

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа прикладной математики и информатики

**Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.4.1**

Изучение экспериментальных погрешностей на примере физического маятника

Автор:  
Чикин Андрей Павлович  
Б05-304

Долгопрудный, 2023

## Цель работы:

1. На примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями;
2. Проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения;
3. Убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качения маятника;
4. Оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

## Приборы:

1. Металлический стержень с опорной призмой
2. Дополнительный груз
3. Закреплённая на стене консоль
4. Подставка с острой гранью для определения центра масс маятника
5. Прибор для измерения периода колебаний (секундомер)  $\sigma_T \sim 0,03$
6. Счётчик колебаний (механический или электронный)
7. Линейки металлические различной длины
8. Штангенциркуль
9. Электронные весы
10. Математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях)

## 1 Краткая Теория.

Физическим маятником называют твёрдое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Основное отличие физического маятника от математического в том, что маятник не является точечным объектом, а представляет собой совокупность жёстко связанных точечных масс. В данной работе в качестве такого маятника используется тонкий однородный металлический стержень, подвешиваемый в некоторой точке с помощью небольшой опорной призмы (см. рис. 1). Острое ребро призмы, опирающееся на подставку, задаёт ось качания (или вращения) маятника.

Рассмотрим тело  $P$  и ось  $S$ . Моментом инерции  $P$  отн.  $S$  называется  $J = \sum_i m_i \cdot r_i^2$  (или  $\int_P r^2 \cdot dm$  если масса  $P$  распределена равномерно), где  $r_i$  - расстояние от  $m_i$  до  $S$ . Момент импульса тела:  $L = J \cdot \omega$ , где  $\omega$  - угловая скорость вращения тела отн. оси  $S$ . Момент импульса:

$$M = \frac{dL}{dt}(1) = J \cdot \frac{d\omega}{dt}(2)$$

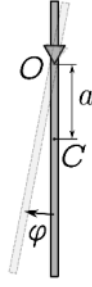


Рис. 1. Стержень  
как физический  
маятник

Справедлива следующая формула для тонкого стержня массы  $m$  и длины  $l$ , вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс:  $J_c = \frac{m \cdot l^2}{12}$ . А для такого же стержня, подвешенного на расстоянии  $a$  от центра масс, момент инерции может быть вычислен по формуле Гюйгенса-Штейнера:

$$J = \frac{m \cdot l^2}{12} + m \cdot a^2 \quad (3)$$

В частности, если подвесить стержень за один из концов:  $a = \frac{l}{2} \implies J = \frac{m \cdot l^2}{3}$

Вернёмся к рассмотрению колебаний физического маятника — стержня, подвешенного в поле тяжести (Рис. 1). Маятник подвешен в точке  $O$  на расстоянии  $a$  до центра масс  $C$ . При отклонении стержня от вертикального положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает момент силы тяжести, стремящийся вернуть стержень в исходное положение. Плечо этой силы, приложенной к точке  $C$ , относительно оси подвеса  $O$  равно  $a \cdot \sin \varphi$ , поэтому при небольших углах отклонения  $\varphi \ll 1$  возвращающий момент равен:

$$M = -m \cdot g \cdot a \cdot \sin \varphi \approx -m \cdot g \cdot a \cdot \varphi \quad (4)$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что такие колебания будут гармоническими при малых амплитудах. Для гармонических колебаний:  $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ ,  $T$  - период колебаний. Аналогично для физического маятника:  $m = J$ ,  $k$  - отношение момента силы к амплитуде,  $k = mga$ . Отсюда

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad (5)$$

Для стержня:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g \cdot a}} \quad (6)$$

Для математического маятника:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7)$$

По опр. приведенная длина:  $l_{пр} = a + \frac{l^2}{12a}$ . Смысл данной величины в том, что физический маятник длины  $l$  и подвешенный на расстоянии  $a$  имеет тот же период малых колебаний, что и математический маятник длины  $l_{пр}$ .

