ЛЕКЦИЯ 4. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Определение. Пусть $B=\{0,1\}$. Любая функция $f: B^n \to B$ называется *булевой функцией* от n переменных $f(x_1,...,x_n)$.

Любую булеву функцией можно задать таблицей истинности, состоящей из 2^n строк.

Теорема (*о количестве булевых функций*). Существует 2^{2^n} булевых функций от n переменных.
Доказательство: через таблицу истинности.
От одной переменной – 4 функции, от двух – 16 функций, от трёх – 256 функций.

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

От одной переменной (4)

	Переменная x	0	1	
Название	Обозначение			Несущественные
Нуль	0	0	0	x
Тождественная	x	0	1	
Отрицание	$\neg x$, $\bar{x}$, x', $\sim x$	1	0	
Единица	1	1	1	x

От двух переменных (16)

	Переменная x	0	0	1	1	
	Переменная y	0	1	0	1	
Название	Обозначение					Несущественные
Нуль	0	0	0	0	0	x, y
Конъюнкция	$\cdot$, $\&$, $\wedge$	0	0	0	1	
		0	0	1	0	
		0	0	1	1	y
		0	1	0	0	
		0	1	0	1	x
Сложение по модулю 2	$+$, $+_2$, $\not\equiv$, $\oplus$, $\triangle$	0	1	1	0	
Дизъюнкция	$\vee$	0	1	1	1	
Стрелка Пирса[1]	$\downarrow$	1	0	0	0	
Эквивалентность	$\equiv$	1	0	0	1	
		1	0	1	0	x
		1	0	1	1	
		1	1	0	0	y
Импликация	$\to$, $\Rightarrow$, $\supset$	1	1	0	1	
Штрих Шеффера[2]	$\mid$	1	1	1	0	
Единица	1	1	1	1	1	x, y

РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ФОРМУЛАМИ

Очевидно, любая логическая формула от n переменных задаёт некоторую булеву функцию от n переменных.**Оказывается, верно и обратное**: каждая булева функция может быть реализована логической формулой. И таких формул можно придумать бесконечно много. То есть, разные функции могут реализовывать одну и ту же функцию.

П р и м е р ы :

1. $x_1x_2 \vee x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2 \equiv x_1 \vee x_2$
2. $x_1x_2 \to x_1 \equiv 1$

Можно ли придумать какой-то *канонический* вид формулы, к которому можно свести любую формулу и который определяется однозначно? (как для кривых второго порядка).

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ КОНЪЮНКЦИИ И ДИЗЪЮНКЦИИ

О п р е д е л е н и е 1. Будем называть булеву функцию *минтермом*, если она принимает значение 1 ровно на одном наборе переменных (на остальных – 0).

О п р е д е л е н и е 2. Будем называть булеву функцию *макстермом*, если она принимает значение 0 ровно на одном наборе переменных (на остальных – 1).

О п р е д е л е н и е 3. Назовём *литералом* для переменной x либо саму x, либо $\overline{x}$.

О п р е д е л е н и е 4. *Элементарная конъюнкция* – конъюнкция различных литералов:

$$l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_k .$$

О п р е д е л е н и е 5. *Элементарная дизъюнкция* – дизъюнкция различных литералов:

$$l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_k .$$

О п р е д е л е н и е 6. Количество литералов k в элементарной конъюнкции (дизъюнкции) называется её *рангом*.

О п р е д е л е н и е 7. Если в элементарной конъюнкции или дизъюнкции $k = n$, то она называется *совершенной*.

Л е м м а 1. Любой минтерм можно единственным образом записать в виде совершенной элементарной конъюнкции.

Л е м м а 2 Любой макстерм можно единственным образом записать в виде совершенной элементарной дизъюнкции.

Д о к а з а т е л ь с т в о : конструктивное.

ДНФ

О п р е д е л е н и е. *ДНФ* – дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Очевидно, ДНФ не единственна. Например:

$$x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 \equiv x_1 \vee x_2$$

Как вы думаете – какая из этих ДНФ лучше? А всегда ли ДНФ существует?

Т е о р е м а (*о существовании ДНФ*). Всякая булева функция может быть задана в виде ДНФ.

Д о к а з а т е л ь с т в о м служит алгоритм:

1) Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием.
2) Раскрыть скобки.
3) Применить законы де Моргана.
4) Избавиться от знаков двойного отрицания.
5) Избавиться от кратных литералов: $x \wedge x = x, x \wedge \overline{x} = 0$

П р и м е р. $\overline{(x \leftrightarrow y)} \wedge x \equiv x\overline{y}$

СДНФ

Определение. *СДНФ* – дизъюнкция совершенных элементарных конъюнкций.

