

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа прикладной математики и информатики

**Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.3.1 (первая часть) и 1.3.2  
(вторая часть)**

Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки и Определение  
модуля сдвига при помощи крутильных колебаний

Автор:  
Чикин Андрей Павлович  
Б05-304

Долгопрудный, 2023

# Содержание

<b>1 Первая часть.</b>	<b>1</b>
1.1 Краткая Теория. . . . .	1
1.2 Выполнение . . . . .	2
1.3 Вывод . . . . .	5
<b>2 Вторая часть.</b>	<b>5</b>
2.1 Краткая Теория . . . . .	5
2.2 Выполнение . . . . .	7
2.3 Вывод . . . . .	10

## 1 Первая часть.

Цель работы :

- 1. экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией (закон Гука) для проволоки
- 2. по результатам измерений вычислить модуль Юнга

Приборы :

- 1. прибор Лермантова
- 2. проволока из исследуемого материала
- 3. зрительная труба со шкалой
- 4. набор грузов
- 5. огромная линейка

### 1.1 Краткая Теория.

Для определения модуля Юнга проволоки используется прибор Лермантова, схема которого изображена на рис. (1). Верхний конец проволоки П, изготовленной из исследуемого материала, прикреплен к консоли К, а нижний - к цилиндру, которым оканчивается шарнирный кронштейн Ш. На этот же цилиндр опирается рычаг г, связанный с зеркальцем З. Таким образом, удлинение проволоки можно измерить по углу поворота зеркала.

Натяжение проволоки можно менять, перекладывая грузы с площадки М на площадку О и наоборот. Такая система позволяет исключить влияние деформации кронштейна К на точность измерений, так как нагрузка на нем все время остается постоянной.

Важно учитывать, что проволока всегда несколько изогнута.

Найти зависимость удлинения проволоки  $\Delta \ell$  от отклонения значения на линейке n можно найти по формуле:

$$\Delta l = \frac{\Delta x \cdot r}{h} = \frac{r \cdot n \cdot (\text{см})}{h} \tag{1.1}$$

Закон Гука:

$$P = E \cdot \frac{\Delta \ell}{l_0} \tag{1.2}$$

где E - модуль юнга.

