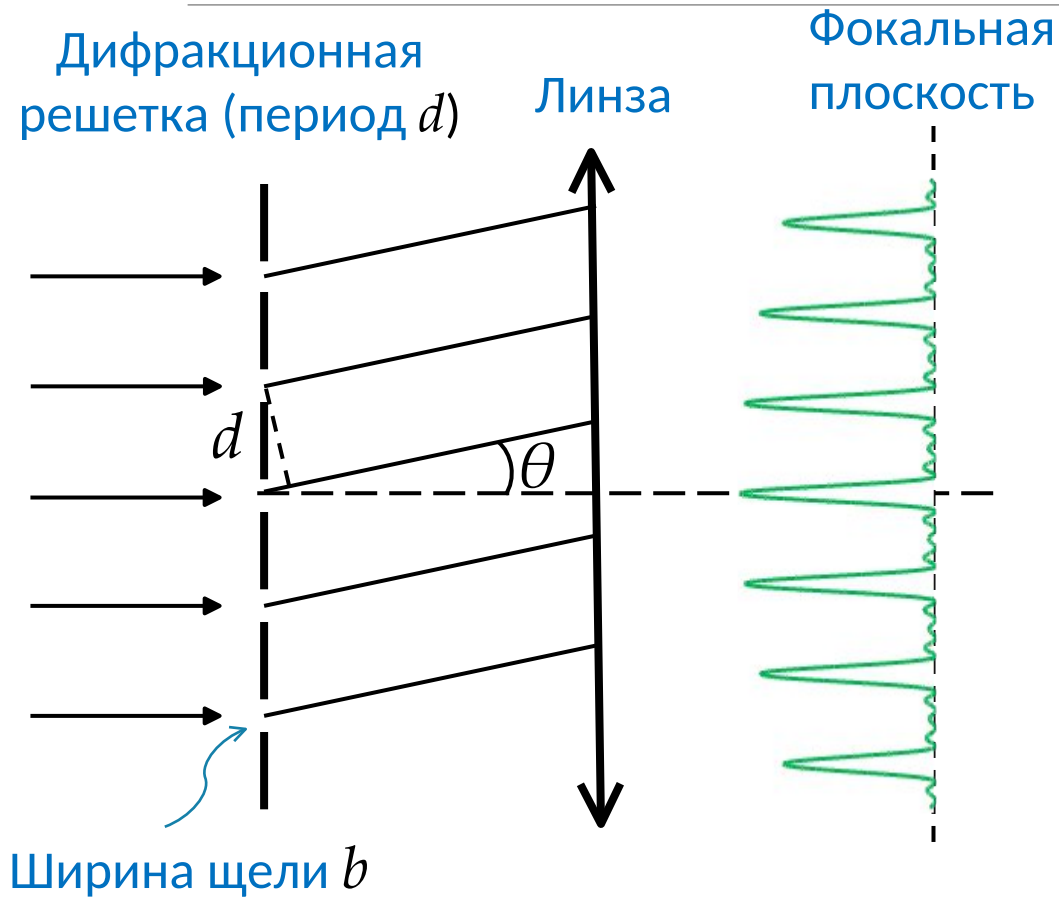


Спектральные приборы

ЛЕКЦИЯ 7

Дифракционная решетка как спектральный прибор



Направление на максимум ($\theta = \theta_m$):

$$d \sin \theta_m = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Угловая дисперсия:

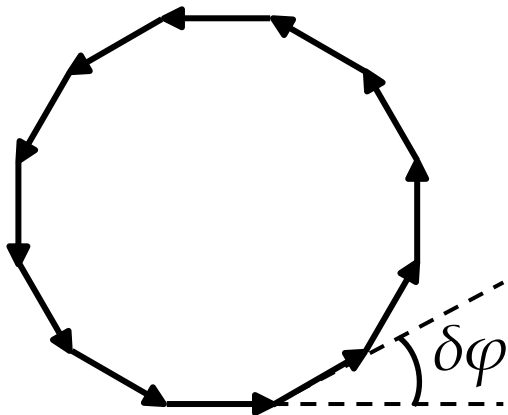
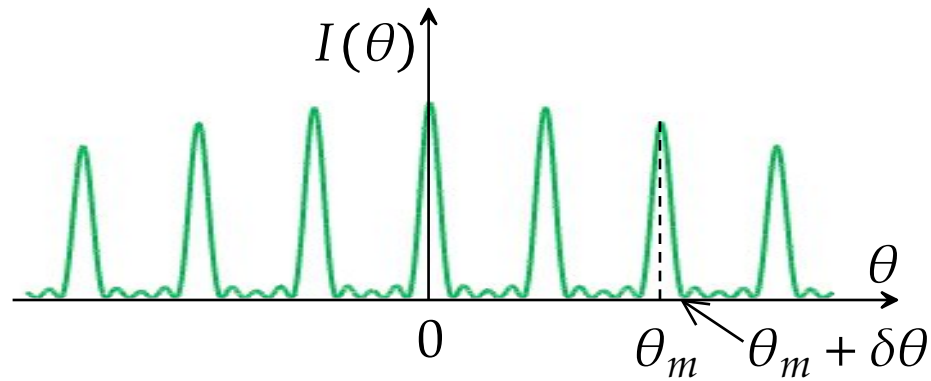
$$\frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta_m}$$

