ЛЕКЦИЯ 9. РЕШЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В математике важную роль играют *рекуррентные соотношения*, т.е. такие, в которых каждый следующий элемент последовательности выражается через один или несколько предыдущих.

Пример 1. Геометрическая прогрессия.

$$\begin{cases} a_0 = b \\ a_n = q \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

Пример 2. Числа Фибоначчи.

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Выпишем несколько первых чисел: 1,1,2,3,5,8,13,…

Пример 3. Факториал.

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_n = n \cdot F_{n-1} \end{cases}$$

Выпишем несколько первых чисел: 1,1,2,6,24,120,…

Пример 4. Число беспорядков (или *субфакториал*).

Определение. Перестановка называется **беспорядком**, если ни одно из чисел в ней не стоит на своём месте.

Мы докажем, что число беспорядков D_n удовлетворяет рекуррентным соотношениям:

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_n = (-1)^n + n \cdot D_{n-1} \end{cases}$$

Выпишем несколько первых чисел: 0,1,2,9,44,…

$$\begin{cases} D_1 = 0, D_2 = 1 \\ D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2}) \end{cases}$$

Прежде, чем вывести эти соотношения докажем одну важную формулу.

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ

Частные случаи:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Общий случай:

Теорема (формула включений-исключений):

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

Доказательство. Докажем ещё одно свойство сочетаний:

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k C_N^k = 0$$

Пусть некоторый элемент $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ и входит ровно в m из этих множеств. Тогда в первом слагаемом правой части нашей формулы он учитывается m раз, во втором - C_m^2 раз, в третьем - C_m^3, …, в m-ом слагаемом – 1 раз. Получаем:

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \ldots + (-1)^{n-1} C_m^m = 1$$ - всё доказано.

ЧИСЛО БЕСПОРЯДКОВ

Теорема. Число беспорядков D_n равно

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Доказательство. Обозначим через A множество всех перестановок из n элементов, а через A_i множество всех перестановок, в которых число i стоит на i-м месте. Тогда:

$$D_n = |\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = |A| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| - \ldots +$$

$$+ (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| =$$

$$= n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \ldots + (-1)^k C_n^k (n-k)! + \ldots + (-1)^n C_n^n (n-n)! =$$

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Задача (о рассеянной секретарше). Секретарше нужно отправить n различных писем по n различным адресам. Она подписывает конверты и вкладывает в них письма случайным образом. Какова вероятность того, что ни одно письмо не дойдёт до своего адресата?

Оказывается, что эта вероятность не так уж мала и при $n \to \infty$ стремится к $\frac{1}{e} = 0,367\ldots$. Ответ получается из формулы для числа беспорядков:

Возвратимся (в последний раз) к задаче о секретарше. Из полученной формулы для числа беспорядков следует:

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = e^{-1}.$$

Вернёмся к доказательству рекуррентных соотношений для D_n:

Доказательство для 1-го порядка. Запишем формулу для D_n, «отделим» последнее слагаемое и вынесем за скобки n.

Доказательство для 2-го порядка. Выразить D_{n-2} в правой части через D_{n-1} из предыдущего рекуррентного соотношения.

Задание. Докажите, что факториалы тоже удовлетворяют **этому соотношению 2-го порядка, только с другими начальными условиями.**

ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

О п р е д е л е н и е . Линейное рекуррентное соотношение вида

$$a_n = q_{p-1}a_{n-1} + q_{p-2}a_{n-2} + \ldots + q_0 a_{n-p},$$

где $q_0, q_1, \ldots, q_{p-1}$ - постоянные числа, называется *линейным однородным рекуррентным уравнением* с постоянными коэффициентами порядка p.

Какие из примеров 1-4 попадают под это определение? (примеры 1 и 2)

В о п р о с : можно ли найти явное выражение для a_n ?

Рассмотрим общее уравнение 2-го порядка:

$$a_n = q_1 a_{n-1} + q_0 a_{n-2}.$$

Будем искать решение, как и для уравнения первого порядка, в виде $a_n = \lambda^n$. Получим:

$$\lambda^n = q_1\lambda^{n-1} + q_0\lambda^{n-2}$$

$$\lambda^2 = q_1\lambda + q_0$$

Полученное квадратное уравнение называется *характеристическим*.

С л у ч а й 1 . Если оно имеет два различных вещественных корня, то имеем два линейно независимых решения:

$$a_n = \lambda_1^n \qquad \text{и} \qquad a_n = \lambda_2^n.$$

Общее решение в этом случае записывается в виде:

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

С л у ч а й 2 . Если оно имеет два совпадающих вещественных корня λ_0, то имеем два линейно независимых решения:

$$a_n = \lambda_0^n \qquad \text{и} \qquad a_n = n\lambda_0^n.$$

Докажем, что второе – тоже решение. Если λ_0 - единственный корень, то характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda - \lambda_0)^2 = 0$, а значит, рекуррентное соотношение имеет вид

$$a_n = 2\lambda_0 a_{n-1} - \lambda_0^2 a_{n-2}.$$

Подставляя в него $a_n = n\lambda_0^n$, получаем:

$$n\lambda_0^n = 2\lambda_0(n-1)\lambda_0^{n-1} - \lambda_0^2(n-2)\lambda_0^{n-2}$$

$$n\lambda_0^n = 2(n-1)\lambda_0^n - (n-2)\lambda_0^n$$

$$n = 2(n-1) - (n-2)$$

$$n = n$$

Общее решение в этом случае записывается в виде:

$$a_n = C_1\lambda_0^n + C_2 n\lambda_0^n.$$

С л у ч а й 3. Если оно имеет два комплексно-сопряженных корня $r(\cos\phi \pm i\sin\phi)$, то имеем два линейно независимых решения:

$$a_n = r^n\cos(n\phi) \qquad \text{и} \qquad a_n = r^n\sin(n\phi).$$

Доказательство аналогично (ДОКАЗАТЬ САМИМ!).

Общее решение записывается в виде:

$$a_n = r^n(C_1\sin(n\phi) + C_1\cos(n\phi)).$$

ФОРМУЛА БИНЕ

Из этой теории для чисел Фибоначчи получаем:

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Общее решение:

$$a_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Подставляя начальные условия $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$, получаем потрясающую формулу Бине:

$$a^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Число $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ называется *золотым сечением*.

НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

О п р е д е л е н и е. Линейное рекуррентное соотношение вида

$$a_n = q_{p-1}a_{n-1} + q_{p-2}a_{n-2} + \ldots + q_0 a_{n-p} + f_n,$$

называется *неоднородным*.

Общее решение неоднородного получается как сумма:

ОРН = ЧРН +ОРО.

Если неоднородность – квазимногочлен $P_m(n)\lambda^n$ и λ – характеристический корень кратности r, то частное решение нужно искать в виде $n^r Q_m(n)\lambda^n$.

П р и м е р. $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n$ - найти ЧРН

Характеристические корни: $\lambda_1 = -3; \lambda_2 = 2;$

$$\text{ЧРН} = n \cdot C \cdot 2^n$$

$$cn2^n = -c(n-1)2^{n-1} + 6c(n-2)2^{n-2} + 2^n$$

$$4cn = -2c(n-1) + 6c(n-2) + 4$$

$$4cn = -2cn + 2c + 6cn - 12c + 4$$

$$c = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\text{ЧРН} = n\frac{2}{5}2^n = \frac{n2^{n+1}}{5}$$