Министерство образования и науки Российской Федерации

Калужский филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

М.А. Горошко, С.Е. Степанов

МНОЖЕСТВА. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Методические указания к выполнению домашней работы
по дисциплине «Дискретная математика»

Калуга, 2018

УДК 512.5+519.1
ББК 22.176
Б 43

Методические указания составлены в соответствии с учебным планом КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана для всех направлений подготовки бакалавров.

Методические указания рассмотрены и одобрены:

- кафедрой «Высшая математика» (ФН3-КФ)

протокол № 7 от 21.02.2018 г.

Зав. каф. ФН3-КФ ____________________ к.ф.-м.н., доцент Рамазанов А.К.

- методической комиссией факультета ФН-КФ

протокол № 4 от 27 апреля 2018 г.

Председатель метод. комиссии ____________________ к.х.н., доцент Анфилов К.Л.

- методической комиссией факультета КФ МГТУ им.Н.Э.Баумана

протокол № 4 от 08. 05 2018 г.

Председатель метод. комиссии ____________________ д.э.н., профессор Перерва О.Л.

Рецензент ____________________ зав. кафедрой ЭИУ2-КФ, к.т.н., доцент Чухраев И.В.

Авторы ____________________ доцент кафедры ФН3-КФ, к.ф.-м.н. Горошко Марина Александровна

____________________ доцент кафедры ФН3-КФ, к.ф.-м.н. Степанов Сергей Евгеньевич

Аннотация

Методические указания разработаны в соответствии с программой дисциплины «Дискретная математика» и предназначены для аудиторной и самостоятельной работы при изучении тем «Множества», «Булевы функции» и «Элементы комбинаторики». Методические указания содержат необходимые теоретические сведения и примеры решения типовых задач по данным темам с подробными комментариями.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Домашнее задание по теме «Множества. Булевы функции» выполняется в первом модуле дисциплины «Дискретная математика».

Цели домашнего задания: формирование навыков решения задач на основе анализа построенной математической модели и формирование навыков типовых расчетов в задачах комбинаторики.

Домашнее задание состоит из следующих задач:

Задача 1. Доказать или опровергнуть утверждение для множеств A, B и C.

Задача 2. Построить рефлексивное, симметричное и транзитивное замыкание для отношения, заданного матрицей.

Задача 3. Определить, сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = k$, если переменные $x_1,\ x_2,\ x_3$ удовлетворяют заданным неравенствам.

Задача 4. Построить таблицу истинности для высказывания.

Задача 5. Для булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ составить совершенную дизъюнктивную нормальную форму и минимизировать ее, используя единичный куб, карты Карно и алгоритм Квайна-Маккласки.

При выполнении домашнего задания следует полностью привести условие задач, отразить все шаги решения, при необходимости выполнить чертеж. Примеры решения и оформления задач каждого вида представлены далее.

Защита проводится в форме письменного выполнения индивидуального задания, содержащего аналогичные задачи в упрощенном виде.

Кроме примеров выполнения задач домашнего задания, методические указания содержат необходимый теоретический материал. При необходимости можно обратиться к учебникам и другим источникам (см. [1]-[3]).

1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1.1. Основные понятия теории множеств

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. Можно сказать, что *множество* – это любая определённая совокупность объектов. Объекты, из которых составлено множество, называются его *элементами.* Элементы множества различны и отличимы друг от друга.

Если объект x является элементом множества M, то говорят, что x принадлежит M и обозначают $x \in M$; в противном случае говорят, что x не принадлежит M и обозначают $x \notin M$.

Например, множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subset B$), если каждый элемент множества A является также элементом множества B. Если одновременно выполняются включения $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B называются равными.

Пусть M – конечное множество. Число элементов множества M называется *мощностью* множества и обозначается $|M|$. Мощность множества всех подмножеств множества M равна $2^{|M|}$.

Множества можно задать различными способами:

1. Перечисление элементов.
2. Характеристический предикат.
3. Характеристическая функция (область определения – универсум, может принимать значения 0 или 1).

