Домашняя работа «Модели – ДУЧП 2-го порядка».

Цель: овладеть навыками использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками презентации результатов вычислений.
Задачи: Самостоятельно изучить синтаксис и важнейшие структуры библиотеки символьной математики; установление соответствия моделей и физических процессов; приведение ДУЧП2 2-го порядка к каноническому виду.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим уравнение вида:

$$a_{11}(x,y)U_{xx}+2a_{12}(x,y)U_{xy}+a_{22}(x,y)U_{yy}+F(x,y,U,U_x,U_y)=0 \qquad (1)$$

Чтобы привести его к каноническому виду, необходимо провести замену переменных, которая находится через решение характеристического уравнения. Характеристическое уравнение составляется на основании слагаемых со старшими производными в виде квадратичной формы. Для этого U_{xx} заменяется на $(dy)^2$, U_{yy} на $(dx)^2$, а U_{xy} на (– dxdy). Получим

$$a_{11}(x,y)(dy)^2-2a_{12}(x,y)dxdy+a_{22}(dx)^2=0 \quad |:(dx)^2$$

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0 \text{ или } \ a_{11}(y')^2-2a_{12}\,y'+a_{22}=0 \qquad (2)$$

$$(y')_{1,2}=\frac{2a_{12}\ \pm\sqrt{4a_{12}^2-4a_{11}a_{22}}}{2a_{11}}=\frac{a_{12}\ \pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$$D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$$

I. Если D>0, то уравнение (1) гиперболического типа. Решение квадратного уравнения (2) - есть две действительные функции:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=\frac{a_{12}+\sqrt{D}}{a_{11}},\left(\frac{dy}{dx}\right)_2=\frac{a_{12}-\sqrt{D}}{a_{11}}.$$

Решая эти обыкновенные дифференциальные уравнения, находим два общих интеграла, которые и будут заменой для приведения к каноническому виду.

$$\text{C}_1=\varphi(x,y)=\xi;\ \ \text{C}_2=\psi(x,y)=\eta. \qquad (3)$$

В результате замены (3) уравнение (1) примет вид:

$$U_{\xi\eta}=\tilde{F}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta).$$

II. Если D=0, то уравнение (1) параболического типа. Решение квадратного уравнения (2) - есть один действительный корень:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

В результате решения обыкновенного дифференциального уравнения получим общий интеграл:

$$\text{C}=\varphi(x,y)=\xi$$

Переменную η выбираем любой функцией, ψ(x,y)=η, независимой от ξ. После замены переменных в уравнение (1) получим следующий вид:

$$U_{\eta\eta}=\tilde{F}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta).$$

III. Если D<0, то уравнение (1) эллиптического типа. Решение квадратного уравнения (2) - есть две взаимосопряженные комплексные функции:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2}=\frac{a_{12}\pm i\sqrt{-D}}{a_{11}},.$$

Решая эти обыкновенные дифференциальные уравнения, получим общий интеграл вида:

$$\text{C}_{1,2}=\varphi(x,y)\pm i\psi(x,y);\xi=Re\,C_{1,2}=\varphi(x,y);\ \ \eta=Im\,C_{1,2}=\psi(x,y).$$

В результате замены (3) уравнение (1) примет вид:

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}=\tilde{F}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta).$$

Пример 1. Уравнение $xU_{xx}+yU_{yy}+2U_y+2U_x=0$ привести к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения.

Решение. Для определения типа уравнения составим дискриминант

$$D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0^2-xy$$

I. Если D=0, то исходное уравнение параболического типа - *xy =0*, когда *x=0* или *y=0*. Т.е. точки координатных осей являются областью, где уравнение является уравнением параболического типа.

Для x=0; y≠0; $yU_{yy} + 2U_y + 2U_x = 0$; $U_{yy} = -\frac{2}{y}(U_y + U_x)$.

Для x≠0; y=0; $xU_{xx} + 2U_y + 2U_x = 0$; $U_{xx} = -\frac{2}{x}(U_y + U_x)$.

Для x=0; y=0; уравнение вырождается в уравнение первого порядка $U_y + U_x = 0$.

II. Если D>0, то исходное уравнение гиперболического типа. $-xy > 0$, когда $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Т.е. во второй и четвертой четвертях координатной плоскости.

