ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГОВЫХ ФИЛЬТРОВ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ, ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ЕЁ ВЫПОЛНЕНИЯ

Целью выполнения лабораторной работы является формирование практических навыков построения аналоговых фильтров.

Основными задачами выполнения лабораторной работы являются:

- 1. построить АЧХ аналоговых фильтров с заданными параметрами: фильтр Баттерворта; фильтр Чебышева 1 рода; фильтр Чебышева 2 рода; эллиптический фильтр; фильтр Бесселя;
- 2. осуществить преобразование фильтров прототипов (два вида преобразования).

Результатами работы являются:

- код программ;
- результаты выполнения программ AЧХ;
- полготовленный отчет.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. Дифференциальное уравнение

Связь между входным и выходным сигналами линейной цепи с сосредоточенными параметрами может быть выражена в виде дифференциального уравнения (ДУ) вида

$$a_{n} \frac{d^{n}y}{dt^{n}} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \dots + a_{1} \frac{dy}{dt} + a_{0}y(t) =$$

$$= b_{m} \frac{d^{m}x}{dt^{n-2}} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2}x}{dt^{m-2}} + \dots + b_{1} \frac{dx}{dt} + b_{0}x(t)$$

Здесь x(t) — входной сигнал, y(f) — выходной сигнал, a_i и b_i — постоянные коэффициенты. Таким образом, цепь описывается наборами коэффициентов $\{a_i\}$ и $\{A_i\}$.

2. Функция передачи

Если применить к обеим частям приведенного в предыдущем разделе ДУ (2.8) преобразование Лапласа, получится выражение для операторного коэффициента передачи, или функции передачи цепи (transfer function):

$$H(s) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + b_{m-2} S^{m-2} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{m-1} S^{m-1} + a_{m-2} S^{m-2} + \dots + a_1 S + a_0}$$

Здесь a_i и b_i — те же постоянные коэффициенты, что и в приведенном ранее ДУ.

3. Нули и полюсы

Разложив числитель и знаменатель функции передачи (2.9) на множители, мы получим функцию передачи в следующем виде:

$$H(s) = k \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1})(s - z_{m-2}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1})(s - p_{n-2}) \dots (s - p_1)}$$

Здесь $k=b_m/a_n$ — коэффициент усиления (gain), z_i — нули функции передачи (zero), p_i — полюсы функции передачи (pole). В точках нулей $H(z_i)=0$, а в точках полюсов $H(p_i)\to\infty$.

В данном случае цепь описывается набором параметров $\{z_i\}$, $\{pi\}$, k.

4. Полюсы и вычеты

Еще одним способом преобразования дробно-рациональной функции передачи (2.9) является ее представление в виде суммы простых дробей. При отсутствии кратных корней у знаменателя такое представление имеет следующий вид:

$$H(s) = \frac{r_n}{s - p_n} + \frac{r_{n-1}}{s - p_{n-1}} + \frac{r_{n-2}}{s - p_{n-2}} + \dots + \frac{r_1}{s - p_1} + C_0$$

Здесь p_i — полюсы функции передачи, а числа r_i называются вычетами. C_0 — целая часть функции передачи, отличная от нуля только в случае равенства степеней полиномов числителя и знаменателя.

В данном случае цепь описывается набором параметров $\{r_i\}, \, \{p_i\}, \, C_0.$

5. Пространство состояний

Еще одним способом описания линейной цепи является ее представление в пространстве состояний (state space). При этом состояние цепи описывается вектором состояния s(t), а собственные Колебания цепи и ее реакция на входной сигнал x(t) характеризуются следующим образом:

$$s'(t) = As(t) + B(x)t,$$

$$y(t) = Cs(t) + Dx(t).$$

Если размерность вектора состояния s(t) равна N (s(t) – вектор-столбец), а входной x(t) и выходной y(t) сигналы являются скалярными, то размерность параметров в этих формулах будет следующей: A – матрица N х N, B – столбец N х 1, C – строка 1 х N, D – скаляр. Если входной и/или выходной сигналы являются векторными, размерность параметров соответствующим образом изменяется.