4. Двоичный вектор (если на конечном универсуме задан порядок).
5. Порождающая процедура.

1.2. Операции над множествами

Пусть A и B – множества. Тогда над этими множествами можно определить следующие операции:

- *Объединение* множеств A и B – множество, обозначаемое $A \cup B$, содержащее все элементы, которые принадлежат или множеству A, или множеству B, или обоим множествам одновременно.
- *Пересечение* множеств A и B – множество, обозначаемое $A \cap B$, содержащее все элементы, которые принадлежат обоим множествам A и B одновременно.
- *Разность* множеств A и B – множество, обозначаемое $A \setminus B$, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A, но при этом не принадлежат множеству B. В общем случае, $A \setminus B \neq B \setminus A$.
- *Симметрическая разность* A и B – множество, обозначаемое $A \Delta B$, содержащее все элементы, принадлежащие только одному из множеств A или B. При этом легко доказать, что выполняются соотношения $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- *Дополнение* множества A – множество $\overline{A}$, которое содержит все элементы, не принадлежащие A. В этом случае заранее должно быть определено некоторое универсальное множество U, содержащее все возможные элементы.

Например, для множеств $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{1,3,5\}$ получаем:

$A \cup B = \{1,2,3,5\}$,

$A \cap B = \{1,3\}$,

$A \setminus B = \{2\}$ и $B \setminus A = \{5\}$,

$A \Delta B = \{2,5\}$.

Для иллюстрации операций над множествами часто используются диаграммы Венна (называемые также кругами Эйлера), в которых исходные множества изображаются фигурами, а результат операции каким-либо образом выделяется.

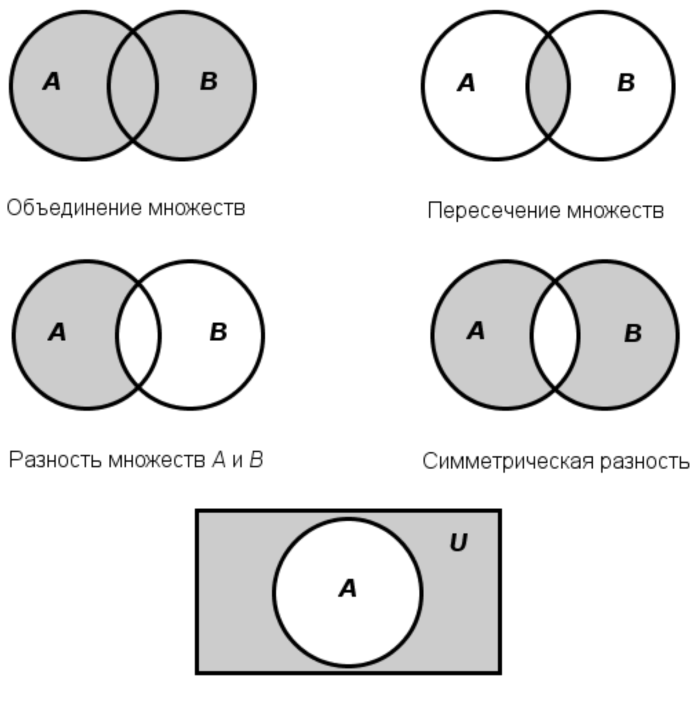

Рис.1

Справедливы следующие свойства операций над множествами:

1. *Коммутативность*.
   а) $A \cup B = B \cup A$ (для объединения);
   б) $A \cap B = B \cap A$ (для пересечения).
2. *Ассоциативность*.
   а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup C$ (для объединения);
   б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (для пересечения).
3. *Дистрибутивность*.
   а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (для объединения относительно пересечения);
   б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (для пересечения относительно объединения).
4. *Закон де Моргана*.
   а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (дополнение к объединению есть пересечение дополнений);
   б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (дополнение к пересечению есть объединение дополнений).
5. *Идемпотентность*.
   а) $A \cup A = A$ (для объединения);
   б) $A \cap A = A$ (для пересечения).
6. *Поглощение*.
   а) $A \cup (A \cap B) = A$;
   б) $A \cap (A \cup B) = A$.
7. *Расщепление* (*склеивание*).
   а) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;
   б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.
8. *Двойное дополнение*.
   $\overline{\overline{A}} = A$.
9. *Закон исключенного третьего*.
   $A \cup \overline{A} = U$.
10. *Операции с пустым и универсальным множествами*.
   а) $A \cup U = U$;
   б) $A \cup \varnothing = A$;
   в) $A \cap U = A$;
   г) $A \cap \varnothing = \varnothing$;
   д) $\overline{\varnothing} = U$;
   е) $\overline{U} = \varnothing$.
11. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Свойство ассоциативности –
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, –
позволяет ввести операции объединения и пересечения нескольких множеств. Так, объединением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, содержащее все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств. Аналогично, пересечением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, содержащее все элементы, принадлежащие всем множествам.

1.3. Способы доказательства тождеств

При доказательстве тождеств, содержащих комбинацию операций над несколькими множествами, используют следующие способы:

1. Метод двух включений. Основан на определении равенства множеств: два множества равны, если они являются подмножествами друг друга, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Соответственно, для доказательства тождества доказывают, что $x \in A \Rightarrow x \in B$, и затем $x \in B \Rightarrow x \in A$, где A – левая часть тождества, B – правая часть тождества.

2. Диаграммы Венна для левой и правой частей тождества.
3. Метод тождественных преобразований, состоящий в последовательном использовании свойств операций над множествами.
4. Метод характеристических функций.

Если множество A задается характеристической функцией

$$\chi(A)=\begin{cases}1, & x \in A\\ 0, & x \notin A\end{cases},$$

А множество B - аналогичной характеристической функцией $\chi(B)$, то справедливы следующие соотношения:

$$\chi(\bar{A})=1-\chi(A),$$

$$\chi(A\cap B)=\chi(A)\chi(B) ,$$

$$\chi(A\cup B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A\cap B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A)\chi(B),$$

$$\chi(A\setminus B)=\chi(A)-\chi(A)\chi(B),$$

$$\chi(A\Delta B)=\chi(A)+\chi(B)-2\chi(A)\chi(B).$$

Докажем последнее равенство, например, используя тождество $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Имеем:

$$\chi(A\Delta B)=\chi((A\setminus B)\cup(B\setminus A))=\chi(A\setminus B)+\chi(B\setminus A)-\chi(A\setminus B)\chi(B\setminus A)=$$

$$\chi(A)-\chi(A)\chi(B)+\chi(B)-\chi(A)\chi(B)-\big(\chi(A)-\chi(A)\chi(B)\big)\big(\chi(B)-\chi(A)\chi(B)\big)=$$

$$\chi(A)+\chi(B)-2\chi(A)\chi(B)-\big(\chi(A)\chi(B)-\chi^2(A)\chi(B)-\chi(A)\chi^2(B)+\chi^2(A)\chi^2(B)\big)$$

Так как $\chi^2(A)=\chi(A)$, получаем $\chi(A\Delta B)=\chi(A)+\chi(B)-2\chi(A)\chi(B)$. Заметим, что равенство нулю $\chi(A\setminus B)\chi(B\setminus A)=\chi(A\setminus B)\cap\chi(B\setminus A)$ очевидным образом следует из определения разности множеств.

5. Таблица истинности. Напомним, что множество можно задать характеристическим предикатом, т.е. условием, выраженным в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение:

$$M=\{x \mid P(x)\} .$$

Принимая, что $P(x)$ возвращает 1 при $x \in M$ и 0 – в противном случае, составим для операций над множествами таблицу истинности. Поскольку для двух множеств возможно четыре различных комбинации значений соответствующих предикатов, в таблице будет четыре строки.

