

# Лабораторная работа № 2 часть 1

## Рекурсия

### ЗАДАНИЕ

В лабораторной работе необходимо реализовать рекурсивное решение задачи (см. таблицу ниже) и исследовать его вычислительную сложность. Задание выбирается в соответствии с вариантом, полученным от преподавателя.

| Вариант | Задача   |
|---------|--|
| 1       | <p><b>«Трон Ертле»</b></p> <p>Черепаша Ертле, король пруда. Недовольный камнем, который служит его тронem, он приказывает другим черепахам встать под ним друг на друга, чтобы он мог видеть дальше и расширять свое королевство. Каждая из 5607 черепах, призванных Ертлом, обладает своей силой и весом. (Вес черепахи измеряется в граммах. Сила, которая также измеряется в граммах, - это максимальный вес, который способна выдержать черепаха (включая свой собственный). Таким образом, черепаха, весящая 300 грамм и имеющая силу 1000 грамм, может держать 700 грамм на спине.) Ваша задача состоит в том, чтобы составить из них стопку максимальной высоты. Число черепах не превышает 5607.</p>   |
| 2       | <p><b>«Чаппи»</b></p> <p>В исследовательской лаборатории разработали новую модель робота. Главной особенностью данной модели является то, что он работает по заранее заданной программе, в которой могут присутствовать команды: сделать шаг на <b>Юг</b>, на <b>Север</b>, на <b>Восток</b> или на <b>Запад</b>. Робот Чаппи исполняет программу строго последовательно и, дойдя до конца программы, останавливается.</p> <p>Специалисты лаборатории заинтересовались вопросом, сколько существует различных программ, состоящих из <math>N</math> инструкций, таких, что робот, выйдя из начала координат, придет в точку с координатами <math>(X, Y)</math>. Оси координат располагаются параллельно сторонам света, и единица измерения, соответствует одному шагу робота.</p> <p>Требуется написать программу, которая дает ответ на этот вопрос.</p> <p>Ограничения: <math> X ,  Y  \leq 16</math></p> |
| 3       | <p><b>Наибольшая возрастающей подпоследовательность.</b></p> <p>Программа получает на вход пять целых чисел: длину последовательности <math>n</math> (<math>1 \leq n \leq 10^5</math>), начальный элемент последовательности <math>a_1</math>, параметры <math>k, b, m</math> для вычисления последующих членов последовательности (<math>1 \leq m \leq 10^4, 0 \leq k &lt; m, 0 \leq b &lt; m, 0 \leq a_1 &lt; m</math>). Числовая последовательность задана рекуррентной формулой: <math>a_{i+1} = (k \cdot a_i + b) \bmod m</math>. Найдите длину её наибольшей возрастающей подпоследовательности. Например, если <math>n = 5, a_1 = 41, k = 2, b = 1, m = 100</math>, то длина наибольшей возрастающей подпоследовательности данной последовательности равна 3.</p>   |
| 4       | <p><b>K-ичные числа</b></p> <p>Требуется вычислить количество <math>N</math>-значных чисел в системе счисления с основанием <math>K</math>, таких что их запись не содержит двух подряд идущих нулей.</p>  |
|         |  |

