-NoValue-

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа прикладной математики и информатики

**Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.4.1**

Изучение экспериментальных погрешностей на примере физического маятника

Автор:
Чикин Андрей Павлович
Б05-304

Долгопрудный, 2023

**Цель работы**:

1. На примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями;
2. Проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения;
3. Убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника;
4. Оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

**Приборы**:

1. Металлический стержень с опорной призмой
2. Дополнительный груз
3. Закреплённая на стене консоль
4. Подставка с острой гранью для определения цента масс маятника
5. Прибор для измерения периода колебаний (секундомер) $\sigma_T \sim 0{,}03$
6. Счётчик колебаний (механический или электронный)
7. Линейки металлические различной длины
8. Штангенциркуль
9. Электронные весы
10. Математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях)

# 1 Краткая Теория.

Физическим маятником называют твёрдое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Основное отличие физического маятника от математического в том, что маятник не является точечным объектом, а представляет собой совокупность жёстко связанных точечных масс. В данной работе в качестве такого маятника используется тонкий однородный металлический стержень, подвешиваемый в некоторой точке с помощью небольшой опорной призмы (см. рис. 1). Острое ребро призмы, опирающееся на подставку, задаёт ось качания (или вращения) маятника.

Рассмотрим тело P и ось S. Моментом инерции P отн. S называется $J = \sum_i m_i \cdot r_i^2$ (или $\int_P r^2 \cdot dm$ если масса P распределена равномерно), где $r_i$ - расстояние от $m_i$ до S. Момент импульса тела: $L = J * \omega$, где $\omega$ - угловая скорость вращения тела отн. оси S. Момент импульса:

$$M = \frac{dL}{dt}(1) = J \cdot \frac{d\omega}{dt}(2)$$

Справедлива следующая формула для тонкого стержня массы m и длины l, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс: $J_c = \frac{m \cdot l^2}{12}$. А для такого же стержня, подвешенного на расстоянии a от центра масс, момент инерции может быть вычислен по формуле Гюйгенса-Штейнера:

$$J = \frac{m \cdot l^2}{12} + m \cdot a^2 \ (3)$$

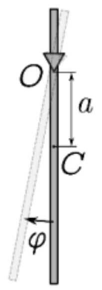



Рис. 1. Стержень как физический маятник

В частности, если подвесить стержень за один из концов: $a = \frac{l}{2} \implies J = \frac{m \cdot l^2}{3}$

Вернёмся к рассмотрению колебаний физического маятника — стержня, подвешенного в поле тяжести (Рис. 1). Маятник подвешен в точке O на расстоянии a до центра масс C. При отклонении стержня от вертикального положения равновесия на угол $\varphi$ возникает момент силы тяжести, стремящийся вернуть стержень в исходное положение. Плечо этой силы, приложенной к точке C, относительно оси подвеса O равно $a \cdot \sin\varphi$, поэтому при небольших углах отклонения $\varphi \ll 1$ возвращающий момент равен:

$$M \;=\; -m \cdot g \cdot a \cdot \sin\varphi \approx -m \cdot g \cdot a \cdot \varphi \text{ (4)}$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что такие колебания будут гармоническими при малых амплитудах. Для гармонических колебаний: $T \;=\; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$, T - период колебаний. Аналогично для физического маятника: $m \;=\; J$, k - отношение момента силы к амплитуде, $k \;=\; mga$. Отсюда

$$T \;=\; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mga}} \text{ (5)}$$

Для стержня:

$$T \;=\; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g \cdot a}} \text{ (6)}$$

Для математического маятника:

$$T \;=\; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ (7)}$$

По опр. приведенная длина: $l_{\text{пр}} \;=\; a + \frac{l^2}{12a}$. Смысл данной величины в том, что физический маятник длины l и подвешенный на расстоянии a имеет тот же период малых колебаний, что и математический маятник длины $l_{\text{пр}}$.