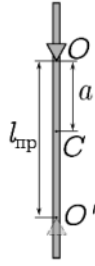


Рис. 2.  
К теореме  
Гюйгенса

### Гармонические колебания

$$(1),(4) \implies J\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \quad (9)$$

$$\varphi(t) = A \sin(\Omega t + \alpha) \quad (10)$$

, где  $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mga}{J}}$  - угловая частота колебаний,  $A$  - амплитуда,  $\alpha$  - начальная фаза колебаний.

**Затухание колебаний** Если присутствует сила трения, затухания считаются затухающими. Для затухающих колебаний формула (10) справедлива, но амплитуда является убывающей ф-ией от времени:  $A = A(t)$ . Декремент затухания:  $\gamma = \frac{|\Delta A|}{A}$

$$\gamma = \text{const} \implies \gamma = -\frac{dA}{A} \implies A(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma t}$$

, где  $A_0 = A(0)$ .

$\tau = \frac{1}{\gamma}$  - время, за которое амплитуда падает в  $e$  раз. Колебания можно считать малым, если  $\tau \gg T$ . Добротность колебательной системы:  $Q = \pi \frac{\tau}{T}$

**Экспериментальная установка** Тонкий стальной стержень длиной  $l \sim 1$  м и массой  $m \sim 1$  кг (точные параметры определяются непосредственными измерениями) подвешивается на прикреплённой стене консоли с помощью небольшой призмы. Диаметр стержня много меньше его длины  $d \sim 12$  мм  $\ll l$ . Небольшая призма крепится на стержне винтом и острым основанием опирается на поверхность закреплённой на стене консоли. Острые ребра призмы образует ось качания маятника. Возможны две схемы реализации установок:

**Установка А.** Призму можно перемещать вдоль стержня, изменяя длину  $a$  — расстояние от центра масс до точки подвеса. Период колебаний измеряется непосредственно с помощью секундомера.

**Установка В.** Подвесная призма остаётся неподвижной ( $a = \text{const}$ ), а на стержень маятника насаживается дополнительное тело небольшого размера («чечевица» или цилиндр), положение которого можно изменять, изменяя таким образом момент инерции маятника. Период колебаний маятника в этой схеме измеряется электронным счетчиком импульсов, расположенном у нижнего конца стержня. Дополнительные сведения об установке типа В приведены ниже (см. стр. 8). Измеряя зависимости периода малых колебаний от положения стержня или дополнительного тела на нём, можно экспериментально проверить формулу (5) (или её частный случай (6)) и вычислить значение ускорения свободного падения  $g$ . Формулу (6) можно проверить, откладывая по осям величины  $u = T^2 a$  и  $m = a^2$ . В этих координатах график  $u(m)$  должен иметь вид прямой линии, угловой коэффициент которой пропорционален  $g$ , а вертикальное смещение — моменту инерции стержня относительно центра масс.

**Измерение периода колебаний** Дабы избежать слишком большой ошибки измерения времени ( $\sigma_t = 0,1 - 0,3c$ ), нужно измерить время несколько раз ( $t_1, t_2, \dots, t_N$ ) и найти случайную погрешность по формуле:

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \langle t \rangle)^2}{N - 1}}$$

$$\sigma_t^{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_t^{\text{сист}^2} + \sigma_t^{\text{случ}^2}}$$

Особенности маятника с перемещаемым грузом (установка В) Масса грузика:  $m_g = 300 - 400$  гр,  
диаметр:  $d_g \sim 6$ см

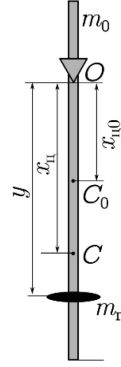


Рис. 3. Маятник с дополнительным грузом

$$J = J_0 + m_r \cdot y^2$$

где  $J_0$  — момент инерции маятника без груза, определяемый по формуле (3).