Найдем замену для случая, когда *x>0* и *y<0*. Составим характеристическое уравнение :

x(dy)²+y(dx)²=0; $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{y}{x}$; $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{y}{x}}$; $\int \frac{dy}{\sqrt{-y}} = \int \pm \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $-2\sqrt{-y} = \pm 2\sqrt{x} + C_{1,2}$; $C_{1,2} = -2(\sqrt{-y} \pm \sqrt{x})$;

$$\boldsymbol{\xi} = \sqrt{-\boldsymbol{y}} + \sqrt{\boldsymbol{x}}; \quad \boldsymbol{\eta} = \sqrt{-\boldsymbol{y}} - \sqrt{\boldsymbol{x}}.$$

Проведем замену переменных в исходном уравнении:

$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = \begin{vmatrix} \xi_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \eta_x = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(U_\xi + U_\eta);$$

$$U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y = \begin{vmatrix} \xi_y = -\frac{1}{2\sqrt{-y}} \\ \eta_y = -\frac{1}{2\sqrt{-y}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{-y}}(U_\xi + U_\eta);$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}\eta_x^2 + U_\xi\xi_{xx} + U_\eta\eta_{xx} = \begin{vmatrix} \xi_{xx} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \\ \eta_{xx} = \frac{1}{4x\sqrt{x}} \end{vmatrix} = U_{\xi\xi}\frac{1}{4x} + 2U_{\xi\eta}\left(-\frac{1}{4x}\right) + U_{\eta\eta}\frac{1}{4x} + U_\xi\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right) + U_\eta\frac{1}{4x\sqrt{x}};$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + U_{\eta\eta}\eta_y^2 + U_\xi\xi_{yy} + U_\eta\eta_{yy} = \begin{vmatrix} \xi_{yy} = -\frac{1}{4\sqrt{(-y)^3}} \\ \eta_{yy} = -\frac{1}{4\sqrt{(-y)^3}} \end{vmatrix} = -U_{\xi\xi}\frac{1}{4y} - -2U_{\xi\eta}\frac{1}{4y} - U_{\eta\eta}\frac{1}{4y} + (U_\xi + U_\eta)\left(-\frac{1}{4y\sqrt{-y}}\right);$$

$$U_{xy} = U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi\xi_{xy} + U_\eta\eta_{xy} = \begin{vmatrix} \xi_{xy} = 0 \\ \eta_{xy} = 0 \end{vmatrix} = -U_{\xi\xi}\frac{1}{4\sqrt{-xy}} + U_{\eta\eta}\frac{1}{4\sqrt{-xy}};$$

Подставляем производные, выраженные через производные по новым переменным в исходное уравнение. Получим

$$x\left[\frac{1}{4x}\left(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - \frac{U_\xi}{\sqrt{x}} + \frac{U_\eta}{\sqrt{x}}\right)\right] + y\left[\frac{1}{4y}\left(-U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} - U_{\eta\eta} + \frac{U_\xi}{\sqrt{-y}} + \frac{U_\eta}{\sqrt{-y}}\right)\right] + 2\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}(U_\xi - U_\eta) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}(U_\xi - U_\eta)\right] =$$

$$=\left[\frac{1}{4}\left(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - \frac{U_\xi}{\sqrt{x}} + \frac{U_\eta}{\sqrt{x}}\right)\right] - \left[\frac{1}{4}\left(U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - \frac{U_\xi}{\sqrt{-y}} - \frac{U_\eta}{\sqrt{-y}}\right)\right] =$$

$$=\frac{1}{4}\left[-4U_{\xi\eta}\right] + \frac{3}{4}\frac{U_\xi}{\sqrt{x}} - \frac{3}{4}\frac{U_\eta}{\sqrt{x}} - \frac{3}{4}\frac{U_\xi}{\sqrt{-y}} + \frac{3}{4}\frac{U_\eta}{\sqrt{x}} = 0$$

$$-U_{\xi\eta} = \frac{3}{4}U_\xi\left(\frac{1}{\sqrt{-y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{3}{4}U_\eta\left(\frac{1}{\sqrt{-y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

$$\xi + \eta = 2\sqrt{-y}, \sqrt{-y} = \frac{\xi+\eta}{2}; \quad \xi - \eta = 2\sqrt{x}, \sqrt{x} = \frac{\xi-\eta}{2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{-y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{-y}}{\sqrt{x(-y)}} = \frac{-\eta}{\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)} = \frac{-4\eta}{\xi^2-\eta^2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{-y}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{-y}}{\sqrt{x(-y)}}=\frac{4\xi}{\xi^2-\eta^2}.$$

Тогда канонический вид уравнения примет вид:

$-U_{\xi\eta}=\frac{3}{4}U_\xi\frac{-4\eta}{\xi^2-\eta^2}+\frac{3}{4}U_\eta\frac{4\xi}{\xi^2-\eta^2};$

$$U_{\xi\eta}=\frac{3}{\xi^2-\eta^2}(\xi U_\eta-\eta U_\xi).$$

Для случая, когда x<0 и y>0 замена $\xi=\sqrt{y}+\sqrt{-x};\quad \eta=\sqrt{y}-\sqrt{-x}$ приведёт уравнение к тому же виду.

