

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ В РЯД ФУРЬЕ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ, ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ЕЁ ВЫПОЛНЕНИЯ

Целью выполнения лабораторной работы является формирование практических навыков разложения сигналов различного вида в ряд Фурье и моделирование сигналов различной формы с заданными параметрами.

Основными задачами выполнения лабораторной работы являются:

1) Выполнить разложение сигналов в ряд Фурье. Разложению подлежат следующие сигналы: последовательность прямоугольных импульсов, меандр, пилообразный сигнал и последовательность треугольных импульсов.

2) Построить графики для промежуточных стадий суммирования.

Для каждого варианта и каждого вида сигнала заданы параметры:

- для последовательности прямоугольных импульсов – амплитуда, период повторения и длительность импульсов;
- для меандра, пилообразного сигнала и последовательности треугольных импульсов – амплитуда и период повторения импульсов;
- для всех видов сигналов задано число ненулевых гармоник.

Результатами работы являются:

- постановка задачи;
- программы для разложения последовательных прямоугольных импульсов, меандра, пилообразного сигнала и последовательности треугольных импульсов;
- результаты выполнения программ – графики промежуточных стадий суммирования;
- выводы;
- подготовленный отчет.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Ряд Фурье

Разложению в ряд Фурье могут подвергаться периодические сигналы. При этом они представляются в виде суммы гармонических функций либо комплексных экспонент с частотами, образующими арифметическую прогрессию.

Ряд Фурье может быть применен для представления не только периодических сигналов, но и сигналов конечной длительности. При этом оговаривается временной интервал, для которого строится ряд Фурье, а в остальные моменты времени сигнал считается равным нулю. Для расчета коэффициентов ряда такой подход фактически означает периодическое продолжение сигнала за границами рассматриваемого интервала.

Синусно-косинусная форма

В этом варианте ряд Фурье имеет следующий вид:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t))$$

Здесь $\omega_1 = 2\pi/T$ – круговая частота, соответствующая периоду повторения сигнала, равному T . Входящие в формулу кратные ей частоты $k\omega_1$ называются гармониками, гармоники нумеруются в соответствии с индексом k ; частота $\omega_k = k\omega_1$ называется k -й гармоникой сигнала. Коэффициенты ряда a_k и b_k рассчитываются по формулам:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

Константа a_0 рассчитывается по общей формуле для a_k . Само же это слагаемое представляет собой среднее значение сигнала на периоде:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$$

Если $s(t)$ является четной функцией, то все b_k будут равны нулю и в формуле ряда Фурье будут присутствовать только косинусные слагаемые. Если $s(t)$ является нечетной функцией, равны нулю будут, наоборот, косинусные коэффициенты a_k и в формуле останутся лишь синусные слагаемые.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

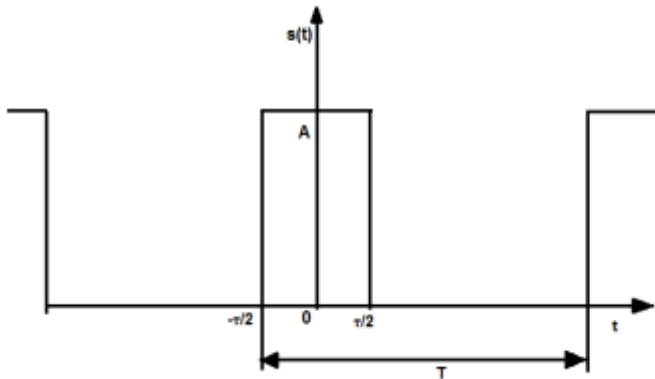


Рис. 1. Последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой A , длительностью τ и периодом повторения T .

Данный сигнал является четной функцией, поэтому для его представления удобнее использовать синусно-косинусную форму ряда Фурье – в ней будут присутствовать только косинусные слагаемые a_k , равные

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right)$$

Отношение периода к длительности импульсов называют **скважностью последовательности импульсов** и обозначают буквой

$$q: q = \frac{T}{\tau}$$

Представление последовательности прямоугольных импульсов в виде ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{A}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

Амплитуды гармонических слагаемых ряда зависят от номера гармоники.

МЕАНДР

Частным случаем предыдущего сигнала является *меандр* – последовательность прямоугольных импульсов со скважностью, равной двум, когда длительности импульсов и промежутков между ними становятся равными (рис.2).