Дисперсионная область:

$$d \sin \theta_{m+1} = (m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda) \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

Угловая ширина дифракционного максимума



$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

$$\delta L = \frac{\delta\varphi}{k} = \frac{\lambda}{N}$$

Направление на максимум:

$$d \sin \theta_m = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Направление на ближайший минимум:

$$d \sin(\theta_m + \delta\theta) = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

Разность:

$$d \sin(\theta_m + \delta\theta) - d \sin \theta_m = d\delta\theta \cos \theta_m = \frac{\lambda}{N}$$

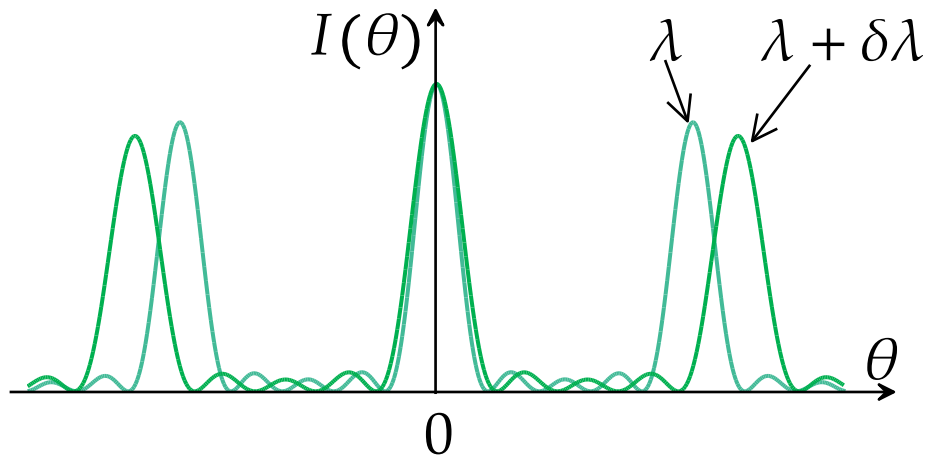
Угловая ширина максимума:

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_m}$$

$$\delta\theta \approx \frac{\lambda}{L}$$

где $L = Nd$ - ширина решетки

Разрешающая способность дифракционной решетки



Направление на максимум для длины волны $\lambda + \delta\lambda$:

$$d \sin(\theta_m + \delta\theta) = m(\lambda + \delta\lambda)$$

Направление на минимум для длины волны λ :

$$d \sin(\theta_m + \delta\theta) = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

