СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель:
моделирование случайных величин с заданным законом распределения; сравнительный анализ теоретических и экспериментальных зависимостей.

Задачи:
получить гистограмму для закона распределения, сравнить полученную гистограмму с соответствующим графиком плотности вероятности *f(x)* в соответствии с заданием, найти выборочные характеристики положения и рассеивания сравнить с генеральными.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Моделированием случайной величины (СВ) называют процесс получения на ЭВМ последовательности ее выборочных значений. СВ обычно моделируют с помощью преобразований одного или нескольких независимых значений СВ, равномерно распределенных в интервале (0; 1). Обозначим независимые СВ, равномерно распределенные в (0; 1), через a с различными индексами: α_1, α_2, …, α_k. . . В системе математического обеспечения практически любой ЭВМ имеется стандартная подпрограмма программа моделирования α — «датчик» реализации псевдослучайной величины с равномерным распределением на интервале (0; 1).

Стандартным методом моделирования непрерывной СВ ξ с функцией распределения F(x), когда существует обратная к ней $F^{-1}(x)$, является использование алгоритма вида (метод обратных функций):

$$\xi = F^{-1}(\alpha).$$

Этот алгоритм можно использовать в тех случаях, когда существует аналитическое выражение для $F^{-1}(x)$ либо в математическом обеспечении имеется стандартная процедура, вычисляющая эту функцию.

Для дискретной СВ ξ с законом распределения $p_k = P\{\xi = x_k\}$, к = 0,1,2,..., универсальный алгоритм реализует «метод вычитания». Реализация этого алгоритма предполагает наличие в памяти ЭВМ всего набора чисел $p_к$, k = 0,1,2,...

Ниже приведены алгоритмы моделирования наиболее распространенных непрерывных распределений.

Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in (-\infty, +\infty).$$

Алгоритм А1.
1) зарезервирована константа с = 2π;
2) $R = \sqrt{-2ln\alpha_1}$;
3) $\varphi = \alpha_2$;
4) $U_1 = R\cos\varphi$; $U_2 = R\sin\varphi$;

Алгоритм А2.
1) $V_1 = 2\alpha_1 - 1$, $V_2 = 2\alpha_2 - 1$;
2) $s = V_1^2 + V_2^2$;
3) если $s \geq 1$, вернуться к п. 1;

4) $R = \sqrt{-(2lns)/s}$;
5) $U_1 = V_1 R$; $U_2 = V_2 R$.

Для моделирования нормального распределения с параметрами m и σ преобразуем U_i: $U_i' = m + \sigma U_i$.

Логнормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(lnx-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, x > 0, m > 0, \sigma > 0.$$

Алгоритм B1.
1) сгенерировать стандартное (m = 0, σ = 1) нормальное число x = u ;
2) *V = m exp(σx).*

Экспоненциальное (показательное) распределение

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x > 0.$$

Алгоритм C1.
1) $\xi = -(\ln \alpha)/\lambda$;

Алгоритм C2.
1) получить независимые СВ α_1, α_2, α_3.
2) $s = \ln(\alpha_1\alpha_2)$;
3) $V_1 = -\alpha_3 s$, $V_1 = (\alpha_3 - 1)s$.

Алгоритм C3.

1) получить независимые СВ α_1, α_2, α_3, α_4, α_5;
2) отсортировать $(\alpha_4, \alpha_5) \rightarrow (\alpha'_4, \alpha'_5)$, причем $\alpha'_4 < \alpha'_5$;
3) $s = -\ln(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$;
4) $x_1 = \alpha'_4$, $x_2 = \alpha'_5 - \alpha'_4$, $x_3 = 1 - \alpha'_5$;
5) $V_1 = x_1 s$, $V_2 = x_2 s$; $V_3 = x_3 s$.

Равномерное распределение

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, x \in (a, b).$$

Алгоритм D1.
1) $\xi = a + (b-a)\alpha$.

Распределение хи-квадрат

$$f(x) = \frac{x^{(v-2)/2}}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(v/2)\sigma^v} exp\left(-\frac{x}{2\sigma^2}\right), x \geq 0,$$

где v — положительное целое «число степеней свободы».
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \Gamma(2) = 1, \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

Алгоритм E1 (σ = 1)
Для четных *v*:

1) сгенерировать $\alpha_1, \ldots, \alpha_{(v/2)-1}$;
2) $V = -2ln\left(\prod_{i=0}^{\left(\frac{v}{2}\right)-1} \alpha_i\right)$.

Для нечетных *v*:

1) сгенерировать $\alpha_1, \ldots, \alpha_{(v-1)/2}$;
2) $V = -2ln\left(\prod_{i=0}^{\left(\frac{v-1}{2}\right)} \alpha_i\right) + u^2$, где u – стандартное (m=0,σ=1) нормальное число.

Алгоритм E2.
1) сгенерировать нормальные числа $x_1, x_2, \ldots, x_v$ с параметрами $(0, \sigma^2)$;
2) $s = \sum_{k=1}^{v} x_k^2$.

Гамма-распределение
$\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \frac{exp(-x/b)}{b\Gamma(c)}, x \geq 0.}$
где b — параметр масштаба (b>0); c — параметр формы (c > 0).

Алгоритм F1.
Задать константу ε>0 (малое машиннозависимое число, для которого обязательно 1,0−ε<1,0)

1) v = [c] (целая часть — в MATLAB оператор ‘floor’), $c_1 = c - v$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$.
2) если $c_1 < \varepsilon$, то перейти к п. 8; если $1- c1 < \varepsilon$, то $v = v+1$ и перейти к п. 8;
3) получить $\alpha_{v+1}, \alpha_{v+2}$;
4) $s_1 = \alpha_{v+1}^{1/c_1}, s_2 = \alpha_{v+2}^{1/(1-c_1)}$;
5) $s = s_1 + s_2$;
6) если $s_1>1$, то перейти к п. 3;
7) $V_2 =- s_1(1n\ \alpha_{v+3})/s$;
8) получить $\alpha_1, \ldots, \alpha_v$;
9) $V_1 = -ln(\prod_{i=1}^{v} \alpha_i)$;
10) $V = b(V_1 + V_2)$.

Бета-распределение

$$f(x) = \frac{x^{v-1}(1-x)^{\mu-1}}{B(v,\mu)}, x \in [0,1], v > 0, \mu > 0,$$

$B(v,\mu) = \frac{\Gamma(v)\Gamma(\mu)}{\Gamma(v+\mu)} = \int_0^1 t^{v-1}(1-t)^{\mu-1}dt - \text{бета} - \text{функция}$.

Алгоритм G1.
1) с помощью алгоритма F1 получить V_1 с параметрами b = 1, c = v;
2) с помощью алгоритма F1 получить V_2 с параметрами b = 1, c = μ;
3) $\beta = V_1/(V_1+V_2)$.

Распределение Вейбулла
$f(x) = \frac{cx^{c-1}}{b^c} exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^c\right], c > 0, b > 0, x \geq 0.$

Алгоритм H1.
1) $W_1 = b(-ln\alpha)^{1/c}$.

Распределение Накагами
$f(x) = \frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m x^{2m-1} exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}x^2\right), x > 0$, m − параметр формы, σ – параметр масштаба.

Алгоритм Q1.
2) с помощью алгоритма F1 получить V с параметрами c = m, b = 1;
3) $W = \sigma\sqrt{V/m}$

Распределение Райса

$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} exp\left(-\frac{x^2+a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right), x > 0.$

где a — параметр «нецентральности» ($a > 0$); σ — параметр масштаба; $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка (в среде MATLAB обозначается besseli(0,x)).

Алгоритм R1.

1) используя алгоритм A2, получить U_1,U_2;
2) $R = \sqrt{(a+\sigma U_1)^2 + (\sigma U_2)^2}$.

Треугольное распределение (Симпсона)

$$f(x) = \begin{cases} 4\frac{x-a}{(b-a)^2}, x \in (a, \frac{a+b}{2}) \\ 4\frac{b-x}{(b-a)^2}, x \in (\frac{a+b}{2}, b) \\ 0, x \ni (a,b) \end{cases} \cdot$$

Алгоритм S1.

1) получить α_1, α_2.
2) $z_1 = \frac{a}{2} + \frac{\alpha_1(b-a)}{2}$, $z_2 = \frac{a}{2} + \frac{\alpha_2(b-a)}{2}$.
3) $s = z_1 + z_2$.

Распределение по закону арксинуса

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{b^2-(x-a)^2}}, a-b < x < a+b, a > 0, b > 0$$

Алгоритм L1.

1) получить α_1;

2) $s = b\ sin(\pi(\alpha_1 - 0.5)) + a$.

Распределение Коши

$f(x) = \frac{1}{\pi(b^2+(x-a)^2)}$.

Алгоритм K1.

1) получить α_1;
2) $s = b\ tg\ (\pi(\alpha_1 - 0,5)) + a$.

Ниже приведены алгоритмы моделирования наиболее распространенных дискретных распределений.

Распределение Бернулли

$P\{\xi = k\} = kp+(1-k)q,\ k=0,1; q=1-p.$

Алгоритм X1.

1) получить α_k;
2) если $\alpha_k < p$, то $\xi = 1$; иначе $\xi = 0$.

Биномиальное распределение

$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,2, \dots, n.$

Алгоритм Y1.

1) получить $V_i = \alpha_i$, $k = 0$, $P_1 = q^n$;
2) $V_i=V_i-P_1$;
3) если $V_i < 0$, перейти к п.6;
4) $P_1 = \frac{P_1(n-k)p}{(k+1)q}$
5) $k = k + 1$, перейти к п. 2;
6) $\xi = k$.

Алгоритм Y2.

1) $s = 0$, $k =1$;
2) получить α_k;
3) если $\alpha_k < p$, то $s = s +1$;
4) $k = k+1$;
5) если $k \le n$, перейти к п. 2;
6) $\xi = s$.

Алгоритм Y3 (для малых p).

1) $L = 0$, $k = 0$;
2) получить α_k;
3) $L = L + \left(\frac{ln\alpha_k}{lnq} + 1\right), k = k + 1$;
4) если $L \le n$, перейти к п. 2;
5) $\xi = k-1$.

Дискретное равномерное распределение

$P\{\xi = k\} = 1/n$, $k=1, 2, \dots, n$.

Алгоритм Z1.

1) получить α_i;
2) $\xi_i = [1+ \alpha_i n]$, где [...] — целая часть числа.

Распределение Пуассона

$\boldsymbol{P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Алгоритм V1 (для малых λ).

1) получить α_k;
2) $p = e^{-\lambda}$, $k = -1$, $s = 0$;
3) $k = k+1$, $s = s\,\alpha_k$
4) если $s > p$, перейти к п.2;
5) $\xi = k$.

Алгоритм V2 (приближенный для λ>>1).

1) получить U_i, используя алгоритм А2;
2) $\xi_i = [U_i\sqrt{\lambda} + \lambda]$, где [...] – целая часть;

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Выполнить статистическое моделирование случайной величины с заданным законом распределения (табл. 1) путем генерации отсчетов α_{1i}, $i = 1, \dots, N$ случайных величин с

равномерным распределением в интервале [0, 1] (или, при необходимости нескольких СВ (α_1, α_2, ..., α_k); N=10000. Сформировать соответствующий script-файл в среде MATLAB.

2. Получить гистограмму для закона распределения в соответствии с вариантом задания. Гистограмма может быть получена в среде MATLAB с помощью оператора hist(X1,N), X1 — анализируемая случайная величина, N — число интервалов на гистограмме, которое должно составлять от 100 до 500. Сравнить полученную гистограмму с соответствующим графиком плотности вероятности *f(x)* в соответствии с заданием.
3. Вычислить:
   - выборочное среднее значение,
   - медиану,
   - нижний и верхний квартиль,
   - выборочную дисперсию и СКО,

   смоделированной случайной величины и сравнить их с теоретическими значениями (мат. ожиданием и дисперсией, медианой, нижним и верхним квартилем).

4. Сделать выводы.

№ вар	Закон распределения (алгоритм)	Параметры
1	2	3
1	Логнормальный (B1)	$m = 0.5,\ \sigma = 1$
2	Вейбулла (H1)	$b = 2,\ c = 3$
3	Хи-квадрат (E1)	$v = 4,\ \sigma = 1$
4	Гамма (F1)	$b = 1,\ c = 2$
5	Бета (G1)	$v = 3,\ \mu = 1.5$
6	Накагами (Q1)	$m = 0.5,\ \sigma = 1$
7	Райса (R1)	$a = 0.5,\ \sigma = 1$
8	Треугольное (Симпсона) (S1)	$a = 2,\ b = 5$
9	Закон арксинуса (L1)	$a = 3,\ b = 2$
10	Коши (K1)	$a = 1,\ b = 0.5$
11	Хи-квадрат (E2)	$v = 3,\ \sigma = 2$
12	Равномерный (D1)	$a = 1,\ b = 2$
13	Экспоненциальный (C2)	$\lambda = 1$
14	Экспоненциальный (C3)	$\lambda = 1$
15	Экспоненциальный (C1)	$\lambda = 3$

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Необходимые теоретические сведения.
3. Гистограмма распределения, полученная экспериментальным путем.
4. Теоретический график плотности распределения вероятностей *f(x)* в соответствии с вариантом задания.
5. Теоретические и экспериментальные значения средних значений и дисперсий.
6. Выводы по работе.