

# Разностные схемы для уравнений эллиптического типа

## Итерационные методы решений сеточных уравнений

### Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения

$$-Lu = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

$$u = \mu(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Пусть  $\bar{G} = G \cup \Gamma = \{0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y\}$  — прямоугольник, а

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Здесь  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  — достаточно гладкие функции такие, что  $0 < c_1 \leq p(x, y) \leq c_2$ ,  $0 < d_1 \leq q(x, y) \leq d_2$ , где  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  — постоянные.

### Построение сетки, равномерной по каждому из направлений

Разобьем отрезок  $[0, l_x]$  на  $N$  равных частей. Обозначим  $h_x = l_x/N$ ,  $x_i = ih_x$ ,  $0 \leq i \leq N$ .

Разобьем отрезок  $[0, l_y]$  на  $M$  равных частей. Обозначим  $h_y = l_y/M$ ,  $y_j = jh_y$ ,  $0 \leq j \leq M$ .

Построим сетку узлов (рис. 1)

$$\overline{\omega_{h_x h_y}} = \{(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M\}.$$

Узлы  $(x_i, y_j)$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ ;  $1 \leq j \leq M-1$  — внутренние, остальные, лежащие на границе прямоугольника, — граничные. Внутренний узел  $(x_i, y_j)$  будем называть приграничным, если хотя бы один из узлов  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$ ,  $(x_i, y_{j+1})$  является граничным. Приграничные узлы отмечены на рисунке кружочками.

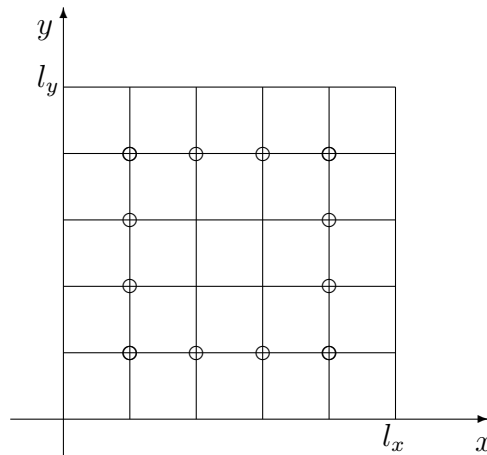


Рис. 1

## Разностная аппроксимация задачи Дирихле

Обозначим  $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ . Заменяем оператор  $L$  во всех внутренних узлах разностным оператором

$$L_h u_{ij} = p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_x^2} + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_y^2}, \quad (4)$$

$$1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1.$$

Здесь использованы обозначения

$$p_{i+\frac{1}{2}j} = p(x_i + h_x/2, y_j), \quad p_{i-\frac{1}{2}j} = p(x_i - h_x/2, y_j), \\ q_{ij+\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j + h_y/2), \quad q_{ij-\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j - h_y/2).$$

Если  $u(x, y)$  имеет не менее четырех непрерывных ограниченных в рассматриваемой области производных по  $x$  и по  $y$ , а  $p(x, y)$  и  $q(x, y)$  — не менее трех, то разностный оператор  $L_h$  аппроксимирует дифференциальный  $L$  со вторым порядком, т. е.

$$Lu - L_h u = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_x^2 + h_y^2.$$

Задаче (1), (2) ставим в соответствие разностную задачу: найти сеточную функцию, удовлетворяющую во внутренних узлах уравнениям

$$-L_h u_{ij} = f_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1, \quad f_{ij} = f(x_i, y_j) \quad (5)$$

и принимающую в граничных узлах заданные значения

$$\begin{cases} u_{i0} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{iM} = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{0j} = \mu(0, y_j), & 1 \leq j \leq M-1; \\ u_{Nj} = \mu(l_x, y_j), & 1 \leq j \leq M-1. \end{cases} \quad (6)$$

При достаточной гладкости функций  $u(x, y)$ ,  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  разностная схема (5), (6) имеет второй порядок точности. Для исследования разностного оператора этой задачи следует в приграничных уравнениях исключить неизвестные  $u_{0j}$ ,  $u_{Nxj}$ ,  $1 \leq j \leq M-1$  и  $u_{i0}$ ,  $u_{iN}$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ . Итак, решение задачи (1), (2) свелось к решению линейной системы порядка  $(N-1) \cdot (M-1)$ . Линейную систему запишем в виде

$$AU = F, \quad (7)$$

где  $U = (u_{1,1}, \dots, u_{1,M-1}, \dots, u_{N-1,1}, \dots, u_{N-1,M-1})^T$ , а вектор  $F$  отличается от вектора  $f$  в (5) лишь в приграничных узлах.

