ЛЕКЦИЯ 10. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

ПРИМЕРЫ ИЗ ИСТОРИИ

1. Кенигсберские мосты (критерий эйлеровости)

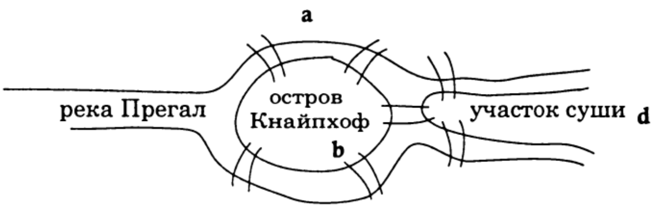


Рис. 6.4

2. Три дома и три колодца (критерий планарности)
3. Проблема четырёх красок (решена компьютером)
4. Задача коммивояжёра
5. Игра в пятнашки (кратчайший путь, две компоненты связности)

ЧТО ТАКОЕ ГРАФ

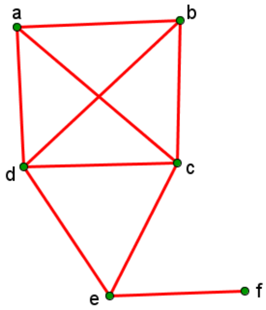
ОСНОВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Теория графов не обладает устоявшейся терминологией.

О п р е д е л е н и е . Графом G называется совокупность двух конечных множеств G=<V,E>, где V – множество **вершин**, E – множество **дуг** или **рёбер,** представляющих собой пары вершин (соотвественно *упорядоченных* или *неупорядоченных*).

Если элементами множества E являются упорядоченные пары, то граф называется **ориентированным**, если неупорядоченные – **неориентированным**.

Граф удобно изображать в виде рисунка (диаграммы)



ДРУГИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Если элементами E могут быть пары одинаковых вершин, то они называются **петлями**, а граф – **псевдографом**. Если E является **мультимножеством** (один и тот же элемент может входить несколько раз), то граф называется **мультиграфом**.

Граф без петель и рёбер часто называют **простым графом**.

Если ребро может соединять не две, а **любое количество вершин**, то граф называется **гиперграфом**. Если каждому ребру графа приписано число, то он называется **взвешенным** или нагруженным.

БЕДА В ТОМ, что псевдографы и мультиграфы тоже называют графами!!!

СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ

Будем в дальнейшем обозначать через p и q кол-во вершин и кол-во рёбер графа:

$$|V| = p, |E| = q$$

Две вершины, соединённые ребром называют **смежными**. Это ребро называют **инцидентным** вершинам.

$\Gamma(v)$ – множество смежных вершин.

$\Gamma^{-}(v)$ – множество вершин, в которые выходят дуги из v

$\Gamma^{+}(v)$ – множество вершин, откуда входят дуги в v

Степень вершины (или **валентность**) – deg(v) – количество смежных вершин.

Полустепени выхода и захода – $\deg^{-}(v)$ и $\deg^{+}(v)$.

Теорема **(лемма о рукопожатиях)**. Сумма степеней всех вершин в любом мультиграфе чётна и равна 2q.

Следствие. Количество вершин нечётной степени в мультиграфе чётно.

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

ИЗОБРАЖЕНИЕ ГРАФА

Пример. Три внешне различные диаграммы, приведённые на рис. 7.5, являются диаграммами одного и того же графа $K_{3,3}$.

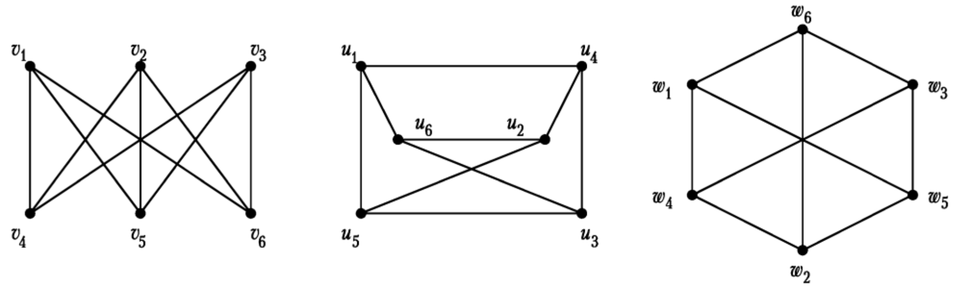


Рис. 7.5. Диаграммы изоморфных графов

ИЗОМОРФИЗМ

Определение. Два графа $< V_1, E_1 >$ и $< V_2, E_2 >$ называют изоморфными, если существует биекция вершин, сохраняющая их смежность. Т.е. такое биективное отображение

$$f : V_1 \to V_2 \text{, что}$$

$$(u, v) \in V_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in V_2 .$$

Очевидно, изоморфизм является отношением эквивалентности.

ИНВАРИАНТЫ ГРАФА

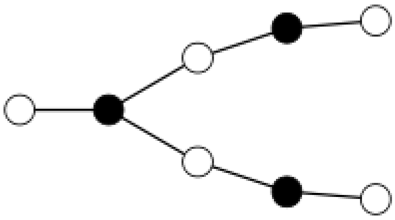
Определение. Числовая характеристика, не изменяющаяся при изоморфизме, называется инвариантом графа.

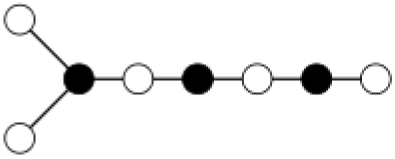
Примеры:

- число вершин;
- число рёбер;
- упорядоченный список степеней вершин.

На данный момент не известно полного набора инвариантов, гарантирующих изоморфизма графов.

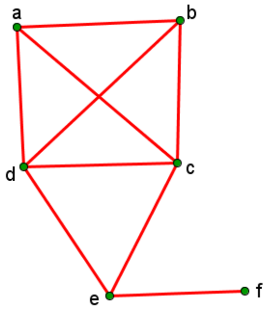
Пример неизоморфных графов с одинаковыми списками степеней вершин:





ПУТИ НА ГРАФЕ

ПУТИ, ЦЕПИ И ЦИКЛЫ



Путём в графе называется любая последовательность смежных вершин. Если первая и последняя вершины совпадают, то путь называется **замкнутым**.

Если все рёбра различны, то маршрут называется **цепью**. Если все вершины (а значит и все рёбра) различны, кроме быть может первой и последней, то маршрут называют **простой цепью**.

Замкнутая цепь называется **циклом**. Замкнутая простая цепь называется **простым циклом**.

СВЯЗНОСТЬ

Говорят, что вершины u и v **связаны**, если существует путь (а значит цепь и простая цепь!) из u в v. Граф, в котором все вершины связаны называют **связным**.

В неориентированном графе отношение связности является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности по этому отношению называют **компонентами связности**. У связного графа одна компонента связности.

Для ориентированных графов различают понятия **связности** и **сильной связности**:

- связный = соотнесённый с ним неориентированный граф связный;
- сильно связный = можно попасть по стрелкам из любой вершины в любую другую (т.е. транзитивное замыкание – полный граф).

Ребро графа называется **мостом**, если после его удаления число компонент связности увеличивается (на 1).

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ВЕРШИНАМИ

Длиной пути называют количество рёбер.

Расстоянием между вершинами называют длину кратчайшего пути.

Множество вершин, находящихся от заданной на расстоянии n, называют n-ым **ярусом**.

Диаметром графа называют расстояние между самыми удалёнными вершинами.

Центром графа называют вершину(ы), для которой расстояние от неё до самой удалённой вершины минимально. Это расстояние называют **радиусом** графа.