Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

А.Ю. Аникин, А.С. Савин, В.Я. Томашпольский

РЯДЫ ФУРЬЕ

*Методические указания
к выполнению типового расчета*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2012

УДК 517.52
ББК 22.161.1
А68

Рецензент *Д.А. Приказчиков*

Аникин А. Ю.

А68 Ряды Фурье : метод. указания к выполнению типового расчета / А.Ю. Аникин, А.С. Савин, В.Я. Томашпольский. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. — 32, [5] с. : ил.

Изложены основы теории по тригонометрическим рядам Фурье, включая сходимость рядов Фурье в среднем квадратичном, теорема Дирихле о поточечной сходимости, приближение функций тригонометрическими полиномами. Рассмотрены стандартные примеры и примеры повышенной сложности. Приведены задачи для самостоятельного решения. Даны условия задач типового расчета.

Для студентов, изучающих ряды Фурье и их приложения.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией НУК ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 517.52
ББК 22.161.1

ВВЕДЕНИЕ

Пособие посвящено рядам Фурье, членами которых являются тригонометрические функции. Такие ряды (наряду со степенными) играют важную роль в математике и различных ее приложениях. Они применяются для нахождения сумм числовых рядов, для аппроксимации функций, для решения краевых задач математической физики и т. д.

Впервые тригонометрические ряды Фурье были использованы в работах французского математика Ш. Фурье, хотя формулы для коэффициентов тригонометрического ряда встречались ранее в трудах Л. Эйлера. В дальнейшем теория тригонометрических рядов развивалась в работах Б. Римана, Л. Дирихле, У. Дини и др.

Читатель должен быть знаком со степенными рядами Тейлора. Важно отметить, что степенные ряды дают хорошее приближение функции лишь локально (т. е. около центра разложения). Приведем конкретный пример. Функция $f(x) = \sin x$, как известно, может быть представлена в виде ряда Тейлора — Маклорена:

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \tag{1}$$

который абсолютно сходится всюду на $\mathbb{R}$. Однако вычисления показывают, что при $x = 2\pi$

$$\sum_{n=1}^{5} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \approx 46{,}55; \quad \sum_{n=1}^{11} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \approx 3{,}19,$$

в то время как точное значение функции равно нулю. Для достижения точности $0,01$ нужно брать слагаемые ряда (1), вплоть до $n = 19$.

Таким образом, степенные ряды могут давать плохое приближение функции вдали от центра разложения. Напротив, тригонометрические ряды Фурье, которым посвящено пособие, как правило, дают достаточно точное приближение для функции на целом отрезке.

1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Пусть $T > 0$. Функция $y = f(x)$ называется T-периодической, если $f(x+T) = f(x)$ при всех x из области определения $f(x)$. Число T называется периодом $f(x)$ (этот период необязательно наименьший!).

Простейшие примеры 2π-периодических функций дают

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \sin 3x,\ \ldots \qquad (2)$$

Упражнение 1. Проверить, что система функций (2) ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$, т. е. для любых различных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из множества (2)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Линейная комбинация функций (2), т. е. выражение вида

$$S_N(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)\,, \qquad (3)$$

где $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, называют тригонометрическим полиномом степени N. Тригонометрический полином является 2π-периодической функцией.

Известные формулы позволяют представить многие другие тригонометрические функции в виде тригонометрических полиномов. Например,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x; \quad \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

Возникает естественный вопрос: можно ли произвольную (достаточно регулярную) 2π-периодическую функцию приблизить тригонометрическим полиномом? Близость тригонометрического полинома S_N и функции $f(x)$ удобно измерять с помощью среднего квадратичного отклонения:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x) - S_n(x)\big)^2\,dx}. \tag{4}$$

Задача 1. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

найти тригонометрический полином первой степени, который бы давал наименьшее среднее квадратичное отклонение на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Замечание. То, что функция $f(x)$ не является периодической, не должно смущать читателя. Мы всегда можем ее доопределить или переопределить на концах отрезка, чтобы она стала периодической. Среднее квадратичное отклонение при этом, не изменится.

Решение. Пусть

$$S(x) = \alpha_0 + \alpha_1\cos x + \beta_1\sin x.$$

Тогда

$$\delta^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x) - \alpha_0 - \alpha_1\cos x - \beta_1\sin x\big)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\alpha_0\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - 2\alpha_1\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx -$$

$$- 2\beta_1\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx +$$

$$+2\alpha_0^2\pi+\alpha_1^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx+\beta_1^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx\Bigg).$$

Остальные слагаемые равны нулю, поскольку

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin x\,dx=0$$

(см. упражнение 1).