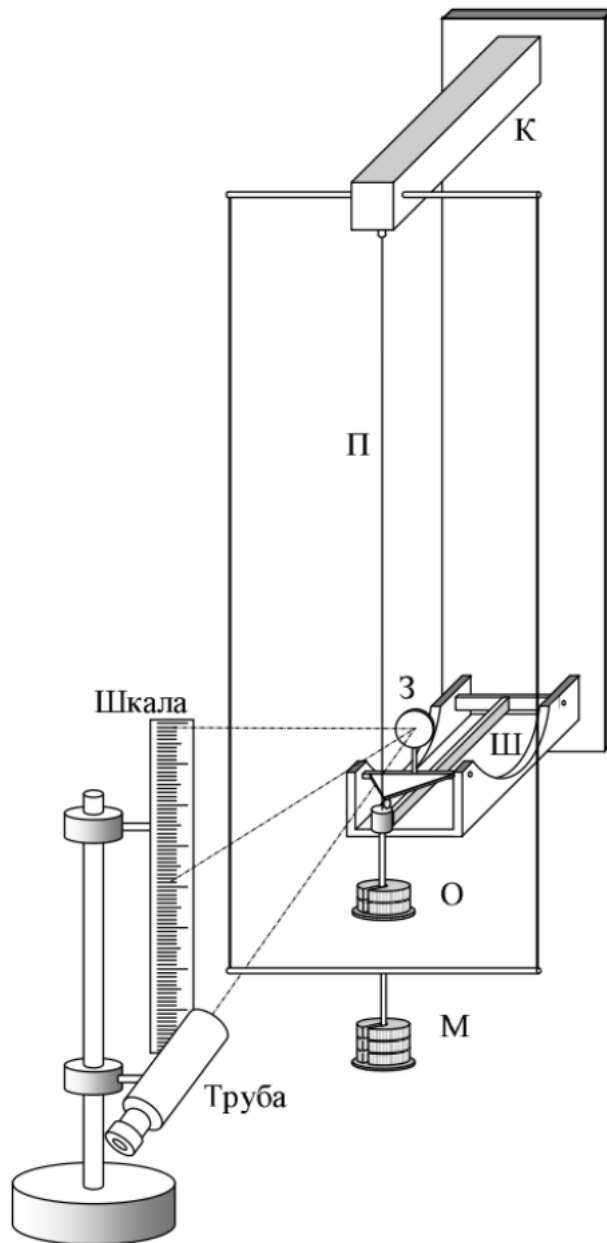


Рис. 1: Прибор Лермантова

## 1.2 Выполнение

1. Диаметр проволоки ( $d$ ) должен быть написан на установке, если это не так, обратитесь к лектору. По диаметру найдем площадь поперечного сечения проволоки.

$$d = (0,730 \pm 0,005)\text{мм}$$

$$S = (0,420 \pm 0,006)\text{мм}^2$$

2. Измерим длину проволоки.

$$l_0 = (175,7 \pm 0,1)\text{см}$$

3. Направим зрительную трубу на зеркальце 3. Выведем формулу, связывающую число делений  $n$  по шкале, расстояние  $h$  от шкалы до зеркальца, длину рычага  $r$  и удлинение проволоки  $\Delta l$ .  $r$  указана на приборе, а расстояние  $h$  следует измерить огромной линейкой.

$$r = (13 \pm 0) \text{ мм}$$

$$h = (144,1 \pm 0,1) \text{ см}$$

Выведенная формула: (1.1)

	значение	$\sigma$	$\varepsilon$
d, мм	0.730	0.005	0.7%
S, мм <sup>2</sup>	0.42	0.01	1.4%
$\ell_0$ , см	175.7	0.1	0.1%
r, мм <sup>2</sup>	13.0	0.1	0.8%
h, см	144.1	0.1	0.1%
E, Н/мм <sup>2</sup>	91728	615	0.67%
k, Н/мм	21,9	0,3	1.53%
масса, г		0.1	
время, с		0.6	

Таблица 1: Значения

4. Необходимо позаботиться о том, чтобы в процессе эксперимента не выйти за пределы области, где удлинение проволоки пропорционально ее натяжению (область пропорциональности). Оценим максимальную величину нагрузки, приняв, что разрушающее напряжение равно 900 Н/мм<sup>2</sup>. Рабочее напряжение не должно превышать 30% от величины разрушающего.

Проверьте правильность сделанной оценки. Для этого нагрузите проволоку одним из имеющихся грузов, затем уберите его и посмотрите, вернулась ли длина проволоки к первоначальному значению. Повторите этот эксперимент с двумя, тремя и т. д. грузами, постепенно доходя до расчетной нагрузки. Если остаточные деформации станут заметными, дальнейшее увеличение нагрузки следует прекратить. При изменении нагрузки на проволоке каждый раз необходимо предварительно арретировать прибор (на рис. 1 арретир не показан).

5. Снимим зависимость удлинения проволоки, то есть числа делений  $n$  по шкале, от массы грузов  $m$  при увеличении и уменьшении нагрузки. Повторите этот эксперимент 2-3 раза. (См. таблицу 2 и 3) В таблице (2):  $m$  - общая масса грузов, подвешенных на нить,  $n_i$  - измеренное отклонение на шкале в см.

	m, г	$n_1$ , см	$n_2$ , см	$n_3$ , см	$n_4$ , см	$\langle n \rangle$ , см	$\sigma_{\langle n \rangle}^{\text{случ}}$ , см	$\sigma_{\langle n \rangle}^{\text{приб}}$ , см	$\sigma_{\langle n \rangle}$ , см	$\varepsilon_{\langle n \rangle}$
1	246	1.5	1.7	1.8	2	1.75	0.21	0.05	0.21	12%
2	491	2.8	3	3.2	3.4	3.1	0.26	0.05	0.26	8%
3	736	4.1	4.1	4.5	4.6	4.325	0.26	0.05	0.27	6%
4	982	5.2	5.4	5.8	5.7	5.525	0.28	0.05	0.28	5%
5	1228	6.4	6.6	7	7	6.75	0.30	0.05	0.30	5%
6	1474	7.7	7.8	8.5	8.2	8.05	0.37	0.05	0.37	5%
7	1719	8.9	9	9.5	9.5	9.225	0.32	0.05	0.32	4%
8	1965	10.2	10.3	10.8	10.7	10.5	0.29	0.05	0.30	3%
9	2211	11.1	11.5	12.1	12	11.675	0.46	0.05	0.47	4%
10	2457	12.2	12.2	13.2	13.2	12.7	0.58	0.05	0.58	5%

