} + 1\right)$, $y = \dfrac{x}{1 + Cx}$.

74. $2C_1\operatorname{arctg}(C_1y) = x^2 + C_2$, $y\left(1 - C_2e^{C_1x^2}\right) = C_1\left(1 + C_2e^{C_1x^2}\right)$, $y\left(C - x^2\right) = 2$.

75. $C_1y + 4 = C_2e^{C_1x}$, $y = 4x + C$, $y = 0$.

76. $2y + x^2 = 2C_1x - 2C_1^2\ln|x + C_1| + C_2$, $y = C$.

77. $y = C_2\left|\dfrac{x}{x - 2C_1}\right|^{\frac{1}{C_1}}$, $y = Ce^{\frac{2}{x}}$, $y = C$.

78. $y = C_2x^{\frac{4}{3}} \cdot e^{\frac{C_1}{x^3}}$.

79. $y^2\left(1 - C_2e^{C_1x}\right) = C_1C_2e^{C_1x}$, $y^2(C - x) = 1$, $y = C$.

80. $y = \sqrt[3]{C_1e^{3x} + C_2}$.

81. $C_1(y + 1)^2 = C_2e^{C_1x} - 1$, $(y + 1)^2 = x + C$.

82. $y = C_1x^2(C_2 + \ln|x|)^2$, $y = Cx^2$.

83. $y^2 = C_1x^4 + C_2x^2$.

84. $y = C_1x \pm x\sqrt{C_2 - \ln x^2}$, $y = Cx$.

85. $y = C_2e^{C_1}\left(x - \dfrac{1}{C_1}\right) + C_3$, $y = C_1x^2 + C_2$.

86. $(y + C_1)^2 = C_2x + C_3$, $y = C_1x + C_2$.

87. $y = C_2e^{C_1x}(C_1x - 1) + C_3$, $y = C_1x^2 + C_2$.

88. $y = 2x$.

89. $(x + 1)\ln(y + 1) = x - 1$.

90. $y = \sqrt{\ln(x + 1)^2 + 1}$.

91. $y = \sin x - 2$.

92. $y = e^{2x}$.

93. $y = e^{x-1}$.

94. $y = \dfrac{\pi}{2} - x\sin x - 2\cos x$.

95. $y = 2x - x^2 + 1$.

96. а) $y = 1$, б) $y = \left(\dfrac{3}{2}x + C\right)^{\frac{2}{3}}$.

97. а) $y = 1$, б) $\ln y = 1 \pm \dfrac{1}{x + C}$.

98. а) $y = C$, б) $y = C \pm \sqrt{1 - x^2}$.

99. $C_1 \operatorname{arctg}[C_1(y-1)] = x + C_2$, $(1-y)(x+C) = 1$, $y = 1$.

100. $y\sqrt[3]{3x + C} + 1 = 0$.

101. $y = \left(\dfrac{3}{2}x + C\right)^{\frac{2}{3}}$.

102. $y = C_2\left|\dfrac{\sin x - C_1}{\sin x + C_1}\right|^{\frac{1}{C_1}}$.

§ 8. Методы решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Уравнения Эйлера

Для решения линейного однородного уравнения с постоянными (вещественными) коэффициентами необходимо составить характеристическое уравнение, найти его корни и по ним написать общее вещественное решение заданного уравнения.

Пример 1. Решить следующие линейные однородные уравнения:

а) $y^{IV} - 6y''' + 8y'' + 6y' - 9y = 0$,

б) $y^{IV} + 6y''' + 13y'' + 12y' + 4y = 0$,

в) $y^{IV} - 3y''' + 5y'' - y' - 10y = 0$.

Δ а) Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + 6\lambda - 9 = 0.$$

Легко видеть, что его корнями являются $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Чтобы найти остальные корни, достаточно разделить левую часть характеристического уравнения на $(\lambda^2 - 1)$. Тогда уравнение можно разложить на множители следующего вида

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Таким образом получаем еще один корень $\lambda_3 = 3$ кратности два. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + (C_3 + C_4 x)e^{3x},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

б) Нетрудно проверить, что $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$ являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4 = 0.$$

В таком случае это уравнение можно представить в виде

$$(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^2 = 0.$$

Отсюда видно, что оба корня $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ кратности два. Значит, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + (C_3 + C_4 x)e^{-2x},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

в) Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 10 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Разделив левую часть этого уравнения на $(\lambda + 1)(\lambda - 2)$, получаем следующее представление характеристического уравнения

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0.$$

Это дает еще два комплексно сопряженные корни $\lambda_3 = 1 - 2i$, $\lambda_4 = 1 + 2i$. Сдедовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + e^{x}(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные (вещественные) постоянные. ▲

Для решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами используются чаще всего метод неопределенных коэффициентов и принцип суперпозиции.

Пример 2. Решить линейное неоднородное уравнение

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = -8(\cos 2x + 2\sin 2x) - 3e^x.$$

△ Сначала составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Его корнями являются $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Поэтому общее решение соответствующего линейного однородного уравнения имеет вид

$$y_0(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Чтобы получить общее решение заданного уравнения, необходимо найти какое-либо его решение $y_1(x)$ и прибавить к уже найденному общему решению $y_0(x)$ линейного однородного уравнения. Согласно принципу суперпозиции решение $y_1(x) = y_2(x) + y_3(x)$, где $y_2(x)$ — какое-либо решение уравнения

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = -8(\cos 2x + 2\sin 2x),$$

а $y_3(x)$ — какое-либо решение уравнения

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = -3e^x.$$

Решение $y_2(x)$ ищем в виде

$$y_2(x) = a\cos 2x + b\sin 2x,$$

а решение $y_3(x)$ ищем в виде

$$y_3(x) = cxe^x,$$

где коэффициенты a, b, c находим подстановкой $y_2(x)$ и $y_3(x)$ в соответствующие уравнения. Подстановка $y_2(x)$ и $y_3(x)$ в уравнения дает $a = -1$,

$b = 0$, $c = 1$. Таким образом, $y_1(x) = -\cos 2x + xe^x$ — решение исходного уравнения. Общее решение заданного уравнения $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$. ▲

Другим методом решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами является метод вариации постоянных.

Пример 3. Методом вариации постоянных решить уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$$

△ Поскольку характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$, то общее решение линейного однородного уравнения $y''+y = 0$ имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Общее решение заданного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — неизвестные пока непрерывно дифференцируемые функции. Согласно методу вариации постоянных для их нахождения составим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $C_1'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $C_2'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$. Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + A,$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} + B,$$

где A и B — произвольные постоянные. Подставляя найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражение для y, найдем общее решение заданного уравнения

$$y = A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| \cos x - \operatorname{tg} x. \quad ▲$$

Еще один метод решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами основан на использовании преобразования Лапласа. Этот метод называют операционным.

Пример 4. Операционным методом решить задачу Коши

$$y'' - 4y' + 3y = 2(e^t + e^{3t}),\ t \geqslant 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$$

Δ Будем считать, что при $t < 0$ $y(t) \equiv 0$ и правая часть уравнения тождественный нуль. Тогда так продолженные на всю числовую ось $t \in (-\infty, +\infty)$ решение и правая часть уравнения являются оригиналами. Если $y(t) \risingdotseq Y(p)$, то в силу свойств преобразования Лапласа и начальных условий $y'(t) \risingdotseq pY(p) + 1$, $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) + p - 1$. Продолженная нулем при $t < 0$ правая часть уравнения имеет своим преобразованием Лапласа функцию $2\left(\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{1}{p-3}\right)$. Переходя в исходном уравнении к преобразованию Лапласа, т. е. умножая его на e^{-pt} и интегрируя по t от нуля до бесконечности, получаем алгебраическое уравнение для нахождения $Y(p)$

$$p^2Y(p) + p - 1 - 4[pY(p) + 1] + 3Y(p) = 2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right).$$

Если считать комплексный параметр p таким, что $\operatorname{Re} p > 3$, то из алгебраического уравнения находим

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-3)}\left[\frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3} - p + 5\right].$$

Разложим правую часть на простые дроби

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{(p-3)^2}.$$

Приравнивая выражения для $Y(p)$, находим

$$A = -2,\ B = -1,\ C = 1,\ D = 1.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение

$$y(t) = (t+1)e^{3t} - (t+2)e^t.$$

▲

Уравнение Эйлера $a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = f(x)$, $x > 0$, заменой $x = e^t$ сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

Пример 5. Решить при $x > 0$ уравнение Эйлера

$$x^2y'' - xy' - 3y = 4x^3.$$

Δ Если положить $x = e^t$, то $y' = e^{-t}y'_t$, $y'' = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$. Подставляя выражения для x, y', y'' в заданное уравнение, получаем

$$y'' - 2y' - 3y = 4e^{3t}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, общее решение полученного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + ate^{3t},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а коэффициент a находится подстановкой функции ate^{3t} в уравнение. Подстановка в уравнение дает $a = 1$. Сделав обратную замену $t = \ln x$, получаем общее решение заданного уравнения Эйлера

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2x^3 + x^3\ln x. \qquad \blacktriangle$$

Решить линейные однородные уравнения (1—38):

1. $y'' - 4y' + 3y = 0.$ **2.** $y'' - 6y' + 8y = 0.$

3. $y'' + 3y' + 2y = 0.$ **4.** $y'' - y' - 2y = 0.$

5. $y'' + 5y' + 6y = 0.$ **6.** $y'' - 4y' + 8y = 0.$

7. $y'' - 6y' + 18y = 0.$ **8.** $y'' - 2y' + 10y = 0.$

9. $y'' + 2y' + 5y = 0.$ **10.** $y'' + 2y' + 2y = 0.$

11. $y'' - 4y' + 4y = 0.$ **12.** $y'' - 6y' + 9y = 0.$

13. $y'' - 8y' + 16y = 0.$ **14.** $y''' + 4y'' - y' - 4y = 0.$

15. $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0.$ **16.** $y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 0.$

17. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0.$

18. $y''' + 3y'' - 4y = 0.$

19. $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0.$

20. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0.$

21. $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0.$

22. $y''' - y'' + y' - y = 0.$

23. $y^{IV} - y''' + 2y' = 0.$

24. $y^{IV} - 7y''' + 14y'' - 8y' = 0.$

25. $y^{IV} - 5y''' + 7y'' - 3y' = 0.$

26. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' + 4y' - 12y = 0.$

27. $y^{IV} + 5y''' + 9y'' + 7y' + 2y = 0.$

28. $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0.$

29. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$

30. $y^{IV} - 2y'' + y = 0.$

31. $y^{IV} + 6y''' + 12y'' + 8y' = 0.$

32. $y^{IV} + 2y''' - 2y'' + 2y' - 3y = 0.$

33. $y^{IV} - 5y''' + 5y'' + 5y' - 6y = 0.$

34. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0.$

35. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$

36. $y^{IV} + 3y'' + 2y = 0.$

37. $y^{IV} + 18y'' + 81y = 0.$

38. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

Решить линейные неоднородные уравнения (39—151):

39. $y'' - 3y' + 2y = (1 + x)e^{2x}.$

40. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}.$

41. $y'' - y' - 2y = -9xe^{-x}.$

42. $y'' + y' - 6y = -18x^2 e^{-x}.$

43. $y'' - y = e^x \cos x.$

44. $y'' - y' + \frac{1}{2}y = e^x \sin x.$

45. $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2e^{2x}.$

46. $y'' + y' - 2y = 2xe^{-2x} + 5\sin x.$

47. $y'' + 4y = 4xe^{-2x} - \sin 2x.$

48. $y'' + 2y' - 3y = 2\cos x - 8xe^{-3x}.$

49. $y'' + 9y = 6xe^{-3x} - 3\cos 3x.$

50. $y'' + 6y' + 9y = 36xe^{3x}.$

51. $y'' - 4y' + 4y = 32xe^{-2x}.$

52. $y'' + y' = (5 - 2x)e^{-x} - 10\sin 2x.$

53. $y'' - y' = (4x + 3)e^x - 2\cos x.$

54. $y'' - 4y' = -8e^{2x}\cos 2x - 8x + 2.$

55. $y'' - 4y' + 13y = -9\cos 2x - 8\sin 2x.$

56. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}.$

57. $y'' - 2y' + 5y = 4\cos x + 2\sin x.$

58. $y'' - 8y' + 20y = -2e^{3x}(2\cos x + \sin x).$

59. $y'' + y' - 6y = -5e^{-3x}.$

60. $y'' - 2y' + y = 2e^x.$

61. $y'' - 7y' + 12y = -e^{3x}.$

62. $y''-2y'+3y=4\cos x-2\sin x+4e^{3x}$. **63.** $y''+2y'-3y=(2-8x)e^{-3x}$.

64. $y''-y'-12y=e^{-2x}(7\cos x-5\sin x)-7e^{-3x}$.

65. $y''+4y=2\cos 2x-8x\sin 2x$. **66.** $y''+4y=2\cos^2 x$.

67. $y''+16y=2\sin^2 x$. **68.** $y''-5y'+6y=10\sin x+e^{2x}$.

69. $y''+2y'+y=xe^{-x}$. **70.** $y''-7y'+6y=\sin x+xe^{x}$.

71. $y''+y=2\sin x\cdot\sin 2x$. **72.** $y'''-2y''-3y'=e^{-2x}$.

73. $y'''-2y''-3y'=x+1$. **74.** $y'''-y''+y'-y=2\cos x$.

75. $y'''-2y''+2y'=5\cos x+2x$. **76.** $y'''+4y'=\operatorname{ch}^2 x$.

77. $y'''-4y'=\cos^2 x$. **78.** $y'''+16y'=\operatorname{sh}^2 2x$.

79. $y'''-16y'=\sin^2 2x$. **80.** $y'''-3y'-2y=e^{-x}$.

81. $y'''+y'=1+\sin x$. **82.** $y'''+y'=4+10e^{2x}$.

83. $y'''-2y''+5y'=5x+4e^{x}$. **84.** $y'''+y'=-2e^{x}(\cos x+3\sin x)-2\cos x$.

85. $y'''-3y''-4y'=-3\cos x-5\sin x+5e^{-x}$.

86. $y'''-y''-6y'=\cos x+7\sin x-6$. **87.** $y'''+y''-2y'=3e^{x}$.

88. $y'''+4y'=8\cos 2x$. **89.** $y'''+2y''+y'=4\cos x+1$.

90. $y'''-4y'=2e^{-x}(3\cos x+\sin x)$. **91.** $y'''+6y''+5y'=-4e^{-x}$.

92. $y'''-3y''+y'-3y=6\sin x-2\cos x$.

93. $y'''-4y''+y'-4y=2\cos x-8\sin x$.

94. $y'''+4y''+5y'+2y=e^{-2x}$. **95.** $y'''+4y''+4y'=-4e^{-2x}$.

96. $y'''-3y''+4y=6e^{2x}$. **97.** $y'''-y''-y'+y=e^{-x}(3\sin x-4\cos x)$.

98. $y'''-8y''+19y'-12y=2e^{3x}-8\cos x-36\sin x$.

99. $y'''+y''=e^{-x}+2\cos x$. **100.** $y'''-2y''=\sin x$.

101. $y'''-2y''=e^{2x}$. **102.** $y'''+y''-2y'=e^{3x}$.

103. $y'''+y''-2y'=2-x$. **104.** $y'''+2y''=\cos x$.

105. $y'''-2y''+2y'=4x+\cos x$. **106.** $y'''-16y'=48x^2+2\cos^2 2x$.

107. $y''' - 2y'' + 2y' = 20\sin^2\frac{x}{2}$. **108.** $y''' + 4y' = e^{2x} - 8\sin 2x$.

109. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 40\sin^2 x$. **110.** $y''' + 2y'' = 2e^{-2x}$.

111. $y''' - 4y'' + 5y' = 15x^2 - 4x + 8\sin x$.

112. $y''' - 2y'' + 2y' = 6x^2 + 2 + 20\cos 2x$.

113. $y''' - 6y'' + 10y' = 13\cos x + 10x$.

114. $y''' + 2y'' + 5y' = 2x - 17\sin 2x$.

115. $y''' - 2y'' + y' = 2x + 2\cos x$. **116.** $y''' - 2y'' = 16\sin 2x - 12x$.

117. $y''' - y'' + y' - y = 4xe^x + 4$. **118.** $y''' + y'' + y' + y = 4xe^{-x} + 4$.

119. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 40\cos^2 x$. **120.** $y^{IV} - 2y'' + y = 1 + x^2$.

121. $y^{IV} - y = e^x\cos x$. **122.** $y^{IV} + 2y'' + y = x^2 + 9\sin 2x$.

123. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 16x^2 + 9\sin x$.

124. $y^{IV} + 18y'' + 81y = 64\cos x - 81x^2$.

125. $y^{IV} + 50y'' + 625y = 576\cos x + 625x^2$.

126. $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 6(1 + 5x) + e^{2x}$.

127. $y^{IV} + 2y'' + y = x + \cos 2x$. **128.** $y^{IV} - 16y'' = 64\sin^2 2x$.

129. $y^{IV} + 3y'' - 4y = 10\sin 2x + 6e^{2x}$. **130.** $y^{IV} + y'' = \sin^2\frac{x}{2}$.

131. $y^{IV} - y'' - 2y = 12\sin 3x\cos 2x - 6(e^{-2x} + \sin 5x)$.

132. $4y^{IV} - y'' = 12x\,\mathrm{sh}^2\frac{x}{2} + 3(8 - xe^{-x})$. **133.** $y^{IV} - 4y'' = 16\,\mathrm{ch}^2 x - 8$.

134. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' = 10\cos^2 x + 5(xe^x - 1)$.

135. $y^{IV} - 2y''' - 3y'' = 8\,\mathrm{sh}\,x + 10xe^x$.

136. $y^{IV} + 2y'' + y = 18\sin^2 x + 3\sin 2x + x^3$.

137. $y^{IV} - 2y'' + y = 8\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{2} + x^2 - 2e^{-x}$.

138. $y^{IV} + y''' - 2y'' = 3e^x + 32e^{2x}$. **139.** $y^{IV} + y'' = 8\cos^2\frac{x}{2}$.

140. $y^{IV} - 3y'' - 4y = 24\cos 2x + 20e^{2x}$. **141.** $y^{IV} + 3y''' - 4y'' = 5\,\mathrm{sh}\,x$.

142. $y^{IV} - y = -8(\cos x + 3\sin x)e^{2x} - 4e^{-x}$.

143. $y^{IV} - y'' = 4x\cos x + 12\sin x - 2e^{x}$.

144. $y^{IV} - 4y''' + 3y'' = 4\cos x + 8\sin x + 6$.

145. $y^{IV} + 7y''' + 16y'' + 10y' = -5e^{-x}$.

146. $y^{IV} - 3y''' + 4y' = -\cos x + 7\sin x + 4$.

147. $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' = 2(\sin x - \cos x) + 2x + 6$.

148. $y^{IV} - 2y'' + y = 8e^{x} - 4\cos x$.

149. $y^{IV} - y''' - y'' - y' - 2y = -6e^{-x}$.

150. $y^{IV} - y''' - 3y'' + y' + 2y = -5(\cos x + \sin x)e^{-x}$.

151. $y^{IV} - 2y''' - 2y'' = 4\operatorname{ch} x$.

Методом вариации постоянных решить уравнения (152—171):

152. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

153. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{x}}$.

154. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{x}}{1 + e^{x}}$.

155. $y'' - y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$.

156. $y'' - 2y' = 5(3 - 4x)\sqrt{x}$.

157. $y'' - 2y' + 10y = \dfrac{9e^{x}}{\cos 3x}$.

158. $y'' - 4y' + 8y = 4(7 - 21x + 18x^2)\sqrt[3]{x}$.

159. $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$.

160. $y'' - 4y = (15 - 16x^2)\sqrt{x}$.

161. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x + 1}$.

162. $y'' + 3y' = \dfrac{3x - 1}{x^2}$.

163. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{2e^{2x}}{1 + x^2}$.

164. $y'' + y' = 7(4 + 3x)\sqrt[3]{x}$.

165. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\sin x}$.

166. $y'' + 2y = 2 - 4x^2\sin x^2$.

167. $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{2e^{-x}}{\cos 2x}$.

168. $y'' + 2y' + y = (x + 2)\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$.

169. $y'' - 2y = -2 - 4x^2\cos x^2$.

170. $y'' - y' = -\dfrac{x + 1}{x^2}$.

171. $y'' - 2y' = \dfrac{1}{x} - 2\ln(ex)$.

Операционным методом решить при $t \geqslant 0$ задачу Коши (172—183):

172. $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

173. $y'' - y' - 2y = 3te^{t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

174. $y'' - 5y' + 4y = (10t + 1)e^{-t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

175. $y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

176. $y'' - 2y' + y = 2e^{t}$, $y(0) = y'(0) = 1$.

177. $y'' + 2y' + y = (t + 2)e^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

178. $y'' - 2y' - 3y = 4e^{3t} - 4e^{-t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

179. $y'' + y = 4\cos t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

180. $y'' + y = 5te^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

181. $y'' + 9y = 6\cos 3t + 9\sin 3t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

182. $y'' + 4y = 4(\cos 2t + \sin 2t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

183. $y'' + y = 2(\cos t - \sin t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решить при $x > 0$ уравнения Эйлера (184—207):

184. $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$.

185. $2x^2y'' - xy' - 2y = 0$.

186. $4x^2y'' - 3y = 0$.

187. $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$.

188. $x^2y'' + 5xy' + 8y = 0$.

189. $2x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$.

190. $x^2y'' - 6y = 0$.

191. $2x^2y'' + 5xy' - 2y = 0$.

192. $x^2y'' + 3xy' - 3y = -\dfrac{15}{2\sqrt{x}}$.

193. $4x^2y'' - 4xy' - 5y = -4\sqrt{x}$.

194. $x^2y'' - 2y = -2x^3$.

195. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 4x^3$.

196. $x^2y'' + xy' + y = 10x^2$.

197. $x^2y'' + 3xy' + y = \dfrac{1}{x}$.

198. $x^2y'' + xy' + y = -2\sin(\ln x)$.

199. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^2 - \dfrac{3}{x}$.

200. $x^2y'' + 2xy' - 2y = \ln x$.

201. $x^2y'' - 6y = -16x^2\ln x$.

202. $x^2y'' + xy' - 4y = -9x\ln x$.

203. $x^2y'' - 20y = 10x^6$.

204. $x^2y'' + 3xy' - 3y = -\dfrac{3}{x^2}.$

205. $x^2y'' - xy' - 8y = 11x^3 \ln x.$

206. $2x^2y'' + xy' - y = -\dfrac{6}{x}.$

207. $x^2y'' - 2y = \dfrac{4}{x^2}.$

Решить каким-либо способом задачу Коши (208—236):

208. $y'' + y = -2\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

209. $y'' - y' - 2y = -18xe^{-x}$, $y(1) = 5e^{-1}$, $y'(1) = 3e^{-1}$.

210. $9y'' + y = 6\sin\dfrac{x}{3}$, $y(3\pi) = 0$, $y'(3\pi) = 1$.

211. $y'' + y = \cos(x-1)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

212. $4y'' + y = 4\cos\dfrac{x}{2}$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.

213. $y'' + y = 2\sin(x+1)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

214. $y'' - 2y' + y = 2e^x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -e$.

215. $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$, $y(1) = e$, $y'(1) = 5e$.

216. $y'' - 4y' = -8e^{2x}\cos 2x - 8x + 2$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -6$.

217. $y'' + 3y' + 2y = -2\cos 2x - 6\sin 2x - e^{-2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -7$.

218. $y'' - 2y' - 3y = 4\cos x - 2\sin x + 4e^{3x}$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$.

219. $y'' + y = \sin(x-1)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

220. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

221. $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{x}e^{-x}$, $y(1) = y'(1) = 0$.

222. $y'' - 2y' + y = \dfrac{1}{x}e^{x}$, $y(1) = y'(1) = 0$.

223. $y^{IV} - 2y'' + y = 1 + x^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

224. $x^2y'' + 2xy' - 2y = -\dfrac{3}{x^2}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

225. $x^2y'' + 2xy' - 6y = x^3$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \dfrac{1}{6}$.

226. $x^2y'' + xy' - y = \ln x$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

227. $4x^2y'' - 3y = 5x^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

228. $x^2y'' + xy' - y = 2x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

229. $y''' + y' = 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

230. $y''' - y' = 6 - 3x^2$, $y(1) = y'(1) = 0$, $y''(1) = 3$.

231. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y'''(0) = -4$.

232. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = x^2 + x + 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

233. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

234. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \dfrac{\pi}{2} + 4\cos x$, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = -3$.

235. $y^{(8)} + 2y^{(6)} - 2y'' - y = 0$, $y(0) = y''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(6)}(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y'''(0) = 2$, $y^{(5)}(0) = -1$, $y^{(7)}(0) = 11$.

236. $y^{(8)} - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = y^{(6)}(0) = y^{(7)}(0) = 0$.

237. Найти решение уравнения $y''' - 3y' - 2y = xe^{-x}$, ограниченное при $x \to +\infty$ и удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

238. Составить линейное однородное уравнение наименьшего порядка $Ly = 0$ с постоянными вещественными коэффициентами, имеющее решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, и решить неоднородное уравнение $Ly = f(x)$, если:

а) $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = e^{-x}$, $f(x) = x + 2e^{-x}$,

б) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^{x}$, $f(x) = 2\sin x - 2$,

в) $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = e^{x}$, $f(x) = 2e^{x} - x$,

г) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^{-x}$, $f(x) = 2 - 2\cos x$.

239. Доказать, что любое решение уравнения

$$y^{V} - y^{IV} - 9y''' + y'' + 20y' + 12 = 0$$

однозначно представимо в виде суммы решений уравнений $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$ и $y'' - 4y = 0$.

240. Верно ли, что каждое решение уравнения $y'' - y' - 2y = 0$ удовлетворяет уравнению

$$y^V - 3y^{IV} - y''' + 7y'' - 4y = 0?$$

Ответы к задачам § 8

1. $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

2. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$.

3. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$.

4. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$.

5. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$.

6. $y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

7. $y = e^{3x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

8. $y = e^{x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

9. $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

10. $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

11. $y = e^{2x}(C_1x + C_2)$.

12. $y = e^{3x}(C_1x + C_2)$.

13. $y = e^{4x}(C_1x + C_2)$.

14. $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-x} + C_3e^x$.

15. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} + C_3e^x$.

16. $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{4x}$.

17. $y = C_1e^{-2x} + e^{-x}(C_2x + C_3)$.

18. $y = e^{-2x}(C_1x + C_2) + C_3e^x$.

19. $y = C_1e^x + e^x(C_2\cos 2x + C_3\sin 2x)$.

20. $y = C_1e^{-x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$.

21. $y = C_1e^{-x} + e^{-x}(C_2\cos x + C_3\sin x)$.

22. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x$.

23. $y = C_1e^{-x} + C_2 + e^x(C_3\cos x + C_4\sin x)$.

24. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x} + C_4e^{4x}$.

25. $y = C_1 + e^x(C_2x + C_3) + C_4e^{3x}$.

26. $y = C_1e^{-x} + e^{2x}(C_2x + C_3) + C_4e^{3x}$.

27. $y = C_1e^{-2x} + e^{-x}(C_2x^2 + C_3x + C_4)$.

28. $y = e^{-x}(C_1x + C_2) + C_3\cos x + C_4\sin x$.

29. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + e^x(C_3x + C_4)$.

30. $y = e^{-x}(C_1x + C_2) + e^x(C_3x + C_4)$.

31. $y = C_1 + e^{-2x}(C_2x^2 + C_3x + C_4)$.

32. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3e^{-3x} + C_4e^x$.

33. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x} + C_4e^{3x}$.

34. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

35. $y = (C_1x + C_2) \cos 2x + (C_3x + C_4) \sin 2x$.

36. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos x\sqrt{2} + C_4 \sin x\sqrt{2}$.

37. $y = (C_1x + C_2) \cos 3x + (C_3x + C_4) \sin 3x$.

38. $y = e^{-x}(C_1x^2 + C_2x + C_3)$.

39. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$.

40. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \dfrac{x^4}{12}e^{-x}$.

41. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \left(x + \dfrac{3}{2}x^2\right) e^{-x}$.

42. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + \left(3x^2 - x + \dfrac{7}{6}\right) e^{-x}$.

43. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x - \dfrac{1}{5}e^x(\cos x + 2 \sin x)$.

44. $y = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \sin \dfrac{x}{2} + C_2 \cos \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{2}{5}e^x(\sin x + 2 \cos x)$.

45. $y = e^{2x}(C_1 + C_2x + x^2) + \dfrac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$.

46. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x - \dfrac{1}{9}(3x^2 + 2x)e^{-2x} - \dfrac{1}{2}(3 \sin x + \cos x)$.

47. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4}(2x + 1)e^{-2x} + \dfrac{1}{4}x \cos 2x$.

48. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^x + \dfrac{1}{2}(2x^2 + x)e^{-3x} - \dfrac{1}{5}(2 \cos x - \sin x)$.

49. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \dfrac{1}{9}(3x + 1)e^{-3x} - \dfrac{1}{2}x \sin 3x$.

50. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x} + \left(x - \dfrac{2}{3}\right) e^{3x}.$

51. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + (2x + 1)e^{-2x}.$

52. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x} + \cos 2x + 2\sin 2x.$

53. $y = C_1 + C_2 e^{x} + x(2x - 1)e^{x} + \cos x + \sin x.$

54. $y = C_1 + C_2 e^{4x} + e^{2x}\cos 2x + x^2.$

55. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \cos 2x.$

56. $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + x^2 e^{-2x}.$

57. $y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \cos x.$

58. $y = e^{4x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - e^{3x}\cos x.$

59. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + x e^{-3x}.$

60. $y = e^{x}(C_1 + C_2 x) + x^2 e^{x}.$

61. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + x e^{3x}.$

62. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \cos x + x e^{3x}.$

63. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + x^2 e^{-3x}.$

64. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x} - e^{-2x}\cos x + x e^{-3x}.$

65. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x^2 \cos 2x.$

66. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4}(1 + x \sin 2x).$

67. $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \dfrac{1}{16}(1 - 2x \sin 4x).$

68. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - x e^{2x} + \sin x + \cos x.$

69. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + \dfrac{1}{6} x^3 e^{-x}.$

70. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x} - x\left(\dfrac{x}{10} + \dfrac{1}{25}\right) e^{x} + \dfrac{1}{74}(7\cos x + 5\sin x).$

71. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{5} x(\cos x + 2\sin x) + \dfrac{1}{8}\cos 3x.$

72. $y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 e^{3x} - \frac{1}{10} e^{-2x}$.

73. $y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 e^{3x} - \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{9} x$.

74. $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{1}{2} x(\sin x + \cos x)$.

75. $y = C_1 + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x) + 2\cos x + \sin x + x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

76. $y = C_1 + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \operatorname{sh} 2x$.

77. $y = C_1 + C_2 \operatorname{sh} 2x + C_3 \operatorname{ch} 2x - \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 2x$.

78. $y = C_1 + C_2 \sin 4x + C_3 \cos 4x - \frac{x}{32} + \frac{1}{256} \operatorname{sh} 4x$.

79. $y = C_1 + C_2 \operatorname{sh} 2x + C_3 \operatorname{ch} 2x + \frac{x}{32} - \frac{1}{256} \sin 4x$.

80. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + C_3 e^{2x} - \frac{x2}{6} e^{-x}$.

81. $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + x - \frac{1}{2} x \sin x$.

82. $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + 4x + e^{2x}$.

83. $y = C_1 + e^x (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x) + e^x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{5} x$.

84. $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + 2e^x \cos x + x \cos x$.

85. $y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 e^{4x} - \cos x + x e^{-x}$.

86. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 e^{3x} + \cos x + x$.

87. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 e^x + x e^x$.

88. $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - x \cos 2x$.

89. $y = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3 x) - 2\cos x + x$.

90. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 e^{2x} + e^{-x} \cos x$.

91. $y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 e^{-5x} + x e^{-x}$.

92. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{3x} + x \cos x$.

93. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{4x} - x \cos x.$

94. $y = C_1 e^{-2x} + e^{-x}(C_2 + C_3 x) + x e^{-2x}.$

95. $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + C_3 + x^2 e^{-2x}.$

96. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x} + x^2 e^{2x}.$

97. $y = C_1 e^{-x} + e^{x}(C_2 + C_3 x) - e^{-x} \cos x.$

98. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{4x} + 2 \cos x - x e^{3x}.$

99. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} - \cos x - \sin x + x e^{-x}.$

100. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + \dfrac{1}{5}(\cos x + 2 \sin x).$

101. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + \dfrac{1}{4} x e^{2x}.$

102. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 e^{x} + \dfrac{1}{30} e^{3x}.$

103. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 e^{x} + \dfrac{1}{4}(x^2 - 3x).$

104. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 x - \dfrac{1}{5}(2 \cos x + \sin x).$

105. $y = C_1 + e^{-x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x) + x^2 + 2x + \dfrac{1}{5}(2 \cos x + \sin x).$

106. $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{4x} - x^3 - \dfrac{1}{16}\left(7x + \dfrac{1}{8} \sin 4x\right).$

107. $y = C_1 + e^{x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x) + 5x - 4 \cos x - 2 \sin x.$

108. $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + x \sin 2x + \dfrac{1}{16} e^{2x}.$

109. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 e^{-x} + x(2 \cos 2x - \sin 2x) + 5.$

110. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 x + \dfrac{1}{2} x e^{-2x}.$

111. $y = C_1 + e^{2x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x) + x^3 + 2x^2 + 2x + \sin x - \cos x.$

112. $y = C_1 + e^{x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x) + x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \cos 2x - \sin 2x.$

113. $y = C_1 + e^{3x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x) + \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{3}{5} x + \dfrac{2}{3} \cos x + \sin x.$

114. $y = C_1 + e^{-x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x) + \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 2\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x.$

115. $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x + x^2 + 4x + \cos x.$

116. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \sin 2x + \cos 2x.$

117. $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + (x^2 - 2x)e^x - 4.$

118. $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + (x^2 + 2x)e^{-x} + 4.$

119. $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - x(2\cos 2x + \sin 2x) - 5.$

120. $y = e^x(C_1 + C_2 x) + e^{-x}(C_3 + C_4 x) + x^2 + 5.$

121. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \sin x + C_4 \cos x - \frac{1}{5}e^x \cos x.$

122. $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x + \sin 2x + x^2 - 4.$

123. $y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x + x^2 - 1 + \sin x.$

124. $y = (C_1 + C_2 x)\cos 3x + (C_3 + C_4 x)\sin 3x + \cos x - x^2 + \frac{4}{9}.$

125. $y = (C_1 + C_2 x)\cos 5x + (C_3 + C_4 x)\sin 5x + \cos x + x^2 - \frac{4}{25}.$

126. $y = C_1 + C_2 x + e^{2x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x) + x^2(3 + x) + \frac{1}{4}e^{2x}.$

127. $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x + x + \frac{1}{9}\cos 2x.$

128. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-4x} + C_4 e^{4x} - x^2 - \frac{1}{16}\cos 4x.$

129. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x\cos 2x.$

130. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{4}x(x + \sin x).$

131. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-x\sqrt{2}} + C_4 e^{x\sqrt{2}} + x\cos x - \frac{3}{5}e^{-2x}.$

132. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\frac{x}{2}} + C_4 e^{-\frac{x}{2}} + \left(x - \frac{14}{3}\right)e^x + x^2(x - 12).$

133. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} + \frac{1}{2}x \operatorname{sh} 2x.$

134. $y = C_1 + C_2x + e^x(C_3\cos x + C_4\sin x) + \frac{1}{8}(\cos 2x + 2\sin 2x)$.

135. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4e^{3x} + \left(4 - \frac{5}{2}x\right)e^x + xe^{-x}$.

136. $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x - \cos 2x + \frac{1}{3}\sin 2x + x^3 - 12x + 9$.

137. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3 + C_4x)e^x + \frac{1}{4}x^2e^x + x^2 + 8$.

138. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-2x} + xe^x + 2e^{2x}$.

139. $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + 2x^2 - 2x\sin x$.

140. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x} + \cos 2x + xe^{2x}$.

141. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-4x} + \frac{1}{2}xe^x + \frac{5}{12}e^{-x}$.

142. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\cos x + C_4\sin x + e^{2x}\cos x + xe^{-x}$.

143. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x} + 2x\cos x - xe^x$.

144. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{3x} - 2\cos x + x^2$.

145. $y = C_1 + C_2e^{-x} + e^{-3x}(C_3\cos x + C_4\sin x) + xe^{-x}$.

146. $y = C_1 + C_2e^{-x} + e^{2x}(C_3 + C_4x) - \cos x + x$.

147. $y = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3x + C_4x^2) + \cos x + x^2$.

148. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + e^x(C_3 + C_4x) + x^2e^x - \cos x$.

149. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + C_3\cos x + C_4\sin x + xe^{-x}$.

150. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + C_3e^x + C_4e^{2x} + e^{-x}\cos x$.

151. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{(1-\sqrt{3})x} + C_4e^{(1+\sqrt{3})x} - \frac{2}{3}e^x + 2e^{-x}$.

152. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 1 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$.

153. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (e^x + e^{2x})[x - \ln(1 + e^x)] + e^x + \frac{1}{2}$.

154. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (e^x - e^{2x})[x - \ln(1 + e^x)] - e^x$.

155. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + 2\operatorname{arctg} e^x \cdot \operatorname{ch} x - 1$.

156. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + 4x^2\sqrt{x}$.

157. $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^x(\ln|\cos 3x| \cos 3x + 3x \sin 3x)$.

158. $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 9x^2\sqrt[3]{x}$.

159. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2 - \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| \cos x$.

160. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + 4x^2\sqrt{x}$.

161. $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + e^{-2x}[(x+1)\ln|x+1| - x]$.

162. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 + \ln|x|$.

163. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + e^{2x}[2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)]$.

164. $y = C_1 e^{-x} + C_2 + 9x^2\sqrt[3]{x}$.

165. $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(\ln|\sin x| \sin x - x \cos x)$.

166. $y = C_1 \cos(x\sqrt{2}) + C_2 \sin(x\sqrt{2}) + \sin x^2$.

167. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x}\left(x \sin 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| \cos 2x\right)$.

168. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + x \ln x$.

169. $y = C_1 e^{-x\sqrt{2}} + C_2 e^{x\sqrt{2}} + \cos x^2$.

170. $y = C_1 + C_2 e^x + \ln|x|$.

171. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + x \ln x$.

172. $y = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{3}{2}e^t + \frac{4}{3}e^{2t}$.

173. $y = -\frac{1}{4}e^{-t} + e^{2t} - \frac{3}{4}(1+2t)e^t$.

174. $y = -e^t + \frac{1}{5}e^{4t} + \left(\frac{4}{5} + t\right)e^{-t}$.

175. $y = 3e^{-3t} + (t-4)e^{-2t}$.

176. $y = (t^2+1)e^t$.

177. $y = \left(1 + t^2 + \frac{1}{6}t^3\right)e^{-t}$.

178. $y = (2+t)e^{-t} + te^{3t}$.

179. $y = \cos t + (2t-1)\sin t$.

180. $y = \frac{4}{5}(\cos t + 2\sin t) + \left(t - \frac{4}{5}\right)e^{2t}$.

181. $y = \left(1 - \frac{3}{2}t\right)\cos 3t + \left(t + \frac{1}{2}\right)\sin 3t$.

182. $y = (1+t)\sin 2t - t\cos 2t$.

183. $y = (1+t)(\cos t + \sin t)$.

184. $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-4}$.