Описанием цепи в данном случае является набор параметров A, B, C, D.

АЧХ АНАЛОГОВОГО ФИЛЬТРА – FREQS

Фильтры, как и многие линейные цепи, описываются передаточными характеристиками в операторной форме следующего вида

$$H(s) = \frac{b_1 s^{nb} + b_2 s^{nb-1} + \dots + b_{nb+1}}{a_1 s^{na} + a_2 s^{na-1} + \dots + a_{na+1}}$$

Здесь па и nb — степени полиномов знаменателя и числителя, s - комплексная переменная. Функция freqs реализует расчет комплексных AЧX в ряде вариантов:

- \circ h=freqs(b, a, w) по заданным в векторах а и b коэффициентам передаточной характеристики фильтра H(s) вычисляет вектор h AЧX аналогового фильтра, соответствующий вектору частот w;
- [h, w]=freqs(b, a) вычисляет векторы h AЧX и частот w, автоматически определяя диапазон частот ее представления;
- \circ [h, w]=freqs (b, a[, n]) вычисляет векторы h AЧX и частот w для n точек AЧX. Если n не задано, оно выбирается по умолчанию равным 200;
 - о freqs(b, a) вычисляет АЧХ и выводит графики АЧХ и ФЧХ.

Для вывода АЧХ и ФЧХ для частот, выраженных в герцах, надо использовать следующие выражения: f=w/(2*pi).

Вычислим АЧХ и ФЧХ линейной системы второго порядка с передаточной характеристикой

$$H(s) = \frac{0.35s^2 + 0.5s + 1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

a=[1 0.5 1]; b=[0.35 0.5 1];

 $h = freqs(b,a,w); \ mag = abs(h); \ phase = angle(h);$

Здесь функция freqs задана с выходным параметром h. Поэтому она сама уже не строит графики AЧX и ФЧX, а лишь создает вектор комплексных значений АЧX. Для построения графиков используются обычные графические команды MATLAB.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПОСОБОВ ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Формы описания цепей в именах функций обозначаются следующим образом:

- tf коэффициенты полиномов числителя и знаменателя функций передачи (transfer function);
 - zp нули и полюсы (zeros and poles);
 - ss описание в пространстве состояний (state-space).

Необходимость в преобразовании описаний часто возникает из-за того, что функции расчета цепей (такие как рассматриваемые далее функции расчета фильтров-прототипов) дают результат в одной форме, а функция, например, построения частотной характеристики требует задания входных параметров в другой форме.

Для входных и выходных параметров используются следующие обозначения:

функция передачи:

- b вектор-строка коэффициентов (в порядке убывания степеней) числителя функции передачи;
- а вектор-строка коэффициентов (в порядке убывания степеней) знаменателя функции передачи;

нули и полюсы:

- z вектор нулей (столбец.);
- р вектор полюсов (столбец);
- k -коэффициент усиления (скаляр);

пространство состояний:

- ullet A квадратная матрица связи вектора состояния и его производной;
- ullet В вектор-столбец связи входного сигнала и производной вектора состояния;
- С вектор-строка связи выходного сигнала и вектора состояния:
- ullet D скалярный коэффициент связи выходного и входного сигналов.

Функция tf2zp

Функция tf2zp преобразует наборы коэффициентов полиномов числителя и знаменателя функции передачи в векторы нулей и полюсов, рассчитывая также значение общего коэффициента усиления:

$$[z, p, k] = tf2zp(b, a);$$

Преобразование производится путем вычисления корней полиномов числителя и знаменателя функции передачи с помощью функции roots. Коэффициент усиления k рассчитывается как отношение b(1)/a(1).