Отметим следующие особенности матрицы системы  $A$ :

- собственные числа матрицы находятся в диапазоне  $[\delta, \Delta]$ , где

$$\delta = c_1 \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2l_x} + d_1 \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}, \quad \Delta = c_2 \frac{4}{h_x^2} \cos^2 \frac{\pi h_x}{2l_x} + d_2 \frac{4}{h_y^2} \cos^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}. \quad (8)$$

Заметим, что при  $p(x, y) \equiv 1$ ,  $q(x, y) \equiv 1$ ,  $l_x = l_y = 1$ ,  $h_x = h_y = h$  (такую задачу в дальнейшем будем называть простейшей)

$$\delta = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2};$$

- положительную определенность;
- плохую обусловленность, т. е. отношение максимального собственного числа матрицы к минимальному очень велико и является величиной  $O(1/h^2)$ ;
- большой порядок;
- большое количество нулевых элементов;
- специфическую ленточную структуру — блочный трехдиагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} C & I & O & \dots & O \\ I & C & I & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & I & C & I \\ O & \dots & O & I & C \end{pmatrix},$$

где матрица  $C$  является трехдиагональной,  $I$  — диагональной,  $O$  имеет лишь нулевые элементы.

Пусть  $p(x, y) \equiv 1$ ,  $q(x, y) \equiv 1$ ,  $h_x = h_y = h$ , тогда

$$C = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad I = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы могут быть использованы, например, следующие методы:

- 1) Метод простой итерации.
- 2) Метод итерации с оптимальным параметром.
- 3) Метод Зейделя.
- 4) Метод верхней релаксации.
- 5) Итерационный метод с чебышевским набором параметров.
- 6) Попеременно треугольный итерационный метод.
- 7) Попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров.
- 8) Итерационный метод переменных направлений.
- 9) Метод покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.
- 10) Метод расщепления предиктор-корректор.
- 11) Метод переменных направлений Дугласа-Рэкфорда.

## Расчетные формулы методов

Заметим, что, как видно будет ниже, в расчетных формулах методов нигде не используются элементы матрицы  $A$ , поэтому при численной реализации алгоритма строить матрицу  $A$ , хранить её в памяти как двумерный массив большого порядка было бы крайне нецелесообразно.

### Метод простой итерации

Систему  $AU = F$  сводим к системе вида  $U = HU + g$  так, чтобы  $\rho(H) < 1$ , где  $\rho(H)$  — максимальное по модулю собственное число матрицы  $H$  (спектральный радиус матрицы). Пусть  $H = E - D^{-1}A$ ,  $g = D^{-1}F$ , где  $D$  — диагональная часть матрицы  $A$ . В простейшем случае система примет следующий вид:

$$u_{ij} = \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (9)$$

Расчетная формула метода итерации  $U^k = HU^{k-1} + g$  или в простейшем случае покомпонентно имеет следующий вид:

$$u_{ij}^k = \frac{u_{i-1j}^{k-1} + u_{i+1j}^{k-1} + u_{ij-1}^{k-1} + u_{ij+1}^{k-1} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (10)$$

Расчетная формула метода простой итерации в общем случае имеет вид

$$u_{ij}^k = \frac{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j} u_{i-1j}^{k-1}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j} u_{i+1j}^{k-1}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}} u_{ij-1}^{k-1}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}} u_{ij+1}^{k-1}}{h_y^2} + f_{ij}}{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}}}{h_y^2}}, \quad (11)$$

где  $1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1$ .

Необходимое и достаточное условие сходимости метода  $\rho(H) < 1$  выполнено. Это легко показать в простейшем случае, т. е. при

$$\begin{aligned} p(x, y) &\equiv 1, \quad q(x, y) \equiv 1, \quad l_x = l_y = 1, \quad h_x = h_y = h \\ \lambda_{\max}(H) &= 1 - \frac{h^2}{4} \lambda_{\min}(A) = 1 - \frac{h^2}{4} \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2} = \cos \pi h, \\ \lambda_{\min}(H) &= 1 - \frac{h^2}{4} \lambda_{\max}(A) = 1 - \frac{h^2}{4} \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} = 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi h}{2} = -\cos \pi h. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что в простейшем случае  $\lambda_{\max}(H) = -\lambda_{\min}(H)$ .

Скорость сходимости метода определяется спектральным радиусом  $\rho(H)$ .

Ввиду того, что  $\rho(H) = 1 - O(h^2)$ , при уменьшении шага сетки  $h$  сходимость замедляется, и близость двух соседних приближений, часто ошибочно воспринимаемая за признак хорошей точности, говорит лишь о медленной сходимости метода.

