

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа прикладной математики и информатики

Отчёт о выполнении лабораторной работы 3.7.1
Скин-эффект

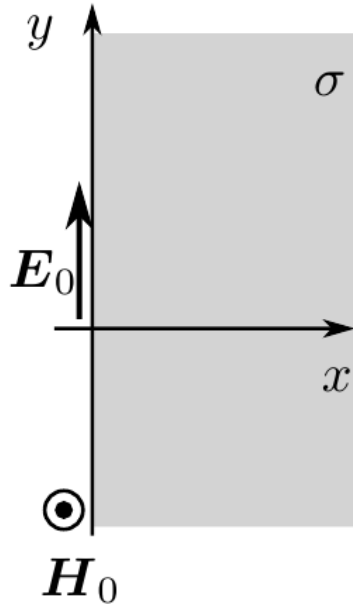
Автор:
Чикин Андрей Павлович
Б05-304

Долгопрудный, 2024

Цель работы: Исследование проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр

Теоретическая часть

Скин-эффект для полупространства



Рассмотрим квазистационарное поле внутри проводящей среды в простейшем плоском случае. Пусть вектор $*E$ направлен всюду вдоль оси y и зависит только от координаты x , т. е. $E_x = E_z \equiv 0$, $E_y = E_y(x, t)$. В квазистационарном приближении

$$\vec{\nabla} \times *H = \sigma *E$$

Преобразуя это уравнение, можно получить уравнение, схожее с уравнением диффузии:

$$\vec{\nabla}^2 *H = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial *H}{\partial t} \quad (1)$$

Точно такое же уравнение имеет место и для вектора E :

$$\vec{\nabla}^2 *E = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial *E}{\partial t} \quad (2)$$

Подставляем в (2) наше электрическое поле $E_y = E_y(x, t)$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (3)$$

Если $E_y(0, t) = E_0 e^{i\omega t}$ то решением (3) будет функция вида

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \quad (4)$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu \mu_0}} \quad (5)$$

Скин-эффект в тонокм полонм цилиндре

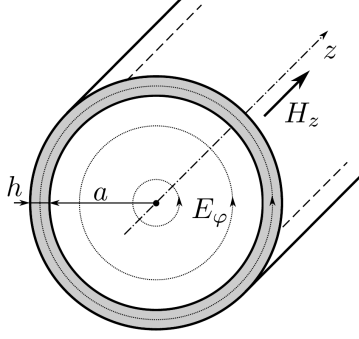


Рис. 1: Эл-магнитные поля в цилиндре

Перейдем теперь к описанию теории в нашей работе. Из соображений симметрии и непрерывности соответствующих компонент векторов $*E$ и $*H$ можем сказать что

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, E_\varphi = E(r)e^{i\omega t}$$

и при этом функции $H(r)$ и $E(r)$ непрерывны.

Внутри цилиндра токов нет, следовательно $H(r) = H_1 = \text{const}$ внутри цилиндра. По теореме об электромагнитной индукции

$$E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

откуда мы получаем граничное условие

$$E_1 = E(a) = -\frac{1}{2}\mu_0 a \cdot i\omega H_1 \quad (6)$$

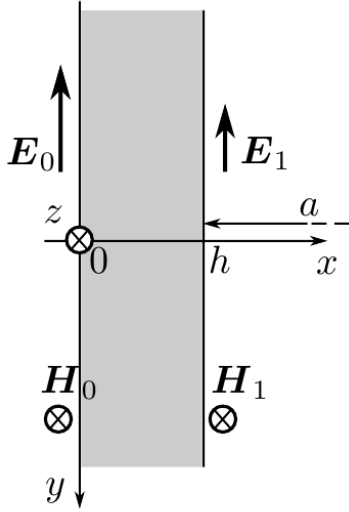


Рис. 2: Стенка цилиндра

В приближении $h \ll a$ можем пренебречь кривизной стенки и смоделировать его бесконечной полосой. Тогда, надо решить уравнение (1) с граничными условиями. Решая уравнение получим связь полей H_1 (поле внутри цилиндра которое мы будем измерять) и H_0 , которое колеблется с частотой ω

$$H_1 = \frac{H_0}{\text{ch}(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a \text{sh}(\alpha h)} \quad \alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{\sqrt{2}}{\delta}e^{i\pi/4} \quad (7)$$