A	B	$A\bigcup B$	$A\bigcap B$	$A\setminus B$	$B\setminus A$	$A\Delta B$	$\bar{A}$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0

Тот же результат можно получить, если пронумеровать возможные области расположения элементов универсального множества, как показано на рисунке 2, и использовать диаграммы Венна.

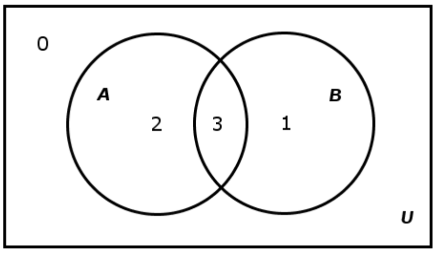

Рис. 2

Задание 1

Доказать или опровергнуть утверждение

$$(A \setminus B) \bigcap (C \Delta B) = (C \setminus B) \setminus \bar{A}.$$

I способ

Используем таблицу истинности. Для трех множеств возможно восемь возможных вариантов включения элементов (см. рис. 3):

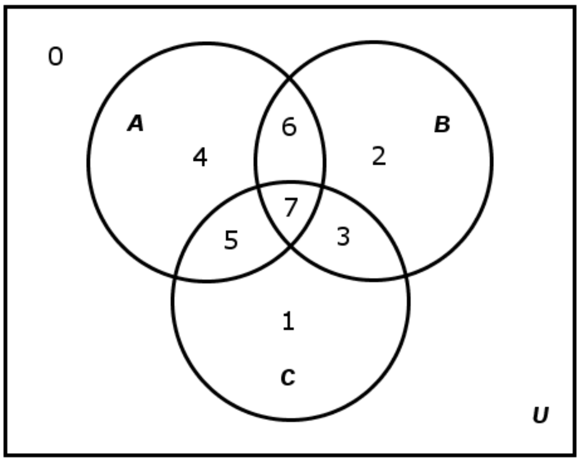

Рис. 3

Составим таблицу:

N области	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Теперь определим битовую строку, соответствующую левой части предложенного утверждения, поочередно выполняя операции над множествами:

A	B	C	$A \setminus B$	$C \Delta B$	$(A \setminus B) \bigcap (C \Delta B)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0

Аналогично поступим с правой частью утверждения:

A	B	C	$C \setminus B$	$\overline{A}$	$(C \setminus B) \setminus \overline{A}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

Сравнивая полученные столбцы, приходим к выводу, что данное утверждение верно.

II способ

Изобразим диаграммы Венна для операций в левой и правой частях утверждения в следующем порядке:

1 3 2 4 6 5

$$(A \setminus B) \bigcap (C \Delta B) = (C \setminus B) \setminus \overline{A}$$