185. $y = C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{\sqrt{x}}$.

186. $y = \dfrac{C_1}{\sqrt{x}} + C_2 x\sqrt{x}$.

187. $y = C_1 x^4 + \dfrac{C_2}{x}$.

188. $y = \dfrac{1}{x^2}[C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x)]$.

189. $y = C_1 x\sqrt{x} + C_2\sqrt{x}$.

190. $y = C_1 x^3 + \dfrac{C_2}{x^2}$.

191. $y = C_1\sqrt{x} + \dfrac{C_2}{x^2}$.

192. $y = \dfrac{C_1}{x^3} + C_2 x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

193. $y = C_1 x^2\sqrt{x} + \dfrac{C_2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

194. $y = C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{x} - \dfrac{1}{2}x^3$.

195. $y = x^2(C_1 + C_2\ln x) + x^3$.

196. $y = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) + 2x^2$.

197. $y = \dfrac{1}{x}(C_1 + C_2\ln x) + \dfrac{1}{2x}\ln^2 x$.

198. $y = \left[C_1 - \dfrac{2}{3}\sin^3(\ln x)\right]\cos(\ln x) + \left[C_2 - \dfrac{1}{2}\cos(2\ln x)\right]\sin(\ln x)$.

199. $y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + 2x^2\ln x - \dfrac{1}{4x}$.

200. $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x^2} - \dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}$.

201. $y = \dfrac{C_1}{x^2} + C_2 x^3 + x^2(4\ln x + 3)$.

202. $y = C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{x^2} + x(3\ln x + 2)$.

203. $y = \dfrac{C_1}{x^4} + C_2 x^5 + x^6$.

204. $y = C_1 x^3 + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

205. $y = \dfrac{C_1}{x^2} + C_2 x^4 - \dfrac{11}{25}x^3(5\ln x + 4)$.

206. $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x}$.

207. $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2 x^2 + \dfrac{4}{x^2}$.

208. $y = x\cos x$.

209. $y = (3x^2 + 2x)e^{-x}$.

210. $y = (3\pi - x)\cos\dfrac{x}{3}$.

211. $y = \dfrac{1}{2}\sin 1\sin x + \dfrac{1}{2}x\sin(x-1)$.

212. $y = (x - 2\pi)\cos\dfrac{x}{2}$.

213. $y = \cos 1\sin x - x\cos(x+1)$.

214. $y = e^x(x^2 - 3x + 2)$.

215. $y = 8e^{2x-1} - (x^2 + 2x + 4)e^x$.

216. $y = 6 - 2e^{4x} + e^{2x}\cos 2x + x^2$.

217. $y = (x+6)e^{-2x} - 4e^{-x} + \cos 2x$.

218. $y = (x+3)e^{3x} + 3e^{-x} - \cos x$.

219. $y = \frac{1}{2}\cos 1 \sin x - \frac{1}{2}x\cos(x-1)$.

220. $y = (x+1)\sin x + \cos x \ln|\cos x|$.

221. $y = (1 - x + x\ln x)e^{-x}$.

222. $y = (1 - x + x\ln x)e^{x}$.

223. $y = x^2 + 5 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{2}\right)e^x - \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\right)e^{-x}$.

224. $y = \frac{1}{x^2}\ln x$.

225. $y = \frac{1}{6}x^2(x-1)$.

226. $y = 2x - \ln x$.

227. $y = x^2$.

228. $y = x\ln x$.

229. $y = x^2 + \sin x$.

230. $y = x^3 + 2 - 3e^{x-1}$.

231. $y = x\cos x + \sin x$.

232. $y = \frac{35}{54} - \frac{4}{9}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x} - \frac{4}{27}e^{-3x}$.

233. $y = \frac{1}{54}\left(-9x^2 - 42x + 108e^x - 54e^{2x} + 14e^{3x} - 68\right)$.

234. $y = x\cos x + \frac{\pi}{2}$.

235. $y = e^x - e^{-x} + \frac{9}{8}x\cos x + \frac{3}{8}(x^2 - 3)\sin x$.

236. $y = \frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\operatorname{ch} x + \frac{1}{4}\cos x$.

237. $y = (1+x)\left(1 - \frac{x^2}{18}\right)e^{-x}$.

238. а) $y''' + y'' + y' + y = 0$, $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^{-x} + x - 1 + xe^{-x}$,

б) $y''' - y'' = 0$, $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + \sin x + \cos x - x^2$,

в) $y''' - y'' + y' - y = 0$, $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x + x + 1 + xe^x$,

г) $y''' + y'' = 0$, $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \sin x + \cos x + x^2$.

240. Да.

§ 9. Методы решения линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

Для получения общего решения линейного неоднородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами наиболее часто применяется следующий метод. Сначала путем подбора находят какое-нибудь решение соответствующего линейного однородного уравнения и с помощью формулы Лиувилля-Остроградского получают общее решение линейного однородного уравнения. Затем методом вариации постоянных находят общее решение заданного линейного неоднородного уравнения.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$xy'' - (1+x)y' + 2(1-x)y = 9x^2e^{2x}, \quad x > 0.$$

Δ Рассмотрим однородное уравнение

$$xy'' - (1+x)y' + 2(1-x)y = 0$$

и попробуем найти его решение вида $e^{\alpha x}$. Подставив $e^{\alpha x}$ в это уравнение, находим $\alpha = 2$. Следовательно, e^{2x} — решение. Запишем формулу Лиувилля-Остроградского для однородного уравнения:

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & y \\ 2e^{2x} & y' \end{vmatrix} = Ce^{\int \frac{1+x}{x}\,dx} = Cxe^x.$$

Отсюда $e^{2x}y' - 2e^{2x}y = Cxe^x$. При делении обеих частей этого уравнения на e^{4x} получаем уравнение

$$\left(\frac{y}{e^{2x}}\right)' = Cxe^{-3x}.$$

Отсюда находим общее решение однородного уравнения

$$y = C_1e^{2x} + C_2(1+3x)e^{-x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Чтобы найти общее решение заданного уравнения, применим метод вариации постоянных. Ищем решение неоднородного уравнения в таком же виде, как общее решение однородного уравнения, но считаем C_1 и C_2

не произвольными постоянными, а некоторыми непрерывно дифференцируемыми функциями. Для их нахождения составляем линейную систему уравнений для $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ следующего вида:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)(1+3x)e^{-x} = 0, \\ 2C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)(2-3x)e^{-x} = 9xe^{2x}. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $C_1'(x) = 1+3x$, $C_2'(x) = -e^{3x}$. Следовательно, $C_1(x) = A + x + \frac{3}{2}x^2$, $C_2(x) = B - \frac{1}{3}e^{3x}$, где A и B — произвольные постоянные.

Таким образом, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = e^{2x}\left(A + x + \frac{3}{2}x^2\right) + (1+3x)e^{-x}\left(B - \frac{1}{3}e^{3x}\right) =$$
$$= Ae^{2x} + B(1+3x)e^{-x} + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}\right)e^{2x}. \qquad \blacktriangle$$

Другим распространенным методом решения линейных уравнений с переменными коэффициентами является метод замены переменных.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x^4y'' + 2x^3y' - y = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - 1}, \quad x > 0,$$

с помощью замены $x = -\frac{1}{t}$.

$\triangle$ После замены уравнение принимает вид

$$y_{tt}'' - y = \frac{e^{-t}}{e^{-t} - 1}.$$

Решая это уравнение методом вариации постоянных, находим, что

$$y(t) = e^t\left(A - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\ln\frac{e^t}{1-e^t}\right) + e^{-t}\left(B + \frac{1}{2}\ln(1-e^t)\right),$$

где A и B — произвольные постоянные. Полагая $t = -\frac{1}{x}$, после приведения подобных членов отсюда получаем общее решение заданного уравнения

$$y = Ae^{-\frac{1}{x}} + Be^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}e^{-\frac{1}{x}} + \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right). \qquad \blacktriangle$$

Найти общее решение уравнений (1—66):

1. $\left(2x^2+3x\right)y''-6(x+1)y'+6y=x(2x+3)^2,\ x>0.$

2. $x(x+4)y''-(2x+4)y'+2y=x+4,\ x>0.$

3. $\left(2x-x^2\right)y''+\left(x^2-2\right)y'+(2-2x)=\left(2x-x^2\right)^2.$

4. $\dfrac{\ln x+1}{2\ln x+3}y''-\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{1}{x^2}y=(\ln x+1)^2.$

5. $x(1+2x)y''+2(1+x)y'-2y=(1+2x)^2\sin x,\ x>0.$

6. $(1-\ln x)y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{1}{x^2}y=(1-\ln x)^2.$

7. $xy''-(1+x)y'+y=\dfrac{x^2}{1+x},\ x>0.$

8. $x^2y''-2x(1+x)y'+2(1+x)y=2x^3e^{2x}.$

9. $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=4(2x+1)^3.$

10. $2xy''+(4x+1)y'+(2x+1)y=e^{-x},\ x>0.$

11. $xy''-(6x+2)y'+(9x+6)y=12x^3e^{3x}.$

12. $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2e^x.$

13. $xy''-(2x+1)y'+2y=16x^2e^{4x}.$

14. $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=x^3e^x.$

15. $\left(x^2-3x\right)y''+\left(6-x^2\right)y'+(3x-6)y=(x-3)^2.$

16. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=2x^2e^{2x}.$

17. $(x-1)y''-(x+1)y'+2y=(x-1)^3e^x.$

18. $x(2x+1)y''+2\left(1-2x^2\right)y'-4(x+1)y=(2x+1)^2,\ x>0.$

19. $x(x+3)y''+\left(12-x^2\right)y'-3(x+4)y=(x+3)^2,\ x>0.$

20. $2x(x-2)y''+\left(x^2-8\right)y'+(x-4)y=(x-2)^2,\ x>2.$

21. $x(x-2)y''+\left(x^2-6\right)y'+2(x-3)y=(x-2)^2,\ x>2.$

22. $x^2y''-x\left(x^2+3\right)y'+\left(x^2+3\right)y=10x^5\sin x^2.$

23. $(x-1)y''+(1-2x)y'+xy=\dfrac{1}{2}(x-1)^2.$

24. $x^2(x-1)y'' + 2xy' - 2y = x^3e^x$.

25. $xy'' + (2-2x)y' + (x-2)y = e^{2x}$, $x > 0$.

26. $\left(1-x^2\right)y'' + 2y' - \dfrac{2}{x+1}y = (1-x)^2(1+x)e^{-x}$.

27. $x(x+1)y'' + 2y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^2e^{2x}$, $x > 0$.

28. $x(3x+2)y'' + 3\left(2-3x^2\right)y' - 18(x+1)y = (3x+2)^2$, $x > 0$.

29. $2x(x+2)y'' + \left(8-x^2\right)y' - (x+4)y = (x+2)^2$, $x > 0$.

30. $x(3x-2)y'' + 3\left(3x^2-2\right)y' + 18(x-1)y = (3x-2)^2$, $x > \dfrac{2}{3}$.

31. $(\ln x)y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = \ln^2 x$.

32. $2xy'' - (x+2)y' + y = \dfrac{x^3}{x+2}$, $x > 0$.

33. $xy'' - (4x-2)y' + 4(x-1)y = e^{2x}\cos x$.

34. $x^2y'' + x(-2 + x\operatorname{tg} x)y' + (2 - x\operatorname{tg} x)y = x^3e^x\cos x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

35. $(1-x)y'' + (2-4x)y' - 4xy = e^{-2x}\sin x$.

36. $(x+1)y'' + (x-1)y' - 2y = e^{-x}(x+1)^3$.

37. $\left(2x-x^2\right)y'' + 2y' - \dfrac{2}{x}y = (2-x)^2xe^{-x}$.

38. $(x-1)^2y'' - \left(x^2-1\right)y' + (x+1)y = (x-1)^3(3x-2)e^x$.

39. $(x+1)^2y'' - 2\left(x^2+3x+2\right)y' + 2(x+2)y = -2x(x+1)^3e^{2x}$.

40. $x(x+1)^2y'' + 2(x+1)y' - 2y = (x+1)^3e^x$, $x > 0$.

41. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 2\operatorname{ch} x$, $x > 0$.

42. $(x-1)^2y'' - 2x(x-1)y' + 2xy = (x-1)^4$.

43. $2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = \dfrac{1}{x}e^{-x}\ln x$.

44. $3xy'' + (6x+1)y' + (3x+1)y = x^2e^{-x}$.

45. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = x(\ln x - 1)^2$.

46. $xy'' - (4x+2)y' + (4x+4)y = x^2e^{2x}$, $x > 0$.

47. $y'' - 3y'\operatorname{ctg} x + \left(\dfrac{3}{\sin^2 x} - 2\right) y = 2\sin^2 x$, $0 < x < \pi$.

48. $(x\ln x)y'' + (\ln x + 1)y' - \dfrac{y}{x\ln x} = \dfrac{2\ln x}{x}$, $x > 1$.

49. $\left(1+x^2\right) y'' + xy' - y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

50. $x^2y'' + x(x-2)y' + (2-x)y = x^4e^{-x}$.

51. $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 3xe^x$.

52. $x(x-1)y'' + (4x-2)y' + 2y = e^{-x}$.

53. $x(x+1)y'' + (4x+2)y' + 2y = 6(x+1)$.

54. $(x-1)y'' - 2xy' + (x+1)y = 3e^x$.

55. $xy'' - 2(4x-1)y' + 8(2x-1)y = 2e^{2x}$.

56. $(2x+3)y'' - 2y' - \dfrac{6}{x^2}y = 3(2x+3)^2$.

57. $(2x+1)y'' - 2y' - (2x+3)y = 3(2x+1)^2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$.

58. $2xy'' - (x+4)y' + \left(1 + \dfrac{4}{x}\right) y = x^3$.

59. $xy'' + (2x-1)y' + (x-1)y = 8x^2e^x$, $x > 0$.

60. $x(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = x(x-1)^3e^{-x}$, $x > 1$.

61. $(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 4x(x-2)^2e^{2x}$, $x > 2$.

62. $x^2(x+1)y'' + x\left(x^2 - 2x - 2\right) y' - 2\left(x^2 - x - 1\right) y = x^2(x+1)^3$, $x > 0$.

63. $x^2y'' - x(x+3)y' + (2x+3)y = x^4$.

64. $x^2(x-3)y'' - x^2(x-2)y' + 2\left(x^2 - 3x + 3\right) y = (x-3)^2$.

65. $x^2(x-1)y'' + x\left(2 - 4x + x^2\right) y' - 2(x-1)^2y = x^3(x-1)^2$.

66. $x^3(x-4)y'' - x^2(x-2)^2y' + 2x\left(x^2 - 5x + 8\right) y = (x-4)^2$, $x > 0$.

67. Найти общее решение уравнения, если известны два его решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

а) $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 2 \operatorname{tg} x + \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$,
$y_1 = \operatorname{tg} x$, $y_2 = \operatorname{tg} x + 2\sin x$.

б) $y'' + 4xy' + \left(4x^2 + 2\right) y = \left(4x^2 + 4x + 3\right) e^x$,
$y_1 = e^x$, $y_2 = e^x + e^{-x^2}$.

в) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = (x-1)e^{2x}$, $x > 0$,
$y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{2x} - e^x$.

г) $xy'' + 2y' - xy = 2 - x^2$, $x > 0$,
$y_1 = x$, $y_2 = x + \dfrac{e^x}{x}$.

д) $x(2x+1)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 3x^2 + 3x + 1$, $x > 0$,
$y_1 = \dfrac{1}{2}(x+1)^2$, $y_2 = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)$.

68. Составить и решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известны его правая часть $f(x)$ и фундаментальная система решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответствующего линейного однородного уравнения:

а) $f(x) = 1 - x^2$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2 + 1$.

б) $f(x) = 1$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2 - 1$.

в) $f(x) = \cos 2x$, $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$.

69. Решить уравнение

$$\left(1 - x^2\right) y'' - xy' + y = \frac{1}{x}\sqrt{1 - x^2}, \quad 0 < x < 1,$$

с помощью замены $x = \cos t$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

70. Решить уравнение

$$x^4 y'' + 2x^3 y' - y = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$$

с помощью замены $x = -\dfrac{1}{t}$.

71. Решить уравнение

$$2xy'' + y' = 2(y + \operatorname{th} x)$$

с помощью замены $x = \dfrac{t^2}{4}$, $t > 0$.

72. Решить уравнение

$$y'' + y' \operatorname{tg} x = 4\left(y + \cos^2 x\right)\cos^2 x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

с помощью замены $t = \sin x$.

Приведением к виду $z'' + a(x)z = f(x)$ решить уравнения (73—76):

73. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 2x^{\frac{5}{2}}e^x$.

74. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 2$.

75. $\left(1 + x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1 + x^2\right)y' + y = 1 + x^2$.

76. $y'' - \frac{6}{x}y' + \left(\frac{12}{x^2} + 1\right)y = 0$.

77. Пусть функция $p(x)$ определена и непрерывна при $x \geqslant 0$ и пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнения $y'' + p(x)y = 0$, причем $\lim\limits_{x \to +\infty} y_i(x) = 0$, производные $y_i'(x)$ ограничены при $x \geqslant 0$, $i = 1, 2$. Доказать, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы при $x \geqslant 0$.

78. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — два линейно независимые решения уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$. Указать подстановку, приводящую к линейному уравнению порядка $n - 2$.

79. Пусть решение $y(x)$ уравнения $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right)y = 0$, $n > 0$, $x > 0$, положительно при малых $x > 0$ и $y(+0) = 0$, Доказать, что точка первого положительного максимума этого решения находится от нуля на расстоянии, которое не меньше чем n.

80. Пусть $a(x)$ — непрерывная функция при $x \geqslant 0$. Доказать, что если уравнение $y'' + a(x)y = 0$ имеет решение $y(x)$ такое, что $\lim\limits_{x \to +\infty} y'(x) = +\infty$, то оно имеет также нетривиальное решение, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$.

81. Пусть функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны на всей оси, причем $a(x)$ — нечетная, а $b(x)$ — четная. Доказать, что решение уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, удовлетворяющее условию $y'(0) = 0$, есть четная функция.

82. Пусть функция $q(x)$ непрерывна на всей оси и периодична с периодом 1. Доказать, что если нетривиальное решение уравнения $y'' + q(x)y = 0$, удовлетворяет условиям $y(0) = y(1) = 0$, то $y(x+1) = Cy(x)$, $C = \text{const}$.

83. Найти два линейно независимые решения в виде степенного ряда уравнения $y'' + 4xy = 0$.

84. а) Найти решение уравнения $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ в виде степенного ряда при условиях $y(0) = 1$, $y''(0) = 0$. Определить радиус сходимости ряда.

б) Решить уравнение $y'' - \dfrac{y'}{x} - 4x^2y = 0$.

Указание. Найти сумму ряда в п. а).

85. а) Найти решение уравнения $xy'' - 2y' + 9x^5y = 0$ в виде степенного ряда при условиях $y(0) = 0$, $y'''(0) = 6$. Определить радиус сходимости ряда.

б) Решить уравнение $y'' - \dfrac{2}{x}y' + 9x^4y = 0$.

Указание. Найти сумму ряда в п. а).

86. Проинтегрировать при $x > 0$ с помощью ряда по степеням x уравнение $4xy'' + 2y' + y = 0$.

Указание. Для отыскания решения уравнения, линейно независимого в решением, представимым степенным рядом, сделать в уравнении замену $y = \sqrt{x} \cdot z$.

87. Найти при $0 < x < 1$ общее решение уравнения $2x(1-x)y'' + (1-x)y' + 3y = 0$ в виде ряда по степеням x.

Указание. Воспользоваться указанием к задаче 86.

88. а) Найти при $0 < x < \sqrt{2}$ решение уравнения

$$\left(2x + x^3\right) y'' - y' - 6xy = 0$$

в виде степенного ряда по x. Определить радиус сходимости ряда.

б) Найти общее решение заданного уравнения в виде ряда по степеням x.

Ответы к задачам § 9

1. $y = C_1(x+1) + C_2x^3 + x^3\ln x - \dfrac{3}{2}x^2.$

2. $y = x^2\left(C_1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{x}{x+4}\right) + (x+2)(C_2 - \ln(x+4)).$

3. $y = C_1e^x + C_2x^2 + x^3 + 2x + 2.$

4. $y = C_1x + C_2x^2\ln x + x^2\ln^2 x - x^2 + x^2\ln^3 x.$

5. $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2(x+1) - \dfrac{1}{x}(\sin x + 2\cos x) - 2\sin x.$

6. $y = C_1x + C_2\ln x + x^2 - \dfrac{1}{2}x^2\ln x.$

7. $y = C_1(1+x) + C_2e^x - (1+x)\ln(1+x) - 1.$

8. $y = C_1x + C_2xe^{2x} + \left(x^2 - \dfrac{1}{2}x\right)e^{2x}.$

9. $y = C_1e^{-2x} + C_2\left(4x^2+1\right) + 8x^3 - 2x + 2.$

10. $y = (C_1 + C_2\sqrt{x} + x)e^{-x}.$

11. $y = \left(C_1 + C_2x^3 + 3x^4\right)e^{3x}.$

12. $y = C_1x + C_2e^x + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x\right)e^x.$

13. $y = C_1e^{2x} + C_2(2x+1) - e^{4x}.$

14. $y = x\left(C_1 + C_2e^x\right) + x^2e^x.$

15. $y = C_1e^x + C_2x^3 + \dfrac{1}{2}x - 1.$

16. $y = \left(C_1 + C_2x^2\right)e^x + \dfrac{1}{4}(2x-1)e^{3x}.$

17. $y = C_1e^x + C_2\left(x^2+1\right) + \left(\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - x\right)e^x.$

18. $y = C_1e^{2x} + \dfrac{C_2}{x} - \dfrac{1}{2}(x+1).$

19. $y = C_1e^x + \dfrac{C_2}{x^3} - \dfrac{1}{4}x - 1.$

20. $y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{1}{2}x - 2.$

21. $y = C_1 e^{-x} + \dfrac{C_2}{x^2} + \dfrac{1}{3}x - 1.$

22. $y = x\left(C_1 + C_2 e^{\frac{x^2}{2}}\right) + x\left(\cos x^2 - 2\sin x^2\right).$

23. $y = C_1 e^x + C_2\left(x^2 - 2x\right)e^x + \dfrac{1}{4}x.$

24. $y = x\left(C_1 + \dfrac{C_2}{x-1} + \dfrac{1}{x-1}e^x\right).$

25. $y = e^x\left(C_1 + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{1}{x}e^x\right).$

26. $y = C_1(x+1) + \dfrac{C_2 x}{x+1} + e^{-x}\left(1 - x - \dfrac{2x}{x+1}\right).$

27. $y = (x+1)\left(C_1 + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{1}{4x}e^{2x}\right).$

28. $y = C_1 e^{3x} + \dfrac{C_2}{x^2} - \dfrac{1}{3}(x+1).$

29. $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{C_2}{x} - \dfrac{1}{2}x - 2.$

30. $y = C_1 e^{-3x} + \dfrac{C_2}{x^2} + \dfrac{1}{3}(x-1).$

31. $y = C_1 x + C_2(\ln x + 1) + \dfrac{1}{2}x^2(1 - \ln x).$

32. $y = C_1(x+2) + C_2 e^{\frac{x}{2}} + (x+2)\left[\ln(x+2)^2 - x - 2\right].$

33. $y = \left(C_1 + \dfrac{C_2}{x} + 2\sin x + \dfrac{1}{x}\cos x\right)e^{2x}.$

34. $y = x(C_1 + C_2\sin x) + \dfrac{1}{2}x(\cos x + \sin x)e^x.$

35. $y = \left(C_1 + \dfrac{C_2}{x-1} + \dfrac{1}{x-1}\sin x\right)e^{-2x}.$

36. $y = C_1 e^{-x} + C_2\left(x^2 + 1\right) - \left(\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right)e^{-x}.$

37. $y = C_1 x + C_2 \dfrac{1-x}{x} + \left(\dfrac{2}{x} - x\right) e^{-x}.$

38. $y = (x-1)\left(C_1 + C_2 e^x\right) + (x-1)\left(\dfrac{3}{2}x^2 - 5x\right) e^x.$

39. $y = (x+1)\left(C_1 + C_2 e^{2x}\right) - \dfrac{1}{2}\left(x^3+1\right) e^{2x}.$

40. $y = (x+1)\left(C_1 + \dfrac{C_2}{x}\right) + \dfrac{x+1}{x} e^x.$

41. $y = e^{-x}\left(C_1 + \dfrac{C_2}{x}\right) + \dfrac{1}{4}\left(2x + \dfrac{1}{x}\right) e^x.$

42. $y = (x-1)\left(C_1 + C_2 e^{2x}\right) - \dfrac{1}{4} x (x-1)^2.$

43. $y = (C_1 + C_2\sqrt{x}) e^{-x} - \dfrac{1}{2} \ln x (\ln x + 4) e^{-x}.$

44. $y = \left(C_1 + C_2 x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{1}{21} x^3\right) e^{-x}.$

45. $y = C_1 x + C_2 \ln x + x \ln x \left(\dfrac{1}{2}\ln x - 1\right).$

46. $y = \left(C_1 + C_2 x^3\right) e^{2x} + \dfrac{1}{3} x^3 e^{2x}\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right).$

47. $y = C_1 \sin x + C_2 \sin 2x + 2\sin^2 x (1 - x\cos x).$

48. $y = C_1 \ln x + \dfrac{C_2}{\ln x} + \dfrac{2}{3} \ln^2 x.$

49. $y = C_1 x + C_2 \sqrt{1+x^2} - x \operatorname{arctg} x - 2.$

50. $y = x\left(C_1 + C_2 e^{-x}\right) - \dfrac{1}{2} x^2 (x+2) e^{-x}.$

51. $y = e^x\left(C_1 + C_2 x^3 - \dfrac{3}{2} x^2\right).$

52. $y = \dfrac{1}{x}\left(C_1 + \dfrac{C_2}{x-1} + \dfrac{e^{-x}}{x-1}\right).$

53. $y = \dfrac{1}{x}\left(C_1 + \dfrac{C_2}{x+1} + (x+1)^2\right).$

54. $y = e^x \left(C_1 + C_2(x-1)^3 - \dfrac{3}{2}x \right)$.

55. $y = e^{4x} \left(C_1 + \dfrac{C_2}{x} \right) + \dfrac{1}{2x} e^{2x}$.

56. $y = C_1 x^2 + C_2 \dfrac{x+1}{x} + 2x^3 + 3x^2 \ln|x|$.

57. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^x + \left(\dfrac{4}{3} - 8x \right) e^{\frac{x}{2}}$.

58. $y = x \left(C_1 + C_2 e^{\frac{x}{2}} \right) - x \left(\dfrac{1}{2} x^2 + 2x \right)$.

59. $y = e^{-x} \left(C_1 + C_2 x^2 \right) + (2x-1)e^x$.

60. $y = (x-1) \left(C_1 + \dfrac{C_2}{x} \right) + \dfrac{x-1}{x} e^{-x}$.

61. $y = C_1 e^{2x} + C_2 (x-2)^2 e^{2x} + \left(\dfrac{1}{2} x^4 - \dfrac{4}{3} x^3 \right) e^{2x}$.

62. $y = C_1 x^2 + C_2 x e^{-x} + x^3 + x^2 \ln x$.

63. $y = C_1 \left(x^2 + x \right) + C_2 x e^x - x^3$.

64. $y = C_1 x^2 + C_2 \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}$.

65. $y = C_1 \left(x^2 - 2x \right) + C_2 x e^{-x} + x(x-1)^2$.

66. $y = C_1 x^2 + C_2 \dfrac{e^x}{x^2} + \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{x^2}$.

67. а) $y = C_1 \sin x + C_2 \left(2 - \sin x \cdot \ln \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + \operatorname{tg} x$.

б) $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x^2} + e^x$.

в) $y = \left(C_1 + C_2 x^2 \right) e^x + e^{2x}$.

г) $y = \dfrac{1}{x} \left(C_1 e^x + C_2 e^{-x} \right) + x$.

д) $y = C_1 (x+1) + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{1}{2}(x+1)^2$.

68. а) $\left(x^2 - 1 \right) y'' - 2xy' + 2y = 1 - x^2$,

$$y = x \left(C_1 + x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) + \left(x^2 + 1 \right) \left(C_2 - \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - 1 \right| \right).$$

б) $(x^2+1)\,y'' - 2xy' + 2y = 1,$

$$y = C_1 x + C_2\left(x^2-1\right) + \frac{1}{2}.$$

в) $y''\sin 2x - 2y'\cos 2x = -\cos 2x,$

$$y = C_1\sin^2 x + C_2\cos^2 x + \frac{1}{2}x.$$

69. $y = C_1\sqrt{1-x^2} + C_2 x - \dfrac{1}{2}x\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}.$

70. $y = C_1 e^{-\frac{1}{x}} + C_2 e^{\frac{1}{x}} - 1 - \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} + 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)\ln\left|1-e^{-\frac{1}{x}}\right|.$

71. $y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}e^{2\sqrt{x}} - 2\operatorname{sh}(2\sqrt{x})\ln\left(1+e^{2\sqrt{x}}\right).$

72. $y = C_1 e^{2\sin x} + C_2 e^{-2\sin x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}.$

73. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\cos 3x + \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}e^x.$

74. $y = \dfrac{1}{x}(C_1\sin x + C_2\cos x) + 2.$

75. $y = \dfrac{C_1 x + C_2}{\sqrt{1+x^2}} - 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$

76. $y = x^3(C_1\cos x + C_2\sin x).$

78. $z = \left(\dfrac{y'y_1 - yy_1'}{y_1y_2' - y_1'y_2}\right)'.$

83. $y_1 = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3n-1)3n},$

$$y_2 = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3n(3n+1)}.$$

84. а) $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\cdot x^{4n},\ R=\infty,$

б) $y = C_1\operatorname{ch} x^2 + C_2\operatorname{sh} x^2.$

85. а) $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{3(2n+1)},\ R=\infty,$

б) $y = C_1\sin x^3 + C_2\cos x^3.$

86. $y = C_1y_1 + C_2y_2$, $y_1 = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{2^n \cdot 2\cdot 3 \cdot 3\cdot 5 \cdot 4\cdot 7 \ldots n(2n-1)}$,

$$y_2 = \sqrt{x}\left(-\frac{x}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3\cdot 2^n \cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 7\ldots n(n+1)}\right).$$

87. $y = C_1y_1 + C_2y_2$, $y_1 = 1 - 3x + x^2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(2n-5)!!}{(2n-1)!!}x^n$,

$y_2 = (1-x)\sqrt{x}$.

88. а) $y_1 = 1 + 3x^2 + \dfrac{3}{5}x^4 + \dfrac{3}{5}\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(2n-5)!!}{9\cdot 13\ldots(4n-3)}x^{2n}$, $R = \infty$,

б) $y = C_1y_1 + C_2y_2$, y_1 см. в п. а),

$$y_2 = x^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{3}{8}x^2 + 3\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 5\ldots(4n-7)}{8^n\cdot n!}x^{2n}\right).$$

§ 10. Теорема Штурма. Граничные задачи

При решении задач на теорему Штурма необходимо заданное уравнение привести сначала к двучленному уравнению. Затем сравнить количество нулей нетривиальных решений полученного уравнения с количеством нулей нетривиальных решений соответствующим образом подобранного линейного уравнения с постоянными коэффициентами или уравнения Эйлера.

Пример 1. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' + 2xy' + 5y = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет не более 6 нулей.

Δ Заменой $y = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot z$ заданное уравнение приводится к виду $z'' + (4 - x^2)z = 0$. При $|x| \geqslant 2$ всякое нетривиальное решение полученного уравнения имеет не более одного нуля. При $|x| \leqslant 2$ имеем $4 - x^2 \leqslant 4$. Поскольку любое нетривиальное решение уравнения $z'' + 4z = 0$ на отрезке $[-2, 2]$ имеет не более трех нулей, то по теореме Штурма любое нетривиальное решение уравнения $z'' + (4 - x^2)z = 0$ имеет на $[-2, 2]$ тоже не более трех нулей. Так как число нулей любого нетривиального решения заданного уравнения в силу замены совпадает с числом нулей нетривиальных решений уравнения $z'' + (4-x^2)z = 0$, то задача решена. ▲

Решение граничной задачи, собственные значения и собственные функции граничной задачи находятся подстановкой общего решения уравнения в заданные граничные условия.

Пример 2. Найти решение граничной задачи

$$y'' + y = 3\cos 2x, \ y(0) = -1, \ y'(\pi) = 0.$$

Δ Общим решением заданного уравнения является $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos 2x$. Подставляя это решение в граничные условия, получаем систему для нахождения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 - 1 = -1, \\ -C_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0$ и, значит, решением граничной задачи является $y = -\cos 2x$. ▲

Пример 3. Найти собственные значения и собственные функции граничной задачи $y'' = \lambda y$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = y(1) = 0$.

Δ Нетрудно видеть, что при $\lambda \geqslant 0$ граничная задача имеет лишь тривиальное решение, т. е. никакое $\lambda \geqslant 0$ не может быть собственным значением граничной задачи. Пусть $\lambda < 0$. Тогда общим решением уравнения является $y = C_1 \cos x\sqrt{-\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{-\lambda}$ и подстановка его в граничные условия дает уравнения для нахождения постоянных C_1 и C_2:

$$C_1 = C_2 \sin\sqrt{-\lambda} = 0.$$

Так как собственными функциями являются нетривиальные решения граничной задачи, то $C_2 \neq 0$. Значит, $\sin\sqrt{-\lambda} = 0$. Отсюда находим, что собственными значениями задачи являются числа $\lambda_n = -n^2\pi^2$, а соответствующими им собственными функциями являются $y_n(x) = C_n \sin n\pi x$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, а C_n — произвольная постоянная, отличная от нуля. ▲

Для нахождения функции Грина граничной задачи следует воспользоваться ее определением.

1. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' + \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}y = 0$ имеет на интервале $(0, +\infty)$ бесконечное множество нулей.

2. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y''+$ $+\dfrac{1}{4(x^2+1)}y=0$ имеет на промежутке $[0,+\infty)$ лишь конечное число нулей.

3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y''+$ $+\dfrac{1}{1+x^2}y=0$ имеет на промежутке $[0,+\infty)$ бесконечное число нулей.

4. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y''-xy'+y=0$ на интервале $(-\infty,+\infty)$ имеет не более пяти нулей.

5. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y''-(x-3)^2y'+$ $+(x+1)y=0$ на интервале $(-\infty,+\infty)$ имеет не более шести нулей.

6. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y''+x^2y'+$ $+(x+4)y=0$ на интервале $(-\infty,+\infty)$ имеет не более шести нулей.

7. Доказать, что решение $J_0(x)$ уравнения Бесселя $xy''+y'+xy=0$ при $0.1<x<10$ имеет не менее трех нулей.

8. Доказать, что нетривиальное решение $y_\alpha(x)$ уравнения $xy''+$ $+\left(\dfrac{1}{2}-x\right)y'-\alpha y=0$ при любом значении вещественного параметра α имеет на интервале $(1,+\infty)$ лишь конечное число нулей.

9. Доказать, что решение $J_1(x)$ уравнения Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=$ $=0$ имеет один из нулей на интервале $(3,7)$.

10. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y''+\dfrac{2}{x}y'+$ $+e^xy=0$ на промежутке $[1,+\infty)$ имеет бесконечно много нулей $x_1<$ $<x_2<\ldots<x_n<\ldots$ и при этом $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n-x_{n-1}|=0$.

11. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $x^2y''+$ $+2x^2y'+\left(\dfrac{1}{2}x^2-2\right)y=0$ на интервале $(0,+\infty)$ имеет не более одного нуля.

Найти решение граничной задачи (12—24):

12. $y''-y'=2e^{2x}$, $y'(0)=2$, $y(1)=e^2$.

13. $y''-y=2\sin x$, $y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

14. $y'' + y' = 2,\ y(0) = 0,\ y(1) = 2.$

15. $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0,\ y(1) = 1,\ y(x) = O\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$ при $x \to +\infty.$

16. $y'' - y = e^{2x},\ y(0) = \dfrac{1}{3},\ y(1) = \dfrac{1}{3}e^2.$

17. $y'' - 4y = 4,\ y(0) = -1,\ y(1) = 0.$

18. $y'' + y = 0,\ y(0) = y'(0),\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

19. $y'' + y = 0,\ y(0) = y'(0),\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 2.$

20. $x^2y'' + 2xy' = \dfrac{1}{x},\ y(1) = 1,\ y(e) = 0.$

21. $x^2y'' + 2xy' - 6y = x^3,\ y(x) = O(x^2)$ при $x \to 0,\ y(1) = 1.$

22. $x^2y'' + xy' - y = 2x,\ y(1) = 0,\ y(2) = 2\ln 2.$

23. $y'' + \pi^2 y = 1,\ y(0) = y(1) = 0.$

24. $y'' + \pi^2 y = 3\pi^2 \sin 2\pi x,\ y(0) = y(1) = 0.$

Найти собственные значения и собственные функции граничной задачи (25—34):

25. $y'' = \lambda y,\ y(0) = y'(1) = 0.$

26. $y'' = \lambda y,\ y'(0) = y(1) = 0.$

27. $y'' = \lambda y,\ y'(0) = y'(1) = 0.$

28. $y'' = \lambda y,\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1).$

29. $y'' = \lambda y,\ y(0) = 0,\ y(x) = O(1)$ при $x \to +\infty.$

30. $y'' = \lambda y,\ y(x) = O(1)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty.$

31. $x^2y'' - xy' + y = \lambda y,\ y(1) = y(2) = 0.$

32. $x^2y'' - xy' + y = \lambda y,\ y(x) \to 0$ при $x \to 0,\ y(1) = 0.$

33. $x^2y'' - xy' + y = \lambda y,\ y(1) = 0,\ y(x) = O(1)$ при $x \to +\infty.$

34. $x^2y'' + 3xy' + y = \lambda y,\ y(1) = 0,\ y(x) \to 0$ при $x \to +\infty.$

35. Доказать, что всякое вещественное число λ является собственным значением граничной задачи $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = -y'(1)$.

36. При каких значениях вещественного параметра λ граничная задача $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = \lambda y(1)$ имеет нетривиальные решения? Найти эти решения.

37. Рассматривается граничная задача на собственные значения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \ y(x) \not\equiv 0,$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = y(1)\cos\beta + y'(1)\sin\beta = 0,$$

где $q(x)$ — заданная непрерывная функция на $[0,1]$, α и β — заданные числа. Доказать, что: а) собственные значения граничной задачи вещественны, б) собственные функции $y(x,\lambda_1)$ и $y(x,\lambda_2)$ соответствующие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 ортогональны, т. е. $\int\limits_0^1 y(x,\lambda_1)\cdot y(x,\lambda_2)dx = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

38. Рассматривается граничная задача вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y + f(x),$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = y(1)\cos\beta + y'(1)\sin\beta = 0,$$

где $q(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывные функции на $[0,1]$, α и β — заданные числа. Доказать, что а) если параметр λ не совпадает ни с одним собственным значением граничной задачи, то граничная задача имеет единственное решение, б) если же λ — некоторое собственное значение граничной задачи и ему соответствует собственная функция $y(x,\lambda)$, то граничная задача разрешима только в том случае, когда $\int\limits_0^1 f(x)y(x,\lambda)dx = 0$.

39. Показать, что все собственные функции граничной задачи $-y'' = \lambda y$, $y'(0) = y'(\pi) = 0$ обладают следующими свойствами: а) n-я собственная функция на $[0,\pi]$ имеет ровно n нулей, б) нули n-й и $(n+1)$-й собственных функций перемежаются.

