ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Численное решение ОДУ (задача Коши)

Цель: сформировать практические навыки использования основных естественно научных законов в профессиональной деятельности, применения вычислительных методов и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

Задачи: разработка алгоритмов для реализации вычислений методами Эйлера, Адамса, Рунге-Кутты. Промоделировать движение груза на временном отрезке при заданных значениях параметров задачи. Найти решение жесткой задачи.

Задача 7.1. Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1 порядка

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T], \qquad (1)$$
$$y(t_0) = y_0$$

и оценить погрешность решения задачи.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать исходные данные: функцию *f* правой части, начальное значение y_0.
2. Разработайте функцию, реализующую явный метод Эйлера. Найдите приближенное решение задачи Коши с шагом *h*=0.1 по явному методу Эйлера.
3. Разработайте функцию реализующую, метод Рунге-Кутты 4 порядка точности. Найдите приближенное решение задачи Коши с шагом *h*=0.1 по методу Рунге-Кутты 4 порядка точности.
4. Найти решение задачи Коши аналитически.
5. Построить таблицы значений приближенных и точного решений. На одном чертеже построить графики приближенных и точного решений.
6. Оценить погрешность приближенных решений двумя способами:

а) по формуле $\varepsilon = \max\limits_{0 \le i \le N} | y(t_i) - y_i |$; здесь $y(t_i)$ и y_i - значения точного и приближенного решений в узлах сетки t_i, $i=1,..N$;

b) по правилу Рунге (по правилу двойного пересчета).

7. Выяснить, при каком значении шага *h=h** решение, полученное по методу Эйлера, будет иметь такую же погрешность (см. п. 6а), как решение, полученное с помощью метода Рунге-Кутты с шагом *h*=0.1.

УКАЗАНИЕ. В п. 7 рекомендуется провести серию вычислений решения по методу Эйлера, дробя шаг *h* пополам.

Задача 7.2. Задача Коши для ОДУ 2 порядка

$$mx'' + Hx' + kx = f(t), \quad t \in [0, T],$$
$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = v_0$$

описывает движение груза массы *m*, подвешенного к концу пружины. Здесь *x(t)* – смещение груза от положения равновесия, *H* – константа, характеризующая силу сопротивления среды, *k* –коэффициент упругости пружины, *f(t)* – внешняя сила. Начальные условия: x_0 – смещение груза в начальный момент времени *t*=0, v_0 – скорость груза в начальный момент времени. Промоделировать движение груза на временном отрезке [0, *T*] при заданных в индивидуальном варианте трех наборах (I, II, III) значений параметров задачи. Для каждого набора по найденной таблице (или графику) решения задачи определить максимальное и минимальное значения функции *x(t)* и моменты времени, в которые эти значения достигаются. Предложить свой вариант задания параметров, при которых характер колебаний груза существенно отличается от рассмотренного ранее.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Заменить исходную задачу эквивалентной задачей Коши для системы ОДУ 1 порядка:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = \frac{f(t) - Hx_2 - kx_1}{m}$$
$$x_1(0) = x_0$$
$$x_2(0) = v_0 \qquad (2)$$

2. Для каждого варианта выбора параметров решить задачу (2) с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка точности с шагом *h*=0.1.
3. Для каждого варианта выбора параметров построить график найденного решения. Сравнить характер движения груза и дать интерпретацию полученного движения.
4. Для каждого варианта выбора параметров определить требуемые в задаче характеристики.

УКАЗАНИЕ. В п. 2 использовать функцию, разработанную в задаче 6.1.

Задача 7.3. Решить приближенно задачу Коши для ОДУ 1 порядка вида (1), используя метод Рунге-Кутты 4 порядка точности и метод, указанный в варианте, с шагами h и $h/2$. Для каждого метода оценить погрешность по правилу Рунге и вычислить уточненное решение (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ*). Построить на одном чертеже графики приближенных решений (с шагом *h / 2*) и графики уточненных решений.

Задача 7.4. Решить приближенно задачу Коши для ОДУ 3 порядка

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(t)$$
$$y(A) = b_1,\ y'(A) = b_2,\ y''(A) = b_3$$

на отрезке [*A*, *B*], используя метод Рунге-Кутты 4 с шагами *h*=0.1 и *h*=0.05 для систем ОДУ 1 порядка. Оценить погрешность по правилу Рунге. Построить график решения, найденного с шагом *h*=0.05.