$$x_2 = \frac{m_0 \cdot x_1 + m_g \cdot y}{M}$$

$$y = \frac{M \cdot x_2 - m_0 \cdot x_1}{m_g} \quad (12)$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_0 + m_g \cdot y^2}{g M x_2}} \quad (13)$$

Учёт влияния подвесной призмы

Формула (6) получена в предположении, что подвес маятника является материальной точкой. На самом же деле маятник подвешивается с помощью треугольной призмы конечного размера, поэтому использование (6) может привести к систематической погрешности результата. Для более точных расчётов следовало бы воспользоваться общей формулой периода колебаний физического маятника (5), принимая во внимание наличие двух тел — стержня и призмы:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\text{пр}} + J_{\text{ст}}}{m_{\text{пр}} g a_{\text{пр}} - m_{\text{ст}} g a_{\text{ст}}}}$$

, где  $J_{\text{пр}}$ ,  $m_{\text{пр}}$  и  $a_{\text{пр}}$  — соответственно момент инерции, масса и расстояние до центра масс призмы (знак «минус» в знаменателе учитывает, что призма находится выше оси подвеса).  
 $m_{\text{пр}} \sim 70 \text{ гр}$ ,  $a_{\text{пр}} \sim 1.5 \text{ см} \Rightarrow J_{\text{пр}} = m_{\text{пр}} \cdot a_{\text{пр}}^2 \sim 10^{-5} \text{ кг м}^2$   $a_{\text{ст}} = 10 \text{ см} \Rightarrow J_{\text{ст}} \sim 10^{-2} \text{ кг м}^2$   
 $\Rightarrow \xi_{J_{\text{ст}}} < 0.1\%$

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \frac{m_{\text{пр}} g a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} g a_{\text{ст}}} \sim 1\%$$

## 2 Выполнение работы.

1. Ознакомимся с используемыми в работе измерительными приборами: линейкой, штангенциркулем, секундомером. Определим максимальную систематическую погрешность каждого из них (абсолютное и относительное значение) (смотрите таблицу 1). Оценим, с какой относительной погрешностью имеет смысл измерять период колебаний маятника. Погрешность итогового результата (косвенно вычисленной величины) не может оказаться больше погрешности самого неточного измерения. В нашем случае относительная погрешность самого неточного измерения равна примерно 1%. Если период маятника примерно равен 1 секунде в нашем случае относительная погрешность измерения одного периода равняется  $\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{T} \sim \frac{0.03}{1} = 0.03 = 3\%$ . Тогда будет достаточно измерения 3 колебаний. Для большей точности будем измерять период 20 колебаний.
2. Измерим длину стержня  $L_{ст}$ . Взвесим стержень, призму и дополнительный груз ( $M_{ст} = 868\text{г}$ ,  $M_{пр} = 80\text{г}$ ,  $M_{гр} = 291\text{г}$ ) (для установки Б) на электронных весах. Оценим погрешности измерений (абсолютные и относительные значения) (см. т. 1).

Таблица 1	value	$\sigma$	$\xi$
$M_{ст}, \text{г}$	868,3	0,1	0,01%
$M_{гр}, \text{г}$	290,9	0,1	0,03%
$M_{пр}, \text{г}$	79,6	0,1	0,13%
$M_{общ}, \text{г}$	1238,8	0,3	0,02%
$L_{ст}, \text{см}$	100	0,01	0,01%
$AC0, \text{см}$	50	0,2	0,4%
$a, \text{см}$	30	0,3	1%
$x_{ц0}, \text{см}$	27,4	0,2	0,7%
$H_{гр}, \text{см}$	1,64	0,01	0,6%

