

## Задачи линейного программирования.

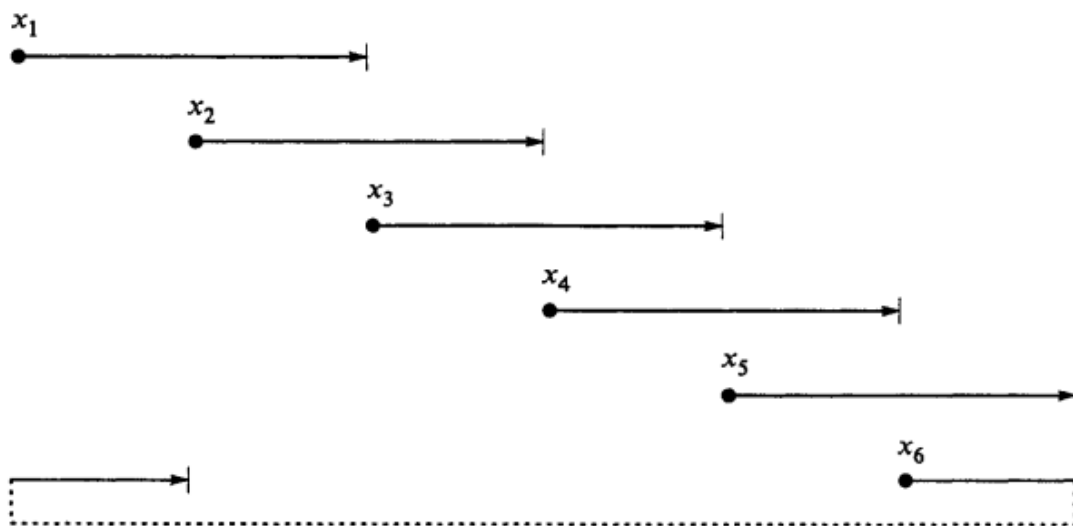
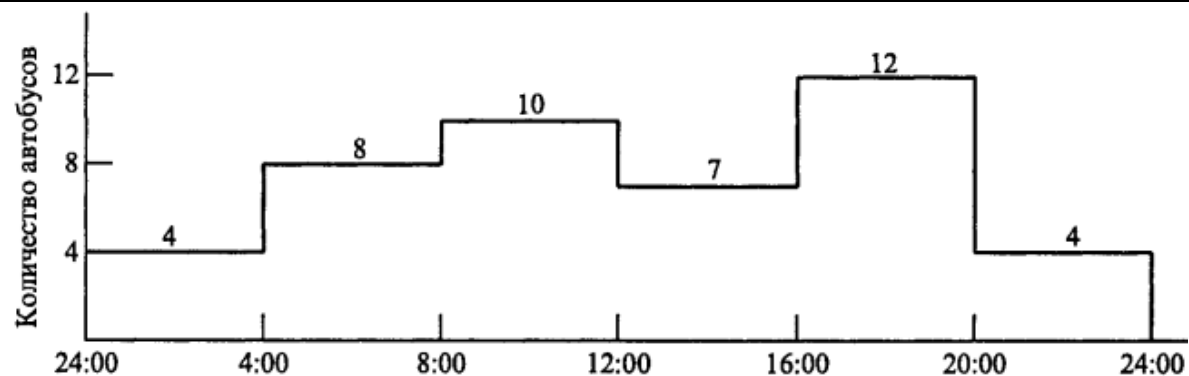
**Цель работы:** сформировать практические навыки анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования и использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов задач линейного программирования.

**Задачи:** Построить математическую модель задачи. Выбрать среду для проведения расчетов и вычислительного эксперимента. Оценить результаты расчетов.

Вариант	Задание																		
1	Банк, предоставляющий полный набор банковских услуг, находится в процессе формирования портфеля кредитов объемом 12 000 000 д. е.. В следующей таблице представлены возможные типы банковских кредитов.																		
	<table><tr><th>Тип кредита</th><th>Ставка процента</th><th>Вероятность безнадежных долгов</th></tr><tr><td>Кредиты физическим лицам</td><td>14,0</td><td>0,10</td></tr><tr><td>Кредиты на покупку автомобилей</td><td>13,0</td><td>0,70</td></tr><tr><td>Кредиты на покупку жилья</td><td>12,0</td><td>0,30</td></tr><tr><td>Сельскохозяйственные</td><td>12,5</td><td>0,50</td></tr><tr><td>Коммерческие</td><td>10,0</td><td>0,20</td></tr></table>	Тип кредита	Ставка процента	Вероятность безнадежных долгов	Кредиты физическим лицам	14,0	0,10	Кредиты на покупку автомобилей	13,0	0,70	Кредиты на покупку жилья	12,0	0,30	Сельскохозяйственные	12,5	0,50	Коммерческие	10,0	0,20
	Тип кредита	Ставка процента	Вероятность безнадежных долгов																
	Кредиты физическим лицам	14,0	0,10																
	Кредиты на покупку автомобилей	13,0	0,70																
	Кредиты на покупку жилья	12,0	0,30																
	Сельскохозяйственные	12,5	0,50																
	Коммерческие	10,0	0,20																
Безнадежные долги считаются невозвратимыми, поэтому они должны вычитаться из возможного дохода.																			
Конкурентная борьба с другими финансовыми институтами вынуждает банк не менее 40% капитала помещать в сельскохозяйственные и коммерческие кредиты. Для содействия строительной индустрии своего региона банк планирует вложить в кредиты на покупку жилья не менее 50% от общей суммы кредитов физических лиц, на покупку автомобилей и жилья. Банк также поддерживает государственную политику, указывающую, что отношение безнадежных долгов ко всей																			

	сумме кредитов не должно превышать 0,4.  Цель банка максимизация прибыли.																		
2	<p>СНТ Luxury Village владеет 323,75 гектарами необработанной земли с живописным озером в центре горного массива. В прошлом освоение территории вокруг озера происходило нерегулярно и понемногу. Сейчас вокруг озера построено много разбросанных домиков для отдыхающих. Поскольку канализация отсутствует, интенсивно используются септики. В настоящее время многие септики приходят в негодность, поэтому появились проблемы с загрязнением воды в озере.</p> <p>Чтобы предотвратить дальнейшее загрязнение озера, муниципальные надзорные органы разработали строгие ограничительные требования для возможного дальнейшего освоения этой территории.</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Разрешается возводить домики только на одну, две или три семьи, причем доля домиков на одну семью должна составлять не менее 50% от всех построенных.</li><li>2. Ограничивается количество септиков: минимальная территория, отведенная для размещения одного септика, обслуживающего один домик на одну, две или три семьи, составляет соответственно 0,81, 1,21 и 1,62 гектара.</li><li>3. Рекреационная зона рассчитывается исходя из нормы — не менее 0,4 гектара на 200 семей.</li><li>4. Для предотвращения загрязнения озера запрещается использовать поверхностные воды для полива и бытовых нужд.</li></ol> <p>Правление СНТ Luxury Village решило изучить возможности дальнейшего освоения тех 323,75 гектаров земли, которые ей принадлежат. Дальнейшее освоение этих земель предусматривает строительство домиков для отдыха на одну, две и три семьи. Подсчитано, что необходимо отвести не менее 15% всей территории на прокладку дорог и строительство вспомогательных сооружений. Планируется сдавать домики отдыхающим и получить от одного домика следующую прибыль.</p> <table><tr><td>Тип домика</td><td>на одну семью</td><td>на две семьи</td><td>на три семьи</td></tr><tr><td>Чистая прибыль (д.е.)</td><td>720 400</td><td>864 480</td><td>1 080 600</td></tr></table> <p>Стоимость планируемой водопроводной сети пропорциональна количеству домиков, подключенных к водопроводу. Однако муниципальные власти настаивают на том, что необходимо собрать не менее 7 204 000 д.е., чтобы этот проект был экономически осуществимым. Кроме того, известно, что даже в пиковый период водопроводная сеть не сможет поставить больше 909,22 м<sup>3</sup> воды в день. В следующей таблице приведена стоимость подключения к водопроводной сети одного домика и указана ежедневная потребность в воде одной средней семьи.</p> <table><tr><td>Тип домика</td><td>на одну семью</td><td>на две семьи</td><td>на три семьи</td><td>Рекреационная зона</td></tr><tr><td>Стоимость подключения к водопроводу (д.е.)</td><td>72 040</td><td>86 364</td><td>100 758</td><td>57 576</td></tr></table>	Тип домика	на одну семью	на две семьи	на три семьи	Чистая прибыль (д.е.)	720 400	864 480	1 080 600	Тип домика	на одну семью	на две семьи	на три семьи	Рекреационная зона	Стоимость подключения к водопроводу (д.е.)	72 040	86 364	100 758	57 576
Тип домика	на одну семью	на две семьи	на три семьи																
Чистая прибыль (д.е.)	720 400	864 480	1 080 600																
Тип домика	на одну семью	на две семьи	на три семьи	Рекреационная зона															
Стоимость подключения к водопроводу (д.е.)	72 040	86 364	100 758	57 576															

	<div>Потребность в воде (м<sup>3</sup>/день)</div> <div>1,82      2,73      3,82      2,05</div> <div>Компания должна определить, сколько строить домиков различного типа и какова должна быть рекреационная зона, чтобы удовлетворить требованиям властей.</div>
3.	<p>Городская транспортная компания изучает возможность ввести такую систему движения городских автобусов, которая снизила бы проблему загазованности в городе путем уменьшения количества используемых автобусов. Вначале нужно было определить минимальное количество автобусов, необходимое для удовлетворения транспортных потребностей горожан. Оказалось, что в различное время суток требуется разное количество автобусов. Дальнейшее изучение этого вопроса позволило аппроксимировать суточную потребность в автобусах кусочно-постоянной функцией с 4-часовыми интервалами постоянных значений. Эта функция показана на рисунке. При составлении расписания движения автобусов следует учитывать, что каждый автобус должен находиться на линии непрерывно в течение 8 часов (одна рабочая смена).</p>



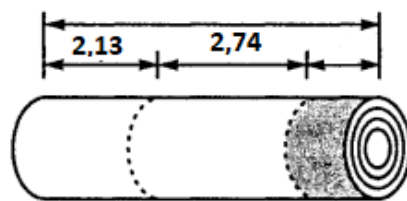
Требуется определить число автобусов, выходящих на линию в определенную смену, так, чтобы удовлетворить минимальные потребности в транспортных услугах и минимизировать общее количество автобусов, выходящих на линию в течение суток.

4	Тихоокеанская бумажная фабрика производит стандартные рулоны бумаги шириной в 6,1 м. Специальные заказы клиентов требуют разрезания стандартных рулонов. Типовой заказ (такие заказы могут меняться каждый день) приведен в
---	---

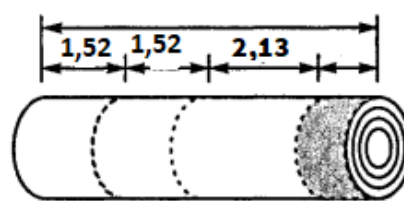
следующей таблице.

Позиции заказа	Требуемая ширина рулона (м)	Требуемое количество рулонов (шт.)
1	1,52	150
2	2,13	200
3	2,74	300

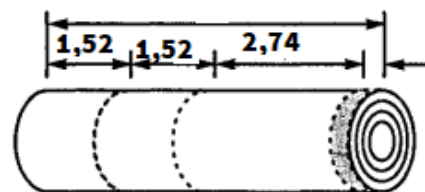
На фабрике заказы выполняются путем разрезания стандартных рулонов на требуемые специальными ножами. Существует несколько вариантов разрезки стандартного рулона, три из которых — А, В и С показаны на рисунке (существуют и другие варианты, не показанные на этом рисунке). Для выполнения заказа можно совместно использовать несколько вариантов разрезки стандартных рулонов. Например, для выполнения заказа, приведенного в таблице, можно применить следующие комбинации вариантов А, В и С.



Вариант А



Вариант В



Вариант С

1. Разрезать 300 стандартных рулонов, используя вариант А, и 75 рулонов с помощью варианта В.

2. Разрезать 200 стандартных рулонов, используя вариант А, и 100 рулонов помощью варианта С.

Требуется найти комбинацию вариантов разрезки, с помощью которой можно было бы выполнить заказ с наименьшими отходами бумаги.

5. Нефтедобывающая компания добывает 600 000 баррелей сырой нефти в день. Нефтеперерабатывающий завод производит

	<p>два вида неэтилированного бензина: рядовой и высококачественный. Процесс нефтепереработки включает три стадии: 1) перегонка сырой нефти на перегонной колонне — на выходе бензиновый полуфабрикат, 2) часть полуфабриката поступает на крекинг-установку, где производится бензиновый дистиллят, 3) смесительная установка смешивает полуфабрикат, полученный на выходе перегонной колонны, и бензиновый дистиллят. Как рядовой, так и высококачественный бензин можно получить на основе либо бензинового полуфабриката, либо бензинового дистиллята (это зависит от того, что является основой смеси в смесительной установке), но стоимость таких видов бензина будет разной. Компания подсчитала, что чистая прибыль от одного барреля рядового бензина составляет 554,28 д. е. и 374,32 д. е., в зависимости от того, будет ли основой бензина полуфабрикат или дистиллят. Аналогичная чистая прибыль от одного барреля высококачественного бензина составляет соответственно 885,42 д. е. и 748,64 д. е.</p> <p>Далее, на производство одного барреля бензинового полуфабриката (получаемого на выходе перегонной колонны) идет 5 баррелей сырой нефти. Крекинг-установка за день не может переработать более 40 000 баррелей полуфабриката. Весь остальной полуфабрикат идет на изготовление чистого бензина через смесительную установку. Ежедневно требуется производить не более 80 000 баррелей рядового бензина и 50 000 баррелей высококачественного бензина.</p> <p>Постройте оптимальный производственный план нефтеперерабатывающего завода.</p>																												
6.	<p>Сахарный завод из сиропа сахарного тростника производит желтый сахар, обычный белый, сахарную пудру и черную патоку. Компания еженедельно закупает 4000 т сиропа и планирует производить не менее 25 т каждого сахарного продукта в неделю. Процесс производства начинается с переработки сахарного сиропа в желтый сахар и черную патоку. Из одной тонны сиропа получается 0.3 т желтого сахара и 0.1 т черной патоки. Далее из желтого сахара вырабатывается белый: из тонны желтого сахара получается 0.8 т белого. Наконец, сахарная пудра получается из белого сахара путем размельчения на специальной мельнице. Производительность этой мельницы равна 95%, т.е. из тонны белого сахара получается 0.95 т сахарной пудры. Доход от одной тонны желтого и белого сахара, сахарной пудры и черной патоки составляет 10797,75 д.е., 14397 д. е., 16556,55 д. е. и 2519,47 д.е. соответственно.</p> <p>Сформулируйте задачу линейного программирования и найдите ее оптимальное решение.</p>																												
7	<p>ИТ-компания рассматривает возможность реализации шести проектов в течение 4 лет. Ожидаемые затраты на реализацию каждого проекта и доход от них приведены в следующей таблице. Компания может выполнить любой проект частично или полностью. При частичном выполнении проекта доход и затраты считаются пропорционально реализованной доле проекта.</p> <table><tr><th rowspan="2">Проект</th><th colspan="4">Затраты (на 1000 д.е.)</th><th rowspan="2">Доход (на 1000 д.е.)</th></tr><tr><th>1 -й год</th><th>2-й год</th><th>3-й год</th><th>4-й год</th></tr><tr><td>1</td><td>10.5</td><td>14.4</td><td>2.2</td><td>2.4</td><td>32.40</td></tr><tr><td>2</td><td>8.3</td><td>12.6</td><td>9.5</td><td>3.1</td><td>35.80</td></tr><tr><td>3</td><td>10.2</td><td>14.2</td><td>5.6</td><td>4.2</td><td>17.75</td></tr></table>	Проект	Затраты (на 1000 д.е.)				Доход (на 1000 д.е.)	1 -й год	2-й год	3-й год	4-й год	1	10.5	14.4	2.2	2.4	32.40	2	8.3	12.6	9.5	3.1	35.80	3	10.2	14.2	5.6	4.2	17.75
Проект	Затраты (на 1000 д.е.)				Доход (на 1000 д.е.)																								
	1 -й год	2-й год	3-й год	4-й год																									
1	10.5	14.4	2.2	2.4	32.40																								
2	8.3	12.6	9.5	3.1	35.80																								
3	10.2	14.2	5.6	4.2	17.75																								

