21 февраля

Теорвер. Лекция №3

$\omega \in \cup A_k \triangle \cup B_k$

$\omega \in \cup A_k \quad \omega \notin B_k$

$\exists l \quad \omega \in A_l \quad \omega \notin B_l$

$\omega \notin A_l \overline{B_l}$

$\Downarrow$

$\omega \in A_l \triangle B_l$

$\rho(A,B) = P(A \triangle B)$

1) $\rho(A,A) = 0$

2) $\rho(A,B) = \rho(B,A)$

3) $\forall A, B, C \subset \mathcal{F}$

$$\rho(A,B) \leq \rho(A,C) + \rho(B,C)$$

$$P(A \triangle B) = P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) =$$
$$= P(A\overline{B}(C+\overline{C})) + P(\overline{A}B(C+\overline{C})) =$$
$$= P(A\overline{B}C) + P(A\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}BC) + P(\overline{A}B\overline{C}) \leq$$
$$\leq P(\overline{B}C) + \underbrace{P(A\overline{C}) + P(\overline{A}C)} + P(B\overline{C}) =$$
$$= \rho(A,C) + \rho(C,B)$$

полуметрика

$\tilde{A} = \{B \in \mathcal{F} \ \rho(A,B) = 0\}$

$\rho(\tilde{A}, \tilde{B}) = \rho(A,B)$ — метрика

4) $\forall A, B, C, D \subset \mathcal{F}$

$$\rho(A,B,C,D) \leq \rho(A,C) + \rho(B,D)$$

$$\rho(A,B,C,D) = P(AB \triangle CD) = P(AB\overline{CD} + \overline{AB}CD) =$$
$$= P(AB\overline{CD}) + P(\overline{AB}CD) \leq$$

Де Морган $\rightarrow$ $\overline{C} + \overline{D}$ $\quad$ $\overline{A} + \overline{B}$

$\leq P(AB\overline{C}) + P(AB\overline{D}) + P(\overline{A}CD) + P(\overline{B}CD) \leq$

$\leq \underbrace{P(A\overline{C}) + P(B\overline{D}) + P(\overline{A}C)}_{} + P(\overline{B}D) =$

$= \rho(A, C) + \rho(B, D)$

5) $|P(A) - P(B)| \leq \rho(A, B)$

$A = AB + A\overline{B}$

$B = AB + \overline{A}B$

$P(A) - P(B) = P(A\overline{B}) - P(\overline{A}B) \leq \rho(A, B)$

$P(B) - P(A) \leq P(\overline{A}B) - P(A\overline{B}) \leq \rho(A, B)$

6) $\rho(A, B) = \rho(\overline{A}, \overline{B})$ - из св-в симм. разности

$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ $\quad \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$

↖ алгебра

$\mathcal{D} = \{d \subset \mathcal{F} : \exists \{a_n\} \in \mathcal{A} : \rho(a_n, d) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\}$

↖ замыкание алгебры

Т. о продолжении алгебры

$\mathcal{D}$ - σ-алгебра

1) $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ (для самой себя a_n - апроксим. п-ть)

$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}$

$d \in \mathcal{D} \Rightarrow \rho(a_n, d) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \overset{\text{св-во 6}}{\Rightarrow} \rho(\overline{a_n}, \overline{d}) \to 0$

$\Rightarrow \overline{d} \in \mathcal{D}$

Хотим д-ть:

$\overline{a_n} \in \mathcal{A}$ из св-в алгебры

$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D} \quad D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} d_n \in \mathcal{D}$

$D_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} d_k$

$D_1 \subset D_2 \subset \ldots$

$\cup D_n = D$ по построению

$\cancel{P(D_n) \to P(D)}$ Из непрерывности снизу

$$\forall d_n \ \ \rho(\tilde{a}_n(k), d_n) \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$\tilde{a}_n = \tilde{a}_n(k)$$ лучше бы написать $\tilde{a}_{k(n)}$

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \subset \mathcal{A}$$ — докажем, что это апроксимирующая посл-ть для D

$$\rho(D, A_n) \le \rho(D, D_n) + \rho(D_n, A_n)$$

$$\rho(D, D_n) = P(D\overline{D_n} + \underbrace{\overline{D} D_n}_{=\varnothing}) = 1 - P(D_n + \overline{D}) = P(D) - P(D_n) \to 0$$

$$\rho(D_n, A_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} d_k \,\triangle\, \bigcup_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\right) \le P\left(\bigcup_{k=1}^{n} d_k \triangle \tilde{a}_k\right) \le \sum_{i=1}^{n} \rho(d_k, \tilde{a}_k) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

