

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Приближение функций

Цель: сформировать практические навыки описания и анализа используемых алгоритмов; создания программной реализации системы с заданными свойствами

Задачи: восстановления (доопределения) функции, заданной на дискретном множестве точек

Задание 4.1.

Дана функция $y = f(x)$, узлы.

Требуется построить аналитическое выражение интерполяционного многочлена $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, 3$) для функции $f(x)$ в форме Ньютона по заданным узлам. Вычислить приближенное значение функции в заданной точке x^* , фактическую погрешность, оценить теоретическую.

1) Заполняем таблицу разделенных разностей.

2) Получаем аналитические выражения для интерполяционных многочленов и погрешности.

3) Заполняем таблицу результатов.

i	0	1	2	3
Узлы в порядке очередности их использования				
$P_i(x^*)$ — значение многочлена в точке интерполирования				
$f(x^*) - P_i(x^*)$ — фактическая погрешность				
M_{i+1} — оценка модуля произв.				
$R_i(x^*)$ — оценка погрешности				

Задание 4.2.

1) Дана функция $y = f(x)$, узлы, значение функции \bar{y} . Получить таблицу значений функции в узлах.

Требуется приближенно найти такое \bar{x} , что $f(\bar{x}) = \bar{y}$ тремя способами:

а) “точно”, используя аналитическое выражение обратной функции. Обозначим x^* .

б) аппроксимацией функции $f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$ ($n \geq 2$) в форме Лагранжа и приближенным решением уравнения $P_n(x) = \bar{y}$ методом итераций или методом секущих. Обозначим решение уравнения $P_n(x) = \bar{y}$ через x_{iter} .

в) если существует однозначная обратная функция $f^{-1}(y)$, то поменять ролями узлы и значения функции и приближенно заменить обратную функцию интерполяционным многочленом $Q_m(y)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) в форме Лагранжа и вычислить $x_m = Q_m(\bar{y})$.

Результаты привести в таблицах вида

m	x_m	$x_m - x_{m-1}$	$x_m - x^*$
0			
1			
2			
...			

Задание 4.3.

Дана функция $y = f(x)$, $[a, b] = [-1, 1]$.

Требуется построить при различных n интерполяционные многочлены $P_n(x)$ в форме Лагранжа по равноотстоящим узлам и по узлам многочлена Чебышева. Сравнить на графике с функцией в одних осях координат.

Указание

Составить подпрограмму с параметрами:

- интерполируемая функция;
- степень многочлена;
- массив узлов.

Подпрограмма должна возвращать аналитическое выражение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа заданной степени по заданной таблице узлов для заданной функции.

Рассмотреть функции: а) $\sin(x)$; б) $|x|$; в) $\frac{1}{1+25x^2}$.

Задание 4.4.

Дана функция $y = f(x)$, $[a, b]$. Требуется построить дробно-рациональную интерполяцию Паде.

Задание 4.5.

Дана функция $y=f(x)$. Приблизить $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ методом глобальной интерполяции и указанным в индивидуальном варианте сплайном. Написать собственную процедуру реализующую сплайн интерполяцию, указанную в варианте. На одном чертеже построить графики интерполанта и функции $f(x)$. Сравнить качество приближения при разном количестве узлов интерполяции.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Схема вариантов к лабораторной работе

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	4.1.1, 4.4.7, 4.1.1 фундаментальный	16	4.1.7, 4.4.2, 4.1.7 локальный
2	4.2.1, 4.4.8, 4.2.1 с отсутствием узла	17	4.2.7, 4.4.3, 4.2.7 фундаментальный
3	4.1.2, 4.4.5, 4.1.2 естественный	18	4.1.8, 4.4.4, 4.1.8 с отсутствием узла
4	4.2.2, 4.4.6, 4.2.2 локальный	19	4.2.8, 4.4.5, 4.2.8 естественный
5	4.3., 4.4.3, 4.5.5	20	4.3., 4.4.6, 4.5.1
6	4.1.3, 4.4.4, 4.1.3 кубический дефекта 2	21	4.1.9, 4.4.7, 4.1.9 кубический дефекта 1
7	4.2.3, 4.4.1, 4.2.3 с отсутствием узла	22	4.2.9, 4.4.8, 4.2.9 с отсутствием узла
8	4.1.4, 4.4.2, 4.1.4 квадратичный	23	4.1.10, 4.4.7, 4.1.10 квадратичный
9	4.2.4, 4.4.3, 4.2.4 локальный	24	4.2.10, 4.4.6, 4.2.10 кубический дефекта 1
10	4.3., 4.4.6, 4.5.6	25	4.3., 4.4.5, 4.5.2
11	4.1.5, 4.4.7, 4.1.5 фундаментальный	26	4.1.11, 4.4.6, 4.1.11 естественный
12	4.2.5, 4.4.4, 4.2.5 естественный	27	4.2.11, 4.4.7, 4.2.11 фундаментальный
13	4.1.6, 4.4.1, 4.1.6 кубический дефекта 1	28	4.1.12, 4.4.8, 4.1.12 с отсутствием узла
14	4.2.6, 4.4.2, 4.2.6 с отсутствием узла	29	4.2.12, 4.4.1, 4.2.12 квадратичный
15	4.3., 4.4.1, 4.5.4	30	4.3., 4.4.2, 4.5.3