из этой формулы получим сколько по фазе отстает поле H_1 от H_0 . При $\delta \ll h$ (высокачастотная область)

$$\psi \approx \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \quad (8)$$

При $\delta \gg h$ (низкочастотная область)

$$\text{tg } \psi \approx \frac{ah}{\delta^2} = \pi ah\sigma\mu_0\nu \quad (9)$$

Установка и процесс измерения

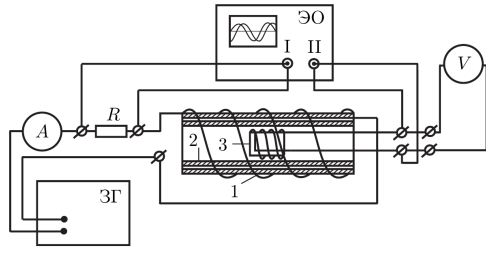


Рис. 3: Установка

Переменное магнитное поле создается соленоидом 1, на который подается переменный ток со звукового генератора ЗГ. Внутри соленоида расположен медный экран 2. Магнитное поле внутри цилиндра измеряется катушкой 3. Напряжение на катушке пропорционально производной $\dot{B}_1(t)$

$$U(t) \propto \dot{B}_1(t) = -i\omega H_1 e^{i\omega t}$$

Поле внутри цилиндра пропорционально току через соленоид

$$H_0(t) \propto I(t)$$

Отсюда несложно увидеть, что

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = c \cdot \frac{U}{\nu I} = \xi_0 \xi \quad (10)$$

где константу ξ_0 можно определить из условия $|H_1|/|H_0| \rightarrow 1$ при $\nu \rightarrow 0$.

При измерениях разности фаз нужно учесть, что первый сигнал на осциллографе пропорционален магнитному полю снаружи, а второй пропорционален производному поля внутри цилиндра по времени, поэтому измеренная на осциллографе разность фаз φ будет на $\frac{\pi}{2}$ больше реальной ψ :

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$$

1 Ход работы

Параметры установки:

$$2a = 45 \text{ мм}$$

$$h = 1.5 \text{ мм}$$

Проводимость:

$$\sigma \sim 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$$

Получаем оценку для частоты, при которой глубина проникновения равна толщине стенок цилиндра:

$$\nu_h = 2254 \text{ Гц}$$

1.1 Измерения амплитуд в области низких частот

В области частот $\nu \ll \nu_h$ $\alpha h \ll 1$, и из (7) получаем

$$\frac{1}{\xi^2} = \xi_0^2 B^2 \nu^2 + \xi_0^2, \quad B = \pi a h \sigma \mu_0$$