▲

Т. об апроксимации

$\forall A \subset \sigma_{min}(\mathcal{A}) \ \ \exists \{a_n\} \in \mathcal{A} : \rho(a_n, A) \to 0$

$P(a_n) \to P(A)$ следует из св-ва 5

входит в $\mathcal{D}$

=> частный случай

(похоже на т. каратеодори)

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — алгебры $\subset \mathcal{F}$

$\forall a \in \mathcal{A} \ \ \forall b \in \mathcal{B} \quad P(a, b) = P(a)P(b)$

Т. о продолжении свойства независимости с алгебры на б-алгебру

$\forall A \in \sigma_{min}(\mathcal{A}) \ \ \forall B \in \sigma_{min}(\mathcal{B})$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$\triangle$

$\exists \{a_n\} \in \mathcal{A} : \rho(a_n, A) \to 0$

$\exists \{b_n\} \in \mathcal{B} : \rho(b_n, B) \to 0$

$|P(AB) - P(A) \cdot P(B)| \leq$

$- P(a_n b_n) + P(a_n) P(b_n)$

одно и тоже ввиду независимости алгебр

$$\leq |P(AB) - P(a_n b_n)| + |P(A)P(B) - P(a_n)P(b_n)| \leq$$

$\nearrow P(A)$ $\nearrow P(B)$

$$\leq \rho(AB, a_n b_n) \leq \rho(A, a_n) + \rho(B, b_n) \to 0$$

$\blacktriangle$

$\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n \quad \forall a_j \in \mathcal{A}_j \quad j = \overline{1,n}$

$P(a_1 a_2 \ldots a_n) = P(a_1) \cdot \ldots \cdot P(a_n)$ — опр независимых алгебр

<u>УТВ</u> $\forall A_j \subset \sigma_{min}(\mathcal{A}_j) \quad j = \overline{1,n}$

$$P(A_1 \ldots A_n) = \prod_{j=1}^{n} P(A_j)$$

$|P(A_1 \ldots A_n) - P(A_1) \ldots P(A_n)| \leq$

$- P(a_k^1 \ldots a_k^n) + P(a_k^1) \cdot \ldots \cdot P(a_k^n)$

$\uparrow$ члены апр. посл-ти

$\leq |P(A_1 \ldots A_n) - P(a_k^1 \ldots a_k^n)| + | \ldots | \leq$

св-во 5

$\leq \rho(A_1 \ldots A_n, a_k^1 \ldots a_k^n) \leq \rho(A, a_k^1) +$ св-во 4

$+ \rho(A_2 \ldots A_n, a_k^2 \ldots a_k^n)$ а дальше по индукции

Нет нужды говорить о независимости в совокупности т.к. всегда можем взять Ω

Факт

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – независимые алгебры

$\mathbb{C} = \sigma_{min}(\mathcal{A}) \cap \sigma_{min}(\mathcal{B})$

$\forall c \in \mathbb{C} \quad P(c) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Δ

$\rho(a_n, c) \to 0$ (т.к. c лежит в $\sigma_{min}(\mathcal{A})$)

$\rho(b_n, c) \to 0$

$$|P(c) - P^2(c)| = |P(\overset{c\cdot c = c}{c \cdot c}) - P^2(c)| \leq$$

$$+P(a_n b_n) - P(a_n)\cdot P(b_n)$$

$$\leq \underbrace{|P(c\cdot c) - P(a_n b_n)|}_{\text{св-во } 4} + |\ldots| \leq$$

$$\leq \rho(c, a_n) + \rho(c, b_n)$$

$\blacktriangle$

$\sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots \qquad \mathcal{X} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ хвостовая σ-алгебра

$\mathcal{X} \overset{\forall N}{=} \bigcap_{k=N}^{\infty} \sigma_k$

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}\{\{A_k\}_{k=n}^{\infty}\}$

$\sigma_n = \sigma_{min}(\mathcal{A}_n)$

$x \in \mathcal{X} \quad \forall N \; x \in \sigma_{min}(\mathcal{A}_N) = \sigma_{min}(\mathcal{A}\{A_k\}_{k=N}^{\infty})$

Элемент $\mathcal{X}$ определяется только м-вами, находящимися в конце последовательности

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k \geq n} A_k}_{B_n} = \bigcap_{n=N}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \forall N$$

$\mathcal{X}_0$ — остаточная σ-алгебра

$\mathcal{X}$, построенная на

$\mathcal{X}_0$ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимы в ~~совокупн~~ совокупности

Т. Закон «0-1» Колмогорова

$\forall x \in \mathcal{X}_0 \quad P(x) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$