ЛЕКЦИЯ 14. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГРАФЫ

ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ

Граф, состоящий из одной вершины, называется *тривиальным*. Граф, состоящий из простого цикла с k вершинами, обозначается C_k.

Пример. C_3 — *треугольник*.

Граф, в котором любые две вершины смежны, называется *полным*. Полный граф с p вершинами обозначается K_p, он имеет максимально возможное число рёбер:

$$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Полный подграф (некоторого графа) называется *кликой* (этого графа).

Определение. Граф называется *двудольным*, если множество его вершин V можно разбить на два непустых непересекающихся подмножества V_1 и V_2 так, что у любого ребра один из концов лежит в V_1, а другой – в V_2. Множества V_1 и V_2 называют *долями* графа.

Если двудольный граф содержит все рёбра, соединяющие V_1 и V_2, то он зазывается *полным двудольным графом* и обозначается $K_{m,n}$, где $m = |V_1|, n = |V_2|$.

Пример: «три домика, три колодца» - это граф $K_{3,3}$.

Теорема (Кёниг). Граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.

Доказательство. Пусть граф двудольный. Рассмотрим какой-то цикл. Концы каждого ребра лежат в разных долях, значит при обходе цикла доля меняется на каждом шаге: 1→2→1→2 … →1. Значит, число шагов чётное.

Возьмём произвольную вершину и построим остовное дерево обходом в ширину. Все вершины нечётных ярусов отнесём к первой доле, чётных – ко второй. Покажем, что нет ни одного ребра, соединяющего вершины одной чётности. Пусть такие две вершины – u и v – существуют. Найдём на остовном дереве путь от u к v: он единственный и имеет чётную длину (поскольку на этом пути чётность яруса все время меняется). Добавив к нему ребро (u,v), получим цикл нечётной длины – противоречие.

ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

Если граф имеет цикл (не обязательно простой), содержащий все рёбра графа, то такой цикл называется *эйлеровым* циклом, а граф называется *эйлеровым* графом. Если граф имеет цепь (не обязательно простую), содержащую все рёбра, то такая цепь называется *эйлеровой* цепью, а граф называется *полуэйлеровым* графом.

Эйлеров цикл содержит не только все рёбра (по одному разу), но и все вершины графа (возможно, по нескольку раз). Ясно, что эйлеровым может быть только связный граф.

ТЕОРЕМА. *Если граф G связен и нетривиален, то следующие утверждения эквивалентны.*

1. *G — эйлеров граф.*
2. *Каждая вершина G имеет чётную степень.*
3. *Множество рёбер G можно разбить на простые циклы.*

Доказательство.

[1$\Longrightarrow$ 2] Пусть Z — эйлеров цикл в G. Двигаясь по Z, будем подсчитывать степени вершин, полагая их до начала прохождения нулевыми. Прохождение каждой вершины вносит 2 в степень этой вершины. Поскольку Z содержит все рёбра, то, когда обход Z будет закончен, будут учтены все рёбра, а степени всех вершин — чётные.

[2$\Longrightarrow$ 3] G — связный и нетривиальный граф, следовательно, $\forall\, v_i \ \ (d(v_i) > 0)$. Степени вершин чётные, следовательно, $\forall\, v_i \ \ (d(v_i) \geqslant 2)$. Имеем

$$2q = \sum_{i=1}^{p} d(v_i) \geqslant 2p \Longrightarrow q \geqslant p \Longrightarrow q > p - 1.$$

Следовательно, граф G — не дерево, а значит, граф G содержит (хотя бы один) простой цикл Z_1. (Z_1 — множество рёбер.) Тогда $G - Z_1$ — остовный подграф, в котором опять все степени вершин чётные. Исключим из рассмотрения изолированные вершины. Таким образом, $G - Z_1$ тоже удовлетворяет условию 2, следовательно, существует простой цикл $Z_2 \subset (G - Z_1)$. Далее выделяем циклы Z_i, пока граф не будет пуст. Имеем $E = \bigcup Z_i$ и $\bigcap Z_i = \varnothing$.

[3$\Longrightarrow$1] Возьмем какой-либо цикл Z_1 из данного разбиения. Если $Z_1 = E$, то теорема доказана. Если нет, то существует цикл Z_2, не имеющий общих рёбер с Z_1 (см. рис. 10.5), такой, что $\exists\, v_1 \ \ ((v_1 \in Z_1 \ \& \ v_1 \in Z_2))$, так как G связен. Маршрут $Z_1 \cup Z_2$ является циклом и содержит все свои рёбра по одному разу.

Если $Z_1 \cup Z_2 = E$, то теорема доказана. Если нет, то существует цикл Z_3, такой, что $\exists\, v_2 \ \ (v_2 \in Z_1 \cup Z_2 \ \& \ v_2 \in Z_3)$. Далее будем наращивать эйлеров цикл, пока он не исчерпает разбиения. □

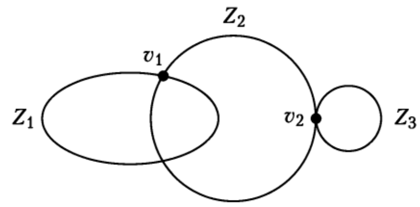

Рис. 10.5. К доказательству теоремы п. 10.2.1

Существует эффективный алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе сложности $O(q)$, т.е. $O(p^2)$.

ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

Название «гамильтонов цикл» произошло от задачи «Кругосветное путешествие», придуманной Гамильтоном[1] в XIX веке: нужно обойти все вершины графа, диаграмма которого показана на рис. 10.6 (в исходной формулировке вершины были помечены названиями столиц различных стран), по одному разу и вернуться в исходную точку. Этот граф представляет собой укладку додекаэдра.

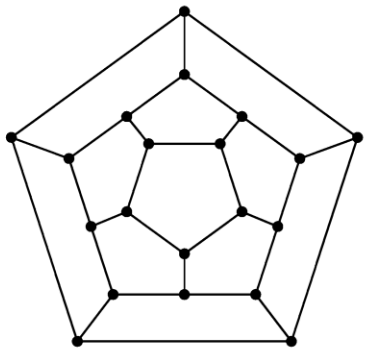

Рис. 10.6. Задача <<Кругосветное путешествие>>

`Этот граф имеет 20 вершин, 25 рёбер (и 20 граней).`

Если граф имеет простой цикл, содержащий все вершины графа (по одному разу), то такой цикл называется *гамильтоновым* циклом, а граф называется *гамильтоновым* графом.

Гамильтонов цикл не обязательно содержит все рёбра графа. Ясно, что гамильтоновым может быть только связный граф.

Простые необходимые и достаточные условия гамильтоновости графа неизвестны. Известны только некоторые достаточные условия, одно из которых приведено в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *Если $\delta(G) \geqslant p/2$, то граф G является гамильтоновым.*

(здесь $\delta(G)$ – минимальная степень вершины, p – количество вершин).

Видим, что это условие только достаточно: для додекаэдра оно не выполнено, а он гамильтонов!!!

Доказательство проводить не будем, т.к. теорема «малоэффективная».

ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

Граф *укладывается* на некоторой поверхности, если его можно нарисовать на этой поверхности так, чтобы рёбра графа при этом не пересекались. Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости. *Плоский* граф — это граф, уже уложенный на плоскости.

Область, ограниченная ребрами в плоском графе, называется *гранью*. Грань не содержит других граней. Число граней плоского графа G обозначается $f(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Внешняя часть плоскости также образует грань.

Пример. На рис. 10.8 показаны диаграммы планарного графа K_4 и его укладка на плоскости. Этот граф имеет 4 грани.

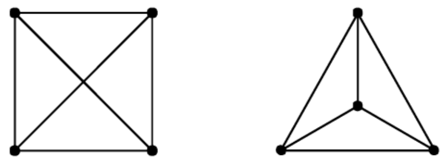

Рис. 10.8. Планарный граф и его укладка

Для графов, уложенных на некоторой поверхности, справедливо определённое соотношение между числом вершин, рёбер и граней графов, которые укладываются на этой поверхности.

ТЕОРЕМА (формула Эйлера). *Для связного планарного графа справедливо следующее соотношение:*

$$p - q + f = 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Число в правой части этого соотношения называется *эйлеровой характеристикой* поверхности.

Доказательство. Если G является деревом, то очевидно, что f=1, q=p-1 ⇒ p-q+f=2.

Пусть G – не дерево. Пусть p-q+f=χ. Докажем, что χ=2. Поскольку G связный и не является деревом, то в нём есть цикл. Уберём из него одно ребро: количество рёбер на 1 уменьшится и количество граней тоже на 1 уменьшится (две грани, разделённые этим ребром, сольются в одну), количество вершин не изменится ⇒ формула сохранится. Будем убирать циклы, пока не получится дерево, а в нём е=χ.

Эйлер доказал эту формулу, когда изучал многогранники. Число χ называется *эйлеровой характеристикой поверхности*. Оказывается, что для плоскости и сферы χ=2, а для тора - χ=0. Такие свойства поверхностей изучает раздел математики, который называется **топологией**.

Следствие 1. Существует ровно 5 правильных многогранников (тел Платона): *тетраэдр, октаэдр, куб* (или *гексаэдр*), *икосаэдр, додекаэдр*.

Замечание: многогранник называется правильным, если он выпуклый, его гранями являются правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число рёбер.

Доказательство. Пусть гранями правильного многогранника являются правильные n-угольники и в каждой вершине сходится m рёбер. Тогда , очевидно, что

$$f \cdot n = 2 \cdot q = p \cdot m$$

(в каждом из этих выражений мы получаем удвоенное число рёбер многогранника). Отсюда

$$\frac{2q}{m} - q + \frac{2q}{n} = 2$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$$

Получаем, что с одной стороны $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$, а с другой, очевидно $m, n \geq 3$. Получаем всего 5 возможных пар:

n	3	3	4	3	5
m	3	4	3	5	3
Название	тетраэдр	октаэдр	куб	икосаэдр	додекаэдр

Все они реализуются (это уже геометрия). По теореме Коши характиристика (n,m) полностью определяет многогранник.

Следствие 2. Если G – связный планарный граф, у котрого p>3, то

$$q \le 3p - 6 .$$

Доказательство. Каждая грань ограничена по крайней мере 3-мя рёбрами, поэтому

$$3f \le 2q .$$

Из формулы Эйлера:

$$3q = 3p + 3f - 6 \le 3p + 2q - 6$$
$$q \le 3p - 6$$

Следствие 3. Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

Доказательство.

Для K_5: q=10, p=5 – неравенство не выполнено

Для $K_{3,3}$: q=9, p=6 – неравенство выполнено. Но в этом графе нет треугольников, поэтому каждая гранб ограничена по крайней мере 4-мя рёбрами, поэтому

$$4f \le 2q .$$

Из формулы Эйлера:

$$4q = 4p + 4f - 8 \le 4p + 2q - 8$$
$$q \le 2p - 4$$

а это неравенство уже не выполнено.

Теорема (Понтрягин-Куратовский). Граф планарен т. и т.д., когда он не содержит подграфов K_5 и $K_{3,3}$.

Доказательство довольно сложное (использует т.н. *гамма-алгоритм*).