Найти функцию Грина $G(x,\zeta)$ граничной задачи (40—50):

40. $y''+y=f(x)$, $y(0)=y'(1)=0$.

41. $y''+4y=f(x)$, $y'(0)=y(1)=0$.

42. $y''-4y=f(x)$, $y'(0)=0$, $2y(1)=y'(1)$.

43. $y''-y'=f(x)$, $y(0)=0$, $y(1)=y'(1)$.

44. $y''-y=f(x)$, $y(0)=y(1)=0$.

45. $x^2y''+3xy'-3y=f(x)$, $y(1)=0$, $y(2)=2y'(2)$.

46. $(x^2+1)y''+2xy'=f(x)$, $y(0)=y'(1)=0$.

47. $xy''+y'=f(x)$, $y(1)=y(2)=0$.

48. $x^2y''+xy'-y=f(x)$, $y(1)=y'(2)=0$.

49. $x^2y''-xy'-3y=f(x)$, $y(0)=0$, $y(x)=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\to+\infty$.

50. $x^2y''+2xy'-12y=f(x)$, $y(0)=0$, $y(x)=O(1)$ при $x\to+\infty$.

51. Пусть $p(x)$ — непрерывная функция на $[a,b]$ и $p^*=\max p(x)>0$ при $x\in[a,b]$. Доказать, что граничная задача $y''+p(x)y=f(x)$, $y(a)=A$, $y(b)=B$ имеет единственное решение при всех A и B и для любой непрерывной $f(x)$ на $[a,b]$, если выполнено условие $(b-a)<\dfrac{\pi}{\sqrt{p^*}}$.

52. Пусть $a(x)$ — непрерывно дифференцируемая положительная функция на всей оси и пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения $y''+a(x)y=0$. Доказать, что нули $y_1'(x)$ и $y_2'(x)$ перемежаются.

Указание. Показать, что y_1 и y_2 удовлетворяют соотношению $y_2y_1''-y_1y_2''=0$.

53. Пусть на множестве $D=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ -\infty<y<+\infty\}$ функции $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\geqslant 0$. Доказать, что граничная задача $y''=f(x,y)$, $y(0)=y(1)=0$ может иметь только одно решение.
Указание. Рассмотреть какому уравнению удовлетворяет разность двух решений.

Ответы к задачам § 10

12. e^{2x}. **13.** $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}} - \sin x$. **14.** $2x$.

15. $\dfrac{1}{x^4}$. **16.** $\dfrac{1}{3}e^{2x}$. **17.** $\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh} 2} - 1$.

18. $C(\cos x + \sin x)$, C — произвольная постоянная.

19. $\cos x + \sin x$. **20.** $\dfrac{1 - \ln x}{x}$. **21.** $\dfrac{1}{6}(x^3 - x^2)$.

22. $x \ln x$. **23.** Нет решений.

24. $C \sin \pi x - \sin 2\pi x$, C — произвольная постоянная.

25. $\lambda_n = -\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2 \pi^2$, $y_n(x) = C_n \sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi x$, $C_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

26. $\lambda_n = -\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2 \pi^2$, $y_n(x) = C_n \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi x$, $C_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

27. $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $y_n(x) = C_n \cos n\pi x$, $C_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

28. $\lambda_n = -4n^2\pi^2$, $y_n(x) = C_{1n} \cos 2n\pi x + C_{2n} \sin 2n\pi x$, $|C_{1n}| + |C_{2n}| > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

29. любое $\lambda < 0$, $y(x, \lambda) = C \sin x\sqrt{-\lambda}$, $C \neq 0$.

30. любое $\lambda \leqslant 0$, $y(x, \lambda) = C_1 \cos x\sqrt{-\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{-\lambda}$, $|C_1| + |C_2| > 0$.

31. $\lambda_n = -\left(\dfrac{n\pi}{\ln 2}\right)^2$, $y_n(x) = C_n x \sin\left(\dfrac{n\pi \ln x}{\ln 2}\right)$, $C_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

32. любое $\lambda \in (-\infty, 1)$. Для $\lambda \in (-\infty, 0)$ $y(x, \lambda) = Cx \sin(\sqrt{-\lambda} \ln x)$, $C \neq 0$, для $\lambda = 0$ $y(x, \lambda) = Cx \ln x$, $C \neq 0$, и для $\lambda \in (0, 1)$ $y(x, \lambda) = Cx(x^{\sqrt{\lambda}} - x^{-\sqrt{\lambda}})$, $C \neq 0$.

33. Нет собственных значений.

34. любое $\lambda \in (-\infty, 1)$. Для $\lambda \in (-\infty, 0)$ $y(x, \lambda) = \dfrac{C}{x} \sin(\sqrt{-\lambda} \ln x)$, для $\lambda = 0$ $y(x, \lambda) = C\dfrac{\ln x}{x}$, для $\lambda \in (0, 1)$ $y(x, \lambda) = \dfrac{C}{x}(x^{\sqrt{\lambda}} - x^{-\sqrt{\lambda}})$, $C \neq 0$.

36. $\lambda_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $y_n(x) = C_n \sin \lambda_n x$, $C_n \neq 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

40. $G(x,\zeta) = -\dfrac{1}{\cos 1}\begin{cases} \sin x \cos(1-\zeta), & 0 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ \cos(1-x)\sin\zeta, & \zeta \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

41. $G(x,\zeta) = \dfrac{1}{2\cos 2}\begin{cases} \cos 2x \sin(2\zeta-2), & 0 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ \sin(2x-2)\cos 2\zeta, & \zeta \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

42. $G(x,\zeta) = \begin{cases} e^{2\zeta}\operatorname{ch} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ e^{2x}\operatorname{ch} 2\zeta, & \zeta \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

43. $G(x,\zeta) = \begin{cases} 1-e^{x}, & 0 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ e^{x}(e^{-\zeta}-1), & \zeta \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

44. $G(x,\zeta) = -\dfrac{1}{\operatorname{sh} 1}\begin{cases} \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(1-\zeta), & 0 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ \operatorname{sh}\zeta \operatorname{sh}(1-x), & \zeta \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

45. $G(x,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\zeta^2\left(\dfrac{1}{x^3}-x\right), & 1 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ \dfrac{1}{4}x\left(\dfrac{1}{\zeta^2}-\zeta^2\right), & \zeta \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

46. $G(x,\zeta) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} x, & 0 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ -\operatorname{arctg}\zeta, & \zeta \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

47. $G(x,\zeta) = \dfrac{1}{\ln 2}\begin{cases} \ln x \ln\dfrac{\zeta}{2}, & 1 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ \ln\zeta \ln\dfrac{x}{2}, & \zeta \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

48. $G(x,\zeta) = -\dfrac{1}{10\zeta^2}\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{x}\right)(\zeta^2+4), & 1 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ (\zeta^2+1)\left(x+\dfrac{4}{x}\right), & \zeta \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

49. $G(x,\zeta) = -\dfrac{1}{4}\begin{cases} \dfrac{x^3}{\zeta^4}, & 0 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ \dfrac{1}{x}, & \zeta \leqslant x < +\infty. \end{cases}$

50. $G(x,\zeta) = -\dfrac{1}{7}\begin{cases} \dfrac{x^3}{\zeta^4}, & 0 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ \dfrac{\zeta^3}{x^4}, & \zeta \leqslant x < +\infty. \end{cases}$

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 11. Методы решения линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами

Для решения линейных систем второго порядка уравнений с постоянными коэффициентами, как правило, удобным является метод исключения неизвестных.

Пример 1. Найти общее решение линейной системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^t, \\ \dot{y} = 5x - y - (2t+6)e^t. \end{cases}$$

Δ Продифференцируем первое уравнение системы:

$$\ddot{x} = \dot{x} - 2\dot{y} - 2(t+1)e^t.$$

В полученное выражение подставим выражение $\dot{y}$ из второго уравнения системы:

$$\ddot{x} = \dot{x} - 2(t+1)e^t - 10x + 2y + 2(2t+6)e^t = \dot{x} - 10x + 2y + (2t+10)e^t.$$

Подставив сюда выражение $2y$ из первого уравнения системы, получаем уравнение для $x(t)$:

$$\ddot{x} + 9x = 10e^t.$$

Его решением является $x(t) = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + e^t$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставив $x(t)$ в первое уравнение системы, находим $y(t) = \dfrac{1}{2}(C_1 - 3C_2)\cos 3t + \dfrac{1}{2}(3C_1 + C_2)\sin 3t - te^t$.

Таким образом, общее решение заданной системы уравнений имеет вид

$$x(t) = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + e^t,$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(C_1 - 3C_2)\cos 3t + \frac{1}{2}(3C_1 + C_2)\sin 3t - te^t. \qquad \blacktriangle$$

Для решения линейных систем третьего порядка с постоянными коэффициентами удобным является метод, использующий нахождение собственных значений, собственных и присоединенных векторов матрицы системы.

Пример 2. Найти общее решение линейной системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - z, \\ \dot{y} = -2x + 3y - z, \\ \dot{z} = 4x + 5z. \end{cases}$$

Δ Для матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

из уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, где E — единичная матрица третьего порядка, находим собственное значение $\lambda = 3$ кратности три. Из линейной алгебраической системы уравнений $(A - \lambda E)h = 0$, где вектор $h \neq 0$ имеет три компоненты, находим два линейно независимые собственные векторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Из системы уравнений $(A - \lambda E)h_3 = h_2$ находим присоединенный вектор h_3 к вектору h_2:

$$h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. ▲

Линейные системы уравнений можно решать с помощью матричной экспоненты.

Пример 3. С помощью матричной экспоненты решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x + 3y. \end{cases}$$

△ Для матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ находим собственное значение $\lambda = 2$ кратности два. Ему соответствуют собственный вектор $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и присоединенный вектор $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В базисе из векторов h_1, h_2 матрица A принимает нормальную жорданову форму $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Из определения матричной экспоненты находим, что

$$e^{tJ} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если через H обозначить матрицу, у которой первый столбец h_1 и второй столбец h_2, то

$$e^{tA} = He^{tJ}H^{-1} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. ▲

Линейные неоднородные системы уравнений можно решать методом вариации постоянных.

Пример 4. Методом вариации постоянных решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y + \dfrac{1}{2\sin t}. \end{cases}$$

Δ Линейную однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$ решаем методом исключения. Ее решение имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = \dfrac{1}{2}[(C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t], \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение заданной линейной неоднородной системы уравнений ищем в виде

$$\begin{cases} x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t, \\ y = \dfrac{1}{2}[(C_1(t) - C_2(t)) \cos t + (C_1(t) + C_2(t)) \sin t], \end{cases}$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, которые находятся подстановкой x и y в заданную систему уравнений. Подстановка x и y в заданную систему уравнений дает следующую линейную алгебраическую систему для $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) \cos t + \dot{C}_2(t) \sin t = 0, \\ \dot{C}_1(t) \sin t - \dot{C}_2(t) \cos t = \dfrac{1}{\sin t}. \end{cases}$$

Отсюда находим $\dot{C}_1(t) = 1$, $\dot{C}_2(t) = -\operatorname{ctg} t$ и, значит, $C_1(t) = t + C_1$, $C_2(t) = -\ln|\sin t| + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя найденные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$, получим общее решение заданной системы уравнений

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t \cos t - \sin t \ln|\sin t|,$$

$$y = \frac{1}{2}[(C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t + (t + \ln|\sin t|) \cos t + (t - \ln|\sin t|) \sin t].$$

▲

Линейные системы уравнений можно также решать операционным методом, т. е. методом, использующим преобразование Лапласа.

Пример 5. Операционным методом решить задачу Коши при $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 4e^{3t}, \\ \dot{y} = 4x - y - 8e^{3t}, \ x(0) = 1, \ y(0) = 0. \end{cases}$$

Δ Положим при $t < 0$ решение $x(t)$, $y(t)$ системы и свободные члены системы тождественно равными нулю. Тогда так продолженные на всю числовую ось $t \in (-\infty, +\infty)$ решение и свободные члены системы являются оригиналами. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда $\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - 1$, $\dot{y}(t) \risingdotseq pY(p)$.

Переходя в заданной системе уравнений к преобразованиям Лапласа, т. е. умножая каждое уравнение системы на e^{-pt} и интегрируя его по t от нуля до бесконечности, получаем линейную алгебраическую систему уравнений для нахождения $X(p)$ и $Y(p)$

$$\begin{cases} (p-3)X(p) + Y(p) = 1 + \dfrac{4}{p-3}, \\ -4X(p) + (p+1)Y(p) = -\dfrac{8}{p-3}. \end{cases}$$

Если считать комплексный параметр p таким, что $\operatorname{Re} p > 3$, то из полученной системы уравнений находим

$$X(p) = \frac{(p+1)(p-3) + 4(p+3)}{(p-3)(p-1)^2}, \quad Y(p) = \frac{4(7-p)}{(p-3)(p-1)^2}.$$

Разлагая выражения для $X(p)$ и $Y(p)$ на простые дроби, имеем

$$X(p) = \frac{6}{p-3} - \frac{5}{p-1} - \frac{6}{(p-1)^2}, \quad Y(p) = \frac{4}{p-3} - \frac{4}{p-1} - \frac{12}{(p-1)^2}.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение

$$x(t) = 6e^{3t} - (5+6t)e^t, \quad y(t) = 4e^{3t} - 4(1+3t)e^t. \qquad \blacktriangle$$

Решить линейные однородные системы второго порядка (1—14):

1. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 6y, \\ \dot{y} = 8x + 9y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 6y, \\ \dot{y} = 18x - 11y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y, \\ \dot{y} = -4x + 6y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 6x + 7y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y, \\ \dot{y} = 10x + 7y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -12x - 8y, \\ \dot{y} = 20x + 12y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 10y, \\ \dot{y} = 5x + 5y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x - 7y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y, \\ \dot{y} = -16x - 2y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -4x + 2y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x + 7y. \end{cases}$

Решить линейные однородные системы уравнений третьего порядка (15—116):

15. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 2y - 2z, \\ \dot{y} = 10x + 4y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + y + 3z. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 4z, \\ \dot{y} = -8x - 3y + 2z, \\ \dot{z} = -2x - 4y + 6z. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y - 4z, \\ \dot{y} = 9x - 5y + 6z, \\ \dot{z} = 15x - 18y + 15z. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - z, \\ \dot{y} = -6x + 2y - 2z, \\ \dot{z} = -6x - 2y - z. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y - z, \\ \dot{y} = x + 3y + z, \\ \dot{z} = 7x + 3y + z. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = -2x + 2y + z, \\ \dot{z} = 4x + 2y + 3z. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = x + 6y + 2z, \\ \dot{z} = -5x - 7y - 3z. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3z, \\ \dot{y} = -x + 4y - z, \\ \dot{z} = 4x - 2y + 6z. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - z, \\ \dot{y} = 9x - 6y + 3z, \\ \dot{z} = 20x - 20y + 10z. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 4z, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -3x + 4y + 8z. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = 8x - 3y + 4z, \\ \dot{z} = -2x - 2y + 3z. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = x - 3y + 3z. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8y + 6z, \\ \dot{y} = -4x + 10y + 6z, \\ \dot{z} = 4x - 8y - 4z. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 3z, \\ \dot{y} = -2x + y + 5z, \\ \dot{z} = -x - y + 6z. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 3z, \\ \dot{y} = 2x + 4y + 6z, \\ \dot{z} = 3x + 6y + 9z. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 2z, \\ \dot{y} = 2x + 5y - 4z, \\ \dot{z} = -2x - 4y + 5z. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2z, \\ \dot{y} = 6x - 4y + 4z, \\ \dot{z} = 4x - 4y + 5z. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = 2x + 2y - z. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = 3y + 2z. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y + z, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - z, \\ \dot{y} = -2x + y - 2z, \\ \dot{z} = x + 2y + z. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 7y + z, \\ \dot{z} = 5x - 5y - 3z. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dot{x} = x - 6y + 3z, \\ \dot{y} = -8y + 6z, \\ \dot{z} = 3x - 12y + 7z. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y + z, \\ \dot{y} = x - 8y + 3z, \\ \dot{z} = 3x - 7y. \end{cases}$

41. $\begin{cases} \dot{x} = -5y + 3z, \\ \dot{y} = -x - 6y + 5z, \\ \dot{z} = x - 9y + 6z. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - y + 3z, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 5z, \\ \dot{z} = -x - 3y + z. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 2z, \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2z, \\ \dot{z} = -2x - 4y - z. \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = -x - y + 2z. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -y - 2z, \\ \dot{z} = y + z. \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y + z, \\ \dot{y} = 7x - 3y + z, \\ \dot{z} = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y + z, \\ \dot{y} = x - 2y + z, \\ \dot{z} = 3x - 12y - 5z. \end{cases}$

48. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2z, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = -x - y. \end{cases}$

49. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = 3y - z. \end{cases}$

50. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 2z. \end{cases}$

51. $\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 4x + y + 2z. \end{cases}$

52. $\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

53. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + z, \\ \dot{y} = -3y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 2y - 3z. \end{cases}$

54. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y + 9z, \\ \dot{y} = 10x + 9y - 10z, \\ \dot{z} = x + y + 3z. \end{cases}$

55. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2z, \\ \dot{y} = 2x - y + 2z, \\ \dot{z} = x - y + z. \end{cases}$

56. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 7y - z, \\ \dot{y} = 2x - 3y - z, \\ \dot{z} = -2x + 2y + 3z. \end{cases}$

57. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - z, \\ \dot{y} = -4x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 4x + 2y + 3z. \end{cases}$

58. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + 2z, \\ \dot{y} = -5x - y + 2z, \\ \dot{z} = -7x - 3y + 6z. \end{cases}$

59. $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y - 2z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = 3x + 9y - 4z. \end{cases}$

60. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 4z, \\ \dot{y} = -2x + 2y + 12z, \\ \dot{z} = x - y - 5z. \end{cases}$

61. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 10y - 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y - 4z, \\ \dot{z} = -6x + 7y + z. \end{cases}$

62. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 8y - 2z, \\ \dot{y} = -5x - 7y + z, \\ \dot{z} = 6x + 8y - z. \end{cases}$

63. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2z, \\ \dot{z} = -y + 2z. \end{cases}$

64. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x - z, \\ \dot{z} = 4y - 2z. \end{cases}$

65. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - 2z, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 4x + z. \end{cases}$

66. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x + 2y + 4z, \\ \dot{z} = -2x - y - z. \end{cases}$

67. $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 3y - 5z, \\ \dot{y} = -x - y - z, \\ \dot{z} = 3x - 2y + 2z. \end{cases}$

68. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = -6x - 4y + 3z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 3z. \end{cases}$

69. $\begin{cases} \dot{x} = -3y + 3z, \\ \dot{y} = -x - 4y + 6z, \\ \dot{z} = -2y + 2z. \end{cases}$

70. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 8y - 2z, \\ \dot{y} = -5x - 7y + z, \\ \dot{z} = 6x + 8y - z. \end{cases}$

71. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - 2z, \\ \dot{y} = 3x + 5y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2y - z. \end{cases}$

72. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y - z, \\ \dot{y} = -x + 2y + z, \\ \dot{z} = 4x - 4y - z. \end{cases}$

73. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 12y - 3z, \\ \dot{y} = -x - 5y + z, \\ \dot{z} = -x - 12y + 4z. \end{cases}$

74. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y - 8z, \\ \dot{y} = 7x - 11y - 17z, \\ \dot{z} = -3x + 4y + 6z. \end{cases}$

75. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 7y + 4z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = -2x + 3y. \end{cases}$

76. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + z, \\ \dot{y} = -x - 2y + 3z, \\ \dot{z} = -y + z. \end{cases}$

77. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + z, \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 2y - 2z. \end{cases}$

78. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z, \\ \dot{y} = 7x + 4y - z, \\ \dot{z} = 13x + 7y - 3z. \end{cases}$

79. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + z, \\ \dot{y} = -2x + 3y - z, \\ \dot{z} = -5x + 4y - z. \end{cases}$

80. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z, \\ \dot{y} = -x + 4y - 2z, \\ \dot{z} = -2x + 5y - 2z. \end{cases}$

81. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 3z, \\ \dot{y} = -6x + y - 5z, \\ \dot{z} = -3x + 2y - 4z. \end{cases}$

82. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -2x - 3y - 4z. \end{cases}$

83. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - z, \\ \dot{y} = -4x + 2y - z, \\ \dot{z} = 16x + 4y + 6z. \end{cases}$

84. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = 4x + 2y - 2z, \\ \dot{z} = 6x + 7y - 6z. \end{cases}$

85. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - 4z, \\ \dot{y} = x + 4y - z, \\ \dot{z} = 3x + 6y - 4z. \end{cases}$

86. $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y - 2z, \\ \dot{y} = -x + 5y - 2z, \\ \dot{z} = -2x + 15y - 6z. \end{cases}$

87. $$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 6y - 15z, \\ \dot{y} = x + y - 5z, \\ \dot{z} = x + 2y - 6z. \end{cases}$$

88. $$\begin{cases} \dot{x} = 9x - 6y - 2z, \\ \dot{y} = 18x - 12y - 3z, \\ \dot{z} = 18x - 9y - 6z. \end{cases}$$

89. $$\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = x - 4y, \\ \dot{z} = x - 2y - 2z. \end{cases}$$

90. $$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y - 15z, \\ \dot{y} = x + 3y - 5z, \\ \dot{z} = x + 2y - 4z. \end{cases}$$

91. $$\begin{cases} \dot{x} = 12x - 6y - 2z, \\ \dot{y} = 18x - 9y - 3z, \\ \dot{z} = 18x - 9y - 3z. \end{cases}$$

92. $$\begin{cases} \dot{x} = 6x + 6y - 15z, \\ \dot{y} = x + 5y - 5z, \\ \dot{z} = x + 2y - 2z. \end{cases}$$

93. $$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - 3z, \\ \dot{y} = 4x + 10y - 12z, \\ \dot{z} = 3x + 6y - 7z. \end{cases}$$

94. $$\begin{cases} \dot{x} = x + y - z, \\ \dot{y} = -3x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -2x - 2y + 2z. \end{cases}$$

95. $$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x + 4y, \\ \dot{z} = -2x + y + 2z. \end{cases}$$

96. $$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 4y - z, \\ \dot{y} = -7x - 4y + 2z, \\ \dot{z} = -9x - 9y + 6z. \end{cases}$$

97. $$\begin{cases} \dot{x} = 6x + y + z, \\ \dot{y} = -5x + y - z, \\ \dot{z} = -3x - y + 2z. \end{cases}$$

98. $$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = 2x - 2y - z, \\ \dot{z} = 3x + 2y - 5z. \end{cases}$$

99. $$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y - z, \\ \dot{y} = -2x + y + z, \\ \dot{z} = 2x + 3y + z. \end{cases}$$

100. $$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - 2z, \\ \dot{y} = 2x + y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - y + z. \end{cases}$$

101. $$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x + 2y - 3z, \\ \dot{z} = -6x + 8y - 8z. \end{cases}$$

102. $$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -4x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = -3x + 3y - 6z. \end{cases}$$

103. $$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y - z, \\ \dot{y} = -6x - 6y + z, \\ \dot{z} = -4x - 2y - 2z. \end{cases}$$

104. $$\begin{cases} \dot{x} = -3x - y - z, \\ \dot{y} = 5x + 3y + z, \\ \dot{z} = 16x + 4y + 5z. \end{cases}$$

105. $$\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y + z, \\ \dot{y} = -x + 3y - z, \\ \dot{z} = 4x + 5y + 2z. \end{cases}$$

106. $$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 3y - 2z, \\ \dot{y} = 6x + 6y + 2z, \\ \dot{z} = 7x + 4y + 5z. \end{cases}$$

107. $\begin{cases} \dot{x} = -8x + 6y - 4z, \\ \dot{y} = -8x + 14y - 4z, \\ \dot{z} = 4x + 13y + 2z. \end{cases}$

108. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y + 2z, \\ \dot{y} = -x + 3y - z, \\ \dot{z} = -4x + 2y - z. \end{cases}$

109. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y - 2z, \\ \dot{y} = x - 3y + z, \\ \dot{z} = 7x - 5y + 3z. \end{cases}$

110. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - z, \\ \dot{y} = -2x - 7y + 4z, \\ \dot{z} = -5x - 10y + 4z. \end{cases}$

111. $\begin{cases} \dot{x} = -8x + y - 5z, \\ \dot{y} = 18x - y + 10z, \\ \dot{z} = 11x - 7y + 10z. \end{cases}$

112. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y + z, \\ \dot{y} = 8x + 3y + 4z, \\ \dot{z} = -14x - 18y - 7z. \end{cases}$

113. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y - z, \\ \dot{y} = 8x + 4y + 4z, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 2z. \end{cases}$

114. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z, \\ \dot{y} = 3x - 6y + 3z, \\ \dot{z} = 4x - 16y + 5z. \end{cases}$

115. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 4z, \\ \dot{y} = 4x - 6y + 12z, \\ \dot{z} = -8x - 8y + 6z. \end{cases}$

116. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 3y + 7z, \\ \dot{y} = -3x - 2y + z, \\ \dot{z} = -7x - y - 4z. \end{cases}$

С помощью матричной экспоненты решить линейные однородные системы уравнений (117—136):

117. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

118. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

119. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

120. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

121. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -4x + 2y. \end{cases}$

122. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -x + 5y. \end{cases}$

123. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

124. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$

125. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$

126. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

127. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y. \end{cases}$

128. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

129. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -5x + 3y. \end{cases}$

130. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

131. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

132. $\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$

133. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x + 2y, \\ \dot{z} = 3z. \end{cases}$

134. $\begin{cases} \dot{x} = z + y, \\ \dot{y} = x - y, \\ \dot{z} = -x - z. \end{cases}$

135. $\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = z. \end{cases}$

136. $\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$

Решить линейные неоднородные системы уравнений (137—168):

137. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 37\sin t, \\ \dot{y} = -4x - 5y. \end{cases}$

138. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y - 2e^t, \\ \dot{y} = x - y - e^t. \end{cases}$

139. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 36t, \\ \dot{y} = -4x - 5y. \end{cases}$

140. $\begin{cases} \dot{x} = 11x - 8y + 4e^{7t}, \\ \dot{y} = 20x - 13y. \end{cases}$

141. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 3y + 30e^t, \\ \dot{y} = 15x - 6y + 45t. \end{cases}$

142. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - y, \\ \dot{y} = x - 3y - 9e^{2t}. \end{cases}$

143. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y + 7e^{2t}, \\ \dot{y} = -9x - 7y + t^2 + 1. \end{cases}$

144. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - e^{-t}, \\ \dot{y} = -2x - 2y - e^{-t}. \end{cases}$

145. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

146. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 4y + 2e^{2t}, \\ \dot{y} = 6x + 6y + 2t. \end{cases}$

147. $\begin{cases} \dot{x} = -6x - 10y + 4\sin 2t, \\ \dot{y} = 4x + 6y. \end{cases}$

148. $\begin{cases} \dot{x} = -7x + 2y + e^{-t}, \\ \dot{y} = -15x + 4y. \end{cases}$

149. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 3y + t + 1, \\ \dot{y} = 6x + 6y + 2t. \end{cases}$

150. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - e^{-t}, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$

151. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - 2e^t, \\ \dot{y} = -3x - 2y - 2e^t. \end{cases}$

152. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^{3t}. \end{cases}$

153. $\begin{cases} \dot{x} = y + \cos 2t - 2\sin 2t, \\ \dot{y} = -x + 2y + 2\sin 2t + 3\cos 2t. \end{cases}$

154. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^t, \\ \dot{y} = 5x - y - (2t+6)e^t. \end{cases}$

155. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x - 2(t+1)e^t. \end{cases}$

156. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y + 5\sin t, \\ \dot{y} = 4x + y + 3\sin t - \cos t. \end{cases}$

157. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 5, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = -2y + 2z. \end{cases}$

158. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y - 3z, \\ \dot{y} = -3x - 2y + 3z, \\ \dot{z} = 3x + 3y - 2z + 2e^{-t}. \end{cases}$

159. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 4z + \sin t + \cos t, \\ \dot{y} = 3x + 4y - 5z - \sin t - \cos t, \\ \dot{z} = x + y - 2z. \end{cases}$

160. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y - 2z + \operatorname{ch} t, \\ \dot{y} = -x - y + 2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t, \\ \dot{z} = 6x - 2y + 2z - 2\operatorname{ch} t. \end{cases}$

161. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z + \cos t, \\ \dot{y} = 5x - 4y + 3z + \sin t, \\ \dot{z} = 4x - 4y + 3z + 2\sin t - 2\cos t. \end{cases}$

162. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - 2\operatorname{ch} t + 3\operatorname{sh} t, \\ \dot{y} = -2x + 2y + 2z + 4\operatorname{sh} t, \\ \dot{z} = 3x - 2y + z - \operatorname{sh} t. \end{cases}$

163. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 3z + 2e^{2t}, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z - 2e^{2t}, \\ \dot{z} = x + y - 2z. \end{cases}$

164. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z - 2e^t, \\ \dot{y} = -x + y + z + 2e^t, \\ \dot{z} = x - z - e^t. \end{cases}$

165. $\begin{cases} \dot{x} = -9x + 3y + 7z + 2, \\ \dot{y} = x + y - z + 4, \\ \dot{z} = -11x + 3y + 9z. \end{cases}$

166. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 2e^{-t}, \\ \dot{y} = x + 2y - z - e^{-t}, \\ \dot{z} = x - y + 2z - 3e^{-t}. \end{cases}$

167. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + t^2, \\ \dot{y} = -y - z + 2t, \\ \dot{z} = -z + t. \end{cases}$

168. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + t, \\ \dot{y} = x - 2z - 3t^2, \\ \dot{z} = -y + 2z + 3t - 2. \end{cases}$

Методом вариации постоянных решить линейные неоднородные системы уравнений (169—186):

169. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + \dfrac{1}{1+e^t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y - \dfrac{1}{1+e^t}. \end{cases}$

170. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + \dfrac{e^t}{1+e^t}, \\ \dot{y} = 2x + 2y + \dfrac{e^t}{1+e^t}. \end{cases}$

171. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 8y + \operatorname{tg} 4t, \\ \dot{y} = 4x - 4y. \end{cases}$

172. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 6y + \dfrac{1}{\cos^3 3t}, \\ \dot{y} = 3x - 3y. \end{cases}$

173. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + \dfrac{e^t}{\sin 2t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

174. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = -4x + y + \dfrac{1}{te^t}. \end{cases}$

175. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -4x - y + \dfrac{e^t}{2\sqrt{t}}. \end{cases}$

176. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - \ln t, \\ \dot{y} = -4x - 2y + \ln t. \end{cases}$

177. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y + \dfrac{e^{3t}}{1 + e^{2t}}, \\ \dot{y} = 2x + 5y. \end{cases}$

178. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2y + \dfrac{e^{2t}}{1 + e^t}, \\ \dot{y} = 10x + 6y. \end{cases}$

179. $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y, \\ \dot{y} = -4x + 6y - \dfrac{2}{\operatorname{ch} 2t}. \end{cases}$

180. $\begin{cases} \dot{x} = -7x + 2y, \\ \dot{y} = -15x + 4y + \dfrac{e^{-2t}}{1 + e^{2t}}. \end{cases}$

181. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y + \dfrac{3e^{2t}}{\cos^3 3t}, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

182. $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 6y, \\ \dot{y} = 18x - 11y - \dfrac{3e^t}{\operatorname{ch} 3t}. \end{cases}$

183. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - \dfrac{1}{1 + e^{-t}}, \\ \dot{y} = -3x - 2y - \dfrac{1}{1 + e^{-t}}. \end{cases}$

184. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + t \ln t, \\ \dot{y} = -4x + 2y + 2t \ln t. \end{cases}$

185. $\begin{cases} \dot{x} = -8x - 4y, \\ \dot{y} = 20x + 8y - 4 \operatorname{ctg} 4t. \end{cases}$

186. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y, \\ \dot{y} = 8x - 4y + \sqrt{t}. \end{cases}$

Решить операционным методом задачу Коши при $t \geqslant 0$ (187—197):

187. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 3x - 2y, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

188. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x - y, \end{cases}$
$x(0) = 1, \ y(0) = -1.$

189. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y + e^{2t}, \end{cases}$
$x(0) = 1, \ y(0) = 2.$

190. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{-t}, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = -1.$

191. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + e^{-t}, \\ \dot{y} = x - 2y + e^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 1.$

192. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^{t}, \\ \dot{y} = x + 2y + 3e^{t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

193. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + t, \\ \dot{y} = x - y + 2, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

194. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y + 4, \\ \dot{y} = -4x - 4y + 4t, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 3.$

195. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 3t + 6, \\ \dot{y} = -10x - y + 6t + 3, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

196. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + e^{2t}, \\ \dot{y} = 2x + 2y + 2e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

197. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -4x - 2y + te^{t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

Решить каким-либо методом задачу Коши (198—224):

198. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -4x - 2y + te^{t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

199. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + \frac{1}{2}y, \\ \dot{y} = -18x - 4y + 18te^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = \frac{1}{3},\ y(0) = 2.$

200. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 2y + 8te^{-t}, \\ \dot{y} = 8x - y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = \frac{1}{2}.$

201. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y + 9te^{5t}, \end{cases}$ $x(0) = \frac{1}{3},\ y(0) = 0.$

202. $\begin{cases} \dot{x} = 11x - 2y + 12te^{-t}, \\ \dot{y} = 18x - y, \end{cases}$ $x(0) = -\frac{2}{3},\ y(0) = 0.$

203. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 2y + 24e^{t}, \\ \dot{y} = -3x - 4y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

204. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 6t, \\ \dot{y} = -4x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 3.$

205. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - y, \\ \dot{y} = x - 3y - 36e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -6.$

206. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^{3t}, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

207. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 37\sin t, \\ \dot{y} = -4x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = -1.$

208. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + (1 - 4t)e^{-t}, \\ \dot{y} = -2x - 2y + 2te^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = -1.$

209. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y - 2e^{t}, \\ \dot{y} = x - y - e^{t}, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

210. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2z, \\ \dot{y} = x - y - z, \\ \dot{z} = -x - y - z, \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

211. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = 3z - x - y, \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

212. $\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = x - z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

213. $\begin{cases} \dot{x} = x - z, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = -x - y - z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1,\ z(0) = -1.$

214. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + z, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = z(0) = 1.$

215. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + z, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = x - y - z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

216. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + z, \\ \dot{y} = x - 2y, \\ \dot{z} = y - z, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = -1.$

217. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = -y - z, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1,\ z(0) = -1.$

218. $\begin{cases} \dot{x} = -2y + 2z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = y - z, \end{cases}$ $x(0) = z(0) = 0,\ y(0) = 1.$

219. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y. \\ \dot{y} = -x - y - 2z, \\ \dot{z} = y + z, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = -1,\ z(0) = 1.$

220. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z + 8, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = -x + y + z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

221. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z + 1 - e^{-t}, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z + 1, \\ \dot{z} = -x + y + 2z - 1 + e^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

222. $$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = -2x + y - z + 1, \end{cases}$$ $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

223. $$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z + 1, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z + 1, \end{cases}$$ $x(0) = z(0) = 1,\ y(0) = 0.$

224. $$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{2t}, \\ \dot{y} = 2y + 4z - 4e^{-t}, \\ \dot{z} = x - z, \end{cases}$$ $x(0) = 0,\ y(0) = -1,\ z(0) = 1.$

225. Найти все решения системы, стремящиеся к нулю при $t \to -\infty$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - 3z, \\ \dot{y} = -7x - 2y + 9z, \\ \dot{z} = -2x - y + 4z. \end{cases}$$

226. Найти все решения системы, ограниченные при $t \to +\infty$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4. \end{cases}$$

227. Показать, что решение системы уравнений $\dot{x}_1 = -a^2 x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$ при каждом из граничных условий: 1) $x_1(0) = 0$, $x_1(T) = b$, 2) $x_1(0) = 0$, $x_2(T) = b$, 3) $x_2(0) = 0$, $x_1(T) = b$, 4) $x_2(0) = 0$, $x_2(T) = b$ в зависимости от выбора параметров a, b и $T > 0$ либо существует и единственно, либо существует и неединственно, либо не существует.

228. Найти решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x} - 8x + \sqrt{6}\dot{y} = 0, \\ \ddot{y} - \sqrt{6}\dot{x} + 2y = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 1$, $y(0) = \dot{y}(0) = \dot{x}(0) = 0$.

229. Найти решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{y} + \dot{z} - 4x - 2y - 2z = \sin 2t, \\ 2\dot{x} - \ddot{y} + \ddot{z} + 3y - 4z = 0, \\ \dot{x} + \ddot{z} - 2x - y - 4z = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

230. Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Доказать, что $e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$.

231. Пусть квадратная матрица второго порядка A имеет собственные значения λ_1, λ_2 и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Доказать, что тогда

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} \cdot E + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 E),$$

где E — единичная матрица второго порядка.

232. Пусть квадратная порядка n матрица A имеет собственное значение λ_0 кратности n. Доказать, что тогда

$$e^{tA} = e^{\lambda_0 t}\left[E + \frac{t}{1!}(A - \lambda_0 E) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda_0 E)^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A - \lambda_0 E)^{n-1}\right],$$

где E — единичная матрица порядка n.

233. Пусть λ — собственное значение квадратной матрицы A и пусть h — соответствующий ему собственный вектор A. Доказать, что тогда e^{λ} — собственное значение матрицы e^{A}, а h — соответствующий ему собственный вектор e^{A}.

234. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения квадратной матрицы A (с учетом их кратности). Доказать, что определитель $\left|e^{tA}\right|$ матрицы e^{tA} удовлетворяет равенству $\left|e^{tA}\right| = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t}$.

235. Доказать, что матричные ряды для $\sin A$ и $\cos A$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}, \quad \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$$

сходятся для любой квадратной матрицы A.