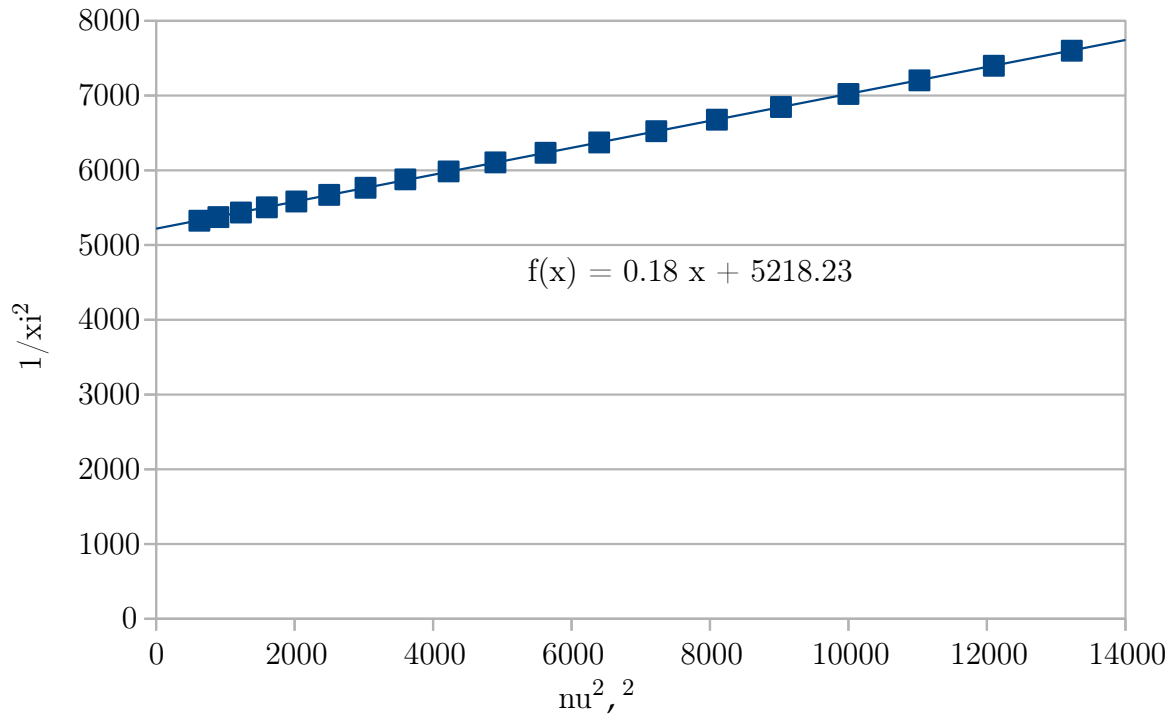


Рис. 4: График зависимости $1/\xi^2(\nu^2)$

ν, Γ_{Π}	I, A	U, B	ν^2, Γ_{Π}^2	$\frac{1}{\xi^2}, A$
25	473.18	162.1	5326	625
30	471.12	192.8	5374	900
35	468.87	222.6	5435	1225
40	466.29	251.4	5504	1600
45	463.4	279.1	5582	2025
50	460.4	305.7	5670	2500
55	457.27	331.2	5766	3025
60	453.88	355.2	5878	3600
65	450.47	378.5	5984	4225
70	447.07	400.5	6106	4900
75	443.56	421.3	6235	5625
80	440.07	441	6373	6400
85	436.63	459.5	6524	7225
90	433.2	477.1	6678	8100
95	429.84	493.5	6847	9025
100	426.5	509	7021	10000
105	423.24	523.6	7204	11025
110	420.08	537.2	7399	12100
115	417	550.1	7599	13225

Получаем следующие значения:

$$\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \approx 0.18 \frac{1}{\text{Ом}^2}$$

$$\beta = y(0) \approx 5200 \frac{\Gamma_{\Pi}^2}{\text{Ом}^2}$$

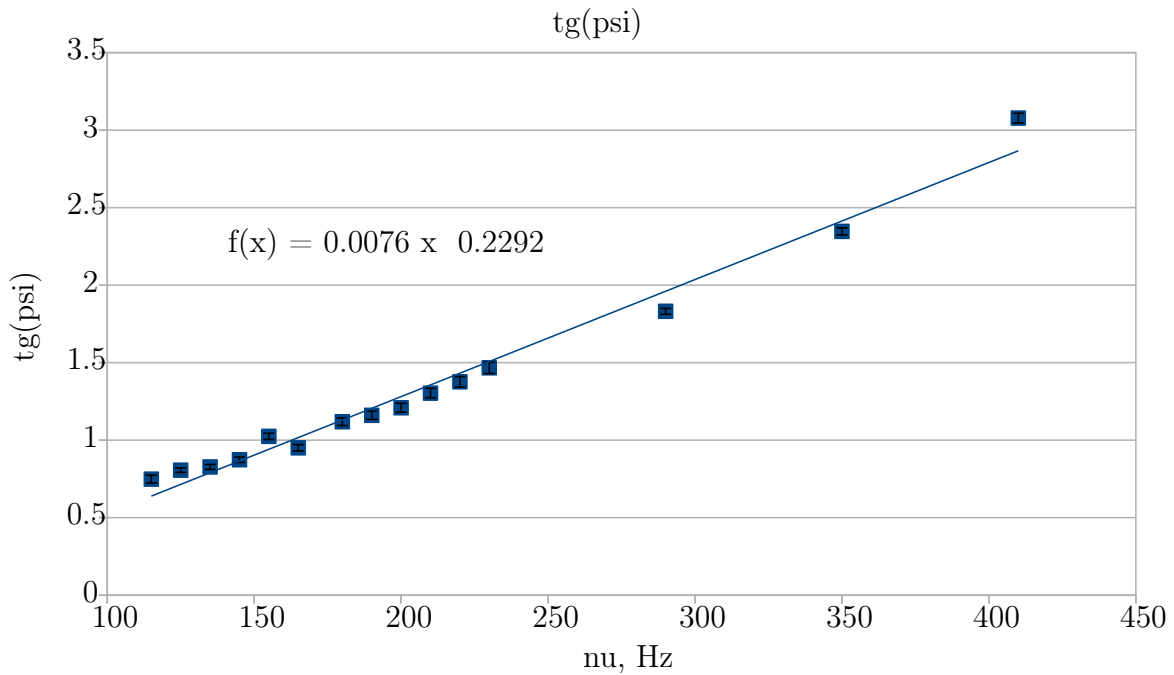
$$\xi_0 \approx 72 \frac{\Gamma_{\Pi}}{\text{Ом}}$$

$$\sigma \approx (4.51 \pm 0.01) 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