УКАЗАНИЕ. Эквивалентная задача Коши для системы ОДУ 1 порядка приведена в *ПРИЛОЖЕНИИ 7.C.*

Задача 7.5. Дана жесткая задача Коши вида (1). Найти решение задачи с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Используя функцию, разработанную в задаче 6.1, найти приближенное решение задачи Коши явным методом Эйлера с шагом *h*=0.15.
2. Найти решение задачи методом Рунге-Кутты 4 порядка точности с помощью функции, разработанной в задаче 7.1 с шагом *h*=0.15.
3. Построить графики приближенных и точного решений задачи.
4. Уменьшая шаг, найти решение задачи с заданной точностью ε каждым из методов. Сравнить значения шагов интегрирования, при которых достигается точность *ε*.
5. Объяснить полученные результаты.

Задача 7.6. Даны две задачи Коши для систем ОДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами на отрезке [0, 1]

$$Y'(t) = AY(t),\ Y(0) = Y_0,$$
$$Z'(t) = BZ(t),\ Z(0) = Z_0,$$

где *A* и *B* – заданные матрицы, Y_0, Z_0 - заданные векторы. Выяснить, какая из задач является жесткой.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить программу-функцию нахождения решения системы ОДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами по явному методу Эйлера. Используя составленную программу, решить обе задачи с шагом *h*=0.01. Определить, для какой из задач явный метод неустойчив при данном шаге *h*.
2. Найти коэффициенты жесткости обеих систем (используя встроенную функцию для нахождения собственных чисел (eigenvalues) матриц *A* и *B*). Какая из задач является жесткой?
3. Для жесткой задачи теоретически оценить шаг *h**, при котором явный метод Эйлера будет устойчив (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ*).
4. Составить программу-функцию нахождения решения системы ОДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами по неявному методу Эйлера. Используя составленную программу, найти решение жесткой задачи с шагом *h*=0.01. Построить графики компонент полученного решения.
5. Для жесткой задачи экспериментально подобрать шаг *h*, при котором графики компонент решения, полученного по явному методу Эйлера, визуально совпадают с графиками компонент решения, полученного

по неявному методу с шагом h=0.01. Сравнить найденное значение шага с шагом h^*. Объяснить различие поведения явного и неявного методов Эйлера при решении жесткой задачи.
Задача 7.7. Решить приближенно задачу Коши для ОДУ 1 порядка вида (1) с помощью метода, указанного в индивидуальном варианте, с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. При нахождении решения использовать алгоритм автоматического выбора шага.
УКАЗАНИЕ. В результате работы программы должен создаваться файл, содержащий вектор значений приближенного решения, а также значение шага h, при котором достигается заданная точность ε. Программа по запросу должна выдавать на экран таблицу значений найденного решения в фиксированной 21 точке отрезка $[t_0, T]$ и график найденного решения.

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче:
1) постановка задачи;
2) необходимый теоретический материал;
3) решение поставленной задачи;
4) анализ полученных результатов;
5) графический материал;
6) тексты программ.

Схема вариантов к лабораторной работе 7

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	7.1.1	11	7.4.2	21	7.7.3	31	7.3.5
2	7.2.1	12	7.5.2	22	7.1.4	32	7.4.5
3	7.3.1	13	7.6.2	23	7.2.4	33	7.5.5
4	7.4.1	14	7.7.2	24	7.3.4	34	7.6.5
5	7.5.1	15	7.1.3	25	7.4.4	35	7.7.5
6	7.6.1	16	7.2.3	26	7.5.4	36	7.1.6
7	7.7.1	17	7.3.3	27	7.6.4	37	7.2.6
8	7.1.2	18	7.4.3	28	7.7.4	38	7.3.6
9	7.2.2	19	7.5.3	29	7.1.5	39	7.4.6
10	7.3.2	20	7.6.3	30	7.2.5	40	7.5.6