3. Снимем со стержня призму и с помощью подставки определим положение центра масс пустого стержня.  $AC0 = (50 \pm 0,2)\text{см}$
4. Установим призму на некотором расстоянии от центра стержня, измерим точное положение от острия призмы до центра масс стержня -  $a = P_r C_0$ . Измерим положение центра масс конструкции  $x_{ц0} = P_r C_1$ , сбалансировав маятник с призмой на острие вспомогательной подставки. Оценим погрешности измерения расстояний  $a$  и  $x_{ц0}$ .  $\sigma_a = 0.3\text{мм}$ ;  $\sigma_{x_{ц0}} = 0.2\text{мм}$   
 $a = (30.0 \pm 0.3)\text{см}$ ;  $x_{ц0} = (27.4 \pm 0.2)\text{см}$ .  $\varepsilon_a = 1\%$ ;  $\varepsilon_{x_{ц0}} = 0.7\%$
5. Проведем первый предварительный опыт по измерению периода колебаний (на установке Б опыт проведите без дополнительного груза).
  - а) Установим маятник на консоли и отклоним маятник на малый угол (не более  $5^\circ$ ). Убедимся, что он качается без помех, призма не проскальзывает, и колебания затухают слабо.
  - б) Измерим время  $n = 20$  полных колебаний маятника.
  - в) Вычислим период колебаний  $T = \frac{d}{n}$  и по формуле (6) (или (14)) рассчитайте предварительное значение  $g$ . Убедитесь, что оно отличается от табличного не более, чем на 10%.

$$T_{ср} \sim 1.5\text{с} \text{ По формуле (6): } g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{l_{12}^2 + a^2}{a} \sim 9.52 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \implies \varepsilon_g \sim 2.8\% \text{ По формуле (14):}$$

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{l_{12}^2 + a^2}{x_{ц}(1 + \frac{m_{пр}}{m_{ст}})} \sim 9.55 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \implies \varepsilon_g \sim 2.5\%$$

6. Проведем серию измерений для экспериментального определения случайной погрешности измерения периода.

- (а) Несколько раз повторим измерение периода фиксированного числа колебаний (например, при  $n = 20$ ). Результаты занесем в таблицу. Если результаты 3–4 измерений полностью совпадают, опыт можно остановить. Если результаты различаются, следует провести 8–10 измерений. В нашем случае результаты немного разнились, поэтому мы провели 10 измерений периода (см. таблицу 2).

Таблица 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20Т	30,57	30,57	30,56	30,53	30,56	30,54	30,56	30,55	30,55	30,56
Т	1,5285	1,5285	1,528	1,5265	1,528	1,527	1,528	1,5275	1,5275	1,528
$\langle T \rangle, c$	1,52775									
$\sigma_{\langle T \rangle}$	0,001629									
$\varepsilon_{\langle T \rangle}$	0,001066									

- (b) Вычислим среднее значение полученных результатов  $\bar{t} \sim 1.53c$ , а также определим случайную погрешность измерения времени как среднеквадратичное отклонение полученных результатов:  $\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (t - \bar{t})^2} \sim 6 \cdot 10^{-4}c$ , где  $N$  - число измерений, в нашем случае  $N = 10$ .

- (c) Определим приборную (систематическую) погрешность используемого прибора  $\sigma_t^{\text{сист}}$  и вычислим полную погрешность  $\sigma_t^{\text{полн}}$  измерения времени.  $\sigma_t^{\text{сист}} = 0.03c \Rightarrow \sigma_t^{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_t^{\text{случ}^2} + \sigma_t^{\text{сист}^2}} \sim \sigma_t^{\text{сист}} = 0.03c$

7. Используя погрешность  $\sigma_t$  измерения времени из предыдущего пункта, оцените число колебаний  $n$ , по которому следует измерять период, чтобы относительная погрешность измерений периода соответствовала точности измерений  $\varepsilon_{\text{max}}$ , оценённой в п. 1. Так как мы измеряли период электронным счетчиком, полная погрешность примерно равна приборной, следовательно, размышления в п. 1 справедливы.

8. Закрепим груз на стержне в произвольном месте. Рассчитаем положение центра масс стержня, призмы и груза:

$$x_{\text{ц}} = P_r C_2 = \frac{(M_{\text{ст}} + M_{\text{пр}})x_{\text{ц0}} + M_{\text{гр}} \cdot y}{M_{\text{ст}} + M_{\text{пр}} + M_{\text{гр}}}$$

, где  $y$  - расстояние от т. подвеса до груза.