1.2 Измерение проводимости через разность фаз в низкочастотном диапазоне

Согласно формуле (9), при $\delta \gg h$

$$\tan \psi = k \cdot \nu, \quad k = \pi a h \sigma \mu_0 \quad (\mu = 1)$$

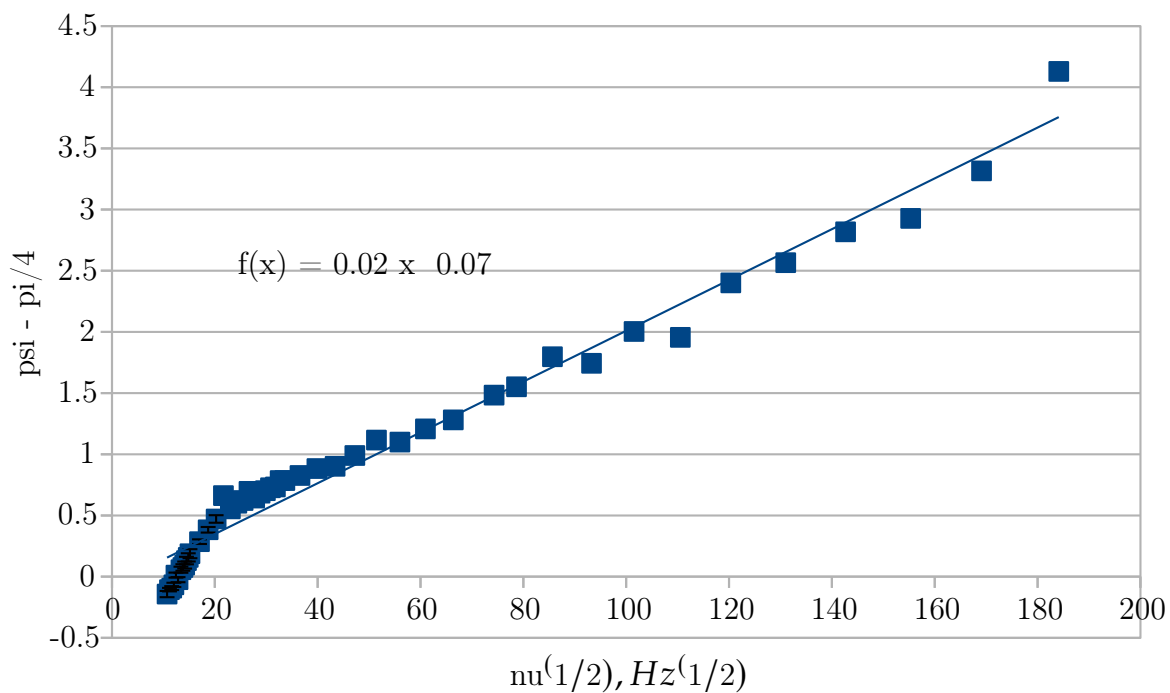


Из коэффициента наклона прямой находим проводимость

$$\sigma = (4.7 \pm 0.2) \cdot 10^7 \text{См/м} \quad (11)$$

1.3 Измерение проводимости через разность фаз в высокочастотном диапазоне

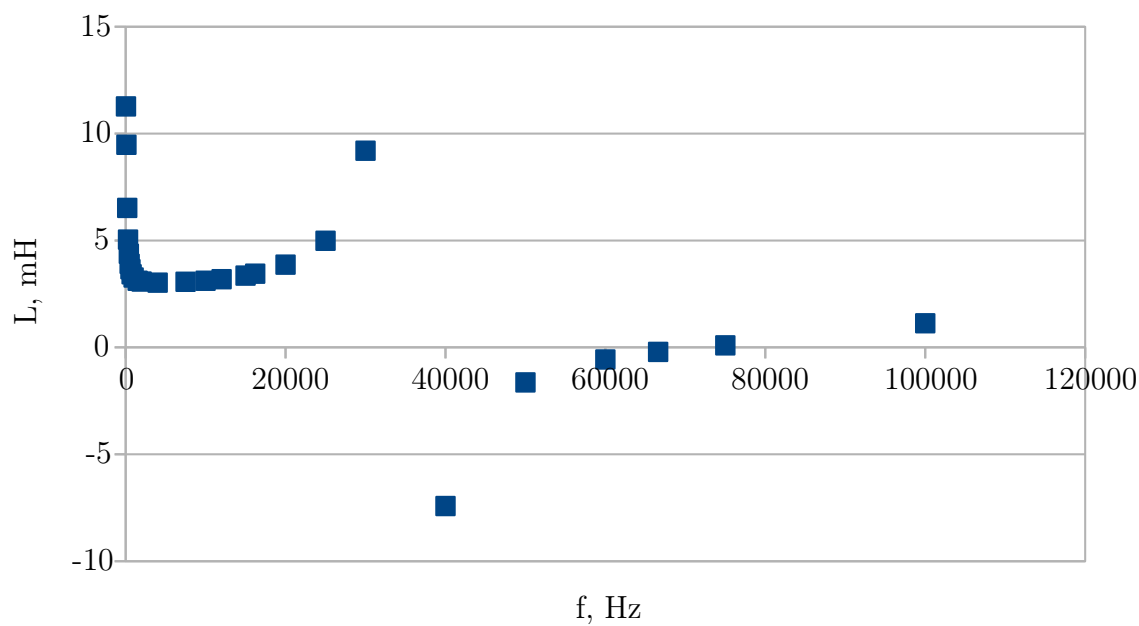
$$\psi - \frac{\pi}{4} = \alpha \sqrt{\nu}, \quad \alpha = h \sqrt{\pi \mu_0 \sigma}$$

