Министерство образования и науки Российской Федерации
Калужский филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального
образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по курсу «Вычислительные алгоритмы»

Калуга, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программой проведения лабораторных работ по курсу «Вычислительные алгоритмы» на кафедре «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии» Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Методические указания по выполнению лабораторной работы по курсу «Вычислительные алгоритмы» содержат сведения о вычислении погрешности результата при известных погрешностях исходных данных. Рассматриваются подходы к решению проблем, связанных с необходимостью решения основной задачи теории погрешностей – указание области неопределенности результата.

Для закрепления теоретического и практического материала лабораторной работы при проведении её защиты предлагается тест.

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ, ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЯ

Целью лабораторной работы является формирование практических навыков определения погрешностей различного вида, в т.ч. особенностей погрешностей машинной арифметики.

Задачи:

1. Научиться определять верные цифры.
2. Научиться определять абсолютные и относительные погрешности.
3. Научиться вычислять, используя правила подсчета цифр.

Результатами работы являются:

- определение более точного равенства
- определение верных цифр в числе
- найденные максимальные абсолютные и относительные погрешности
- вычисленное с использованием правил подсчета цифр значение выражения

КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЪЕКТА ИЗУЧЕНИЯ, ИССЛЕДОВАНИЯ

Под погрешностью понимается отклонение измеренного значения величины от её истинного (действительного) значения. Существует три вида погрешностей:

- Неустранимая погрешность (возникающая из-за неточности исходной информации, например, неточности измерений);
- Погрешность метода;
- Погрешность вычислений (возникающая из-за округлений).

Основная задача теории погрешностей – указание области неопределенности результата.

Получить точное значение при решении задачи на электронно-вычислительной машине практически невозможно. Получаемое решение всегда содержит погрешность и является приближенным.

- Источники погрешностей:
- Погрешность математической модели.
- Погрешность в исходных данных.
- Погрешность численного метода.
- Погрешность округления или отбрасывания.

По форме представления различают абсолютную и относительную погрешности.

Абсолютная погрешность приближенного значения - это модуль разности точного значения и приближенного значения.

$$\Delta = |A - a|$$

Здесь a – приближенное значение, А – точное значение.

Относительной погрешностью приближенного числа называется отношение абсолютной погрешности приближенного числа к самому этому числу.

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}$$

Относительную погрешность часто измеряют в процентах:

$$\delta(a)\ [\%] = \delta(a) \cdot 100\%.$$

Недостатком применения относительной погрешности является то, что она не определена при A = 0 и очень велика, если значение A близко к нулю, хотя абсолютная ошибка может быть мала. Поэтому на практике для оценки точности величин используют как абсолютную, так и относительную погрешности.

Формулы точного подсчета погрешностей

$$\delta(a \pm b) = \frac{a\delta_a + b\delta_b}{a \pm b} \qquad \Delta(a \pm b) = \Delta_a + \Delta_b$$

$$\delta(ab) = \delta_a + \delta_b \qquad \Delta(ab) = ab(\delta_a + \delta_b) = b\Delta_a + a\Delta_b$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta_a + \delta_b \qquad \Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}(\delta_a + \delta_b) = \frac{b\Delta_a + a\Delta_b}{b^2}$$

$\delta(a^m) = m\boldsymbol{\delta_a}$ (корень следует рассматривать как степенную функцию $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$)

Значащими цифрами числа называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева

Как например число a = 0.002080 - здесь первые три нуля не являются значащими цифрами, так как они служат для установки десятичных разрядов других цифр. Остальные два нуля являются значащими.

Верные цифры

n первых значащих цифр приближенного числа являются верными если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины разряда, выражаемого n-ой значащей цифрой, считая слева направо.

Для определения верных цифр существует формула:

$$\Delta = |A - a| = 0.5 * 10^{m-n+1}$$

Где m-старший десятичный разряд числа, n- количество верных цифр

Правила подсчета цифр

При вычислениях, когда не проводится строгий подсчет погрешностей, рекомендуется пользоваться правилами подсчета цифр. Эти правила указывают, как следует проводить округления всех результатов, чтобы, во-первых, обеспечить заданную точность окончательного результата и, во-вторых, не производить вычислений с лишними знаками (не оказывающими влияние на верные знаки результата).