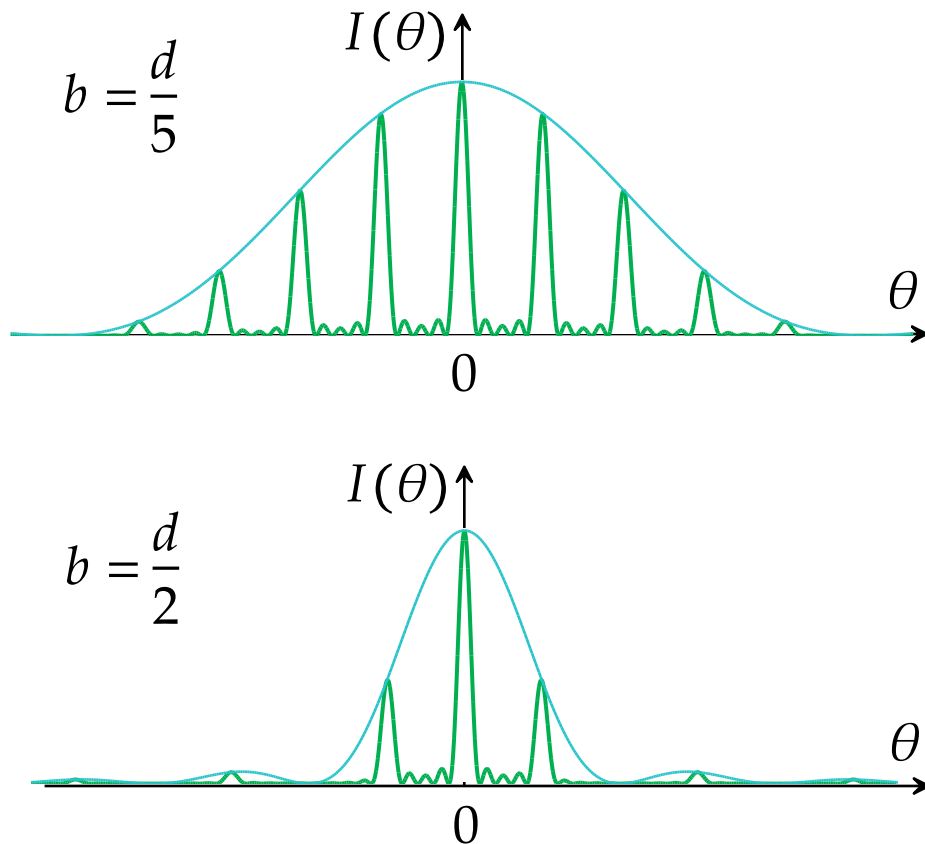
Условие разрешения длин волн λ и $\lambda + \delta\lambda$:

$$m(\lambda + \delta\lambda) = m\lambda + \frac{\lambda}{N} \Rightarrow$$

Разрешающая способность решетки:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$$

Распределение интенсивности света при дифракции на дифракционной решетке



Световое поле от одной щели:

$$E_b(\theta) = E_0 \frac{\sin(ub/2)}{ub/2}, \quad \text{где } u = k \sin \theta$$

Разность фаз излучения от двух соседних щелей:

$$\delta = kd \sin \theta = ud$$

Световое поле от N щелей:

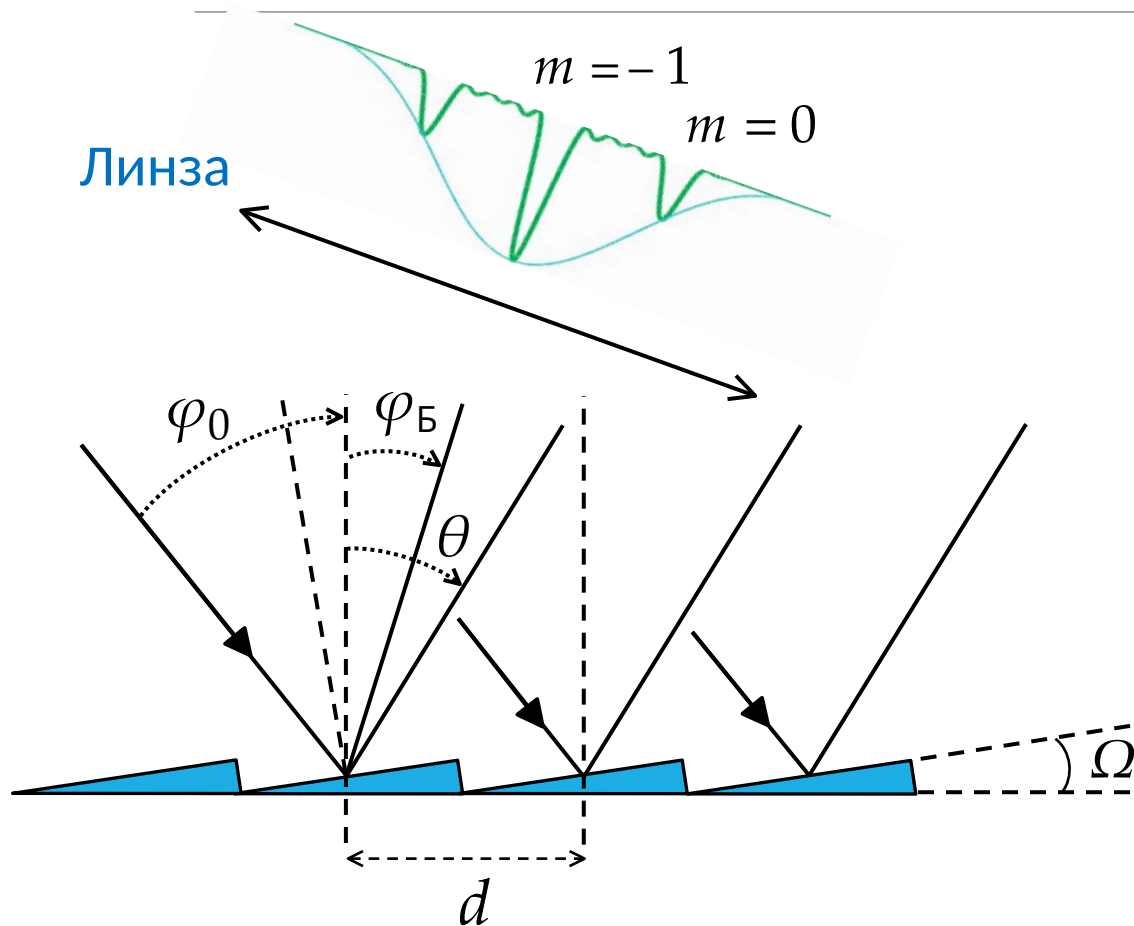
$$E(\theta) = E_b \left(1 + e^{i\delta} + e^{2i\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} \right) = E_b \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}$$