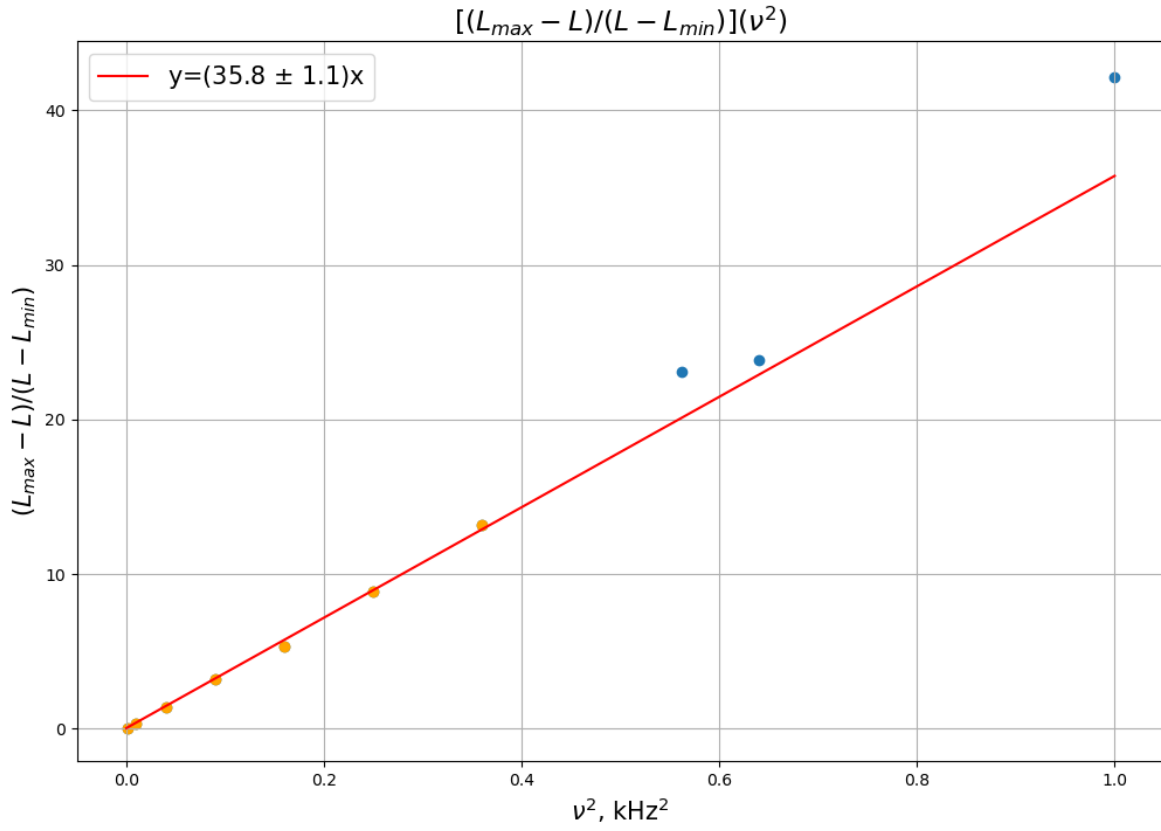


$$\sigma = (4.4 \pm 0.3) \cdot 10^7 \text{C}_M/\text{M} \quad (12)$$

1.4 Измерение проводимости через изменение индуктивности

$$\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}} = Kv^2, \quad K = \pi^2 a^2 h^2 \mu_0^2 \sigma^2$$

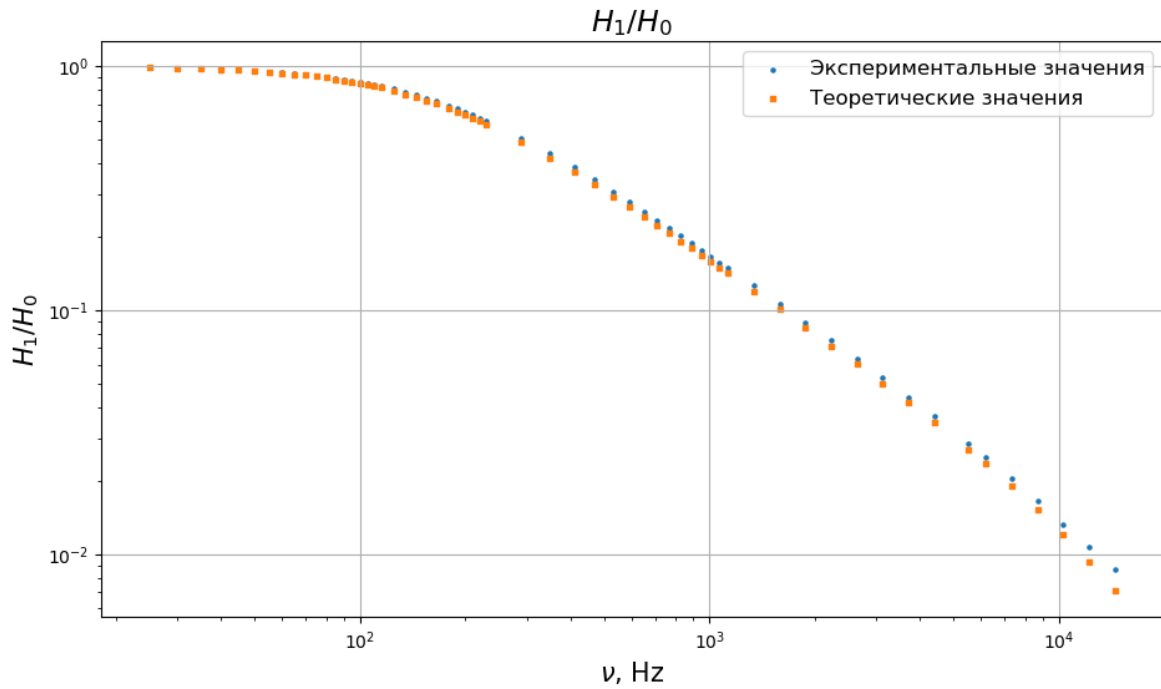




$$\sigma = (4.5 \pm 0.1) \cdot 10^7 \text{Cm/m} \quad (13)$$

1.5 Отношение магнитных полей

Найдем $|H_1|/|H_0|$ двумя способами - через формулу (10) и (7).



2 Выводы

В данной лабораторной работе мы измеряли удельную проводимость меди 4-мя различными способами с помощью явления скин-эффекта.

$$\sigma_{\text{табл}} \approx 5.6 \cdot 10^7 \text{ СМ/М} \quad (14)$$

В целом, наши измерения заметно меньше истинного.

Меньше всего получилась погрешность измерения на низких частотах.

На высоких частотах, скорее всего, измерениям мешают токи Фуко.

Также посчитали отношение магнитных полей. Значения хорошо совпали с теоретическими значениями.