9. Разместим груз на маятнике и измерим положение  $y$  груза относительно точки подвеса и положение центра масс всей системы  $x_{\text{ц}}$ .

10. Проведем измерение периода колебаний маятника по  $n$  полным колебаниям, где значение  $n$  выбрано в п. 7. Повторим измерения периода для 8 - 15 положений груза  $y$  (при этом распределим положения груза равномерно по всему стержню). Для каждого измерения найдем  $x_{\text{ц}}$  и  $g$  (см. т. 3).

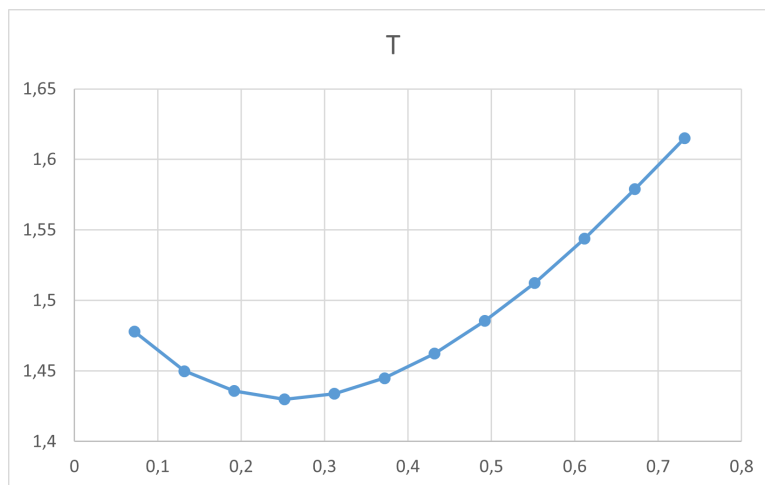
Таблица 3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
у, см	73,18	67,18	61,18	55,18	49,18	43,18	37,18	31,18	25,18	19,18	13,18	7,18
Т, с	1,62	1,58	1,54	1,51	1,49	1,46	1,45	1,43	1,43	1,44	1,45	1,48
х <sub>ц</sub> , см	38,15	36,74	35,33	33,92	32,51	31,11	29,70	28,29	26,88	25,47	24,06	22,65
g	9,81	9,80	9,81	9,82	9,81	9,81	9,80	9,79	9,80	9,78	9,80	9,79

11. Не выполняли.

12. Оценим затухание маятника, для этого измерим время, за которое амплитуда колебаний уменьшится вдвое - ( $\tau \sim 8$  мин 30 сек, и  $\tau_{\text{зат}} = \frac{\tau}{\ln 2} \sim 735$  сек, тогда декремент затухания  $\gamma = \frac{1}{\tau_{\text{зат}}} \sim 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ , а добротность  $Q = \pi \frac{\tau_{\text{зат}}}{T} \sim 1500$ ). Погрешность добротности посчитать невозможно.

