ЛЕКЦИЯ 2. ОТНОШЕНИЯ

В математике и других областях есть много понятий, описывающих *соотношения* между объектами, например:

- $x < y, x \le y, x > y, x \ge y$
- $p \vdots q, p \mid q$
- $A \subset B, A \subseteq B, a \in A$
- равновеликие фигуры в геометрии;
- класс A потомок класса B в программировании;
- человек X знаком с человеком Y.

Как формализовать понятие *отношения*?

ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Определение. *Декартовым произведением* множеств A и B называется множество упорядоченных пар

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B\}.$$

Если $A = B$, то говорят о декартовом квадрате A^2. Можно рассматривать декартово произведение *N* множеств.

Примеры:

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ - декартова плоскость
2. {a,b,c,d,e,f,g,h} x {1,2,3,4,5,6,7,8} – шахматная доска

Теорема. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Определение. Бинарное отношение - любое подмножество декартова произведения $R \subset A \times B$.

Обозначение. Вместо обозначения $(a, b) \in R$ часто пишут aRb.

Если $A = B$, то говорят, что отношение задано *на множестве* A.

Примеры:

1. $<, >, \le, \ge$ – отношения на R, Q, Z, N .
2. Делимость – отношение на Z.
3. Принадлежность – отношение между универсумом и его булеаном .
4. Включение – отношение на булеане.
5. Равновеликость – отношение на множестве измеримых фигур.

ОПЕРАЦИИ НАД ОТНОШЕНИЯМИ

Поскольку отношение – это *множество* пар, то над отношениями определены все операции, которые определены над множествами (объединение, пересечение, дополнение, разность, симметрическая разность).

Но есть две новые: *обратное* отношение и *композиция* отношений.

ОБРАТНОЕ ОТНОШЕНИЕ

Определение. Отношение $R^{-1} \subset B \times A$ называется *обратным* к $R \subset A \times B$, если

$$bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$$

Примеры:

1. Обратным к $a<b$ будет $a>b$
2. Обратным к $a \vdots b$ будет $a \mid b$
3. Обратным к $A \subset B$ будет $A \supset B$
4. Обратным к S(A)=S(B) будет оно само

КОМПОЗИЦИЯ ОТНОШЕНИЙ

Определение. *Композицией* отношений $R_1 \subset A \times B$ и $R_2 \subset B \times C$ называется такое отношение $R = R_1 \circ R_2 \subset A \times C$, что

$$aRc \Leftrightarrow (\exists b \in B : aR_1 b \,\&\, bR_2 c)$$

Примеры:

1. Пусть R – «меньше» на множестве действительных чисел. Тогда $R \circ R = R$.
2. Пусть R – «меньше» на множестве натуральных чисел. Тогда $R \circ R$ - «меньше хотя бы на 2»

СТЕПЕНЬ ОТНОШЕНИЯ

Определение. Пусть отношение R определено на A. *Степенью* отношения R называется

$R^n = R \circ \ldots \circ R$ - композиция с собой n раз.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ОТНОШЕНИЙ

- перечисление пар
- характеристический предикат
- ориентированный граф
- булева матрица

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПАР

Простейший способ задать отношение – перечислить все входящие в него пары элементов.

Пример. $A = \{a, b, c, d, e\}$.

$R = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,c)\}$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПРЕДИКАТ

Пример. $A = \mathbb{N}$.

$R = \{(a,b) \mid a+b \vdots 3\}$

ГРАФ ОТНОШЕНИЯ

Определение. *Графом отношения* называется ориентированный граф, вершинами которого являются элементы множества A. Если aRb, то проводим ребро (стрелку) из a в b.

Теорема (*об операциях над графами отношений*). Операции над отношениями можно выразить через операции с их графами:

- обратное отношение – перенаправление всех стрелок;
- k-я степень отношения – граф путей длины k .

Доказательство. Для обратного отношения – очевидно.