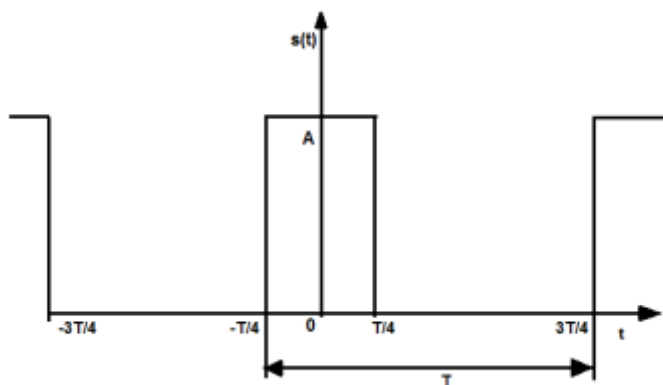


Рис. 2 Меандр

При $q = 2$, получим

$$a_k = A \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k/2} = \begin{cases} A, k = 0 \\ 0, k = 2m, m \neq 0 \\ \frac{2A}{\pi k}, k = 4m + 1 \\ -\frac{2A}{\pi k}, k = 4m - 1 \end{cases}$$

Здесь m – произвольное целое число.

При разложении в ряд Фурье четные составляющие будут отсутствовать.

$$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{3} \cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) - \dots \right)$$

ПИЛООБРАЗНЫЙ СИГНАЛ

В пределах периода он описывается линейной функцией:

$$s(t) = \frac{2A}{T} (t - kT), \left(k - \frac{1}{2}\right)T < t < \left(k + \frac{1}{2}\right)T$$

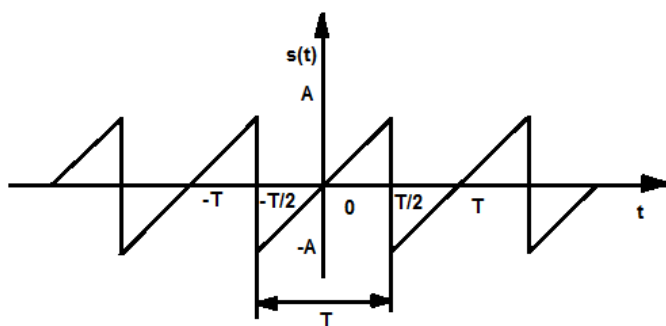


Рис. 3. пилообразный сигнал

Данный сигнал является нечетной функцией, поэтому его ряд Фурье в синусно-косинусной форме будет содержать только синусные слагаемые:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T} t \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = -\frac{2A}{\pi k} (-1)^k$$

Сам ряд Фурье для пилообразного сигнала выглядит следующим образом:

$$s(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \frac{2\pi}{T} t\right) - \frac{1}{4} \sin\left(4 \frac{2\pi}{T} t\right) + \dots \right)$$

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ТРЕУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

$$s(t) = A \left(1 - 4 \frac{|t - kT|}{T} \right), \left(k - \frac{1}{2} \right) T \leq t < \left(k + \frac{1}{2} \right) T$$

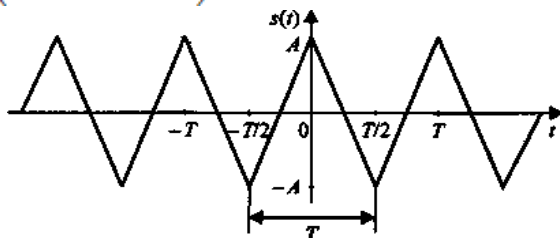


Рис.4. Последовательность треугольных импульсов

Сигнал является четной функцией, поэтому будут присутствовать косинусные составляющие.

Вычислим коэффициенты ряда Фурье:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \left(1 - 4 \frac{|t|}{T} \right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{4A}{(\pi k)^2} (1 - (-1)^k) = \\ &= \begin{cases} 0, k = 2m \\ \frac{8A}{(\pi k)^2}, k = 2m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Сам ряд Фурье имеет следующий вид:

$$s(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(3 \frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(5 \frac{2\pi}{T} t\right) + \dots \right)$$

Как видите, в отличие от последовательностей прямоугольных и пилообразных импульсов, для треугольного периодического сигнала амплитуды гармоник убывают пропорционально второй степени номеров гармоник k .

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

На выполнение лабораторной работы отводится 4 академических часа: 3 часа на выполнение и сдачу лабораторной работы и 1 час на подготовку отчета.

