ЛЕКЦИЯ 3. ОТНОШЕНИЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

ЗАМЫКАНИЯ ОТНОШЕНИЙ

Определение. *Замыканием* отношения R относительно некоторого свойства C называется такое R', что

1. R' является расширением R (т.е. $R' \supseteq R$).
2. R' обладает свойством C.
3. Из всех отношений, обладающих свойствами 1 и 2, R' является наименьшим (т.е. содержится в любом таком отношении).

То, что наименьшее существует, доказывается так: возьмём пересечение всех отношений, обладающих свойствами 1 и 2 – это и будет R'. Правда, может вообще не быть ни одного отношения со свойствами 1 и 2 – тогда о замыкании говорить бессмысленно.

РЕФЛЕКСИВНОЕ ЗАМЫКАНИЕ

Для графа: нарисовать все петли.

Для матрицы: на диагонали поставить 1.

СИММЕТРИЧНОЕ ЗАМЫКАНИЕ

Для графа: сделать все стрелки двойными.

Для матрицы: все единицы отразить симметрично диагонали.

ТРАНЗИТИВНОЕ ЗАМЫКАНИЕ

Теорема 1 (*о транзитивном замыкании*). Пусть $|A| = n$ и R - отношение на A. Тогда

$$R'_{тр} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = R^{\infty}.$$

Доказательство. В одну сторону очевидно: для любого k $R^k \subseteq R'_{тр}$. Чтобы доказать в обратную сторону, нужно показать, что R^{∞} транзитивно. В самом деле:

$$aR^{\infty}b \,\&\, bR^{\infty}c \Rightarrow (\exists k : aR^k b) \,\&\, (\exists l : bR^l c) \Rightarrow aR^{k+l}c \Rightarrow aR^{\infty}c.$$

Теорема (*о степени отношения*). Пусть $|A| = n$ и R - отношение на A. Тогда, если пара $xR^m y$ при некотором m, то найдется $k \le n$ такое, что $xR^k y$.

Доказательство. Если $m \le n$, то доказывать нечего. Пусть $m > n$. Из условия теоремы найдётся путь длины $m > n$: $x \to z_1 \to \ldots \to z_{m-1} \to y$. Поскольку $m > n$, то среди $x, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ найдутся два одинаковых элемента. Выбросим из этого пути всё, что между ними – путь сократится хотя бы на 1. Так может делать до тех пор, пока $m > n$.

Теорема 2 (*о транзитивном замыкании*). Пусть $|A| = n$ и R - отношение на A. Тогда

$$R'_{тр} = \bigcup_{k=1}^{n} R^k \text{, а его матрица – } R \vee R^2 \vee \ldots \vee R^n.$$

Доказательство. Из теоремы о степени отношения $\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = \bigcup_{k=1}^{n} R^k$.

Пример. Рассмотрим простой цикл длины 4. Этот пример показывает, что **уменьшить n нельзя**!

Для графа: замкнуть все пути стрелками (в т.ч. петлями).

Для матрицы: вычислить $R^1 \vee R^2 \vee \ldots \vee R^n$.

АЛГОРИТМ УОРШАЛЛА*

Вычисление матрицы транзитивного замыкания по последней формуле имеет сложность $O(n^4)$. Алгоритм Уоршалла сокращает её до $O(n^3)$:

```
for k from 1 to N do
      for i from 1 to N do
            for j from 1 to N do
                  if(R[i,k]*R[k,j]=1) then
                        R[i,j]:=1;
                  end if;
            end do
      end do;
end do:
```

Задание: **найти описание и доказательство алгоритма Уоршалла.**

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ОТНОШЕНИЙ

ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Определение. Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется отношением *эквивалентности*.

Обозначение: $\equiv$ или $\sim$ или даже просто $=$

Примеры:

1. Конгруэнтность фигур (сейчас говорят снова «равенство», хотя это неверно!)
2. Равновеликость фигур
3. Параллельность прямых (а перпендикулярность – нет!)
4. Равномощность множеств
5. Одинаковая чётность
6. Одинаковый остаток при делении на заданное число n
7. Принадлежность переменных в программе к одному типу
8. Принадлежность студентов в вузе к одной группе

Классы эквивалентности

Определение. Будем называть классом эквивалентности $[x]$ множество всех элементов, эквивалентных заданному x.

Теорема. Любое отношение эквивалентности R на множестве A задаёт некоторое разбиение этого множества на непересекающиеся подмножества. Наоборот: любое разбиение A на непересекающиеся множества задаёт на нём некоторое отношение эквивалентности.

Доказательство. Предположим, что два класса [x] и [y] пересекаются. Тогда $\exists z : z \sim x \,\&\, z \sim y$. Но тогда по транзитивности $x \sim y$ и классы [x] и [y] совпадают.

Примеры:

Рассмотреть соответствующие классы эквивалентности из примеров 1-8.

ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА

Определение. Антисимметричное транзитивное отношение называется отношением *порядка*.

- Если оно рефлексивное – то *нестрого* порядка.
- Если оно антирефлексивное – то *строго* порядка.

Обозначение: $<, \le, \prec, \prec$.

Определение. Если отношение порядка обладает полнотой (линейностью), то оно называется отношением *линейного порядка*, если нет – *частичного порядка*. Множество A при этом называется *линейно упорядоченным* или *частично упорядоченным*.

Примеры:

1. $<, >, \le, \ge$
2. Включение множеств $\subset, \supset, \subseteq, \supseteq$
3. Отношение делимости: $a \vdots b$ или $b \mid a$
4. Лексикографический порядок на словах
5. Последовательность чтения глав в учебнике
6. Последовательность выполнения технологических операций

Топологическая сортировка

Определение 1. Элемент $a \in A$ называется минимальным, если $\neg \exists x : x \prec a$

Определение 2. Элемент $a \in A$ называется наименьшим, если $\forall x : a \prec x$

Примеры:

1. В множестве натуральных чисел есть наименьший (он же минимальный) – это 1.
2. В множестве целых чисел нет наименьшего и нет минимальных.
3. В булеане есть наименьший - $\varnothing$
4. Рассмотрим все НЕпустые подмножества. Теперь нет наименьшего, зато много минимальных!

Теорема 1. Если наименьший элемент существует, то он единственный.

Доказательство: из антисимметричности.

Теорема 2. В любом конечном множестве есть хотя бы один минимальный элемент.

Доказательство. Выбросим одинаковые пары и рассмотрим отношение *строгого* порядка. Строим цепочку элементов $a_1 \succ \ldots \succ a_k$. Если очередной элемент найти нельзя, то он минимальный. Если всегда можно, то рано или поздно будет совпадение $a_k = a_i, i < k$, но с другой стороны из транзитивности получаем $a_i \succ a_k$ - противоречие.

Теорема 3. Любой частичный порядок может быть продолжен до полного порядка.

Доказательством служит **алгоритм топологической сортировки**: на каждом шаге выбираем минимальный элемент и исключаем его из множества. Все элементы выписываем в порядке их выбора: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Это перечисление задаёт отношение линейного порядка:

$$a_i \prec a_j \Leftrightarrow i < j .$$

Легко видеть, что оно будет продолжением исходного: нет таких $i < j$, что $a_i \succ a_j$, поскольку a_i был выбран как минимальный из оставшихся к этому моменту.

Теорема 4. Если в ориентированном графе нет циклов, то его вершины можно расположить на прямой так, что все стрелки будут направлены вправо (влево).

Доказательство. Пусть в орграфе нет циклов. Построим его транзитивное замыкание. Полученный граф будет транзитивным и антисимметричным, т.е. задаёт отношение частичного порядка. Продолжим его до полного порядка по теореме 3.

Диаграммы Хассе

Определение. Диаграммой Хассе называется граф, вершинами которого являются элементы упорядоченного множества A, расположенные по уровням так, что:

1. если $x \prec y$, то x расположен ниже;
2. если между ними нет z, то они соединяются линией.

Полученный граф называют *транзитивным сокращением* исходного отношения (выброшены промежуточные элементы).

Диаграмму Хассе можно построить, используя всё тот же алгоритм топологической сортировки.

Пример. Диаграмма Хассе для булеана множества A={1,2,3}.

ФУНКЦИИ*

Определение. Отношение $R \subseteq A \times B$ называется функциональным отношение или функцией (отображением), если каждый элемент множества A содержится не более, чем в одной паре:

$$\forall a \in A(aRb_1 \,\&\, aRb_2 \Rightarrow b_1 = b_2).$$

Обозначение: вместо aRb пишут $b = R(a)$.

Примеры:

1. Числовые функции одной переменной
2. Числовые функции нескольких переменных
3. Функции комплексного переменного
4. Вектор-функции
5. Отображения в геометрии
6. Отображения функциональных пространств

Определение 2. Множество $D(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B : aRb\}$ называется *областью определения* отображения R, а множество $Q(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A : aRb\}$ - *областью значений* отображения R.

Определение 3. Отображение называется *инъективным*, если:

$$\forall a_1, a_2 \in A \;\; (a_1Rb \,\&\, a_2Rb \Rightarrow a_1 = a_2).$$

Определение 4. Отображение называется *сюръективным*, если:

$$\forall b \in B \;\; \exists a \in A: \;\; aRb.$$

Определение 5. Отображение называется *биективным*, если оно инъективно и сюръективно.