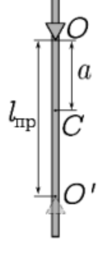



Рис. 2. К теореме Гюйгенса

Гармонические колебания

$$(1),(4) \implies J\ddot{\varphi} + mga\varphi \ = \ 0 \ (9)$$

$$\varphi(t) = A\sin{(\Omega t + \alpha)} \ (10)$$

, где $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mga}{J}}$ - угловая частота колебаний, A - амплитуда, $\alpha$ - начальная фаза колебаний.

Затухание колебаний Если присутствует сила трения, затухания считаются затухающими. Для затухающих колебаний формула (10) справедлива, но амплитуда является убывающей ф-ией от времени: A = A(t). Декремент затухания: $\gamma = \frac{|\Delta A|}{A}$

$$\gamma = const \implies \gamma = -\frac{dA}{A} \implies A(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma t}$$

, где $A_0 = A(0)$.
$\tau = \frac{1}{\gamma}$ - время, за которое амплитуда падает в е раз. Колебания можно считать малым, если $\tau >> T$. Добротность колебательной системы: $Q = \pi\frac{\tau}{T}$

Эксперементальная установка Тонкий стальной стержень длиной $l \sim 1$ м и массой $m \sim 1$ кг (точные параметры определяются непосредственными измерениями) подвешивается на прикреплённой стене консоли с помощью небольшой призмы. Диаметр стержня много меньше его длины $d \sim 12$ мм « l . Небольшая призма крепится на стержне винтом и острым основанием опирается на поверхность закреплённой на стене консоли. Острие ребра призмы образует ось качания маятника. Возможны две схемы реализации установок:
**Установка А.** Призму можно перемещать вдоль стержня, изменяя длину a — расстояние от центра масс до точки подвеса. Период колебаний измеряется непосредственно с помощью секундомера.
**Установка B.** Подвесная призма остаётся неподвижной (a = const), а на стержень маятника насаживается дополнительное тело небольшого размера («чечевица» или цилиндр), положение которого можно изменять, изменяя таким образом момент инерции маятника. Период колебаний маятника в этой схеме измеряется электронным счетчиком импульсов, расположенном у нижнего конца стержня. Дополнительные сведения об установке типа Б приведены ниже (см. стр. 8). Измеряя зависимости периода малых колебаний от положения стержня или дополнительного тела на нём, можно экспериментально проверить формулу (5) (или её частный случай (6)) и вычислить значение ускорения свободного падения g. Формулу (6) можно проверить, откладывая по осям величины $u = T^2$ a и $m = a$ 2 . В этих координатах график u(m) должен иметь вид прямой линии, угловой коэффициент которой пропорционален g, а вертикальное смещение — моменту инерции стержня относительно центра масс.

Измерение периода колебаний Дабы избежать слишком большой ошибки измерения времени ($\sigma_t = 0{,}1 - 0{,}3c$), нужно измерить время несколько раз $(t_1, t_2, ..., t_N)$ и найти случайную погрешность по формуле:

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{\sum{(t_i - <t>)^2}}{N-1}}$$

$$\sigma_t^{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_t^{\text{сист}^2} + \sigma_t^{\text{случ}^2}}$$

Особенности маятника с перемещаемым грузом (установка B) Масса грузика: $m_g = 300 - 400$ гр, диаметр: $d_g \sim 6$см

$$J = J_0 + m_{\text{г}} \cdot y^2$$

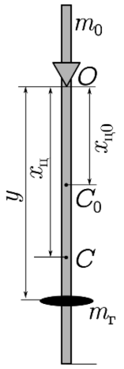


Рис. 3. Маятник с
дополнительным
грузом

где $J_0$ — момент инерции маятника без груза, определяемый по формуле (3).

