

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа прикладной математики и информатики

**Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.4.8**  
Измерение модуля Юнга методом акустического резонанса

Автор:  
Чикин Андрей Павлович  
Б05-304

Долгопрудный, 2023

# Содержание

<b>1 Краткая Теория.</b>	<b>2</b>
1.1 Введение . . . . .	2
1.2 Уравнение волны в тонком стержне . . . . .	2
1.3 Бегущие акустические волны. Скорость волны . . . . .	3
1.4 Собственные колебания стержня. Стоячие волны . . . . .	3
1.5 Схема. . . . .	5
<b>2 Выполнение.</b>	<b>6</b>
2.1 Обработка результатов . . . . .	9
<b>3 Вывод</b>	<b>12</b>

# Список иллюстраций

1 Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях . . . . .	3
2 Гармоники . . . . .	4
3 Схема установки. . . . .	5
4 Электромагнитный датчик . . . . .	6
5 Частотометр. . . . .	7
6 Бабочка на осциллографе. . . . .	9
7 Графики зависимости $f_n$ от $n$ для каждого стержня. . . . .	10

# Список таблиц

1 Таблица со скоростями волн и предполагаемыми частотами первого резонанса в стержнях. . . . .	6
2 Гармоники. . . . .	7
3 Измерения характеристик маленьких экземпляров стержней . . . . .	8
4 Плотность стержней. . . . .	8
5 Скорости в стержнях, найденные по формуле (2.1) . . . . .	11
6 Средние скорости . . . . .	11
7 Наклоны прямых. . . . .	11
8 Скорости, найденные по МНК. . . . .	12
9 Модули Юнга, полученные через скорости в таблице 6 . . . . .	12
10 Модули Юнга, полученные через скорости в таблице 8 . . . . .	12
11 Табличные Модули юнга. . . . .	12

## Цель работы:

1. исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне.
2. измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров.
3. измерить модули Юнга различных материалов.

## Приборы:

1. генератор звуковых частот
2. частотометр
3. осциллограф
4. электромагнитные излучатель и приёмник колебаний
5. набор стержней из различных материалов

# 1 Краткая Теория.

## 1.1 Введение.

Закон Гука:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (1.1)$$

Малые деформации твердых тел вызывают волны, которые называют акустическими или звуковыми. Волны сжатия/растяжения, распространяющиеся вдоль оси, по которой происходит деформация, называются продольными.

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.2)$$

, где  $u$  - скорость распространения продольной акустической волны,  $\rho$  - плотность среды.

Характерные значения модуля Юнга металлов лежат в диапазоне  $E \sim (10^{10} - 10^{12})$  Па, так как при плотности  $\rho \sim 10^4$  кг/м<sup>3</sup> характерные значения скорости звука в твёрдых телах составляют  $u \sim (10^3 - 10^4)$  м/с.

Рассмотрим стержень постоянного круглого сечения, радиус  $R$  которого много меньше его длины  $L$ . С точки зрения распространения волн стержень можно считать тонким, если длина  $\lambda$  звуковых волн в нём велика по сравнению с его радиусом:  $\lambda \gg R$ .

## 1.2 Уравнение волны в тонком стержне

Пусть плоскость среды, находящаяся исходно в точке  $x$ , сместилась к моменту  $t$  на расстояние  $\xi(x, t)$ .

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.3)$$

(1.1) implies

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.4)$$

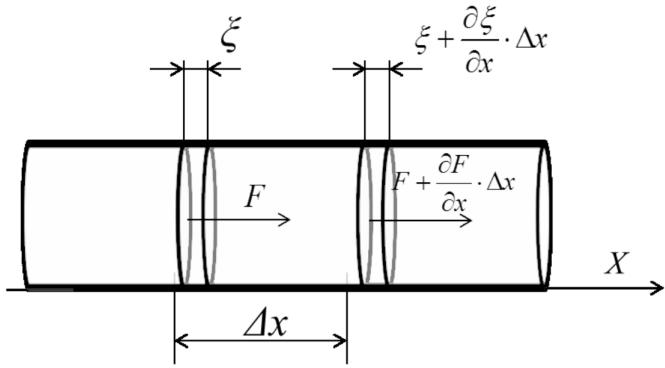


Рис. 1: Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях

$$\Delta F = S\Delta x \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x} ES\Delta x \quad (1.5)$$

Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 t} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x} \quad (1.6)$$

При  $\lambda \ll R$ :

$$u_i = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}$$

### 1.3 Бегущие акустические волны. Скорость волны

Общее решение волнового ур-ия (1.6):

$$\xi(x,t) = \phi_1(x - ut) + \phi_2(x + ut) \quad (1.7)$$

### 1.4 Собственные колебания стержня. Стоячие волны

В случае гармонического возбуждения:

$$\xi(x,t) = A_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + kx + \varphi_2) \quad (1.8)$$

$\omega = 2\pi f$  - циклическая частота,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число или пространственная частота волны.

Если концы не закреплены:

$$\sigma(0) = 0 \implies \frac{\partial \xi}{\partial x}(x=0) = 0, \quad (1) \quad \sigma(L) = 0 \implies \frac{\partial \xi}{\partial x}(x=L) = 0 \quad (2) \quad (1.9)$$

(1.8) и (1.9)  $\implies$

$$A_1 = A_2 \quad (1.10)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (1.11)$$

(1.8), (1.10), (1.11)  $\implies$

$$\xi(x,t) = 2A \cdot \cos kx \cdot \sin(\omega t \varphi) \quad (1.12)$$

Колебания вида (1.12) называют гармоническими стоячими волнами.

Воспользуемся вторым граничным условием (1.9):

Воспользуемся вторым граничным условием (1.9) применительно к функции (1.12). В результате придём к уравнению  $\sin(kL) = 0$ , решения которого определяют набор допустимых значений волновых чисел  $k$ :

$$k_n L = \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.13)$$

выражая (1.13) через длину волны  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , получим

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.14)$$

Таким образом, для возбуждения стоячей волны на длине стержня должно укладываться целое число полуволн.

Допустимые значения частот:

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.15)$$

называют собственными частотами колебаний стержня длиной  $L$ . Именно при совпадении внешней частоты с одной из частот  $f_n$  в стержне возникает акустический резонанс.

Зависимость амплитуды смещения от координаты для собственных колебаний стержня с незакреплёнными концами при  $n = 1, 2, 3$  представлена на рис. 2.