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Таблица к задаче 7.1

N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*	N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*
7.1.1	$y/t+t^2$	1	2	0	7.1.16	$-y/t+3t$	1	2	1
7.1.2	$yctgt+2t\sin t$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+1$	0	7.1.17	$\frac{2ty}{1+t^2}+1+t^2$	1	2	3
7.1.3	$-y\cos t+\frac{\sin(2t)}{2}$	0	1	0	7.1.18	$\frac{2t-1}{t^2}y+1$	1	2	1
7.1.4	$-ytgt+\cos^2 t$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}+1$	0.5	7.1.19	$-\frac{3y}{t}+\frac{2}{t^3}$	1	2	1
7.1.5	$\frac{y}{t+2}+t^2+2t$	-1	0	1.5	7.1.20	$-2ty-2t^3$	1	2	e^{-1}
7.1.6	$\frac{y}{t+1}+e^t(t+1)$	0	1	1	7.1.21	$y/t-2/t^2$	1	1	1
7.1.7	$y/t+t\sin t$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+1$	1	7.1.22	$-ty-t^3$	0	1	3

7.1.8	$-y/t+\sin t$	π	π+1	$\frac{1}{\pi}$	7.1.23	$\frac{2}{t+1}y+e^{t}(t+1)^{2}$	0	1	1
7.1.9	$-\frac{y}{2t}+t^{2}$	1	2	1	7.1.24	$-2ty+te^{-t^{2}}\sin t$	0	1	1
7.1.10	$-\frac{2t}{1+t^{2}}y+\frac{2t^{2}}{1+t^{2}}$	0	1	$\frac{2}{3}$	7.1.25	$\frac{2y}{t+1}+(t+1)^{3}$	0	1	0.5
7.1.11	$\frac{2t-5}{t^{2}}y+5$	2	3	4	7.1.26	$y\cos t-\sin 2t$	0	1	3
7.1.12	$-y/t+\frac{t+1}{t}e^{t}$	1	2	e	7.1.27	$4ty-4t^{3}$	0	1	-0.5
7.1.13	$y/t-2\ln t/t$	1	2	1	7.1.28	$y/t-\ln t/t$	1	2	1
7.1.14	$y/t-12/t^{3}$	1	2	4	7.1.29	$3t^{2}y+t^{2}(1+t^{3})/3$	0	1	0
7.1.15	$-2y/t+t^{3}$	1	2	$-\frac{5}{6}$	7.1.30	$y\cos t+\sin 2t$	0	1	-1

Таблица к задаче 7.2

N		*H*	*k*	*m*	*f(t)*	*x0*	*v0*	*T*
7.2.1	I	0.5	1	1	0	10	0	20
	II	-“-	-“-	-“-	$\sqrt{t}$	0	-“-	-“-
	III	-“-	-“-	-“-	$\sqrt{t}$	-10	-“-	-“-
7.2.2	I	1	1	0.5	tsin(t)	0	0	20
	II	-“-	-“-	-“-	0	-“-	-10	-“-
	III	-“-	-“-	-“-	tsin(t)	-“-	-50	-“-
7.2.3	I	1	5	0.75	0	-10	0	5
	II	-“-	-“-	-“-	-“-	0	10	-“-
	III	-“-	-“-	-“-	-“-	-10	10	-“-
7.2.4	I	1	1	1	cos(t)	0	0	20
	II	-“-	-“-	3	-“-	-“-	-“-	-“-
	III	-“-	-“-	6	-“-	-“-	-“-	-“-
7.2.5	I	0.5	5	1	0	20	0	15
	II	-“-	50	-“-	-“-	-“-	-“-	-“-
	III	-“-	0.5	-“-	-“-	-“-	-“-	-“-
7.2.6	I	1	5	1	0	0	1	15
	II	-“-	0.5	-“-	-“-	-“-	-“-	-“-
	III	-“-	50	-“-	-“-	-“-	-“-	-“-
7.2.7	I	1	1	5	-t	15	0	40
	II	0.1	-“-	-“-	-“-	-“-	-“-	-“-
	III	10	-“-	-“-	-“-	-“-	-“-	-“-
7.2.8	I	1	1	0.5	sin(t)	0	0	20
	II	-“-	-“-	5	-“-	-“-	-“-	-“-
	III	-“-	-“-	50	-“-	-“-	-“-	-“-
7.2.9	I	1	1	2	-cos(0.5t)	0	0	20
	II	-“-	-“-	-“-	-cos(2t)	-“-	-“-	-“-
	III	-“-	-“-	-“-	2	-“-	-“-	-“-
7.2.10	I	0.5	1	0.5	$-\sqrt{t}$	0	-10	15
	II	-“-	-“-	-“-	-“-	0	10	-“-
	III	-“-	-“-	-“-	$\sqrt{t}$	0	10	-“-