$$x_2 = \frac{m_0 \cdot x_1 + m_g \cdot y}{M}$$

$$y = \frac{M \cdot x_2 - m_0 \cdot x_1}{m_g} \ (12)$$

$$T \ = \ 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_0 + m_g \cdot y^2}{g \ M \ x_2}} \ (13)$$

Учёт влияния подвесной призмы

Формула (6) получена в предположении, что подвес маятника является материальной точкой. На самом же деле маятник подвешивается с помощью треугольной призмы конечного размера, поэтому использование (6) может привести к систематической погрешности результата. Для более точных расчётов следовало бы воспользоваться общей формулой периода колебаний физического маятника (5), принимая во внимание наличие двух тел — стержня и призмы:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{пр} + J_{ст}}{m_{пр} \ g \ a_{пр} - m_{ст} \ g \ a_{ст}}}$$

, где $J_{пр}$, $m_{пр}$ и $a_{пр}$ — соответственно момент инерции, масса и расстояние до центра масс призмы (знак «минус» в знаменателе учитывает, что призма находится выше оси подвеса). $m_{пр} \sim 70gr$, $a_{пр} \sim 1.5cm \implies J_{пр} = m_{пр} \cdot a_{пр}^2 \sim 10^{-5} kg \ m^2$ $a_{ст} = 10cm \implies J_{ст} \sim 10^{-2} \ kg \ m^2 \implies \xi_{J_{ст}} < 0.1\%$

$$\frac{M_{пр}}{M_{ст}} = \frac{m_{пр} \ g \ a_{пр}}{m_{ст} \ g \ a_{ст}} \sim 1\%$$

# 2 Выполнение работы.

1. Ознакомимся с используемыми в работе измерительными приборами: линейкой, штангенциркулем, секундомером. Определим максимальную систематическую погрешность каждого из них (абсолютное и относительное значение) (смотрите таблицу 1). Оценим, с какой

относительной погрешностью имеет смысл измерять период колебаний маятника. Погрешность итогового результата (косвенно вычисленной величины) не может оказаться больше погрешности самого неточного измерения. В нашем случе относительная погрешность самого неточного измерения равна примерно 1%. Если период маятника примерно равен 1 секунде в нашем случае относительная погрешность измерения одного периода равняется $\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{T} \sim \frac{0.03}{1} = 0.03 = 3\%$. Тогда будет достаточно измерения 3 колебаний. Для большей точности будем измерять период 20 колебаний.

2. Измерим длину стержня $L_{\text{ст}}$ . Взвесим стержень, призму и дополнительный груз ($M_{\text{ст}} =$ 868г, $M_{\text{пр}} = 80$г, $M_{\text{гр}} = 291$г) (для установки Б) на электронных весах. Оценим погрешности измерений (абсолютные и относительные значения) (см. т. 1).

| Таблица 1 | value | σ | ξ |
|---|---|---|---|
| M_ст, гр | 868,3 | 0,1 | 0,01% |
| M_гр, гр | 290,9 | 0,1 | 0,03% |
| M_пр, гр | 79,6 | 0,1 | 0,13% |
| M_общ, гр | 1238,8 | 0,3 | 0,02% |
| L_ст, см | 100 | 0,01 | 0,01% |
| AC0, см | 50 | 0,2 | 0,4% |
| a, см | 30 | 0,3 | 1% |
| x_ц0, см | 27,4 | 0,2 | 0,7% |
| H_гр, см | 1,64 | 0,01 | 0,6% |

3. Снимем со стержня призму и с помощью подставки определим положение центра масс пустого стержня. $AC0 = (50 \pm 0{,}2)$см

4. Установим призму на некотором расстоянии от центра стержня, измерим точное положение от острия призмы до центра масс стержня - $a = P_r C_0$. Измерим положение центра масс конструкции $x_{\text{ц}0} = P_r C_1$, сбалансировав маятник с призмой на острие вспомогательной подставки. Оценим погрешности измерения расстояний a и $x_{\text{ц}0}$. $\sigma_a = 0.3$мм; $\sigma_{x_{\text{ц}0}} = 0.2$мм $a = (30.0 \pm 0.3)$см; $x_{\text{ц}0} = (27.4 \pm 0.2)$см. $\varepsilon_a = 1\%$; $\varepsilon_{x_{\text{ц}0}} = 0.7\%$

5. Проведем первый предварительный опыт по измерению периода колебаний (на установке Б опыт проведите без дополнительного груза).

   а) Установим маятник на консоли и отклоним маятник на малый угол (не более 5°). Убедимся, что он качается без помех, призма не проскальзывает, и колебания затухают слабо.

   б) Измерим время n = 20 полных колебаний маятника.

   в) Вычислим период колебаний $T = \frac{d}{n}$ и по формуле (6) (или (14)) рассчитайте предварительное значение g. Убедитесь, что оно отличается от табличного не более, чем на 10%.

   $T_{\text{ср}} \sim 1.5$с По формуле (6): $g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\frac{l^2}{12}+a^2}{a} \sim 9.52\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \implies \varepsilon_g \sim 2.8\%$ По формуле (14): $g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\frac{l^2}{12}+a^2}{x_{\text{ц}}(1+\frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}})} \sim 9.55\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \implies \varepsilon_g \sim 2.5\%$

6. Проведем серию измерений для экспериментального определения случайной погрешности измерения периода.

   (а) Несколько раз повторим измерение периода фиксированного числа колебаний (например, при n = 20). Результаты занесем в таблицу. Если результаты 3–4 измерений полностью совпадают, опыт можно остановить. Если результаты различаются, следует провести 8–10 измерений. В нашем случае результаты немного разнились, поэтому мы провели 10 измерений периода (см. таблицу 2).

| Таблица 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20T | 30,57 | 30,57 | 30,56 | 30,53 | 30,56 | 30,54 | 30,56 | 30,55 | 30,55 | 30,56 |
| T | 1,5285 | 1,5285 | 1,528 | 1,5265 | 1,528 | 1,527 | 1,528 | 1,5275 | 1,5275 | 1,528 |
| | | | | | | | | | | |
| <T>, c | 1,52775 | | | | | | | | | |
| σ<T> | 0,001629 | | | | | | | | | |
| ε<T> | 0,001066 | | | | | | | | | |

(b) Вычислим среднее значение полученных результатов $\bar{t} \sim 1.53$с, а также определим случайную погрешность измерения времени как среднеквадратичное отклонение полученных результатов: $\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (t - \bar{t})^2} \sim 6 * 10^{-4}$с, где N - число измерений, в нашем случае N = 10.

(c) Определим приборную (систематическую) погрешность используемого прибора $\sigma_t^{\text{сист}}$ и вычислим полную погрешность $\sigma_t^{\text{полн}}$ измерения времени. $\sigma_t^{\text{сист}} = 0.03\text{с} \implies \sigma_t^{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_t^{\text{случ}^2} + \sigma_t^{\text{сист}^2}} \sim \sigma_t^{\text{сист}} = 0.03\text{с}$

7. Используя погрешность $\sigma_t$ измерения времени из предыдущего пункта, оцените число колебаний n, по которому следует измерять период, чтобы относительная погрешность измерений периода соответствовала точности измерений $\varepsilon_{max}$, оценённой в п. 1. Так как мы измеряли период электронным счетчиком, полная погрешность примерно равна приборной, следовательно, размышления в п. 1 справедливы.

8. Закрепим груз на стержне в произвольном месте. Рассчитаем положение центра масс стержня, призмы и груза:
$$x_{\text{ц}} = P_r C_2 = \frac{(M_{\text{ст}} + M_{\text{пр}})x_{\text{ц}0} + M_{\text{гр}} \cdot y}{M_{\text{ст}} + M_{\text{пр}} + M_{\text{гр}}}$$
, где y - расстояние от т. подвеса до груза.

9. Разместим груз на маятнике и измерим положение y груза относительно точки подвеса и положение центра масс всей системы $x_{\text{ц}}$.

10. Проведем измерение периода колебаний маятника по n полным колебаниям, где значение n выбрано в п. 7. Повторим измерения периода для 8 - 15 положений груза y (при этом распределим положения груза равномерно по всему стержню). Для каждого измерения найдем $x_{\text{ц}}$ и g (см. т. 3).

| Таблица 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y, см | 73,18 | 67,18 | 61,18 | 55,18 | 49,18 | 43,18 | 37,18 | 31,18 | 25,18 | 19,18 | 13,18 | 7,18 |
| T, c | 1,62 | 1,58 | 1,54 | 1,51 | 1,49 | 1,46 | 1,45 | 1,43 | 1,43 | 1,44 | 1,45 | 1,48 |
| x_ц, см | 38,15 | 36,74 | 35,33 | 33,92 | 32,51 | 31,11 | 29,70 | 28,29 | 26,88 | 25,47 | 24,06 | 22,65 |
| g | 9,81 | 9,80 | 9,81 | 9,82 | 9,81 | 9,81 | 9,80 | 9,79 | 9,80 | 9,78 | 9,80 | 9,79 |

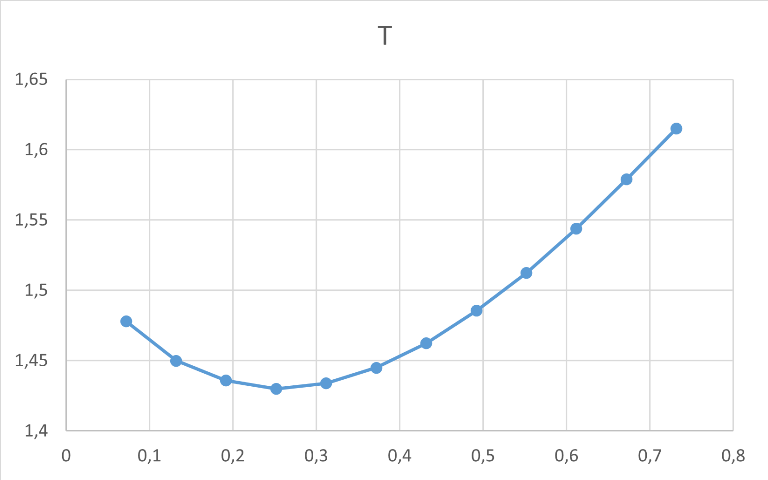
11. Не выполняли.

12. Оценим затухание маятника, для этого измерим время, за которое амплитуда колебаний уменьшится вдвое - ($\tau \sim 8$ мин 30 сек, и $\tau_{\text{зат}} = \frac{\tau}{\ln 2} \sim 735$ сек, тогда декремент затухания $\gamma = \frac{1}{\tau_{\text{зат}}} \sim 1.4 \cdot 10^{-4}$ сек$^{-1}$, а добротность $Q = \pi \frac{\tau_{\text{зат}}}{T} \sim 1500$). Погрешность добротности посчитать невозможно.