Таблица 2: Измерения

$m$  - масса, подвешенная на проволоке

$n_i$  - отклонение от начального значения на шкале линейки

	$P, \frac{H}{mm^2}$	$\sigma_P, \frac{H}{mm^2}$	$\varepsilon_P$	$\Delta\ell, \text{ мм}$	$\sigma_{\Delta\ell}, \text{ мм}$	$\varepsilon_{\Delta\ell}$
1	5.8	0.1	1.4%	0.158	0.019	12.3%
2	11.5	0.2	1.4%	0.280	0.024	8.5%
3	17.3	0.2	1.4%	0.390	0.024	6.2%
4	23.0	0.3	1.4%	0.498	0.026	5.1%
5	28.8	0.4	1.4%	0.609	0.028	4.6%
6	34.6	0.5	1.4%	0.726	0.034	4.7%
7	40.3	0.6	1.4%	0.832	0.030	3.6%
8	46.1	0.6	1.4%	0.947	0.028	2.9%
9	51.8	0.7	1.4%	1.053	0.043	4.1%
10	57.6	0.8	1.4%	1.146	0.053	4.6%

Таблица 3: P и  $\Delta l$

6. Построим график зависимости удлинения проволоки  $\Delta l$  от нагрузки P. (См. рис. 2) Должна получиться прямая. По ее наклону можно найти k проволоки.