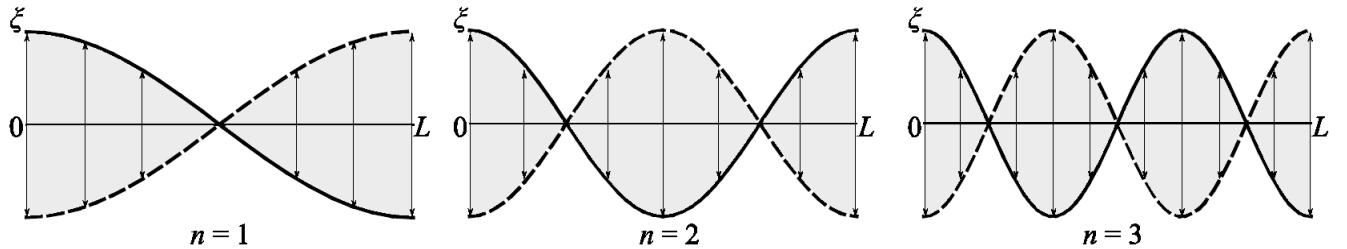


Рис. 2: Собственные продольные колебания стержня с незакреплёнными концами

## 1.5 Схема.

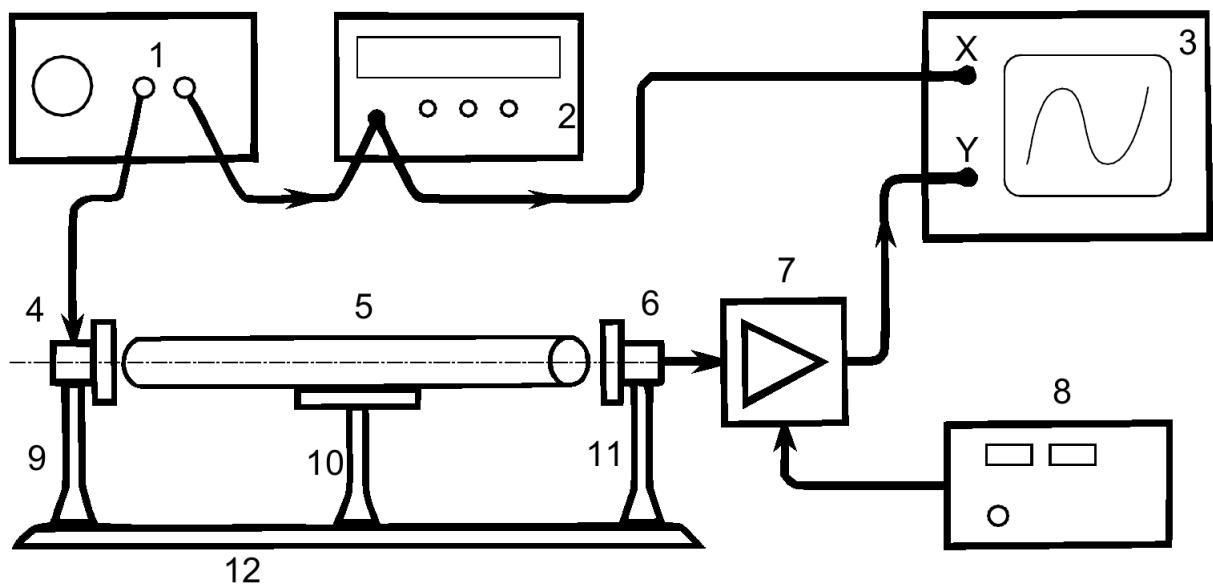


Рис. 3: Схема установки.

- 1 - генератор звуковой частоты
- 2 - частотометр
- 3 - осциллограф
- 4 - электромагнит-возбудитель
- 5 - образец
- 6 - электромагнитный приемник
- 7 - усилитель звуковой частоты
- 8 - блок питания усилителя
- 9 и 11 - стойки крепления электромагнитов
- 10 - стойка крепления образца
- 12 - направляющая

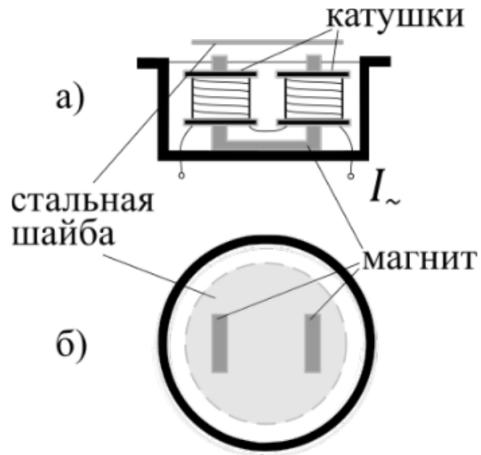


Рис. 4: Электромагнитный датчик: а) вид спереди, б) вид сверху

## 2 Выполнение.

- Познакомимся с основными органами управления электронного осциллографа. По техническому описанию к работе проведем предварительную настройку осциллографа и звукового генератора.
- Раздвинем датчики и поместим на подставку между ними исследуемый стержень. Рекомендуется использовать сначала медный стержень, потом железный и дюралюминиевый. Длина стержней известна.
- Разместим электромагниты напротив торцов стержня как можно ближе, но так, чтобы они не соприкасались.
- Предварительно определим диапазон частот генератора, в котором целесообразно искать резонансы. Для этого оценим частоту первого резонанса по формуле перестраивая  $f_1 = \frac{u}{2L}$ , воспользовавшись табличным значением скорости. (см. таблицу 1)

	u, м/с	$f_1$ , кГц
Медь	3790	3.16
Железо	5170	4.31
дюралюминий	5150	4.29

Таблица 1: Таблица со скоростями волн и предполагаемыми частотами первого резонанса в стержнях.