Введем теперь обозначения:

$$A=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx,\, a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx;$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx;\quad b_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx.$$

Тогда

$$\delta^2=\frac{1}{2}\left(2\alpha_0^2+\alpha_1^2+\beta_1^2-2\alpha_0a_0-2\alpha_1a_1-2\beta_1b_1+A\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\Bigg(2(\alpha_0-\frac{a_0}{2})^2+(\alpha_1-a_1)^2+(\beta_1-b_1)^2-$$
$$-\frac{a_0^2}{2}-a_1^2-b_1^2+A\Bigg).$$

Это выражение принимает минимальное значение, если

$$\alpha_0=\frac{a_0}{2},\quad \alpha_1=a_1,\quad \beta_1=b_1.$$

Итак,

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}dx=\frac{1}{2};\quad \alpha_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx=0;$$

$$\beta_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi},$$

или

$$S_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x.$$

Упражнение 2. Доказать, что для функции $f(x)$ тригонометрический полином второй степени, который дает наименьшее среднее квадратичное отклонение, имеет вид

$$S_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + b_1\sin x + b_2\sin 2x,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx; \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx,$$

$n = 0, 1, 2$ и $m = 1, 2$.

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l, l]$. Поставим задачу представлять функцию $f(x)$ в виде ряда, составленного из следующих функций:

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \cos\frac{3\pi x}{l},\ \sin\frac{3\pi x}{l},\ \ldots \tag{5}$$

Функции (5) являются $2l$-периодическими и в частном случае $l = \pi$ дают систему функций (2).

Упражнение 3. Проверить, что функции (5) ортогональны на отрезке $[-l, l]$ (см. упражнение 1).

Определение 1. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{6}$$

где a_0, a_n, b_n — вещественные числа, называется тригонометрическим рядом на отрезке $[-l, l]$.

Определение 2. Частичную сумму $S_N(x)$ тригонометрического ряда

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{7}$$

называют тригонометрическим полиномом степени N.

Определение 3. Обозначим $L_2[a,b]$ множество функций $f(x)$, определенных и интегрируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$, т. е. те множества функций, для которых существуют интегралы

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

Определение 4. Пусть $f(x) \in L_2[-l,l]$. Ряд (6) называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-l,l]$, если его коэффициенты заданы следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots; \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Коэффициенты a_0, a_n, b_n называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ на том же отрезке.

В действительности справедливо следующее обобщение задачи 1 и упражнения 2.

Теорема 1. Частичные суммы $S_N(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ дают наименьшее среднее квадратичное отклонение от $f(x)$ среди всех тригонометрических полиномов степени N. При этом

$$\delta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Среднее квадратичное отклонение δ для функции на отрезке $[-l,l]$ вводится по формуле (4), где π всюду заменено на l.

Смысл теоремы 1 состоит в том, что самый оптимальный (в смысле минимума среднего квадратичного отклонения) тригонометрический ряд, который можно сопоставить данной функции, это ее ряд Фурье.

Однако остается вопрос: дают ли частичные суммы ряда Фурье разумное приближение функции $f(x)$? Другими словами, стремится ли $S_N(x)$ к $f(x)$ в каком-нибудь смысле при $N \to \infty$?

3. ТЕОРЕМЫ О РЯДАХ ФУРЬЕ

Определение 5. Говорят, что последовательность функций $f_n(x) \in L_2[-l, l]$ сходится (или стремится) к функции $f(x) \in \in L_2[-l, l]$ в среднем квадратичном, если

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-l}^{l} \Big(f(x) - f_n(x)\Big)^2 \, dx = 0.$$

Теорема 2. Частичная сумма тригонометрического ряда Фурье $S_N(x)$ функции $f(x) \in L_2[-l, l]$ стремится к $f(x)$ в среднем квадратичном. Наоборот, если частичная сумма $S_N(x)$ некоторого тригонометрического ряда (6) стремится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном, то ряд (6) является тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$, т. е. его коэффициенты вычисляются по формулам (8).