Порядок выполнения:

1. Изучить краткий теоретический материал.
2. Собрать схему электрической цепи и определить значения токов в ветвях схемы.
3. Составить уравнения для заданной электрической цепи и вычислить значения токов в ветвях схемы.
4. Оформить отчет.
5. Защитить выполненную работу у преподавателя.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Код программы для меандра

```

N = 8;                                % число ненулевых
гармоник
t = -1:0.01:1;                        % вектор моментов времени
A = 1;                                % амплитуда
T = 1;                                % период
nh = (1:N)*2-1;                       % номера ненулевых
гармоник
harmonics = cos(2*pi*nh*t/T);
Am = 2/pi./nh;                        % амплитуды гармоник
Am(2:2:end) = -Am(2:2:end);           % чередование знаков
s1 = harmonics .* repmat(Am', 1, length(t));
                                     % строки-частичные суммы гармоник
s2 = cumsum(s1);
for k=1:N, subplot(4, 2, k), plot(t, s2(k,:)), end

```

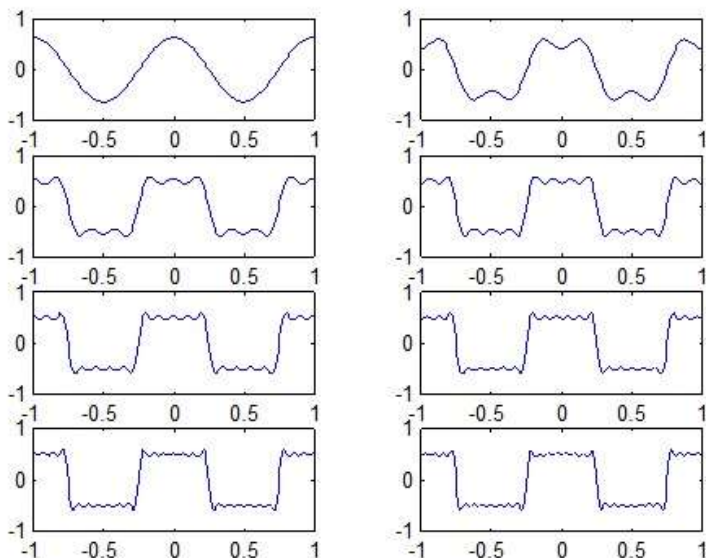
Комментарий

repmat – создание блочной матрицы или многомерного блочного массива из одинаковых блоков. `repmat(Am', 1, length(t))` – матрица состоит из 1 блока по вертикали и `length(t)` блоков по горизонтали, каждый блок является матрицей `Am'`.

Cumsum – расчет частичных сумм элементов.

Subplot (Rows, Cols, N) – команда для вывода нескольких графиков. Графическое окно разбивается на клетки в виде матрицы, имеющей **Rows** – строк, **Cols** – столбцов, и **N** – клетка становится текущей.

Результат работы программы



ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

№ варианта	Параметры для сигналов			
	A – амплитуда сигнала	T – период повторения сигналов	τ – длительность сигнала	k – число ненулевых гармоник
1	7	3	2	10

2	5	4	3	12
3	4	5	4	14
4	3	6	5	16
5	2	8	6	18
6	5	3	2	14
7	4	4	3	16
8	3	5	4	18
9	2	6	5	10
10	7	8	6	12
11	4	4	3	18
12	3	5	4	10
13	2	6	5	12
14	7	8	6	14
15	5	3	2	16
16	7	3	2	12
17	5	4	3	14
18	4	5	4	16
19	3	6	5	18
20	2	8	6	10
21	5	3	2	16
22	4	4	3	18
23	3	5	4	10
24	2	6	5	12
25	7	8	6	14
26	4	4	3	10
27	3	5	4	12
28	2	6	5	14
29	7	8	6	16
30	5	3	2	18

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Объясните, в каком виде представляются периодические сигналы при разложении в [ряд Фурье](#).
2. Перечислите основные [формы ряда Фурье](#).

3. Раскройте значение понятия «меандр».
4. Опишите функцию создания блочной матрицы или многомерного блочного массива из одинаковых блоков.
5. Предложите способ для вывода нескольких графиков в одном графическом окне.
6. Сформулируйте правила разложения сигналов в ряд Фурье при проведении лабораторного исследования.

ФОРМА ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Номер варианта студенту выдается преподавателем. Отчет на защиту предоставляется в печатном виде.

Структура отчета (на отдельном листе(-ах)):

- титульный лист;
- цели и задачи работы;
- формулировка задания согласно варианту;
- код программ для разложения последовательности прямоугольных импульсов, меандра, пилообразного сигнала и последовательности треугольных импульсов.
- результаты выполнения программ – графики промежуточных стадий суммирования.
- выводы.