- Вблизи расчетной частоты  $f_1$  найдем резонанс. В резонансе амплитуда волн максимальна, чтобы достичь максимальной амплитуды, мы можем делать три вещи: менять частоту генератора, менять положение электромагнитов и настраивать осциллограф.

Измерять амплитуду на осциллографе мы можем в двух режимах: фигурой Лиссажу и синусоидой. В первом случае на экране будет эллипс, который резко увеличится в размерах или даже превратиться в "бочку", при достижении резонанса. Во втором случае, амплитуда синусоиды резко увеличится, при достижении резонанса.

- Определим значение первой резонансной частоты  $f_1$  по частотометру. (см. таблицу 2)

7. Получим резонансы на частотах, соответствующих следующим (кратным) гармоникам. Для этого, плавно перестраивая генератор, добьемся резонанса вблизи частот  $f_n \approx nf_1$ . Найдите как можно больше гармоник, мы нашли 7. (см. таблицу 2).

**Замечание.** Не учитывая человеческий фактор, погрешность измерения  $f$  равна последнему разряду на частотометре, т.е.  $10^{-6}$  кГц, однако, в действительности, погрешность значительно больше, так как настроить генератор на частоту с такой точностью просто невозможно, при этом, даже если вы настроились на правильную частоту, не факт, что вы сможете распознать ее как резонансную.

По моим ощущениям, погрешность составляет 10-50 Гц.

Даже так, если быть неаккуратным, то могут получиться сильные отклонения от ожидаемых значений, как получилось у нас с четвертой и пятой гармоникой меди (см. рис. 6).



Рис. 5: Частотометр.

	Медь			Железо			Дюраль		
	$f$ , кГц	$\sigma_f$ , кГц	$\varepsilon_f$	$f$ , кГц	$\sigma_f$ , кГц	$\varepsilon_f$	$f$ , кГц	$\sigma_f$ , кГц	$\varepsilon_f$
$f_1$	3.25	0.01	0.31%	4.13	0.01	0.24%	4.25	0.01	0.23%
$f_2$	6.49	0.01	0.15%	8.27	0.01	0.12%	8.50	0.01	0.12%
$f_3$	9.72	0.01	0.10%	12.40	0.01	0.08%	12.78	0.01	0.08%
$f_4$	12.26	0.01	0.08%	16.55	0.01	0.06%	17.02	0.01	0.06%
$f_5$	16.50	0.01	0.06%	20.68	0.01	0.05%	21.30	0.01	0.05%
$f_6$	19.48	0.01	0.05%	24.81	0.01	0.04%	25.38	0.01	0.04%
$f_7$	22.72	0.01	0.04%	28.94	0.01	0.03%	30.22	0.01	0.03%

Таблица 2: Гармоники.

8. Найдем плотность стержня, для этого измерим массу, диаметр и длину восьми маленьких экземпляров из исследуемого материала. (см. таблицу 3 и 4)