Эта теорема носит универсальный характер и имеет большое теоретическое значение. Однако она не отвечает на важный вопрос: сходится ли последовательность $S_N(x)$ к функции $f(x)$ для данного фиксированного x? Действительно, из теоремы 2, во-первых, не следует сходимость ряда (6) ни при каком x. Во-вторых, даже если ряд (6) сходится, его сумма может не совпадать с функцией $f(x)$. Поэтому мы используем обозначение «$\sim$» вместо «$=$» для ряда Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right). \tag{9}$$

Определение 6. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, удовлетворяет условию Дирихле, если она

1) имеет не более, чем конечное число точек разрыва, и все они первого рода (т. е. существуют оба односторонних предела);

2) имеет не более, чем конечное число точек строгого локального экстремума.

Конечно, функций, интегрируемых с квадратом, значительно больше, чем тех, которые удовлетворяют условию Дирихле. Вместе с тем это довольно широкий класс, к которому принадлежат многие функции, встречающиеся на практике.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле на отрезке $[-l, l]$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in [-l, l]$. Более того, сумма ряда Фурье $S(x)$ совпадает с $f(x)$ в любой точке непрерывности функции $f(x)$. В точках, где функция $f(x)$ терпит разрыв, сумма ряда Фурье $S(x)$ равна полусумме односторонних пределов $f(x)$, т. е.

$$\frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big).$$

Наконец, в граничных точках

$$S(\pm l) = \frac{1}{2}\big(f(l-0) + f(-l+0)\big).$$

Сумма тригонометрического ряда (6), периодична с периодом $2l$. Поэтому из теоремы 3 следует, что ряд Фурье функции, удовлетворяющей условию Дирихле на $[-l, l]$, сходится на всей числовой оси к периодичной функции $S(x)$. Будем говорить, что $S(x)$ является разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Замечание. Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x) \in L_2[a, a+2l]$ называется ряд вида (9) с коэффициентами

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Теоремы 2 и 3 можно обобщить на этот случай.

4. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $f(x) \in L_2[-l, l]$ нечетна, т. е. $f(-x) = -f(x)$. Тогда функции $f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x$ нечетны, а функции $f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x$ четны. Используя свойства интегралов от четных и нечетных функций по симметричному промежутку, из формул (8) получим

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Итак, тригонометрический ряд Фурье нечетной функции на отрезке $[-l, l]$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x; \quad b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пусть функция $f(x) \in L_2[-l, l]$ четна, т. е. $f(-x) = f(x)$. Тогда функции $f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x$ четны, а функции $f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x$ нечетны. Используя свойства интегралов от четных и нечетных функций по симметричному промежутку, из формул (8) получим

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = 0.$$

Итак, тригонометрический ряд Фурье четной функции на отрезке $[-l, l]$ имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x;$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x\, dx; \quad n = 0, 1, \ldots$$

Рассмотрим следующую задачу. Разложить функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0, l]$, в ряд Фурье, не содержащий синусов. Для этого мы доопределяем функцию так, чтобы она была четной на отрезке $[-l, l]$. Тогда, согласно свойству ряда Фурье четной функции, коэффициенты при синусах будут равны нулю.

Аналогично можно поставить задачу о разложении в ряд Фурье, не содержащий косинусов. В этом случае надо доопределять функцию так, чтобы она была нечетной на отрезке $[-l, l]$.

Такие ряды называются неполными рядами Фурье или рядами соответственно по косинусам и синусам.

5. ТИПОВЫЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задача 2. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0; \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

разложить в ряд Фурье и вычислить его сумму при всех $x \in [-l, l]$.

Р е ш е н и е. Найдем коэффициенты Фурье из формул (8):

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} dx = 3;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} \cos nx\, dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n} \sin nx \Big|_{0}^{\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{\cos \pi n - 1}{\pi n} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n}.$$

Итак,

$$f(x) \sim S(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \big((-1)^n - 1\big) \sin nx.$$

Наконец, заметим, что $b_n = 0$ при четных n, и $b_n = -\dfrac{2}{\pi n}$ при нечетных n. Поэтому

$$S(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1)x. \tag{10}$$

Из теоремы 3 следует, что

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}, & x = -\pi; \\ 2, & -\pi < x < 0; \\ \dfrac{3}{2}, & x = 0; \\ 1, & 0 < x < \pi; \\ \dfrac{3}{2}, & x = \pi. \end{cases}$$

$$S(x) = S(x + 2\pi). \tag{11}$$

Упражнение 4. Построить графики частичных сумм ряда Фурье из задачи 2: $S_1(x), S_3(x), S_5(x)$. Сравнить их с графиком функции $f(x)$.