Функция zp2tf

Функция zp2tf является обратной по отношению к функции tf2zp: она осуществляет преобразование коэффициента усиления, а также векторов нулей и полюсов функции передачи в коэффициенты полиномов ее числителя и знаменателя:

$$[b, a] = zp2tf(z, p, k);$$

Функция tf 2ss

Функция tf2ss преобразует наборы коэффициентов полиномов числителя и знаменателя функции передачи в параметры представления цепи в пространстве состояний:

$$[A, B, C, D] = tf2ss(b, a);$$

Функция ss2tf

Функция ss2tf является обратной по отношению к функции tf2ss: она преобразует параметры пространства состояний в коэффициенты полиномов функции передачи цепи:

$$[b, a] = ss2tf(A, B, C, D);$$

Функция zp2ss

Функция zp2ss преобразует нули, полюсы и коэффициент усиления цепи в ее параметры пространства состояний:

$$[A,B,C,D]=zp2ss(z,p,k);\\$$

Функция ss2zp

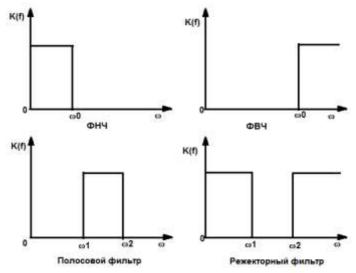
Функция ss2zp является обратной по отношению к функции zp2ss, преобразуя параметры пространства состояний в нули, полюсы и коэффициент усиления цепи:

$$[z, p, k] = ss2zp(A, B, C, D);$$

РАЗНОВИДНОСТИ ФИЛЬТРОВ

Фильтры необходимы для пропускания сигналов в определенной полосе частот и задерживающих остальные частоты. При этом различают:

- фильтры нижних частот (ФНЧ), пропускающие частоты, меньшие некоторой частоты среза ω_0 ;
- фильтры верхних частот (ФВЧ), пропускающие частоты, большие некоторой частоты среза ω_0 ;
- *полосовые фильтры* (**ПФ**), пропускающие частоты в некотором диапазоне $\omega_1...\omega_2$;
- **режекторные фильтры**, пропускающие на выход *все* частоты, кроме лежащих в некотором диапазоне $\omega_1...\omega_2$.



Расчет аналогового фильтра начинается с расчета так называемого *фильтра-прототипа*, представляющего собой ФНЧ с частотой среза, равной 1 рад/с. Все функции MATLAB для расчета аналоговых прототипов возвращают векторы-столбцы нулей и полюсов функции передачи, а также значение коэффициента усиления. Частота среза для разных фильтров определяется по разному.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИЛЬРОВ-ПРОТОТИПОВ

Для преобразования фильтров-прототипов заданного вида с требуемыми частотами среза используются приведенные ниже четыре функции MATLAB. Принцип составления их имен следующий: сначала идет сокращение lp, означающее, что исходным фильтром является ФНЧ (low-pass), потом следует символ преобразования 2 и в конце стоит обозначение типа результирующего фильтра:

- lp2lp изменение частоты среза ФНЧ (low-pass);
- lp2hp преобразование ФНЧ в ФВЧ (high-pass);
- lp2bp преобразование ФНЧ в полосовой фильтр (band-pass);
- \bullet lp2bs преобразование ФНЧ в режекторный фильтр (band-stop).

Возвращаемый результат – пересчитанные параметры фильтра.

ИЗМЕНЕНИЕ ЧАСТОТЫ СРЕЗА ФНЧ

Изменение частоты среза ФНЧ-прототипа сводится к простому масштабированию частотной оси и выполняется путем следующей замены переменной s в выражении для функции передачи:

$$s\to \frac{s}{\omega_0}$$

где ω_0 — требуемая частота среза ФНЧ. Такое преобразование производится функцией lp2lp:

$$[b1, a1] = lp2lp(b, a, w0)$$

$$[A1, B1, C1, D1] = lp2lp(A, B, C, D, w0)$$

Входными параметрами функции являются описание фильтра (в виде коэффициентов полиномов числителя и знаменателя функции передачи – b, a, или в пространстве состояний – A, B, C, D) и требуемая частота среза w_0 .