В качестве апостериорной оценки погрешности здесь часто допустимо использовать следующую:

$$\|U^k - u^*\| \leq \frac{\rho(H)}{1 - \rho(H)} \|U^k - U^{k-1}\|. \quad (12)$$

В общем случае в методе с оптимальным параметром  $\rho(H) = \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta}$  или  $\rho(H) = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$ , где  $\xi = \frac{\delta}{\Delta}$ .

### Метод итерации с оптимальным параметром

Как известно, указанному условию сходимости ( $\rho(H) < 1$ ) будет удовлетворять система вида  $U = U + \tau(F - AU)$ , где  $\tau = 2/(\Delta + \delta)$ , т. е. при  $H = E - \tau A$ ,  $g = \tau F$ ,  $\tau$  — оптимальный параметр. Для простейшего случая  $\tau = h^2/4$  и система будет иметь следующий вид:

$$u_{ij} = \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (13)$$

В простейшем случае метод итерации с оптимальным параметром совпадает с методом простой итерации.

В общем случае расчетная формула метода итерации с оптимальным параметром имеет вид

$$u_{ij}^k = u_{ij}^{k-1} + \tau \left( p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{i-1j}^{k-1}}{h_x^2} + \right. \\ \left. + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{ij-1}^{k-1}}{h_y^2} + f_{ij} \right). \quad (14)$$

### Метод Зейделя (Некрасова)

Известно, что если матрица  $A$  положительно определена, то метод Некрасова для системы  $AU = F$  сходится, причем в простейшем случае вдвое быстрее, чем метод простой итерации.

Расчетная формула метода Зейделя в простейшем случае имеет вид

$$u_{ij}^k = \frac{u_{i-1j}^{k-1} + u_{i+1j}^{k-1} + u_{ij-1}^k + u_{ij+1}^k + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (15)$$

В общем случае расчетная формула примет вид

$$u_{ij}^k = \frac{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j} u_{i-1j}^k}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j} u_{i+1j}^{k-1}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}} u_{ij-1}^k}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}} u_{ij+1}^{k-1}}{h_y^2} + f_{ij}}{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}}}{h_y^2}}, \quad (16)$$

$$1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1.$$

### Двухслойные итерационные схемы

Рассмотрим каноническую форму двухслойной итерационной схемы

$$B_k \frac{U^k - U^{k-1}}{\tau_k} + AU^{k-1} = F, \quad (17)$$

откуда

$$U^k = U^{k-1} - \tau_k B_k^{-1} (AU^{k-1} - F)$$

или

$$U^k = U^{k-1} - \tau_k B_k^{-1} r^{k-1}, \quad (18)$$

где  $r^{k-1} = AU^{k-1} - F$  — невязка  $U^{k-1}$ .

Расчетные формулы метода простой итерации, метода итерации с оптимальным параметром и метода Зейделя, рассмотренные выше, а также метода верхней релаксации, метода с оптимальным чебышевским набором параметров, попеременно треугольного итерационного метода могут быть получены как частные случаи из (18).

#### Метод простой итерации

Полагаем в (18)  $B_k = D$ , где  $D$  диагональная часть матрицы  $A$ ,  $\tau_k = 1$ . После приведения подобных членов получим (11).

#### Метод итерации с оптимальным параметром

Полагаем в (18)  $B_k = E$ ,  $\tau_k = \tau_{opt} = \frac{2}{\Delta + \delta}$  и получаем расчетную формулу метода (14).

#### Метод Зейделя

Полагаем в (18)  $B = L + D$ , где  $L$  и  $D$  нижняя треугольная и диагональная части матрицы  $A$ ,  $\tau_k = 1$ . После приведения подобных членов получим (16).

#### Метод верхней релаксации

Полагаем в (18)  $B = \omega L + D$ , где  $L$  и  $D$  нижняя треугольная и диагональная части матрицы  $A$ ,  $\tau_k = \omega$ . В общем случае расчетная формула примет вид

$$u_{ij}^k = u_{ij}^{k-1} + \omega \frac{f_{ij} + p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{i-1j}^{k-1}}{h_x^2} + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{ij-1}^{k-1}}{h_y^2}}{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}}}{h_y^2}}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1. \quad (19)$$

В простейшем случае

$$u_{ij}^k = u_{ij}^{k-1} + \omega \frac{h^2 f_{ij} + u_{i-1j}^k + u_{i+1j}^{k-1} + u_{ij-1}^k + u_{ij+1}^{k-1} - 4u_{ij}^{k-1}}{4}, \quad (20)$$

$$1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1.$$

Метод будет сходиться, если матрица  $A$  симметрическая, положительно определенная и кроме того  $0 < \omega < 2$ .