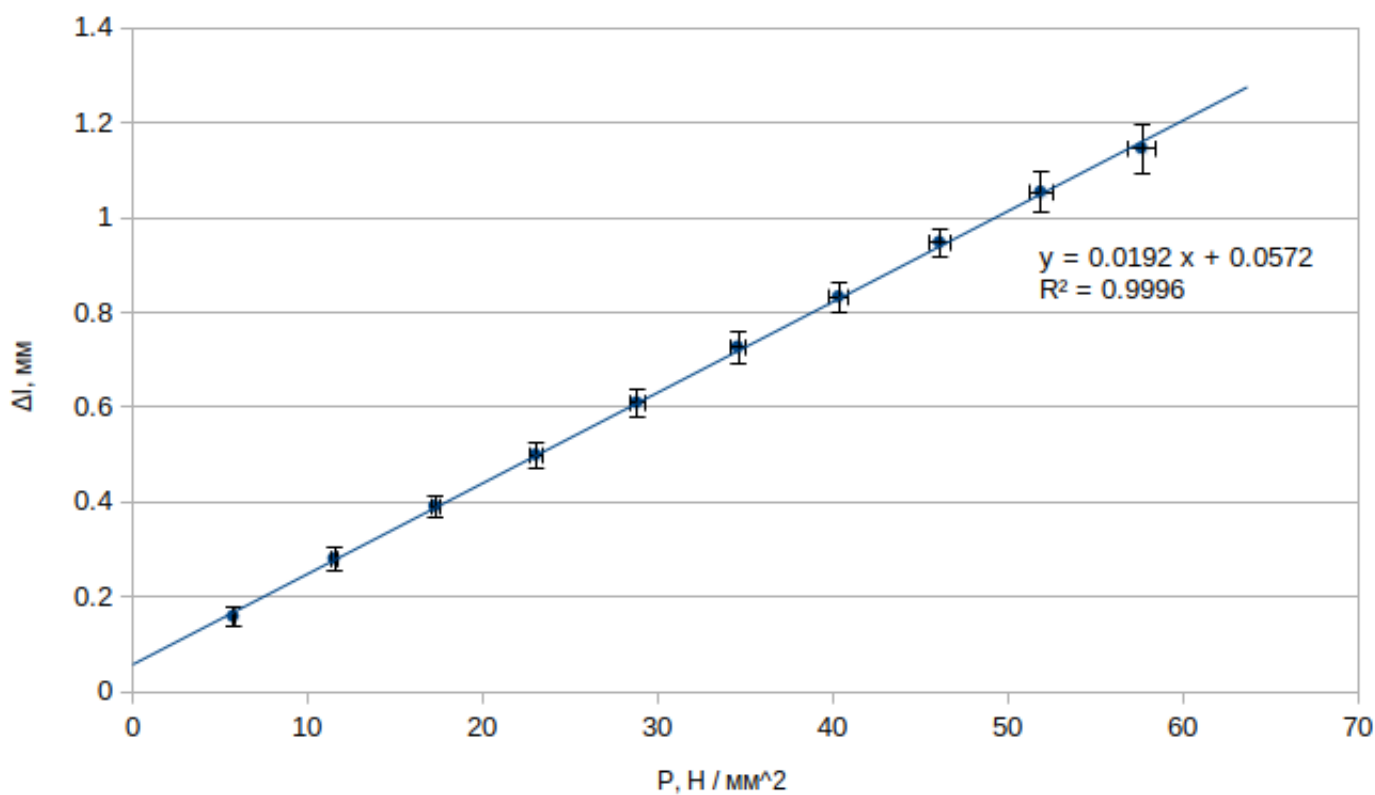


Рис. 2: График зависимости  $\Delta\ell$  от P

Пусть a - наклон линии тренда, т.е.  $\Delta\ell = aP$ . Тогда

$$a = (0.0192 \pm 0.0001) \frac{H}{mm^3}$$

$$k = \frac{S}{a}$$

$$k = (21851 \pm 334) H/m$$

7. Найдем модуль Юнга проволоки E и оценим погрешности.

$$E = \frac{l_0}{a} = \frac{l_0 k}{S}$$

$$E = (91728 \pm 615) H/mm^2$$

$$\varepsilon_a = 0.7\%, \varepsilon_E = 0.7\%, \varepsilon_k = 1.5\%$$

Смотрите таблицу (1)

8. Определим материал проволоки, сравнивая полученное значение с табличными.

Полученное значение попадает под:

1. Латунь ((78500 – 98100) Н/мм<sup>2</sup>)
2. Цинк ((78500 – 98100) Н/мм<sup>2</sup>)

### 1.3 Вывод

Целью первой части лабораторной работы было экспериментальное нахождение зависимости между напряжением и деформацией (закон Гука) для проволоки и нахождение модуля Юнга проволоки. Зависимость изображена на рисунке (2), а полученные значения  $E$  и  $k$  можно посмотреть в таблице (1).

## 2 Вторая часть.

Цель работы :

1. определение модулей кручения и сдвига для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника (динамический метод)

Приборы :

1. проволока из исследуемого материала
2. грузы
3. секундомер
4. микрометр
5. линейка

### 2.1 Краткая Теория

Рассмотрим часть закручиваемого круглого цилиндра, имеющую длину  $\ell$ , которая изображена на рис. 3. Любая прямая линия, проведенная до закручивания цилиндра по частицам материала и параллельная оси симметрии, при закручивании превращается в спираль (винтовую линию). Сечения, находящиеся на расстоянии  $\ell$ , повернуты на угол  $\varphi$ .

$$\alpha d\ell = r d\varphi \quad (2.1)$$

$$\tau = G\alpha \quad (2.2)$$

, где  $\tau$  - касательное напряжение,  $G$  - модуль сдвига.

$$\tau = Gr \frac{d\varphi}{dl} \quad (2.3)$$

$$dM = 2\pi r^2 dr \tau \quad (2.4)$$

$$M = 2\pi G \frac{d\varphi}{dl} \int_0^R r^3 dr = \pi G \frac{d\varphi}{dl} \frac{R^4}{2} \quad (2.5)$$