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФНЧ В ФВЧ

Преобразование ФНЧ-прототипа в ФВЧ требует инверсии частотной оси и выполняется путем следующей замены переменной s в выражении для функции передачи:

$$s \to \frac{s}{\omega_0}$$

где ω_0 - требуемая частота среза ФВЧ. Такое преобразование производится функцией lp2hp:

Входными параметрами функции являются описание фильтра (в виде коэффициентов полиномов числителя и знаменателя функции передачи – b, а или в пространстве состояний – A, B, C, D) и требуемая частота среза ω_0 .

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФНЧ В ПОЛОСОВОЙ ФИЛЬТР

Преобразование ФНЧ-прототипа в полосовой фильтр требует более сложной трансформации частотной оси, чем в предыдущих случаях. Так, нулевая и бесконечная частоты должны преобразовываться в бесконечное значение на частотной оси ФНЧ-прототипа (там, где его коэффициент передачи стремится к нулю). Частоты, соответствующие краям требуемой полосы пропускания, должны после преобразования давать значения ±1, равные частоте среза ФНЧ-прототипа. Наконец, преобразование должно выполняться c помощью дробно-рациональной функции, чтобы сохранить дробнорациональную структуру функции передачи.

$$s \to Q \frac{(s/\omega_0)^2 + 1}{s/\omega_0}$$

Перечисленным требованиям удовлетворяет следующая замена переменной s:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

где ω_1 и ω_2 - соответственно нижняя и верхняя границы полосы пропускания фильтра.

Такое преобразование выполняется функцией lp2bp:

Входными параметрами функции являются описание фильтра (в виде коэффициентов полиномов числителя и знаменателя функции

передачи – b, а или в пространстве состояний – A, B, C, D), средняя частота ω_0 и ширина Bw полосы пропускания фильтра (в радианах в секунду).

Внимание:

Обратите внимание на то, что средняя частота полосы пропускания – это среднее геометрическое, а не среднее арифметическое частот среза:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

. Полоса пропускания рассчитывается без особенностей:

$$B_{\omega} = \omega_2 - \omega_1$$

ПРЕОБРАЗОВНАИЕ ФНЧ В РЕЖЕКТОРНЫЙ ФИЛЬТР

Для преобразования ФНЧ-прототипа в режекторный фильтр трансформация частотной оси должна быть обратной по отношению к предыдущему случаю. Нулевая и бесконечная частоты должны преобразовываться В нулевое значение на частотной ФНЧ-прототипа (там, где коэффициент передачи велик). Частоты, соответствующие краям требуемой полосы задерживания, должны после преобразования давать значения ±1, равные частоте среза ФНЧ-прототипа. Кроме того, некоторое значение частоты в полосе задерживания должно преобразовываться в бесконечность (там, где коэффициент передачи ФНЧ-прототипа стремится к нулю). Наконец, преобразование должно выполняться дробно-рациональной функции, сохранить дробно-рациональную структуру функции передачи.

$$s \to \frac{s/\omega_0}{Q((s/\omega_0)^2 + 1)}$$

Перечисленным требованиям удовлетворяет следующая замена переменной s:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

Где ω_1 и ω_2 – соответственно нижняя и верхняя границы полосы задерживания фильтра.

Такое преобразование выполняется функцией lp2bs:

Входными параметрами функции являются описание фильтра (в виде коэффициентов полиномов числителя и знаменателя функции передачи – b, а или в пространстве состояний – A, B, C, D), средняя частота ω_0 и ширина Bw полосы задерживания фильтра (в радианах в секунду).