		m, г	$\sigma_m$ , г	$\varepsilon_m$	d, см	$\sigma_d$ , см	$\varepsilon_d$	l, см	$\sigma_l$ , см	$\varepsilon_l$
Медь	1	29.110	0.001	0.003%	1.19	0.01	0.84%	2.98	0.01	0.34%
	2	30.110	0.001	0.003%	1.20	0.01	0.83%	3.10	0.01	0.32%
	3	9.461	0.001	0.003%	1.18	0.01	0.85%	3.00	0.01	0.33%
	4	39.385	0.001	0.003%	1.20	0.01	0.83%	3.98	0.01	0.25%
	5	40.990	0.001	0.002%	1.20	0.01	0.83%	4.00	0.01	0.25%
	6	40.352	0.001	0.002%	1.20	0.01	0.83%	4.05	0.01	0.25%
	7	38.714	0.001	0.003%	1.18	0.01	0.85%	4.02	0.01	0.25%
	8	41.334	0.001	0.002%	1.20	0.01	0.83%	4.14	0.01	0.24%
Железо	1	28.107	0.001	0.004%	1.23	0.01	0.81%	3.12	0.01	0.32%
	2	26.159	0.001	0.004%	1.21	0.01	0.83%	2.99	0.01	0.33%
	3	26.029	0.001	0.004%	1.20	0.01	0.83%	2.96	0.01	0.34%
	4	35.185	0.001	0.003%	1.20	0.01	0.83%	4.00	0.01	0.25%
	5	34.941	0.001	0.003%	1.20	0.01	0.83%	3.96	0.01	0.25%
	6	35.137	0.001	0.003%	1.20	0.01	0.83%	4.00	0.01	0.25%
	7	36.923	0.001	0.003%	1.19	0.01	0.84%	4.11	0.01	0.24%
	8	37.088	0.001	0.003%	1.20	0.01	0.83%	4.12	0.01	0.24%
Дюраль	1	9.490	0.001	0.011%	1.22	0.01	0.82%	3.10	0.01	0.32%
	2	9.195	0.001	0.011%	1.19	0.01	0.84%	3.10	0.01	0.32%
	3	8.990	0.001	0.011%	1.20	0.01	0.83%	3.00	0.01	0.33%
	4	9.260	0.001	0.011%	1.19	0.01	0.84%	3.08	0.01	0.32%
	5	12.187	0.001	0.008%	1.19	0.01	0.84%	4.00	0.01	0.25%
	6	12.461	0.001	0.008%	1.18	0.01	0.85%	4.14	0.01	0.24%
	7	12.487	0.001	0.008%	1.18	0.01	0.85%	4.15	0.01	0.24%
	8	13.228	0.001	0.008%	1.24	0.01	0.81%	4.13	0.01	0.24%

Таблица 3: Измерения характеристик маленьких экземпляров стержней

	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\sigma_\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\varepsilon_\rho$
Медь	8.83	0.21	2.4%
Железо	7.79	0.21	2.7%
дюралюминий	2.69	0.07	2.6%

Таблица 4: Плотность стержней.

9. Определим среднее значение диаметра исследуемого стержня, проверим, что стержень действительно "тонкий", т.е.  $R/\lambda \ll 1$ .

$$d = (1.20 \pm 0.02) \text{ см}, \quad \varepsilon_d = 1.5\%$$

10. Проведем опыты 2-9 для каждого стержня (см. таблицу 2)

- 11\*. Для одного из стержней проведем дополнительный опыт: при половинной частоте  $f = f_1/2$  добьемся на экране осциллографа фигуры Лиссажу в режиме "Х-Y". (см. рис. 6)

Как объяснить это явлениее, я не догадался.