### 3 Обработка результатов измерений.

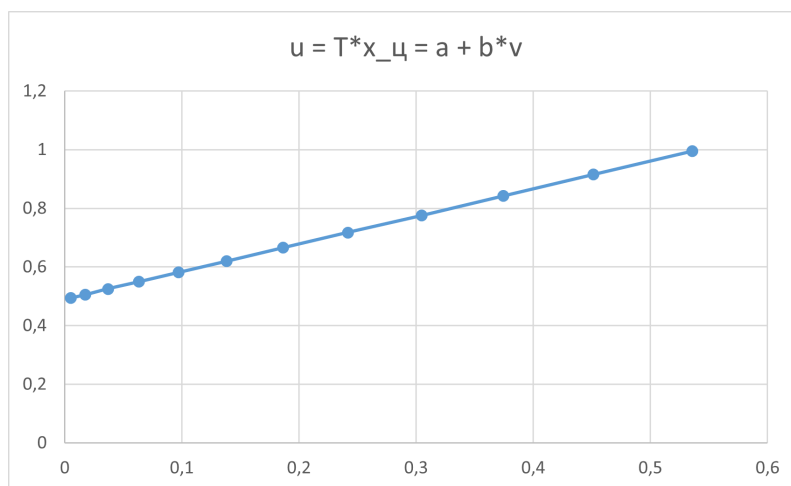
13. Усредним значения  $g$  из таблицы 3 и оценим погрешность.  $g \sim 9,8 \frac{M}{c^2}$  (9,55),  $\sigma_g = 1,12 \frac{M}{c^2}$  (1,15),  $\varepsilon_g = 1,2\%$  (1,6).
14. Построим график зависимости  $T$  от  $y$ .



Этот график имеет вид  $T = a\sqrt{\frac{b+c \cdot y^2}{d+e \cdot y}} = \sqrt{\frac{J_0+m_r \cdot y^2}{g(x_{ц0}m_{ст}+y \cdot m_r)}}$ ,  $b = J_0$ ,  $c = m_r$ ,  $d = x_{ц0}m_{ст}$ ,  $e = m_r$

Минимум ф-ии  $T(y)$  можно определить, решая ур-ие  $\frac{d}{dy}T = 0 \Rightarrow y_{min} = \sqrt{\frac{d^2}{e^2} + \frac{b}{c}} - \frac{d}{e} = \frac{x_{ц0}m_{ст}}{m_r} \cdot (\sqrt{\frac{J_0m_r}{x_{ц0}^2m_{ст}^2} + 1} - 1) \sim 27$  см. По графику видно, что минимум достигается в точке  $y_{min} = 25$  см, в этом случае ошибка равна шагу, с которым мы перемещали груз, т.е. 6 см.  $y_{min} = (25 \pm 6)$  см.

15. Построим график зависимости  $u(v)$ , где  $u = T^2 \cdot x_{ц}$  и  $v = y^2$  (см. рисунок 4). График  $u(v)$  должен получиться линейным, так как, по формуле (13),  $u = 4\pi^2 \frac{J_0}{gM} + 4\pi^2 \frac{m_r}{gM} = a + b \cdot v$ , где  $J_0$  - момент инерции маятника отн. подвеса.



16. Найдем коэффициент наклона ( $b$ ) и пересечение с осью ординат ( $a$ ) прямой  $u(v)$  (мы воспользовались мнк). В результате  $a = 0,4849 \pm 0,0008$ ,  $b = 1,000 \pm 0,005$ ;  $a \sim 0,5$ ,  $b \sim 1$ . Из коэффициентов  $a$  и  $b$  можно найти  $g$  ( $g = 4\pi^2 \frac{J_0}{a \cdot M} = 4\pi^2 \frac{m_r}{b \cdot M}$ ). В результате  $g = 9,83 \frac{M}{c^2}$  (9,27)
17. Найдем погрешность измерения  $g$  в п. 16.  $\sigma_g = \sqrt{\varepsilon_{m_r}^2 + \varepsilon_M^2 + \varepsilon_b^2} \sim 0,05 \frac{M}{c^2}$ ,  $\varepsilon_g = \frac{\sigma_g}{g} \sim 0,5\%$
18. Метод нахождения  $g$  лучше в 16 пункте, чем в 13, т.к. ошибка меньше.



19. В результате мы получили ускорение свободного падения  $g$  двумя способами. На нашей планете  $g$  варьируется от 9,78 на экваторе, до 9,82 на полюсах. Мы получили, что  $g = (9,80 \pm 0,12) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$   $g = (9,83 \pm 0,05) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Наше значение отличается от истинного на 0,15%.

**Вывод:**

В результате выполнения работы, мы убедились в справедливости формул для периода колебаний физического маятника, в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника, определили ускорение свободного падения двумя способами.