РАСЧЕТ АНАЛОГОВОГО ФИЛЬТРА

Для расчета аналогового фильтра необходимо выполнить две основные операции: рассчитать ФНЧ-прототип и преобразовать его к нужному типу фильтра с заданными частотами среза. Требуемая последовательность действий оформлена в виде следующих функций МАТLAB:

- butter(n, w0, type, 's') расчет фильтров Баттерворта;
- cheby1(n, Rp, w0, type, 's') расчет фильтров Чебышева первого рода;
- cheby2(n, Rs, w0, type, 's') расчет фильтров Чебышева второго рода;
 - ellip(n, Rp, Rs, w0, type, 's') расчет эллиптических фильтров;
 - besself(n, w0, type) расчет фильтров Бесселя.

Параметры n, Rp, Rs (их состав зависит от типа фильтра) — это параметры фильтра-прототипа: n — порядок фильтра, Rp —уровень пульсаций в полосе пропускания (в децибелах), Rs — уровень пульсаций в полосе задерживания (в децибелах).

Параметры w0 и type используются совместно для задания типа фильтра и значений его частот среза (в радианах в секунду):

- ФНЧ: w0 скаляр, параметр type отсутствует;
- ФВЧ: w0 –скаляр, type-'high';

- полосовой фильтр: w0 двухэлементный вектор частот среза [w1 w2], параметр type отсутствует;
- режекторный фильтр: w0 двухэлементный вектор частот среза [w1 w2], type='stop'.

Таким образом, функции расчета фильтров требуют задания в качестве входных параметров порядка фильтра и его частоты среза. Однако исходными данными при разработке фильтров, как правило, являются другие параметры: частотные границы полос пропускания (ω_p) и задерживания (ω_s) , а также допустимая неравномерность AЧX в полосе пропускания (R_p) и минимально необходимое затухание в полосе задерживания (R_s) Поэтому необходимо произвести операцию выбора порядка фильтра.

Выбрать минимально необходимый порядок фильтра позволяют следующие однотипные функции пакета Signal Processing:

```
[n, Wn] = \ buttord(Wp, Ws, Rp, Rs, \ 's')
```

[n, Wn] = cheb1ord (Wp, Ws, Rp, Rs, 's')

[n, Wn] = cheb2ord (Wp. Ws.Rp, Rs, 's')

[n, Wn] = ellipord (Wp,Ws,Rp,Rs, 's')

Входной параметр Rp – допустимый уровень пульсаций в полосе пропускания (в децибелах), Rs – минимально необходимое затухание в полосе задерживания (в децибелах). Параметры Wp и Ws задают границы полос пропускания и задерживания, способ задания этих параметров зависит от типа проектируемого фильтра:

- ФНЧ: Wp и Ws числа, при этом должно выполняться неравенство Wp < Ws;
- $\Phi B \Psi$: Wp и Ws числа, при этом должно выполняться неравенство Wp > Ws;
- полосовой фильтр: Wp и Ws двухэлементные векторы, при этом должны выполняться неравенства Ws(1) < Wp(1) < Wp(2) <, Ws(2);
- режекторный фильтр: Wp и Ws двухэлементные векторы, при этом должны выполняться неравенства Wp(1) < Ws(1) < Ws(2) < Wp(2).

Выходными параметрами являются минимально необходимый для выполнения заданных требований порядок фильтра п и частота среза фильтра Wn. Эти параметры должны затем использоваться при вызове функции расчета фильтра. Возврат значения Wn избавляет

пользователя от забот, связанных с тем, что при расчете разных фильтров понятие частоты среза имеет разный смысл. Для эллиптических фильтров и фильтров Чебышева первого рода Wn = Wp, для фильтров Чебышева второго рода Wn = Ws, а для фильтров Баттерворта значение Wn (напомним, что оно определяет частоту среза по уровню 3 дБ) зависит от заданного уровня пульсаций.

В зависимости от того, сколько выходных параметров указано при вызове, функции могут возвращать результаты расчета в виде коэффициентов полиномов числителя и знаменателя функции передачи (два выходных параметра), нулей и полюсов (три выходных параметра) либо параметров пространства состояний (четыре выходных параметра):

```
[b, a] = ...

[z, p, k] = ...

[A, B, C. D] = ...
```

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

На выполнение лабораторной работы отводится 6 академических часа: 5 часов на выполнение и сдачу лабораторной работы и 1 час на подготовку отчета.