Быстрота сходимости релаксационного циклического процесса определяется наибольшим модулем собственных значений матрицы  $S_\omega = (D + \omega L)^{-1}(D - \omega D - \omega R)$ , где  $D$ ,  $L$  и  $R$  диагональная, поддиагональная и наддиагональная части матрицы  $A$ . Оптимальным значением  $\omega$  является

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(H)}}. \quad (21)$$

Тогда спектральный радиус матрицы  $S_{\omega_{opt}}$  будет равен  $\omega_{opt} - 1$ . Если же  $\rho(H)$  неизвестно,  $\omega_{opt}$  определяют экспериментально. Определив  $\omega_{opt}$  на крупной сетке, можно приближенно получить его значение на других сетках, используя тот

факт, что  $\omega_{\text{опт}} \approx 2 - Ch$ , где постоянная  $C$  не зависит от шага сетки. Затем уточнить. В численных результатах следует привести значение  $\omega_{\text{опт}}$  и убедиться, что оно является оптимальным, т. е. реализовать алгоритм, например, с  $\omega_1 = \omega_{\text{опт}} - 0.1$  и  $\omega_2 = \omega_{\text{опт}} + 0.1$ . Сравнить результаты. Для простейшей задачи

$$\omega_{\text{опт}} = \frac{2}{1 + \sin(\pi h)}, \quad \rho(S_{\omega_{\text{опт}}}) = \frac{1 - \sin(\pi h)}{1 + \sin(\pi h)} \approx 1 - 2\pi h.$$

## Метод с чебышевским набором параметров

Этот метод может быть применен, если матрица  $A$  симметрическая и положительно определенная. Пусть  $0 < \delta \leq \lambda(A) \leq \Delta$ . Полагаем в (18)  $B = E$ ,

$$\tau_k = \frac{2}{\Delta + \delta + (\Delta - \delta) \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

В общем случае расчетная формула метода с чебышевским набором параметров имеет вид

$$u_{ij}^k = u_{ij}^{k-1} + \tau_k \left( p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{i-1j}^{k-1}}{h_x^2} + \right. \\ \left. + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{ij-1}^{k-1}}{h_y^2} + f_{ij} \right). \quad (23)$$

Для устойчивости процесса итерационные параметры должны быть упорядочены специальным образом. Для упорядочения итерационных параметров надо построить последовательность нечетных чисел  $\Theta_n = \{\Theta_n(1), \Theta_n(2), \dots, \Theta_n(n)\}$ , таких что  $1 \leq \Theta_n(i) \leq 2n - 1$ , и параметры  $\tau_k$  вычислять по формуле

$$\tau_k = \frac{2}{\Delta + \delta + (\Delta - \delta) \sigma_k}, \quad \sigma_k = \cos \frac{\theta_n k}{2n} \pi, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (24)$$

Рассмотрим способ упорядочения  $\Theta_n$  для случая, когда  $n$  есть степень двойки  $n = 2^p$ ,  $p > 0$ . Считая, что  $\Theta_1 = \{1\}$ , поэтапно вычисляются  $\Theta_2, \Theta_4, \dots, \Theta_{2^p}$  следующим образом:  $\Theta_{2m}(2i - 1) = \Theta_m(i)$ ,  $\Theta_{2m}(2i) = 4m - \Theta_{2m}(2i - 1)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ;  $1 \leq m \leq 2^p - 1$ , так что  $\Theta_2 = \{1, 3\}$ ,  $\Theta_4 = \{1, 7, 3, 5\}$ ,  $\Theta_8 = \{1, 15, 7, 9, 3, 13, 5, 11\}$ ,  $\Theta_{16} = \{1, 31, 15, 17, 7, 25, 9, 23, 3, 29, 13, 19, 5, 27, 11, 21\}$

## Попеременно-треугольный итерационный метод

Представим матрицу  $A$  в виде суммы двух треугольных матриц  $R$  и  $R^T$

$$R + R^T = A, \quad R^* = R^T. \quad (25)$$

Определим матрицу  $R$  по правилу

$$r_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j; \\ 0.5a_{ij}, & i = j; \\ 0, & i < j, \end{cases} \quad (26)$$

так что  $R, R^T$  — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы, причем их диагонали совпадают.

Полагаем в (17)  $B_k = B = (E + \omega R)(E + \omega R^T)$  ( $B$  — самосопряженная положительно-определенная матрица),  $\tau_k = \tau$ . Параметры  $\omega$ ,  $\tau$  выбираются из условия наилучшей сходимости метода.