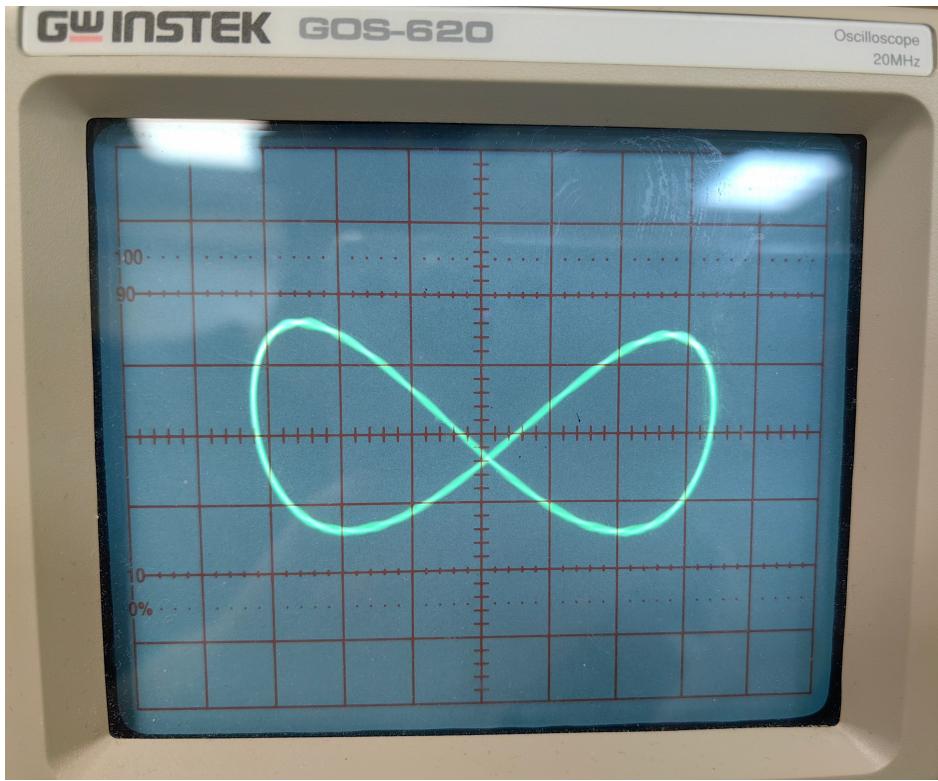


Рис. 6: Бабочка на осциллографе.

12. Определим добротность стержня как колебательной системы, измерив амплитудно-частотную характеристику одного из стержней (лучше выбрать медный) вблизи первого резонанса. Найдите частоты  $f_{11}$  и  $f_{12}$ , при которых амплитуда в  $\sqrt{2}$  раз меньше максимальной, т.е.  $A(f_1) = A(f_2) = A/\sqrt{2}$ . Пусть  $\Delta f_1 = |f_{12} - f_{11}|$ . Тогда добротность:  $Q = \frac{f_1}{\Delta f_1}$ . Уточните у преподавателя, как получить амплитуду на осциллографе.

$$Q = 1449$$

- 13\*. По указанию преподавателя повторите опыты 2-9 для стержней меньшей длины.

Не выполняли.

## 2.1 Обработка результатов

14. Для каждого из исследованных стержней построим графики зависимости  $f_n$  от  $n$  для каждого стержня, убедимся в их линейности и в том, что они проходят через начало координат (см. рис. 6).