Формула: $|1 - e^{i\delta}|^2 = |e^{-i\delta/2} - e^{i\delta/2}|^2 = 4 \sin^2 \delta/2$

Интенсивность света при дифракции на решетке:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(Nud/2)}{\sin^2(ud/2)} \frac{\sin^2(ub/2)}{ub/2} \quad \text{где } u = k \sin \theta$$

Эшелет - отражательная дифракционная решетка



Угол зеркального отражения от одного штриха (угол блеска): $\varphi_{\text{Б}} = \varphi_0 - 2\Omega$, где Ω - угол скоса

Направление на дифракционные максимумы

($\theta = \theta_m$):
$$-d \sin \varphi_0 + d \sin \theta_m = m\lambda$$

Максимум нулевого порядка ($m = 0$): $\theta_0 = \varphi_0$

Максимум m -го порядка совпадает с углом блеска $\theta_m = \varphi_{\text{Б}}$:

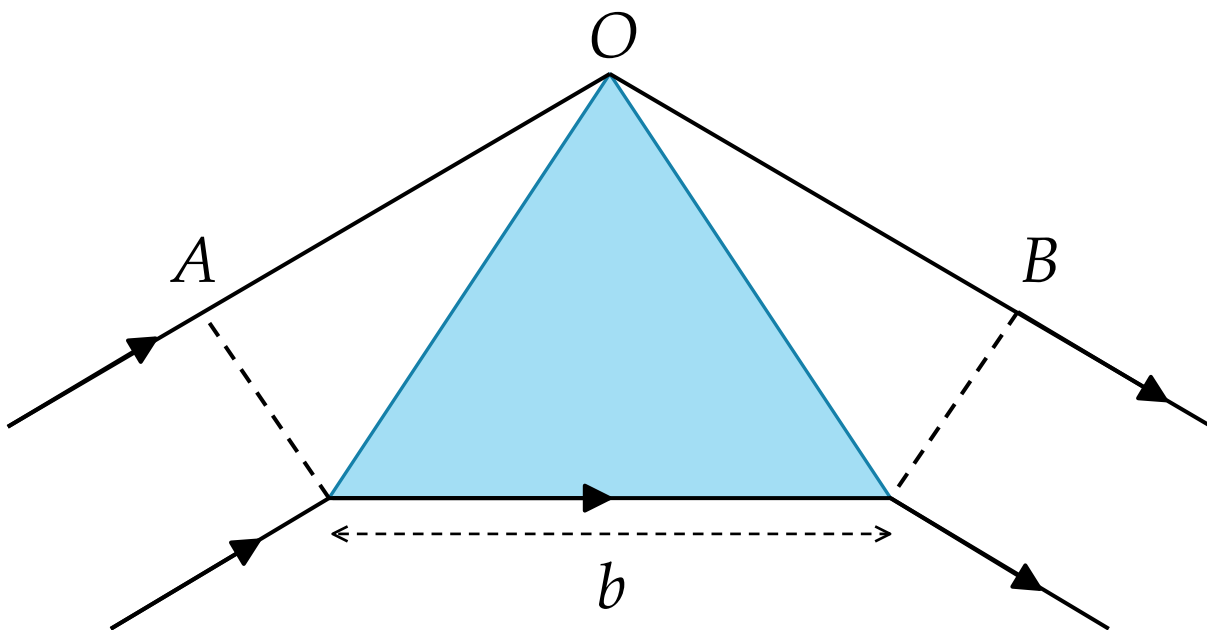
$$-2d \sin \Omega \cos(\varphi_0 - \Omega) = m\lambda$$