Пусть известны константы

$$\delta = c_1 \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2l_x} + d_1 \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}, \quad \Delta = c_2 \frac{4}{h_x^2} + d_2 \frac{4}{h_y^2}, \quad (27)$$

такие что

$$\delta E \leq A, \quad RR^T \leq \frac{\Delta}{4} A. \quad (28)$$

Обозначим  $\eta = \delta/\Delta$ .

Далее из оценки  $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$  параметр  $\omega$  выбирается так, чтобы  $\xi = \gamma_1(\omega)/\gamma_2(\omega)$  имело наибольшее значение, так как скорость сходимости определяется величиной  $\rho = (1 - \xi)/(1 + \xi)$ .

Таким образом, получаем

$$\omega = 2/\sqrt{\delta\Delta}, \quad \gamma_1 = \frac{\delta}{(2 + 2\sqrt{\eta})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}, \quad \tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2). \quad (29)$$

В простейшей задаче

$$\delta = \frac{8}{h^2} \sin^2 \pi \frac{h}{2}, \quad \Delta = \frac{8}{h^2}, \quad \eta = \sin^2 \pi \frac{h}{2}, \quad \omega = \frac{h^2}{4 \sin \pi \frac{h}{2}}, \quad (30)$$

$$\gamma_1 = \frac{4 \sin^2 \pi \frac{h}{2}}{h^2 \left(1 + \sin \pi \frac{h}{2}\right)}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{h^2} \sin \pi \frac{h}{2}, \quad \tau = \frac{h^2 \left(1 + \sin \pi \frac{h}{2}\right)}{\sin \pi \frac{h}{2} \left(1 + 3 \sin \pi \frac{h}{2}\right)}. \quad (31)$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи.

Из уравнения

$$(E + \omega R)(E + \omega R^T) \frac{U^k - U^{k-1}}{\tau} + AU^{k-1} = F, \quad k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

при заданном  $U^0$  видно, что для определения  $U^k$  надо решить уравнение

$$(E + \omega R)(E + \omega R^T)U^k = F^{k-1}, \quad (33)$$

где

$$F^{k-1} = BU^{k-1} - \tau(AU^{k-1} - F) = BU^{k-1} + \tau(L_h u^{k-1} + f). \quad (34)$$

Здесь  $U^k = U^{k-1} = 0$  в узлах сетки, лежащих на границе области (обозначим их  $\gamma_{h_x h_y}^1$ ), а  $u^{k-1} = U^{k-1}$  во внутренних точках сеточной области  $\omega_{h_x h_y}$  и принимает заданные значения на  $\gamma_{h_x h_y}$ .

Решением задачи (33) является функция  $U^k$ , а далее строится  $u^k$ , определенная на  $\overline{\omega_{h_x h_y}}$ :  $u^k = U^k$  на  $\omega_{h_x h_y}$ ,  $u^k = \mu$  на  $\gamma_{h_x h_y}$ .

---

<sup>1</sup> $\overline{\omega_{h_x h_y}} = \omega_{h_x h_y} \cup \gamma_{h_x h_y}$ .



Вычисление  $U^k$  сводится к последовательному решению двух задач

$$(E + \omega R)\bar{U} = F^{k-1}, \quad (E + \omega R^T)U^k = \bar{U} \quad (35)$$

с нижней и верхней треугольными матрицами. Отсюда и следует название метода — попеременно-треугольный (ПТМ).

Приведем расчетные формулы метода для  $p(x, y) \equiv 1$ ,  $q(x, y) \equiv 1$ . В этом случае

$$RU_{ij} = \frac{U_{ij} - U_{i-1j}}{h_x^2} + \frac{U_{ij} - U_{ij-1}}{h_y^2} = \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) U_{ij} - \left( \frac{1}{h_x^2} U_{i-1j} + \frac{1}{h_y^2} U_{ij-1} \right), \quad (36)$$

$$R^T U_{ij} = -\frac{U_{i+1j} - U_{ij}}{h_x^2} - \frac{U_{ij+1} - U_{ij}}{h_y^2} = \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) U_{ij} - \left( \frac{1}{h_x^2} U_{i+1j} + \frac{1}{h_y^2} U_{ij+1} \right). \quad (37)$$