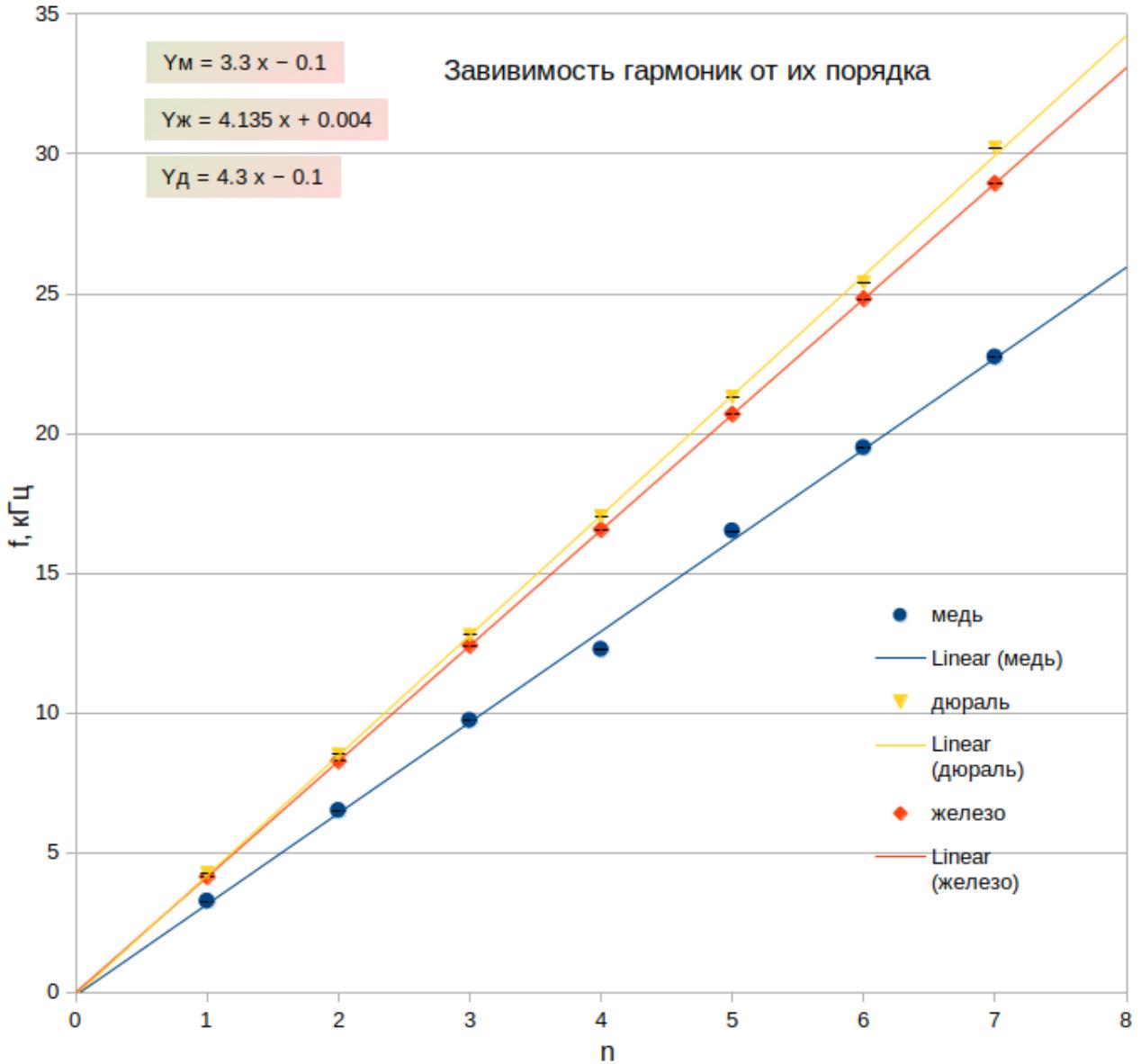


Рис. 7: Графики зависимости  $f_n$  от  $n$  для каждого стержня.

15. Построим наилучшие прямые по экспериментальным точкам и определим скорости звука и. Воспользуемся формулой (1.15).

$$u = 2L \frac{f_n}{n} \quad (2.1)$$

Найдем скорость волн двумя способами: усреднив значения, полученные по формуле 2.1 и по МНК.

**Первый способ** ( $u = \langle u_n \rangle$ ) (см. таблицу 6) :

$$u_n = 2L \frac{f_n}{n}$$

$$u = \langle u_n \rangle = \left\langle 2L \frac{f_n}{n} \right\rangle = 2L \cdot \left\langle \frac{f_n}{n} \right\rangle$$

$$\sigma_u = \sqrt{(\sigma_u^{\text{случ}})^2 + (\sigma_u^{\text{приб}})^2} = \sqrt{STDEV(\{u_n\})^2 + \langle \sigma_{u_n} \rangle^2}$$

Таким образом:

	Медь			Железо			Дюраль		
	$u_n$ , км/с	$\sigma_{u_n}$ , км/с	$\varepsilon_{u_n}$	$u_n$ , км/с	$\sigma_{u_n}$ , км/с	$\varepsilon_{u_n}$	$u_n$ , км/с	$\sigma_{u_n}$ , км/с	$\varepsilon_{u_n}$
1	3.91	0.01	0.2%	4.96	0.01	0.2%	5.11	0.01	0.2%
2	3.90	0.01	0.2%	4.97	0.01	0.2%	5.11	0.01	0.2%
3	3.89	0.01	0.2%	4.96	0.01	0.2%	5.11	0.01	0.2%
4	3.68	0.01	0.2%	4.97	0.01	0.2%	5.11	0.01	0.2%
5	3.96	0.01	0.2%	4.96	0.01	0.2%	5.11	0.01	0.2%
6	3.90	0.01	0.2%	4.96	0.01	0.2%	5.08	0.01	0.2%
7	3.90	0.01	0.2%	4.96	0.01	0.2%	5.18	0.01	0.2%

Таблица 5: Скорости в стержнях, найденные по формуле (2.1)

	$u$ , км/с	$\sigma_u$ , км/с	$\varepsilon_u$
Медь	3.88	0.09	2.3%
Железо	4.96	0.01	0.2%
Дюраль	5.12	0.03	0.6%

Таблица 6: Средние скорости

**Второй способ (МНК) (см. таблицу 8) :**

Пусть а - наклон прямой  $f_n(n)$ .

$$f_n = a \cdot n = \frac{u}{2L} \cdot n \implies a = \frac{u}{2L}$$

$$u = 2L \cdot a$$

$$\sigma_a = u \cdot \sqrt{\varepsilon_L^2 + \varepsilon_a^2}$$

$\sigma_a$  находится по известной формуле из МНК:

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - a^2}, \quad (y = ax + b) \quad (2.2)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - a^2}, \quad (y = ax) \quad (2.3)$$

Однако, эти формулы не учитывают приборные погрешности x и y.

Таким образом: (см. таблицу 6 и 7)

	a, кГп	$\sigma_a^1$ , кГп	$\varepsilon_a^1$	$\sigma_a^2$ , кГп	$\varepsilon_a^2$
Медь	3.24	0.13	4%	0.07	2%
Железо	4.14	0.10	2%	0.09	2%
Дюраль	4.25	0.23	5%	0.17	4%

Таблица 7: Наклоны прямых.

	u, км/с	$\sigma_u^1$ , км/с	$\varepsilon_u^1$	$\sigma_u^2$ , км/с	$\varepsilon_u^2$
Медь	3.91	0.15	4%	0.09	2%
Железо	4.96	0.12	2%	0.11	2%
Дюраль	5.15	0.28	5%	0.20	4%

Таблица 8: Скорости, найденные по МНК.

16. Определим модуль Юнга E по найденным значениям.

Воспользуемся формулой (1.2).

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$E = u^2 \rho, \quad \sigma_E = E \cdot \sqrt{(2\sigma_u)^2 + \sigma_\rho^2}$$

	E, ГПа	$\sigma_E$ , ГПа	$\varepsilon_E$
Медь	133	7	5.2%
Железо	192	5	2.7%
Дюраль	70	2	2.9%

Таблица 9: Модули Юнга, полученные через скорости в таблице 6

	E, ГПа	$\sigma_E$ , ГПа	$\varepsilon_E$
Медь	135	11	8%
Железо	192	10	5%
Дюраль	71	8	11%

Таблица 10: Модули Юнга, полученные через скорости в таблице 8

	E, ГПа
Медь	130
Железо	195
Дюраль	71

Таблица 11: Табличные Модули юнга.

17\*. Проделайте пункты 14-16 для маленьких стержней, если вы выполняли пункт (10).

Не выполняли.

### 3 Вывод

В данной работе мы экспериментально показали, что отношение резонантной частоты к номеру гармоники  $f_n/n$  остается постоянным. Мы также вычислили значения скорости продольных волн в тонких стержнях, провели расчеты модуля Юнга для меди, стали и дюралюминия, которые совпали с табличными значениями в пределах погрешности.