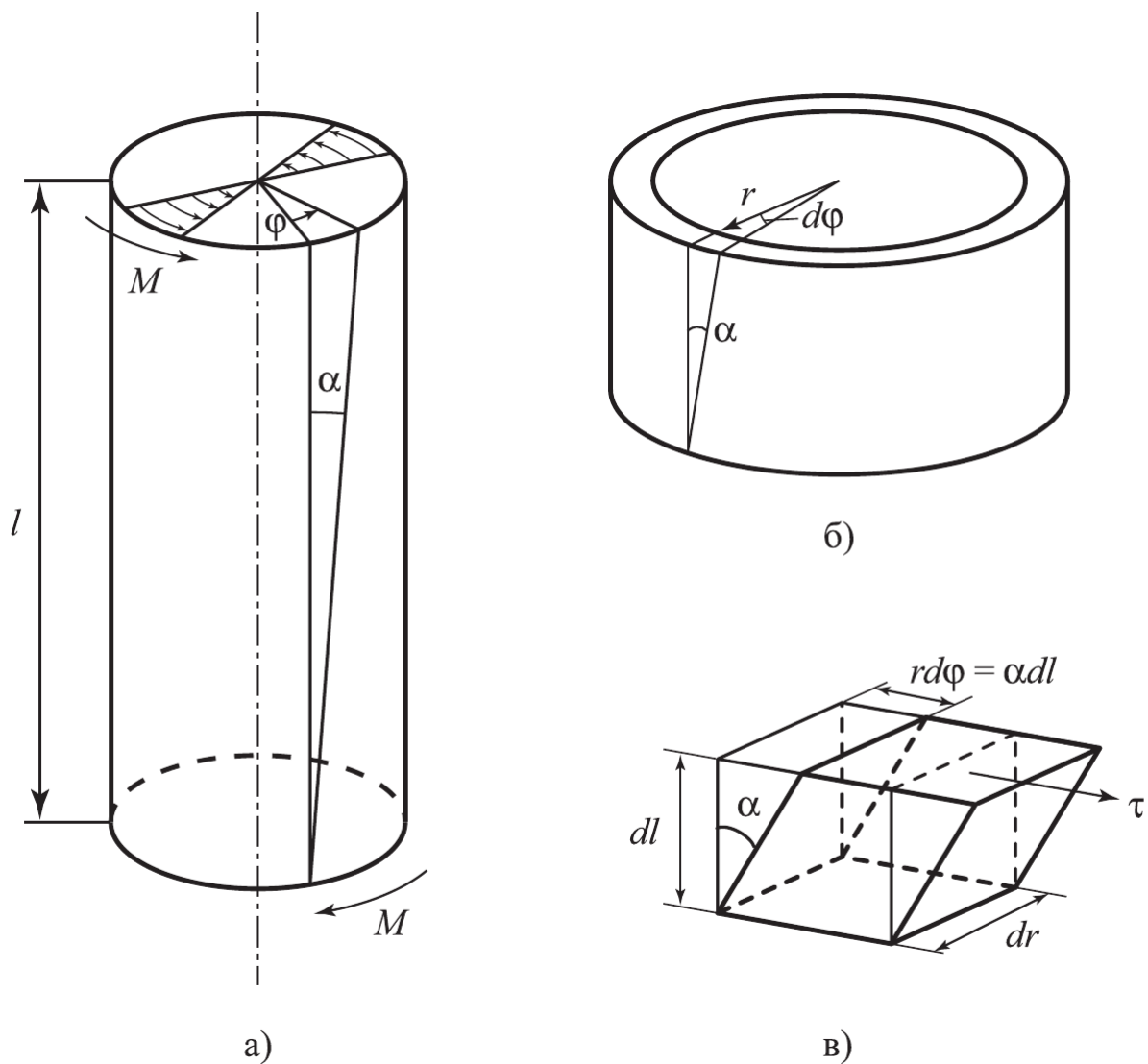


Рис. 3: Закручивание цилиндра.

Этот момент не меняется по длине цилиндра.

$$M = \frac{\pi G R^4}{2\ell} \varphi = f \varphi \quad (2.6)$$

$$f = \frac{\pi G R^4}{2\ell} \quad (2.7)$$

$M$  - момент сил на сечении. Зависимость (2.6) выполняется при напряжениях намного меньших модуля сдвига, то есть при малых углах  $\alpha$ .

Экспериментальная установка, используемая во второй части работы, изображена на рис. 4. Она состоит из длинной вертикально висящей проволоки П, к нижнему концу которой прикреплен горизонтальный металлический стержень С с двумя симметрично расположенными грузами Г. Их положение на стержне можно менять и фиксировать.

При повороте на малый угол  $\varphi$  будут возникать крутильные колебания.

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M \quad (2.8)$$

Здесь  $I$  — момент инерции стержня с грузами относительно оси вращения,  $\varphi$  - угол поворота стержня от положения равновесия,  $M$  - момент сил.