При угле падения $\varphi_0 = \Omega$ и $m = -1$:

$$2d \sin \Omega = \lambda$$

Призма как спектральный прибор

Дисперсия показателя преломления
призмы: $n = n(\lambda)$



Максимум для длины волны λ :

$$n(\lambda)b = |AO| + |OB|$$

Минимум для длины волны $\lambda + \delta\lambda$:

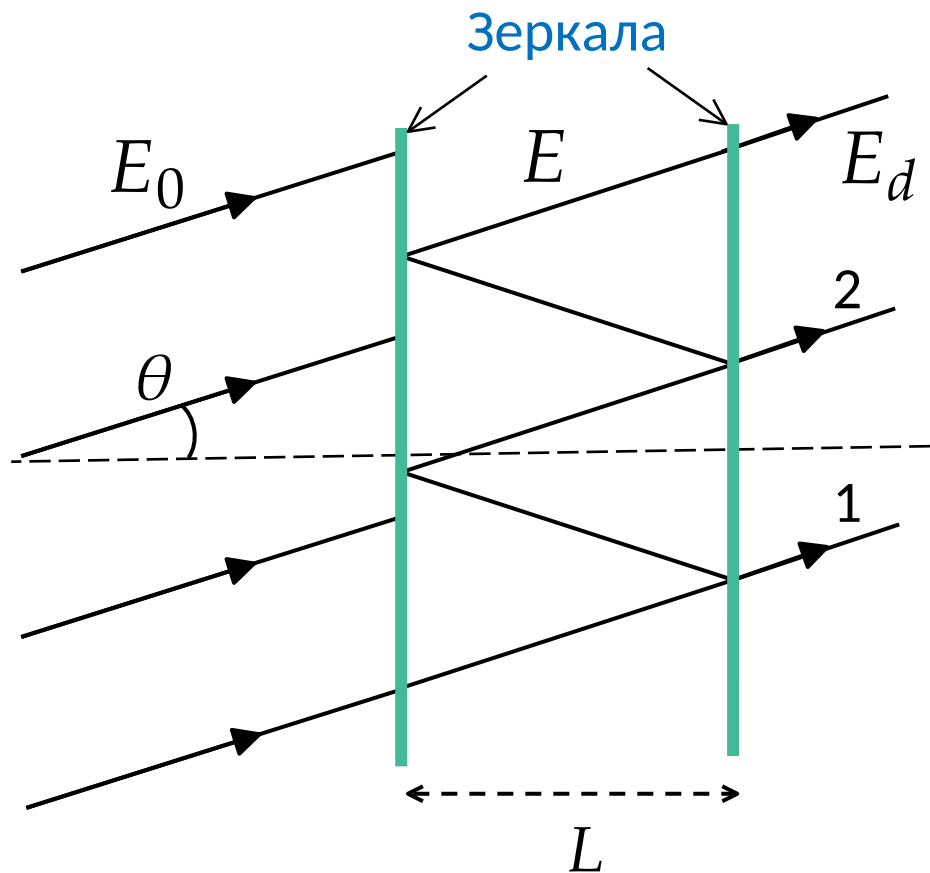
$$n(\lambda + \delta\lambda)b + \lambda = |AO| + |OB|$$

Получим: $b \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda + \lambda = 0$, где $\frac{dn}{d\lambda} < 0$

Разрешающая способность призмы:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = -b \frac{dn}{d\lambda}$$

Интерферометр Фабри-Перо



Разность хода между лучами 1 и 2: $\Delta L = 2L \cos \theta$

Разность фаз между лучами 1 и 2: $\delta = 2kL \cos \theta$

Световое поле после прохождения 1-го зеркала:

$E_1 = \sqrt{(1-r)} E_0$, где r - коэффициент отражения

Световое поле после 2-х, 4-х, 6-ти, ..., отражений:

$E_2 = E_1 r e^{i\delta}$, $E_3 = E_1 r^2 e^{i2\delta}$, $E_4 = E_1 r^3 e^{i3\delta}$, ...