Теорема (*о существовании СДНФ*). Всякая булева функция, не равная тождественно 0, имеет единственную СДНФ с точностью до порядка слагаемых.

Замечание: для 0 это будет пустая СДНФ.

Доказательство.

Существование. Предъявим алгоритм построения СДНФ: для каждой 1 в таблице истинности строим соответствующую совершенную элементарную конъюнкцию и берём их дизъюнкцию.

Единственность. По любой СДНФ однозначно определяются те строчки в таблице истинности, где должны быть 1.

Пример 1. $(x_1 \vee x_2) \equiv x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$

Мы видим, что СДНФ – это не так уж и здорово!

Пример 2. Как от ДНФ перейти к СДНФ:

$xy \vee x\bar{z} \equiv xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$

КНФ И СКНФ

Задание. Дайте самостоятельно все определения и сформулируйте соответствующие теоремы.

МИНИМИЗАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

МИНИМАЛЬНАЯ ДНФ

Определение. Будем называть ДНФ минимальной, если она содержит минимальное число литералов (т.е. суммарный ранг всех конъюнкций минимален).

Минимальная ДНФ, в отличие от СДНФ, не единственна!

Теорема (*о существовании минимальной ДНФ*). Минимальная ДНФ существует.

Доказательство следует из того, что общее число всех ДНФ конечно.

Теорема (*о количество различных ДНФ*). Количество различных (с точностью до перестановки конъюнкций и литералов) ДНФ от n переменных равно 2^{3^n}.

Доказательство: дважды применить правило умножения.

Из этой теоремы видно, что перебором минимизировать не эффективно.

Стратегия минимизации

1. Найдём два терма, которые отличаются только знаком одного литерала: в одном x_i, в другом - $\bar{x}_i$: $Xx_i \vee X\bar{x}_i$.
2. Вынесем X за скобки: $X(x_i \vee \bar{x}_i)$.
3. Воспользуемся законом исключённого третьего: X.
4. Повторим 1-3, пока это возможно.

Но это стратегия, а не алгоритм.

МИНИМИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ЕДИНИЧНОГО КУБА

Геометрическая интерпретация: двоичным кодам длины n соответствуют **вершины двоичного куба (гиперкуба).** Булева функция – функция на вершинах куба. Она определяется множеством вершин, на которых она равна 1.

Пример 1. f равна 1 на 000, 001, 010, 110. СДНФ: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$

О п р е д е л е н и е **.** Вершины, рёбра и грани называются *гипергранями* рангов (или коразмерностей) 3, 2 и 1 соотвественно. Каждой гиперграни соотвествует конъюнкция соотвествующего ранга.

Задача минимизации ДНФ теперь может быть сформулирована так: для заданного множества вершин гиперкуба найти такое его покрытие гипергранями, чтобы сумма их рангов была минимальна (или коразмерностей).

Вернёмся к примеру:

$$\text{МДНФ} = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_2\overline{x_3}\,.$$

П р и м е р 2 **.** f равна 1 на 000, 010, 110.

$$\text{МДНФ} = \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_2\overline{x_3}\,.$$

МИНИМИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ КАРТЫ КАРНО

Куб хорошо работает, пока переменных 3 или 2.

В основе карты Карно лежит плоская развёртка n-мерного куба.

П р и м е р 1.

	00	01	11	10
0	1	1		1
1				1

Двоичные коды в строках и столбцах **должны быть кодами Грея**. Только тогда соседние клетки карты будут соответствовать соседним вершинам куба (крайние клетки вертикалей и горизонталей также будут соседними – т.е. карта склеена в тор).

Если объединить соседние клетки в один прямоугольник с количеством клеток 2^k, то получим гипергрань. Задача та же – покрыть все 1 как можно более крупными гипергранями.

Правила построения карты Карно:

1) Склеиваем соседние 1 в одну область
2) Склеивать можно только прямоугольные области с числом единиц 2^k
3) Крайние клетки вертикалей и горизонталей также граничат между собой (тор)
4) Число областей должно быть как можно меньше (каждая область – терм), а размер области – как можно больше (области из 2^k единиц соответствует конъюнкция из $n-k$ литералов)

П р и м е р 2.

	00	01	11	10
0	1			1
1				1

П р и м е р 3 **.**

	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1