# 3 Обработка результатов измерений.

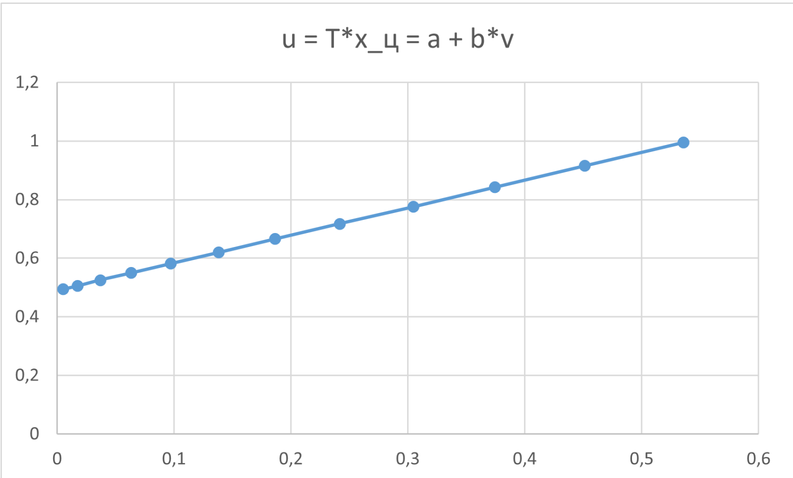
13. Усредним значения g из таблицы 3 и оценим погрешность. $g \sim 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (9,55), $\sigma_g = 1{,}12\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (1,15), $\varepsilon_g = 1{,}2\%$ (1,6).

14. Построим график зависимости T от y.




Этот график имеет вид $T = a\sqrt{\frac{b+c\cdot y^2}{d+e\cdot y}} = \sqrt{\frac{J_0+m_г\cdot y^2}{g(x_{ц0}m_{ст}+y\cdot m_г)}}$, $b = J_0$, $c = m_г$, $d = x_{ц0}m_{ст}$, $e = m_г$ Минимум ф-ии T(y) можно определить, решая ур-ие $\frac{d}{dy}T = 0 \implies y_{min} = \sqrt{\frac{d^2}{e^2}+\frac{b}{c}} - \frac{d}{e} = \frac{x_{ц0}m_{ст}}{m_г}\cdot(\sqrt{\frac{J_0 m_г}{x_{ц0}^2 m_{ст}^2}+1} - 1) \sim 27$ см. По графику видно, что минимум достигается в точке $y_{min} = 25$см, в этом случае ошибка равна шагу, с которым мы перемещали груз, т.е. 6 см. $y_{min} = (25 \pm 6)$ см.

15. Построим график зависимости $u(v)$, где $u = T^2 \cdot x_ц$ и $v = y^2$ (см. рисунок 4). График u(v) должен получиться линейным, так как, по формуле (13), $u = 4\pi^2\frac{J_0}{gM} + 4\pi^2\frac{m_г}{gM} = a + b\cdot v$, где $J_0$ - момент инерции маятника отн. подвеса.




16. Найдем коэффициент наклона (b) и пересечение с осью ординат (a) прямой u(v) (мы воспользовались мнк). В результате $a = 0{,}4849 \pm 0{,}0008$, $b = 1{,}000 \pm 0{,}005$ ; $a \sim 0{,}5$ , $b \sim 1$. Из коэффициентов a и b можно найти g ($g = 4\pi^2\frac{J_0}{a\cdot M} = 4\pi^2\frac{m_г}{b\cdot M}$). В результате $g = 9{,}83\frac{м}{с^2}$ (9,27)

17. Найдем погрешность измерения g в п. 16. $\sigma_g = \sqrt{\varepsilon_{m_г}^2 + \varepsilon_M^2 + \varepsilon_b^2} \sim 0{,}05\frac{м}{с^2}, \varepsilon_g = \frac{\sigma_g}{g} \sim 0{,}5\%$

18. Метод нахождения g лучше в 16 пункте, чем в 13, т.к. ошибка меньше.

19. В результате мы получили ускорение свободного падения g двумя способами. На нашей планете g варьируется от 9,78 на экваторе, до 9,82 на полюсах. Мы получили, что $g = (9{,}80 \pm 0{,}12)\frac{м}{с^2}$ $g = (9{,}83 \pm 0{,}05)\frac{м}{с^2}$. Наше значение отличается от истинного на 0,15%.

**Вывод:**
В результате выполнения работы, мы убедились в справедливости формул для периода колебаний физического маятника, в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника, определили ускорение свободного падения двумя способами.