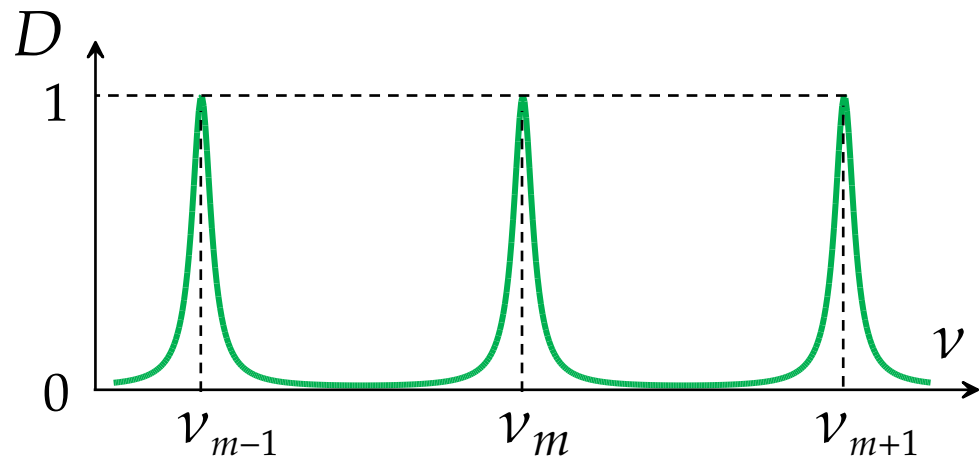
Суммарное световое поле внутри интерферометра:

$E = E_1 (1 + r e^{i\delta} + r^2 e^{i2\delta} + r^3 e^{i3\delta} + \dots) = E_1 \frac{1}{1 - r e^{i\delta}}$

Световое поле на выходе интерферометра:

$E_d = \sqrt{(1-r)} E = E_0 \frac{1-r}{1 - r e^{i\delta}}$

Функция пропускания интерферометра Фабри-Перо



Фаза: $\frac{\delta}{2} = \frac{2\pi L \cos \theta}{c} \nu$

Резонансные частоты (при $\theta = 0$):

$$\nu = \nu_m = \frac{c}{2L} m$$

Интенсивность света, прошедшего интерферометр:

$$I_d = D(\delta) I_0, \quad \text{где } \delta = 2kL \cos \theta$$

Формула:

$$|1 - r e^{i\delta}|^2 = 1 + r^2 - 2r \cos \delta = (1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

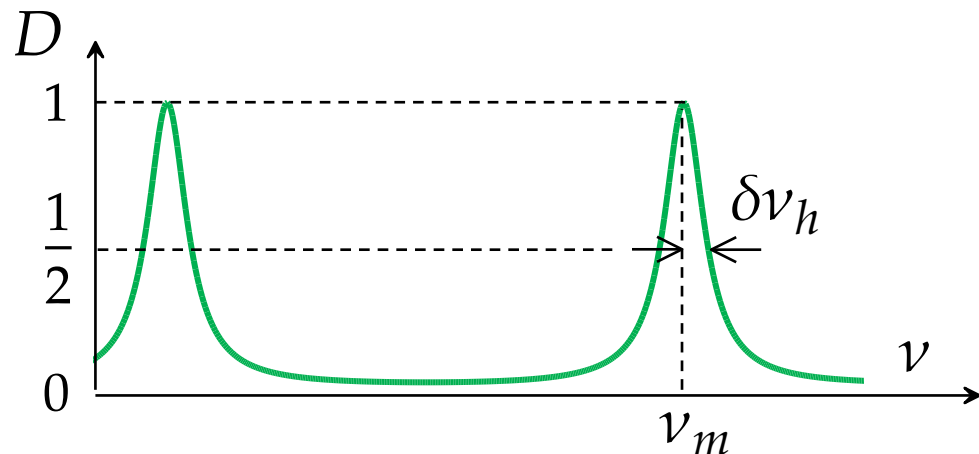
Функция пропускания интерферометра:

$$D(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Условие резонанса: $\delta = 2\pi m$, или $2L \cos \theta = m\lambda$

В резонансе: $D = 1$

Разрешающая способность интерферометра Фабри-Перо



Функция пропускания интерферометра:

$$D(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Уменьшение в 2 раза от максимума $D = 1$:

$$D = \frac{1}{2} \text{ когда: } \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1$$

Выберем $\delta = 2\pi m + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, тогда $\sin^2 \frac{\delta}{2} = \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon^2}{4}$.