Ниже приведены правила подсчета цифр, данные В.М. Брадисом:

1. Результат сложения и вычитания приближенных чисел должен сохранять столько значащих цифр, сколько их в приближенном данном наименьшей точности.
2. Результат умножения и деления должен сохранять столько значащих цифр, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом верных значащих цифр.
3. При возведении приближенного числа в квадрат или куб в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в основании степени.
4. При извлечении квадратного и кубического корней из приближенного числа в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в подкоренном числе.
5. При вычислении промежуточных результатов следует сохранить на одну цифру больше, чем рекомендуют правила 1 – 4. В окончательном результате эта «запасная» цифра отбрасывается. 6. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при других действиях), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну «запасную» цифру.
7. При вычислении с помощью логарифмов одночленного выражения рекомендуется подсчитать число значащих цифр в приближенном данном, имеющем наименьшее число значащих цифр и воспользоваться таблицей логарифмов с числом десятичных знаков на единицу большим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.
8. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с m верными цифрами исходные данные

следует брать с таким числом цифр, которые согласно предыдущим правилам обеспечивают m + 1 цифру в результате.

Замечание
Эти восемь правил даются в предположении, что компоненты действий содержат только верные цифры и число действий невелико.

ЗАДАЧИ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задачи:
1. Научиться определять верные цифры.
2. Научиться определять абсолютные и относительные погрешности.
3. Научиться вычислять выражения, используя правила подсчета цифр.

Порядок выполнения:

1. Используя теоретический материал вычислить абсолютные и относительные погрешности чисел и определить, какое равенство точнее.

Пример выполнения
Определить какое равенство точнее 9/11=0,818 или $\sqrt{18}$ =4,24?
Находим значения данных выражений с большим числом десятичных знаков, чем используется в равенстве:

9/11=0,818181818…; $\sqrt{18}$=4,2426…

Затем вычисляем предельные абсолютные погрешности, округляя их

$$\Delta_1 = |0{,}81818 - 0{,}818| \le 0{,}00019;\ \Delta_2 = |4{,}2426 - 4{,}24| \le 0{,}0027$$

Предельные относительные погрешности составляют:

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{a_1} \le \frac{0{,}0019}{0{,}818} = 0{,}00024 = 0{,}024\%$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{a_2} \le \frac{0{,}0027}{4{,}24} = 0{,}00064 = 0{,}064\%$$

Т.к. $\delta_1 < \delta_2$, то равенство 9/11=0,818 является более точным.

2. Используя данные об абсолютной и относительной погрешности чисел, определить верные цифры.

Пример выполнения

Пусть a=72,353($\pm 0{,}026$). Согласно условию погрешность
Δa=0.026$\leq 0.05 = \frac{1}{2} * 10^{-1}$
Т.о.-1=m-n+1, m=1 => n=3. Это означает, что в числе 72,353 верными являются три цифры: 72,3.

Пусть a=2,3544 $\delta_a = 0{,}2\%$. Тогда погрешность
$\Delta a = a * \delta_a = 2{,}3544 * 0{,}002 = 0{,}00471 \leq 0{,}005 = \frac{1}{2} * 10^{-2}$
Т.о. -2=m-n+1, m=0 => n=3. Это означает, что в числе : 2,3544 верными являются три цифры: 2,35.

3. Используя теоретический материал вычислить максимальные абсолютные и относительные погрешности чисел.

Пусть в числе a=0,03045 все значащие цифры верные. Это означает, что его максимальная абсолютная погрешность
$\Delta a = \frac{1}{2} * 10^{-5} = 0{,}000005$

Тогда максимальная относительная погрешность

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0{,}000005}{0{,}03045} \approx 1{,}6 * 10^{-4} = 0{,}016\%$$

4. Вычислить и оценить абсолютную и относительную погрешности результата, определить верные цифры в результате и подчеркнуть их.

Пример выполнения

Вычислить и определить погрешность искомого значения для функции F, определить количество верных знаков в результате, если:

$$F(a, b, c) = \frac{a^2 + b^3}{\cos c}$$

a = 28,3$\pm$0,02; b = 7,45$\pm$0,01; c = 0,7854$\pm$0,0001

Решение
Приближенные значения исходных данных:

a=28,3; b=7,45; c=0,7854

Абсолютные погрешности исходных данных:
Δa=0,02; Δb=0,01; Δc=0,0001

Расчет относительных погрешностей исходных данных:

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|a|} = \frac{0{,}02}{|28{,}3|} = 0{,}00070671$$

$$\delta_b = \frac{\Delta \mathrm{b}}{|b|} = \frac{0{,}01}{|7{,}45|} = 0{,}0013423$$

$$\delta_c = \frac{\Delta c}{|c|} = \frac{0{,}0001}{|0{,}7854|} = 0{,}00012732$$

Порядок операций:

1. a^2=800,89; δa^2=2 δa=0,0014134;
   Δa^2= $\delta a^2|a^2|$ =800,89*0,0014134=1,132

2. b^3=419,49; δb^3=3 δb=0,0040269;
   Δb^3= $\delta b^3|b^3|$ = 413,49*0,0040269=1,6651

3.$a^2 + b^3$ =1214,4; $\Delta(a^2 + b^3)$= Δa^2+Δb^3=2,7971;

$$\delta(a^2 + b^3) = \frac{2{,}7971}{1214{,}4} = 0{,}0023033$$

4. $\cos c$=0,70711; $\Delta\cos c$=$\left|\frac{\partial}{\partial \mathrm{c}} \cos c\right| \Delta c = |-\sin c|\Delta c$=0,0000707;

$$\delta(\cos c) = \frac{\Delta \cos c}{|\cos c|} = 0{,}0001$$

5.$F = \frac{a^2+b^3}{\cos c} = \frac{1214{,}4}{0{,}70711}$ =1717,413;
δF= $\delta(a^2 + b^3)$+ $\delta(\cos c)$=0.0023033+0,0001=0,0024033;
ΔF=1717,413*0,0024033=4,1274586629

Альтернативный расчёт ΔF :

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial \mathrm{a}}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial F}{\partial \mathrm{b}}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial F}{\partial \mathrm{c}}\right| \Delta c =$$
$$= \left|\frac{2a}{\cos c}\right| \Delta a + \left|\frac{3b^2}{\cos c}\right| \Delta b + \left|\frac{a^2 + b^3}{\cos^2 c} \sin c\right| \Delta c =$$
$$= 80{,}0446\Delta a + 235{,}4776\Delta b + 1717{,}40725\Delta c =$$
$$= 4{,}1274$$

Определение количества верных цифр:

F=1717,413; ΔF≈4,12≤ $\frac{1}{2} * 10^1$

m=3; 1=m–n+1; n=3

Подчеркнем верные цифры: F=<u>171</u>7,413

ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ

1. Определить, какое равенство точнее.
2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки.
3. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности числа, если оно имеет только верные цифры.
4. Вычислить и определить погрешности результата.
5. Вычислить, пользуясь правилами подсчета цифр.

Варианты заданий.

№ варианта	**Задание**
1	1) $\sqrt{44}=6{,}63;\ 19/41=0{,}463.$ 2) $2{,}8546;\ \delta=0{,}3\%.$ 3) $42{,}884.$ 4) $X=\left[\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$, где $a=4{,}3(\pm0{,}05)$, $b=17{,}21(\pm0{,}02)$, $c=8{,}2(\pm0{,}05)$, $m=12{,}417(\pm0{,}003)$, $n=8{,}37(\pm0{,}005)$. 5) $S=\dfrac{h^2}{18}:\dfrac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$ $\quad a = 1{,}141$; $b = 3{,}156$; $h = 1{,}14$
2	1) $\sqrt{30}=5{,}48;\ 7/15=0{,}467.$ 2) $6{,}4257(\pm0{,}0024).$ 3) $0{,}537.$ 4) $X=\dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, где $a=13{,}5(\pm0{,}02)$, $b=3{,}7(\pm0{,}02)$, $c=34{,}5(\pm0{,}02)$, $m=4{,}22(\pm0{,}004)$, $d=23{,}725(\pm0{,}005)$. 5) $M=\dfrac{(a+b)h^3}{4}+\dfrac{(a+b)h}{12}$ $\quad a = 8{,}53$; $b = 6{,}271$; $h = 12{,}48$