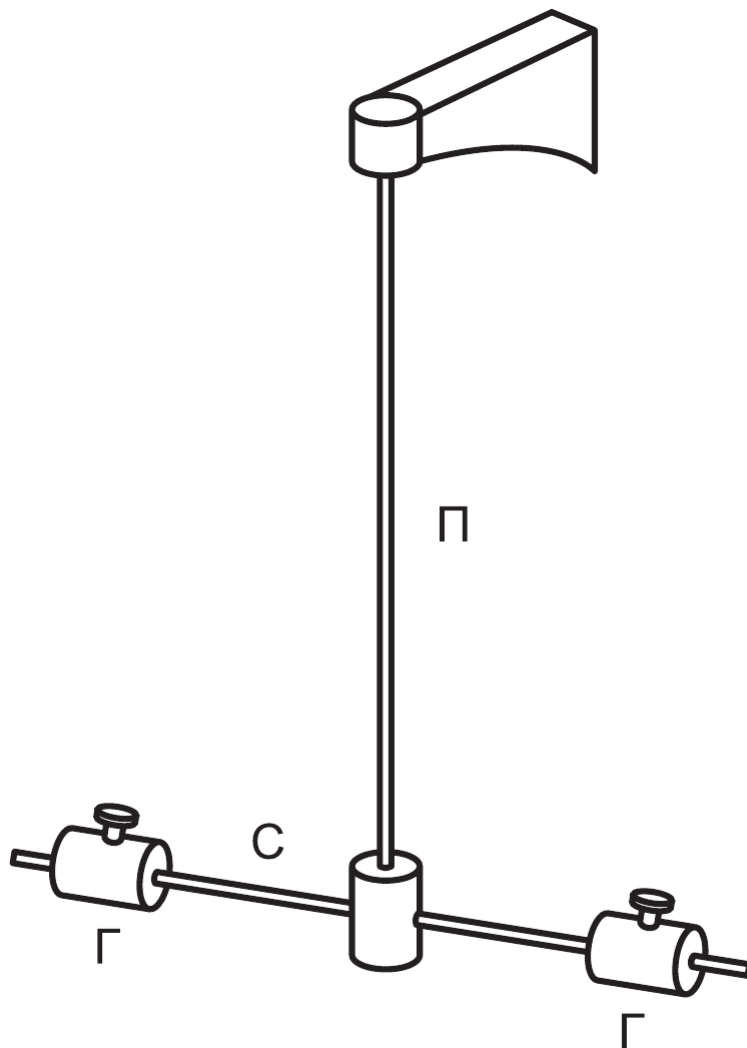


Рис. 4: Схема установки.

$$\omega^2 = \frac{f}{I} \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \quad (2.10)$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \theta) \quad (2.11)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}} \quad (2.12)$$

## 2.2 Выполнение

0 Измерим длину проволоки -  $L$  (см. таблицу (6))

1. Прежде всего установим диапазон амплитуд, в котором применимы результаты, полученные для незатухающих колебаний. Для этого закрепим грузы на некотором расстоянии от проволоки и возбудим в системе крутильные колебания. Измеряя время нескольких (не менее десяти) периодов колебаний, найдем период  $T_1$ . Уменьшив начальную амплитуду вдвое, тем же



способом найдем соответствующий период  $T_2$ . Если  $T_1 = T_2$ , то для проведения измерений можно выбрать любую амплитуду не больше первой. Если окажется, что периоды не равны, то начальную амплитуду следует уменьшать до тех пор, пока не будет достигнуто равенство этих периодов.

Не выполняли.

- Убедимся в том, что после десяти периодов колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем в два раза.

Убедились, но так как у нас не было необходимых приборов для измерения амплитуды, мы могли лишь примерно сказать, что амплитуда изменилась не сильно, поэтому данных, подтверждающих это, нет.

- Установим грузы на стержне на одинаковом расстоянии  $\ell$  от оси и измерим период колебаний  $T$ . Проведем измерения для 4-6 различных значений  $\ell$ . (см. таблицу (4)) Величину модуля кручения можно найти из наклона прямой, проведенной по экспериментальным точкам, отложенным в координатах  $\ell^2, T^2$ . Построим график  $T^2$  от  $\ell^2$ .