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1-r}{\sqrt{r}}, \quad \text{где } \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2\pi L \cos \theta}{c} \delta\nu_h, \quad c = \nu \lambda$$

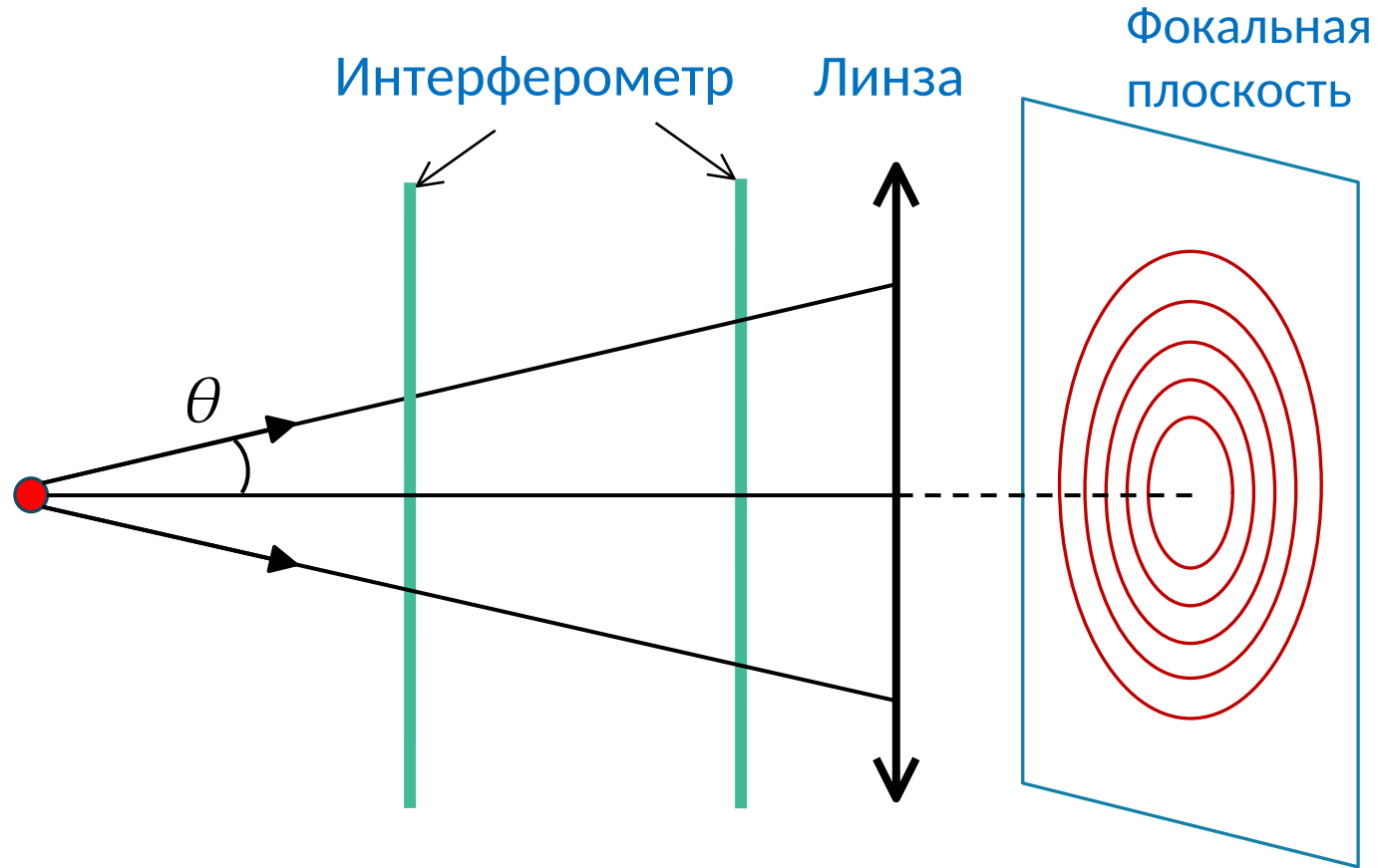
Ширина полосы пропускания: $\delta\nu_h = \frac{c}{4\pi L \cos \theta} \frac{(1-r)}{\sqrt{r}}$