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Таблица к задаче 4.1

Номер варианта	Функция	Узлы	Точка интерполирования
1	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	-0.4
2	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.35
3	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	3
4	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.4
5	$\cos(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, -0.1, 0	-0.4
6	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 3, 5, 7, 8, 9	4
7	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.4, -0.2, 0, 0.1	-0.3
8	e^x	-0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.3	0.2
9	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	4
10	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	7
11	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	0.6
12	$\sin(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.8	0.4
13	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.35
14	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	3
15	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.4

Номер варианта	Функция	Узлы	Значение функции
1	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	-0.56
2	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.75
3	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	1.6
4	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.6
5	$\cos(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, -0.1, 0	0.8
6	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 3, 5, 7, 8, 9	1.3
7	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.4, -0.2, 0, 0.1	-0.8
8	e^x	-0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.3	0.8
9	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	2
10	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	2.5
11	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	0.8
12	$\sin(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.8	0.56
13	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.75
14	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	1.6
15	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.6

Задания к задаче 4.4

4.4.1. Постройте и сравните приближения Тейлора $T_6(x)$ и Паде $R_{2,2}(x)$ к функции $f(x) = e^x$.

Постройте в одной и той же системе координат графики функций $f(x)$, $T_6(x)$ и $R_{2,2}(x)$.

Найдите максимальную ошибку, появляющуюся, когда функцию $f(x)$ приближают $T_6(x)$ и $R_{2,2}(x)$ соответственно на интервале $[-1; 1]$.

4.4.2. Постройте и сравните приближения Тейлора $T_5(x)$ и Паде $R_{3,2}(x)$ к функции $f(x) = \ln(1+x)$.

Постройте в одной и той же системе координат графики функций $f(x)$, $T_5(x)$ и $R_{3,2}(x)$.

Найдите максимальную ошибку, появляющуюся, когда функцию $f(x)$ приближают $T_5(x)$ и $R_{3,2}(x)$ соответственно на интервале $[-1; 1]$.

4.4.3. Постройте и сравните приближения Тейлора $T_6(x)$ и Паде $R_{2,2}(x)$ к функции $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Постройте в одной и той же системе координат графики функций $f(x)$, $T_6(x)$ и $R_{2,2}(x)$.

Найдите максимальную ошибку, появляющуюся, когда функцию $f(x)$ приближают $T_6(x)$ и $R_{2,2}(x)$ соответственно на интервале $[-1; 1]$.

4.4.4. Сравните приближения Паде $R_{5,4}(x)$ и $R_{7,6}(x)$ функции $f(x) = \sin x$ на интервале $[-1,2; 1,2]$.

Постройте в одной и той же системе координат графики функций $f(x)$, $R_{5,4}(x)$ и $R_{7,6}(x)$.

Найдите максимальную ошибку, появляющуюся, когда функцию $f(x)$ приближают $R_{5,4}(x)$ и $R_{7,6}(x)$ соответственно на интервале $[-1,2; 1,2]$.

4.4.5. Сравните приближения Паде $R_{6,6}(x)$ и $R_{8,8}(x)$ функции $f(x) = \cos x$ на интервале $[-1,2; 1,2]$.

Постройте в одной и той же системе координат графики функций $f(x)$, $R_{6,6}(x)$ и $R_{8,8}(x)$.

Найдите максимальную ошибку, появляющуюся, когда функцию $f(x)$ приближают $R_{6,6}(x)$ и $R_{8,8}(x)$ соответственно на интервале $[-1,2; 1,2]$.

4.4.6. Постройте приближение Паде $R_{3,2}(x)$ к функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Выразите рациональную функцию $R_{3,2}(x)$ в форме цепной дроби.

Постройте в одной и той же системе координат графики функций $f(x)$ и $R_{3,2}(x)$.

Найдите максимальную ошибку, появляющуюся, когда функцию $f(x)$ приближают $R_{3,2}(x)$ соответственно на интервале $[-1; 1]$.

4.4.7. Постройте приближение Паде $R_{2,2}(x)$ к функции $f(x) = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Выразите рациональную функцию $R_{2,2}(x)$ в форме цепной дроби. Постройте в одной и той же системе координат графики функций $f(x)$ и $R_{2,2}(x)$. Найдите максимальную ошибку, появляющуюся, когда функцию $f(x)$ приближают $R_{5,4}(x)$ соответственно на интервале $(0; 1]$.

4.4.8. Постройте приближение Паде $R_{5,4}(x)$ к функции $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. Выразите рациональную

функцию $R_{5,4}(x)$ в форме цепной дроби. Постройте в одной и той же системе координат графики функций $f(x)$ и $R_{5,4}(x)$. Найдите максимальную ошибку, появляющуюся, когда функцию $f(x)$ приближают $R_{5,4}(x)$ соответственно на интервале $(0; 1]$.

Задания к задаче 4.5.

N		N		N	
$f(x)$	$[a,b]$	$f(x)$	$[a,b]$	$f(x)$	$[a,b]$
4.5.1		4.5.2		4.5.3	
$5 \cdot \sin(x^2)$	$[0,4]$	$3 \cdot \sin(x^3)$	$[1,2.5]$	$7 \cdot e^x \cdot \sin(x^2)$	$[0,4]$
фундаментальный		с отсутствием узла		естественный	
4.5.4		4.5.5		4.5.6	
$6 \frac{\sin(x)}{x}$	$[5,15]$	$10 \frac{\cos(x^3)}{x}$	$[1,2.75]$	$11 \cdot \frac{\sin(x^3)}{x}$	$[1,2.75]$
локальный		кубический дефекта 1		кубический дефекта 2	