Порядок выполнения:

- 1. Изучить краткий теоретический материал.
- 2. Задать параметры фильтров.
- 3. Построить АЧХ аналоговых фильтров с заданными параметрами: фильтр Баттерворта; фильтр Чебышева 1 рода; фильтр Чебышева 2 рода; эллиптический фильтр; фильтр Бесселя;
 - 4. Выполнить преобразование фильтров прототипов.
 - 5. Оформить отчет.
 - 6. Защитить выполненную работу у преподавателя.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Пример расчета полосового фильтра

Рассчитаем в качестве примера полосовой фильтр Чебышева первого рода 5-го порядка с полосой пропускания от 1 кГц до 9 кГц и уровнем пульсаций в полосе пропускания 3 дБ:

% ФНЧ-прототип [z, p, k] = cheb1ap(5, 3);> [b, a] = zp2tf(z, p, k);% функция передачи % нижнЯЯ частота среза % верхняя частота среза w0 = 2 * pi * sqrt(f1 * f2);% средняя частота Bw = 2 * pi * (f2 - f1);% полоса пропускания [b, a] = lp2bp(b, a, w0, Bw);% полосовой фильтр % вектор частот длЯ расчета h = freqs(b, a, 2*pi*f);% частотная характеристика

» plot(f/1000, abs(h)), % график АЧХ

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

$N_{\underline{0}}$	n – порядок	R_n	R_{s}	Осуществить преобразование в
	фильтра	P	3	фильтр
1	3	2	30	ФНЧ, полосовой
2	4	3	20	ФВЧ, режекторный
3	5	4	40	Полосовой, режекторный
4	2	5	45	ФВЧ, ФНЧ
5	6	6	25	ФНЧ, режекторный
6	3	4	35	ФВЧ, полосовой
7	4	5	65	ФНЧ, полосовой
8	5	6	15	ФВЧ, режекторный
9	2	2	10	Полосовой, режекторный
10	6	3	55	ФВЧ, ФНЧ
11	3	5	30	ФНЧ, режекторный
12	4	6	20	ФВЧ, полосовой
13	5	2	40	ФНЧ, полосовой

14	2	3	45	ФВЧ, режекторный
15	6	4	25	Полосовой, режекторный
16	3	6	35	ФВЧ, ФНЧ
17	4	2	65	ФНЧ, режекторный
18	5	3	15	ФВЧ, полосовой
19	2	4	10	ФНЧ, полосовой
20	6	5	55	ФВЧ, режекторный
21	3	2	30	Полосовой, режекторный
22	4	3	20	ФВЧ, ФНЧ
23	5	4	40	ФНЧ, режекторный
24	2	5	45	ФВЧ, полосовой
25	6	6	25	ФНЧ, полосовой
26	3	3	35	ФВЧ, режекторный
27	4	2	65	Полосовой, режекторный
28	5	6	15	ФВЧ, ФНЧ
29	2	5	10	ФНЧ, режекторный
30	6	4	55	ФВЧ, полосовой

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

- 1. Укажите способы описания линейных систем.
- 2. Приведите <u>классификацию аналоговых фильтров</u>, используемых при проведении лабораторного исследования.
- 3. Раскройте методику построения аналоговых фильтров.
- 4. Опишите принцип действия фильтра нижних частот.
- 5. Укажите полосу пропускания фильтра верхних частот.
- 6. Сравните принцип действия полосового и режекторного фильтров.
- 7. Объясните АЧХ фильтров, реализованных в ходе выполнения лабораторных исследований.

ФОРМА ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Номер варианта студенту выдается преподавателем. Отчет на защиту предоставляется в печатном виде.

Структура отчета (на отдельном листе(-ах)):

- титульный лист;
- цели и задачи работы;
- формулировка задания (вариант);
- код программы согласно варианту;
- выводы.