

Задачи для подготовки к экзамену

1. Используя метод характеристических функций, докажите или опровергните равенство:

$$(A \Delta B) \setminus (A \cup \overline{C}) = (B \cap C) \setminus A$$

2. Используя метод эквивалентных преобразований, докажите или опровергните равенство:

$$(A \Delta B) \setminus (A \cup \overline{C}) = (B \cap C) \setminus A$$

3. Используя диаграммы Эйлера-Венна, докажите или опровергните равенство:

$$(A \Delta B) \setminus (A \cup \overline{C}) = (B \cap C) \setminus A$$

4. Используя диаграммы Эйлера-Венна, изобразите результат следующей формулы:

$$(A \Delta B) \setminus (A \cup \overline{C})$$

5. Используя матричные свойства отношений, постройте транзитивное замыкание отношения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Используя матричные свойства отношений, выясните, является ли следующее отношение транзитивным:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Используя определения различных свойств отношений, приведите для множества $X = \{a, b, c, d, e\}$ примеры:

- рефлексивного отношения;
- симметричного отношения;
- транзитивного отношения;
- отношения порядка;
- отношения частичного порядка;
- отношения линейного порядка;
- отношения эквивалентности.

8. Используя определения различных свойств отношений, приведите для множества $X = \{a, b, c, d, e\}$ примеры:

- рефлексивного и симметричного, но не транзитивного отношения;
- рефлексивного и транзитивного, но не симметричного отношения;
- симметричного и транзитивного, но рефлексивного не отношения.

9. Используя определение замыкания, найдите замыкания по рефлексивности, симметричности и транзитивности для следующего отношения:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a)\}.$$

10. Используя определение, выпишите все коды Грэя длины 4.

11. Используя определения соответствующих булевых операций, постройте таблицу истинности для высказывания: $((a \rightarrow b) \oplus c) \leftrightarrow a\overline{b}$.

12. Используя свойства соответствующих булевых операций, определите, при скольких значениях переменных следующая формула ложна:

$$((X \rightarrow (Y \wedge Z)) \rightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{X})) \rightarrow \bar{Y}$$

13. Используя таблицу истинности, найдите совершенную ДНФ для булевой функции $((a \rightarrow b) \oplus c) \leftrightarrow a\bar{b}$.
14. Используя единичный куб, найдите минимальную ДНФ для булевой функции $((a \rightarrow b) \oplus c) \leftrightarrow a\bar{b}$.
15. Используя карту Карно, найдите минимальную ДНФ для булевой функции $((a \rightarrow b) \oplus c) \leftrightarrow a\bar{b}$.
16. Используя алгоритм Куэйна-Маккласки, найдите минимальную ДНФ для булевой функции $((a \rightarrow b) \oplus c) \leftrightarrow a\bar{b}$.
17. Докажите, что штрих Шеффера – полная система функций.
18. Докажите, что $\{\wedge, \vee\}$ – не полная система функций.
19. Используя основные комбинаторные правила и формулы, найдите число подмножеств множества $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, обладающих свойствами:
- а) $|X| = 3$;
 - б) $|X| = 5, 1 \in X$;
 - в) $|X| = 6, 2 \notin X$;
 - г) $|X| = 7, \{0, 1\} \subset X, 2 \notin X$;
 - д) X состоит из трёх чётных и двух нечётных чисел;
 - е) $|X| \leq 5$.
20. Используя основные комбинаторные правила, решите следующую задачу. В номере автомобиля записываются подряд буква, три цифры и ещё две буквы. Сколько таких номеров можно составить, если использовать только буквы А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х?
21. Какой номер автомобиля из предыдущей задачи будет первым, если выписывать все номера в лексикографическом порядке? Какой номер будет последним? Какой номер следует за номером «У 899 ХХ»? Какой номер ему предшествует?
22. Используя основные комбинаторные правила и формулы, решите следующую задачу. В автомобиле 5 мест. Сколькими способами пять человек могут занять места для путешествия, если водить машину могут только трое из них?
23. Используя основные комбинаторные правила и формулы, решите следующую задачу. После хоккейного матча каждый игрок одной команды пожал руку каждому игроку другой. Сколько всего игроков присутствовало на площадке, если было совершено 323 рукопожатия?
24. Используя основные комбинаторные правила и формулы, решите следующую задачу. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске две клетки так, чтобы из одной в другую можно было попасть ходом ладьи? Ходом коня?
25. Используя основные комбинаторные правила и формулы, решите следующую задачу. Сколькими способами 5 человек могут встать в очередь к билетной кассе? Как называется каждая такая комбинация в комбинаторике?
26. Используя определения основных типов комбинаций, решите следующую задачу. В чемпионате по футболу участвует 16 команд. Сколькими способами могут распределиться 3 призовых места? Как называется каждая такая комбинация в комбинаторике?

27. Используя основные комбинаторные правила и формулы, решите следующую задачу. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек, на которых написаны цифры: а) 1,2,3,4; б) 1,2,3,3; в) 1,1,2,2.
28. Используя основные комбинаторные правила и формулы, решите следующую задачу. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из класса, в котором 25 учеников. Как называется каждая такая комбинация в комбинаторике?
29. Используя основные комбинаторные правила и формулы, решите следующую задачу. Сколькими способами в карточке лотереи «Спортлото» можно зачеркнуть 5 номеров из 36? Как называется каждая такая комбинация в комбинаторике?
30. Используя основные комбинаторные правила и формулы, решите следующую задачу. Группу из 20 туристов нужно распределить по 3 маршрутам так, чтобы по первому маршруту шли 8 человек, по второму – 7, по третьему – 5. Сколькими способами это можно сделать?
31. Используя основные комбинаторные правила и формулы, вычислите, сколько существует 8-битовых бинарных кодов, в которых 3 нуля и 5 единиц.
32. Используя основные комбинаторные правила и формулы, решите следующую задачу. В кондитерском магазине продаются 4 сорта пирожных. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?
33. Используя основные комбинаторные правила и формулы, вычислите, сколькими способами можно разложить 4 белых и 3 чёрных шара по 6 различным ящикам.
34. Используя формулу для числа сочетаний с повторениями и правило включения-исключения, определите, сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ при условии, что $x_1 > 3, x_2 < 7, x_3 \leq 4$.
35. Используя формулу для числа сочетаний с повторениями и правило вычитания, определите, сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ при условии, что $x_2 < 7$.
36. Используя соответствующий алгоритм, решите рекуррентное соотношение второго порядка $a_n = 11a_{n-1} - 28a_{n-2} + 15 \cdot 4^n$ с начальными условиями $a_0 = 6, a_1 = 28$.
37. Используя соответствующий алгоритм, решите рекуррентное соотношение второго порядка $a_n = 11a_{n-1} - 28a_{n-2} + n^2$ с начальными условиями $a_0 = 6, a_1 = 28$.
38. Используя правило включения-исключения, решите следующую задачу. В таблице приведены запросы и количество страниц, которые нашел поисковый сервер по этим запросам в некотором сегменте Интернета:

Запрос	Количество страниц (тыс.)
(Суворов & Альпы) (Суворов & Варшава)	1100
Суворов & Варшава	600
Суворов & Варшава & Альпы	50

Сколько страниц (в тысячах) будет найдено по запросу : Суворов & Альпы.

39. Используя алгоритм Дейкстры, по заданной весовой матрице ориентированного графа найдите кратчайший путь между двумя заданными вершинами и его длину:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 3 & \infty & 14 \\ \infty & 3 & 0 & 3 & 4 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

40. Используя алгоритм Флойда-Уоршалла, по заданной весовой матрице ориентированного графа найдите кратчайший путь между двумя заданными вершинами и его длину:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 3 & \infty & 14 \\ \infty & 3 & 0 & 3 & 4 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

41. Используя определение каркаса, решите следующую задачу. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника 50 x 600 клеток. Какое наибольшее количество верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

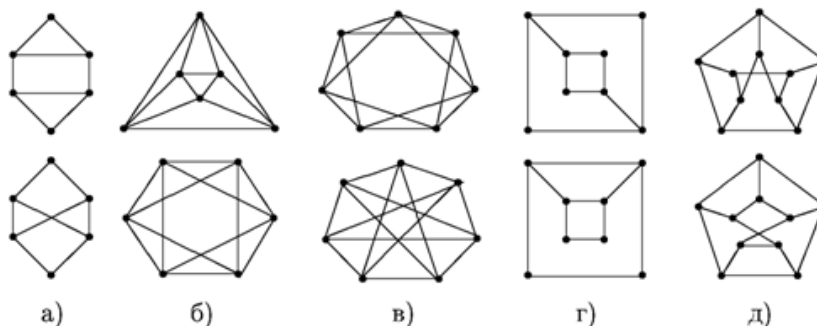
42. Используя алгоритм Краскала, по заданной весовой матрице неориентированного графа найдите минимальный каркас и его вес:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & \infty & \infty & 8 & \infty \\ 5 & 0 & 7 & 10 & \infty & 8 & \infty \\ 8 & 7 & 0 & 4 & 7 & 7 & \infty \\ \infty & 10 & 4 & 0 & 6 & 9 & 4 \\ \infty & \infty & 7 & 6 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 & 9 & 3 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

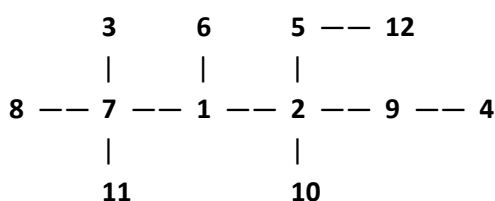
43. Используя алгоритм Прима, по заданной весовой матрице неориентированного графа найдите минимальный каркас и его вес:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & \infty & \infty & 8 & \infty \\ 5 & 0 & 7 & 10 & \infty & 8 & \infty \\ 8 & 7 & 0 & 4 & 7 & 7 & \infty \\ \infty & 10 & 4 & 0 & 6 & 9 & 4 \\ \infty & \infty & 7 & 6 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 & 9 & 3 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

44. Используя матрицу смежности, посчитайте, сколько существует ориентированных помеченных простых графов с 10 вершинами? Сколько из них имеет 10 рёбер?
45. Используя определение изоморфизма графов, найдите все с точностью до изоморфизма простые неориентированные графы, содержащие 4 вершины.
46. Используя определение изоморфизма графов, вычислите, сколько существует неизоморфных простых неориентированных графов с 10 вершинами и а) 44 рёбрами; б) 43 рёбрами.
47. Используя определения дерева и изоморфизма графов, найдите все с точностью до изоморфизма деревья, содержащие 4 вершины.
48. Для каждой пары графов определите, какие из них изоморфны:



49. Используя алгоритм кодирования, найдите для заданного дерева его код Прюфера:



50. Используя алгоритм декодирования, постройте дерево по его коду Прюфера:

7,9,1,7,2,2,7,1,2,5,12.

51. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД(126, 180) и его линейное представление.

52. Используя разложение числа на простые множители, найдите количество нулей, на которые заканчивается число 100!

53. Используя известный алгоритм, разложите число 2560000 на простые множители.

54. Используя законы модульной арифметики, постройте таблицу умножения в Z_5 .

55. Используя законы модульной арифметики, найдите все пары взаимно обратных вычетов в Z_{10} .

56. Используя законы модульной арифметики, найдите все решения уравнения $6x = 3$ в Z_9 .

57. Используя законы модульной арифметики, найдите все решения уравнения $9x = 1$ в Z_{121} .

58. Используя свойства функции Эйлера, вычислите $\varphi(2560)$.

59. Используя известный алгоритм, для простой «задачи о рюкзаке» (3, 4, 9, 20, 40, 77, 155, 311) и чисел $D=623$, $x=13$, $y=48$ постройте сложную задачу и зашифруйте с её помощью сообщение 10101110.

60. Используя известный алгоритм, с помощью простой «задачи о рюкзаке» (3, 4, 9, 20, 40, 77, 155, 311) и чисел $D=623$, $x=13$, $y=48$ расшифруйте сообщение 835.

61. Используя алгоритм RSA для заданных простых чисел $p=37$, $q=43$ и открытой экспоненты $e=17$ постройте секретный ключ (n,d) .

62. Используя алгоритм RSA с помощью секретного ключа $(n=1591, d=89)$ расшифруйте сообщение 815.