Задача 3. Подставить $x = \dfrac{\pi}{2}$ в ряд Фурье $S(x)$ из задачи 2 и найти сумму этого числового ряда.

Р е ш е н и е. Если в (10) взять $x = \dfrac{\pi}{2}$, то получим

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1)\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}.$$

Однако из определения функции $S(x)$ (см. (11)) следует, что $S(\frac{\pi}{2}) = 1$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, доказано следующее соотношение:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \tag{12}$$

Замечание. К сожалению, соотношение (12) непригодно для вычисления числа π из-за чрезвычайно медленной сходимости. Например, чтобы получить чило π с абсолютной погрешностью $0,01$, потребуется взять около 200 слагаемых ряда из правой части соотношения (12).

Задача 4. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & -3 < x < 0; \\ 0, & 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

разложить в тригонометрический ряд Фурье и вычислить его сумму при всех $x \in [-l, l]$.

Р е ш е н и е. Найдем коэффициенты Фурье из формул (8), используя интегрирование по частям:

$$a_0 = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{0} x\, dx = -\frac{3}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{0} x \cos \frac{\pi n x}{3}\, dx = \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-3}^{0} x\, d \sin \frac{\pi n x}{3} =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \Big(x \sin \frac{\pi n x}{3} \Big|_{-3}^{0} - \int\limits_{-3}^{0} \sin \frac{\pi n x}{3}\, dx \Big) = \frac{3}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{3} \Big|_{-3}^{0} =$$

$$= \frac{3}{\pi^2 n^2} \big(1 - (-1)^n\big);$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{0} x \sin\frac{\pi n x}{3}\,dx = -\frac{1}{\pi n x}\int\limits_{-3}^{0} d\cos\frac{\pi n x}{3} =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\Bigl(x\cos\frac{\pi n x}{3}\Bigr|_{-3}^{0} - \int\limits_{-3}^{0}\cos\frac{\pi n x}{3}\,dx\Bigr) =$$

$$= -\frac{3}{\pi n}\cos\pi n = \frac{3}{\pi n}(-1)^{n-1}.$$

Итак,

$$f(x) \sim -\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Biggl(\frac{3}{\pi^2 n^2}\bigl(1-(-1)^n\bigr)\cos\frac{\pi n x}{3} +$$

$$+\frac{3}{\pi n}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi n x}{3}\Biggr).$$

Однако из теоремы 3 следует, что

$$S(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}, & x = -3; \\ x, & -3 < x < 0; \\ 0, & 0 \le x < 3; \\ -\dfrac{3}{2}, & x = 3; \end{cases}$$

$$S(x) = S(x+6).$$

Задача 5 (скорость убывания коэффициентов Фурье). Рассмотрим $2l$-периодическую непрерывно дифференцируемую функцию $f(x)$ (т. е. функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках, и ее производная всюду непрерывна). Доказать, что

$$a_n, b_n = O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr), \qquad n \to \infty,$$

т. е. что существует такое число $M > 0$, что $|a_n| \le \dfrac{M}{n}$ и $|b_n| \le \dfrac{M}{n}$ для всех n.

Р е ш е н и е. Используем интегрирование по частям:

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\bigg|_{-l}^{l} - \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{\pi nx}{l} f'(x)\,dx.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\pi n} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\bigg|_{-l}^{l} = 0,$$

то

$$|a_n| \le \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-l}^{l}\left|\sin\frac{\pi nx}{l} f'(x)\right| dx \le \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-l}^{l}\left|f'(x)\right| dx = \frac{M}{n},$$

где

$$M = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l}\left|f'(x)\right| dx.$$

Аналогично можно получить оценку для b_n.

Упражнение 5. Закончить решение задачи 5. Доказать, что если $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая $2l$-периодическая функция, то $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Задача 6. Доказать, что ряд Фурье дважды непрерывно дифференцируемой $2l$-периодической функции сходится абсолютно на $\mathbb{R}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим ряд

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\cos\frac{n\pi}{l}x\right| + \left|b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right|\right). \tag{13}$$

Члены этого ряда не превосходят соответствующие члены ряда

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^2} \tag{14}$$

(см. упражнение 5). Ряд (14) сходится (как ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$).
Следовательно, по признаку сравнения ряд (13) сходится, а ряд Фурье сходится абсолютно.