Таблица к задаче 7.3

N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*	Метод
7.3.1	$-ty+(1+t)e^{-t}y^2$	0	1	1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка I
7.3.2	$-4t^3y+4(t^3+1)e^{-4t}y^2$	0	1	1	Экстраполяционный метод Адамса 2 порядка
7.3.3	$-4t^3y+4(1-t^3)e^{4t}y^2$	0	1	-1	Модифицир. метод Эйлера 2 порядка
7.3.4	$y+2ty^2$	0	0.8	0.5	Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка
7.3.5	$-2ty+2t^3y^3$	0	1	$\sqrt{2}$	Метод Рунге-Кутты 3 порядка II
7.3.6	$-ty+(t-1)e^t y^2$	0	1	1	Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка
7.3.7	$y+ty^2$	0	0.8	1	Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка
7.3.8	$-y+ty^2$	0	1	1	Метод разложения по формуле Тейлора 2 порядка
7.3.9	$-ty+0.5(t-1)e^t y^2$	0	1	2	Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка
7.3.10	$ytgt-(2/3)y^4\sin t$	0	1	1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка III

Таблица к задаче 7.4

N	*A*	*B*	b_1	b_2	b_3	a_0	a_1	a_2	a_3	$f(t)$
7.4.1	0	1.5	1	2.5	6	1	-2	0.25	45.75	$e^{-2t}+3t+1$
7.4.2	0	1.5	1	2.0	4	1	-1.8	0.36	44.28	$e^{-2t}-1.5t+1$
7.4.3	0	1.5	1	2.5	6	1	-1.4	0.64	41.52	$\cos(2t)+3t+1$
7.4.4	0	2.0	1	1.5	2	1	-1.4	1.88	45.24	$\sin(2t)+2t-1$
7.4.5	0	1.5	1	3.0	10	1	-2.4	0.09	48.87	$\sin(t)-7t+2$
7.4.6	0	1.0	1	3.5	9	1	-1	8.8	29.00	$\cos(t)+5t+3$
7.4.7	0	1.5	1	2.8	5	1	-1.5	-1.25	53.375	$e^{-t}+\cos(2t)$
7.4.8	0	1.5	1.5	4.0	10	1	-4.6	3.94	34.28	$e^{-1.5t}+2\sin(3t)$
7.4.9	0	1.5	0	2.5	8	1	-4.1	0.64	42.85	$e^{-2t}+3\sin(2.5t)$
7.4.10	0	1.5	0	3.1	9	1	-3.9	9.43	26.295	$\sin(2t)+2\cos(3t)$

Таблица к задаче 7.5

N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*	точное решение
7.5.1	$-20y+2t-19.9$	0	1.5	0	$-1+0.1t+e^{-20t}$
7.5.2	$-30y+30\cos(\pi t)-\pi\sin(\pi t)$	0	1.5	0	$\cos(\pi t)-e^{-30t}$
7.5.3	$-25y+1.25t-49.95$	0	1.5	0	$-2+0.05t+2e^{-25t}$
7.5.4	$-20y+20-19e^{-t}$	0	1.5	1	$1-e^{-t}+e^{-20t}$

7.5.5	$-30y+\sin(2t)+30\sin^2(t)$	0	1.5	1	$\sin^2(t)+e^{-30t}$
7.5.6	$-25y-\sin(2t)+25\cos^2(t)$	0	1.5	0	$\cos^2(t)-e^{-25t}$

