ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Основные понятия теории разностных схем

Значительная часть задач, с которыми имеет дело вычислительная математика, представляет собой различные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Так, например, обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи химической кинетики, электрических цепей, движение систем взаимодействующих материальных точек и другие задачи физики, химии, техники. К дифференциальным уравнениям в частных производных приводятся задачи математической физики, гидродинамики, акустики и других областей знаний.

Все методы решения дифференциальных уравнений можно условно разбить на *аналитические* и *численные*. В свою очередь аналитические методы подразделяются на точные и приближенные. *Точные* методы позволяют выразить решение дифференциальных уравнений через элементарные функции (в аналитическом виде). *Приближенными* называются методы, в которых решение получается как предел некоторой последовательности, члены которой выражаются через элементарные функции. *Численные* методы не позволяют найти точное решение дифференциальных уравнений в аналитической форме [1]. С их помощью получается таблица приближенных (иногда точных) значений искомого решения в некоторых точках рассматриваемой области решения, именуемых сеткой. В силу этого численные методы иначе называют *разностными методами* или *методами сеток*. Численные методы применимы к широким классам дифференциальных уравнений и всем типам краевых задач для них.

С появлением быстродействующих ЭВМ эти методы стали одним из основных способов решения конкретных практических задач вычислительной математики. Однако следует отметить, что численные методы можно применять только к *хорошо обусловленным* дифференциальным задачам. Другими словами, к задачам, в которых малые изменения в начальных данных приводят к малым изменениям в их решении.

Поясним сказанное на примере [2, с. 58–59].

Пример 1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - 10y' - 11y = 0$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Решением данной дифференциальной задачи является функция

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

где λ_1, λ_2 есть корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - 10\lambda - 11 = 0$$

и равны соответственно

$$\lambda_1 = 11; \lambda_2 = -1.$$

Константы C_1 и C_2 определяются из начальных условий, что приводит к системе двух уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 11C_1 - C_2 = -1, \end{cases}$$

откуда следует

$$C_1 = 0; C_2 = 1.$$

Таким образом, решением поставленной дифференциальной задачи будет функция

$$y(x) = e^{-x},$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой в искомое уравнение.

Теперь изменим первое начальное условие на малую величину $\varepsilon > 0$, т.е. рассмотрим дифференциальную задачу

$$\begin{cases} y'' - 10y' - 11y = 0; \\ y(0) = 1 + \varepsilon,\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Тогда константы C_1, C_2 будут определяться из системы

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 + \varepsilon, \\ 11C_1 - C_2 = -1 \end{cases}$$

и примут значения

$$C_1 = \frac{\varepsilon}{12};\ C_2 = 1 + \frac{11}{12}\varepsilon.$$

Решением дифференциальной задачи с измененными начальными условиями будет функция

$$y(x) = \frac{\varepsilon}{12}\mathrm{e}^{11x} + \left(1 + \frac{11}{12}\varepsilon\right)\mathrm{e}^{-x},$$

которая при любом $\varepsilon > 0$ стремится к бесконечности при $x \to \infty$, чему способствует слагаемое $\frac{\varepsilon}{12}\mathrm{e}^{11x}$. Изобразим на рис. 1 поведение полученных двух решений при $\varepsilon = 0,2$.

Таким образом, сколь угодно малые изменения в начальных условиях вызвали сколь угодно большие изменения решения при $x \to \infty$, что означает *плохую обусловленность* поставленной дифференциальной задачи и неустойчивость решения $y(x)$.

Отметим, что *плохо обусловленные* дифференциальные задачи крайне сложно решать численными методами, так как ошибки округлений и погрешность метода оказывают такое же влияние на решение, как и изменение начальных условий.

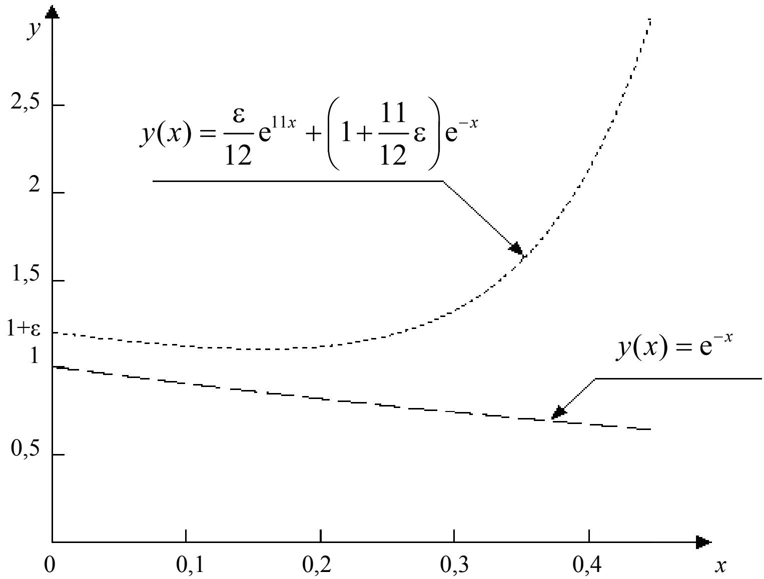

Рис. 1

В качестве упражнения рекомендуется с помощью замены

$$y' = z$$

свести поставленную задачу к эквивалентной системе первого порядка

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = 10z + 11y \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1,\ z(0) = -1$$

и решить эту систему численно любым методом (например, методом Эйлера [2, с. 32–36]), а затем проанализировать полученные результаты.

Сетки и сеточные функции

Понятия *сетки* и *сеточной функции* возникают в теории разностных схем в связи с изучением численных методов решения краевых задач математической физики. Для построения численного метода необходимо написать разностную схему, приближенно описывающую дифференциальное уравнение (или систему). Этот этап связан с заменой области непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения и с заменой дифференциального оператора некоторым его разностным аналогом, кроме того, записывается разностная аппроксимация для начальных и граничных условий. Результатом этой процедуры является алгебраическая система уравнений [1] или система разностных уравнений [3]. Численное решение краевой задачи для исходного линейного дифференциального уравнения сводится к решению полученной алгебраической системы.

Отметим, что численные методы дают ограниченную и приближенную информацию о решении, но зато являются универсальными.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного ОДУ 1-го порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = a, \tag{2}$$

где $x \in [x_0, X]$.

Предполагается, что выполнены условия существования и единственности решения задачи (1)–(2) [4].

Область непрерывного изменения аргумента $x \in [x_0, X]$ заменим дискретным множеством точек $x_j = x_0 + jh, j = 0,1,...,N,$ где $h > 0$ – малое фиксированное число. Такое множество точек называется *сеткой*, отдельные точки сетки называются её *узлами* и h – *шагом сетки*. Функция, значения которой определяются в узлах сетки, называется *сеточной* функцией.

Итак, область непрерывного изменения аргумента заменена сеткой или областью дискретного изменения аргумента.

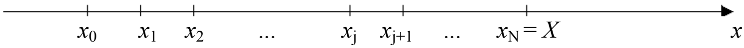

Рис. 2

В вышеприведенном примере была рассмотрена равномерная сетка на отрезке $[x_0, X]$, который разбивался на N равных частей. Шаг сетки $h = x_{i+1} - x_i = (X - x_0)/N$.

Множество всех узлов сетки будем обозначать $\omega_h = \left\{ x_j \mid x_j = x_0 + jh, j = 1, 2, ..., N \right\}$. Если в это множество включить граничную точку x_0, то будем его обозначать $\overline{\omega_h} = \left\{ x_j \mid x_j = x_0 + jh, j = \overline{0, N} \right\}$.

На отрезке $[x_0, X]$ вместо функции $y(x)$ непрерывного аргумента будем рассматривать функцию $y_j, j = \overline{0, N},$ дискретного аргумента.

Отметим, что значения сеточной функции вычисляются в узлах сетки x_j и сама функция зависит от шага сетки h как от параметра.

Если в качестве сетки рассмотреть неравномерную сетку на отрезке, то в этом случае её узлы будут расположены произвольным образом:

$$\hat{\omega}_h = \left\{ x_j \middle| j = \overline{1, N}; x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = X \right\}.$$

Если добавить к этому множеству узел x_0, то получим неравномерную сетку на $[x_0, X]$: $\hat{\overline{\omega}}_h \left[x_0, X \right]$.

Заметим, что шаг сетки $h_j = x_j - x_{j-1}$ в этом случае будет зависеть от номера узла j, т.е. является сеточной функцией.

Вернемся к ранее поставленной задаче (1) – (2). Заменим область непрерывного изменения аргумента $x \geq 0$ дискретным множеством точек $x_j = x_0 + jh,\ j = \overline{0, N},\ h = (X - x_0)/N$. Вместо функции $y(x)$ рассмотрим таблицу $x_j, y_j,\ j = 0, 1, 2, ..., N$.

Запишем уравнение (1) в произвольном внутреннем узле

$$x_j \in \omega_h = \left\{ x_j \middle| x_j = x_0 + jh, j = \overline{1, N}; h = (X - x_0)/N \right\}:$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x = x_j} = f(x_j, y(x_j)),\ j = \overline{0, N-1}. \tag{3}$$

По определению производной

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x = x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h}.$$

Заменяя в (3) производную $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x = x_j}$ конечно-разностным отношением, получим вместо дифференциального уравнения (3) разностное уравнение вида

$$\frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h} \approx f(x_j, y(x_j)),\ j = \overline{0, N-1}. \tag{4}$$

Сеточную функцию, удовлетворяющую (4), будем обозначать y_j. В результате будем иметь

$$\begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j),\ j = \overline{0, N-1}; \\ y_0 = a. \end{cases} \tag{5}$$

Разностная задача (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Разрешая *j*-е разностное уравнение в (5) относительно y_{j+1}, получим

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j, y_j),\ j = \overline{0, N-1}; \\ y_0 = a. \end{cases} \tag{6}$$

Построение вычислительного алгоритма завершено. Зная y_0, определяем y_1 из (6) при $j=0$:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) .$$

С учетом полученного значения y_1 легко определить

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

и т.д. Зная y_{N-1}, можно вычислить y_N по формуле

$$y_N = y_{N-1} + h \cdot f(x_{N-1}, y_{N-1}) .$$

Заметим, что при построении численного алгоритма пренебрегли пределом при $h \to 0$ и тем самым допустили некоторую ошибку, называемую *погрешностью аппроксимации* (производной $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}$ конечно-разностным отношением).

Алгоритм оценки погрешности аппроксимации будет изложен позже, а пока отметим, что с помощью численного метода (6), называемого *методом Эйлера*, определяется таблица значений решения y_j, $j=1,2,...,N$, $y_0 = a$. При $h \to 0$, т.е. при сгущении сетки, решение y_j должно сходиться к решению исходной задачи (1)–(2). При этом обе функции, и непрерывного аргумента $\left(y(x_j)\right)$ и дискретного аргумента $\left(y_j\right)$, рассматриваются как функции дискретного аргумента или сеточные функции.

Если $y(x)$ непрерывная функция, то ей ставится в соответствие сеточная функция $y(x_j)$ или $\left[y\right]_h$. Если же $y(x)$ терпит разрыв, то таблицей её значений на $[x_0, X]$ можно считать сеточную функцию

$$\left[y\right]_h = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} y(\xi) d\xi .$$

Условимся, что $y(x)$ – непрерывная функция, а $\left[y\right]_h$ – сеточная функция, совпадающая с $y(x)$ в точках сетки.

Понятие сходимости разностной схемы

В связи с понятием разностной схемы рассмотрим линейное нормированное пространство функций, определенных на сетке $\overline{\omega_h}$. Будем обозначать его U_h [3].

Норма может быть определена по-разному. Например, можно рассмотреть разностный аналог нормы пространства C:

$$\left\| y^{(h)} \right\|_{U_h} = \max_{0 \le j \le N} \left| y_j \right|. \tag{7}$$

Часто используется норма, определяемая равенством

$$\left\| y^{(h)} \right\|_{U_h} = \left(\sum_{j=0}^{N} h \cdot \left| y_j \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{8}$$

Норма (8) эквивалентна норме

$$\left\| y(x) \right\| = \left(\int_{x_0}^{X} \left| y(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

для функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[x_0, X]$.

Можно также принять за норму

$$\left\| y^{(h)} \right\|_{U_h} = \sup_{0 \le j \le N} \left| y_j \right|. \tag{9}$$

Пусть даны две произвольные сеточные функции $u^{(h)}$ и $v^{(h)}$ из U_h.

Определение 1. *Мерой отклонения* этих функций друг от друга считается норма их разности, т.е.

$$\left\| u^{(h)} - v^{(h)} \right\|_{U_h}.$$

Перепишем исходную дифференциальную задачу в так называемой операторной форме [3, с. 82–84, 88–89]:

$$Ly = f, \tag{10}$$

где $Ly \equiv \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}, \ x_0 \le x \le X, \\ y(x_0), \end{cases} \qquad f \equiv \begin{cases} f(x, y(x)), \ x_0 \le x \le X, \\ a. \end{cases}$

Запишем в операторной форме соответствующую разностную задачу, аппроксимирующую (10):

$$L_h y^{(h)} = f^{(h)}, \tag{11}$$

где $L_h y^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h}, \; j = \overline{0, N-1}; \\ y_0; \end{cases}$ $f^{(h)} \equiv \begin{cases} f(x_j, y_j), \; j = \overline{0, N-1}; \\ a. \end{cases}$

Заметим, что любую краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных можно записать в операторной форме в виде (10). Аналогичным образом можно записать в виде (11) соответствующую разностную краевую задачу. С учетом сказанного введем ряд важных определений, используемых в теории разностных схем.

Предполагаем, что при любом достаточно малом h решение $y^{(h)}$ задачи (11) существует и принадлежит пространству U_h.

Определение 2. Говорят, что решение $y^{(h)}$ разностной краевой задачи (11) при измельчении шага сетки *сходится* к решению y дифференциальной краевой задачи (10), если

$$\left\| [y]_h - y^{(h)} \right\|_{U_h} \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{12}$$

Если выполнено неравенство

$$\left\| [y]_h - y^{(h)} \right\|_{U_h} \le C \cdot h^k, \tag{13}$$

где $C > 0$, $k > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что имеет место *сходимость порядка* k *относительно* h или что разностная схема имеет k-й порядок точности.

Вопрос проверки сходимости разбивается на два более простых вопроса:

1) проверка аппроксимации задачи (10) задачей (11);

2) является ли устойчивой задача (11)?

Ответ на эти два вопроса требует введения математически строгих понятий *аппроксимация* и *устойчивость*.

Об аппроксимации дифференциальной краевой задачи разностной

Предположим, что разностная задача (11) имеет единственное решение $y^{(h)} \in U_h$. Если в (11) вместо $y^{(h)}$ подставить сеточную функцию $[y]_h \in U_h$ и при этом окажется, что равенство (11) будет точно выполнено, то ввиду единственности решения (11) следует, что $[y]_h = y^{(h)}$. Описанная ситуация является идеальной с точки зрения сходимости. Как правило, систему разностных уравнений трудно построить так, чтобы $[y]_h$ ей точно удовлетворяла. Подставляя в (11) $[y]_h$, получаем некоторую невязку

$$L_h[y]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}. \qquad (14)$$

За определение *аппроксимации* принимается стремление невязки $\delta f^{(h)}$ к нулю при $h \to 0$.

Поясним понятие невязки на примере разностной задачи (11). Невязка возникает за счет аппроксимации производной $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}$ конечно-разностным отношением

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j} \approx \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h}. \qquad (15)$$

Применим формулу Тейлора к функции $y(x_j + h)$ в окрестности узла $x_j \in \omega_h$, предполагая, что $y(x) \in C^2[x_0, X]$:

$$y(x_j + h) = y(x_j) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j} \frac{h^1}{1!} + \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=\bar{x}} \frac{h^2}{2!},$$

где $\bar{x} = x_j + \theta_1 \cdot h,\ \theta_1 \in (0,1)$.

Подставляя разложение $y(x_j + h)$ в (15), получим

$$\frac{y(x_j+h)-y(x_j)}{h} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j} + \frac{h}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\bar{x}}. \qquad (16)$$

Поэтому выражение

$$L_h\left[y\right]_h \equiv \begin{cases} \dfrac{y(x_j+h)-y(x_j)}{h}, \ j=\overline{0,N-1}, \\ y(x_0) \end{cases}$$

можно переписать следующим образом:

$$L_h\left[y\right]_h \equiv \begin{cases} f(x_j, y(x_j)) + \dfrac{h}{2}\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\bar{x}}, \ j=\overline{0,N-1}; \\ a. \end{cases}$$

или

$$L_h[y]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)},$$

где

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} h\cdot\left.\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]\right|_{x=\bar{x}}, \\ 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Будем считать, что $f^{(h)}$ и $\delta f^{(h)}$, заданные с помощью формул (11) и (17), принадлежат линейному нормированному пространству F_h. Под величиной невязки понимаем $\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h}$.

Определение 3. Будем говорить, что разностная схема $L_h y^{(h)} = f^{(h)}$ *аппроксимирует* задачу $Ly = f$ на решении y, если $\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} \to 0$ при $h \to 0$. Если имеет место неравенство

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} \le C_1 \cdot h^k, \qquad (18)$$

где $C_1 > 0$, $k > 0$ – некоторые постоянные, то будем говорить, что имеет место *аппроксимация порядка* h^k или порядка k относительно h.

Если норму пространства F_h определить по формуле (7), то из (17) будем иметь

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\| = \max_{0\le j\le N}\begin{cases} h\left[\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|\right]\Big|_{x=x_j} \\ 0. \end{cases}.$$

Учитывая предположение относительно $y(x)$, имеем $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ будет по модулю ограничена некоторой константой C_2.

Тогда

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} \le h\cdot\frac{1}{2}\cdot C_2 = h\cdot C_3 .$$

Согласно определению 3 имеет место аппроксимация порядка 1 относительно величины h.

Начальное условие при замене дифференциальной задачи разностной аппроксимируется точно, так как решение разностной задачи должно удовлетворять тому же самому условию, что и $y(x)$.

Заметим, что если рассматривается краевая задача 2-го или 3-го рода, когда в граничном условии содержится производная от решения, при переходе к соответствующей разностной задаче возникает погрешность аппроксимации граничных условий, влияющая на порядок аппроксимации разностной задачи.

Об устойчивости разностной схемы

Введем очень важное в теории разностных схем понятие *устойчивости* [1, с. 106–107] в случае, когда L_h – не обязательно линейный оператор.

Определение 4. Разностная схема (10.11) *называется устойчивой*, если существуют числа $h_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при любом $h < h_0$ и любом $\varepsilon^{(h)} \in F_h$, $\left\|\varepsilon^{(h)}\right\|_{F_h} < \delta$, разностная задача

$$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}, \qquad (19)$$

полученная из задачи (11) добавлением к правой части возмущения $\varepsilon^{(h)}$, имеет только одно решение $z^{(h)}$, причем это решение отклоняется от решения $y^{(h)}$ невозмущенной задачи (11) на сеточную функцию $z^{(h)} - y^{(h)}$, удовлетворяющую оценке

$$\left\| z^{(h)} - y^{(h)} \right\|_{U_h} \le C \cdot \left\| \varepsilon^{(h)} \right\|_{F_h}, \qquad (20)$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от h.

В частности, неравенство (20) означает, что малое возмущение $\varepsilon^{(h)}$ правой части разностной схемы (11) вызывает равномерно малое относительно h возмущение $z^{(h)} - y^{(h)}$ решения.

Если в (11) оператор L_h является линейным, то приведенное определение устойчивости равносильно следующему.

Определение 5. Разностная схема (11) с линейным оператором L_h *называется устойчивой*, если для любого $f^{(h)} \in F_h$ уравнение (11) имеет единственное решение $y^{(h)} \in U_h$, причем

$$\left\| y^{(h)} \right\|_{U_h} \le C \cdot \left\| f^{(h)} \right\|_{F_h},$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от h.

Доказательство эквивалентности приведенных выше определений устойчивости в случае линейного оператора L_h приведено в [1, с . 107–108].

О методах построения разностных схем

Построение разностных схем осуществляется с учетом ряда требований, предъявляемых к разностной схеме. Необходимо, чтобы разностная схема удовлетворяла следующим условиям:

1) аппроксимировала с более высоким порядком исходную дифференциальную задачу;

2) была устойчивой;

3) обладала свойством консервативности, т.е. чтобы на сетке выполнялись разностные аналоги законов сохранения [1, с. 111–114];

4) была экономичной;

5) была легко разрешимой и т.д.

Нельзя построить разностную схему, удовлетворяющую одновременно всем перечисленным требованиям. Некоторые из них вступают в противоречие друг с другом и приходится удовлетворять наиболее важным требованиям, а от каких-то нужно отказаться в угоду более существенным.

Остановимся на некоторых методах построения разностных схем [1–5].

Метод неопределённых коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов рассмотрим на примере задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x_0 \le x \le X, \\ &y(x_0) = a. \end{aligned} \qquad (25)$$

Для численного решения задачи (25) ранее методом конечных разностей была построена разностная схема [6]:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j), \;\; j = \overline{0, N-1}; \\ y_0 = a. \end{cases} \qquad (26)$$

Эта схема связывает значения искомой функции $y(x)$ в двух узлах x_j и x_{j+1}.

Построим разностную схему (26) методом неопределённых коэффициентов. Для этого разностное уравнение запишем в следующем виде:

$$L_h y^{(h)} \equiv a_0 y_j + a_1 y_{j+1} = f_j, \qquad (27)$$

где a_0 и a_1 – неопределённые коэффициенты. Постараемся подобрать их таким образом, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$L_h [y]_h \Big|_{x=x_j} = f(x_j, y(x_j)) + O\left(h^2\right). \qquad (28)$$

Воспользуемся формулой Тейлора, предполагая, что $y(x) \in C^2\left[x_0, X\right]$:

$$y(x_j + h) = y(x_j) + h \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2} \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=\tilde{x}}, \qquad (29)$$

где $\tilde{x} = x_j + \theta_1 h,\ \ \theta_1 \in (0,1)$.

Подставляя (29) в левую часть равенства (28), получим

$$L_h [y]_h \Big|_{x=x_j} = a_0 y(x_j) + a_1 \left\{ y(x_j) + h \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j} + O(h^2) \right\}. \qquad (30)$$

Определим коэффициенты a_0, a_1 так, чтобы выполнялось условие аппроксимации (28). Вначале сгруппируем слагаемые в правой части равенства (30):

$$L_h [y]_h \Big|_{x=x_j} = \left(a_0 + a_1\right) y(x_j) + a_1 h \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j} + O(h^2) = f(x_j, y(x_j)). \qquad (31)$$

Из соотношения (31) следует, что для выполнения условия аппроксимации необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0, \\ a_1 h = 1. \end{cases}$$

Имеем систему двух линейных алгебраических уравнений, которая, очевидно, допускает единственное решение

$$a_0 = -\frac{1}{h},\ a_1 = \frac{1}{h}.$$

В результате получается разностная схема

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f_j,\ j = \overline{0, N-1},$$

совпадающая с уже ранее рассмотренной схемой (26).

Для построения разностной схемы, связывающей значения искомой функции $y(x)$ в узлах x_{j-1} и x_{j+1}, методом неопределенных коэффициентов, повторим ранее приведенную процедуру.

Имеем

$$L_h y^{(h)} \equiv a_0 y_{j-1} + a_1 y_{j+1} = f_j. \tag{32}$$

Определим неизвестные коэффициенты a_0, a_1 так, чтобы имело место равенство

$$L_h \left[y\right]_h\Big|_{x=x_j} = f(x_j, y(x_j)) + O\left(h^2\right). \tag{33}$$

Используя формулу Тейлора, получим

$$y(x_j - h) = y(x_j) - h\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=\tilde{x}}, \tag{34}$$

$$y(x_j + h) = y(x_j) + h\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=\tilde{\tilde{x}}}, \tag{35}$$

где $\tilde{x} = x_j + \theta_1 h, \tilde{\tilde{x}} = x_j + \theta_2 h,\ \theta_1 \in (-1,0), \theta_2 \in (0,1)$.

Подставляя (34) и (35) в левую часть равенства (33), будем иметь

$$L_h \left[y\right]_h\Big|_{x=x_j} \equiv \left(a_0 + a_1\right) y(x_j) + \left(-a_0 h + a_1 h\right)\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_j} + O(h^2) = f(x_j, y(x_j)). \tag{36}$$

Для выполнения условия аппроксимации (36) необходимо выполнение следующих соотношений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0, \\ (-a_0 + a_1)h = 1. \end{cases}$$

Из системы имеем, что $a_0 = -\frac{1}{2h}, a_1 = \frac{1}{2h}$. Подставляя полученные значения a_0, a_1 в (32), запишем разностную схему:

$$\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} = f_j,\ j = \overline{1, N-1}\,. \qquad (37)$$

Отметим, что в построенной разностной схеме (37) используется центральная разность. В ранее рассмотренной схеме применялась правая пространственная разность.

Аналогичным образом можно построить разностную схему с левой пространственной разностью вида

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{h} = f_j,\ j = \overline{1, N}. \qquad (38)$$

Отметим, что в общем случае разностная схема может иметь шаблон, в котором узлы могут быть расположены произвольным образом друг относительно друга. При этом число неопределенных коэффициентов должно совпадать с количеством узлов. Более подробно применение данного метода к различным типам уравнений в частных производных рассматривается в [1, с. 191–200].

Метод полиномиальной аппроксимации

Рассматриваемый метод основан на применении гладкой функции со свободными параметрами [2, 7] для нахождения производных по экспериментальным данным. В качестве такой функции обычно используются полиномы.

Проиллюстрируем указанный метод для случая, когда в узлах x_{j-1}, x_j, x_{j+1} заданы значения функции y_{j-1}, y_j, y_{j+1}. Проведем аппроксимацию функции многочленом второй степени

$$y(x) = a + bx + cx^2, \qquad (39)$$

причем за начало координат ($x=0$) примем точку x_j. Тогда $x_{j-1}=-h, x_{j+1}=h$. Для определения a,b,c воспользуемся значениями y_{j-1}, y_j, y_{j+1}. Имеем

$$y_{j-1}=a+bx_{j-1}+cx_{j-1}^2,$$
$$y_j=a+bx_j+cx_j^2,$$
$$y_{j+1}=a+bx_{j+1}+cx_{j+1}^2$$

или, с учетом $x_j=0$,

$$y_{j-1}=a-bh+ch^2,$$
$$y_j=a,$$
$$y_{j+1}=a+bh+ch^2.$$

Складывая первое и последнее равенства, получим

$$y_{j+1}+y_{j-1}=2a+2ch^2$$

или

$$c=\frac{y_{j-1}-2y_j+y_{j+1}}{2h^2}.$$

Для определения коэффициента b вычтем из третьего равенства первое. Получим

$$y_{j+1}-y_{j-1}=2bh.$$

Отсюда

$$b=\frac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2h}.$$

Для определения производной воспользуемся формулой

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}=\left.(b+2cx)\right|_{x=x_j=0}=b$$

или

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}=\frac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2h}.$$

Значение второй производной

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_j}=2c$$

или

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_j}=\frac{y_{j-1}-2y_j+y_{j+1}}{h^2}.$$

Построенные формулы для первой и второй производной совпадают с формулами, полученными методом конечных разностей [8, с. 107–120, 146–151].

Если теперь аппроксимировать $y(x)$ полиномом первой степени, т.е. $y(x)=a+bx$, то в зависимости от таблицы значений функции y_j, y_{j+1} или y_{j-1}, y_j, получатся формулы для аппроксимации $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}$ правой или левой пространственными разностями соответственно.

Заметим, что аппроксимационные формулы для производных, полученные при помощи полиномов выше второго порядка, уже не идентичны выражениям, полученным разложением в ряд Тейлора [7, с. 44–45]. В каждом случае погрешность аппроксимации проверяется при помощи разложения по формуле Тейлора [Там же, с. 44].

Метод конечных разностей

Рассмотрим линейную двухточечную краевую задачу [8, с. 107–120]:

$$Ly=f,$$

где

$$Ly\equiv\begin{cases}y''+p(x)y'+q(x)y,\ 0\le x\le 1,\\ y(0),\\ y'(1),\end{cases}\qquad(40)$$

$$f\equiv\begin{cases}r(x),\ 0\le x\le 1,\\ \alpha,\\ \beta,\end{cases}$$

$p(x), q(x), r(x)$ – заданные функции, α, β – известные числа. Будем предполагать, что задача (40) корректно поставлена. Используя метод конечных разностей, называемый иначе *методом сеток*, опишем алгоритм нахождения приближенного решения задачи (40) на ПЭВМ.

Согласно методу сеток необходимо выполнить следующие действия:

1) заменить область непрерывного изменения аргумента $x \in [0,1]$ некоторой дискретной областью. Для этой цели рассмотрим, например, равномерную сетку на $[0,1]$ с $N+1$ узлами:

$$\overline{\omega_h} = \left\{ x_j \mid x_j = jh, j = \overline{0, N}, N = 1/h, h > 0 \right\};$$

2) аппроксимировать краевую задачу (40) на множестве узлов $x_j \in \overline{\omega_h}$ некоторой разностной задачей

$$L_h y^{(h)} = f^{(h)}, \tag{41}$$

где

$$y^{(h)} \in U_h, f^{(h)} \in F_h,$$

U_h – пространство сеточных функций – решений задачи (41), F_h – пространство сеточных функций – правых частей разностной задачи (41);

3) решить разностную задачу (41) каким-либо численным методом, т.е. найти приближенные значения решения $y_j \approx y(x_j)$ в узлах сетки $\overline{\omega_h}$. Под $y(x_j)$ понимаем значения решения дифференциальной задачи (40), вычисленные в узлах $x_j \in \overline{\omega_h}$, y_j – значение в узле x_j решения разностной задачи (41).

В рассматриваемом случае разностная задача (41) представляет собой систему $N+1$ линейных алгебраических уравнений относительно $N+1$ неизвестных $y_0, y_1, ..., y_N$.

При таком подходе к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений необходимо решить следующие вопросы:

1) выбрать формулы численного дифференцирования, хорошо приближающие производные из (40);

2) определить порядок аппроксимации краевой задачи разностной схемой, устойчивость разностной схемы и сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи;

3) показать разрешимость системы линейных алгебраических уравнений и указать метод её решения.

Обсудим решение каждого из перечисленных вопросов на примере поставленной задачи (40).

Выбор формул численного дифференцирования

Аппроксимируем производные из (40) в узле x_j по следующим формулам численного дифференцирования [8, с. 109]:

$$y''(x_j) \simeq \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1})}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1};$$

$y'(x_j) \simeq \dfrac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h}$ – правая разностная производная, $j = \overline{0, N-1}$,

или

$y'(x_j) \simeq \dfrac{y(x_j) - y(x_{j-1})}{h}$ – левая разностная производная, $j = \overline{1, N}$,

или

$y'(x_j) \simeq \dfrac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h}$ – центральная разностная производная,

$$j = \overline{1, N-1}.$$

Тогда вместо краевой задачи (40) получим разностную задачу (41), где

$$L_h y^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h} + q_j y_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ y_0, \\ \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} \end{cases} \tag{42}$$

или

$$L_h y^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \dfrac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ y_0, \\ \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h}, \end{cases} \tag{43}$$

а

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} r_j, \; j = \overline{1, N-1}, \\ \alpha, \\ \beta. \end{cases}$$

Определение порядка аппроксимации дифференциальной задачи разностной

Исследуем погрешность от замены производных из (40) по формулам численного дифференцирования, предполагая, что функция $y(x)$ обладает достаточной гладкостью. Разложим $y(x_{j\pm 1})$ в окрестности x_j по формуле Тейлора. Будем иметь

$$y(x_{j\pm1}) = y(x_j \pm h) = y(x_j) \pm h y'(x_j) + \\ + \frac{h^2}{2} y''(x_j) \pm \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \frac{h^4}{4!} y^{IV}(x_j) + O(h^5),$$

где $O(h^5)$ означает, что остаточный член разложения стремится к нулю при $h \to 0$, как h^5.

Тогда

$$\frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1})}{h^2} = y''(x_j) + \frac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1),$$

где $x_{j-1} < \xi_1 < x_{j+1}$. Аналогично получаем

$$\frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h} = y'(x_j) + \frac{h^2}{6} y'''(\xi_2),$$

где $x_{j-1} < \xi_2 < x_{j+1}$;

$$\frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} = y'(x_j) + \frac{h}{2} y''(\xi_3),$$

где $x_j < \xi_3 < x_{j+1}$;

$$\frac{y(x_N) - y(x_{N-1})}{h} = y'(x_N) - \frac{h}{2} y''(\xi_4),$$

где $x_{N-1} < \xi_4 < x_N$.

Определяем теперь невязку $\delta f^{(h)}$ по формуле

$$L_h[y]_h - f^{(h)} = \delta f^{(h)},\ [y]_h \in U_h;\ f^{(h)}, \delta f^{(h)} \in F_h.$$

При использовании правой разностной производной имеем

$$L_h[y]_h \equiv \begin{cases} y''(x_j) + p_j y'(x_j) + q_j y(x_j) + \frac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1) + \frac{h}{2} y''(\xi_3) p_j, \\ y(x_0), \\ y'(x_N) - \frac{h}{2} y''(\xi_4), \end{cases}$$

$$f \equiv \begin{cases} r_j,\ j = \overline{1, N-1}, \\ \alpha, \\ \beta. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\delta f^{(h)} \equiv \begin{cases} -\dfrac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1) - \dfrac{h}{2} p_j y''(\xi_3) \equiv \delta f_1^{(h)}, \\ 0 \equiv \delta f_2^{(h)}, \\ \dfrac{h}{2} y''(\xi_4) \equiv \delta f_3^{(h)}. \end{cases}$$

При замене $y'(x_j)$ центральной разностной производной получаем

$$\delta f^{(h)} \equiv \begin{cases} -\dfrac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1) - \dfrac{h^2}{6} p_j y'''(\xi_2) \equiv \delta f_1^{(h)}, \\ 0 \equiv \delta f_2^{(h)}, \\ \dfrac{h}{2} y''(\xi_4) \equiv \delta f_3^{(h)}. \end{cases}$$

Из проведенных исследований заключаем, что разностные схемы (42), (43) аппроксимируют дифференциальную задачу (40) на решении $y(x) \in C^4[0,1]$ с локальной ошибкой (ошибкой на одном шаге) $O(h)$. Отметим, что порядок аппроксимации разностной схемы (43) можно повысить до второго относительно h, если аппроксимировать $y'(x_N)$ по формуле численного дифференцирования [10, с. 57–59]:

$$\frac{3y(x_N) - 4y(x_{N-1}) + y(x_{N-2})}{2h} = y'(x_N) - \frac{h^2}{3} y'''(\xi_5),$$

где $x_{N-2} < \xi_5 < x_N$.

Тогда невязка $\delta f^{(h)}$ принимает вид

$$\delta f^{(h)} \equiv \begin{cases} -\dfrac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1) - \dfrac{h^2}{6} p_j y'''(\xi_2) \equiv \delta f_1^{(h)}, \\ 0 \equiv \delta f_2^{(h)}, \\ \dfrac{h^2}{3} y'''(\xi_5) \equiv \delta f_3^{(h)}. \end{cases} \tag{44}$$

Получим оценку $\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h}$ из (44). Имеем

$$\left| y''(x_j) - \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} \right| \le \frac{h^2}{12} \left\| y^{IV} \right\|_C ,$$

$$\left| p(x_j) y'(x_j) - p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} \right| \le \frac{h^2}{6} \left\| p \right\|_C \cdot \left\| y''' \right\|_C ,$$

$$\left| y'(x_N) - \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} \right| \le \frac{h^2}{3} \left\| y''' \right\|_C .$$

Здесь

$$p_j = p(x_j), \;\; j = \overline{1, N-1}, \;\; \left\| p \right\|_C = \max_{x \in [0,1]} \left| p(x) \right| ,$$

$$\left\| y^{\mathrm{IV}} \right\|_C = \max_{x \in [0,1]} \left| y^{\mathrm{IV}}(x) \right| , \; \left\| y''' \right\|_C = \max_{x \in [0,1]} \left| y'''(x) \right| .$$

Пусть $\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} = \max_{1 \le i \le 3} \left| \delta f_i^{(h)} \right|$. Тогда получаем

$$\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} \le C \cdot h^2 ,$$

где C – некоторая не зависящая от h постоянная.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в случае разностных схем (42), (43)

$$\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} \le C \cdot h.$$

Устойчивость разностной схемы и сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной. Вопросы разрешимости разностной задачи

Разностную задачу (42) запишем в виде

$$\begin{cases} y_0 = \alpha; \\ \dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h} + q_j y_j = r_j , \; j = \overline{1, N-1}; \\ y_N - y_{N-1} = \beta h \end{cases} \qquad (45)$$

или

$$A\overline{y}=\overline{b}, \qquad (46)$$

где $\overline{y}=(y_0,y_1,...,y_N)^T$, $\overline{b}=(\alpha,h^2r_1,...,h^2r_{N-1},\beta h)^T$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2-hp_1+q_1h^2 & 1+hp_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2-hp_2+q_2h^2 & 1+hp_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2-hp_{N-1}+q_{N-1}h^2 & 1+hp_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A системы линейных алгебраических уравнений (46) является трехдиагональной с доминирующей главной диагональю, если при $0\le x\le 1$ функция $q(x)\le 0$. Это условие гарантирует существование единственного решения разностной краевой задачи (42), причем, решение может быть получено методом прогонки [11, с. 18–21].

В самом деле, задачу (45) можно привести к виду

$$\begin{cases} A_j y_{j-1}-C_j y_j+B_j y_{j+1}=F_j,\ j=\overline{1,N-1}, \\ y_0-æ_0\, y_1=\gamma_0, \\ y_N-æ_N\, y_{N-1}=\gamma_N, \end{cases} \qquad (47)$$

где

$$A_j=\frac{1}{h^2},\ C_j=\frac{2}{h^2}+\frac{p_j}{h}-q_j,\ B_j=\frac{1}{h^2}+\frac{p_j}{h},$$
$$F_j=r_j,\ æ_0=0,\ \gamma_0=\alpha,\ æ_N=1,\ \gamma_N=\beta h.$$

При этом должны выполняться следующие достаточные условия устойчивости метода прогонки [10, с. 161–166]:

$$\left|C_j\right|\ge\left|A_j\right|+\left|B_j\right|,\ \left|æ_0\right|<1,\ \left|æ_N\right|\le 1. \qquad (48)$$

Неравенства (48) справедливы, если $q(x)\le 0$ при $x\in[0,1]$.

Аналогичными исследованиями можно показать существование и единственность решения разностной задачи (43).

Чтобы доказать устойчивость разностных схем (42), (43), требуется показать выполнение неравенства

$$\left\| y^{(h)} \right\|_{U_h} \le C \cdot \left\| f^{(h)} \right\|_{F_h}. \qquad (49)$$

Здесь C – некоторая постоянная, не зависящая ни от h, ни от $f^{(h)}$.

С доказательством устойчивости можно познакомиться в [10, с. 207–209].

Таким образом, разностная схема (42) аппроксимирует краевую задачу (40) с первым порядком относительно h и устойчива, если [Там же, с. 205]

$$h < h_0 = \min\left\{1, \frac{2}{\|p\|_C}\right\}.$$

Тогда согласно основной теореме теории разностных схем [6, с. 14] получаем, что решение разностной задачи (42) будет сходиться к решению дифференциальной задачи (40) с первым порядком относительно h, т.е.

$$\left\| [y]_h - y^{(h)} \right\|_{U_h} \le Kh,$$

где K – постоянная, не зависящая от h.

Итак, решая систему линейных алгебраических уравнений (47) экономичным методом прогонки, получаем приближенные значения $y_0, y_1, ..., y_N$ решения краевой задачи 40) в узлах сетки $\overline{\omega_h}$.

Замечание 2. Метод сеток применяется для решения краевой задачи (40) при $q(x) > 0$, когда условия (48) не выполняются. Однако в этом случае заранее предвидеть успешный результат трудно. Обычно проводят расчеты для разных значений шага (не менее трех) и сравнивают y_i в одних и тех же узлах сетки между собой. Если разность этих значений уменьшается при измельчении шага, то решение стремится к некоторому пределу при $h \to 0$.

Исследование устойчивости разностных схем

Каноническая форма записи разностной схемы

Введем новые обозначения:

$$u_j = y_j,\ R_h = (1 - hA),\ \rho_j = f_j. \qquad (59)$$

Тогда разностное уравнение запишется в виде

$$\begin{cases} u_{j+1} = R_h u_j + h\rho_j, \\ u_0 - \text{задано}, \end{cases} \qquad (60)$$

который в дальнейшем будем называть *канонической формой*. Используя (60) и полагая $j = 0,1,2,...,$ получим

$$\begin{aligned}
&u_1 = R_h u_0 + h\rho_0, \\
&u_2 = R_h^2 u_0 + h\left[R_h\rho_0 + \rho_1\right], \\
&u_3 = R_h^3 u_0 + h\left[R_h^2\rho_0 + R_h\rho_1 + \rho_2\right], \\
&.\ . \\
&u_j = R_h^j u_0 + h\left[R_h^{j-1}\rho_0 + R_h^{j-2}\rho_1 + ... + \rho_{j-1}\right].
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\max_{0\le j\le N} u_j \le \max_{1\le j\le N} R_h^j \left[u_0 + hN \max_{0\le j<N} \rho_j \right]. \qquad (10.61)$$

Заметим, что теперь в пространствах U_h, F_h нормы определяются следующим образом:

$$y^{(h)}{}_{U_h} = \max_{0\le j\le N} u_j \ , \quad f^{(h)}{}_{F_h} = \max\left[u_0 \ , \max_{0\le j<N} \rho_j \right].$$

Из (10.61) следует (учитываем, что $hN = 1$), что

$$y^{(h)}{}_{U_h} \le \max_{1\le j\le N} R_h^j \cdot 2 \cdot f^{(h)}{}_{F_h}.$$

Доказательство устойчивости будет завершено, если будет показана равномерная относительно h ограниченность совокупности чисел R_h^j, т.е. доказана справедливость оценки

$$R_h^j \le C,\ j = 1,2,...,N.$$

Имеем

$$\left|R_h^j\right| \le \left|1 - hA\right|^j \le (1 + h\left|A\right|)^N \le e^{|A|} = C.$$

Это и доказывает устойчивость схемы.

Спектральный признак устойчивости

Для оценки ограниченности $\|R_h\|$ можно воспользоваться собственными значениями матрицы R_h. Это утверждение легко вытекает из определения ненулевого собственного вектора $\bar{u}$, соответствующего собственному значению λ матрицы R_h. В самом деле, по определению имеем $R_h\bar{u} = \lambda\bar{u}$. Далее очевидно, что $R_h^j\bar{u} = \lambda^j\bar{u}$, $\|R_h^j\bar{u}\| = |\lambda|^j\|\bar{u}\|$, $\|R_h^j\bar{u}\| \le \|R_h^j\|\cdot\|\bar{u}\|$. Тогда $\|R_h^j\| \ge |\lambda|^j$.

Таким образом, для ограниченности $\|R_h^j\|$ необходимо, чтобы были ограничены степени собственных значений $|\lambda|^j$, $j = \overline{1,N}$. Для этого все собственные значения должны лежать в круге радиуса $1 + C\cdot h$, т.е.

$$|\lambda| \le 1 + C\cdot h, \qquad (62)$$

причем C не зависит от h.

Легко видеть, что в противном случае, для достаточно малого h, будем иметь

$$\|R_h^j\| \ge |\lambda|^N > (1+Ch)^{1/h} = \mathrm{e}^{\frac{1}{h}\ln(1+Ch)} \ge \mathrm{e}^{C\left(1-\frac{Ch}{2}\right)} \ge \mathrm{e}^{C/2}. \qquad (63)$$

Рассмотренный признак устойчивости не зависит ни от выбора нормы в пространстве, где действует оператор R_h, ни от способа приведения схемы к канонической форме [3, с. 138–139].

Исследование устойчивости на конкретных примерах

Проиллюстрируем применение изложенной теории к решению конкретных примеров.

Пример 2. Исследуем с помощью необходимого признака устойчивость следующей разностной схемы:

$$
\begin{cases}
4\dfrac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2h}-3\dfrac{y_{j+1}-y_j}{h}+Ay_j=0, \quad j=\overline{1,N-1}; \\
y_0=a; \\
y_1=(1-hA)a,
\end{cases}
\tag{64}
$$

аппроксимирующей дифференциальную задачу при $f(x)=0$.

Запишем схему (64) в канонической форме:

$$
u_j=R_h u_{j-1}, \quad j=\overline{1,N},
$$

где

$$
u_j=\begin{pmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{pmatrix}, \quad \rho_j\equiv 0, \quad R_h=\begin{pmatrix} 3+hA & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_0=\begin{pmatrix} (1-hA)a \\ a \end{pmatrix}.
$$

Определим собственные значения матрицы R_h, как корни характеристического уравнения

$$
\lambda^2-(3+hA)\lambda+2=0 .
$$

Тогда

$$
\lambda_{1,2}=\frac{3+hA}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3+hA}{2}\right)^2-2}
$$

и

$$
\lambda_1=\frac{3+hA}{2}+\sqrt{\frac{1+6hA+h^2A^2}{4}}, \quad \lambda_2=\frac{3+hA}{2}-\sqrt{\frac{1+6hA+h^2A^2}{4}}.
$$

$\lambda_1(h)$ при $h\to 0$ стремится к 2, т.е. при малых h имеем

$$
|\lambda_1|>\frac{3}{2}>1, \quad |\lambda_2|\to 1,
$$

поэтому схема будет неустойчивой. При любом разумном выборе норм в этом примере неустойчивость сохраняется [3, с. 141].

Заметим, что расположение спектра оператора R_h внутри круга $|\lambda|<1+C\cdot h$ не гарантирует устойчивость. В этом случае устойчивость зависит от выбора норм

Задания

Задание 1. Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему для соответствующего дифференциального уравнения (использовать предложенный шаблон).

Варианты заданий	***Шаблон***
Вариант № 1. $y'' + y = \sin x$	$\overset{\bullet}{i-1} \quad \overset{\bullet}{i} \quad \overset{\bullet}{i+1}$
Вариант № 2. $y'' - (2x^2 + 4)y = 2$	$\overset{\bullet}{i-1} \quad \overset{\bullet}{i+1} \quad \overset{\bullet}{i+2}$
Вариант № 3. $y'' + 2y = \sin x$	$\overset{\bullet}{i-2} \quad \overset{\bullet}{i-1} \quad \overset{\bullet}{i+1} \quad \overset{\bullet}{i+2}$
Вариант № 4. $y'' + \dfrac{y}{4x^2} = 1$	$\overset{\bullet}{i-1} \quad \overset{\bullet}{i} \quad \overset{\bullet}{i+1}$
Вариант № 5. $y'' - y = \cos x$	$\overset{\bullet}{i-1} \quad \overset{\bullet}{i} \quad \overset{\bullet}{i+1}$
Вариант № 6. $y'' + (x^2 + 0,5)y = 1$	$\overset{\bullet}{i-2} \quad \overset{\bullet}{i-1} \quad \overset{\bullet}{i}$
Вариант № 7. $y'' + (x^2 + 4)y = 1$	$\overset{\bullet}{i-1} \quad \overset{\bullet}{i} \quad \overset{\bullet}{i+1}$
Вариант № 8. $y'' + y = e^x$	$\overset{\bullet}{i-2} \quad \overset{\bullet}{i-1} \quad \overset{\bullet}{i} \quad \overset{\bullet}{i+1} \quad \overset{\bullet}{i+2}$
Вариант № 9. $y'' - y = \sin x$	$\overset{\bullet}{i-1} \quad \overset{\bullet}{i} \quad \overset{\bullet}{i+2}$
Вариант № 10. $y'' - (x^2 + 3)y = 2$	$\overset{\bullet}{i-2} \quad \overset{\bullet}{i-1} \quad \overset{\bullet}{i+1}$

Вариант № 11.

$y'' - (x+4)y = 2$

$i-2 \quad i-1 \quad i+1 \quad i+2$

Вариант № 12.

$y'' - (x^2+1)y = e^{-x}$

$i-1 \quad i+1 \quad i+2$

Вариант № 13.

$y'' - 4y + x^2 = \ln x$

$i-1 \quad i \quad i+1$

Задание 2.

1. Оценить погрешность аппроксимации указанной ниже дифференциальной задачи данной разностной схемой.

2. Привести разностную схему к каноническому виду и исследовать её на устойчивость с помощью спектрального признака.

Вариант № 1.

$$Lu \equiv \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} - \left(1+x^2\right)u, \ 0 \le x \le 1; \\ u(0); \\ \dfrac{du(0)}{dx}, \end{cases} \qquad f \equiv \begin{cases} \sqrt{x}, \ 0 \le x \le 1; \\ 2; \\ 1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \left(1 + x_i^{\,2}\right)u_i, \ i = \overline{1, N-1}; \\ u_0; \\ \dfrac{u_1 - u_0}{h}, \end{cases} \qquad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sqrt{ih}, \ i = \overline{1, N-1}; \\ 2; \\ 1. \end{cases}$$

Вариант № 2.

$$Lu \equiv \begin{cases} u'' - \left(1+x^2\right)u, \ 0 \le x \le 1; \\ u(0); \\ u(1), \end{cases} \qquad f \equiv \begin{cases} \sqrt{x+1}, \ 0 \le x \le 1; \\ 2; \\ 1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \left(1 + x_i^{\,2}\right)u_i, \ \ i = \overline{1, N-1}; \\ u_0; \\ u_N, \end{cases} \qquad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sqrt{x_i + 1}, \ i = \overline{1, N-1}; \\ 2; \\ 1. \end{cases}$$

Вариант № 3.

$$Lu \equiv \begin{cases} v' + xw, \ 0 \le x \le 1; \\ w' + \dfrac{v+w}{1+x^2}; \\ v(0); \\ w(0), \end{cases} \qquad f \equiv \begin{cases} x^2 - 3x + 1, \ 0 \le x \le 1; \\ \cos^2 x; \\ 1; \\ -3, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{v_{i+1} - v_i}{h} + x_i w_i, \ \ i = \overline{0, N-1}; \\ \dfrac{w_{i+1} - w_i}{h} + \dfrac{v_i + w_i}{1 + x_i^2}; \\ v_0; \\ w_0, \end{cases} \qquad f^{(h)} \equiv \begin{cases} x_i^2 - 3x_i + 1, \ i = \overline{0, N-1}; \\ \cos^2 x_i; \\ 1; \\ -3. \end{cases}$$

Вариант № 4.

$$Lu \equiv \begin{cases} v' + xv, \ 0 \le x \le 1; \\ w' + (1+x^2)(v+w); \\ v(0); \\ w(0), \end{cases} \qquad f \equiv \begin{cases} \sin x, \ 0 \le x \le 1; \\ \mathrm{tg} x; \\ 2; \\ -1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{v_i - v_{i-1}}{h} + x_i v_i, \ i = \overline{1, N}; \\ \dfrac{w_i - w_{i-1}}{h} + (1 + x_i^2)(v_i + w_i); \\ v_0; \\ w_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sin x_i, \ i = \overline{1, N}; \\ \mathrm{tg} x_i; \\ 2; \\ -1. \end{cases}$$

Вариант № 5.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + Au, \ A = \mathrm{const}, \ \ 0 \le x \le 1; \\ u(0), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \sin x, \ 0 \le x \le 1; \\ 4, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} 3\dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} + Au_i, \ i = \overline{1, N-1}; \\ u_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sin x_i, \ i = \overline{1, N-1}; \\ 4. \end{cases}$$

Вариант № 6.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + Au, \ A = \mathrm{const}, \ \ 0 \le x \le 1; \\ u(0), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \cos x, \ 0 \le x \le 1; \\ 2, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{4h} + \dfrac{u_{i+1} - u_i}{2h} + Au_i, \ i = \overline{1, N-1}; \\ u_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \cos x_i, \ i = \overline{1, N-1}; \\ 2. \end{cases}$$

Вариант № 7.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + Au, \ A = \mathrm{const}, \ \ 0 \le x \le 1; \\ u(0), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \mathrm{tg} x, \ 0 \le x \le 1; \\ 1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{4h} + \dfrac{u_{i+1} - u_i}{2h} + Au_i, \ i = \overline{1, N-1}; \\ u_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \mathrm{tg} x_i, \ i = \overline{1, N-1}; \\ 1. \end{cases}$$

Вариант № 8.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + Au,\ A = \text{const}, \quad 0 \le x \le 1; \\ u(0), \end{cases} \qquad f \equiv \begin{cases} \cos x,\ 0 \le x \le 1; \\ 1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} 4\dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - 3\dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} + Au_i,\ i = \overline{1, N-1}; \\ u_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \cos x_i,\ i = \overline{1, N-1}; \\ 1. \end{cases}$$

Вариант № 9.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + Au,\ A = \text{const}, \quad 0 \le x \le 1; \\ u(0), \end{cases} \qquad f \equiv \begin{cases} \sin x,\ 0 \le x \le 1; \\ 1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h} + A\dfrac{u_i + u_{i+1}}{2},\ i = \overline{0, N-1}; \\ u_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sin x_i,\ i = \overline{0, N-1}; \\ 1. \end{cases}$$

Вариант № 10.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' - 5u,\ 0 \le x \le 1; \\ u(0), \end{cases} \qquad f \equiv \begin{cases} \text{tg} x,\ 0 \le x \le 1; \\ 1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - 5u_i,\ i = \overline{1, N-1}; \\ u_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \text{tg} x_i,\ i = \overline{1, N-1}; \\ 1. \end{cases}$$

Вариант № 11

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + xu,\ 0 \le x \le 1, \\ u(0), \end{cases} \qquad f \equiv \begin{cases} \cos x,\ 0 \le x \le 1; \\ 3, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + x_i u_i,\ i = \overline{1, N-1}; \\ u_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \cos ih,\ i = \overline{1, N-1}; \\ 3. \end{cases}$$

Литература

1. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М. : Наука, 1971. 552 с.
2. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1986. 288 с.
3. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М. : Наука, 1977. 439 с.
4. *Дьяченко В.Ф.* Основные понятия вычислительной математики. М. : Наука, 1977. 126 с.
5. *Рихтмайер Р.Д., Мортон К.В.* Разностные методы решения краевых задач. М. : Мир, 1972. 418 с.
6. *Элементы* теории разностных схем : метод. указания. Томск : Изд-во ТГУ, 1992. Ч. 1. 17 с.
7. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М. : Мир, 1980. 616 с.
8. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. М. : Наука, 1977. Т. 2. 399 с.
9. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М. : Наука, 1989. 430 с.
10. *Волков Е.А.* Численные методы. М. : Наука, 1987. 248 с.
11. *Точные* методы решения систем линейных алгебраических уравнений : метод. указания. Томск : Изд-во ТГУ, 1990. 34 с.