Задача 7. Функцию

$$f(x) = \pi - |x|, \qquad -\pi < x < \pi$$

разложить в тригонометрический ряд Фурье.

Р е ш е н и е. Функция $f(x)$ четна, поэтому (см. разд. 5)

$$b_n = 0,$$

и

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}(\pi - x)\sin nx\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\big(1 - (-1)^n\big).$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна всюду, то, согласно теореме 3, справедливо равенство

$$\pi - |x| = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Задача 8. Аппроксимировать функцию из задачи 7 тригонометрическим полиномом третьего порядка и найти среднее квадратичное отклонение.

Р е ш е н и е. Согласно теореме 1 наилучшую аппроксимацию функции $f(x) = \pi - |x|$ среди всех тригонометрических полиномов третьего порядка дает частичная сумма ее ряда Фурье. Таким образом,

$$\pi - |x| \approx S_3(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n^2}\big(1 - (-1)^n\big)\cos nx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x)$$

при $-\pi < x < \pi$.

Найдем среднее квадратичное отклонение, используя теорему 1:

$$\delta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - |x|)^2\,dx - \frac{a_0^2}{2} - a_1^2 - a_3^2\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} - \frac{8}{\pi^2} - \frac{8}{81\pi^2},$$

откуда $\delta \approx 0,0438$.

Задача 9. Функцию, определяемую на отрезке $[-\pi, \pi]$ с помощью ряда Фурье

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{1+(-1)^n}{n^2}\sin nx\right),$$

приблизить тригонометрическим полиномом второй степени и оценить среднее квадратичное отклонение.

Р е ш е н и е. Из задачи 6 следует, что ряд сходится абсолютно на $\mathbb{R}$. Далее, согласно теореме 1, в качестве аппроксимирующего полинома следует взять частичную сумму ряда

$$S_2(x) = 2\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Для оценки среднего квадратичного отклонения используем формулу из теоремы 1:

$$\delta^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) =$$
$$= 2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^4} < 2\left(\int_3^{\infty}\frac{dx}{x^4} + \frac{1}{3^4}\right) = \frac{2}{9} + \frac{2}{81} = \frac{20}{81},$$

или $\delta < \dfrac{\sqrt{20}}{9}$.

Задача 10. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

разложить в ряд по косинусам на отрезке $[0, \pi]$.

Р е ш е н и е. Доопределим функцию так, чтобы она была четной на отрезке $[-\pi, \pi]$, а именно: положим $f(x) = 0$ при $-\pi < x \le -\dfrac{\pi}{2}$ и $f(x) = 1$ при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Теперь (см. разд. 4),

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 1;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx = \frac{2}{\pi n} \sin nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi n} \sin n\frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$f(x) \sim 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} \cos(2m-1)x.$$

Задача 11. Разложить $y = \cos x$ в ряд по синусам на отрезке $[0, \pi]$.

Р е ш е н и е. Доопределим функцию так, чтобы она была нечетной на отрезке $[-\pi, \pi]$, а именно: положим $y = -\cos x$ при $-\pi < x < 0$. Теперь (см. разд. 4)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos x \sin x \, dx = 0$$

и для $n = 2, 3, \ldots;$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \big(\sin(1+n)x - \sin(1-n)x \big) \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{1+n} \cos(n+1)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{1-n} \cos(1-n)x \Big|_o^{\pi} \right) = \\ &= \frac{\cos \pi(n+1) - 1}{\pi} \left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{1+n} \right) = \frac{2n\big(1 + (-1)^n\big)}{\pi(n^2-1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\big(1+(-1)^n\big)}{(n^2-1)} \sin nx.$$

6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Представить функции $\sin^n x$ и $\cos^n x$ в виде тригонометрических полиномов n-й степени. Указание: использовать формулу Эйлера.

Задача 2. Доказать, что тригонометрический полином, не равный нулю тождественно, не может сохранять знак на $\mathbb{R}$.

Задача 3. Доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \qquad (0 \le x \le \pi).$$

Указание: использовать разложение функций x и x^2 на отрезке $[0, \pi]$ по косинусам.

Задача 4. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ следующие функции:

а) $\sin \alpha x$; б) $|\cos x|$; в) $e^{\alpha x}$; г) $\arcsin(\sin x)$.