3	1) $\sqrt{10{,}5} = 3{,}24;\ 4/17 = 0{,}235.$ 2) $0{,}5748(\pm 0{,}0034).$ 3) $2{,}043.$ 4) $X = \dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, где $a = 2{,}754(\pm 0{,}001),\ b = 11{,}7(\pm 0{,}04),$ $c = 10{,}536(\pm 0{,}002), m = 0{,}56(\pm 0{,}005),\ d = 6{,}32(\pm 0{,}008).$ 5) $N = \dfrac{(a+b)^2}{2h} + \dfrac{(a^2+b^2)h}{5}$ $\quad a = 0{,}562;\ b = 0{,}2518;\ h = 0{,}68$
4	1) $\sqrt{10} = 3{,}16;\ 15/7 = 2{,}14.$ 2) $0{,}34484;\ \delta = 0{,}4\%.$ 3) $0{,}745.$ 4) $X = \dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, где $a = 23{,}16(\pm 0{,}02),\ b = 8{,}23(\pm 0{,}005),$ $c = 145{,}5(\pm 0{,}08), m = 0{,}28(\pm 0{,}006),\ d = 28{,}6(\pm 0{,}1).$ 5) $V = \dfrac{h}{3} \cdot S\left(1 + \dfrac{a}{A} + \dfrac{a^2}{A^2}\right)$ $\quad a = 8{,}51;\ A = 23{,}42;\ S = 45{,}8;\ h = 3{,}81$
5	1) $\sqrt{4{,}8} = 2{,}19;\ 6/7 = 0{,}857.$ 2) $10{,}8441;\ \delta = 0{,}5\%.$ 3) $0{,}288.$ 4) $X = \dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, где $a = 27{,}16(\pm 0{,}006),\ b = 5{,}03(\pm 0{,}01),$ $c = 3{,}6(\pm 0{,}02), m = 12{,}375(\pm 0{,}004),\ n = 86{,}2(\pm 0{,}05).$ 5) $S = \dfrac{h^2}{18} \cdot \dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$ $\quad h = 21{,}1;\ a = 22{,}08;\ b = 31{,}11$

6	1) $\sqrt{6{,}8} = 2{,}61;\ 12/11 = 1{,}091.$ 2) $0{,}12356(\pm 0{,}00036).$ 3) $3{,}4453.$ 4) $X = \dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$, где $a = 16{,}342(\pm 0{,}001)$, $b = 2{,}5(\pm 0{,}03)$, $c = 38{,}17(\pm 0{,}002), m = 3{,}6(\pm 0{,}04),\ d = 9{,}14(\pm 0{,}005).$ 5) $V = \dfrac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ — a: 2,456; h: 1,76
7	1) $\sqrt{22} = 4{,}69;\ 2/21 = 0{,}095.$ 2) $24{,}5643;\ \delta = 0{,}1\%.$ 3) $4{,}348.$ 4) $S = \dfrac{1}{64}\pi\sqrt{D^4 - d^4}$, где $D = 36{,}5(\pm 0{,}1)$, $d = 26{,}35(\pm 0{,}005)$, $\pi = 3{,}14.$ 5) $a = c^2\left(1 + \dfrac{2\beta}{c} + \dfrac{\gamma^2}{c^2}\right)$ — c: 2,435; β: 0,15; γ: 1,27
8	1) $\sqrt{9{,}8} = 3{,}13;\ 23/15 = 1{,}53.$ 2) $8{,}3445(\pm 0{,}0022).$ 3) $0{,}576.$ 4) $X = \dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$, где $a = 9{,}542(\pm 0{,}001)$, $b = 3{,}128(\pm 0{,}002)$, $c = 0{,}172(\pm 0{,}001), m = 2{,}8(\pm 0{,}03),\ d = 5{,}4(\pm 0{,}02).$ 5) $V = \dfrac{1}{15}\pi h(2D^2 + Dd + 0{,}75d^2)$ — h: 84,2; D: 28,3; d: 42,08

9	1) $\sqrt{83}=9{,}11;\ 6/11=0{,}545.$ 2) $3{,}7834(\pm 0{,}0041).$ 3) $0{,}678.$ 4) $y=\dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, где $a=10{,}82(\pm 0{,}03)$, $b=2{,}786(\pm 0{,}0006)$, $m=0{,}28(\pm 0{,}006)$, $n=14{,}7(\pm 0{,}06)$. 5) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=(a+b+c)/2$ a | 46,3 b | 29,72 c | 37,654
10	1) $\sqrt{52}=7{,}21;\ 17/19=0{,}895.$ 2) $7{,}521; \delta=0{,}12\%.$ 3) $0{,}0748.$ 4) $Q=\dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$, где $n=2{,}0435(\pm 0{,}0001)$, $x=4{,}2(\pm 0{,}05)$, $y=0{,}82(\pm 0{,}01)$. 5) $\gamma=\dfrac{\alpha b-\beta a}{b^2}-\dfrac{\beta(ab-\beta a)}{b^2(b+\beta)}$ α | 5,27 β | 0,0562 a | 158,35 b | 61,21
11	1) $\sqrt{44}=6{,}63;\ 21/29=0{,}723.$ 2) $13{,}6253(\pm 0{,}0021).$ 3) $2{,}16.$ 4) $X=\left[\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$, где $a=5{,}2(\pm 0{,}04)$, $b=15{,}32(\pm 0{,}01)$, $c=7{,}5(\pm 0{,}05)$, $m=21{,}823(\pm 0{,}002)$, $n=7{,}56(\pm 0{,}003)$. 5)