Обозначим  $\kappa_1 = \omega/h_x^2$ ,  $\kappa_2 = \omega/h_y^2$ . Тогда, подставляя выражения для  $R$ ,  $R^T$  в (35), получаем для определения значений  $\bar{U}$ ,  $U^k$  в простейшем случае рекуррентные формулы

$$\bar{U}_{ij} = \frac{\kappa_1 \bar{U}_{i-1j} + \kappa_2 \bar{U}_{ij-1} + F_{ij}^{k-1}}{1 + \kappa_1 + \kappa_2}, \quad i = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, M-1; \quad \bar{U}|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (38)$$

$$U_{ij}^k = \frac{\kappa_1 U_{i+1j}^k + \kappa_2 U_{ij+1}^k + \bar{U}_{ij}}{1 + \kappa_1 + \kappa_2}, \quad i = N-1, \dots, 1, j = M-1, \dots, 1; \quad U^k|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0. \quad (39)$$

В общем случае, исходя из аппроксимации (4), эти формулы будут выглядеть следующим образом:

$$\bar{U}_{ij} = \frac{\kappa_1 p_{i-\frac{1}{2}j} \bar{U}_{i-1j} + \kappa_2 q_{ij-\frac{1}{2}} \bar{U}_{ij-1} + F_{ij}^{k-1}}{1 + \kappa_1 p_{i-\frac{1}{2}j} + \kappa_2 q_{ij-\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, M-1; \quad \bar{U}|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (40)$$

$$U_{ij}^k = \frac{\kappa_1 p_{i+\frac{1}{2}j} U_{i+1j}^k + \kappa_2 q_{ij+\frac{1}{2}} U_{ij+1}^k + \bar{U}_{ij}}{1 + \kappa_1 p_{i+\frac{1}{2}j} + \kappa_2 q_{ij+\frac{1}{2}}}, \quad i = N-1, \dots, 1, j = M-1, \dots, 1; \quad U^k|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0. \quad (41)$$

Как было сказано выше,  $u_{ij}^k = U_{ij}^k$  на  $\omega_{h_x h_y}$ ,  $u^k = \mu$  на границе области  $\gamma_{h_x h_y}$

$$\begin{cases} u_{i0}^k = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{iM}^k = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{0j}^k = \mu(0, y_j), & 1 \leq j \leq M-1; \\ u_{Nj}^k = \mu(l_x, y_j), & 1 \leq j \leq M-1. \end{cases} \quad (42)$$

Метод устойчив.

Учитывая вид правой части (34), можно уменьшить количество операций, требуемых для вычисления решения  $U^k$ . Для этого используется алгоритм

$$(E + \omega R)\bar{w} = \Phi^{k-1}, \quad \bar{w}|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (43)$$

$$\Phi^{k-1} = L_h u^{k-1} + f, \quad u^{k-1}|_{\gamma_{h_x h_y}} = \mu, \quad (44)$$

$$(E + \omega R^T)w^k = \bar{w}, \quad w^k|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (45)$$

$$U^k = U^{k-1} + \tau w^k. \quad (46)$$

Для вычисления  $\bar{w}$ ,  $w^k$  естественно использовать формулы, аналогичные (38), (39) в простейшем случае или, в общем случае, (40), (41).

Далее, как было уже сказано, находим  $u_{ij}^k = U_{ij}^k$  на  $\omega_{h_x h_y}$ ,  $u^k = \mu$  на  $\gamma_{h_x h_y}$ .

Заметим, что при реализации этого алгоритма используется еще один массив  $w^k$ .

Для числа итераций имеем оценку

$$m \geq \frac{\ln \varepsilon^{-1}}{\ln \rho^{-1}}. \quad (47)$$

В простейшем случае  $m \geq \frac{\ln \varepsilon^{-1}}{2\pi h}$  при малых  $h \ll 1$ .

## Попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров

В этом методе мы также как и в предыдущем, полагаем в (17)

$$B_k = B = (E + \omega R)(E + \omega R^T), \quad (48)$$

но параметр  $\tau_k$  — переменный и при заданном числе итераций  $n$  вычисляется по формуле

$$\tau_k = \frac{2}{\gamma_2 + \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (49)$$

Для устойчивости процесса итерационные параметры должны быть упорядочены специальным образом, как и в 8.5.2.

В остальном алгоритм остается прежним, расчетные формулы приведены в 8.5.3. Для числа итераций имеем оценку  $m \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta}}$ .

В простейшем случае  $m \geq \frac{0.29}{\sqrt{h}} \ln \frac{2}{\varepsilon}$  при малых  $h \ll 1$ .

## Выбор точности

Разностная схема (5), (6) аппроксимирует исходную задачу (1), (2) со вторым порядком относительно шага сетки. Заданная точность приближенного решения должна быть согласована с порядком аппроксимации. Обычно судят о точности решения по его относительной погрешности  $\|U^k - u^*\|/\|U^0 - u^*\|$  или, так как точное решение  $u^*$  неизвестно, по величине относительной невязки  $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  — заданная относительная погрешность, с которой надо найти приближенное решение задачи (1), (2). Вычисления прекращают, если выполнено условие  $\frac{\|U^m - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$  или  $\frac{\|AU^m - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$ . Можно получить, что

- для метода итераций  $m \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\xi}$ , в простейшем случае  $m \geq 2 \frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)^2}$ ;
- для метода Зейделя  $m \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{4\xi}$ , в простейшем случае  $m \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)^2}$ ;
- для метода верхней релаксации  $m \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\sqrt{\xi}}$ , в простейшем случае  $m \geq 2 \frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)}$ ;

- для метода с оптимальным чебышевским набором параметров,  $m \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}}$  для простейшей задачи  $m \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{(\pi h)}$ .

В качестве критерия конца вычислений может быть выбран один из следующих:

- а)  $\|U^k - u^*\| < \varepsilon$ . Если  $u^*$  неизвестно, но известно  $\rho(H)$ , часто допустимо использовать оценку

$$\|U^k - u^*\| \leq \frac{\rho(H)}{1 - \rho(H)} \|U^k - U^{k-1}\|. \quad (50)$$

б)  $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$ .

в)  $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$ .

- г) выполнить вычисленное заранее количество итераций  $m$ , требуемое для уменьшения первоначальной погрешности в заданное число раз.

*Замечание 1.* Следует иметь в виду, что в методе с оптимальным чебышевским набором параметров количество выполняемых итераций должно быть кратно  $n$ , используемому в (22) для вычисления параметров.

## Задание

Найти решение поставленной задачи

- методом простой итерации или методом итерации с оптимальным параметром (указывается преподавателем);
- методом Зейделя;
- одним из методов 4, 5 (указывается преподавателем);
- одним из методов 6, 7 (указывается преподавателем);
- одним из методов 8-11 (указывается преподавателем).

Алгоритмы решения задачи численно реализовать по программе на алгоритмическом языке.

Желательно отлаживать программу на модельной задаче, т. е. такой, точное решение которой известно.

Требуется получить приближенное решение задачи на сгущающихся сетках при  $N = 5, 10, 20$ . Ввиду того, что в некоторых случаях может оказаться проблематичным получить решение с заданной точностью  $\varepsilon$ , независимо от используемого критерия конца вычислений, во избежание заикливания, следует поставить ограничение на количество выполняемых итераций. Обозначим его, например  $k_{\max}$ .

В отладочном варианте достаточно взять, например,  $k_{\max} = 5$ , далее  $k_{\max} = m$ , вычисленное в пункте **Выбор точности**

В качестве нулевого приближения  $U^0$  можно взять, например, вектор с нулевыми компонентами значений решения во внутренних узлах сетки.

На печать должны выводиться следующие характеристики:

- 1) Мера аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой на точном решении<sup>2</sup>  $\|F - Au^*\|$ . Здесь и в дальнейшем используется сеточный аналог нормы в  $C$

$$\|V\|_C = \max_{\substack{1 \leq i \leq N-1, \\ 1 \leq j \leq M-1}} |v_{ij}|,$$

так что в данном случае

$$\|F - Au^*\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq N-1, \\ 1 \leq j \leq M-1}} |L_h u_{ij}^* + f_{ij}|. \quad (51)$$

- 2) Норма невязки нулевого приближения  $\|F - AU^0\|$ .
- 3) Оценка количества итераций, требуемых для выполнения условия  $\frac{\|U^m - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$  или  $\frac{\|AU^m - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$  при заданном  $\varepsilon$  (0.05 - 0.001).
- 4) Спектральный радиус матрицы перехода или его оценка для задачи с переменными коэффициентами. Сравнить с экспериментальными данными (для методов 1-4).
- 5) Характеристики вычисленного в цикле с параметром  $k$  приближенного решения  $U^k$  (Таблица 1)

Таблица 1

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8
k	$\ F - AU^k\ $	rel.d.	$\ U^k - u^*\ $	rel.error	$\ U^k - U^{k-1}\ $	apost.est.	$\bar{\rho}_k$
1							—
2							
...							

Здесь

5.1 — номер итерации;

5.2 — норма невязки  $k$ -ого приближения;

5.3 — относительная невязка  $k$ -ого приближения  $\frac{\|F - AU^k\|}{\|F - AU^0\|}$ ;

5.4 — норма абсолютной погрешности  $k$ -ого приближения;

5.5 — относительная погрешность  $k$ -ого приближения  $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|}$ ;

5.6 — норма разности двух соседних приближений;

5.7 — оценка погрешности  $k$ -ого приближения  $\frac{\rho(H)\|U^k - U^{k-1}\|}{1 - \rho(H)}$  (для методов 1-4);

5.8 —  $k$ -ое приближение к спектральному радиусу матрицы  $H$  (матрицы перехода от  $U^{k-1}$  к  $U^k$ , т. е. такой, что  $U^k = HU^{k-1} + g$ ) (для методов 1-4).

<sup>2</sup>Если точное решение неизвестно, характеристики, зависящие от точного решения, опускаются.

Указание

Обозначим  $\rho_k = \frac{\|U^k - U^{k-1}\|}{\|U^{k-1} - U^{k-2}\|}$ , тогда

$$\overline{\rho_k} = \begin{cases} \sqrt{\rho_k \rho_{k-1}}, & \lambda_{\max}(H) = -\lambda_{\min}(H), \\ \rho_k, & \lambda_{\max}(H) \neq -\lambda_{\min}(H). \end{cases}$$

В отладочном варианте ( $N = 5$ ,  $M = 5$ ,  $k_{\max} = 5$ ) информацию о решении следует печатать на каждой итерации. При больших значениях  $k_{\max}$  информацию следует печатать лишь при некоторых значениях  $k$ , например, при  $k$  кратных 10 (это значение удобнее задавать константой с именем, например  $pk$ , чтобы иметь возможность легко менять его по мере необходимости).

- 6) Решение  $U^m$  или  $U^{k_{\max}}$  на “крупной” сетке. “Крупной” будем называть сетку при  $N = 5$ ,  $M = 5$  и, независимо от значений  $N$  и  $M$ , приближенное решение должно печататься только в точках этой сетки, например при  $l_x = l_y = 1$  должна быть выведена таблица со значениями решения  $U^m$  или  $U^{k_{\max}}$  следующего вида:

Таблица 2

$y \setminus x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.2						
0.4						
0.6						
0.8						
1						

- 7) Таблица точного решения на “крупной” сетке.

Проанализировать полученные результаты.

## Варианты заданий

В некоторых вариантах не указаны конкретные выражения для правых частей уравнения и граничных условий. В этих случаях их рекомендуется получить, используя предлагаемое точное решение задачи, то есть  $f(x, y) = -L(u^*(x, y))$ ,  $\mu(x, y) = u^*(x, y)|_{\Gamma}$ .

### Вариант 1

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = x^3 y + x y^2$ .

### Вариант 2

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( (1+x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с чебышевским набором параметров;

- 4) Попеременно треугольным итерационным методом.
- 5) Методом покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = y^2 + y^3(1 + x)$ .

### Вариант 3

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом;
- 5) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: выполнить вычисленное заранее количество итераций  $m$ , требуемое для уменьшения первоначальной погрешности в заданное число раз.

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = \sin x \cos y$ .

### Вариант 4

Найти решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом;

5) Методом переменных направлений Дугласа-Рекфорда.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|}$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = e^x \sin(y)$ .

### Вариант 5

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln(2+x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln(2+y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$ .

### Вариант 6

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом.



5) Методом расщепления предиктор-корректор.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = 2x^3y^3$ .

### Вариант 7

Найти решение задачи

$$Lu = 0,$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 + \sin(\pi x)) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{1+y} \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, 0) = \tan \left( \frac{\pi}{4} x \right)$$

$$u(x, 1) = xe^{(x-1)}, \quad u(0, y) = y \cos \left( \frac{\pi}{2} y \right), \quad u(1, y) = \frac{1}{1 + y(1 - y)}$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$ .

### Вариант 8

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 + 2x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;

- 3) Методом верхней релаксации.
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 5) Методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = x^2 y^2 (1 + y)$ ,

### Вариант 9

Найти решение задачи

$$\Delta u = x^2 + y^2, \quad u(x, 0) = u(0, y) = 0, \quad u(x, 1) = x^2/2, \quad u(1, y) = y^2/2$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Методом переменных направлений Дугласа-Рекфорда.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\|U^k - u^*\| < \varepsilon$ .

### Вариант 10

Найти решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации.
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 5) Методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^* = e^{2x} \sin(2y)$ .

### Вариант 11

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Методом покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\|U^k - u^*\| < \varepsilon$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = \cos x \cos y$ .

### Вариант 12

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 + x/2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом.
- 5) Методом покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\|U^k - u^*\| < \varepsilon$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = x y^2 (1 + y)$ ,

### Вариант 13

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln(2+x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln(2+y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$ .

### Вариант 14

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( (3x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации.
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 5) Методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие:  $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$ .

Отладить решение задачи на функции  $u^*(x, y) = x^2 y^2 (1+y)$ ,