Задача 5. Разложить $y = x \cos x$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0, \pi]$.

7. СОДЕРЖАНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задание 1. Функция $f(x)$ задана на промежутке $(-l, l)$. Разложить ее в тригонометрический ряд Фурье. Построить графики функции, суммы ряда, а также частичных сумм $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$. Используя данное разложение, аппроксимировать функцию тригонометрическим полиномом третьего порядка и вычислить среднее квадратичное отклонение.

Задание 2. Функция задана на промежутке $(0, l)$ или $(-l, 0)$. Разложить ее по косинусам (четный номер варианта) или по синусам (нечетный номер варианта). В полученный ряд подставить $x = l$ и найти сумму этого числового ряда. Построить графики функции и суммы ряда Фурье.

Варианты заданий приведены в таблице.

Номер варианта	Задание	
	1	2
1	$f(x) = \begin{cases} 2, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi; \\ 1, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0; \\ 1, & -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$	$f(x) = -x^2 + \pi x,\ 0 < x < \pi$
2	$f(x) = \begin{cases} 3, & \dfrac{2\pi}{3} < x < \pi; \\ 2, & \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2\pi}{3}; \\ 1, & 0 < x < \dfrac{\pi}{3}; \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$	$f(x) = (x - \dfrac{\pi}{2})^2,\ 0 < x < \pi$

Номер варианта	Задание	
	1	2
3	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & 0<x<\dfrac{\pi}{2};\\ \pi, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0;\\ 0, & -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$	$f(x)=-x^2+\dfrac{\pi^2}{4},\ -\pi<x<0$
4	$f(x)=\begin{cases}\pi, & \dfrac{3\pi}{4}<x<\pi;\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{4};\\ -\pi, & -\dfrac{3\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2};\\ \pi, & -\pi<x<-\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$	$f(x)=x^2-\dfrac{\pi^2}{4},\ -\pi<x<0$
5	$f(x)=\begin{cases}-1, & 3<x<4;\\ 1, & 1<x<3;\\ -1, & -2<x<1;\\ 1, & -4<x<-2\end{cases}$	$f(x)=x^2-2x,\ 0<x<2$
6	$f(x)=\begin{cases}0, & 2<x<3;\\ 2, & 1<x<2;\\ 1, & -1<x<1;\\ -1, & -3<x<-1\end{cases}$	$f(x)=x-x^2,\ -2<x<0$
7	$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2;\\ 0, & 0<x<1;\\ -1, & -1<x<0;\\ 1, & -2<x<-1\end{cases}$	$f(x)=x^2+x,\ 0<x<1$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задание	
	1	2
8	$f(x)=\begin{cases}2, & \frac{1}{2}<x<1;\\ 1, & \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2};\\ 0, & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3};\\ 2, & -1<x<-\frac{1}{2}\end{cases}$	$f(x)=x^2+3x,\ -3<x<0$
9	$f(x)=\begin{cases}x-\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}<x<\pi;\\ 0, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2};\\ \frac{\pi}{2}, & -\pi<x<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}x+2, & -1<x<0;\\ 1, & -4<x<-1\end{cases}$
10	$f(x)=\begin{cases}0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi;\\ x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2};\\ \frac{\pi}{2}, & -\pi<x<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}x-2, & 1<x<3;\\ -1, & 0<x<1\end{cases}$
11	$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}, & 0<x<\pi;\\ -\frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2}<x<0;\\ 0, & -\pi<x<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}x-2, & 1<x<3;\\ -1, & 0<x<1\end{cases}$
12	$f(x)=\begin{cases}x-\frac{2\pi}{3}, & \frac{\pi}{3}<x<\pi;\\ 0, & 0<x<\frac{\pi}{3};\\ -\frac{\pi}{3}, & -\pi<x<0\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0;\\ 2-x, & -2<x<-1\end{cases}$