Ответы к задачам § 11

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -\cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t + \sin 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t - \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\cos 4t - \sin 4t \\ 2\cos 4t + \sin 4t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos 4t + \sin 4t \\ \cos 4t - 2\sin 4t \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 5t + \sin 5t \\ -\cos 5t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 5t - \sin 5t \\ \sin 5t \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$

11. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right].$

12. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$

13. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$

14. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$

15. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

20. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

21. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

22. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

23. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

24. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

25. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

26. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

27. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

28. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

29. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{14t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

30. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{10t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

31. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

32. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

33. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ -\cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ -\sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$

34. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 4\cos t \\ \sin t \\ -3\cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} -4\sin t \\ \cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}.$$

35. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

36. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 4\cos 3t - 3\sin 3t \\ -2\cos 3t - 6\sin 3t \\ 5\cos 3t \end{pmatrix} + \\ + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} 4\sin 3t + 3\cos 3t \\ -2\sin 3t + 6\cos 3t \\ 5\sin 3t \end{pmatrix}.$$

37. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

38. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + \\ + C_3 e^{-4t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \\ 2\sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}.$$

39. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \\ 2\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} + \\ + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \sin 3t - \cos 3t \\ 2\sin 3t - \cos 3t \end{pmatrix}.$$

40. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} +$$

$$+C_3e^{-3t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \sin 2t-\cos 2t\\ 2\sin 2t-\cos 2t\end{pmatrix}.$$

41. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t+\sin 2t\\ 2\cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}+$$
$$+C_3e^{t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \sin 2t-\cos 2t\\ 2\sin 2t-\cos 2t\end{pmatrix}.$$

42. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos 2t+3\sin 2t\\ 5\sin 2t\\ 3\cos 2t+4\sin 2t\end{pmatrix}+$$
$$+C_3e^{-2t}\begin{pmatrix}3\cos 2t-\sin 2t\\ 5\cos 2t\\ 4\cos 2t-3\sin 2t\end{pmatrix}.$$

43. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}-3\cos t+\sin t\\ 4\cos t+2\sin t\\ 10\cos t\end{pmatrix}+$$
$$+C_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-\cos t-3\sin t\\ -2\cos t+4\sin t\\ 10\sin t\end{pmatrix}.$$

44. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ \cos t\end{pmatrix}+C_3e^{t}\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

45. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\cos t\\ -2\cos t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\sin t\\ -2\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}.$$

46. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\ 2\cos t-\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\ \cos t+2\sin t\\ 2\sin t\end{pmatrix}.$$

47. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 4\cos t - 3\sin t \\ 2\cos t - \sin t \\ -3\cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 3\cos t + 4\sin t \\ \cos t + 2\sin t \\ -3\sin t \end{pmatrix}.$$

48. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

49. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 4\cos t \\ \sin t \\ -3\cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -4\sin t \\ \cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}.$$

50. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t + 2\sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

51. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 5\sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

52. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

53. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

54. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

55. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right].$

56. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

57. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$

58. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$

59. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$

60. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$

61. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$

62. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right].$

63. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$

64. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$

65. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$

66. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$

67. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$

68. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-4t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$

69. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$

70. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$

71. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$

72. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$

73. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$

74. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$

$$+C_3e^{-t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}\right].$$

75. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\left[t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3e^{2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\end{pmatrix}\right].$$

76. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\left[t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3e^{-t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right].$$

77. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\left[t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3e^{-3t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right].$$

78. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+C_2e^{t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3e^{t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right].$$

79. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right]+$$

$$+C_3e^{2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right].$$

80. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\left[t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3e^{t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}\right].$$

81. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}+C_2\left[t\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right].$$

82. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\left[t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3e^{-2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right].$$

83. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3e^{2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\right].$$

84. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]+$$

$$+C_3e^{-2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right].$$

85. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\left[t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

86. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}+C_2\left[t\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right]+$$

$$+C_3\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}\right].$$

87. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\left[t\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right].$$

88. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-3t}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}+C_3e^{-3t}\left[t\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right].$$

89. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{-2t}\left[t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right].$$

90. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{t}\left[t\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right].$$

91. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}4\\6\\6\end{pmatrix}+C_3\left[t\begin{pmatrix}4\\6\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right].$$

92. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{3t}\left[t\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right].$$

93. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3e^{2t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

94. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

95. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{2t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

96. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2e^{3t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] +$$
$$+C_3e^{3t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

97. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{3t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] +$$
$$+C_3e^{3t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right].$$

98. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-3t}\left[t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] +$$
$$+C_3e^{-3t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

99. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] +$$

$$+C_3e^{2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right].$$

100. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\left[t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3e^{2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right].$$

101. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\left[t\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}\right]+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

102. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-3t}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\left[t\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3e^{-3t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right].$$

103. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}\right]+$$
$$+C_3e^{-2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right].$$

104. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}+C_3e^{2t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right].$$

105. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C_3e^{3t}\left[t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right].$$

106. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$

107. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \left[t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$

108. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

109. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \left[t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

110. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \\ 2\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t - \sin 3t \\ \cos 3t - 2\sin 3t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

111. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin 5t \\ \cos 5t + 2\sin 5t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos 5t \\ 2\cos 5t \\ 2\cos 5t - \sin 5t \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

112. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -\cos 4t \\ \sin 4t \\ 3\cos 4t - \sin 4t \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin 4t \\ \cos 4t \\ -\cos 4t - 3\sin 4t \end{pmatrix} +$

$$+C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

113. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \\ -3\sin 2t \end{pmatrix} +$

$$+C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

114. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ \sin 3t \\ 2\cos 3t + 2\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ 2\cos 3t - 2\sin 3t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

115. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -\cos 4t \\ 2\cos 4t + \sin 4t \\ 2\cos 4t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin 4t \\ \cos 4t - 2\sin 4t \\ -2\sin 4t \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

116. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -\cos 4t \\ \sin 4t \\ \cos 4t + \sin 4t \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin 4t \\ \cos 4t \\ \cos 4t - \sin 4t \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

117. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

118. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

119. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-4t} + e^{-2t} & e^{-4t} - e^{-2t} \\ e^{-4t} - e^{-2t} & e^{-4t} + e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

120. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + e^{-3t} & 1 - e^{-3t} \\ 2 - 2e^{-3t} & 1 + e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

121. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 + 2e^{4t} & 1 - e^{4t} \\ 4 - 4e^{4t} & 2 + 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

122. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 - t & t \\ -t & t + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

123. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + t & -t \\ t & 1 - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

124. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

125. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

126. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

127. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & -\sin t \\ 5\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

128. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

129. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{t} \begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t & \sin t \\ -5\sin t & \cos t + 2\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

130. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

131. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

132. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$

133. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{3t}+2 & e^{3t}-1 & 0 \\ 2e^{3t}-2 & 2e^{3t}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$

134. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-t} & 1-e^{-t} \\ 1-e^{-t} & 1+te^{-t} & 1-(t+1)e^{-t} \\ e^{-t}-1 & (1+t)e^{-t}-1 & (t+2)e^{-t}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$

135. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)e^t & 0 & -te^t \\ 1-e^t & 1 & e^t-1 \\ te^t & 0 & (1-t)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$

136. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1-e^{-t} & e^{-t} & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$

137. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16\sin t - 15\cos t \\ -10\sin t + 14\cos t \end{pmatrix}.$

138. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$

139. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30t - 29 \\ 28 - 24t \end{pmatrix}.$

140. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin 4t - \cos 4t \\ \sin 4t - 2\cos 4t \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin 4t + \cos 4t \\ \cos 4t + 2\sin 4t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{7t} \\ e^{7t} \end{pmatrix}.$

141. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \sin 3t \\ 2\sin 3t - \cos 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ 2\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} +$

$$+ \begin{pmatrix} 21e^t - 15t \\ 45e^t - 30t + 5 \end{pmatrix}.$$

142. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{4} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$

143. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] +$

$$\begin{pmatrix} 7e^{2t} + 4t^2 - 16t + 28 \\ -7e^{2t} - 5t^2 + 22t - 39 \end{pmatrix}.$$

144. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 1 - 2t \end{pmatrix}.$

145. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t(e^t - e^{-t}) \\ (t+1)e^t + (t-1)e^{-t} \end{pmatrix}.$

146. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-4t)e^{2t} + 2t^2 + 2t - \frac{1}{2} \\ 6te^{2t} - 2t^2 - 3t \end{pmatrix}.$

147. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \sin 2t - 3\cos 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ 3\sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t\cos 2t \\ \dfrac{2}{5}(1+2t)\sin 2t - \dfrac{2}{5}(1+6t)\cos 2t \end{pmatrix}.$$

148. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1-5t \\ -15t \end{pmatrix}.$$

149. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t^2 + 3t - \dfrac{2}{3} \\ -2t^2 - 4t \end{pmatrix}.$$

150. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] + e^{-t} \begin{pmatrix} t^2 - t \\ 2t^2 \end{pmatrix}.$$

151. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} -10t - 4 \\ 10t \end{pmatrix}.$$

152. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - e^{3t} \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

153. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

154. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}.$$

155. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} - e^{t} \begin{pmatrix} t + 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

156. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

157. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

158. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

159. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

160. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + \\ + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \operatorname{sh} t.$$

161. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] + \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

162. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \operatorname{ch} t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

163. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

164. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

165. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

166. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$

167. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$

$+ C_3 e^{-t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} t^3 - 3t + 3 \\ t \\ t - 1 \end{pmatrix}.$

168. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \left[t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$

$+ \begin{pmatrix} 9t^2 - 20t - 79 \\ 6t^2 - 19t - 46 \\ 3t^2 - 16t - 30 \end{pmatrix}.$

169. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (3e^{2t} - 4) \ln(1 + e^{-t}) - 3e^t + \frac{3}{2} \\ (3e^{2t} - 2) \ln(1 + e^{-t}) - 3e^t + \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$

170. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \ln(1 + e^{-t}) + 3 \ln(1 + e^t) \\ -4e^t \ln(1 + e^{-t}) - 3 \ln(1 + e^t) \end{pmatrix}.$

171. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 4t + \sin 4t \\ \sin 4t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 4t - \sin 4t \\ \cos 4t \end{pmatrix} +$

$+ \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (\sin 4t - \cos 4t) \ln \left| \frac{1 + \sin 4t}{1 - \sin 4t} \right| - 2 \\ - \cos 4t \cdot \ln \left| \frac{1 + \sin 4t}{1 - \sin 4t} \right| \end{pmatrix}.$

172. $x = (C_1 + C_2) \cos 3t + (C_1 - C_2) \sin 3t + \frac{1}{6 \cos^2 3t} [2 \sin 3t + \cos 6t (\sin 3t -$ $- \cos 3t)]$, $y = C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t - \frac{\cos 6t}{6 \cos 3t}$.

173. $x = C_1 e^t (\cos 2t + \sin 2t) + C_2 e^t (\cos 2t - \sin 2t) + t e^t (\sin 2t -$

$-\cos 2t) + \frac{1}{2}e^t(\cos 2t + \sin 2t)\ln|\sin 2t|$, $y = e^t(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) + \frac{1}{2}e^t \sin 2t \ln|\sin 2t| - te^t \cos 2t$.

174. $x = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + te^{-t}(\ln|t| - 1)$, $y = C_1(2t+1)e^{-t} + 2C_2 e^{-t} + e^{-t}(2t\ln|t| + \ln|t| - 2t)$.

175. $x = -C_1(t+1)e^t - C_2 e^t + \frac{2}{3}t\sqrt{t}e^t$, $y = C_1(2t+1)e^t + 2C_2 e^t + \left(\sqrt{t} - \frac{4}{3}t\sqrt{t}\right)e^t$.

176. $x = -C_1(t+1) - C_2 + t + \frac{3}{4}t^2 - \left(t + \frac{1}{2}t^2\right)\ln t$, $y = C_1(2t+1) + 2C_2 - t - \frac{3}{2}t^2 + (t + t^2)\ln t$.

177. $x = 2C_1 e^t - C_2 e^{3t} + e^t \ln(1 + e^{2t}) + \frac{1}{2}e^{3t}\ln(1 + e^{-2t})$, $y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t} - \frac{1}{2}e^t \ln(1 + e^{2t}) - \frac{1}{2}e^{3t}\ln(1 + e^{-2t})$.

178. $x = -2C_1 e^{2t} - C_2 e^t + 5e^t \ln(1 + e^t) + 4e^{2t}\ln(1 + e^{-t})$, $y = 5C_1 e^{2t} + 2C_2 e^t - 10e^t \ln(1 + e^t) - 10e^{2t}\ln(1 + e^{-t})$.

179. $x = 2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + 2e^{-2t}\ln(1 + e^{4t}) + 2e^{2t}\ln(1 + e^{-4t})$, $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + e^{-2t}\ln(1 + e^{4t}) + 2e^{2t}\ln(1 + e^{-4t})$.

180. $x = 2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} - 2e^{-2t} - e^{-2t}\ln(1 + e^{-2t}) - 2e^{-t}\operatorname{arctg} e^t$, $y = 5C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{-t} - 6e^{-2t} - \frac{5}{2}e^{-2t}\ln(1 + e^{-2t}) - 6e^{-t}\operatorname{arctg} e^t$.

181. $x = (C_1 + C_2)e^{2t}\cos 3t + (C_1 - C_2)e^{2t}\sin 3t + e^{2t}\operatorname{tg} 3t(\sin 3t + \cos 3t) + \frac{e^{2t}}{2\cos^2 3t}(\sin 3t - \cos 3t)$, $y = C_1 e^{2t}\sin 3t + C_2 e^{2t}\cos 3t - \frac{e^{2t}\cos 6t}{\cos 3t}$.

182. $x = 2C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + 4e^t \operatorname{arctg} e^{3t} - 2e^{-2t}\ln(1 + e^{6t})$, $y = 3C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t} + 6e^t \operatorname{arctg} e^{3t} - 4e^{-2t}\ln(1 + e^{6t})$.

183. $x = -2C_1 - C_2 e^t + 4\ln(1 + e^t) + 5e^t \ln(1 + e^{-t})$, $y = 3C_1 + C_2 e^t - 6\ln(1 + e^t) - 5e^t \ln(1 + e^{-t})$.

184. $x = C_1 + C_2 t + \frac{1}{4}t^2(2\ln t - 1)$, $y = 2C_1 + C_2(2t+1) + \frac{1}{2}t^2(2\ln t - 1)$.

185. $x = -C_1 \cos 4t - C_2 \sin 4t - \sin 8t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos 4t}{1-\cos 4t} \right| \cdot \sin 4t$, $y = (2C_1 + C_2) \cos 4t + (2C_2 - C_1) \sin 4t + \cos 8t + 2 \sin 8t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos 4t}{1-\cos 4t} \right| (\cos 4t + 2 \sin 4t)$.

186. $x = C_1 + C_2 t - \frac{8}{15} t^{\frac{5}{2}}$, $y = 2C_1 + C_2 \left(t - \frac{1}{2} \right) - \frac{16}{15} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}$.

187. $x = y = e^t$.

188. $x = \cos t$, $y = -\cos t - \sin t$.

189. $x = e^{3t} + te^{2t}$, $y = 2e^{3t} + te^{2t}$.

190. $x = 2e^{2t} - e^t - 2e^{-t}$, $y = e^t + e^{-t} - 3e^{2t}$.

191. $y = \frac{1}{3}(5e^{-t} - 8e^{2t}) + te^{-t}$, $y = \frac{1}{3}(5e^{-t} - 2e^{2t}) + te^{-t}$.

192. $x = (2-t)e^{3t} - e^t$, $y = (3-t)e^{3t} - 2e^t$.

193. $x = 3 \cos t - \sin t + t - 3$, $y = 2 \cos t + \sin t + t - 2$.

194. $x = 4 + 5t - 4 \cos 2t + 7 \sin 2t$, $y = 6 \cos 2t - 4 \sin 2t - 3 - 4t$.

195. $x = \frac{5}{3} \sin 3t + \frac{4}{3}(1 - \cos 3t) + t$, $y = \frac{7}{3} \sin 3t + \frac{19}{3}(\cos 3t - 1) - 4t$.

196. $x = 1 + e^t - e^{2t}$, $y = -1 - 2e^t + 4e^{2t}$.

197. $x = \frac{5}{3} e^{2t} + \frac{1}{12} e^{-t} - \frac{7}{4} e^t - \frac{1}{2} te^t$, $y = -\frac{5}{3} e^{2t} - \frac{1}{3} e^{-t} + 2e^t + te^t$.

198. $x = \frac{1}{12} e^{-t} - \frac{1}{4}(2t+7)e^t + \frac{5}{3} e^{2t}$, $y = -\frac{1}{3} e^{-t} + (t+2)e^t - \frac{5}{3} e^{2t}$.

199. $x = (3t+1)e^{-t} + \left(t - \frac{2}{3} \right) e^{2t}$, $y = -18te^{-t} + 2e^{2t}$.

200. $x = \frac{1}{2} e^{-t} + \left(t - \frac{1}{2} \right) e^{3t}$, $y = (4t+2)e^{-t} + \left(2t - \frac{3}{2} \right) e^{3t}$.

201. $x = (3t-2)e^{5t} - \left(4t + \frac{7}{3} \right) e^{2t}$, $y = e^{5t} - (1+4t)e^{2t}$.

202. $x = \frac{1}{3} e^{-t} - (2t+1)e^{5t}$, $y = (6t+2) \left(e^{-t} - e^{5t} \right)$.

203. $x = -e^{-7t} - 4e^{-2t} + 5e^t$, $y = -e^{-7t} + 6e^{-2t} - 3e^t$.

204. $x = \frac{31}{30}e^{-6t} + \frac{29}{5}e^{-t} + 5t - \frac{29}{5}$, $y = \frac{62}{15}e^{-6t} - \frac{29}{5}e^{-t} - 4t + \frac{14}{3}$.

205. $x = e^{2t} - te^{-4t}$, $y = (t+1)e^{-4t} - 7e^{2t}$.

206. $x = (1 - t - t^2)e^{3t}$, $y = (2 + t - t^2)e^{3t}$.

207. $x = 15e^{-t} - 15\cos t + 16\sin t$, $y = -15e^{-t} + 14\cos t - 10\sin t$.

208. $x = (t+1)e^{-t} - 2e^{2t}$, $y = e^{2t} - 2e^{-t}$.

209. $x = e^t(\cos t - 3\sin t + 1)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$.

210. $x = e^{2t} + 2e^{-2t}$, $y = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})$, $z = \frac{1}{2}(-e^{2t} + 3e^{-2t})$.

211. $x = 2e^t + e^{2t}$, $y = 2(e^t - e^{2t})$, $z = 2e^t - e^{2t}$.

212. $x = -e^{-t}\sin t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}\cos t$.

213. $x = (1+t)e^t$, $y = (1-t)e^t$, $z = -e^t$.

214. $x = -e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$, $z = e^t\cos t$.

215. $x = te^{-t}$, $y = te^{-t}$, $z = e^{-t}$.

216. $x = e^{-t}(\cos t + \sin t)$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}\cos t$.

217. $x = te^{-t}$, $y = e^{-t}$, $z = -(t+1)e^{-t}$.

218. $x = -2e^{-t}\sin t$, $y = e^{-t}\cos t$, $z = e^{-t}\sin t$.

219. $x = 2te^t$, $y = -e^t$, $z = (1-t)e^t$.

220. $x = 8te^t$, $y = 4(2te^t - e^{2t} + 1)$, $z = 4(2e^t - e^{2t} - 1)$.

221. $x = z = 0$, $y = 1 - e^{-t}$.

222. $x = y = 2(1 - \cos t)$, $z = \cos t + \sin t - 1$.

223. $x = z = t + 1$, $y = 0$.

224. $x = 0$, $y = -e^{2t}$, $z = e^{-t}$.

225. $x = -C_2e^{2t} - C_3te^{2t}$, $y = 3C_1e^t + 4C_2e^{2t} + C_3(4t-1)e^{2t}$, $z = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3te^{2t}$.

226. $x_1 = x_2 = x_3 = C$, $x_4 = 2C$.

228. $x = \frac{1}{2}(3\operatorname{ch} 2t - \cos 2t)$, $y = \sqrt{6}(\operatorname{ch} 2t - \cos 2t)$.

229. $x = \frac{3}{20}\operatorname{sh} t + \frac{5}{156}\operatorname{sh} 3t - \frac{8}{65}\sin 2t$, $y = \frac{1}{40}(3e^t - e^{-t}) - \frac{1}{312}(5e^{3t} - e^{-3t}) - \frac{2}{65}(\cos 2t + \sin 2t)$, $z = \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{65}e^{-3t} - \frac{1}{60}e^{2t} + \frac{1}{260}(7\sin 2t - 9\cos 2t)$.

§ 12. Линейные системы уравнений с переменными коэффициентами

По заданной фундаментальной матрице $\Phi(x)$ линейной однородной системы $y'(x) = A(x)y(x)$ с непрерывной на промежутке I и квадратной порядка n матрицей $A(x)$ всегда можно однозначно определить матрицу $A(x)$, т. е. построить линейную однородную систему.

Пример 1. По заданной фундаментальной матрице $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ составить линейную однородную систему.

Δ Неизвестная матрица $A(x)$ находится из условия, что $\Phi(x)$ — решение матричного уравнения $Y'(x) = A(x)Y(x)$. Отсюда $A(x) = \Phi'(x) \cdot \Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Искомая система имеет вид

$$y_1' = y_2, \ y_2' = -y_1. \qquad \blacktriangle$$

Формула Лиувилля-Остроградского позволяет по заданному решению линейной однородной системы найти общее решение этой системы.

Пример 2. Известно, что вектор-функция $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ — решение системы $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ (1+x^2)y_2' = -2y_1 + 2xy_2. \end{cases}$ Найти общее решение системы.

Δ Пусть решением системы является вектор-функция с компонентами $y_1 = \varphi(x)$, $y_2 = \psi(x)$, причем $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$. По формуле Лиувилля-Остроградского имеем:

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & x \\ \psi(x) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^{\int\limits_0^x \frac{2\zeta d\zeta}{1+\zeta^2}} = 1 + x^2.$$

Отсюда $\varphi(x) - x\psi(x) = 1 + x^2$. Подставляя выражение для $\varphi(x)$ во второе уравнение системы, получаем задачу Коши для $\psi(x)$

$$\psi'(x) = -2, \ \psi(0) = 0.$$

Следовательно, $\psi(x) = -2x$, $\varphi(x) = 1 - x^2$.

Тогда общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 - x^2 \\ -2x \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Может ли система $\begin{cases} y_1' = -x^3 y_1 + y_2 \sin x, \\ y_2' = x^4 y_1 + e^x y_2 \end{cases}$ иметь два ограниченных на $(-\infty, +\infty)$ линейно независимые решения?

$\triangle$ Ответ на поставленный вопрос отрицательный, поскольку допустив противное, получаем, что определитель Вронского этих решений является ограниченной на $(-\infty, +\infty)$ функцией и отличен от нуля. С другой стороны первообразная следа матрицы системы

$$\int_0^x (-x^3 + e^x)dx = -\frac{x^4}{4} + e^x - 1$$

является неограниченной на $(-\infty, +\infty)$ функцией. Это противоречит формуле Лиувилля-Остроградского. $\blacktriangle$

1. Пусть задана линейная система $y'(x) = \varphi(x)Ay(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная на промежутке I функция и A — числовая квадратная матрица порядка n. Доказать, что замена $t = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(\zeta)d\zeta$ дает линейную систему $y'(t) = Ay(t)$.

2. Пусть $\Phi(x)$ — фундаментальная матрица линейной системы $z'(x) = B(x)z(x)$, где $B(x)$ — квадратная порядка n и непрерывная на промежутке I матрица. Показать, что замена $y(x) = \Phi(x)z(x)$ в линейной системе $y'(x) = A(x)y(x)$ с квадратной порядка n и непрерывной на I матрицей $A(x)$ дает линейную систему вида $z'(x) = \Phi^{-1}(x)[A(x) - B(x)]\Phi(x)z(x)$.

В задачах (3—9) исследовать линейную зависимость вектор-функций на $(-\infty, +\infty)$:

3. $\begin{pmatrix} \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh} x \end{pmatrix}.$ **4.** $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix}.$ **5.** $e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, e^x \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin^2 x \\ \sin 2x \\ 2\cos 2x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos^2 x \\ -\sin 2x \\ -2\cos 2x \end{pmatrix}.$ **7.** $\begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh} x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}.$ **9.** $\begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2|x| \\ x|x| \\ |x| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

В задачах (10—18) по заданной фундаментальной матрице $\Phi(x)$ найти матрицу $A(x)$ линейной однородной системы $y'(x) = A(x)y(x)$.

10. $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}.$ **11.** $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ -x^2 & 1 \end{pmatrix}.$

12. $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^x \end{pmatrix}.$ **13.** $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^{2x} \end{pmatrix}.$

14. $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$ **15.** $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$

16. $\Phi(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}, x > 0.$ **17.** $\Phi(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{pmatrix}, x > 0.$

18. $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} + x & 1 \\ xe^x & e^x \end{pmatrix}.$

В задачах (19—23) по заданному решению $\bar{y}(x)$ линейной однородной системы найти фундаментальную матрицу $\Phi(x)$ этой системы:

19. $\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{1+x^4}(2x^3 y_1 - 2xy_2), \\ y_2' = \dfrac{1}{1+x^4}(2xy_1 + 2x^3 y_2). \end{cases}$

20. $\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{1+x^2}(xy_1 + y_2), \\ y_2' = \dfrac{1}{1+x^2}(-y_1 + xy_2). \end{cases}$

21. $\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x(1+x) \end{pmatrix}$, $\begin{cases} y_1' = -(2x+1)y_1 + 2y_2, \\ y_2' = (-2x^2 - 2x + 1)y_1 + (2x+1)y_2. \end{cases}$

22. $\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-x}(1-x) \end{pmatrix}$, $\begin{cases} y_1' = (1-2x)y_1 - 2y_2, \\ y_2' = (2x^2 - 2x - 1)y_1 + (2x-1)y_2. \end{cases}$

23. $\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$, $\begin{cases} y_1' = y_1 \cos^2 x + (\sin x \cos x - 1)y_2, \\ y_2' = (\sin x \cos x + 1)y_1 + y_2 \sin^2 x. \end{cases}$

24. Пусть квадратная порядка n матрица $A(x)$ непрерывна на промежутке I и при всех $x \in I$ перестановочна со своей первообразной, т. е. $A(x) \cdot \int\limits_{x_0}^{x} A(\zeta)d\zeta = \int\limits_{x_0}^{x} A(\zeta)d\zeta \cdot A(x)$, где $x_0 \in I$. Доказать, что тогда фундаментальной матрицей $\Phi(x)$ линейной однородной системы $y'(x) = A(x)y(x)$ является матрица

$$\Phi(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} A(\zeta)d\zeta}.$$

25. Пусть квадратная порядка n и непрерывная на промежутке I матрица $A(x) = HJ(x)H^{-1}$, где $J(x)$ — жорданова и непрерывна на I матрица, а H — числовая невырожденная порядка n матрица. Доказать, что матрица $A(x)$ перестановочна со своей первообразной на промежутке I и что на I фундаментальной матрицей системы $y'(x) = A(x)y(x)$ является матрица

$$\Phi(x) = He^{\int\limits_{x_0}^{x} J(\zeta)d\zeta} H^{-1}, \; x_0 \in I.$$

Используя результат предыдущей задачи, в задачах (26—37) найти фундаментальные матрицы $\Phi(x)$ линейных однородных систем.

26. $\begin{cases} y_1' = (2x-1)y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + (2x+1)y_2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} y_1' = -(1+2x)y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + (1-2x)y_2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} y_1' = (2x+1)y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + (2x-1)y_2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} y_1' = (\cos x - 2)y_1 + 4y_2, \\ y_2' = (-3y_1 + 5y_2)\cos x. \end{cases}$

30. $\begin{cases} y_1' = -(2+\sin x)y_1 + 4y_2, \\ y_2' = -y_1 - y_2 \sin x. \end{cases}$

31. $\begin{cases} y_1' = (2+\cos x)y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + (\cos x - 1)y_2. \end{cases}$

32. $\begin{cases} y_1' = (1-\sin x)y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 - (1+\sin x)y_2. \end{cases}$

33. $\begin{cases} y_1' = y_1 \sin x - y_2 \cos x, \\ y_2' = -y_1 \cos x + y_2 \sin x. \end{cases}$

34. $\begin{cases} y_1' = y_1 \cos x - y_2 \sin x, \\ y_2' = -y_1 \sin x + y_2 \cos x. \end{cases}$

35. $\begin{cases} y_1' = y_1 \sin x + y_2 \cos x, \\ y_2' = y_1 \cos x + y_2 \sin x. \end{cases}$

36. $\begin{cases} y_1' = -2xy_2, \\ y_2' = -2xy_1. \end{cases}$

37. $\begin{cases} y_1' = 3x^2 y_2, \\ y_2' = 3x^2 y_1. \end{cases}$

38. Может ли система $y_1' = \dfrac{y_1}{1+x^2} + (1+x)^3 y_2$, $y_2' = y_1 \ln|x| - 4y_2$ иметь два ограниченных на $(-\infty, 0)$ линейно независимые решения?

39. Может ли система $y_1' = \dfrac{y_1}{1-x^2} - xy_2$, $y_2' = y_1 \operatorname{tg} x + 3y_2$ иметь два ограниченных на $(-1, 1)$ линейно независимые решения?

40. Пусть $\Phi(x)$ — фундаментальная матрица линейной системы $y'(x) = A(x)y(x)$, где $A(x)$ — квадратная порядка n матрица с непрерывными на $(-\infty, +\infty)$ элементами $a_{ij}(x)$, причем $a_{ij}(x+w) = a_{ij}(x)$, $\int\limits_0^w a_{ij}(x)dx = \alpha_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $w > 0$. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln|\det \Phi(x)| = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}.$$

Ответы к задачам § 12

3. Линейно независимы.

4. Линейно зависимы.

5. Линейно независимы.

6. Линейно зависимы.

7. Линейно зависимы.

8. Линейно независимы.

9. Линейно независимы.

10. $\dfrac{1}{1+x^2}\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$.

11. $\dfrac{1}{1+x^4}\begin{pmatrix} 2x^3 & 2x \\ -2x & 2x^3 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-x & 2 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin x\cos x - 1 \\ \sin x\cos x + 1 & \sin^2 x \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \dfrac{2}{x^2} \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{x} & -\dfrac{1}{x^2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} e^x - 1 & e^x - 1 \\ e^{2x} & 1 - e^x \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ x^2 & -1 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x(1+x) & xe^{-x} \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} e^{-x} & e^x \\ e^{-x}(1-x) & -xe^x \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} -\sin x & e^x\cos x \\ \cos x & e^x\sin x \end{pmatrix}$.

26. $e^{x^2}\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & x+1 \end{pmatrix}$.

27. $e^{-x^2}\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & x+1 \end{pmatrix}$.

28. $e^{x^2}\begin{pmatrix} x+1 & x \\ -x & 1-x \end{pmatrix}$.

29. $e^{\sin x}\begin{pmatrix} 1-2x & 4x \\ -x & 1+2x \end{pmatrix}$.

30. $e^{(\cos x - 1)}\begin{pmatrix} 1-2x & 4x \\ -x & 1+2x \end{pmatrix}$.

31. $e^{\sin x}\begin{pmatrix} x+1 & x \\ -x & 1-x \end{pmatrix}$.

32. $e^{(\cos x - 1)}\begin{pmatrix} x+1 & x \\ -x & 1-x \end{pmatrix}$.

33. $e^{(1-\cos x)}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\sin x) & -\operatorname{sh}(\sin x) \\ -\operatorname{sh}(\sin x) & \operatorname{ch}(\sin x) \end{pmatrix}$.

34. $e^{\sin x}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(1-\cos x) & -\operatorname{sh}(1-\cos x) \\ -\operatorname{sh}(1-\cos x) & \operatorname{ch}(1-\cos x) \end{pmatrix}$.

35. $e^{(1-\cos x)}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\sin x) & \operatorname{sh}(\sin x) \\ \operatorname{sh}(\sin x) & \operatorname{ch}(\sin x) \end{pmatrix}$.

36. $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} x^2 & -\operatorname{sh} x^2 \\ -\operatorname{sh} x^2 & \operatorname{ch} x^2 \end{pmatrix}$.

37. $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} x^3 & \operatorname{sh} x^3 \\ \operatorname{sh} x^3 & \operatorname{ch} x^3 \end{pmatrix}$.

38. Не может.

39. Не может.

Глава 4

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 13. Поведение фазовых траекторий в окрестности грубых положений равновесия

Для автономной системы второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y), \end{cases}$$

с непрерывно дифференцируемыми $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в некоторой области $G \subset R^2_{(x,y)}$ положение равновесия (a_1, a_2) называется грубым положением равновесия, если матрица линеаризованной в точке (a_1, a_2) системы имеет такие собственные значения λ_1, λ_2, для которых $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\operatorname{Re}\lambda_1 \neq 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0$.

В окрестности грубого положения равновесия автономной системы поведение фазовых траекторий качественно одинаково с поведением фазовых траекторий линеаризованной в этой точке системы.

Пример 1. Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2. \end{cases}$$

Δ Приравнивая правые части системы нулю, находим положения равновесия $(1, 1)$ и $(1, -1)$.

Рассмотрим сначала точку $(1, 1)$. Для дальнейшего удобно ее преобразовать в начало координат. С этой целью сделаем замену переменных

$x-1=u$, $y-1=v$ в заданной системе. Система примет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u - 2v - v^2, \\ \dot{v} = 2u + 2v + u^2 + v^2, \end{cases}$$

для которой точка $(0,0)$ — положение равновесия. Линеаризованная в точке $(0,0)$ система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u - 2v, \\ \dot{v} = 2u + 2v. \end{cases}$$

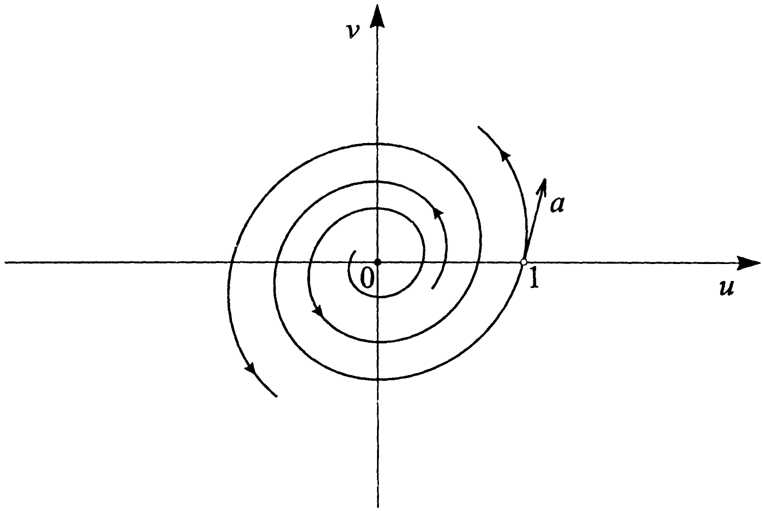
Находим собственные значения матрицы этой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 6 = 0.$$

Так как собственные значения $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{15})$, то положение равновесия является неустойчивым фокусом. Следовательно, кроме положения равновесия $(0,0)$, остальными траекториями являются спирали. Для определения направления движения по спиралям при $t \to +\infty$ достаточно найти вектор фазовой скорости $\boldsymbol{a}$ линеаризованной системы в какой-нибудь точке. Например, в точке $(1,0)$ вектор скорости $\boldsymbol{a}$ имеет координаты $(1,2)$, Следовательно, при $t \to +\infty$ движение по спиралям направлено против часовой стрелки. Поведение фазовых траекторий в этом случае схематически показано на следующем рисунке.



Для другого положения равновесия $(1, -1)$ замена переменных $x - 1 = u$, $y + 1 = v$ дает систему вида

$$\begin{cases} \dot{u} = u + 2v - v^2, \\ \dot{v} = 2u - 2v + u^2 + v^2. \end{cases}$$

Линеаризация этой системы в точке $(0, 0)$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u + 2v, \\ \dot{v} = 2u - 2v. \end{cases}$$

Собственные значения матрицы этой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

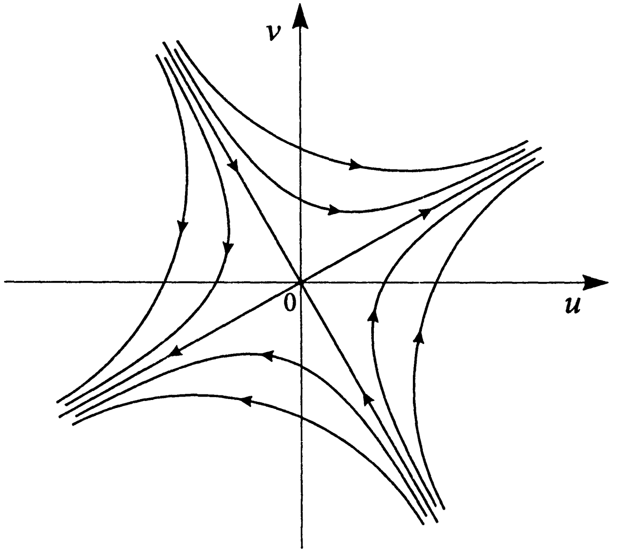
находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Получаем $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Так как λ_1 и λ_2 разных знаков, то положение равновесия $(0, 0)$ является седлом. Для того, чтобы нарисовать картину поведения фазовых траекторий, осталось найти линейно независимые собственные векторы h_1 и h_2 для λ_1 и λ_2. Для $\lambda_1 = -3$ собственный вектор

$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, а для $\lambda_2 = 2$ собственный вектор $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Известно, что в случае седла траекториями являются гиперболы, для которых прямые, определяемые векторами h_1 и h_2, служат асимптотами. Лучи этих прямых тоже траектории.

Поведение фазовых траекторий в этом случае схематически показано на следующем рисунке, где стрелки указывают направление движения по траекториям при $t \to +\infty$.



▲

Пример 2. Для уравнения $\ddot{x} + x^3 - e^{-\frac{4\dot{x}}{x}} = 0$ найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованного уравнения в окрестности положений равновесия.

△ Введя обозначение $\dot{x} = y$, преобразуем уравнение к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 + e^{-\frac{4y}{x}}. \end{cases}$$

По определению положениями равновесия и фазовыми траекториями заданного уравнения являются соответственно положения равновесия и фазовые траектории этой системы. Приравнивая нулю правые части системы, находим положение равновесия $(1, 0)$. Перенося начало координат в положение равновесия $(1, 0)$ с помощью замены $x = u + 1$, $y = v$, получаем автономную систему

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -(u+1)^3 + e^{-\frac{4v}{u+1}}. \end{cases}$$

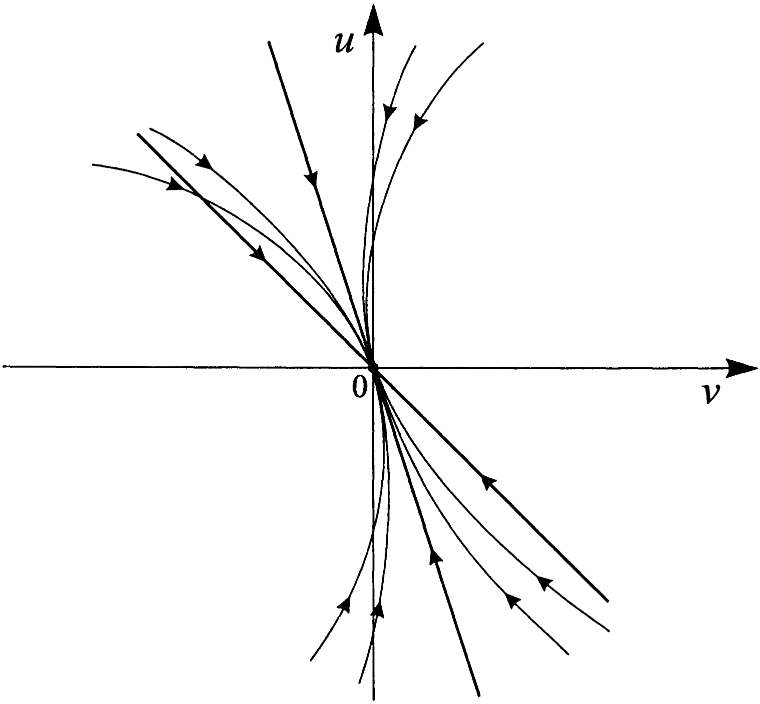
Разлагая правую часть системы по формуле Тейлора в окрестности $(0, 0)$ и ограничиваясь лишь линейными членами разложения, получаем линеаризованную систему вида

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -3u - 4v. \end{cases}$$

Матрица этой системы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. Соответствующие им линейно независимыми собственными векторами являются

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Положение равновесия $(0, 0)$ линеаризованной системы — устойчивый узел. Поведение фазовых траекторий схематически показано на следующем рисунке, где стрелки указывают направление движения по траекториям при $t \to +\infty$.



▲

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия для автономных систем (1—52):

1. $\begin{cases} \dot{x} = e^{2x+2y} + x, \\ \dot{y} = \arccos(x - x^3) - \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y), \\ \dot{y} = \sqrt[3]{x - 4y} + x - 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(1 + \sqrt{1 + 4y - y^3}\right) - \ln 2, \\ \dot{y} = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(x + 3y)\pi + 2 - y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(5 - 2x - 2y), \\ \dot{y} = e^{xy} - 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(y - x^2 - x), \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = \sin x - y^2 + 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(x + y), \\ \dot{y} = x^3 + y^3 - 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - xy + 2, \\ \dot{y} = x^2 - x - 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + x + 2y^2 - 2, \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - y - 2, \\ \dot{y} = -xy - 3y^2 - 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2-y} - e^{2x}, \\ \dot{y} = -x - 2y - y^2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - x^2, \\ \dot{y} = \sqrt{1+4y} - \sqrt{1+2x+2y^2}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2, \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -3 + 2x + y, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(xy). \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(3x^2 - 1) - \ln 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 4 - x(3y+2) - 9y^2, \\ \dot{y} = \ln \dfrac{1+x}{1-2x}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 y + y^2, \\ \dot{y} = \ln(x^3 + y) - 3y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = 3xy, \\ \dot{y} = e^{-4xy} - x. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = y(x - 2y - 6), \\ \dot{y} = \ln(x - 2y). \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 8y + 3, \\ \dot{y} = \ln \dfrac{x}{y}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = \arcsin(x^2 - 2x - y), \\ \dot{y} = \ln\left(1 - x + \dfrac{x^2}{3}\right). \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = e^{-\operatorname{sh}(x+y)} - 1, \\ \dot{y} = 2xy + x - y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(x^2 - x + y), \\ \dot{y} = \ln(1 + x^2 + 3x - y). \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = e^x - y - 1, \\ \dot{y} = x + \ln(1 + y). \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh} y, \\ \dot{y} = e^x - 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + x + 4y), \\ \dot{y} = \arcsin\left(x + y - \dfrac{x^2}{4}\right). \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(x - y), \\ \dot{y} = e^{(x+y+2xy)} - 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = e^{-x+4y}, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}\left(4x - y - \dfrac{5x^2}{4}\right). \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 2\pi + \arcsin(y^2 + 8 + \sin x) + x, \\ \dot{y} = 2y + 4 - 3\sin x. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(x^3 - 1 - 6e^y) - y, \\ \dot{y} = 4x - 4e^y - 4. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dot{x} = \pi + \operatorname{arctg}(x^3 - 8 - \operatorname{tg} y) - y, \\ \dot{y} = 2x + 12\operatorname{tg} y - 4. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{y^3 - 1 - 6x^2} - x, \\ \dot{y} = \sqrt{2y - 3} - \sqrt{2x^2 - 1}. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(2x + y - x^2), \\ \dot{y} = \ln(1 + 3x - x^2). \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(x - y - 4), \\ \dot{y} = 2x - 2y - 4\sqrt[3]{x^2 - 1}. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - x + y), \\ \dot{y} = x - y - e^{4(x^2-1)}. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2, \\ \dot{y} = -1 - 6x + y^2. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y - 4, \\ \dot{y} = -2x - xy. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4y^2, \\ \dot{y} = 2 - 2y. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dot{x} = 8 + 4y - 2xy, \\ \dot{y} = x^2 - 4y^2. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt[3]{7x + y} + y - 2, \\ \dot{y} = -\ln(1 + x). \end{cases}$

41. $\begin{cases} \dot{x} = e^{1-2x-3y} + x, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 - 1). \end{cases}$

42. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - 6y - 4y^3} - 1, \\ \dot{y} = \ln(x^3 - 7y) + 2y. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dot{x} = e^{-\frac{y}{x}-1} - x, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^3 - x). \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - e^{x^2-y}, \\ \dot{y} = \operatorname{th}(2 + x - x^2). \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{1 + 2x - 5y} - 1, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{5}x^2 - 2y\right). \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(x - y - 1), \\ \dot{y} = \sqrt[3]{3x^2 + 3y - 2} - 1. \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \dfrac{3}{4}\ln(2x^2 - 1). \end{cases}$

48. $\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(1 - y^2). \end{cases}$

49. $\begin{cases} \dot{x} = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}, \\ \dot{y} = e^{\frac{5}{4}x+2y+y^2} - 1. \end{cases}$

50. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - \sqrt{1 + 2y}, \\ \dot{y} = \sin(\sqrt{x} - y - 1). \end{cases}$

51. $\begin{cases} \dot{x} = \arcsin 2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y} - 1\right), \\ \dot{y} = 1 - 4x + 3y. \end{cases}$

52. $\begin{cases} \dot{x} = 2(\sqrt{x} - y - 1), \\ \dot{y} = \operatorname{sh}(x + y - 1). \end{cases}$

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованного уравнения в окрестности положений равновесия для уравнений (53—82):

53. $\ddot{x} + \dot{x} = \ln(1 - 3x + x^2 - \dot{x})$.

54. $\ddot{x} + \dot{x} + 1 = \sqrt[3]{1 + x + x^2 - \dot{x}}$.

55. $\ddot{x} + x^3 = e^{-\frac{4\dot{x}}{x}}$.

56. $\ddot{x} + 3\dot{x} = \ln(\dot{x} + x^3)$.

57. $\ddot{x} + 2\dot{x} + x - 2x^2 + 1 = 0$.

58. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 2x^2 - x - 3 = 0$.

59. $\ddot{x} - (1 + \dot{x})^2 + x^5 = 0.$

60. $\ddot{x} - e^{2\dot{x}} - x^3 = 0.$

61. $2\ddot{x} + 5\sin\dot{x} + \sqrt{1 + 4x} - 1 = 0.$

62. $\ddot{x} - \arcsin(x - 2\dot{x}) + 7\ln(1 - x) = 0.$

63. $\ddot{x}\cos\dot{x} - 4\,\mathrm{tg}\,\dot{x}\sqrt{1 - \sin x} + 3x = 0.$

64. $\ddot{x} - e^{3x - 4\dot{x}} + 2\ln(1 - x) + 1 = 0.$

65. $\ddot{x} + \mathrm{tg}\,(2x + 6\dot{x}) - 3\ln(1 - x) = 0.$

66. $\ddot{x} + x^5[1 + \ln(1 + 2\dot{x})] = (1 + 2\dot{x})^2.$

67. $\ddot{x} + 2e^{\dot{x}} - x^3\cos\dot{x} = 3.$

68. $\ddot{x} + (2 + \dot{x})^2\,\mathrm{arctg}\,\dot{x} + x^3 = 1.$

69. $\ddot{x} = 5\,\mathrm{arctg}\,(x - 1) + 4e^{\dot{x}}\sin\dot{x}.$

70. $\ddot{x} = (3\dot{x} - 2x)e^{\dot{x}^2}.$

71. $\ddot{x} + (4\dot{x} + 3x)e^{x^2} = 0.$

72. $\ddot{x} - (\dot{x} + 4x)^3 + 2\dot{x} + 1 = 0.$

73. $\ddot{x} - \dot{x} - x[\mathrm{arctg}\,(4\dot{x}) - 2] = 1.$

74. $3\ddot{x} + 3(x - 3)\sin(2\dot{x}) - 5x^3 + 5 = 0.$

75. $\ddot{x} + 4\dot{x} - \ln\left(\dot{x} - 2x + \dfrac{5}{3}\right) = 0.$

76. $\ddot{x} + \ln(1 - 2\dot{x}) + 2\,\mathrm{arctg}\,x = 0.$

77. $\ddot{x} + \sqrt[5]{5x + 5\dot{x}} + \cos\dot{x} = 0.$

78. $\ddot{x} = 3\arcsin\dot{x} - 2\ln\dfrac{1 + x}{3 - x}.$

79. $\ddot{x} + 3\dot{x} - 4x + 2x^2 = 0.$

80. $\ddot{x} - 5\dot{x} - 6x + 3x^2 = 0.$

81. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x + 2x^2 = 0.$

82. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 4x - 4x^2 = 0.$

Ответы к задачам § 13

Примечание. В ответах даны координаты положений равновесия и их тип. В случаях узла и седла указаны собственные значения λ_1 и λ_2 и соответствующие им линейно независимые собственные векторы h_1 и h_2 для матрицы линеаризованных систем. В случае фокуса знак $\circlearrowleft$ означает движение против часовой стрелки по траекториям при $t \to +\infty$, а знак $\circlearrowright$ означает движение по часовой стрелке по траекториям при $t \to +\infty$.

Данных ответов достаточно для изображения фазовых траекторий линеаризованных уравнений и систем в окрестности положений равновесия.

1. $(-1, 1)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $(1,0)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowleft$.

3. $(-6,2)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. $(0,2)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(2,0)$ — седло, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. $(0,0)$ — седло, $\lambda_1 = -\sqrt{3} - 1$, $\lambda_2 = \sqrt{3} - 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$;

$(1,2)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -2+\sqrt{2}$, $\lambda_2 = -2-\sqrt{2}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$,
$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

6. $(0,-1)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(0,1)$ — седло, $\lambda_1 = -\sqrt{6}$, $\lambda_2 = \sqrt{6}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. $(0,1)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$(1,0)$ — седло, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$, $h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{13} \end{pmatrix}$,
$h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{13} - 1 \end{pmatrix}$.

8. $(-1,-5)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(2,7)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. $(-1,-1)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(-1,1)$ — седло, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. $(5,-1)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(-7,2)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, $h_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

11. $(0,0)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$(1,-1)$ — седло, $\lambda_1 = -e$, $\lambda_2 = e$, $h_1 = \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} e \\ -1 \end{pmatrix}$.

12. $(0,0)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$(1,1)$ — седло, $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $h_1 = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} \\ -1 \end{pmatrix}$.

13. $(0,-1)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$; $(0,1)$ — седло, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

14. $(0,3)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

15. $(1,1)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(-1,1)$ — седло, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

16. $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$ — седло, $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 6$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

17. $(1,0)$ — седло, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

18. $(1,0)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

19. $(1,0)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$.

20. $(1,1)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

21. $(0,0)$ — седло, $\lambda_1 = -\sqrt{2} - 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2} - 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$;

$(3,3)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 2 - \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

22. $(0,0)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(1,-1)$ — седло, $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$.

23. $(-1,-2)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -2 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$, $h_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$(0,0)$ — седло, $\lambda_1 = -\sqrt{3} - 1$, $\lambda_2 = \sqrt{3} - 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

24. $(0,0)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowleft$.

25. $(0,0)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

26. $\left(3, -\dfrac{3}{4}\right)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(0,0)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

27. $(0,0)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(-1,-1)$ — седло, $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

28. $\left(3, \dfrac{3}{4}\right)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(0,0)$ — седло, $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

29. $(-2\pi, -2)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowright$.

30. $(2,0)$ — седло, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 10$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

31. $(2,\pi)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowleft$.

32. $(1,2)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

33. $(0,0)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$(3,3)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

34. $(-3,-7)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(3,-1)$ — седло, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

35. $(1,0)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(-1,-2)$ — седло, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

36. $(0,-1)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(0,1)$ — седло, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

37. $(0,2)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(2,-2)$ — седло, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

38. $(-2,1)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$(2,1)$ — седло, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

39. $(-2,-1)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(4,2)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = -12$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

40. $(0,1)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{4}{3}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

41. $(-1,1)$ — седло, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

42. $(1,0)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{9}{2}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

43. $(1,-1)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowleft$.

44. $(-1,1)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$(2,4)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

45. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(0,0)$ — седло, $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

46. $(1,0)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(-2,-3)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

47. $(1,1)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(-1, 1)$ — седло, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

48. $(1, -1)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$(1, 1)$ — седло, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

49. $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

$(0, 0)$ — седло, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

50. $(1, 0)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowleft$.

51. $(1, 1)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

52. $(1, 0)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowleft$.

53. $(0, 0)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(3, 0)$ — седло, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

54. $(-1, 0)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 =$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$(0, 0)$ — седло, $\lambda_1 = \frac{1}{3}(-2 - \sqrt{7})$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}(-2 + \sqrt{7})$, $h_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 + \sqrt{7} \end{pmatrix}$,
$h_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{7} - 2 \end{pmatrix}$.

55. $(1, 0)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

56. $(1, 0)$ — седло, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

57. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(1, 0)$ — седло, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

58. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(-1, 0)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

59. $(1, 0)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowright$.

60. $(-1, 0)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowright$.

61. $(0, 0)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

62. $(0, 0)$ — седло, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

63. $(0, 0)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

64. $(0, 0)$ — седло, $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

65. $(0, 0)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

66. $(1, 0)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowright$.

67. $(-1, 0)$ — седло, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

68. $(1, 0)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

69. $(1, 0)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

70. $(0,0)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

71. $(0,0)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

72. $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ — седло, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

73. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

74. $(1,0)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

75. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

76. $(0,0)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowright$.

77. $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$.

78. $(1,0)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

79. $(2,0)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(0,0)$ — седло, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

80. $(0,0)$ — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$;

$(2,0)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

81. $(-3,0)$ — седло, $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(0,0) — устойчивый узел, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

82. (0,0) — неустойчивый фокус, $\circlearrowleft$;

(1,0) — седло, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

§ 14. Поведение фазовых траекторий в окрестности негрубых положений равновесия и на всей фазовой плоскости

Для автономной системы второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y), \\ \dot{y} = f_2(x,y), \end{cases}$$

с непрерывно дифференцируемыми $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ в некоторой области $G \subset R^2_{(x,y)}$ положение равновесия (a_1, a_2) называется негрубым положением равновесия системы, если матрица линеаризованной в точке (a_1, a_2) системы имеет такие собственные значения λ_1, λ_2, для которых либо $\lambda_1 = \lambda_2$, либо $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, либо $\operatorname{Re}\lambda_2 = 0$. В окрестности негрубого положения равновесия фазовые траектории нелинейной автономной системы и ее линеаризации могут себя вести принципиально по-разному.

Пример 1. Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия (0,0) для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + ay(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Δ Точка (0,0) является центром для линеаризованной системы в точке (0,0) при $a = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

поскольку матрица линеаризации имеет собственные значения $\lambda = \pm i$.

Чтобы исследовать поведение фазовых траекторий заданной системы при $a \neq 0$, перейдем к полярным координатам $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$, $y(t) =$

$= r(t)\sin\varphi(t)$. Получаем систему вида

$$\begin{cases} \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi = -r\sin\varphi + ar^3\cos\varphi, \\ \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi = r\cos\varphi + ar^3\sin\varphi, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} \dot r = ar^3, \\ r\dot\varphi = r. \end{cases}$$

При $r = 0$ имеем положение равновесия. При $r > 0$ $\varphi = t + C$ и $\varphi \to +\infty$ при $t \to +\infty$, а $\dot r < 0$ при $a < 0$ и $\dot r > 0$ при $a > 0$.

Отсюда следует, что при $r > 0$ траекториями системы служат спирали, движение по которым идет против часовой стрелки, причем при $a < 0$ спирали закручиваются вокруг $(0, 0)$ при $t \to +\infty$, а при $a > 0$ спирали раскручиваются вокруг $(0, 0)$ при $t \to +\infty$. ▲

При исследовании поведения фазовых траекторий на всей фазовой плоскости необходимо находить не только положения равновесия системы, но и предельные циклы.

Пример 2. Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для системы

$$\begin{cases} \dot x = -y + ax(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot y = x + ay(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

△ При $a = 0$ имеем линейную систему, для которой начало координат является центром. Пусть $a \neq 0$. После перехода к полярным координатам $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$, $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot r = ar(r^2 - 1), \\ r\dot\varphi = r. \end{cases}$$

$r = 0$ дает положение равновесия $(0, 0)$, а $r = 1$ является решением. При $r > 0$, $r \neq 1$, траекториями являются спирали. Если $a < 0$, то $\dot r > 0$ при $0 < r < 1$ и, значит спирали раскручиваются вокруг $r = 0$ против часовой стрелки при $t \to +\infty$ и стремятся изнутри к окружности $r = 1$. При $a < 0$ и $r > 1$ имеем $\dot r < 0$. Спирали против часовой стрелки извне накручиваются на окружность $r = 1$ при $t \to +\infty$. Таким образом, при $a < 0$ окружность $r = 1$ является устойчивым предельным циклом.

Если $a > 0$, то при $0 < r < 1$ спирали закручиваются вокруг $r = 0$ при $t \to +\infty$, а при $r > 1$ спирали раскручиваются вокруг окружности при $t \to +\infty$ против часовой стрелки, так как $\varphi \to +\infty$ при $t \to +\infty$. В этом случае окружность $r = 1$ является неустойчивым предельным циклом системы. ▲

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия $(0,0)$ для систем (1—11):

1. $\begin{cases} \dot{x} = -2y + ax\sqrt{x^2+y^2}, \\ \dot{y} = 2x + ay\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2+y^2), \\ \dot{y} = -x + ay(x^2+y^2). \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 4y + ax\sqrt{x^2+y^2}, \\ \dot{y} = -4x + ay\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -3y + ax(x^2+y^2)^2, \\ \dot{y} = 3x + ay(x^2+y^2)^2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + ax(x^2+y^2)^2, \\ \dot{y} = -2x + ay(x^2+y^2)^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -ay + x(x^2+y^2), \\ \dot{y} = ax + y(x^2+y^2). \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -y - axy^2, \\ \dot{y} = x + ax^2y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = y - axy^2, \\ \dot{y} = -x + ax^2y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -y(x^2+y^2-a), \\ \dot{y} = x(x^2+y^2-a). \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = y(-a+x^2+y^2), \\ \dot{y} = -x(-a+x^2+y^2). \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = -y(x^2+y^2+a^2), \\ \dot{y} = x(x^2+y^2+a^2). \end{cases}$

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для систем (12—21):

12. $\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2+y^2-2), \\ \dot{y} = -x + ay(x^2+y^2-2). \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -2y + ax(\sqrt{x^2+y^2}-1)(2-\sqrt{x^2+y^2}), \\ \dot{y} = 2x + ay(\sqrt{x^2+y^2}-1)(2-\sqrt{x^2+y^2}). \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + ax(1-\sqrt{x^2+y^2})(2-\sqrt{x^2+y^2}), \\ \dot{y} = -2x + ay(1-\sqrt{x^2+y^2})(2-\sqrt{x^2+y^2}). \end{cases}$

15. $$\begin{cases} \dot{x} = -ay + x\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dot{y} = ax + y\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} \dot{x} = [-y + ax(x^2+y^2-1)](x^2+y^2-1), \\ \dot{y} = [x + ay(x^2+y^2-1)](x^2+y^2-1). \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} \dot{x} = 2y + ax\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dot{y} = -2x + ay\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \dot{x} = [y + ax(x^2+y^2-2)](x^2+y^2-2), \\ \dot{y} = [-x + ay(x^2+y^2-2)](x^2+y^2-2). \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \dot{x} = -ay + x(x^2+y^2-2), \\ \dot{y} = ax + y(x^2+y^2-2). \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \dot{x} = -ay + x(\sqrt{x^2+y^2}-1), \\ \dot{y} = ax + y(\sqrt{x^2+y^2}-1). \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2, \\ \dot{y} = x + ay(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2. \end{cases}$$

На всей фазовой плоскости нарисовать схематически фазовые траектории систем (22—45):

22. $$\begin{cases} \dot{x} = x^3, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} \dot{x} = x^3, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y^2. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y^2. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = x^2+y^2. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} \dot{x} = -2xy(x^2+y^2), \\ \dot{y} = x^2+y^2. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} \dot{x} = 2(x-y^2), \\ \dot{y} = y(x-y^2). \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = y^3. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x^3. \end{cases}$$

31. $$\begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$$

32. $\begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = -xy. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dot{x} = x + 1, \\ \dot{y} = -xy. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dot{x} = \sin x, \\ \dot{y} = y \cos x. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y - y^2. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = y^2 - 2xy. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dot{x} = xy^2, \\ \dot{y} = x^2 + y^3. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 3x^2. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x}, \\ \dot{y} = \sqrt{y}. \end{cases}$

41. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 + 2xy - x^2, \\ \dot{y} = x^2 + 2xy - y^2. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - y^4, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x + 2y^2. \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dot{x} = xe^y, \\ \dot{y} = ye^y. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dot{x} = x(y - x^2), \\ \dot{y} = y(y - x^2). \end{cases}$

Ответы к задачам § 14

1. При $a = 0$ начало координат — центр. При $a < 0$ спирали против часовой стрелки закручиваются вокруг $(0,0)$, а при $a > 0$ они раскручиваются от $(0,0)$ при $t \to +\infty$.

2. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a < 0$ спирали по часовой стрелке закручиваются вокруг $(0,0)$ при $t \to +\infty$, а при $a > 0$ они раскручиваются от $(0,0)$ при $t \to +\infty$.

3. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a < 0$ спирали по часовой стрелке закручиваются вокруг $(0,0)$ при $t \to +\infty$, а при $a > 0$ они раскручиваются от $(0,0)$ при $t \to +\infty$.

4. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a < 0$ спирали против часовой стрелки закручиваются вокруг $(0,0)$ при $t \to +\infty$, а при $a > 0$ они раскручиваются от $(0,0)$ при $t \to +\infty$.

5. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a < 0$ спирали по часовой стрелке закручиваются вокруг $(0,0)$ при $t \to +\infty$, а при $a > 0$ они раскручиваются от $(0,0)$ при $t \to +\infty$.

6. При $a = 0$ траекториями являются радиальные лучи, по которым движение направлено от $(0,0)$ при $t \to +\infty$. При $a < 0$ спирали по часовой стрелке раскручиваются вокруг $(0,0)$ при $t \to +\infty$, а при $a > 0$ они раскручиваются вокруг $(0,0)$ при $t \to +\infty$ против часовой стрелки.

7. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ $(0,0)$ — положение равновесия и $axy = -1$ — линия положений равновесия, являющаяся траекторией. Остальные траектории — окружности в окрестности $(0,0)$.

8. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ $(0,0)$ — положение равновесия и $axy = 1$ — линия положений равновесия, являющаяся траекторией. Остальные траектории — окружности в окрестности $(0,0)$.

9. $(0,0)$ — положение равновесия при любых a и $x^2 + y^2 = a$ — линия положений равновесия, являющаяся траекторией, при $a > 0$. Другие траектории представляют собой окружности при всех a.

10. $(0,0)$ — положение равновесия при всех a. Траектории представляют собой окружности при всех a. При $a > 0$ $x^2 + y^2 = a$ является траекторией, все точки которой являются положениями равновесия.

11. При любых a $(0,0)$ является положением равновесия, а траектории представляют собой окружности с направлением обхода против часовой стрелки.

12. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ траекториями являются спирали с направлением движения по часовой стрелке при $t \to +\infty$. Окружность $x^2 + y^2 = 2$ — устойчивый предельный цикл при $a < 0$ и неустойчивый предельный цикл при $a > 0$.

13. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ траектории — спирали с направлением движения против часовой стрелки при $t \to +\infty$. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ — предельный цикл, который является неустойчивым при $a > 0$ и полуустойчивым при $a < 0$. Окружность $x^2 + y^2 = 2$ —

предельный цикл, который является устойчивым при $a > 0$ и полуустойчивым при $a < 0$.

14. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ траектории — спирали с направлением движения по часовой стрелке при $t \to +\infty$. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ — предельный цикл, который устойчивый при $a > 0$ и неустойчивый при $a < 0$. Окружность $x^2 + y^2 = 2$ — предельный цикл, который неустойчивый при $a > 0$ и полуустойчивый при $a < 0$.

15. Окружности $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in N$, служат при $a \neq 0$ предельными циклами, причем они устойчивы при нечетном $n \in N$ и неустойчивы при четном $n \in N$. Начало координат $(0,0)$ — положение равновесия. Остальные траектории при $a \neq 0$ спирали, по которым движение идет против часовой стрелки при $a > 0$ и по часовой стрелке при $a < 0$.

16. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ окружность $x^2 + y^2 = 1$ является полуустойчивым предельным циклом. Траектории — спирали, по которым движение идет по часовой стрелке, если они находятся внутри круга $x^2+y^2 \leqslant 1$, и по которым движение идет против часовой стрелки, если они находятся вне круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Точка $(0,0)$ — положение равновесия.

17. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ окружности $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in N$, служат предельными циклами, которые являются полуустойчивыми, а $(0,0)$ — положение равновесия. Траекториями являются спирали с направлением движения против часовой стрелки при $t \to +\infty$.

18. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ точка $(0,0)$ — положение равновесия и окружность $x^2 + y^2 = 2$ является полуустойчивым предельным циклом. Траектории — спирали, по которым движение идет по часовой стрелке, если они находятся внутри круга $x^2 + y^2 \leqslant 2$, и по которым движение идет против часовой стрелки, если они находятся вне круга $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

19. $(0,0)$ — положение равновесия при всех a. При $a \neq 0$ окружность $x^2+y^2 = 2$ — неустойчивый предельный цикл. Траектории — спирали, по которым движение идет против часовой стрелки при $a > 0$ и по часовой стрелке при $a < 0$.

20. $(0,0)$ — положение равновесия при всех a. При $a \neq 0$ окружность $x^2+y^2=1$ — неустойчивый предельный цикл. Траектории — спирали, по которым движение идет против часовой стрелки при $a > 0$ и по часовой стрелке при $a < 0$.

21. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ точка $(0,0)$ — положение равновесия и окружность $x^2+y^2=1$ — полуустойчивый предельный цикл. Траектории — спирали с движением по ним против часовой стрелки при $t \to +\infty$.

§ 15. Устойчивость по Ляпунову положений равновесия

Пусть в области Ω евклидова пространства R_x^n задана автономная система уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x),$$

где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая в Ω вектор-функция с n компонентами, и пусть $O \in \Omega$ является положением равновесия автономной системы. Разложим $f(x)$ в окрестности $x = 0$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = Ax + o(|x|),$$

где матрица

$$A = \left\|\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j}\right\|, \ i,j = \overline{1,n}, \ o(|x|) \to 0, \ |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \to 0.$$

Линейная автономная система

$$\dot{x} = Ax$$

называется линеаризацией системы $\dot{x}(t) = f(x)$ в точке $x = 0$ или системой первого приближения для $\dot{x}(t) = f(x)$.

Из теорем Ляпунова следует, что в случае, когда все собственные значения A имеют отрицательные вещественные части, $x = 0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия для системы $\dot{x} = f(x)$. Если же хотя бы одно собственное значение A имеет положительную вещественную часть, то $x = 0$ является неустойчивым положением равновесия для системы $\dot{x} = f(x)$.

Для линейной автономной системы $\dot{x} = Ax$ эти результаты можно уточнить.

Пример 1. Исследовать устойчивость положений равновесия с помощью системы первого приближения автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2, \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1. \end{cases}$$

Δ Найдем сначала положения равновесия системы. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - 2x - y^2 = 0, \\ e^{-4x} - 1 = 0. \end{cases}$$

Получаем два положения равновесия: $(0,1)$ и $(0,-1)$.

Исследуем устойчивость положения равновесия $(0,1)$. С этой целью в автономной системе сделаем замену $y - 1 = y_1$ и правые части полученной системы разложим по формуле Тейлора в окрестности точки $(0,0)$, являющейся положением равновесия новой системы. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - (1 + y_1)^2 = -2x - 2y_1 - y_1^2, \\ \dot{y}_1 = -4x + o(x). \end{cases}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$. Следовательно, положение равновесия $(0,1)$ является неустойчивым.

Для исследования устойчивости второго положения равновесия $(0,-1)$ в заданной системе сделаем замену $y+1 = y_1$. Тогда точка $(0,-1)$ перейдет в точку $(0,0)$ и можно в окрестности $(0,0)$ разложить по формуле Тейлора правые части новой системы. Получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - (y_1 - 1)^2 = -2x + 2y_1 - y_1^2, \\ \dot{y}_1 = -4x + o(x). \end{cases}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = -1+i\sqrt{7}$, $\lambda_2 = -1-i\sqrt{7}$. Следовательно, положение равновесия $(0,-1)$ является асимптотически устойчивым. ▲

В тех случаях, когда вещественные части всех собственных значений матрицы A неположительны, причем хотя бы одно собственное значение A имеет вещественную часть равную нулю, исследование устойчивости положений равновесия нелинейной автономной системы с помощью системы первого приближения, как правило невозможно, так как начинают влиять нелинейные члены. В таких случаях используют метод функций Ляпунова (второй метод Ляпунова).

Пример 2. Исследовать устойчивость положений равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2, \\ \dot{y} = -xy - y^3. \end{cases}$$

△ Единственным положением равновесия является точка $(0,0)$. В этом случае матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не позволяет воспользоваться теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Применим второй метод Ляпунова. Если взять в качестве функции Ляпунова функцию $V(x,y) = x^2 + y^2$, то ее производная в силу автономной системы

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(-x+y^2) + \frac{\partial V}{\partial y}(-xy-y^3) = 2x(-x+y^2) + 2y(-xy-y^3) = \\ = -2(x^2+y^4) \leqslant 0,$$

причем $\dot{V}(x,y) = 0$ лишь при $x = y = 0$. По теореме Ляпунова отсюда следует, что точка $(0,0)$ является асимптотически устойчивым положением равновесия системы. ▲

Исследовать устойчивость положений равновесия с помощью системы первого приближения (1—15):

1. $\begin{cases} \dot{x} = -3 + 2x + y, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(xy). \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(3x^2 - 1) - \ln 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 4 - x(3y+2) - 9y^2, \\ \dot{y} = \ln \dfrac{1+x}{1-2x}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 y + y^2, \\ \dot{y} = \ln(x^3 + y) - 3y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(x-y), \\ \dot{y} = e^{2xy+x+y} - 1. \end{cases}$

6. $\ddot{x} + \dot{x} = \ln(1 - 3x + x^2 - \dot{x})$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 8y + 3, \\ \dot{y} = \ln \dfrac{x}{y}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = e^{2x+2y} + x, \\ \dot{y} = \arccos(x - x^3) - \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = e^{xy} + y^2 - 3, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(x+y), \\ \dot{y} = x^3 + y^3 - 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = e^{\frac{xy^3}{2}} + y^2 - 3, \\ \dot{y} = 4 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y^5}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2-2y} - e^{2x}, \\ \dot{y} = -x - 2y - y^2. \end{cases}$

14. $\ddot{x} + \dot{x} + 1 = \sqrt[3]{1 + x + x^2 - \dot{x}}$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - x^2, \\ \dot{y} = \sqrt{1+4y} - \sqrt{1 + 2x + 2y^2}. \end{cases}$

16. При каких значениях вещественного параметра a система

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $(0,0)$?

17. При каких значениях вещественных параметров a и b система

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = bx + ay. \end{cases}$$

имеет устойчивое по Ляпунову положение равновесия $(0,0)$?

Исследовать устойчивость положения равновесия $(0,0,0)$ для линейных систем (18—27):

18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2z, \\ \dot{z} = -y + 2z. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x - z, \\ \dot{z} = 4y - 2z. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2z, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = -x - y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = 3y - z. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y + z, \\ \dot{y} = x - 2y + z, \\ \dot{z} = 3x - 12y - 5z. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 10y - 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y - 4z, \\ \dot{z} = -6x + 7y + z. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y + z, \\ \dot{y} = 7x - 3y + z, \\ \dot{z} = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x - y + z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = -x + z, \\ \dot{y} = -y - z, \\ \dot{z} = y - z. \end{cases}$

С помощью функции Ляпунова вида $V(x,y) = ax^2 + by^2$ исследовать устойчивость точки $(0,0)$ для автономных систем (28—36):

28. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x^3, \\ \dot{y} = -2x - y^3. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y^2, \\ \dot{y} = xy - x^2 y. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dot{x} = -xy^2, \\ \dot{y} = -y - 2x^2 y. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dot{x} = -xy^2, \\ \dot{y} = -4xy^2 - 2y^3. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = xy + y^3. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dot{x} = -y + 2x^3, \\ \dot{y} = 2x + y^3. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dot{x} = -4x^2 y - 2x^3, \\ \dot{y} = -x^2 y. \end{cases}$

37. Рассмотрим уравнения $\dot{x} = -\operatorname{grad} V(x)$, описывающие движение некоторых механических систем. Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $V(x)$ — потенциальная энергия механической системы, имеющая минимум при $x = 0$. Взяв $V(x)$ в качестве функции Ляпунова, показать, что $x = 0$ является устойчивым положением равновесия системы.

38. Показать, что если функция Ляпунова $V(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ для автономной системы $\dot{x} = f(x)$ определяет асимптотически устойчивое положение равновесия $x = 0$, то $V(x)$ для системы $\dot{x} = -f(x)$ определяет неустойчивое положение равновесия $x = 0$.

39. Пусть A — матрица квадратичной формы в n-мерном вещественном евклидовом пространстве. С помощью функции Ляпунова $V(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ показать, что $x = 0$ для системы $\dot{x} = Ax$ является асимптотически устойчивым положением равновесия, если квадратичная форма отрицательно определенная, и $x = 0$ является неустойчивым положением равновесия, если квадратичная форма положительно определенная.

Ответы к задачам § 15

1. $(0, 3)$ и $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ — неустойчивые положения равновесия.

2. $(1, 1)$ и $(-1, 1)$ — неустойчивые положения равновесия.

3. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ — асимптотически устойчивое положение равновесия, $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ — неустойчивое положение равновесия.

4. $(1, 0)$ — неустойчивое положение равновесия.

5. $(0, 0)$ и $(-1, -1)$ — неустойчивые положения равновесия.

6. $(0, 0)$ — асимптотически устойчивое положение равновесия, $(3, 0)$ — неустойчивое положение равновесия.

7. $(1, 1)$ и $(1, -1)$ — неустойчивые положения равновесия.

8. $(1, 1)$ — неустойчивое положение равновесия.

9. $(-1, 1)$ — неустойчивое положение равновесия.

10. $(0, -\sqrt{2})$ — асимптотически устойчивое положение равновесия, $(0, \sqrt{2})$ — неустойчивое положение равновесия.

11. $(0, 1)$ и $(1, 0)$ — неустойчивые положения равновесия.

12. $(0, \sqrt{2})$ и $(0, -\sqrt{2})$ — неустойчивые положения равновесия.

13. $(0, 0)$ — асимптотически устойчивое положение равновесия, $(1, -1)$ — неустойчивое положение равновесия.

14. $(0, 0)$ — неустойчивое положение равновесия, $(1, 0)$ — асимптотически устойчивое положение равновесия.

15. $(0, 0)$ и $(1, 1)$ — неустойчивые положения равновесия.

16. $a < 1$.

17. $a + |b| \leqslant 0$.

18. Неустойчивое.

19. Асимптотически устойчивое.

20. Неустойчивое.

21. Асимптотически устойчивое.

22. Устойчивое.

23. Асимптотически устойчивое.

24. Неустойчивое.

25. Неустойчивое.

26. Асимптотически устойчивое.

27. Асимптотически устойчивое.

28. Асимптотически устойчивое.

29. Асимптотически устойчивое.

30. Устойчивое.

31. Устойчивое.

32. Устойчивое.

33. Неустойчивое.

34. Неустойчивое.

35. Неустойчивое.

36. Устойчивое.

§ 16. Первые интегралы

Пусть задана автономная система $\dot{x} = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция с n компонентами $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ в некоторой области G евклидова пространства R^n_x с декартовыми прямоугольными координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$, $x \in G$, была первым интегралом системы $\dot{x} = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная в силу системы $\dot{u}(x) = (\operatorname{grad} u(x), f(x)) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ в области G.

Первые интегралы $u_1(x), \dots, u_k(x)$, $1 \leqslant k < n$, автономной системы называются независимыми в области $G_0 \subseteq G$, если ранг матрицы Якоби

$$\left\| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \right\|, \; i = \overline{1, k}, \; j = \overline{1, n},$$

равен k для всех точек $x \in G_0$.

Зная k $(1 \leqslant k < n)$ независимых первых интегралов в G_0, можно в области G_0 понизить порядок автономной системы до $(n-k)$, что позволяет либо найти решение нелинейной автономной системы при $n \geqslant 2$, либо во всяком случае облегчить нахождение решения системы.

Знание первого интеграла $u(x)$ автономной системы при $n = 2$ позволяет нарисовать глобальный фазовый портрет системы на фазовой плоскости, поскольку каждая линия уровня функции $u(x)$ является объединением непересекающихся фазовых траекторий системы. Кроме того, с помощью $u(x)$ можно определить центр для нелинейных автономных систем.

Пример 1. Проверить, что функция $u(x, y, z) = \dfrac{1}{x}(x^2 + y^2 + z^2)$ при $x \neq 0$ является первым интегралом системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xz, \\ \dot{y} = 2yz, \\ \dot{z} = z^2 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Δ Достаточно установить, что $\dot{u}(x, y, z) = 0$ при $x \neq 0$. Имеем

$$\dot{u} = 2xz \cdot \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2} + 2yz \cdot \frac{2y}{x} + (z^2 - x^2 - y^2) \cdot \frac{2z}{x} =$$
$$= \frac{2}{x}[z(x^2 - y^2 - z^2) + 2y^2 z + z(z^2 - x^2 - y^2)] = 0. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. Показать что функции $u_1(x, y, z) = \dfrac{1}{x}(x^2 + y^2 + z^2)$,

$u_2(x,y,z) = \dfrac{y}{x}$ являются независимыми первыми интегралами при $x > 0$, $z > 0$ для автономной системы примера 1.

Δ Сначала проверим, что u_2 — первый интеграл системы примера 1. Имеем

$$\dot{u}_2 = 2xz \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + 2yz\frac{1}{x} = 0.$$

Итак, u_1, u_2 — первые интегралы системы примера 1. Они являются независимыми при $x > 0$, $z > 0$, так как матрица Якоби

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} & \dfrac{2z}{x} \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} & 0 \end{Vmatrix}$$

имеет ранг 2 при $x > 0$, $z > 0$. В самом деле, при $x > 0$, $z > 0$ определитель из элементов второго и третьего столбцов матрицы Якоби

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2y}{x} & \dfrac{2z}{x} \\ \dfrac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2z}{x^2} \neq 0. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Найдя первый интеграл, решить систему при $x > 0$, $z > 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2, \\ \dot{y} = xy - 2z^2, \\ \dot{z} = xz. \end{cases}$$

Δ Перемножая крест-накрест первое и третье уравнения, получаем $z\dot{x} = -x\dot{z}$. Отбрасывая dt, находим отсюда, что $xz = C_1$. Значит, $u = xz$ — первый интеграл. Из третьего уравнения находим $z = C_1t + C_2$. Тогда $x = \dfrac{C_1}{C_1t + C_2}$. Подставляя найденные x, z во второе уравнение системы, получаем уравнение для y:

$$\dot{y} = \frac{C_1y}{C_1t + C_2} - 2(C_1t + C_2)^2.$$

Это линейное уравнение первого порядка, общим решением которого является

$$y = (C_1t + C_2)(C_3 - C_1t^2 - 2C_2t). \qquad \blacktriangle$$

Пример 4. Найдя два независимые первые интегралы системы, решить при $x > z > 0$, $y > 0$ систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + z^2, \\ \dot{y} = y(x - z), \\ \dot{z} = 2xz. \end{cases}$$

Δ Умножая крест-накрест первое и третье уравнения и отбрасывая dt, получим уравнение

$$2xzdx = (x^2 + z^2)dz,$$

которое можно записать в виде $d\left(\dfrac{x^2}{z}\right) = dz$. Отсюда $\dfrac{x^2}{z} - z = C_1$. Значит, $u_1 = \dfrac{x^2}{z} - z$ — первый интеграл системы. Вычтем из первого уравнения третье уравнение и рассмотрим полученное уравнение со вторым уравнением системы. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} - \dot{z} = (x - z)^2, \\ \dot{y} = y(x - z). \end{cases}$$

Перемножая крест-накрест эти два уравнения, сокращая на $x - z \neq 0$ и отбрасывая dt, получаем $yd(x - z) = (x - z)dy$. Отсюда $x - z = C_2 y$ и, значит, $u_2 = \dfrac{x - z}{y}$ — первый интеграл системы. Можно проверить, что при $x > z > 0$, $y > 0$ первые интегралы u_1, u_2 являются независимыми.

Подставляя $x - z = C_2 y$ во второе уравнение исходной системы, получаем $\dot{y} = C_2 y^2$. Отсюда $y(t) = \dfrac{1}{C_3 - C_2 t}$. Из системы $\begin{cases} x - z = C_2 y, \\ x^2 - z^2 = C_1 z \end{cases}$ находим $z = \dfrac{C_2^2 y^2}{C_1 - 2C_2 y}$, $x = C_2 y + \dfrac{C_2^2 y^2}{C_1 - 2C_2 y}$. Подставляя в эти формулы выражение для $y(t)$, получаем, что

$$z(t) = \frac{C_2^2}{(C_3 - C_2 t)(C_1 C_3 - C_1 C_2 t - 2C_2)},$$

$$x(t) = \frac{C_2(C_1 C_3 - C_1 C_2 t - C_2)}{(C_3 - C_2 t)(C_1 C_3 - C_1 C_2 t - 2C_2)}. \quad \blacktriangle$$

Найдя первый интеграл, решить системы (1—17) в указанных областях:

1. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{(x+y)^2}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{(x+y)^2}, \ (x > 0, \ y > 0). \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 y, \\ \dot{y} = xy^2, \ (x > 0, \ y > 0). \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2}{y}, \\ \dot{y} = x, \ (x > 0, \ y > 0). \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{x-y}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{x-y}, \ (x > y > 0). \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{x}{y}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{x}, \ (x > 0, \ y > 0). \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = x - xy, \\ \dot{y} = -x + xy, \ (x > 0, \ x + y > 1) \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = y - xy, \\ \dot{y} = -y + xy, \ (y > 0, \ x + y > 1). \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}, \ (x > 0, \ y > 0). \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = \dfrac{y^2}{x}, \ (x > 0, \ y > 0, \ xy < 2). \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{y}, \\ \dot{y} = \dfrac{y^2}{x}, \ (x > 0, \ y > 0). \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^2, \\ \dot{y} = y^2, \\ \dot{z} = z^2 + 2yz, \ (x > 0, \ y > 0, \ z > 0). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = yz, \\ \dot{z} = -z^2, \ (y > 0, \ z > 0). \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -x^2, \\ \dot{y} = xy - 2z^2, \\ \dot{z} = xz, \ (x > 0). \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 1 + z, \\ \dot{y} = y^2 e^{3x}, \\ \dot{z} = (1+z)^2, \ (y > 0, \ z > -1). \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = (1-x)^4, \\ \dot{y} = (x-1)^3, \\ \dot{z} = z^3 e^{-y}, \ (x > 1, \ z > 0). \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = x(2y + z), \\ \dot{y} = xe^z + y, \\ \dot{z} = -(2y + z), \ (x > 0). \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = x + y^2 + z, \ (y > 0). \end{cases}$

Найдя два независимые первые интегралы системы, решить системы (18—26) в указанных областях:

18. $\begin{cases} \dot{x} = x^2y - x, \\ \dot{y} = -xy^2, \\ \dot{z} = z, \ (x > 0, \ y > 0, \ z > 0). \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} \dot{x} = z^2 - y^2, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y, \ (y > z > 0). \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = x(x+y), \\ \dot{y} = -y(x+y), \\ \dot{z} = -z(x-y), \ (x > 0, \ y > 0, \ z > 0). \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = x(y-z), \\ \dot{y} = -y(y+z), \\ \dot{z} = z(y+z), \ (x > 0, \ y > 0, \ z > 0). \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = xz^2, \\ \dot{y} = 2y(y - z^2), \\ \dot{z} = -z^3, \ (x > 0, \ y > 0, \ z > 0). \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = xe^{-y} + z, \ (y > 0). \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} \dot{x} = xz, \\ \dot{y} = x + yz, \\ \dot{z} = -z^2, \ (z > 0). \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3x^2z^2, \\ \dot{y} = 3x^2y^2z, \\ \dot{z} = z, \ (x > 0, \ y > 0, \ z > 0). \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = 2x^3 - xy - z, \\ \dot{z} = xz - 2x^4, \ (x > 0). \end{cases}$

27. С помощью первого интеграла убедиться в том, что положение равновесия $(0,0)$ является центром для систем

а) $\begin{cases} \dot{x} = -y - xy^2, \\ \dot{y} = x + x^2y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x^2y + y^3, \\ \dot{y} = -xy^2 - x^3. \end{cases}$

Ответы к задачам § 16

1. $x = \dfrac{1}{1+C_1}\sqrt{2t + C_2(1+C_1)^2}, \ y = \dfrac{C_1}{1+C_1}\sqrt{2t + C_2(1+C_1)^2}.$

2. $x = C_1(C_2 - 2C_1t)^{-1}, \ y = (C_2 - 2C_1t)^{-1}.$

3. $x = C_1C_2e^{C_1t}, \ y = C_2e^{C_1t}.$

4. $x = C_1\left(\dfrac{t}{C_1 - 1} + C_2\right), \ y = \dfrac{t}{C_1 - 1} + C_2.$

5. $x = \dfrac{1}{C_1^2 C_2} e^{-C_1 t} + \dfrac{1}{C_1}, \;\; y = C_2 e^{C_1 t} + \dfrac{1}{C_1}.$

6. $x = \dfrac{C_1 - 1}{(C_1 - 1)C_2 e^{(C_1-1)t} + 1}, \;\; y = C_1 - \dfrac{C_1 - 1}{(C_1 - 1)C_2 e^{(C_1-1)t} + 1}.$

7. $x = C_1 - \dfrac{C_1 - 1}{(C_1 - 1)C_2 e^{(1-C_1)t} + 1}, \;\; y = \dfrac{C_1 - 1}{(C_1 - 1)C_2 e^{(1-C_1)t} + 1}.$

8. $x = \sqrt{\dfrac{2t}{1 + C_1^2} + C_2}, \;\; y = C_1 \sqrt{\dfrac{2t}{1 + C_1^2} + C_2}.$

9. $x = \sqrt{C_1 + C_2 e^t}, \;\; y = \dfrac{2}{C_2} e^{-t} \sqrt{C_1 + C_2 e^t}.$

10. $x = \sqrt{C_2 - 2C_1 t}, \;\; y = \dfrac{C_1}{\sqrt{C_2 - 2C_1 t}}.$

11. $x = \dfrac{1}{1 + C_1(C_2 - t)}, \;\; y = \dfrac{1}{C_2 - t}, \;\; z = \dfrac{1}{t - C_2 + C_3(t - C_2)^2}.$

12. $x = \dfrac{1}{3C_1}(C_1 t + C_2)^3 + C_3, \;\; y = C_1 t + C_2, \;\; z = \dfrac{C_1}{C_1 t + C_2}.$

13. $x = \dfrac{C_1}{C_1 t + C_2}, \;\; y = (C_1 t + C_2)(C_3 - C_1 t^2 - 2C_2 t), \;\; z = C_1 t + C_2.$

14. $x = -\ln(C_2 - C_1 t), \; y = \dfrac{2C_1(C_2 - C_1 t)^2}{2C_1 C_3 (C_2 - C_1 t)^2 - 1}, \; z = \dfrac{C_1(t+1) - C_2}{C_2 - C_1 t}.$

15. $x = 1 + C_1(C_2 - 3C_1^3 t)^{-\frac{1}{3}}, \; y = -\dfrac{1}{3} \ln(C_2 - 3C_1^3 t),$

$z = \dfrac{1}{\sqrt{-2C_3 + \dfrac{1}{2C_1^3}(C_2 - 3C_1^3 t)^{\frac{4}{3}}}}.$

16. $x = C_1 e^{-(2C_1 - C_2 e^t + C_3 e^{-t})}, \; y = C_2 e^t - C_1, \; z = 2C_1 - C_2 e^t + C_3 e^{-t}.$

17. $x = C_1 C_2 e^t - C_2^2 e^{2t}, \; y = C_2 e^t, \; z = (C_2 t + C_3) e^t.$

18. $x = \dfrac{C_2}{C_3} e^{-t - C_1 - \frac{C_2}{C_3} e^{-t}}, \;\; y = e^{-C_1 - \frac{C_2}{C_3} e^{-t}}, \; z = C_3 e^t.$

19. $x = \dfrac{1}{2}[C_1 - C_2 - \sin 2(t + C_3)], \; y = \sqrt{C_1} \sin(t + C_3),$

$z = \sqrt{C_1} \cos(t + C_3).$

20. $x = \sqrt{C_1} \operatorname{ctg} \sqrt{C_1}(C_3 - t)$, $y = \sqrt{C_1} \operatorname{tg} \sqrt{C_1}(C_3 - t)$,
$z = \dfrac{C_2}{2\sqrt{C_1}} \sin 2\sqrt{C_1}(C_3 - t)$.

21. $x = \dfrac{C_2}{2\sqrt{C_1}} \sin 2\sqrt{C_1}(C_3 - t)$, $y = \sqrt{C_1} \operatorname{tg} \sqrt{C_1}(C_3 - t)$,
$z = \sqrt{C_1} \operatorname{ctg} \sqrt{C_1}(C_3 - t)$.

22. $x = C_1\sqrt{C_3 - 2t}$, $y = \dfrac{1}{(C_3 - 2t)[C_2 - \ln(C_3 - 2t)]}$, $z = \dfrac{1}{\sqrt{C_3 - 2t}}$.

23. $x = C_1 e^{C_2 e^t}$, $y = C_2 e^t$, $z = C_3 e^t - C_1$.

24. $x = C_1 t + C_3$, $y = \dfrac{1}{C_1}(C_1 t + C_3)(C_1 t + C_2 + C_3)$, $z = \dfrac{C_1}{C_1 t + C_3}$.

25. $x = \dfrac{C_3 e^t}{C_1 + C_3^3 e^{3t}}$, $y = \dfrac{C_1 + C_3^3 e^{3t}}{1 + C_2(C_1 + C_3^3 e^{3t})}$, $z = C_3 e^t$.

26. $x = \dfrac{1}{C_1 - t}$, $y = C_2(C_1 - t) - C_1 + \dfrac{1}{(C_1 - t)^2}$, $z = \dfrac{C_1}{C_1 - t} - \dfrac{1}{(C_1 - t)^3}$.

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 17. Линейные однородные уравнения

Пусть Ω — непустая область пространства R^3. Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка в области Ω имеет вид

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + a_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

В уравнении (1) коэффициенты $a_1(x,y,z)$, $a_2(x,y,z)$ и $a_3(x,y,z)$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции в области Ω, а $u = u(x,y,z)$ — искомая непрерывно дифференцируемая в Ω функция.

Автономная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1(x,y,z), \\ \dot{y}(t) = a_2(x,y,z), \\ \dot{z}(t) = a_3(x,y,z) \end{cases} \tag{2}$$

называется характеристической системой для уравнения (1). Чтобы решить уравнение (1), необходимо сначала найти два независимых первых интеграла характеристической системы (2) $u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$. Общим решением уравнения (1) называется

$$u(x,y,z) = F[u_1(x,y,z), u_2(x,y,z)],$$

где $F[u_1, u_2]$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Если S обозначает заданную уравнением $g(x,y,z) = 0$ гладкую поверхность в области Ω и $\varphi(x,y,z)$ — заданная на S гладкая функция, то задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию

$$u|_S = \varphi(x,y,z), \tag{3}$$

называется задачей Коши для уравнения (1).

Чтобы решить задачу Коши (1), (3), необходимо из системы уравнений

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 0, \\ u_1(x, y, z) = C_1, \\ u_2(x, y, z) = C_2 \end{cases}$$

выразить x, y, z через u_1, u_2 и подставить найденные выражения для x, y, z в начальную функцию $\varphi(x, y, z)$. В найденное таким образом выражение вида $\Phi(u_1, u_2)$ подставляем $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$. Тогда функция

$$u = \Phi[u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)]$$

является искомым решением задачи Коши (1), (3).

Пример 1. При $x > 0$, $z > 0$ найти общее решение уравнения

$$3xyz^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3y^2z^2 \frac{\partial u}{\partial y} - (2x^2 + yz^3) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить для этого уравнения задачу Коши с начальным условием $u = x^4 + xz^3$ при $y = \dfrac{1}{x}$.

Δ Найдем независимые первые интегралы характеристической системы для заданного уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3xyz^2, \\ \dot{y}(t) = 3y^2z^2, \\ \dot{z}(t) = -(2x^2 + yz^3). \end{cases}$$

Перемножив крест-накрест первых два уравнения этой системы, имеем

$$3y^2z^2\dot{x}(t) = 3xyz^2\dot{y}(t).$$

Сократив на $3yz^2$ и отбросив dt, получаем

$$y dx = x dy.$$

Отсюда $y = C_1 x$ и, значит, $u_1 = \dfrac{y}{x}$ — первый интеграл.

Подставив найденное значение $y = C_1 x$ в первое и третье уравнения характеристической системы, имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = 3C_1x^2z^2, \\ \dot{z} = -(2x^2 + C_1xz^3). \end{cases}$$

Перемножая крест-накрест эти уравнения, сокращая на x и отбрасывая dt, получаем

$$-(2x + C_1 z^3)dx = 3C_1 x z^2 dz.$$

Полагая $C_1 z^3 = t$, отсюда для t находим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{t}{x} - 2,$$

общим решением которого служит $t = \dfrac{C_2}{x} - x$. Подставляя $C_1 z^3$ вместо t и $\dfrac{y}{x}$ вместо C_1, находим еще один первый интеграл $u_2 = x^2 + yz^3$.

Общим решением заданного уравнения является

$$u = F\left(\frac{y}{x}, x^2 + yz^3\right),$$

где $F(u_1, u_2)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Чтобы решить задачу Коши, рассматриваем систему уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ u_1 = \dfrac{y}{x}, \\ u_2 = x^2 + yz^3. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим, что

$$x^4 + xz^3 = \frac{u_2}{u_1}.$$

Следовательно, решением задачи Коши является

$$u = \frac{x}{y}(x^2 + yz^3) = \frac{x^3}{y} + xz^3.$$ ▲

Пример 2. При $x < 0$, $z > 0$ найти общее решение уравнения

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} + (2x^3 y + y^2)\frac{\partial u}{\partial y} - (x + 2x^3 z + yz)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить для этого уравнения задачу Коши с начальным условием $u = \dfrac{y}{x}$ при $2x + yz = 0$.

Δ Составляем характеристическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = xy, \\ \dot{y}(t) = 2z^3y + y^2, \\ \dot{z}(t) = -(x + 2x^3z + yz). \end{cases}$$

Перемножая крест-накрест первые два уравнения системы, сокращая на y и отбрасывая dt, получаем для y линейное уравнение первого порядка

$$xdy = (2x^3 + y)dx,$$

общим решением которого является $y = C_1x + x^3$. Значит, первым интегралом является $u_1 = \dfrac{y}{x} - x^2$.

Умножая первое уравнение характеристической системы на $\dfrac{1}{y}$, второе уравнение на $\dfrac{z}{y}$ и складывая полученные выражения с третьим уравнением, находим, что

$$\frac{\dot{x}}{y} + \frac{z}{y}\dot{y} + \dot{z} = 0.$$

Отбрасывая dt, отсюда $dx + zdy + ydz = 0$ или $dx + d(yz) = 0$. Следовательно, $x + yz = C_2$, значит, $u_2 = x + yz$ — первый интеграл характеристической системы.

Общим решением заданного уравнения является

$$u = F\left(\frac{y}{x} - x^2, x + yz\right),$$

где $F(u_1, u_2)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Для решения задачи Коши составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + yz = 0, \\ u_1 = \dfrac{y}{x} - x^2, \\ u_2 = x + yz. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что

$$\frac{y}{x} = u_1 + u_2^2.$$

Следовательно, решением задачи Коши является

$$u = \frac{y}{x} - x^2 + (x + yz)^2 = \frac{y}{x} + 2xyz + y^2z^2. \qquad \blacktriangle$$

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием (1—100):

1. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{2}y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (z + x^4y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{2z - x^2}{2x^2}$ при $xy = -1$.

2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(y + \dfrac{x^4}{z}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{yz^5 - 1}{z^7}$ при $xz = 1$.

3. $\dfrac{z}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2yz\dfrac{\partial u}{\partial y} + (z^2 + 2xy - 1)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = xy - \dfrac{1}{2}$ при $xy + z^2 = 1$.

4. $(x^2 + z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2(xy - xz^3)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2xz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{y}{z} - \dfrac{z^2}{2}$ при $x^2 - z^2 = 2$.

5. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z^2(x - 3y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{x^2}{y}$ при $3yz = 1$.

6. $(y + 2z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2x^2z\dfrac{\partial u}{\partial y} + x^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{4z^3 - x^3}{3}$ при $y + z^2 + yz = 0$.

7. $xy^3\dfrac{\partial u}{\partial x} + x^2z^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + y^3z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = y^4$ при $xz^3 = 1$.

8. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (xz + y)\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = 1 - x$ при $x + y - z = 0$.

9. $x(x + z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y(x - z)\dfrac{\partial u}{\partial y} - z(x + z)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x + y$ при $z = 1$, $x > 0$

10. $2y(x - y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} - (x - y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} - 4yz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = xy^2$ при $z = 1$.

11. $x(x + y)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y(x + y)\dfrac{\partial u}{\partial y} - z(x - y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2 + y^2$ при $z = 1$.

12. $x(y - z)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y(y + z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + z(y + z)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = y^2 - x$ при $z = 1$.

13. $2xz\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2yz\dfrac{\partial u}{\partial y} + (2x^2 + y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{z^2}{y}$ при $y = x^2$.

14. $(z+2x-2y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z-2x+2y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=xz^4$ при $x+y=0$.

15. $xz\dfrac{\partial u}{\partial x}-yz\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x^3y+x^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\left(\dfrac{z}{y}\right)^2$ при $y=x$.

16. $(z-x+3y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+x-3y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\dfrac{4y}{z}$ при $x=3y$.

17. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x^2y+z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x^3$ при $z=x$.

18. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+yz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x$ при $z=x^2+y^2$.

19. $2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y+z)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=0$, $u=\left(\dfrac{y}{z}\right)^2$ при $x=z^2$.

20. $(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+xz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\left(\dfrac{x}{z}\right)^2$ при $y=z$.

21. $(2xz-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2yz-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(3z^2-3z-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=xz$ при $y=z$.

22. $(2x^2z^2+x)\dfrac{\partial u}{\partial x}-(4xyz^2-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-(4xz^3-z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=yz^2$ при $x=z$.

23. $(x^3y^2+x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-3x^2y^3)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x^2y^2z+z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x^3z$ при $y=x$.

24. $(x^2y+2x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2xy^2+y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-(xyz+2z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=yz+y+\dfrac{1}{y}$ при $x=y$.

25. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2xy-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(2xz-yz)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\dfrac{y^2}{z}$ при $x=2y$.

26. $2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2y-3xz^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}-3z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=y-\dfrac{2}{x}$ при $xz=2$.

27. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x^2+y+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\dfrac{y}{x}$ при $x^2+z^2=z$.

28. $(3x-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+(z+x-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=z-y^2$ при $x=3y^2$.

29. $(x+y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}-2y\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x-y+z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\dfrac{z}{y}$ при $x=z$.

30. $(x-2z)\frac{\partial u}{\partial x}+(2z-y)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x$ при $y=0$, $z>0$.

31. $4xz\frac{\partial u}{\partial x}+2(z^3-zy)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-z^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=xz$ при $y=0$, $z>0$.

32. $x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y(z-x)\frac{\partial u}{\partial y}-z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=y$ при $x=z$.

33. $xy\frac{\partial u}{\partial x}+(y^2-2z^3)\frac{\partial u}{\partial y}-2yz\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\frac{z^3}{x^2}$ при $y=x$.

34. $x\frac{\partial u}{\partial x}+(2ze^z+y)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=z^4$ при $x=y$.

35. $xz^2\frac{\partial u}{\partial x}+2(y-z^2)y\frac{\partial u}{\partial y}-z^3\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x^2e^z$ при $y=z$, $z<0$.

36. $x^2\frac{\partial u}{\partial x}+(2z-e^y)\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\frac{(z-x)^2}{x^2}$ при $y=\ln x$.

37. $(x+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=(1+z)(1-2z)^2$ при $x+y=1$.

38. $xy\frac{\partial u}{\partial x}+(x-2z)\frac{\partial u}{\partial y}+yz\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x$ при $y^2=2x$.

39. $x^2z\frac{\partial u}{\partial x}+y^2z\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=e^{-\frac{z^2}{2}}$ при $x=2y$.

40. $(1+z)\frac{\partial u}{\partial x}+y^2e^{3x}\frac{\partial u}{\partial y}+(1+z)^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=e^{2x}$ при $y=2(1+z)e^{-3x}$.

41. $z(x+y^2\cos y)\frac{\partial u}{\partial x}+yz\frac{\partial u}{\partial y}+y\cos y\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\frac{3z^2}{2}$ при $x=2y\sin y+yz^2$ $\left(0<y<\frac{\pi}{2}\right)$.

42. $z\cos x\frac{\partial u}{\partial x}+z(1-y\sin x)\frac{\partial u}{\partial y}+(1-z)\sin x\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=e^z(z-1)$ при $y=1+\sin x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

43. $(1-x)^4\frac{\partial u}{\partial x}+(1-x)^3\frac{\partial u}{\partial y}+z^3e^{-y}\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\frac{1}{(x-1)^2}$ при $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{y}{2}}$, $(x>1)$.

44. $(xy+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+(yz+e^{\frac{x}{y}})\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=1+\dfrac{1}{y}$ при $x=y\ln z$, $y>0$.

45. $xz\operatorname{tg}z\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}-z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\cos z-\sin z$ при $x=yz$ $\left(0<z<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

46. $(xy-x^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+(e^{\frac{y}{x}}+yz)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\dfrac{y}{1+y}$ при $y=x\ln z$, $y>0$.

47. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}+xz\operatorname{ctg}x\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\sin x+\cos x$ при $z=xy$, $\left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$.

48. $(x+2ze^y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}+z(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=e^x$ при $x=2y$, $z>0$.

49. $(x+y^2+2z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=xy-y^3$ при $z=y^2$.

50. $x(2y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(xe^z+y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-(2y+z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=z$ при $y+z=0$, $x>0$.

51. $(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2ze^x-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x+y)z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=z^2$ при $2x+y=0$, $z>0$.

52. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+(xe^{-y}+z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x^2$ при $z=(y-x)e^{-y}$.

53. $x^2(1+xz)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{xz}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+(1+xz)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=xy^2$ при $xz=1$, $x>0$.

54. $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{1}{x+yz}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x$ при $z=0$.

55. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x^2+y^2z^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=y^2$ при $z=0$.

56. $x(1-xy)\dfrac{\partial u}{\partial x}+xy^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+z(xy^2+xy-1)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=xz(x-1)$ при $y=xz$, $x>0$, $y<0$.

57. $x(y-ze^y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z(1-ze^y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x$ при $y=z$, $(x>0)$.

58. $[1-\ln(x^2y)]\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{2y}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy^2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x^2y+\dfrac{1}{y}\ln(x^2y)$ при $z=x\sqrt{y}$.

59. $xe^z\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2ye^z\dfrac{\partial u}{\partial y} + (2y - x)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = -\dfrac{e^z}{x^3}$ при $y = -x$.

60. $2xe^{2z}\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2e^{2z}\dfrac{\partial u}{\partial y} + x(1 - y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \left(\dfrac{1}{x} + y\right)e^{-y}$ при $z = 0$.

61. $x\cos z\dfrac{\partial u}{\partial x} - \operatorname{tg} y \cdot \cos z\dfrac{\partial u}{\partial y} + x(\operatorname{tg} y - y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x\sin x\left(x^2 + \sin z\right)$ при $y = x$ $\left(0 < y < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < z < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

62. $xz\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x + yz)\dfrac{\partial u}{\partial y} - z^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = xy - x^2$ при $z = 1$.

63. $(x^2 + y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + e^{-z}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = e^z$ при $x = 2y$, $x > y > 0$.

64. $(x + y - z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (1 + z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = y(1 + x + y)$ при $z = 0$.

65. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2xy - y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} + z^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = yz - y - z$ при $x = yz$.

66. $(y - z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x - z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (y - x)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = 2(x - y)$ при $x - z = 2y$.

67. $2y\cos^2 x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (1 + y^2\sin 2x)\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\sin 2z}{y}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x - 1 + \operatorname{ctg} z$ при $y^2\cos^2 x = 1$, $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{4},\ 0 < z < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

68. $(x^3 + y^3)\dfrac{\partial u}{\partial x} + x^2y\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{y^3\sqrt{1 + z^2}}{x}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = z + \sqrt{1 + z^2}$ при $x^3 = 3y^3\ln x$.

69. $(2y^2 + z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2xz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{x^2}{z}$ при $y^2 = z$.

70. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x^2y^2 + z^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} + xz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = z^2$ при $y = 0$, $xz > 0$.

71. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} - (xz^3 + z^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} - yz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$ при $z = x$.

72. $x^3\dfrac{\partial u}{\partial x} - x^2y\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2(x^2 - z)z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = y^2e^x$ при $z = x$.

73. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{x^4}{z^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} + (xz + z^3)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = 1 + y$ при $x = 1$.

74. $z^2(z-y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2(2z-y)\dfrac{\partial u}{\partial y} + yz^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = e^{\frac{x}{z}}$ при $y = \dfrac{z}{2}$, $z > 0$.

75. $x(y-x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + yz^2e^{\frac{y}{x}}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = y(1+e^{-\frac{y}{x}})$ при $z = 1$, $y > 0$.

76. $(x^2+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2xz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x+z$ при $y = z$.

77. $\dfrac{x}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x} - y(1+x^2yz)\dfrac{\partial u}{\partial y} - z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = z$ при $x^2y = 1$.

78. $2z(x-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2yz\dfrac{\partial u}{\partial y} + (y^2+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x+z^2$ при $y^2 = 1-x$.

79. $2xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + (1-y^2-2xz)\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{1}{2} - y^2$ при $y^2 + xz = 1$.

80. $\left(x + \dfrac{z^4}{y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = xy$ при $z = 1$.

81. $x^2z\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (2y+z)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = 1 + \dfrac{1}{xy}$ при $y + z = 1$.

82. $(y-z^3)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x+z^3)\dfrac{\partial u}{\partial y} - z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = y^2 - x^2$ при $z = 1$.

83. $2xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2x-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} + y^3z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2z^2$ при $y^2 = 2x$.

84. $(x-2x^2y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2x^2z^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = y^2z$ при $x - y = 0$.

85. $(y-x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x+y)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2yz^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2z$ при $x + y = 0$.

86. $(x-3x^2z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3x^2y^2z\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{z^3}{y}$ при $x = z$.

87. $2x^2yz\dfrac{\partial u}{\partial x} + (yz-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (yz+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = (z-y)^2$ при $z + \dfrac{1}{x} = 0$.

88. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + (xy-2x^2y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} - \left(xz + \dfrac{1}{y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = 2x - \dfrac{1}{y}$ при $z = -1$.

89. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2y^2-xy)\dfrac{\partial u}{\partial y} + \left(xz + \dfrac{x^2}{y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{x}{y}$ при $z = -1$.

90. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2x^3-xy-z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(xz-2x^4)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=z+2x^3$ при $y=x^2$.

91. $x^4\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x^4z+x^3y-2x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(2-x^3z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=(y+1)^2$ при $xz=1$.

92. $x(2z-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2z^2(z-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+xz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\dfrac{y}{2-z^2}$ при $xz=2$, $xz>0$.

93. $3xyz\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z(2+3yz)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=xy^3$ при $x=yz$, $xz<0$.

94. $2\dfrac{\partial u}{\partial x}+2xz^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+xz^3(2yz^2-2-z^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x^2z^2$ при $y=0$.

95. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y(3+4xy)\dfrac{\partial u}{\partial y}+4xyz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\dfrac{x^7}{y}$ при $z=xy$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

96. $yz\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2z(1-xy)\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=yz^2$ при $x=0$.

97. $(x-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x+y^2+z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\dfrac{z}{2y^2}$ при $x=y^2$, $y>0$.

98. $(2x+y^2+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+(z-2y+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\dfrac{x-e^y}{2}$ при $z=x-y^2$.

99. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y(2z-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}+z^2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=1-\dfrac{z}{y}$ при $z=2x$.

100. $[(x+y-z)^2+y-z-2]\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+1)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(y-1)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\dfrac{1}{x+y+1}$ при $z=1$, $y>1$.

Решить уравнение, преобразовав его к указанным новым независимым переменным (101—102):

101. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, $u=x+y$, $v=x-y$.

102. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$, $u=x$, $v=x+y$, $t=x+z$.

Ответы к задачам § 17

1. $u=F\left(xy^2,\ \dfrac{z}{x}-\dfrac{1}{2}x^3y^2\right)$, $u=\dfrac{1}{2}y^2(2z-x^4y^2)$.

2. $u = F\left(\frac{z}{x^2},\ \frac{y}{x} - \frac{x^3}{z}\right)$, $u = \frac{xyz - x^5}{z^2}$.

3. $u = F\left(2x - \frac{1}{y},\ xy^2 + yz^2 - \frac{1}{2}y\right)$, $u = (2xy - 1)\left(xy + z^2 - \frac{1}{2}\right)$.

4. $u = F\left(\frac{z^2 - x^2}{z},\ \frac{y}{z} + \frac{z^2}{2}\right)$, $u = \frac{y}{z} + \frac{z^2}{2} - \frac{4z^2}{(z^2 - x^2)^2}$.

5. $u = F\left(\frac{x}{y},\ \frac{1 + xz - 3yz}{z}\right)$, $u = \frac{x(1 + xz - 3yz)}{yz}$.

6. $u = F\left(y + z^2,\ \frac{4z^3 - x^3}{3} + yz\right)$, $u = \frac{4z^3 - x^3}{3} + y + z^2 + yz$.

7. $u = F\left(\frac{z}{x},\ y^4 - x^2z^2\right)$, $u = y^4 - x^2z^2 + \frac{x}{z}$.

8. $u = F\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x} - z\right)$, $u = \frac{x + y - xz}{z}$.

9. $u = F\left(xz,\ \frac{y^2e^{-x^2}}{(x^2 + xz)^2}\right)$, $u = xz + z(xz + 1)\frac{y}{x + z}e^{\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)}$.

10. $u = F\left[x + y^2,\ z(y^2 - x)\right]$, $u = \frac{1}{4}[(x + y^2)^2 - z^2(y^2 - x)^2]$.

11. $u = F[xy,\ (x + y)z]$, $u = z^2(x + y)^2 - 2xy$.

12. $u = F[yz,\ x(y + z)]$, $u = y^2z^2 - \frac{x(y + z)}{1 + yz}$.

13. $u = F\left(\frac{y}{x},\ z^2 - x^2 - y\right]$, $u = \frac{x^2(z^2 - x^2 - y)}{y^2} + 2$.

14. $u = F\left[x + y + z,\ (x - y)z^2\right]$, $u = \frac{1}{2}(x - y)z^2(x + y + z)^2$.

15. $u = F\left[xy,\ z^2 - x^2(1 + xy)\right]$, $u = 1 + xy + \frac{z^2 - x^2(1 + xy)}{xy}$.

16. $u = F\left[x + y + z,\ \frac{z^2}{x - 3y + z}\right]$, $u = \frac{(x + y + z)(x - 3y + z)}{z^2} - 1$.

17. $u = F\left(\frac{y}{x^2},\ \frac{3z}{x} - xy\right)$, $u = \frac{3x^2 + x^3y - 3xz}{y}$.

18. $u = F\left(x^2 + y^2,\ \frac{z}{x}\right)$, $u = \frac{(x^2 + y^2)x}{z}$.

19. $u = F\left(y - z,\ \dfrac{y+z}{x}\right),\ u = 1 + \dfrac{y^2 - z^2}{x}.$

20. $u = F\left(\dfrac{y}{x^2 - y^2},\ \dfrac{z^2}{y}\right),\ u = 1 + \dfrac{x^2 - y^2}{z^2}.$

21. $u = F\left(\dfrac{y}{x},\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{z - z^2}{y^3}\right),\ u = \dfrac{xy^2}{y^2 + z - z^2}.$

22. $u = F\left(\dfrac{z}{y},\ \dfrac{x}{z} - 2x^2 z\right),\ u = \dfrac{y(z - x + 2x^2 z^2)}{2z^2}.$

23. $u = F\left(\dfrac{x}{y} - x^3 y,\ \dfrac{z}{x}\right),\ u = z\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + x^2 y\right).$

24. $u = F\left(xz,\ \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{x^2}{y}\right),\ u = xz + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{x^2}{y}.$

25. $u = F\left(\dfrac{x^2 - xy}{y},\ \dfrac{y}{z}\right),\ u = \dfrac{x^2 - xy}{2z}.$

26. $u = F\left(x^3 z^2,\ \dfrac{2y - xz^2}{2x}\right),\ u = \dfrac{1}{8}x^2 z^2 (2y - xz^2).$

27. $u = F\left(\dfrac{z}{x},\ \dfrac{y - x^2 - z^2}{x}\right),\ u = \dfrac{y + z - x^2 - z^2}{x}.$

28. $u = F\left(\dfrac{x - y^2}{y^3},\ \dfrac{2z - x + y^2}{2y}\right),\ u = \dfrac{(2z - x + y^2)y^2}{x - y^2}.$

29. $u = F\left[x + y - z,\ y(x+z)\right],\ u = \dfrac{y(x+z)}{2(x + y - z)^2}.$

30. $u = F\left(x + y + z,\ xy + z^2\right),\ u = x + y + z - \sqrt{xy + z^2}.$

31. $u = F\left[y + z^2,\ x(y - z^2)\right],\ u = \dfrac{x(z^2 - y)}{\sqrt{y + z^2}}.$

32. $u = F\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z},\ xyz\right),\ u = \dfrac{y(x+z)^2}{4xz}.$

33. $u = F\left(x^2 z,\ y^2 z - \dfrac{1}{2}z^4\right),\ u = 2\left(1 - \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{z^3}{2x^2}\right).$

34. $u = F\left(xe^{-z},\ ye^{-z} - z^2\right),\ u = (xe^{-z} - ye^{-z} + z^2)^2.$

35. $u = F\left(xz,\ \dfrac{z^2}{y} - 2\ln|z|\right)$, $u = x^2 e^{\frac{z^2}{y}}$.

36. $u = F\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{z},\ z^2 e^{-y} - z\right)$, $u = \dfrac{(z-x)(ze^{-y}-1)}{x}$.

37. $u = F\left[\dfrac{x+y+z}{(x-y)^2},\ (2z-x-y)(y-x)\right]$, $u = (x+y+z)(x+y-2z)^2$.

38. $u = F\left(\dfrac{z}{x},\ y^2 - 2x + 4z\right)$, $u = \dfrac{x(y^2-2x+4z)}{4z}$.

39. $u = F\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y},\ (x-y)e^{-\frac{z^2}{2}}\right]$, $u = \dfrac{2(y-x)^2}{xy} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$.

40. $u = F\left[(1+z)e^{-x},\ e^{2x} + \dfrac{2}{y}(1+z)e^{-x}\right]$, $u = \dfrac{1}{2}e^{2x} + \dfrac{1+z}{y} \cdot e^{-x}$.

41. $u = F\left(z^2 - 2\sin y,\ \dfrac{x}{y} - \sin y\right)$, $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{z^2}{2} - 2\sin y$.

42. $u = F\left(\dfrac{z-1}{\cos x} \cdot e^z,\ \dfrac{y - \sin x}{\cos x}\right)$, $u = \dfrac{(z-1)e^z}{y - \sin x}$.

43. $u = F\left[(x-1)e^y,\ e^{2y} - \dfrac{(x-1)^3 e^{3y}}{z^2}\right]$, $u = \dfrac{(x-1)e^y}{z^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

44. $u = F\left(\dfrac{x - y\ln y}{y},\ \dfrac{y^2}{yz + e^{\frac{x}{y}}}\right)$, $u = \dfrac{1}{y} + z \cdot e^{-\frac{x}{y}}$.

45. $u = F\left(\dfrac{x}{\cos z},\ yz - x\operatorname{tg} z\right)$, $u = \dfrac{yz}{x} \cdot \cos z - \sin z$.

46. $u = F\left[\dfrac{y}{x} - \ln y,\ \dfrac{1}{y^2}\left(yz + e^{\frac{y}{x}}\right)\right]$, $u = \dfrac{ye^{\frac{y}{x}}}{yz + e^{\frac{y}{x}}}$.

47. $u = F\left(\dfrac{z}{\sin x},\ xy + z\operatorname{ctg} x\right)$, $u = \dfrac{xy\sin x + z\cos x}{z}$.

48. $u = F\left(ze^{-y},\ xy - \dfrac{x^2}{2} + ze^y\right)$, $u = e^{2y} + \dfrac{\left(xy - \dfrac{x^2}{2}\right)e^y}{z}$.

49. $u = F\left(z - \dfrac{1}{2}y^2,\ \dfrac{x - 3y^2 + 2z}{y}\right)$, $u = \dfrac{1}{y}(2z - y^2)(x - 3y^2 + 2z)$.

50. $u = F\left(xe^z,\ y^2 + yz + xze^z\right)$, $u = z + \dfrac{y(y+z)}{xe^z}$.

51. $u = F\left(ze^{-x},\ 2xy + y^2 - 2ze^x\right)$, $u = z^2 - \dfrac{1}{2}(2x+y)yze^{-x}$.

52. $u = F\left(xe^{-y},\ \dfrac{xe^{-y} + z}{y}\right)$, $u = \left(\dfrac{xy}{x + ze^y}\right)^2$.

53. $u = F\left[\dfrac{1}{x} + z,\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y^2} - \dfrac{1}{2x(xz+1)}\right]$,

$$u = \frac{8x}{(xz+1)\left[8\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y^2} - \dfrac{1}{2x(xz+1)}\right) - 3\dfrac{(xz+1)}{x}\right]}.$$

54. $u = F\left(\dfrac{y}{x},\ y - z - \dfrac{yz^2}{2x}\right)$, $u = x - \dfrac{xz}{y} - \dfrac{z^2}{2}$.

55. $u = F\left[\dfrac{y}{x},\ x - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{yz}{x}\right)\right]$, $u = \dfrac{y^2}{x^2}\left(x - \operatorname{arctg}\dfrac{yz}{x}\right)^2$.

56. $u = F\left(xy - \ln|y|,\ y - \ln|xz|\right)$, $u = (x-1)y + \ln\left|\dfrac{xz}{y}\right|$.

57. $u = F\left(\dfrac{y}{z} - e^y,\ \left|\dfrac{xy}{z}\right|e^{-y}\right)$, $u = \left(1 - \dfrac{y}{z} + e^y\right)\dfrac{xy}{z}e^{-y}$.

58. $u = F\left[\dfrac{\ln(x^2y)}{y},\ \dfrac{x^2y^2}{\ln(x^2y)} + \ln z^2\right]$, $u = x^2y + \dfrac{\ln(x^2y)\cdot\ln z^2}{y}$.

59. $u = F\left(x^2y,\ x + y + e^z\right)$, $u = \dfrac{x + y + e^z}{x^2y}$.

60. $u = F\left(xe^y,\ xy + e^{2z}\right)$, $u = \dfrac{(xy + e^z)e^{-y}}{x}$.

61. $u = F(x\sin y,\ xy + \sin z)$, $u = x\sin y(xy + \sin z)$.

62. $u = F(xz,\ yz - x)$, $u = xz(yz - x)$.

63. $u = F\left(\dfrac{1}{x+y} + e^z,\ \dfrac{x^2 - y^2}{y}\right)$, $u = \dfrac{x - 2y}{x^2 - y^2} + e^z$.

64. $u = F\left[y - z - \dfrac{z^2}{2},\ (x + y + 1)e^{-z}\right]$, $u = (x + y + 1)\left(y - z - \dfrac{z^2}{2}\right)e^{-z}$.

65. $u = F\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{z},\ \dfrac{x^2}{y} - x\right)$, $u = -1 + \dfrac{(x-y)(x-z)}{yz}$.

66. $u = F\left[z - x + y,\ (x-y)(x-z)\right]$, $u = \dfrac{(x-y)(x-z)}{x-y-z}$.

67. $u = F\left(y^2\cos^2 x - x,\ y^2\cos^2 x\cdot\operatorname{ctg} z\right)$, $u = x + y^2\cos^2 x(\operatorname{ctg} z - 1)$.

68. $u = F\left[ye^{-\frac{x^3}{3y^3}},\ \dfrac{y}{x}(z+\sqrt{1+z^2})\right]$, $u = \dfrac{z+\sqrt{1+z^2}}{x}e^{\frac{x^3}{3y^3}}$.

69. $u = F\left(\dfrac{z}{y},\ x^2 - y^2 - z\right)$, $u = 2 + \dfrac{(x^2-y^2-z)y^2}{z^2}$.

70. $u = F\left(\dfrac{z}{x},\ \dfrac{x}{z}\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z} - x\right)$, $u = \dfrac{z^2}{x^2}\left(\dfrac{x}{z}\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z} - x\right)^2$.

71. $u = F\left[xz,\ y^2 - z^2(1+xz)\right]$, $u = 1 + xz + \dfrac{y^2 - z^2(1+xz)}{xz}$.

72. $u = F\left(xy,\ \dfrac{x^2}{z} - \ln x^2\right)$, $u = y^2\cdot e^{\frac{x^2}{z}}$.

73. $u = F\left(2x + \dfrac{x^2}{z^2},\ y - x^2 - \dfrac{x^3}{z^2}\right)$, $u = 2x - x^2 + y + \dfrac{x^2 - x^3}{z^2}$.

74. $u = F\left[\dfrac{z^2}{y} - z,\ x - \left(\dfrac{z^2}{y} - z\right)\ln z\right]$, $u = \left(\dfrac{z}{y} - 1\right)e^{\frac{xy}{z^2 - yz}}$.

75. $u = F\left(\dfrac{y}{x} - \ln y,\ e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{1}{z}\right)$, $u = y\left(1 + \dfrac{1}{z}e^{-\frac{y}{x}}\right)$.

76. $u = F\left(\dfrac{x^2}{z} - z,\ \dfrac{y}{x-z}\right)$, $u = \dfrac{(x+z)y}{z}$.

77. $u = F\left[x^2 z,\ \dfrac{z}{y}(1 + x^2 yz)\right]$, $u = \dfrac{1}{x^2 y} + z - 1$.

78. $u = F\left[\dfrac{x}{y} + y,\ \dfrac{z^2}{y} - y\right]$, $u = \dfrac{x + z^2}{x + y^2}$.

79. $u = F\left(\dfrac{1}{x} - 2z,\ xy^2 - \dfrac{x}{2} + x^2 z\right)$, $u = (2xz - 1)\left(y^2 - \dfrac{1}{2} + xz\right)$.

80. $u = F\left(\dfrac{y}{z^2},\ \dfrac{z}{x} + \dfrac{z^3}{y}\right)$, $u = \dfrac{xy^2}{z^3[x\,(z^2 - z) + y]}$.

81. $u = F\left(y^2 + yz,\ \dfrac{1}{x} + 2y + z\right)$, $u = \dfrac{\frac{1}{x} + 2y + z - 1}{y^2 + yz}$.

82. $u = F\left[(x+y)z,\ \dfrac{x-y-z^3}{z}\right]$, $u = (x+y)(y-x+z^3-z)$.

83. $u = F\left(x^2 - xy^2,\ 2x - y^2 - \ln z^2\right)$, $u = xz(y^2 - x)e^{y^2-2x}$.

84. $u = F\left(\dfrac{y}{x} - y^2,\ \dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{y}\right)$, $u = \dfrac{1 + y^2 - \dfrac{y}{x}}{1 - \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{z}}$.

85. $u = F\left(x^2 + 2xy - y^2,\ x + y + \dfrac{1}{z}\right)$, $u = \dfrac{y^2 - x^2 - 2xy}{2\left(x + y + \dfrac{1}{z}\right)}$.

86. $u = F\left(\dfrac{z}{x} - z^3,\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z}\right)$, $u = \left(1 - \dfrac{z}{x} + z^3\right)\left(1 + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z}\right)$.

87. $u = F\left(\dfrac{1}{x} + y + z,\ y^2 + 2yz - z^2\right)$,

$$u = -y^2 - 2yz + z^2 + 2\left(z + y + \frac{1}{x}\right)^2.$$

88. $u = F\left[\dfrac{x}{y} - x^2,\ x(z+2) - \dfrac{1}{y}\right]$, $u = \dfrac{x(xy-1)}{(z+2)xy - 1} + x(z+2) - \dfrac{1}{y}$.

89. $u = F\left[\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right),\ \dfrac{1}{x}\left(z - \dfrac{x}{y} + 2\right)\right]$, $u = 1 + \dfrac{y}{x-y}\left(z + 2 - \dfrac{x}{y}\right)$.

90. $u = F\left[\dfrac{1}{x}(x^3 + z),\ xy + z\right]$, $u = xy + z + \dfrac{(xy+z)^3 x^3}{(x^3+z)^3}$.

91. $u = F\left(xz + \dfrac{1}{x^2},\ z + \dfrac{y}{x}\right)$, $u = \dfrac{(y + xz)^2}{x^3 z + 1 - x^2}$.

92. $u = F\left[xz - z^2,\ y + (xz - z^2)\ln(xz)\right]$, $u = \dfrac{y}{xz - z^2} + \ln\dfrac{xz}{2}$.

93. $u = F\left(y^3 + \dfrac{y^2}{z},\ \dfrac{xy^2}{z}\right)$, $u = \dfrac{x^2 y^2}{(1-x)z + yz^2}$.

94. $u = F\left[\left(\dfrac{1}{z^2} - y\right)e^{-2y},\ y^2 - y - x^2 + \dfrac{1}{z^2}\right]$,

$$u = 1 - \frac{1 + (y^2 - y - x^2)z^2}{1 - yz^2}e^{2y}.$$

95. $u = F\left(x^4 + \dfrac{x^3}{y},\ \dfrac{x^3 z}{y}\right)$, $u = \dfrac{x^3 z}{y}\left(x^4 + \dfrac{x^3}{y} - \dfrac{x^3 z}{y}\right)$.

96. $u = F\left[\left(\dfrac{1}{y} - x + 1\right)e^x,\ z^2 + \dfrac{2}{y} - x^2\right]$, $u = -2 + \dfrac{z^2 + \dfrac{2}{y} - x^2}{\left(\dfrac{1}{y} - x + 1\right)e^x - 1}$.

97. $u = F\left[\dfrac{x}{y} + y,\ \dfrac{z - (x + y^2)\ln y}{y}\right]$, $u = \dfrac{z}{x + y^2} + \ln\dfrac{x + y^2}{2y^2}$.

98. $u = F\left[(y^2 + z)e^{-y},\ (x + y^2 + z)e^{-2y}\right]$, $u = \dfrac{(y^2 + z)^2 - (y^2 + z)e^y}{x + y^2 + z}$.

99. $u = F\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x},\ \dfrac{z^2}{y} - z\right)$, $u = \dfrac{(x - z)(z - y)}{xy}$.

100. $u = F\left[(y - 1)^2 - (z + 1)^2,\ \dfrac{1}{x + y - z} + \ln|y + z|\right]$,

$$u = \frac{1}{x + y - z} + \ln|y + z| - \frac{1}{2}\ln\left[(y - 1)^2 - (z + 1)^2\right].$$

101. $z = F(x - y)$.

102. $w = F(x + y, x + z)$.

§ 18. Квазилинейные и нелинейные уравнения

Если Ω — некоторая область пространства R^3, то квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка в области Ω имеет вид

$$a(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y, z). \tag{1}$$

В уравнении (1) коэффициенты $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$ и $c(x, y, z)$ — заданные непрерывно дифференцируемые в области Ω функции, а $z = z(x, y)$ — искомая непрерывно дифференцируемая функция. Эта функция задает в Ω некоторую поверхность, называемую интегральной поверхностью (1). Автономная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x, y, z), \\ \dot{y}(t) = b(x, y, z), \\ \dot{z}(t) = c(x, y, z) \end{cases} \tag{2}$$

называется характеристической системой уравнения (1).

Если $u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$ — два независимые первые интегралы системы (2), то общее решение уравнения (1) записывается в неявном виде

$$F[u_1(x,y,z),u_2(x,y,z)]=0,$$

где $F(u_1,u_2)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, допускающая нахождение $z=z(x,y)$ как неявной функции.

Пусть γ — некоторая гладкая кривая в области Ω. Задачей Коши для уравнения (1) называется задача нахождения интегральной поверхности уравнения (1), проходящей через заданную кривую γ.

Пусть гладкая кривая γ задается как пересечение двух поверхностей:

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y,z)=0,\\ \Phi_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Чтобы в этом случае решить задачу Коши, необходимо из системы уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y,z)=0,\\ \Phi_2(x,y,z)=0,\\ u_1(x,y,z)=u_1,\\ u_2(x,y,z)=u_2 \end{cases}$$

исключить x, y, z и найти связь между u_1, u_2. Если эта связь вида $\Phi(u_1,u_2)=0$, то уравнение $\Phi[u_1(x,y,z),u_2(x,y,z)]=0$ дает решение задачи Коши для уравнения (1).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$(z-y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial z}{\partial y}=y-x$$

и ту интегральную поверхность этого уравнения, которая проходит через прямую $x=1$, $y=z$.

Δ Характеристическая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=z-y,\\ \dot{y}(t)=x-z,\\ \dot{z}(t)=y-x. \end{cases}$$

Сложив первые два уравнения, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = x - y, \\ \dot{z} = y - x. \end{cases}$$

Отсюда $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$ или $dx + dy + dz = 0$, что дает первый интеграл

$$u_1 = x + y + z.$$

Если первое уравнение характеристической системы умножить на x, второе уравнение умножить на y, третье уравнение умножить на z и сложить, то получаем $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$ или $xdx + ydy + zdz = 0$. Отсюда находим еще один первый интеграл

$$u_2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Общее решение уравнения задается формулой

$$F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

где $F(u_1, u_2)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Для решения задачи Коши, исключая x, y, z из системы

$$\begin{cases} x = 1, \ y = z, \\ u_1 = x + y + z, \\ u_2 = x^2 + y^2 + z^2, \end{cases}$$

находим, что $u_2 = 1 + \dfrac{1}{2}(u_1 - 1)^2$. Следовательно, решение задачи Коши задает функция

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + \frac{1}{2}(x + y + z - 1)^2. \qquad \blacktriangle$$

Если кривая γ задана параметрически

$$x = \varphi_1(\tau), \ y = \varphi_2(\tau), \ z = \varphi_3(\tau),$$

то из системы уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi_1(\tau), \ y = \varphi_2(\tau), \ z = \varphi_3(\tau), \\ u_1 = u_1(x, y, z), \\ u_2 = u_2(x, y, z) \end{cases}$$

находим связь $\Phi(u_1, u_2) = 0$. Тогда уравнение $\Phi[u_1(x,y,z), u_2(x,y,z)] = 0$ задает искомую интегральную поверхность, проходящую через кривую γ.

Пример 2. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

проходящую черех кривую $x = \tau$, $y = \tau^2$, $z = 0$.

Δ Составим характеристическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x, \\ \dot{y}(t) = y, \\ \dot{z}(t) = z - \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{cases}$$

Перемножая крест-накрест первые два уравнения системы и отбрасывая dt, находим, что $ydx = xdy$. Отсюда $u_1 = \dfrac{y}{x}$ — первый интеграл. Умножая первое уравнение на x, второе — на y, третье — на z и складывая, имеем

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = x^2 + y^2 + z^2 - z\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Перемножая крест-накрест это выражение с третьим уравнением системы, получаем после отбрасывания dt

$$(z - \sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx + ydy + zdz) = (x^2+y^2+z^2 - z\sqrt{x^2+y^2+z^2})dz.$$

Отсюда

$$d(x^2+y^2+z^2) = -2\sqrt{x^2+y^2+z^2}dz.$$

Значит, $u_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + z$.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} x = \tau,\ y = \tau^2,\ z = 0, \\ u_1 = \dfrac{y}{x}, \\ u_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + z \end{cases}$$

находим, что $u_2^2 = u_1^2 + u_1^4$. Тогда искомая интегральная поверхность задается уравнением

$$(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2})^2 = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4}. \qquad \blacktriangle$$

В задачах (1—33) найти интегральную поверхность уравнения, проходящую через заданную линию.

1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2$, $x^2+y^2=1$, $z=x^2-1$.

2. $(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+xyz=0$, $z=x$, $y=1$.

3. $xz^4\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz^4\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y^2$, $z=x^2$, $y=\dfrac{1}{x}$.

4. $(x^2y-x)\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, $z=x$, $y=1$.

5. $(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xz$, $y=1$, $z=x$.

6. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y$, $x=0$, $y=z$.

7. $(y^2+z^2-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+2xz=0$, $x=0$, $z=y^2$.

8. $(z-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=y-x$, $x=y=z$.

9. $xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}+x^2+y^2=0$, $x=1$, $y=z$.

10. $(x^2-y^2-z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}-2xz=0$, $x=0$, $y=\sin\tau$, $z=\cos\tau$.

11. $(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial y}-z=0$, $x=\cos\tau$, $y=\sin\tau$, $z=\tau$.

12. $y^4z\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy^3z\dfrac{\partial z}{\partial y}+x(x^2+y^2)=0$, $x=\sqrt{\tau}$, $y=1$, $z=\sqrt{\tau^2+\tau}$.

13. $(x^2-y^2+z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz$, $x=1$, $y=\operatorname{ch}\tau$, $z=\operatorname{sh}\tau$.

14. $(xy-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2+2yz$, $y=1$, $z=2x$.

15. $x(4-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2x^2y+1)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$, $x=1$, $y=-z$.

16. $2x^3\dfrac{\partial z}{\partial x}+y(2x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=1+z^2$, $x=1$, $y=\operatorname{arctg} z$.

17. $(2x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x+2y)\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}-1\right)=0$, $x=0$, $z=2y$.

18. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=-z^2$, $x-y=0$, $x-yz=1$.

19. $(z-y)^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$, $x=0$, $y=0$.

20. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x}$, $x=1$, $z=y^2$.

21. $(xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\dfrac{\partial z}{\partial y}=1-z^2$, $z=2$, $2x=3y$.

22. $(2y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, $y=3z^2$, $x+z-4y=0$.

23. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y+z$, $x+2y=0$, $z=0$.

24. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, $y=x^2$, $z=2xy$.

25. $-x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+(xy-2z^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=xz$, $xy=1$, $x+z=0$.

26. $(2x+y^2+z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$, $y-z+1=0$, $z=2x$.

27. $-(x+3yz)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, $x+2yz=0$, $yz=1$.

28. $(2y^3-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+2x^3=0$, $y=z=1$.

29. $(z^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}+y=0$, $x=0$, $y=z$.

30. $(x+y^2+z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, $x=y=1$.

31. $(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+xyz=0$, $z=x$, $y=1$.

32. $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=y+z$, $x=y^3$, $z=0$.

33. $3y\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=3\cos^2 z\cdot\operatorname{tg} z$, $x+3y=1$, $z=\dfrac{\pi}{4}$ $\left(0<z<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

34. Найти поверхность, проходящую через окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=1$ и ортогональную к семейству сфер $x^2+y^2+z^2=bx$.

35. Решить уравнение
$$-y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = yz^2,$$
преобразовав его к новым независимым переменным $u = x^2 + y^2$, $v = x$.

36. Решить уравнение
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z,$$
преобразовав его к новым независимым переменным $u = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, $v = y$.

В задачах (37—40) найти решение нелинейного уравнения, удовлетворяющего указанному начальному условию.

37. $x + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u = x$, $y = 0$.

38. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u = x$, $y = 1$.

39. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = u$, $u = x$, $y = 1$.

40. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u = x$, $y = 1$.

41. Определить функцию $z = z(x, y)$, удовлетворяющую одновременно двум уравнениям
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y^2}{x^2 + y^2}.$$

42. Определить функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую одновременно двум уравнениям
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 = 2(x - y)^3.$$

Ответы к задачам § 18

1. $(x^2+y^2)^2\cdot(x^2+y^2+z)^2=x^4$.

2. $2\ln y+\dfrac{x^2}{y^2}=z^2e^{2y-2}$.

3. $4z^5-5x^2y^2=\dfrac{4x^5}{y^5}-5$.

4. $xyz=(xy-\ln y)^2$.

5. $x^2-y^2+y=z^2$.

6. $(x-y-z)^2=4(x^2+y^2)$.

7. $y^2(x^2+y^2+z^2)=y^2z+z^3$.

8. $(x+y+z)^2=3(xy+xz+yz)$.

9. $x^2+2y^2=x^2(x^2+y^2+z^2)$.

10. $(x^2+y^2+z^2)^2=y^2+z^2$.

11. $x=e^\tau\cos(t+\tau)$, $y=e^\tau\sin(t+\tau)$, $z=te^\tau$.

12. $1+z^2+\dfrac{x^2}{y^2}=(x^2+y^2)^2$.

13. $(x^2+y^2-z^2)^2=4(y^2-z^2)$.

14. $\dfrac{y^2}{z}+y=\dfrac{1}{2}\left(3+\dfrac{y}{x}-y\right)$.

15. $\dfrac{4}{3}(4-x^2)y+4z+\ln\left(\dfrac{6-3x}{2+x}\right)=\dfrac{4}{3}\ln|x|$.

16. $\dfrac{1}{4x^2}+\operatorname{arctg}z=\dfrac{1}{4}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2\ln x}}$.

17. $(y-x)^3=(x+y)(y-z)^2$.

18. $y^3-3xyz=(yz+1)^3-3(yz+1)^2+3(yz+1)$.

19. $z^2-y^2=x^2+(z-y)^2$.

20. $y^2+z(1-2x)+\dfrac{1}{2}x^2+(2x-x^2-1)\ln x=\dfrac{1}{2}$.

21. $3(x+y)(z-1)=5(x-y)(z+1)$.

22. $3z^2(x-2y+z)=2y^2$.

23. $x^2-y^2=3(x+y)^2\cdot e^{-\frac{2z}{x+y}}$.

24. $x(z-xy)=y^2$.

25. $xy+z=1-\sqrt{-xz}$.

26. $(y-z)(2x-y^2-z^2)=2y^2-y(y-z)$.

27. $xy+3y^2z=\sqrt{\dfrac{y}{z}}$.

28. $3y(z-x^2)-2y^4=4y-3y^3-3x^2$.

29. $(y+z)^2=2(x+y^2+z^2)$.

30. $z^2=y(z^2+y^2-x)$.

31. $\dfrac{x}{2y^2}+\ln y=\dfrac{z^2}{2}\cdot e^{2(y-1)}$.

32. $x=z-(z-y)^3$.

33. $x+3y=\operatorname{tg} z$.

34. $(a^2-1)z^2=\left(x-\dfrac{b}{2}+\dfrac{bz}{2}\right)^2+y^2$.

35. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2+f(x)}$.

36. $z=e^{-\frac{1}{y}}\cdot f\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$.

37. $u=x(1+y)$.

38. $u=x-\ln y$.

39. $u=x-y+1$.

40. $u=xe^{y-1}+\dfrac{1}{2}e^{2(y-1)}-\dfrac{1}{2}$.

41. $z=\ln\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)+C$.

42. $u=\dfrac{1}{2}(x-y)^2+C$.

Глава 6

ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 19. Простейшая вариационная задача

Рассмотрим

$$J(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx,$$

где a и b ($a < b$) заданные числа, $F(x, y, p)$ — заданная вещественнозначная дважды непрерывно дифференцируемая функция при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$, $p \in (-\infty, +\infty)$.

Пусть M обозначает множество всех непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, заданных на $[a, b]$ и удовлетворяющим граничным условиям

$$y(a) = A, \; y(b) = B,$$

где A и B — заданные числа.

Простейшей вариационной задачей называется задача нахождения слабого экстремума $J(y)$ в классе функций $y(x) \in M$.

Если дважды непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция $y(x)$ является решением простейшей вариационной задачи, то она на $[a, b]$ необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Всякое решение уравнения Эйлера называется экстремалью. Экстремаль, удовлетворяющая заданным граничным условиям, будем называть допустимой экстремалью.

В этом параграфе через $\overset{\circ}{C}{}^1[a, b]$ обозначается множество всех тех непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $\eta(x)$, которые удовлетворяют нулевым граничным условиям $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Пример 1. Решить простейшую вариационную задачу, если

$$J(y) = \int\limits_0^1 [xy^2 + x^2yy' + (1+x^2)(y')^2]dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Δ Уравнение Эйлера имеет вид

$$[(1+x^2)y']' = 0.$$

Экстремали задаются равенством $y = C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Используя граничные условия, получаем допустимую экстремаль $\hat{y}(x) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x$. Проверим, действительно ли на $\hat{y}(x)$ достигается экстремум $J(y)$. Для любой $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[0,1]$ имеем

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) = \int\limits_0^1 \{x(\hat{y}+\eta)^2 + x^2(\hat{y}+\eta)(\hat{y}'+\eta')+$$

$$+ (1+x^2)(\hat{y}'+\eta')^2 - x\hat{y}^2 - x^2\hat{y}\hat{y}' + (1+x^2)(\hat{y}')^2\}dx =$$

$$= \int\limits_0^1 [2x\hat{y} + x^2\hat{y}']\eta dx + \int\limits_0^1 [x^2\hat{y} + x^2\eta + 2(1+x^2)\hat{y}']\eta' dx+$$

$$+ \int\limits_0^1 [x\eta^2 + (1+x^2)(\eta')^2]dx.$$

Во втором интеграле проинтегрируем по частям. Получаем

$$\int\limits_0^1 [x^2\hat{y} + x^2\eta + 2(1+x^2)\hat{y}']\eta' dx = [x^2\hat{y} + 2(1+x^2)\hat{y}']\eta(x)\Big|_{x=0}^1 +$$

$$+ \frac{1}{2}x^2\eta^2(x)\Big|_{x=0}^1 - \int\limits_0^1 \{[x^2\hat{y} + 2(1+x^2)\hat{y}']'\eta + x\eta^2\}dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 \{[x^2\hat{y} + 2(1+x^2)\hat{y}']'\eta + x\eta^2\}dx,$$

так как проинтегрированная часть обращается в нуль, поскольку $\eta(x)$ обращается в нуль на концах $[0, 1]$. Подставляя найденное выражение второго слагаемого в $\Delta J(\hat{y})$, находим

$$\Delta J(\hat{y}) = \int_0^1 \{2x\hat{y} + x^2\hat{y}' - [x^2\hat{y} + 2(1+x^2)\hat{y}']\}\eta dx + \int_0^1 (1+x^2)(\eta')^2 dx =$$

$$= -\int_0^1 2[(1+x^2)\hat{y}']'\eta dx + \int_0^1 (1+x^2)(\eta')^2 dx = \int_0^1 (1+x^2)(\eta')^2 dx > 0.$$

Здесь был использован тот факт, что $\hat{y}(x)$ — экстремаль и, значит, $\int_0^1 [(1+x^2)\hat{y}']'\eta dx = 0$.

Таким образом, допустимая экстремаль $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум в заданной простейшей вариационной задаче. ▲

Пример 2. Решить простейшую вариационную задачу, если

$$J(y) = \int_1^2 [6y^2 + x^2(y')^2 + 12x^3y]dx, \; y(1) = 1, \; y(2) = 8.$$

△ Уравнение Эйлера

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 6x^3$$

определяет семейство экстремалей

$$y = \frac{C_1}{x^3} + C_2x^2 + x^3,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Используя граничные условия, находим допустимую экстремаль $\hat{y}(x) = x^3$. Для всякой $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[1, 2]$

имеем

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) = \int_1^2 \{6(\hat{y}+\eta)^2 + x^2(\hat{y}'+\eta')^2 + 12x^3(\hat{y}+\eta) -$$

$$- 6\hat{y}^2 - x^2(\hat{y}')^2 - 12x^3\hat{y}\}dx = \int_1^2 [6\eta^2 + x^2(\eta')^2]dx +$$

$$+ \int_1^2 (12\hat{y} + 12x^3)\eta dx + 2\int_1^2 x^2(\hat{y})'\eta' dx.$$

Проинтегрируем по частям в последнем интеграле и воспользуемся тем, что $\eta(1) = \eta(2) = 0$. Тогда получаем

$$\Delta J(\hat{y}) = \int_1^2 [6\eta^2 + x^2(\eta')^2]dx + \int_1^2 [12\hat{y} + 12x^3 - \frac{d}{dx}(2x^2\hat{y}')]\eta dx.$$

Но выражение в квадратных скобках во втором интеграле

$$12\hat{y} + 12x^3 - \frac{d}{dx}(2x^2\hat{y}') = -2(x^2\hat{y}'' + 2x^2\hat{y}' - 6\hat{y} - 6x^3) \equiv 0$$

на $[1, 2]$, так как $\hat{y}(x)$ — решение уравнения Эйлера. Следовательно,

$$\Delta J(\hat{y}) = \int_1^2 [6\eta^2 + x^2(\eta')^2]dx > 0.$$

Это значит, что $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум. ▲

Решить простейшую вариационную задачу (1—90):

1. $J(y) = \int\limits_0^1 (y + y')^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

2. $J(y) = \int\limits_1^e \left[\frac{2y}{x} + yy' + x^2(y')^2\right] dx$, $y(1) = 1$, $y(e) = 0$.

3. $J(y) = \int\limits_1^3 \left[2y - yy' + x(y')^2\right] dx$, $y(1) = 1$, $y(3) = 4$.

4. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/4} \left[4y^2 + (y')^2 + 8y\right] dx$, $y(0) = -1$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

5. $J(y) = \int\limits_0^{1} \left[(y')^2 + y^2 + 2e^{2x}y\right] dx$, $y(0) = \dfrac{1}{3}$, $y(1) = \dfrac{1}{3}e^2$.

6. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \left[(y')^2 + 4y^2 + 2y\cos x\right] dx$, $y(0) = \dfrac{4}{5}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}$.

7. $J(y) = \int\limits_{-2}^{-1} \left[x^2(y')^2 + 12y^2\right] dx$, $y(-2) = \dfrac{1}{16}$, $y(-1) = 1$.

8. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[2y + yy' + x^2(y')^2\right] dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1 + \ln 2$.

9. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[xy' + y\right]^2 dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = \dfrac{1}{2}$.

10. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left[(y' + y)^2 + 2y\sin x\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$.

11. $J(y) = \int\limits_0^{1} \left[x^3 + \dfrac{1}{2}y^2 + 2(y')^2\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$.

12. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[x(y')^2 + \dfrac{y^2}{x} + \dfrac{2y\ln x}{x}\right] dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1 - \ln 2$.

13. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[\dfrac{3y^2}{x^3} + \dfrac{(y')^2}{x} + 8y\right] dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = 8\ln 2$.

14. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[x(y')^2 + \dfrac{y^2}{x} + 4y\right] dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = 2\ln 2$.

15. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[(y')^2 + \dfrac{6y^2}{x^2} - 32y\ln x\right] dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = 4(4\ln 2 + 3)$.

16. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^2(y')^2 + 2y^2 + 32x^2 y\ln x\right] dx$, $y(1) = -5$, $y(2) = 4(4\ln 2 - 5)$.

17. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x(y')^2 + \dfrac{4y^2}{x} - 18y\ln x\right] dx$, $y(1) = 2$, $y(2) = 2(3\ln 2 + 2)$.

18. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x(y')^2 + 2yy'\right] dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$.

19. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x(y')^2 + yy' + xy\right] dx$, $y(1) = \dfrac{1}{8}$, $y(2) = \dfrac{1}{2} - \ln 2$.

20. $J(y) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left[y - \dfrac{1}{2}(y')^2\right] \sin x dx$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\ln\sqrt{2}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

21. $J(y) = \int\limits_1^e \left[\dfrac{1}{2}x(y')^2 + \dfrac{2yy'}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}\right] dx$, $y(1) = 1$, $y(e) = 2$.

22. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[(1+x)e^x y + \dfrac{1}{2}e^x(y')^2\right] dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \dfrac{3}{2}$.

23. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[\dfrac{3y^2}{x^3} + x^2 + \dfrac{(y')^2}{x}\right] dx$, $y(1) = 2$, $y(2) = 8\dfrac{1}{2}$.

24. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x(y')^2 + \dfrac{y^2}{x}\right] dx$, $y(1) = 2$, $y(2) = 2\dfrac{1}{2}$.

25. $J(y) = \int\limits_1^4 \left[\sqrt{x}(y')^2 + \dfrac{y^2}{2x\sqrt{x}}\right] dx$, $y(1) = 2$, $y(4) = 4\dfrac{1}{2}$.

26. $J(y) = \int\limits_{1}^{4} \left[\frac{(y')^2}{\sqrt{x}} + \frac{y^2}{x^2\sqrt{x}}\right] dx$, $y(1) = 2$, $y(4) = 16\frac{1}{2}$.

27. $J(y) = \int\limits_{1}^{2} \left[\frac{1}{2}x(y')^2 + xyy' + \frac{1}{2}y^2\right] dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$.

28. $J(y) = \int\limits_{-2}^{-1} \left[2yy' - x^2(y')^2\right] dx$, $y(-2) = \frac{3}{2}$, $y(-1) = 2$.

29. $J(y) = \int\limits_{0}^{1} \left[xyy' - 2(y')^2\right] dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \operatorname{ch}\frac{1}{2}$.

30. $J(y) = \int\limits_{0}^{\pi/2} \left[(y')^2 + 2yy' + 4y^2\right] dx$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sh}\pi$.

31. $J(y) = \int\limits_{1/4}^{1/2} \left[\frac{(y')^2}{(x-1)^2} - \frac{2y^2}{x(x-1)^3}\right] dx$, $y\left(\frac{1}{4}\right) = 1$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

32. $J(y) = \int\limits_{1}^{2} \left[(y')^2 + \frac{2y^2}{x^2} + \frac{8y}{x^4}\right] dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = \frac{1}{4}$.

33. $J(y) = \int\limits_{0}^{1/2} \left[\frac{(y')^2}{x^2-1} - \frac{2y^2}{(x^2-1)^2}\right] dx$, $y(0) = 1$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

34. $J(y) = \int\limits_{-2}^{-1} \left[x^3(y')^2 + 3xy^2 - \frac{6y}{x}\right] dx$, $y(-2) = \frac{1}{4}$, $y(-1) = 1$.

35. $J(y) = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[(y')^2 - 6y\sin x\right] \cos^2 x dx$, $y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

36. $J(y) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left[(x^2-1)(y')^2 - 4x^3y' - 4y\right] dx,\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

37. $J(y) = \int\limits_{0}^{1} \left[e^x(y'-x)^2 + 2y\right] dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = \frac{1}{2}.$

38. $J(y) = \int\limits_{0}^{1} \left[(y')^2\sqrt{4-x^2} - 2y\right] dx,\ y(0) = 2,\ y(1) = \sqrt{3}.$

39. $J(y) = \int\limits_{-2}^{-1} \left[x^3(y')^2 + 3xy^2\right] dx,\ y(-2) = \frac{15}{8},\ y(-1) = 0.$

40. $J(y) = \int\limits_{1}^{2} \left[(y')^2 + \frac{2y^2}{x^2}\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = \frac{7}{2}.$

41. $J(y) = \int\limits_{0}^{\pi/4} \left[\frac{(y')^2}{\cos x} + \frac{y}{\cos^2 x}\right] dx,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$

42. $J(y) = \int\limits_{1}^{2} \left[(xy'+y)^2 + (1+x^2)y'\right] dx,\ y(1) = -\frac{1}{2},\ y(2) = 1.$

43. $J(y) = \int\limits_{0}^{\pi/4} \left[(y')^2\cos^2 x + x^2yy' + xy^2 - 2y'\cos^3 x\right] dx,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

44. $J(y) = \int\limits_{1}^{2} \left[\frac{(y')^2}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}yy' + \frac{y^2}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}y'\right] dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 5.$

45. $J(y) = \int\limits_{0}^{1} \left[(1+x^2)(y')^2 - 4xy' + yy'\sin^2 x + \frac{1}{2}y^2\sin 2x\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = \ln 2.$

46. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[(y')^2 + y^2 - 2xy\right] dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1 + e$.

47. $J(y) = \int\limits_0^2 \left[4(y')^2 + y^2 - 6e^x y'\right] dx$, $y(0) = 2$, $y(2) = e^{-1} + e^2$.

48. $J(y) = \int\limits_0^2 \left[4(y')^2 + y^2 + 4xy\right] dx$, $y(0) = 1$, $y(2) = e - 4$.

49. $J(y) = \int\limits_0^\pi \left[(y')^2 + 8y' \sin^2 x + 4y\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi^2$.

50. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[(y')^2 + y^2 + x^2 y'\right] dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1 + e^{-1}$.

51. $J(y) = \int\limits_0^\pi \left[(y')^2 + y^2 - 4y \sin x\right] dx$, $y(0) = 1$, $y(\pi) = e^\pi$.

52. $J(y) = \int\limits_0^\pi \left[(y')^2 + y^2 + 10y'(x + \sin^2 x)\right] dx$, $y(0) = 6$, $y(\pi) = 5 + e^{-\pi}$.

53. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[4xyy' - (y')^2 - 4y^2 + (12x^2 - 4)y\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

54. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[(y')^2 + 2yy' \sin x + \left(\cos x + \frac{20}{x^2} y^2 + 20x^4 y\right)\right] dx$, $y(1) = -1$, $y(2) = 0$.

55. $J(y) = \int\limits_1^4 \left[\frac{2yy'}{x} - \frac{3y^2}{x^2} - (y')^2 - \frac{y}{x}\right] dx$, $y(1) = y(4) = 4$.

56. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[(y')^2 + \frac{4y}{x} y' + \frac{4y^2}{x^2} - 8y\right] dx$, $y(1) = 2$, $y(2) = \frac{17}{4}$.

57. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[24x^3y - yy' - x^2(y')^2\right] dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = -7$.

58. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^2(y')^2 + yy' + 12xy\right] dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 5$.

59. $J(y) = \int\limits_1^4 \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) y^2 + 2yy' \ln x - 4(y')^2 - 10y\right] dx$, $y(1) = -1$, $y(4) = 0$.

60. $J(y) = \int\limits_0^2 \left[(y')^2 + xyy' + \frac{3}{4}y^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 6\right) y\right] dx$, $y(0) = 5$, $y(2) = e$.

61. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[12xy - \frac{12}{x}yy' - 3(y')^2\right] dx$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y(2) = 0$.

62. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[(y')^2 - 2yy' \cos x + (4 + \sin x)y^2 + 4(2x^2 - 3)y\right] dx$, $y(0) = 2$, $y(1) = e^2$.

63. $J(y) = \int\limits_0^2 e^{3x} \left[(y')^2 + 4y^2\right] dx$, $y(0) = e^{10} - 1$, $y(2) = 0$.

64. $J(y) = \int\limits_{1/2}^1 \left[\left(\frac{y'}{x}\right)^2 + \left(\frac{2y}{x^2}\right)^2\right] dx$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{16}$, $y(1) = 0$.

65. $J(y) = \int\limits_{-1}^1 e^x \left[(y')^2 + 6y^2\right] dx$, $y(-1) = 0$, $y(1) = e^7 - e^{-3}$.

66. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[(y')^2 + 6\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = \frac{31}{4}$.

67. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}(y')^2 + yy' \operatorname{tg} x + \left(2 + \frac{1}{2\cos^2 x}\right) y^2 + 3y \operatorname{ch} x\right] dx,\ y(0) = -1,\ y(1) = 2\operatorname{sh} 2 - \operatorname{ch} 1.$

68. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/4} \left[yy' \operatorname{arctg} x - (y')^2 + \frac{y^2}{2(1+x^2)} - 9y^2 + 16y \operatorname{sh} x\right] dx,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{sh}^3 \frac{\pi}{4} + \operatorname{sh}\frac{\pi}{4}.$

69. $J(y) = \int\limits_{1/4}^1 [6xy' - \sqrt{x}y^2 - x^2\sqrt{x}(y')^2]\, dx,\ y\left(\frac{1}{4}\right) = -1,\ y(1) = 1.$

70. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[\frac{4}{x}(y')^2 + \frac{5}{x^2}yy' - \frac{8\sqrt{x}}{x^3}y\right] dx,\ y(1) = -\frac{1}{2},\ y(2) = 0.$

71. $J(y) = \int\limits_1^3 \left[2\sqrt{x}(y')^2 + \frac{y^2}{x\sqrt{x}} - \frac{8y'}{x\sqrt{x}}\right] dx,\ y(1) = -2,\ y(3) = 2.$

72. $J(y) = \int\limits_1^4 [15\sqrt{x}y + 3x^2yy' - x^3(y')^2]\, dx,\ y(1) = 1,\ y(4) = -3.$

73. $J(y) = 1 - \int\limits_1^4 \left[x^{\frac{5}{2}}(y')^2 + x^{\frac{1}{2}}y^2\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(4) = -\frac{31}{16}.$

74. $J(y) = \int\limits_{1/3}^1 [4x^3(y')^2 - 5x^2yy' - 3y]\, dx,\ y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2},\ y(1) = \frac{1}{6}.$

75. $J(y) = \int\limits_{1/2}^2 [4xyy' - x^2(y')^2 + 4x^2y]\, dx,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = y(2) = \frac{1}{2}.$

76. $J(y) = \int\limits_{1/2}^1 [5x^4y - yy' + x^5(y')^2]\, dx,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},\ y(1) = 1.$

77. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[3x^2yy' - x^3(y')^2 + \dfrac{6y}{x}\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = \dfrac{1}{8}.$

78. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[2xy^2 + 2x^2yy' + x^2(y')^2 + 12x^2y\right] dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 5.$

79. $J(y) = \int\limits_1^3 \left[8xy - x^2(y')^2 - x^2yy' - (x+6)y^2\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(3) = -6.$

80. $J(y) = \int\limits_1^3 \left[x^2(y')^2 + x^2yy' + xy^2 + 4xy\right] dx,\ y(1) = y(3) = 4.$

81. $J(y) = \int\limits_2^4 \left[x^2yy' + 8x^2y - x^2(y')^2 + (x-2)y^2\right] dx,\ y(2) = 0,\ y(4) = -8.$

82. $J(y) = \int\limits_1^e \left[x^2(y')^2 + 6y^2 + 100yx^2 \ln x\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(e) = 3e^2.$

83. $J(y) = \int\limits_1^e \left[x^4(y')^2 + 18x^2y^2 + 90x^5y + 16x^5y'\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(e) = 5e^2.$

84. $J(y) = \int\limits_1^e \left[x^3(y')^2 + 8xy^2 + 72yx^3 \ln x\right] dx,\ y(1) = 1,\ y(e) = 3e^2.$

85. $J(y) = \int\limits_1^e \left[3x^5(y')^2 + 15x^3y^2 + 36x^4y - 14x^6y'\right] dx,\ y(1) = 1,\ y(e) = 2e^2.$

86. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[3x^4(y')^2 - 34x^3yy' + 3x^2y^2 - 84x^3y\right] dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 10.$

87. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^2(y')^2 - 10xyy' - 3y^2 - 4y\right] dx,\ y(1) = 4,\ y(2) = 7.$

88. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^3(y')^2 - 11x^2yy' - 3xy^2 - 10x^2y\right] dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = 10$.

89. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^2(y')^2 - 14xyy' - y^2 - 8xy\right] dx$, $y(1) = 2$, $y(2) = 6$.

90. $J(y) = \int\limits_1^4 \left[(y')^2 + \dfrac{3}{4x^2}y^2\right] dx$, $y(1) = 1$, $y(4) = 8$.

Найти значения вещественного параметра a, при которых на допустимой экстремали достигается минимум (91—93):

91. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[y - 2y' + a(y')^2\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

92. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[(y')^2 + ax(y')^2\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = \ln|1 + a|$.

93. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[x + x^2 + y^2 + a(y')^2\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Найти допустимые экстремали (94—101):

94. $J(y) = \int\limits_0^1 y^n(y')^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

95. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[y^2(y')^2 + 9y^2\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = -5$.

96. $J(y) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left[(y')^2 \sin x + 2y \cos x\right] dx$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

97. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[\left(\dfrac{y'}{y}\right)^2 - xy' - y\right] dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = e^{-1}$.

98. $J(y) = \int\limits_1^2 [\ln y' - 3yy' - xy']\, dx,\ y(1) = -\ln 2,\ y(2) = 0.$

99. $J(y) = \int\limits_0^{1/2} \left[y + xy' - \frac{1}{y}(y')^3\right] dx,\ y(0) = \frac{2}{3},\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}.$

100. $J(y) = \int\limits_1^2 [y'e^y + x^4(y')^3]\, dx,\ y(1) = 3,\ y(2) = 2.$

101. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[y' \sin y + \frac{1}{x^3}(y')^4\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 3.$

В задачах (102—105) показать, что допустимая экстремаль не дает экстремум функционала:

102. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left[(y')^2 - \frac{16}{9}y^2 + 2y \sin x\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

103. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left[(y')^2 - \frac{9}{4}y^2 + 18y\right] dx,\ y(0) = 4,\ y(\pi) = 0.$

104. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left[(y')^2 - \frac{25}{9}y^2 + 68e^x y\right] dx,\ y(0) = 9,\ y(\pi) = 9e^{\pi}.$

105. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left[(y')^2 - \frac{25}{16}y^2 + 50xy\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 16\pi.$

Показать, что простейшие вариационные задачи (106—107) не имеют смысла:

106. $J(y) = \int\limits_0^1 [x^2y' + 2xy]\, dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

107. $J(y) = \int\limits_1^2 \frac{1}{x^2} [xy' - y]\, dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 2.$

Ответы к задачам § 19

Примечание. В ответах $\hat{y}(x)$ обозначает допустимую экстремаль, абсолютный минимум обозначается абс. min, а абсолютный максимум обозначается абс. max.

1. $\hat{y}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} e}$, абс. min.

2. $\hat{y}(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x}$, абс. min.

3. $\hat{y}(x) = x + \dfrac{\ln x}{\ln 3}$, абс. min.

4. $\hat{y}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} - 1$, абс. min.

5. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{3} e^{2x}$, абс. min.

6. $\hat{y}(x) = e^{2x} - \dfrac{1}{5} \cos x$, абс. min.

7. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x^4}$, абс. min.

8. $\hat{y}(x) = \ln x - \dfrac{2}{x} + 2$, абс. min.

9. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x}$, абс. min.

10. $\hat{y}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} \pi} - \dfrac{1}{2} \sin x$, абс. min.

11. $\hat{y}(x) = \dfrac{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}}$, абс. min.

12. $\hat{y}(x) = \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) - \ln x$, абс. min.

13. $\hat{y}(x) = x^3 \ln x$, абс. min.

14. $\hat{y}(x) = x \ln x$, абс. min.

15. $\hat{y}(x) = x^2(4 \ln x + 3)$, абс. min.

16. $\hat{y}(x) = x^2(4 \ln x - 5)$, абс. min.

17. $\hat{y}(x) = x^2(3 \ln x + 2)$, абс. min.

18. $\hat{y}(x) = \ln x$, абс. min.

19. $\hat{y}(x) = \dfrac{x^2}{8} - \ln x$, абс. min.

20. $\hat{y}(x) = \ln \sin x$, абс. max.

21. $\hat{y}(x) = \ln x + 1$, абс. min.

22. $\hat{y}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2}$, абс. min.

23. $\hat{y}(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$, абс. min.

24. $\hat{y}(x) = x + \dfrac{1}{x}$, абс. min.

25. $\hat{y}(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, абс. min.

26. $\hat{y}(x) = x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, абс. min.

27. $\hat{y}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$, абс. min.

28. $\hat{y}(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, абс. max.

29. $\hat{y}(x) = \operatorname{ch} \dfrac{x}{2}$, абс. max.

30. $\hat{y}(x) = \operatorname{sh} 2x$, абс. min.

31. $\hat{y}(x) = 4x$, абс. min.

32. $\hat{y}(x) = \frac{3}{14}\left(x^2 - \frac{15}{x}\right) + \frac{4}{x^2}$, абс. min.

33. $\hat{y}(x) = x^2 + \frac{3x}{2} + 1$, абс. max.

34. $\hat{y}(x) = \frac{1}{x^2}$, абс. max.

35. $\hat{y}(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \sin x + 1$, абс. min.

36. $\hat{y}(x) = x^2$, абс. max.

37. $\hat{y}(x) = (1-x)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$, абс. min.

38. $\hat{y}(x) = \sqrt{4 - x^2}$, абс. min.

39. $\hat{y}(x) = \frac{1}{x^3} - x$, абс. max.

40. $\hat{y}(x) = x^2 - \frac{1}{x}$, абс. min.

41. $\hat{y}(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x + 1)$, абс. min.

42. $\hat{y}(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{x}$, абс. min.

43. $\hat{y}(x) = \sin x$, абс. min.

44. $\hat{y}(x) = x^2 + 1$, абс. min.

45. $\hat{y}(x) = \ln(1 + x^2)$, абс. min.

46. $\hat{y}(x) = x + e^x$, абс. min.

47. $\hat{y}(x) = e^{-\frac{x}{2}} + e^x$, абс. min.

48. $\hat{y}(x) = e^{\frac{x}{2}} - 2x$, абс. min.

49. $\hat{y}(x) = \sin 2x + 2x^2 - \pi x$, абс. min.

50. $\hat{y}(x) = x + e^{-x}$, абс. min.

51. $\hat{y}(x) = e^x + \sin x$, абс. min.

52. $\hat{y}(x) = e^{-x} + 5 + \sin 2x$, абс. min.

53. $\hat{y}(x) = x^2$, абс. max.

54. $\hat{y}(x) = x^6 - 2x^5$, абс. min.

55. $\hat{y}(x) = \frac{4}{x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}$, абс. max.

56. $\hat{y}(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, абс. min.

57. $\hat{y}(x) = -x^3 + \frac{2}{x}$, абс. max.

58. $\hat{y}(x) = 3x - \frac{2}{x}$, абс. min.

59. $\hat{y}(x) = x^2 - 2x^{\frac{3}{2}}$, абс. max.

60. $\hat{y}(x) = e^{\frac{x}{2}} + 4 - x^2$, абс. min.

61. $\hat{y}(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3$, абс. max.

62. $\hat{y}(x) = e^{2x} - x^2 + 1$, абс. min.

63. $\hat{y}(x) = e^{10-4x} - e^x$, абс. min.

64. $\hat{y}(x) = \frac{1}{x} - x^4$, абс. min.

65. $\hat{y}(x) = e^{2x+5} - e^{-3x}$, абс. min. **66.** $\hat{y}(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^2}$, абс. min.

67. $\hat{y}(x) = 2\operatorname{sh} 2x - \operatorname{ch} x$, абс. min. **68.** $\hat{y}(x) = 2\operatorname{sh} 3x + \operatorname{sh} x$, абс. max.

69. $\hat{y}(x) = 4\sqrt{x} - 3$, абс. max. **70.** $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$, абс. min.

71. $\hat{y}(x) = x - \dfrac{3}{x}$, абс. min. **72.** $\hat{y}(x) = -x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, абс. max.

73. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x^2} - \sqrt{x}$, абс. max. **74.** $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{6x}$, абс. min.

75. $\hat{y}(x) = \dfrac{5x}{4} - \dfrac{x^2}{2}$, абс. max. **76.** $\hat{y}(x) = \dfrac{x+1}{2}$, абс. min.

77. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$, абс. max. **78.** $\hat{y}(x) = x^2 + 1$, абс. min.

79. $\hat{y}(x) = x - x^2$, абс. max. **80.** $\hat{y}(x) = x + \dfrac{3}{x}$, абс. min.

81. $\hat{y}(x) = 2x - x^2$, абс. max. **82.** $\hat{y}(x) = (5\ln x - 2)x^2 \ln x$, абс. min.

83. $\hat{y}(x) = 5x^2(1 - x + x\ln x)$, абс. min.

84. $\hat{y}(x) = x^2(1 + 3\ln^2 x - \ln x)$, абс. min.

85. $\hat{y}(x) = x(2x - 1 + \ln x)$, абс. min.

86. $\hat{y}(x) = x^3 + x$, абс. min. **87.** $\hat{y}(x) = 3x + 1$, абс. min.

88. $\hat{y}(x) = 2x^2 + x$, абс. min. **89.** $\hat{y}(x) = x^2 + x$, абс. min.

90. $\hat{y}(x) = x\sqrt{x}$, абс. min. **91.** $\hat{y}(x) = x + \dfrac{x^2 - x}{4a}$, $a > 0$.

92. $\hat{y}(x) = \ln|1 + ax|$, $a \geqslant 0$. **93.** $\hat{y}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} \dfrac{x}{\sqrt{a}}}{\operatorname{sh} \dfrac{1}{\sqrt{a}}}$, $a \geqslant 0$.

94. $\hat{y}(x) = \dfrac{2}{n}\ln\left[1 + \left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right)x\right]$. **95.** $\hat{y}(x) = -\sqrt{9x^2 + 16x}$.

96. $\hat{y}(x) = x - \dfrac{\pi}{4}$. **97.** $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (e^2 - 1)x}}$.

98. $\hat{y}(x) = \ln\dfrac{x}{2}$. **99.** $\hat{y}(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$.

100. $\hat{y}(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$. **101.** $\hat{y}(x) = x^2 - 1$.

§ 20. Обобщения простейшей вариационной задачи

1. Задача со свободным концом и задача без ограничений. Рассматривается

$$J(y) = \int\limits_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx,$$

где функция $F(x, y, p)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в предыдущем параграфе. В отличие от предыдущего § 1 функция $y(x)$ должна удовлетворять лишь одному граничному условию $y(a) = A$.

Задачей со свободным концом ($x = b$) называется задача нахождения слабого экстремума $J(y)$ в классе непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, удовлетворяющих условию $y(a) = A$.

Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$ является решением задачи со свободным концом, то необходимо она удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и граничному условию вида

$$\left.\frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0.$$

Решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условию $y(a) = A$ и указанному условию при $x = b$, называется допустимой экстремалью задачи со свободным концом.

Задачей без ограничений называется задача нахождения слабого экстремума $J(y)$ в классе непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, не удовлетворяющих каким-либо граничным условиям при $x = a$ и $x = b$. Дважды непрерывно дифференцируемое решение $y(x)$ задачи без ограничений необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера и граничным условиям вида

$$\left.\frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial F\,[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0.$$

Пример 1. Решить задачу со свободным концом

$$J(y) = \int_1^2 \left[\frac{6x-12}{x} yy' - (y')^2 + 8xy'\right] dx, \ y(1) = 0.$$

Δ Уравнение Эйлера имеет вид

$$x^2 y'' - 6y = 4x^2.$$

Экстремали задаются формулой

$$y(x) = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x^3 - x^2.$$

Граничное условие при $x = 2$ находим из уравнения

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=2} = \left.\left[\frac{6x-12}{x} y - 2y' + 8x\right]\right|_{x=2} = -2y'(2) + 16 = 0.$$

Отсюда $y'(2) = 8$. Это условие вместе с условием $y(1) = 0$ определяют допустимую экстремаль $\hat{y}(x) = x^3 - x^2$.

Пусть $\eta(x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая на $[1, 2]$ функция, для которой $\eta(1) = 0$. Тогда

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y} + \eta) - J(\hat{y}) = \int_1^2 \left\{\frac{6x-12}{x}(\hat{y} + \eta)(\hat{y}' + \eta') - (\hat{y}' + \eta')^2 + \right.$$
$$\left. + 8x(\hat{y}' + \eta') - \frac{6x-12}{x}\hat{y}\hat{y}' + (\hat{y}')^2 - 8x\hat{y}'\right\} dx =$$
$$= \int_1^2 \left\{\frac{6x-12}{x}(\eta\hat{y}' + \hat{y}\eta' + \eta\eta') - 2\hat{y}'\eta' - (\eta')^2 + 8x\eta'\right\} dx.$$

Если проинтегрировать по частям слагаемые в этом интеграле, содержащие η', воспользоваться уравнением Эйлера для $\hat{y}(x)$ и условиями $\hat{y}'(2) = 8$, $\eta(1) = 0$, то получим

$$\Delta J(\hat{y}) = -\int_1^2 \left[(\eta')^2 + \frac{6}{x^2}\eta^2\right] dx < 0.$$

Значит, допустимая экстремаль $\hat{y}(x)$ в рассматриваемой задаче дает абсолютный максимум. ▲

Пример 2. Решить задачу без ограничений, если

$$J(y) = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 + 2ye^x]dx.$$

△ Уравнение Эйлера $y'' - y = e^x$ дает множество экстремалей задачи $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x + \frac{1}{2}xe^x$. Граничными условиями для $y(x)$ являются: $y'(0) = y'(1) = 0$. Определив C_1 и C_2 из этих граничных условий, находим допустимую экстремаль

$$\hat{y}(x) = \frac{\left(1 - 2e^2\right)e^x - e^{2-x}}{2\left(e^2 - 1\right)} + \frac{1}{2}xe^x.$$

Для всякой непрерывно дифференцируемой на $[0, 1]$ функции $\eta(x)$ имеем

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y} + \eta) - J(\hat{y}) = \int_0^1 [2\hat{y}'\eta' + (\eta')^2 + 2\hat{y}\eta + \eta^2 + 2e^x\eta]dx =$$

$$= 2\hat{y}'(x)\eta(x)\Big|_{x=0}^1 + \int_0^1 \eta[2\hat{y} + 2e^x - 2\hat{y}'']dx + \int_0^1 [(\eta')^2 + \eta^2] =$$

$$= \int_0^1 [(\eta')^2 + \eta^2]dx,$$

так как проинтегрированная часть обращается в нуль в силу граничных условий $\hat{y}'(0) = \hat{y}'(1) = 0$ и первый интеграл равен нулю в силу того, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера. Поскольку из полученного равенства следует $\Delta J(\hat{y}) > 0$ для всех рассматриваемых $\eta(x)$, то $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум. ▲

Решить задачу со свободным концом (1—10):

1. $J(y) = \int_0^2 \left[2xy + (y')^2\right] dx$, $y(0) = 0$.

2. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[2y + 6y' + (y')^2\right] dx,\ y(0) = 0.$

3. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^2(y')^2 + 6y^2 + 2x^3y\right] dx,\ y(1) = \dfrac{1}{6}.$

4. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[y + xy' + (y')^2\right] dx,\ y(0) = 0.$

5. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^2(y')^2 + 12y^2\right] dx,\ y(1) = 97.$

6. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[\dfrac{(y')^2}{x} + \dfrac{3y^2}{x^3}\right] dx,\ y(2) = \dfrac{19}{2}.$

7. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^3(y')^2 + 3xy^2\right] dx,\ y(2) = \dfrac{49}{24}.$

8. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^3(y')^2 - 8(x^2 - x)yy' + 4y^2 + 8x^2y'\right] dx,\ y(2) = -7.$

9. $J(y) = \int\limits_1^3 \left[8yy'\ln x - x(y')^2 + 6xy'\right] dx,\ y(3) = 15.$

10. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[\dfrac{1}{2}(y')^2 - \dfrac{3(x^2-1)}{x^2}yy' - \dfrac{8y'}{x}\right] dx,\ y(2) = 10.$

Решить задачу без ограничений (11—12):

11. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \left[4y^2 + (y')^2 + 2y\cos x\right] dx.$

12. $J(y) = \int\limits_1^e \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y\ln x}{x}\right] dx.$

Найти допустимые экстремали в задаче без ограничений (13—15):

13. $J(y) = \int\limits_1^2 [2y + yy' + x^2(y')^2]\, dx.$

14. $J(y) = \int\limits_1^2 [2y - yy' + x(y')^2]\, dx.$

15. $J(y) = \int\limits_0^1 [2yy' + (y')^2]\, dx.$

Ответы к задачам п. 1 § 20

1. $\hat{y} = \frac{x^3}{6} - 2x$, абс. min.

2. $\hat{y} = -3x$, абс. min.

3. $\hat{y} = \frac{1}{26x^3} - \frac{x^2}{26} + \frac{x^3}{6}$, абс. min.

4. $\hat{y} = -\frac{x}{2}$, абс. min.

5. $\hat{y} = x^3 + \frac{96}{x^4}$, абс. min.

6. $\hat{y} = x^3 + \frac{3}{x}$, абс. min.

7. $\hat{y} = x + \frac{1}{3x^3}$, абс. min.

8. $\hat{y} = 1 - 2x^2$, абс. min.

9. $\hat{y} = 2x^2 - x$, абс. max.

10. $\hat{y} = x^3 + x$, абс. min.

11. $\hat{y} = -\frac{1}{5}\left(\frac{2\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh}\pi} + \cos x\right)$, абс. min.

12. $\hat{y} = \frac{1}{1+e}\left(x - \frac{e}{x}\right) - \ln x$, абс. min.

13. $\hat{y} = \ln\frac{x}{4} - \frac{\ln 4 + 4}{x} - 6.$

14. $\hat{y} = x + 1 + \frac{\ln x + 2}{\ln 2}.$

15. $\hat{y} = 0.$

2. Функционалы, зависящие от двух функций. Рассматривается

задача нахождения слабого экстремума

$$J(y_1, y_2) = \int_a^b F[x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)]dx,$$

где F — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, в классе непрерывно дифференцируемых пар функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ на $[a, b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y_1(a) = A_1,\ y_2(a) = A_2,\ y_1(b) = B_1,\ y_2(b) = B_2,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — заданные числа.

Если дважды непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ пара функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ дает экстремум рассматриваемому функционалу, то необходимо $y_1(x)$, $y_2(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_2'} = 0.$$

Всякая пара функций, удовлетворяющая системе уравнений Эйлера, называется экстремалью. Экстремаль, удовлетворяющая заданным граничным условиям, называется допустимой экстремалью.

Пример. Исследовать на экстремум функционал, если

$$J(y_1, y_2) = \int_1^2 [6y_1^2 + x^2(y_1')^2 + (y_2')^2]dx,\ y_1(1) = y_2(1) = 1,\ y_1(2) = 4,\ y_2(2) = 2.$$

Δ Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} 12y_1 - [2x^2 y_1']' = 0, \\ y_2'' = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим экстремали $y_1(x) = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x^3}$, $y_2(x) = C_1x + C_2$. Подставляя $y_1(x)$, $y_2(x)$ в заданные граничные условия, получаем допустимую экстремаль $\hat{y}_1(x) = x^2$, $\hat{y}_2(x) = x$.

Покажем, что на допустимой экстремали заданный функционал имеет абсолютный минимум. Пусть (см. § 1) $\eta_1(x) \in \mathring{C}^1[1, 2]$, $\eta_2(x) \in \mathring{C}^1[1, 2]$.

Тогда

$$\Delta J(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = J(\hat{y}_1 + \eta_1, \hat{y}_2 + \eta_2) - J(\hat{y}_1, \hat{y}_2) =$$
$$= \int_1^2 [6(2\hat{y}_1\eta_1 + \eta_1^2) + x^2(2\hat{y}_1'\eta_1' + (\eta_1')^2) + (2\hat{y}_2'\eta_2' + (\eta_2')^2)]dx.$$

Интегрируя по частям слагаемые, содержащие η_1' и η_2', и учитывая, что $\eta_1(1) = \eta_1(2) = \eta_2(1) = \eta_2(2) = 0$, отсюда находим

$$\Delta J(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = \int_1^2 [12\hat{y}_1 - (2x^2\hat{y}_1')']\eta_1 dx - 2\int_1^2 \hat{y}_2''\eta_2 dx +$$
$$+ \int_1^2 [6\eta_1^2 + x^2(\eta_1')^2 + (\eta_2')^2]dx.$$

Первые два интеграла равны нулю, так как $\hat{y}_1(x)$ и $\hat{y}_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера. Поскольку последний интеграл неотрицательный, то $\Delta J(\hat{y}_1, \hat{y}_2) > 0$ при всех рассматриваемых $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$. Значит, пара функций $\hat{y}_1(x)$, $\hat{y}_2(x)$ дает абсолютный минимум функционала. ▲

Исследовать на экстремум функционал, если:

1. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2]dx$, $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(1) = y_2(1) = 1$.

2. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 [y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2]dx$, $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_1(1) = 1$, $y_2(1) = e$.

3. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 [y_1^2 + y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2]dx$, $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y_1(1) = y_2(1) = e$.

4. $J(y_1, y_2) = \int_1^2 [12y_1^2 + y_2^2 + x^2(y_1')^2 + (y_2')^2]dx$, $y_1(1) = 1$, $y_2(1) = e$, $y_1(2) = 8$, $y_2(2) = e^2$.

Найти допустимые экстремали (5—11):

5. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1y_2]dx$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$, $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$, $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{\frac{\pi}{2}}$.

6. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{1} [2y_1 + y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2]dx$, $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_1(1) = \frac{1}{2}$, $y_2(1) = e^{-1}$.

7. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{\pi/2} [2y_1y_2 + (y_1')^2 + (y_2')^2]dx$, $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

8. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{1} [y_1y_2 + y_1'y_2']dx$, $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y_1(1) = y_2(1) = e$.

9. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{\pi/2} [y_1'y_2' - y_1y_2]dx$, $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

10. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{1} [2y_1^2 + 2y_1y_2 + (y_1')^2 - (y_2')^2]dx$, $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(1) = 2\operatorname{sh} e$, $y_2(1) = -2\operatorname{sh} e$.

11. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{\pi/2} [2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2]dx$, $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

12. Показать, что задача на экстремум при

$$J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{1} [y_1y_2' + y_2y_1']dx,\ y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(1) = y_2(1) = 1$$

не имеет смысла.

Ответы к задачам п. 2 § 20

1. $\hat{y}_1(x) = \hat{y}_2(x) = x$, абс. min.

2. $\hat{y}_1(x) = x$, $\hat{y}_2(x) = e^x$, абс. min.

3. $\hat{y}_1(x) = \hat{y}_2(x) = e^x$, абс. min.

4. $\hat{y}_1(x) = x^3$, $\hat{y}_2(x) = e^x$, абс. min.

5. $\hat{y}_1(x) = e^x$, $\hat{y}_2(x) = -e^{-x}$.

6. $\hat{y}_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $\hat{y}_2(x) = e^{-x}$.

7. $\hat{y}_1(x) = \hat{y}_2(x) = e^x$.

8. $\hat{y}_1(x) = \hat{y}_2(x) = e^x$.

9. $\hat{y}_1(x) = \hat{y}_2(x) = \sin x$.

10. $\hat{y}_1(x) = 2\operatorname{sh} x$, $\hat{y}_2(x) = -2\operatorname{sh} x$.

11. $\hat{y}_1(x) = x\cos x + \sin x$, $\hat{y}_2(x) = x\cos x - \sin x$.

3. Функционалы, содержащие производные второго порядка. Рассматривается задача нахождения слабого экстремума

$$J(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x), y''(x)]dx,$$

где F — заданная трижды дифференцируемая функция своих аргументов, в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$ на $[a, b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A_1,\ y'(a) = A_2,\ y(b) = B_1,\ y'(b) = B_2,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — заданные числа.

Если четырежды непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция $y(x)$ дает экстремум рассматриваемому функционалу, то $y(x)$ необходимо на $[a, b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0.$$

Всякое решение этого уравнения называется экстремалью. Экстремаль, удовлетворяющая заданным граничным условиям, называется допустимой экстремалью.

Пример. Исследовать на экстремум функционал, если

$$J(y) = \int_0^1 [(y')^2 + (y'')^2]dx,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y(1) = e - 2,\ y'(1) = e - 1.$$

Δ Уравнение Эйлера-Пуассона имеет вид

$$-2y'' + 2y^{IV} = 0.$$

Экстремали задаются формулой

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x + C_4.$$

Используя граничные условия, получаем допустимую экстремаль

$$\hat{y}(x) = e^x - x - 1.$$

Покажем, что $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум функционала.

Для всякой дважды непрерывно дифференцируемой на $[0,1]$ функции $\eta(x)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$\eta(0) = \eta'(0) = \eta(1) = \eta'(1) = 0,$$

имеем

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y} + \eta) - J(\hat{y}) = \int_0^1 [2\hat{y}'\eta' + (\eta')^2 + 2\hat{y}''\eta'' + (\eta'')^2]dx.$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое один раз, а третье слагаемое дважды. В силу граничных условий для $\eta(x)$ проинтегрированная часть обратится в нуль и получаем

$$\Delta J(\hat{y}) = \int_0^1 [-2\hat{y}'' + 2\hat{y}^{IV}]\eta dx + \int_0^1 [(\eta')^2 + (\eta'')^2]dx.$$

Так как $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона, то первый интеграл равен нулю. Поэтому

$$\Delta J(\hat{y}) = \int_0^1 [(\eta')^2 + (\eta'')^2]dx > 0.$$

Значит, $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум функционала. ▲

Исследовать функционал на экстремум, если:

1. $J(y)=\int\limits_0^1[-2xy+(y'')^2]dx$, $y(0)=y'(0)=0$, $y(1)=\frac{1}{5!}$, $y'(1)=\frac{1}{12}$.

2. $J(y)=\int\limits_0^1[2e^xy-(y'')^2]dx$, $y(0)=y'(0)=1$, $y(1)=e$, $y'(1)=2e$.

3. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2}[2y\sin x+(y'')^2]dx$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$.

4. $J(y)=\int\limits_0^1[4(y')^2+(y'')^2]dx$, $y(0)=y'(0)=0$, $y(1)=\frac{1}{4}(e^2-3)$, $y'(1)=$ $=\frac{1}{2}(e^2-1)$.

5. $J(y)=\int\limits_0^1[y^2+2(y')^2+(y'')^2]dx$, $y(0)=y'(0)=0$, $y(1)=2\operatorname{sh}e$, $y'(1)=$ $=2e$.

6. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2\sqrt{2}}[16y^2+(y'')^2]dx$, $y(0)=y'(0)=y\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)=$ $=-2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}$.

Найти допустимые экстремали (7—9):

7. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2}[(y'')^2-(y')^2]dx$, $y(0)=y'(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\frac{\pi}{2}$.

8. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/4}[(y'')^2-4(y')^2]dx$, $y(0)=y'(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-2$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

9. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/2} [y^2 - 2(y')^2 + (y'')^2]dx$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

10. Показать, что задача на экстремум при

$$J(y) = \int\limits_0^1 [xy'' + 2yy' + y']dx,\ \ y(0) = y'(0) = 0,\ \ y(1) = y'(1) = 1,$$

не имеет смысла.

Ответы к задачам п. 3 § 20

1. $\hat{y}(x) = \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{5}x^5 + x^3 - x^2\right)$, абс. min.
2. $\hat{y}(x) = e^x + e\left(x^3 - x^2\right)$, абс. max.
3. $\hat{y}(x) = -\sin x + x^3 - \frac{\pi x^2}{2}$, абс. min.
4. $\hat{y}(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2x - 1\right)$, абс. min.
5. $\hat{y}(x) = 2x \cdot \operatorname{sh} x$, абс. min.
6. $\hat{y}(x) = 2\operatorname{sh}\left(x\sqrt{2}\right) \cdot \cos\left(x\sqrt{2}\right)$, абс. min.
7. $\hat{y}(x) = x - \sin x + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)(1 - \cos x)$.
8. $\hat{y}(x) = \cos 2x - \sin 2x + 2x - 1$.
9. $\hat{y}(x) = x \sin x$.

§ 21. Изопериметрическая задача

Изопериметрической задачей называется задача исследования слабого экстремума функционала

$$J(y) = \int\limits_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx$$

в классе непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$ на $[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$ и условиям связи вида

$$K_j(y) = \int\limits_a^b G_j[x, y(x), y'(x)]dx = l_j, \; j = \overline{1,n},$$

где A, B, l_j, $j = \overline{1,n}$ — заданные числа. Здесь F и G_j — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $j = \overline{1,n}$.

Пусть задано лишь одно условие связи

$$K(y) = \int\limits_a^b G[x, y(x), y'(x)]dx = l.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$L(x, y, y', \lambda) = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y'),$$

называемую лагранжианом, где параметр $\lambda \in R$ называется неопределенным множителем Лагранжа.

Если дважды непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция $y(x)$ является решением изопериметрической задачи и при этом первая вариация $\delta K[y(x), \eta(x)] \not\equiv 0$ для всех $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$, то $y(x)$ необходимо на $[a,b]$ удовлетворяет при некотором значении λ уравнению Эйлера вида

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0.$$

Решения этого уравнения называются экстремалями. Экстремали, удовлетворяющие граничным условиям и условию связи, называются допустимыми.

Пример. Решить изопериметрическую задачу, если

$$J(y) = \int\limits_0^\pi (y')^2 dx, \; y(0) = 1, \; y(\pi) = -1, \; \int\limits_0^\pi y \cos x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Δ Уравнение Эйлера для лагранжиана $L = (y')^2 + \lambda y \cos x$ имеет вид

$$2y'' = \lambda \cos x.$$

Экстремали задаются формулой $y(x) = C_1x + C_2 - \dfrac{\lambda}{2}\cos x$. Используя граничные условия и условия связи, получаем допустимую экстремаль $\hat{y}(x) = \cos x$. Покажем, что на ней изопериметрическая задача имеет абсолютный минимум.

Возьмем любую $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[0, \pi]$, для которой $\int\limits_0^\pi \eta\cos x dx = 0$. Тогда на $\hat{y}(x) + \eta(x)$ определен функционал $J(y)$ и можно рассмотреть

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y} + \eta) - J(\hat{y}) = \int\limits_0^\pi \left[2\hat{y}'\eta' + (\eta')^2\right] dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое и учитывая, что $\eta(0) = \eta(\pi) = 0$, получаем

$$\Delta J(\hat{y}) = -2\int\limits_0^\pi \hat{y}''\eta dx + \int\limits_0^\pi (\eta')^2 dx.$$

В силу уравнения Эйлера и условия связи для $\eta(x)$

$$\int\limits_0^\pi \hat{y}''\eta dx = \lambda\int\limits_0^\pi \eta\cos x dx = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta J(\hat{y}) = \int\limits_0^\pi (\eta')^2 dx > 0$$

и, значит, $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум. ▲

Решить изопериметрическую задачу (1—10):

1. $J(y) = \int\limits_0^\pi (y')^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi$, $\int\limits_0^\pi y\sin x dx = 0$.

2. $J(y) = \int\limits_0^1 (y')^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = e - 3$, $\int\limits_0^1 ye^x dx = 0$.

3. $J(y) = \int\limits_0^1 (y')^2 dx$, $y(0) = 2e + 1$, $y(1) = 2$, $\int\limits_0^1 e^{-x}y dx = e$.

4. $J(y) = \int\limits_0^1 (y')^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$, $\int\limits_0^1 xy dx = 1$.

5. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[y^2 + (y')^2\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = -1$, $\int\limits_0^1 ye^{-x} dx = \dfrac{3e^{-1} - e}{4}$.

6. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[y^2 + (y')^2\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 4e$, $\int\limits_0^1 ye^x dx = 1 + e^2$.

7. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[2xy + (y')^2\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 3$, $\int\limits_0^1 xy dx = 1$.

8. $J(y) = \int\limits_1^2 x(y')^2 dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = 12$, $\int\limits_1^2 xy dx = 9$.

9. $J(y) = \int\limits_0^\pi \left[2y + 3y' + (y')^2\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi^2$, $\int\limits_0^\pi y \sin x dx = \pi^2 - 1$.

10. $J(y) = \int\limits_0^\pi \left[(y')^2 + y^2 + 2y\cos x\right] dx$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = -2$, $\int\limits_0^\pi y\cos x dx =$
$= \pi$.

Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи (11—14):

11. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[2yy' + (y')^2\right] dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $\int\limits_0^1 [4xy' + yy'] dx = 4$.

12. $J(y) = \int\limits_0^1 [yy' + 4xy'] dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $\int\limits_0^1 \left[2yy' + (y')^2\right] dx = 4$.

13. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[yy' + 2(y')^2\right] dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $\int\limits_0^1 [yy' - 8xy'] dx = 8$.

14. $J(y) = \int\limits_0^1 [yy' - 8xy']dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $\int\limits_0^1 \left[yy' + 2(y')^2\right] dx = 8$.

15. Найти минимум $J(y) = \int\limits_0^{\pi} (y')^2 dx$, если $y(0) = y(\pi) = 0$, $\int\limits_0^{\pi} y^2 dx = 1$.

16. Найти минимум $J(y) = \int\limits_0^1 \left[y^2 + (y')^2\right] dx$, если $y(0) = y(1) = 0$, $\int\limits_0^1 y^2 dx = 1$.

Ответы к задачам § 21

1. $\hat{y}(x) = x - \dfrac{\pi^2}{8}\sin x$, абс. min.

2. $\hat{y}(x) = \dfrac{2\left(e^x - 1\right)}{1 - e} + (e-1)x$, абс. min.

3. $\hat{y}(x) = 2e^{1-x} - x + 1$, абс. min.

4. $\hat{y}(x) = \dfrac{9x - 5x^3}{2}$, абс. min.

5. $\hat{y}(x) = -xe^{1-x}$, абс. min.

6. $\hat{y}(x) = 4xe^x$, абс. min.

7. $\hat{y}(x) = 3x$, абс. min.

8. $\hat{y}(x) = 4\left(x^2 - 1\right)$, абс. min.

9. $\hat{y}(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sin x$, абс. min.

10. $\hat{y}(x) = 2\cos x$, абс. min.

11. $\hat{y}(x) = 6\left(x^2 - x\right)$.

12. $\hat{y}(x) = \pm 2\sqrt{3}\left(x - x^2\right)$.

13. $\hat{y}(x) = 6\left(x - x^2\right)$.

14. $\hat{y}(x) = \pm 2\sqrt{3}\left(x^2 - x\right)$.

15. -1.

16. $1 + \pi^2$.

§ 22. Достаточные условия строгого слабого локального экстремума в простейшей вариационной задаче

Рассмотрим простейшую вариационную задачу:

$$J(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx, \ y(a) = A, \ y(b) = B,$$

где функция F является трижды непрерывно дифференцируемой при всех $x \in [a, b]$ и всех $(y, p) \in R^2(y, p)$. Если $\hat{y}(x)$ — допустимая экстремаль (см. § 1) этой задачи, то положим

$$P(x) = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{y=\hat{y}(x)}, \ Q(x) = \left.\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right]\right|_{y=\hat{y}(x)}$$

Говорят, что выполнено усиленное условие Лежандра, если $P(x) \not\equiv 0$ для всех $x \in [a, b]$.

На $[a, b]$ рассмотрим задачу для уравнения Якоби:

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du(x)}{dx}\right] - Q(x)u(x) = 0, \ u(a) = 0.$$

Если каждое нетривиальное решение $u(x)$ этой задачи не имеет нулей на $(a, b]$, то говорят, что выполнено усиленное условие Якоби.

Теорема. Если: 1) $\hat{y}(x)$ — допустимая экстремаль, 2) выполнено усиленное условие Лежандра, 3) выполнено усиленное условие Якоби, то при $P(x) > 0$ на $[a, b]$ $\hat{y}(x)$ дает строгий слабый локальный минимум $J(y)$, а при $P(x) < 0$ на $[a, b]$ $\hat{y}(x)$ дает строгий слабый локальный максимум $J(y)$.

Пример. Исследовать на слабый экстремум, если

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} \left[y^2 - (y')^2\right] dx, \ y(0) = 0, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Δ Для нашего примера уравнение Эйлера

$$2y - \frac{d}{dx}[-2y'] = y'' + y = 0$$

дает экстремали $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Граничные условия выделяют допустимую экстремаль $\hat{y}(x) = \sin x$.

Усиленное условие Лежандра выполнено, поскольку $P = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = -2 < < 0$. Уравнение Якоби имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left[-2\frac{du}{dx}\right] - 2u = 0.$$

Нетривиальные решения этого уравнения, удовлетворяющие условию $u(0) = 0$, имеют вид $u(x) = C \sin x$ и не обращаются в нуль при всех $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, выполнено усиленное условие Якоби. Значит, $\hat{y}(x) = \sin x$ дает строгий слабый локальный максимум. ▲

Исследовать на экстремум (1—9):

1. $J(y) = \displaystyle\int_0^{\pi} (y')^3 dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = a\pi$, $a \neq 0$.

2. $J(y) = \displaystyle\int_0^1 \left[(y')^3 + 3(y')^2 + y'\right] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

3. $J(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(y')^3}$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

4. $J(y) = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^4 dx}{(y')^3}$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y(2) = 2$.

5. $J(y) = \displaystyle\int_1^2 \frac{(y')^3 dx}{x^2}$, $y(1) = 1$, $y(2) = 4$.

6. $J(y) = \displaystyle\int_1^2 x^2 (y')^3 dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$.

7. $J(y) = \int\limits_1^2 y^3(y')^3 dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 2\sqrt{2}.$

8. $J(y) = \int\limits_0^1 \frac{(y')^3}{y^3} dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = e.$

9. $J(y) = \int\limits_1^2 e^{-2x}\left[(y')^2 - y^2\right] dx,\ y(1) = e,\ y(2) = e^2.$

Ответы к задачам § 22

1. $\hat{y}(x) = ax$ дает строгий min при $a > 0$ и строгий max при $a < 0$.

2. $\hat{y}(x) = x$ дает строгий min.

3. $\hat{y}(x) = x$ дает строгий min.

4. $\hat{y}(x) = \frac{1}{2}x^2$ дает строгий min.

5. $\hat{y}(x) = x^2$ дает строгий min.

6. $\hat{y}(x) = \ln x$ дает строгий min.

7. $\hat{y}(x) = 2\sqrt{x}$ дает строгий min.

8. $\hat{y}(x) = e^x$ дает строгий min.

9. $\hat{y}(x) = e^x$ дает строгий min.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1984.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
3. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс экстремальных задач. — М.: Издательство МГУ, 1989.
4. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. — М.: Физматгиз, 1958, т. 1; 1959, т. 2.
5. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. — М.: Наука, 1980.
6. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Высшая школа, 1978.
7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. — М.: Высшая школа, 1981, т. 1, 2.
8. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
10. Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.
11. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин Н. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1982.
12. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.
13. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988.
14. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1992.