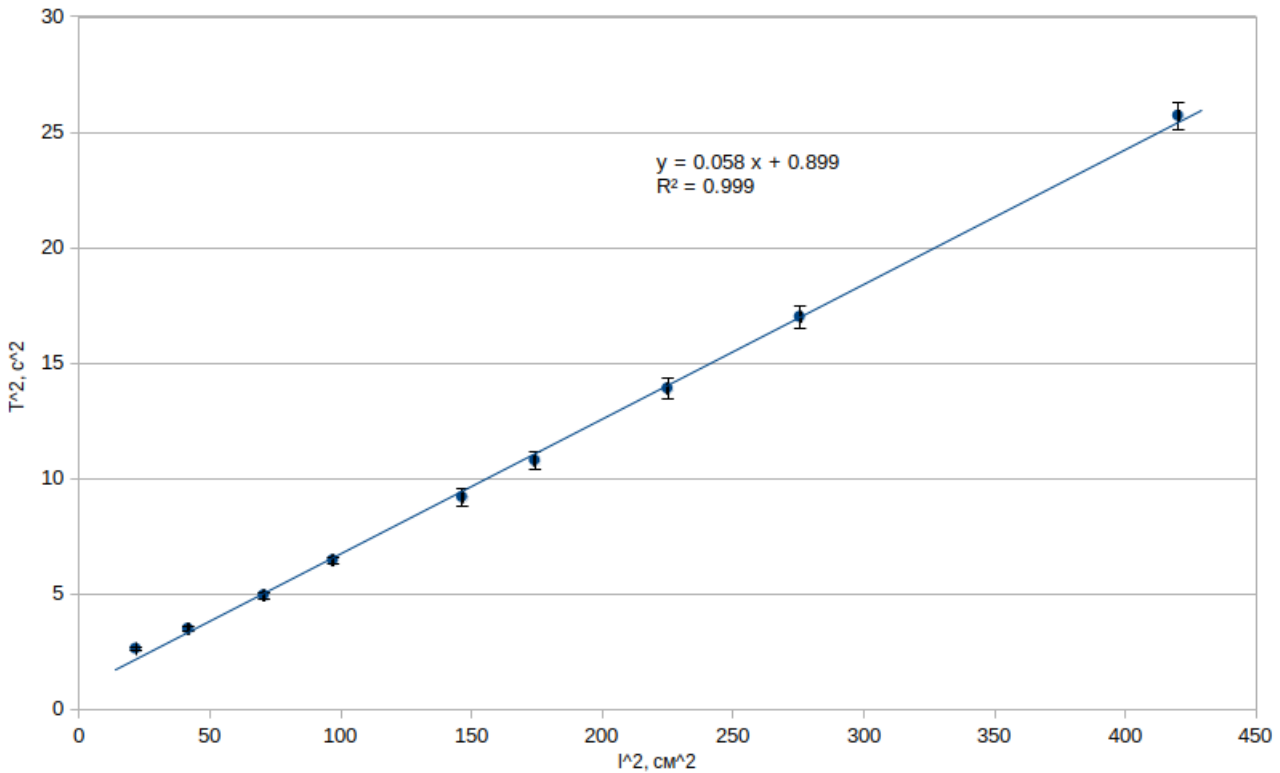


Рис. 5: График зависимости  $\ell^2, \text{см}^2$  от  $T^2, \text{с}^2$ .

Пусть  $a$  - наклон линии тренда, т.е.  $T^2 = a\ell^2 + b$ . Тогда

$$a = (0.058 \pm 0.001) \frac{\text{с}^2}{\text{см}^2}$$

$$\varepsilon_a = 1.12\%$$

$$(2.12) \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 I}{f} = \frac{4\pi^2}{f} (I_{\text{гр}} + I_0) = \frac{4\pi^2 (m_1 + m_2)}{f} \ell^2 + \frac{4\pi^2 I_0}{f}$$

Здесь  $I$  - общий момент инерции системы (см. рис. (4)),  $I_{\text{гр}}$  - момент инерции двух грузов,  $I_0$  - момент инерции установки,  $m_1, m_2$  - массы грузов.