Номер варианта	Задание	
	1	2
13	$f(x)=\begin{cases}x-1, & 0<x<2;\\ -1, & -2<x<0\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}, & \dfrac{2\pi}{3}<x<\pi;\\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3};\\ 0, & 0<x<\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$
14	$f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x<1;\\ -2x, & -1<x<0\end{cases}$	$f(x)=$ $=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0;\\ x-\dfrac{3\pi}{4}, & -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$
15	$f(x)=\begin{cases}5, & 1<x<4;\\ 1-x, & -4<x<1\end{cases}$	$f(x)=$ $=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & -\dfrac{\pi}{4}<x<0;\\ 0, & -\dfrac{\pi}{2}<x<-\dfrac{\pi}{4};\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}, & -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$
16	$f(x)=\begin{cases}0, & 1<x<2;\\ 1-x, & 0<x<1;\\ 1, & -2<x<0\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}\pi-x, & \dfrac{\pi}{4}<x<\pi;\\ \dfrac{\pi}{2}, & 0<x<\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$
17	$f(x)=\begin{cases}-2x, & 0<x<\pi;\\ -x, & -\pi<x<0\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}-x, & -1<x<0;\\ 1, & -2<x<-1\end{cases}$
18	$f(x)=\begin{cases}x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\pi;\\ x-\pi, & -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}1, & 2<x<3;\\ 0, & 1<x<2;\\ 1-x, & 0<x<1\end{cases}$
19	$f(x)=\begin{cases}x-\dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi;\\ 0, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2};\\ x+\pi, & -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}1, & 3<x<4;\\ 0, & 1<x<3;\\ x, & 0<x<1\end{cases}$

Номер вари-анта	Задание	
	1	2
20	$f(x) = \begin{cases} 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi; \\ x + \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ -x - \frac{\pi}{2}, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 1 < x < 2; \\ -x, & 0 < x < 1 \end{cases}$
21	$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & 1 < x < 2; \\ x + 1, & -2 < x < 1 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0; \\ x + \pi, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$
22	$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2; \\ -x, & -1 < x < 0; \\ x + 2, & -2 < x < -1 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0, & 2 < x < 3; \\ 2 - x, & 1 < x < 2; \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$
23	$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 2, & 0 < x < 4; \\ -x - 2, & -4 < x < 0 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi; \\ \frac{\pi}{2}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$
24	$f(x) = \begin{cases} x - 2, & 2 < x < 4; \\ 0, & 0 < x < 2; \\ -x, & -4 < x < 0 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 2, & 2 < x < 4; \\ 0, & 1 < x < 2; \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$
25	$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi; \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 < x < 0; \\ 1, & -3 < x < -2; \\ -1, & -4 < x < -3 \end{cases}$
26	$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi; \\ x^2, & -\pi < x < 0 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 2, & 2 < x < 3; \\ 3, & 1 < x < 2; \\ 4, & 0 < x < 1 \end{cases}$
27	$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \pi^2, & 0 < x < \pi; \\ \pi^2, & -\pi < x < 0 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 2, & 3 < x < 5; \\ -2, & 2 < x < 3; \\ 4, & 0 < x < 2 \end{cases}$

Окончание таблицы

Номер варианта	Задание	
	1	2
28	$f(x) = -x^2 - 2x,\ -2 < x < 2$	$f(x) = \begin{cases} 2, & -\dfrac{\pi}{3} < x < 0; \\ 3, & -\dfrac{2\pi}{3} < x < -\dfrac{\pi}{3}; \\ 1, & -\pi < x < -\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$
29	$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 < x < 2; \\ 0, & -2 < x < 0 \end{cases}$	$f(x) = \\ = \begin{cases} -3, & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0; \\ -2, & -\dfrac{3\pi}{4} < x < -\dfrac{\pi}{2}; \\ -1, & -\pi < x < -\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$
30	$f(x) = x^2 - 2x - 3,\ -1 < x < 1$	$f(x) = \begin{cases} -2, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi; \\ 1, & \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ -1, & 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

Будак Б.М., *Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды М.: Физматлит, 2002.

Власова Е.А. Ряды: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000 (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IX).

Ильин В.А., *Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: В 2 ч.: Ч. 1. М.: Наука, 1971.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3 т.: Т. 2. М.: Высш. шк., 1981.

Нараленков К.М., *Шарохина И.В.* Тригонометрические ряды Фурье: Метод. указания к выполнению домашнего задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 2 т.: Т. 2. М.: Наука, 1985.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Аникин Анатолий Юрьевич
Савин Александр Сергеевич
Томашпольский Виктор Яковлевич

РЯДЫ ФУРЬЕ

Редактор *О.М. Королева*
Корректор *Р.В. Царева*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 05.07.2012. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,86. Тираж 500 экз. Изд. № 2.
Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК