ЛЕКЦИЯ 7. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика - это наука о комбинациях.

Основные задачи:

1) Подсчёт числа комбинаций
2) Перечисление комбинаций

Пример. Замок на подъезде: 10 кнопок, закрывается на 3. Насколько сложно его открыть?

1) Сколько существует комбинаций?
2) Как их все перебрать?

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ:

- если первый элемент комбинации можно выбрать x1 способами, после чего второй – x2 способами и т.д. последний xN способами, то различных комбинаций можно составить

x1*x2*…*xN.

ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ:

- если все комбинации разбиваются на N непересекающихся классов, в первом из которых y1 комбинаций, а во втором y2 и т.д, то всего комбинаций будет

y1+y2+…+yN.

ПРАВИЛО ВЫЧИТАНИЯ:

- если трудно посчитать «нужные» комбинации, то можно посчитать все и вычесть из них количество «ненужных»

ПРАВИЛО ДЕЛЕНИЯ:

- если при подсчёте комбинаций каждая из них была посчитана k раз, то полученный результат нужно поделить на k.

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ КОМБИНАЦИЙ

ПЕРЕСТАНОВКИ

Пример. Рейтинг группы из 20 человек.

Определение. **Перестановкой** из N различных объектов называют комбинацию, которая получается в результате любого их упорядочивания. Объекты всегда можно заменить их номерами (в дальнейшем будем делать так для всех комбинаций).

N=3

123, 132, 213, 231, 312, 321

Формула. $P_N = N!$

20! = 2 432 902 008 176 640 000

РАЗМЕЩЕНИЯ

П р и м е р . Выбрать из 20 человек 3-х человек для присуждения премий: 1-й, 2-й и 3-й.

О п р е д е л е н и е . **Размещением** из N по K называют комбинацию, которая получается в результате последовательного выбора *без возвращения* любых K объектов из N имеющихся; порядок выбора при этом учитывается.

N=3, K=2

12, 13, 21, 23, 31, 32

Ф о р м у л а . $A_N^k = N(N-1)...(N-k+1) = \dfrac{N!}{(N-k)!}$

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 18 \cdot 19 \cdot 20 = 6\,840$$

СОЧЕТАНИЯ

П р и м е р . Выбрать из 20 человек 3-х человек для поездки в Крым.

О п р е д е л е н и е . **Сочетанием** из N по K называют комбинацию, которая получается в результате одновременного выбора любых K объектов из N имеющихся; порядок выбора при этом не учитывается.

Т.о. сочетание – это любое k-элементное подмножество.

Каждое подмножество – битовая строка длины N.

Каждое сочетание – битовая строка длины N, в которой ровно k единиц.

N=3, K=2

[12], [13], [23]

Ф о р м у л а . $C_N^k = \dfrac{A_N^k}{k!} = \dfrac{N!}{k!(N-k)!}$

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{17!\,3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3} = 1\,140$$

КОМБИНАЦИИ С ПОВТОРЕНИЯМИ

ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ

П р и м е р . Сколько слов можно составить из слова «парк»? «мама»?

О п р е д е л е н и е . Пусть N объектов разбиваются на группы из одинаковых (неразличимых) объектов численностью $n_1+n_2+\ldots+n_k=N$. **Перестановкой с повторениями** из N объектов называют комбинацию, которая получается в результате любого их упорядочивания.

N=3, 1+2=3: 1,2,2

122, 212, 221

Ф о р м у л а . $\dfrac{N!}{n_1!\ldots n_k!}$

$$\frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!} = 24$$

$$\frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Пример. Выбрать из 20 человек 3-х человек для присуждения премий: 1-й, 2-й и 3-й. Можно присуждать одному человеку несколько премий

Определение. **Размещением с повторениями** из N по k называют комбинацию, которая получается в результате последовательного *выбора с возвращением* любых k объектов из N имеющихся; порядок выбора учитывается, один и тот же предмет можно выбрать многократно.

N=3, k=2

11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33

Формула. $\overline{A}_N^k = N^k$

$$\bar{A}_{20}^3 = 20^3 = 8\,000$$

СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Пример. В магазине 3 вида цветов (гвоздики, тюльпаны, розы). Составить букет из 7 цветов.

Определение. **Сочетанием с повторениями** из N по k называют комбинацию, которая получается в результате *выбора с возвращением* любых k объектов из N имеющихся; порядок выбора *НЕ* учитывается, один и тот же предмет может быть выбран многократно.

N=3, K=7

0+0+7, 0+1+6, … , 7+0+0

Формула. $\overline{C}_N^k = C_{N+k-1}^k = C_{N+k-1}^{N-1}$

$$\bar{C}_3^7 = C_9^7 = C_9^2 = \frac{72}{2} = 36$$

ЗАДАЧА ИЗ ДЗ

Сколько решений в неотрицательных целых числа имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18\text{, если } x_1 \le 8, x_2 > 4, x_3 < 7.$$

Рассмотрим все неотрицательные решения данного уравнения и будем считать множество таких решений универсумом. Тогда

$$|U| = \overline{C}_3^{18} = C_{20}^{18} = C_{20}^2 = 190.$$

Рассмотрим для каждой из переменных следующие множества A_1, A_2, A_3:

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \ge 9\}, \quad |A_1| = \overline{C_3^9} = C_{11}^9 = C_{11}^2 = 55;$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 \ge 5\}, \quad |A_2| = \overline{C_3^{13}} = C_{15}^{13} = C_{15}^2 = 105;$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 \ge 7\}, \quad |A_3| = \overline{C_3^{15}} = C_{17}^{15} = C_{17}^2 = 136;$$

По условию задачи нужно найти

$$\left|\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}\right| = ?$$

По диаграмме Эйлера-Венна находим:

$$\left|\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}\right| = |A_2| - |A_1 A_2| - |A_2 A_3| + |A_1 A_2 A_3| =$$

$$= 105 - \overline{C_3^4} - \overline{C_3^2} + 0 = 105 - 15 - 28 = 62$$

*СХЕМА «ПРЕДМЕТЫ ПО ЯЩИКАМ»

Сколькими способами можно разложить k предметов по N ящикам?

Пусть x1 – номер ящика для первого предмета, …, xk – для k-го. Тогда:

- нет ограничений – размещения с повторениями;
- не более одного предмета в ящике – размещения;
- неразличимые предметы, не более одного предмета в ящик – сочетания;
- неразличимые предметы без ограничений – сочетания с повторениями.

СВОЙСТВА СОЧЕТАНИЙ

1. $C_N^0 = C_N^N = 1$
2. $C_N^1 = C_N^{N-1} = N$
3. $C_N^k = C_N^{N-k}$ (симметрия)
4. $C_N^0 + C_N^1 + \ldots + C_N^N = 2^N$
5. $C_N^k = C_{N-1}^{k-1} + C_{N-1}^k$ (свойство треугольника Паскаля)

   1

   11

   121

   1331

   14641

Все доказательства – комбинаторные!!!

Для свойства 5: чтобы посчитать все сочетания из N по k пометим один предмет и разобьём все сочетания на два класса: те, что содержат помеченный, и те, что не содержат. Посчитаем их отдельно и сложим.

6. Бином Ньютона: $(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} C_N^k a^k b^{N-k}$

Из формулы бинома получается ещё ряд замечательных свойств:

7. $\sum_{k=0}^{N} (-1)^k C_N^k = 0$
8. $\sum_{k=0}^{N} k C_N^k = N 2^{N-1}$
9. $\sum_{k=0}^{L} C_M^k C_N^{L-k} = C_{M+N}^L$ (тождество Коши)**