	4	7.2	10.5	7.5	5.0	14.80																														
	5	12.3	10.1	8.3	6.3	18.20																														
	6	9.2	7.8	6.9	5.1	12.35																														
	Возможное вложение (в 1000 д.е.)		60.0	70.0	35.0	20.0																														
	Сформулируйте задачу линейного программирования и найдите решение, максимизирующее общую прибыль.																																			
8	<p>Производственная компания “Окошки” получила заказ на производство оконных блоков, рассчитанный на 6 месяцев. В течение этого срока надо поставить 100, 250, 190, 140, 220 и 110 оконных блоков ежемесячно. Стоимость оконных блоков в разные месяцы может быть разной, в зависимости от стоимости трудовых ресурсов, материалов и оконной фурнитуры. Компания подсчитала, что стоимость ее продукции на следующие 6 месяцев будет равна 3599,25 д.е., 3239,32 д.е., 3959,18 д.е., 3455,28 д.е., 3743,22 д.е. и 3599,25 д.е. за один оконный блок. Учитывая изменения стоимости, компания может производить больше оконных блоков, чем необходимо, и использовать ранее произведенную продукцию для покрытия потребности следующих месяцев. Однако хранение одного оконного блока стоит 575,88 д.е. в месяц, причем начисления за хранение происходят при инвентаризации продукции в конце каждого месяца.</p> <p>Сформулируйте задачу линейного программирования для определения оптимальной временной схемы производства.</p>																																			
9	<p>Некий инвестор имеет четыре проекта инвестирования суммы в размере 7198500 д.е.. В следующей таблице показаны денежные потоки для каждого инвестиционного проекта.</p> <p style="text-align: center;">Денежные потоки на начало года</p> <table><tr><td>Проект</td><td>1 -й год</td><td>2-й год</td><td>3-й год</td><td>4-й год</td><td>5-й год</td></tr><tr><td>1</td><td>- 71985,00</td><td>35992,50</td><td>21595,50</td><td>129573,00</td><td>86382,00</td></tr><tr><td>2</td><td>- 71985,00</td><td>43191,00</td><td>14397,00</td><td>107977,50</td><td>93580,50</td></tr><tr><td>3</td><td>0,00</td><td>-71985,00</td><td>57588,00</td><td>136771,50</td><td>57588,00</td></tr><tr><td>4</td><td>- 71985,00</td><td>28794,00</td><td>43191,00</td><td>129573600</td><td>68385,75</td></tr></table> <p>Инвестор также может положить деньги в банк под 6.5% годовых. Деньги, полученные по итогам года, можно реинвестировать в последующие годы.</p> <p>Сформулируйте задачу линейного программирования и найдите решение, оптимизирующее размещение инвестиций.</p>						Проект	1 -й год	2-й год	3-й год	4-й год	5-й год	1	- 71985,00	35992,50	21595,50	129573,00	86382,00	2	- 71985,00	43191,00	14397,00	107977,50	93580,50	3	0,00	-71985,00	57588,00	136771,50	57588,00	4	- 71985,00	28794,00	43191,00	129573600	68385,75
Проект	1 -й год	2-й год	3-й год	4-й год	5-й год																															
1	- 71985,00	35992,50	21595,50	129573,00	86382,00																															
2	- 71985,00	43191,00	14397,00	107977,50	93580,50																															
3	0,00	-71985,00	57588,00	136771,50	57588,00																															
4	- 71985,00	28794,00	43191,00	129573600	68385,75																															
10	<p>Производственная компания "Шпунтик" заключила контракт с сетью магазинов автотоваров на поставку 1500 гаечных ключей и 1200 специальных отверток еженедельно. Работая в одну смену, компания "Шпунтик" не может выполнить этот контракт, поэтому вынуждена ввести сверхурочные и воспользоваться услугами субподрядчиков, в результате чего возрастет себестоимость ее инструментов, как показано в следующей таблице. Отметим также, что рыночная цена гаечных ключей более чем в два раза выше рыночной цены отверток.</p>																																			

	Инструмент	Тип производства	Еженедельные производственные возможности (шт.)				Себестоимость единицы продукции (д. е.)	
	Гаечный ключ	Обычный	0-550				143,97	
		Использование сверхурочных	551 -800				201,56	
		Использование субподрядчиков	801 -∞				215,95	
	Отвертка	Обычный	0-620				151,17	
		Использование сверхурочных	621 -900				230,35	
		Использование субподрядчиков	901 - ∞				302,34	
Сформулируйте задачу линейного программирования и найдите оптимальную схему производства каждого инструмента.								
11	Четыре изделия последовательно обрабатываются на двух станках. Данные, описывающие этот технологический процесс, приведены в следующей таблице.							
			Время обработки (часы)					
	Станок	Стоимость часа работы (д.е.)	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Изделие 4	Максимальная нагрузка (часы)	
	1	10	2	3	4	2	500	
	2	5	3	2	1	2	380	
	Цена единицы изделия		65	70	55	45		
а)Сформулируйте задачу линейного программирования и найдите ее оптимальное решение.								
б)Какую максимальную стоимость машинного часа можно применить при обработке третьего изделия, чтобы его продажа приносила хоть какую-то прибыль.								