Для степени докажем по индукции:

$aRb \Leftrightarrow (a \to b)$ - база индукции

$aR^2b \Leftrightarrow (\exists x : aRx \,\&\, xRb) \Leftrightarrow (\exists x : a \to x \to b)$

$aR^{k+1}b = a(R^k \circ R)b \Leftrightarrow (\exists x : aR^k x \,\&\, xRb) \Leftrightarrow (\exists x : a \to ... \to x \to b)$

МАТРИЦА ОТНОШЕНИЯ

Определение. Перенумеруем все элементы множества A. Матрицей отношения R называется *булева матрица* из 0 и 1 (или true и false) следующего вида:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, (a_i, a_j) \in R \\ 0, (a_i, a_j) \in R, \end{cases}.$$

К булевым матрицам применяют операции *поэлементного* «или», «и», «не».

Определим также умножение таких матриц по правилу:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj})$$

Теорема (об *операциях над матрицами отношений*). Операции над отношениями можно выразить через операции с их матрицами:

- обратное отношение – транспонирование матрицы;
- композиция отношений – умножение матриц;
- k-я степень отношения – возведение матрицы в степень k.

Доказательство. Для обратного отношения – очевидно.

Пусть теперь $T = R \circ S$. Тогда:

$$iTj \Leftrightarrow (\exists k : iRk \,\&\, kSj).$$

Рассмотрим матрицу $M = RS$. Имеем: $t_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} s_{kj})$. Получаем, что

$$t_{ij} = 1 \Leftrightarrow (\exists k : r_{ik} = 1 \,\&\, s_{kj} = 1) \Leftrightarrow (\exists k : iRk \,\&\, kSj).$$

То есть, $iTj \Leftrightarrow t_{ij} = 1$ - что и требовалось доказать.

Для степени получаем как для частного случая композиции.

СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЙ

Пусть $R \subset A^2$. Тогда отношение R называется

рефлексивным, если $\forall\, a \in A\ \ (aRa)$;
антирефлексивным, если $\forall\, a \in A\ \ (\neg aRa)$;
симметричным, если $\forall\, a, b \in A\ \ (aRb \Longrightarrow bRa)$;
антисимметричным, если $\forall\, a, b \in A\ \ (aRb\ \&\ bRa \Longrightarrow a = b)$;
транзитивным, если $\forall\, a, b, c \in A\ \ (aRb\ \&\ bRc \Longrightarrow aRc)$;
линейным, если $\forall\, a, b \in A\ \ (a = b \vee aRb \vee bRa)$.

Примеры:

	реф.	а-рефл.	симм.	а-симм.	транз.	полн.
$<$	-	+	-	+	+	+
$\leq$	+	-	-	+	+	+
$\subseteq$	+	-	-	+	+	-
равновеликие	+	-	+	-	+	-

Свойства отношений на графах:

- рефлексивность: есть все *петли*;
- антирефлексивность: нет ни одной *петли*;
- симметричность: все стрелки двойные (т.е. граф *неориентированный*);
- антисимметричность: нет двойных стрелок (петли возможны);
- транзитивность: если есть какой-то путь из a в b, то есть и ребро (a,b); **если есть двойная стрелка, то есть две петли;**
- линейность (полнота): если убрать стрелки, то получится *полный* граф.

Свойства отношений на матрицах:

- рефлексивность: на диагонали все 1;
- антирефлексивность: на диагонали все 0;
- симметричность: матрица симметричная (на диагонали что угодно)
- антисимметричность: $A[i, j] + A[j, i] \leq 1$ (на диагонали что угодно)
- транзитивность: $R^2 \leq R$ (поэлементно) – **см. теорему ниже**;
- линейность (полнота): $A[i, j] + A[j, i] > 0$ (на диагонали что угодно)

Теорема (*о транзитивном отношении*). R транзитивно $\Leftrightarrow R^2 \leq R$ поэлементно.

Доказательство.

R транзитивно $\Leftrightarrow (aRb\,\&\,bRc \Rightarrow aRc) \Leftrightarrow (aR^2c \Rightarrow aRc) \Leftrightarrow (R^2 \subseteq R)$

Но матрица отношения R^2 - это квадрат матрицы отношения R. Всё доказано.