| Вариант | Задача  |
|---------|---|
| 5       | <p><b>Наибольшая подпоследовательность</b></p> <p>У вас есть последовательность целых чисел, из которой вы должны создать самую длинную подпоследовательность, удовлетворяющую следующему условию: ее можно «разрезать» на две части, которые имеют ровно один общий элемент (последний элемент первой части является первым элементом второй части), причем первая часть строго возрастает, а вторая часть строго убывает. Например, последовательность {1, 4, 6, 5, 2, 1} может быть «разрезана» на {1, 4, 6} и {6, 5, 2, 1}. Две части разделяет 6, и первая последовательность сортируется в порядке возрастания, а вторая последовательность сортируется в порядке убывания. Вам дана последовательность чисел. Необходимо найти минимальное количество элементов, которое следует удалить из данной последовательности, чтобы оставшаяся подпоследовательность удовлетворяла описанному выше условию. Например, если задана числовая последовательность {1, 4, 6, 5, 2, 1}, последовательность уже удовлетворяет условию, поэтому ответ - 0. Для последовательности {1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1} самая длинная подпоследовательность, удовлетворяющая условию - это {1, 2, 3, 2, 1}, поэтому нужно выбросить как минимум 4 элемента.</p> <p>Длина последовательности от 1 до 50 элементов включительно, элементы от 1 до <math>10^9</math> включительно.</p> |
| 6       | <p><b>«Ну, заяц...»</b></p> <p>В зоопарке появился заяц. Его поместили в клетку, и чтобы ему не было скучно, директор зоопарка распорядился поставить в его клетке лесенку. Теперь зайчик может прыгать по лесенке вверх, перепрыгивая через ступеньки. Лестница имеет определенное количество ступенек <math>N</math>. Заяц может одним прыжком преодолеть не более <math>K</math> ступенек. Для разнообразия зайчик пытается каждый раз найти новый путь к вершине лестницы. Директору любопытно, сколько различных способов есть у зайца добраться до вершины лестницы при заданных значениях <math>K</math> и <math>N</math>.</p> <p>Необходимо написать программу, которая поможет вычислить это количество.</p> <p>Например, если <math>K=3</math> и <math>N=4</math>, то существуют следующие маршруты: 1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1, 2+2, 1+3, 3+1. Т.е. при данных значениях у зайца всего 7 различных маршрутов добраться до вершины лестницы.</p> <p>Ограничения: <math>1 \leq K \leq N \leq 300</math>.</p>   |
| 7       | <p><b>Биномиальные коэффициенты</b></p> <p>Для заданных <math>n</math> и <math>k</math> требуется вычислить биномиальный коэффициент <math>C_n^k</math> по следующей рекуррентной формуле:</p> $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad 0 < k \leq n$ $C_n^0 = 1$  |
| 8       | <p><b>«Взрывоопасность»</b></p> <p>При переработке радиоактивных материалов образуются отходы двух видов — особо опасные (тип «А») и неопасные (тип «В»). Для их хранения используются одинаковые контейнеры. После помещения отходов в контейнеры, последние укладываются вертикальной стопкой. Стопка считается взрывоопасной, если в ней подряд идет более двух контейнеров типа «А». Для заданного количества контейнеров <math>N</math> определить число безопасных стопок.</p>  |
| 9       | <p><b>«Маршруты»</b></p> <p>В прямоугольной таблице <math>N \times M</math> в начале игрок находится в левой верхней клетке. За один ход ему разрешается перемещаться в соседнюю клетку либо вправо, либо вниз (влево и вверх перемещаться запрещено). Посчитайте, сколько есть способов у игрока попасть в правую нижнюю клетку. Ограничения: <math>1 \leq N, M \leq 10</math></p>   |

| Вариант | Задача   |
|---------|--|
| 10      | <p><b>«Подпалиндром»</b></p> <p>Дана строка <math>X</math> из заглавных букв латинского алфавита. Необходимо найти длину наибольшего палиндрома, который можно получить вычеркиванием некоторых букв из данной строки.</p>   |
| 11      | <p><b>Наибольшая общая возрастающая подпоследовательность</b></p> <p>Вам даны две последовательности целых чисел. Напишите программу для определения их общей возрастающей подпоследовательности максимально возможной длины. Последовательность <math>S_1, S_2, \dots, S_N</math> длины <math>N</math> называется возрастающей подпоследовательностью последовательности <math>A_1, A_2, \dots, A_M</math> длины <math>M</math>, если существуют <math>1 \leq i_1 &lt; i_2 &lt; \dots &lt; i_N \leq M</math> такие, что <math>S_j = A_{i_j}</math> для всех <math>1 \leq j \leq N</math> и <math>S_j &lt; S_{j+1}</math> для всех <math>1 \leq j &lt; N</math>. Каждая последовательность задаётся длиной <math>M</math> (<math>1 \leq M \leq 500</math>) и целыми числами <math>A_i</math> (<math>-2^{31} \leq A_i \leq 2^{31}</math>) - членами последовательности. Например, дана последовательность длиной 5: {1, 4, 2, 5, -12} и длиной 4: {-12, 1, 2, 4}, тогда длина наибольшей общей подпоследовательности 2: {1, 4}.</p> |
| 12      | <p><b>«Пилите, Шура, пилите...»</b></p> <p>Вам нужно распилить деревянный брус на несколько кусков. Компания "Шура Балаганов" берет плату за пилку в зависимости от размера бруса, который нужно распилить. Различные заказы приводят к различным ценам. Например, рассмотрим брус длиной 10 м, который необходимо распилить на расстоянии 2, 4 и 7 м, считая от одного конца. Это можно сделать несколькими способами. Можно распилить сначала на отметке 2 м, потом 4 и потом 7 м. Это приведет к стоимости: <math>10 + 8 + 6 = 24</math>, потому что сначала длина бруса, который пилили, была 10 м, затем она стала 8 м и, наконец, 6 м. А можно распилить иначе: сначала на отметке 4 м, затем 2 и затем 7 м. Это приведет к стоимости: <math>10 + 4 + 6 = 20</math>, что лучше.</p> <p>Ваш начальник требует, чтобы вы написали программу, которая находит минимальную стоимость распила для любого бруса заданного размера.</p>   |

Порядок работы:

1. проанализировать задачу, построить рекуррентное соотношение, и исследовать его вычислительную сложность;
2. на языке программирования в виде консольного приложения реализовать рекурсивный алгоритм; убедиться в его корректности
3. построить график зависимости времени выполнения рекурсивного алгоритма от размера входных данных
4. сделать выводы.

Указание: Сравнение выполнять аналогично исследованию в лабораторной работе № 1: для 10–20 разных значений размера входных данных провести несколько (3–5) измерений, отбросить максимальные результаты и усреднить.