	$\ell$ , см	$\sigma_\ell$ , см	$\varepsilon_\ell$	N	$T_1$ , с	$T_2$ , с	T, с	$\sigma_T$ , с	$\varepsilon_T$
1	4.65	0.01	0.22%	20	32.32	32.33	1.62	0.03	1.86%
2	6.45	0.01	0.16%	20	37.32	37.28	1.87	0.03	1.61%
3	8.40	0.01	0.12%	20	44.38	44.38	2.22	0.03	1.35%
4	9.85	0.01	0.10%	20	50.79	50.79	2.54	0.03	1.18%
5	12.10	0.01	0.08%	10	30.31	30.3	3.03	0.06	1.98%
6	13.20	0.01	0.08%	10	32.84	32.8	3.28	0.06	1.83%
7	15.00	0.01	0.07%	10	37.28	37.25	3.73	0.06	1.61%
8	16.60	0.01	0.06%	10	41.22	41.22	4.12	0.06	1.46%
9	20.50	0.01	0.05%	10	50.7	50.7	5.07	0.06	1.18%

Таблица 4: Измерения

$\ell$  - расстояние от оси вращения системы до центров масс грузов

N - кол-во колебаний

$T_i$  - измеренное время

T - период колебаний

	$\ell^2$ , см <sup>2</sup>	$\sigma_{\ell^2}$ , см <sup>2</sup>	$\varepsilon_{\ell^2}$	$T^2$ , с <sup>2</sup>	$\sigma_{T^2}$ , с <sup>2</sup>	$\varepsilon_{T^2}$
1	21.6	0.1	0.4%	2.6	0.1	4%
2	41.6	0.1	0.3%	3.5	0.1	3%
3	70.6	0.2	0.2%	4.9	0.1	3%
4	97.0	0.2	0.2%	6.4	0.2	2%
5	146.4	0.2	0.2%	9.2	0.4	4%
6	174.2	0.3	0.2%	10.8	0.4	4%
7	225.0	0.3	0.1%	13.9	0.5	3%
8	275.6	0.3	0.1%	17.0	0.5	3%
9	420.3	0.4	0.1%	25.7	0.6	2%

Таблица 5: Значения для графика на рис. (5)

$$a = \frac{4\pi^2(m_1 + m_2)}{f} \implies f = \frac{4\pi^2(m_1 + m_2)}{a}$$

$$\sigma_f = f \cdot \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_a^2}$$

$$f = (27.5 \pm 0.3) \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

$$\varepsilon_f = 1.12\%$$

4. Измерим диаметр проволоки П (см. таблицу 6). По найденному модулю кручения с помощью формулы (2.7) получим модуль сдвига G, оценим погрешность и сравним с табличными значениями в справочниках.

$$(2.7) \implies G = \frac{2lf}{\pi R^4}$$

$$G = (43 \pm 1) \text{ ГПа}$$

$$\varepsilon_G = 1.3\%$$

Значение G попадает в табличное значение для меди и не только, но, скорее всего, это наша проволока сделана из меди.

	значение	$\sigma$	$\varepsilon$
$m_1$ , г	202.5	0.1	0.05%
$m_2$ , г	204.1	0.1	0.05%
$m$ , г	203.3	0.1	0.05%
$h$	4	0.01	0.3%
$a$ , $с^2/см^2$	0.058	0.001	1.12%
$f$ , Н*мм	27.5	0.3	1.12%
$G$ , ГПа	43	1	1.30%
$L$ , см	100	0.01	0.01%
$D$ , мм	1.5052	0.005	0.3%
$R$ , мм	0.7526	0.0025	0.3%
время		0.6	

Таблица 6: Значения

$m_1$  и  $m_2$  - массы грузов

$m$  - ср. знач.  $m_1$  и  $m_2$

$h$  - ширина грузов (расстояние от края до центра масс)

$a$  - наклон прямой на рис. (5)

$f$  - модуль кручения проволоки

$G$  - модуль сдвига проволоки

$L$  - длина проволоки П установки

$D$  и  $R$  - диаметр и радиус проволоки П

## 2.3 Вывод

Во второй части лабораторной работы мы определили модули кручения и сдвига для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника. Поняли из какого материала сделана наша проволока.

	d, мм
1	1.505
2	1.505
3	1.505
4	1.505
5	1.505
6	1.506
7	1.505
8	1.506
9	1.505
10	1.505

Таблица 7: Измерения диаметра проволоки.