III. Если D<0, то исходное уравнение эллиптического типа. $-xy<0$, когда $\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x<0\\y<0\end{cases}$. Т.е. в первой и третьей четвертях координатной плоскости.

Составим характеристическое уравнение.

$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-\frac{y}{x}};\qquad \int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int\pm i\frac{dx}{\sqrt{x}};\qquad -2\sqrt{y}=\pm 2i\sqrt{x}+C_{1,2};\qquad C_{1,2}=\sqrt{y}\pm i\sqrt{x};$

$$\boldsymbol{\xi=Re(C)=\sqrt{y};\quad \eta=Im(C)=\sqrt{x}}.$$

$$\boldsymbol{\xi=\sqrt{y};\quad \eta=\sqrt{x}}$$

Для первой четверти.

$$U_x=\frac{1}{2\sqrt{x}}U_\eta;\ \ U_y=\frac{1}{2\sqrt{y}}U_\xi;$$

$$U_{xx}=U_{\eta\eta}\frac{1}{4x}+U_\eta\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right);\ \ U_{yy}=U_{\xi\xi}\frac{1}{4y}+U_\xi\left(-\frac{1}{4y\sqrt{y}}\right).$$

Подставляем в исходное уравнение.

$x\left[\frac{1}{4x}\left(U_{\eta\eta}-\frac{U_\eta}{\sqrt{x}}\right)\right]+y\left[\frac{1}{4y}\left(U_{\xi\xi}-\frac{U_\xi}{\sqrt{y}}\right)\right]+2\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}U_\eta+\frac{1}{2\sqrt{y}}U_\xi\right]=0.$

$\frac{1}{4}\left(U_{\eta\eta}+U_{\xi\xi}\right)+\frac{3}{4}\frac{U_\xi}{\sqrt{y}}+\frac{3}{4}\frac{U_\eta}{\sqrt{x}}=0;$

$$U_{\eta\eta}+U_{\xi\xi}=-3\left(\frac{U_\xi}{\xi}+\frac{U_\eta}{\eta}\right).$$

Для третьей четверти замена переменных $\boldsymbol{\xi=\sqrt{-y};\quad \eta=\sqrt{-x}}$ приведёт к уравнению того же вида.

ЗАДАЧИ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где тип уравнения сохраняется.

ФОРМА ОТЧЕТА ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ

Номер варианта студенту выдается преподавателем.

Структура отчета (на отдельном листе(-ах)): титульный лист, формулировка задания (вариант), этапы получения решения, результаты выполнения работы, выводы.

ВАРИАНТЫ

1) $u_{xx} - 2cosxu_{xy} - 3sin^2xu_{yy} - yu_y = 0$
2) $u_{xx} + 2sinxu_{xy} - \left(cos^2x — sin^2x\right)u_{yy} + cosxu_y = 0$
3) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0$
4) $tg^2xu_{xx} - 2ytgxu_{xy} + y^2u_{yy} + tg^3xu_x = 0$
5) $u_{xx} - yu_{yy} + 4u_x + 3u_y = 0$
6) $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
7) $yu_{xx} - xu_{yy} = 0$
8) $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$
9) $x^2u_{xx} – y^2u_{yy} = 0$
10) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0$
11) $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$
12) $sin^2xu_{xx} + 2ysinxu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$
13) $x^2uxx – 2xu_{xy} + u_{yy} = 0$
14) $y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$
15)$4y^2u_{xx} – e^{2x}u_{yy} – 4y^2u_x = 0$
16) $signyu_{xx} + 2u_{xy} + signxu_{yy} = 0$
17) $signyu_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$
18) $u_{xx} + 2u_{xy} + \left(1 – signy\right)u_{yy} = 0$
19) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$
20) $yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0$
21) $xu_{xx} + yu_{xy} + u = 0$
22) $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$
23) $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x - 1)u_{yy} = 0$
24) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 2yu_x + ye^{y/x} = 0$
25) $xy^2u_{xx} - 2x^2yu_{xy} + x^3u_{yy} - y^2u_x = 0$
26) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$
27) $u_{xx} - xu_{yy} + \sqrt{x}u_x + xu = 0.$
28) $sin^2x\, u_{xx} - 2ysinx\, u_{xy} + y^2u_{yy} = 0$
29) $(1 + x^2)2u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0$
30) $u_{xx} - (1 + y^2)^2u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0$
31) $u_{xx} - 2sinxu_{xy} - cos2xu_{yy} - cosxu_y = 0$
32) $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - xu = 0$
33) $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$
34) $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$
35) $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0$