Условие разрешения: $\delta\nu = 2\delta\nu_h$

Разрешающая способность:
(при $\theta = 0$)

$$R = \frac{\nu}{\delta\nu} = \frac{2\pi L \sqrt{r}}{\lambda (1-r)}$$

Интерференционная картина в интерферометре Фабри-Перо



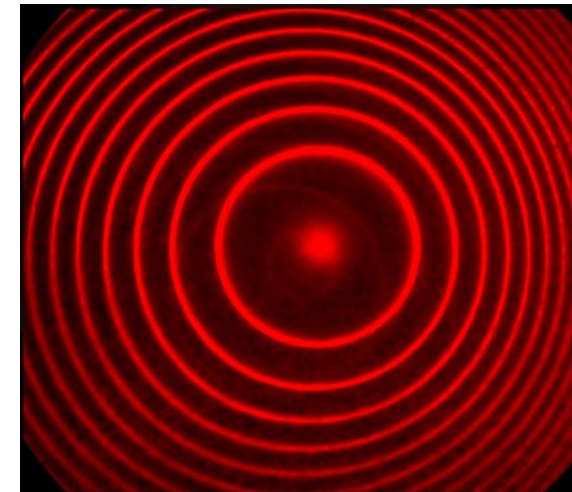
Условие максимумов
(светлые кольца):

$$2L \cos \theta = m\lambda$$

Угловая дисперсия:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{2L \sin \theta}$$

Вид интерференционной картины:

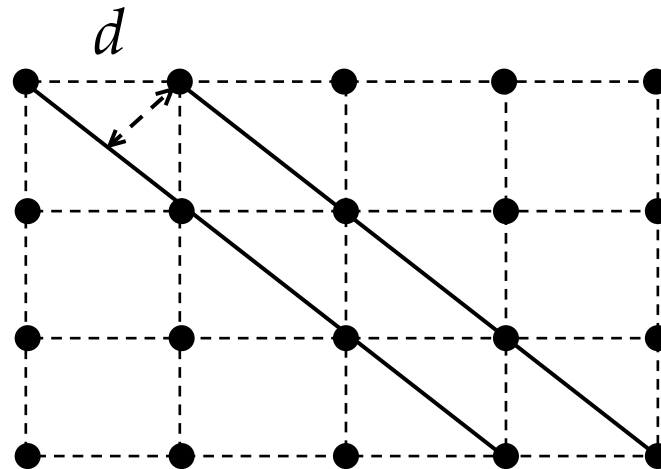
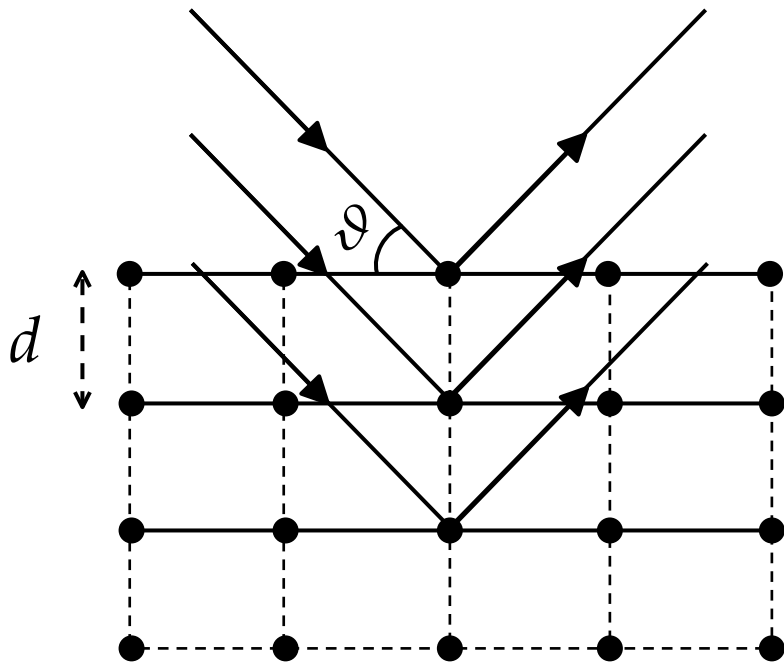


Дифракция рентгеновских лучей. Условие Брэгга-Вульфа

Дифракция на кристаллической решетке (длина волны $\lambda \approx 0.1 \div 0.2$ нм)

Условие Брэгга-Вульфа (максимум отражения):

$$2d \sin \vartheta = m\lambda$$



Лауэграмма монокристалла NaCl