Таблица к задаче 7.6

N	*A*		Y_0	*B*		Z_0
7.6.1	-1.999	-0.019	0	-10.850	9.787	1
	-0.063	-1.051	1	32.515	-499.55	0
7.6.2	-13.237	15.299	2	-6.905	0.03	1
	33.885	522.183	0	-0.145	-6.095	5
7.6.3	-0.717	-23.827	1	-1.905	-0.015	1
	114.483	-640.393	2	-0.13	-2.295	0
7.6.4	-17.359	-0.573	2	-64.712	-85.344	1
	5.366	-21.351	1	-128.964	-170.918	0
7.6.5	-229.934	301.266	1	-2.018	-0.818	1
	227.624	-303.576	1	-0.082	-1.282	1

Таблица к задаче 7.7

N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*	Метод
7.7.1	$-\frac{2}{3}ty^2+\frac{1}{3}y(\cos(\frac{t}{2}))^2$	0	5	3.4	Метод разложения по формуле Тейлора 2 порядка
7.7.2	$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{2}}\sin(y)-\frac{1}{4}t^2$	-2	4	1.4	Модифицированный метод Эйлера 2 порядка
7.7.3	$-\frac{1}{3}y\sqrt{t}+\frac{2}{3}y^2\sin(t)$	2	10	2.2	Метод Рунге-Кутты 3 порядка I
7.7.4	$\frac{1}{2}t^2\cos(y)-\frac{1}{2}ye^{-\frac{t}{6}}$	0	6	1.1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка II
7.7.5	$\frac{1}{3}t^3\sin(2y)-y^2e^{-\frac{t}{2}}$	-1	6	1.1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка III
7.7.6	$-\frac{1}{3}y\sqrt{t}+\frac{2}{3}y^2\sin(t)$	2	10	2.2	Модифицированный метод Эйлера 2 порядка

ПРИЛОЖЕНИЕ

Правило Рунге практической оценки погрешности (правило двойного пересчета):

$y(t_i) - y_i^{h/2} \approx \varepsilon_i^{\,h}$, где $\varepsilon_i^{\,h} = \dfrac{y_i^{h/2} - y_i^h}{2^p - 1}$, $i=1, \dots, N$, p – порядок метода, а вычисления ведутся в узлах сетки t_i.

Уточненное решение вычисляется по формуле: $y_{i,уточн.} = y_i^{h/2} + \varepsilon_i^{\,h}$, $i=1,\dots, N$.

Расчетные формулы методов решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка:

Метод разложения по формуле Тейлора 2 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + h(f(t_i, y_i) + \frac{h}{2}[\frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y}])$$

Модифицированный метод Эйлера 2 порядка:

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \bar{y}_{i+1}))$$

Метод Рунге-Кутты 3 порядка I:

$$k1 = hf(t_i, y_i),$$

$$k2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}), \quad k3 = hf(t_i + h, y_i - k1 + 2k2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k1 + 4k2 + k3)$$

Метод Рунге-Кутты 3 порядка II:

$$k1 = hf(t_i, y_i),$$

$$k2 = hf(t_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k1}{3}), \quad k3 = hf(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k1 + 3k3)$$

Метод Рунге-Кутты 3 порядка III:

$$k1 = hf(t_i, y_i),$$

$$k2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}), \quad k3 = hf(t_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}(2k1 + 3k2 + 4k3)$$

Экстраполяционный метод Адамса 2 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1}))$$

Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f(t_i, y_i) - 16f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2}))$$

Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[55 f(t_i, y_i) - 59 f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 37 f(t_{i-2}, y_{i-2}) - \right.$$
$$\left. - 9 f(t_{i-3}, y_{i-3})\right]$$

Сведение ОДУ 3 порядка к системе ОДУ 1 порядка (для задачи 6.4):

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$y_3' = \frac{f(t) - a_1 y_3 - a_2 y_2 - a_3 y_1}{a_0}$$
$$y_1(A) = b_1, \quad y_2(A) = b_2, \quad y_3(A) = b_3.$$

Условие устойчивости явного метода Эйлера для системы ОДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами $Y'(t) = MY(t),\ Y(t_0) = Y_0$:

$h \le 2 / \max\limits_i |\operatorname{Re}\lambda_i|$, где λ_i, i=1, …, n, – собственные числа матрицы M порядка n.