	$S=\frac{h^2}{18}:\frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$ $\begin{array}{l\|r} a & 2{,}234 \\ b & 4{,}518 \\ h & 4{,}48 \end{array}$
12	1) $\sqrt{27}=5{,}19;\ 50/19=2{,}63.$ 2) $0{,}85637; \delta=0{,}21\%.$ 3) $236{,}58.$ 4) $X=\frac{m^3(a+b)}{c-d}$, где $a=18{,}5(\pm0{,}03)$, $b=5{,}6(\pm0{,}02)$, $c=26{,}3(\pm0{,}01), m=3{,}42(\pm0{,}003)$, $d=14{,}782(\pm0{,}006)$. 5) $M=\frac{(a+b)h^3}{4}+\frac{(a+b)h}{12}$ $\begin{array}{l\|r} a & 6{,}44 \\ b & 5{,}323 \\ h & 15{,}44 \end{array}$
13	1) $\sqrt{31}=5{,}56;\ 13/17=0{,}764.$ 2) $15{,}873; \delta=0{,}42\%.$ 3) $14{,}862.$ 4) $X=\frac{m(a+b)}{(c-d)^2}$, где $a=4{,}523(\pm0{,}003)$, $b=10{,}8(\pm0{,}02)$, $m=0{,}85(\pm0{,}003), c=9{,}318(\pm0{,}002)$, $d=4{,}17(\pm0{,}004)$. 5) $N=\frac{(a+b)^2}{2h}+\frac{(a^2+b^2)h}{5}$ $\begin{array}{l\|r} a & 0{,}834 \\ b & 0{,}3523 \\ h & 0{,}74 \end{array}$
14	1) $\sqrt{13}=3{,}60;\ 7/22=0{,}318.$ 2) $0{,}3945;\ \delta=0{,}16\%.$ 3) $0{,}3648.$ 4) $X=\frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, где $a=32{,}37(\pm0{,}03)$, $b=2{,}35(\pm0{,}001)$, $c=128{,}7(\pm0{,}02), m=27{,}3(\pm0{,}04)$, $d=0{,}93(\pm0{,}001)$. 5) $V=\frac{h}{3}\cdot S\left(1+\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}\right)$ $\begin{array}{l\|r} a & 5{,}71 \\ A & 32{,}17 \\ S & 51{,}7 \\ h & 2{,}42 \end{array}$

15	1) $\sqrt{18} = 4,243$; $17/11 = 1,545$. 2) $83,736$; $\delta = 0,085\%$. 3) $0,00858$. 4) $X = \dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, где $a = 12,31(\pm 0,004)$, $b = 1,73(\pm 0,03)$, $c = 3,7(\pm 0,02), m = 17,428(\pm 0,003)$, $n = 41,7(\pm 0,01)$. 5) $S = \dfrac{h^2}{18} \cdot \dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$ h – 17,8; a – 32,47; b – 11,42

6. Ответить на вопросы теста и оформить отчет.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Как классифицируются погрешности?
3. Что значит верная цифра?
4. Как распространяются абсолютная и относительная погрешности в арифметических действиях?
5. Как осуществить оценку погрешности значений элементарных функций?

ФОРМА ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

На выполнение лабораторной работы отводится 1 занятие (2 академических часа: 2 часа на выполнение и на подготовку отчета).

Номер варианта студенту выдается преподавателем.

Отчет на защиту предоставляется в печатном виде.

Структура отчета (на отдельном листе(-ах)): титульный лист, формулировка задания (вариант), этапы выполнения работы, результаты выполнения работы, выводы

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=436331&sr=1
Балабко Л. В. , Томилова А. В. Численные методы: учебное пособие Архангельск: САФУ, 2014

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=275268&sr=1
Колокольникова А. И. , Киренберг А. Г._Спецразделы информатики: введение в MatLab: учебное пособие_М., Берлин: Директ-Медиа, 2014