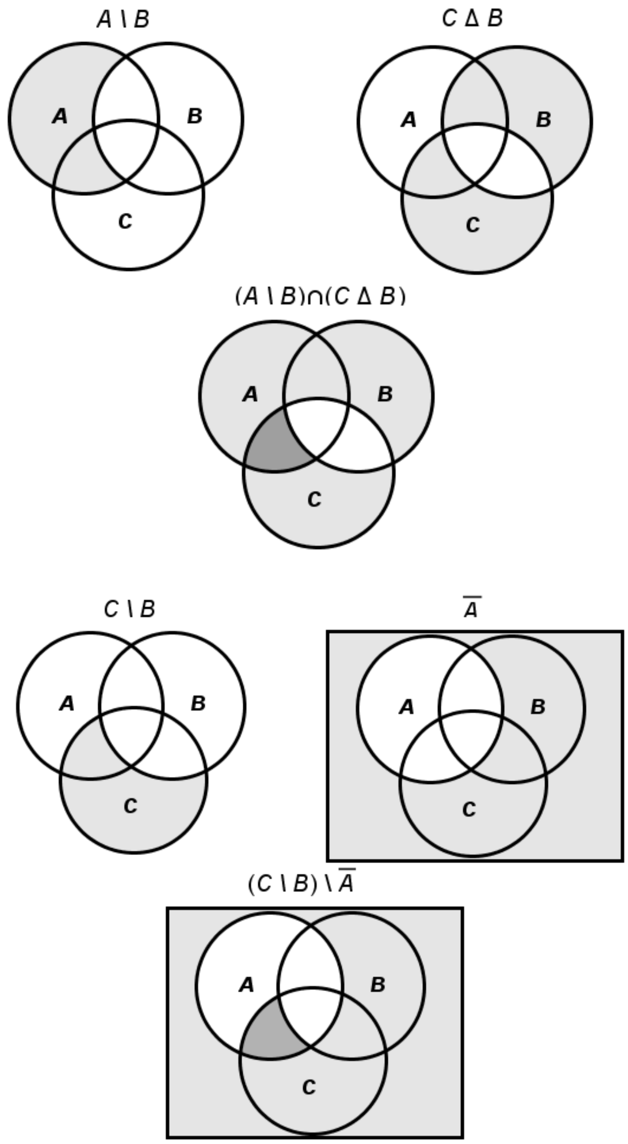

Рис. 4

Как следует из диаграмм Венна, левая и правая часть утверждения равны.

2. БУЛЕВА АЛГЕБРА

2.1. Булевы функции

Булева алгебра рассматривает математические операции и соответствующие правила для них на множестве $\{0,1\}$. Наиболее часто в булевых алгебрах используются три операции: отрицание, булева сумма и булево произведение.

Отрицание элемента (обозначается чертой вверху) определяется как $\overline{0}=1$ и $\overline{1}=0$.

Булева (логическая) сумма, обозначаемая $+$, принимает следующие значения:

$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+0=1, \quad 1+1=1$.

Булево (логическое) произведение, обозначаемое $\cdot$, принимает следующие значения:

$0\cdot 0=0, \quad 0\cdot 1=0, \quad 1\cdot 0=0, \quad 1\cdot 1=1$.

Если это не будет вызывать разночтений, то так же как в обычном произведении, знак $\cdot$ будет опускаться. Если не используются скобки, то очерёдность выполнения булевых операций следующая: сначала выполняются все отрицания, затем находятся все булевы произведения, затем вычисляются все булевы суммы.

Отрицание, булева сумма и булево произведение соответствуют логическим операциям $\neg, \vee, \wedge$ соответственно; 0 соответствует F (ложь), 1 соответствует T (истина).

Пусть $B=\{0,1\}$. Переменная x называется *булевой переменной,* если она может принимать значения только из множества B. Булевой функцией от n переменных $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется функция, определённая на множестве B^n и принимающая значения из множества B. Значения булевой функции часто задаются с помощью таблиц истинности. Например, булева функция $f(x_1,x_2)$, принимающая значение 1, когда $x_1=0$, а $x_2=1$, и значение 0 в остальных случаях может быть представлена *таблицей истинности*

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Булевы функции f и g от n переменных равны тогда и только тогда, когда $f(b_1,b_2,\ldots,b_n)=g(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ для произвольного набора $b_1,b_2,\ldots,b_n$, принадлежащего множеству B^n. В равенстве функций можно убедиться, построив и сравнив таблицы истинности для каждой из них. Другой способ сравнения функция основан на тождествах булевой алгебры.

Рассмотрим булевы функции от n переменных при $n=0,1,2$.

Если $n=0$, то функция не зависит от переменных, то есть является константой. Таких функций возможно всего две: тождественный ноль и тождественная единица.

Если $n=1$, то функция зависит от одной переменной. Все четыре возможные функции представлены в таблице

x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функция $\varphi_1(x)$ есть не что иное, как тождественный ноль, функция $\varphi_4(x)$ – тождественная единица, функция $\varphi_2(x)=x$, функция $\varphi_3(x)=\overline{x}$, обозначаемая иногда как $\neg x$ или $NOT\ x$.

Заметим, что $\varphi_1(x)$ и $\varphi_4(x)$ фактически не зависят от x. В этом случае переменная x для них является фиктивной. Более формально, переменная x_i называется *фиктивной* для функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, если для всех возможных наборов $a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n$ выполняется равенство $f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},0,a_{i+1},\ldots,a_n)=f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},1,a_{i+1},\ldots,a_n)$.

Если число переменных $n=2$, то существует 16 различных булевых функций, приведённых в таблице.

x_1	x_2	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x_1	x_2	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}	ψ_{16}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция $\psi_1(x_1,x_2)$ – тождественный ноль, функция $\psi_{16}(x_1,x_2)$ – тождественная единица, функция $\psi_4(x_1,x_2)=x_1$, $\psi_{13}(x_1,x_2)=\overline{x}_1$, $\psi_6(x_1,x_2)=x_2$, $\psi_{11}(x_1,x_2)=\overline{x}_2$. У этих шести функций присутствуют фиктивные переменные.

Функция $\psi_2(x_1,x_2)=x_1x_2$ – булево произведение. Другое название для этой функции – конъюнкция. Обозначаться эта функция может также как $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \,\&\, x_2$, $x_1\, AND\, x_2$.

Функция $\psi_8(x_1,x_2)=x_1+x_2$ – булева сумма. Другое название для этой функции – дизъюнкция. Обозначаться эта функция может также как $x_1 \vee x_2$, $x_1\, OR\, x_2$.

Функция $\psi_7(x_1,x_2)=x_1 \oplus x_2$ равна нулю, если обе переменные одинаковы, и единице в противном случае. Она называется сложением по модулю 2 или неравносильностью и обозначается также $x_1+x_2 \bmod 2$ или $x_1\, XOR\, x_2$.

В отличие от предыдущей, функция $\psi_{10}(x_1,x_2)=x_1 \leftrightarrow x_2$ равна единице, если обе переменные одинаковы, и нулю в противном случае. Она называется равносильностью или эквивалентностью. Другие обозначения для неё $x_1 \sim x_2$, $x_1\, XNOR\, x_2$.

Функция $\psi_{14}(x_1,x_2)=x_1 \to x_2$ называется импликацией и широко используется в математической (и не только) логике. Часто её интерпретируют как «из x_1 следует x_2».

Функции $\psi_9(x_1,x_2)=x_1 \downarrow x_2$ (стрелка Пирса, $x_1\, NOR\, x_2$) и $\psi_{15}(x_1,x_2)=x_1 \mid x_2$ (штрих Шеффера, $x_1\, NAND\, x_2$) находят своё применение в вычислительной технике.

Число различных булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}. Поэтому для задания булевых функций лучше использовать другие методы.

Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – булевы функции от n переменных. *Отрицанием булевой функции* f будет функция $\overline{f}$, которая определяется как $\overline{f}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\overline{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$. *Сумму* булевых функций $f+g$ и *произведение* булевых функций $f \cdot g$ определим как

$$(f+g)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+g(x_1,x_2,\ldots,x_n);$$

$$(f \cdot g)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot g(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Теперь можно определить множество булевых функций с помощью порождающей процедуры:

1) $0,1,x_1,x_2,\ldots,x_n$ – булевы функции;

2) если $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – булевы функции, то $\overline{f}$, $f+g$ и $f \cdot g$ – булевы функции.

Задание 2

Построить таблицу истинности для высказывания

$$\left(\overline{a}b \to c\right) \leftrightarrow \left(\overline{a \oplus b}\right)$$

Для этого обратимся к таблицам истинности соответствующих функций:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

x_1	x_2	x_1x_2	$x_1 \to x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1

Получаем:

a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{a}b$	$\bar{a}b \to c$	$a \oplus b$	$\overline{a \oplus b}$	$(\bar{a}b \to c) \leftrightarrow (\overline{a \oplus b})$
0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1

2.2. Разложение булевой функции по переменным. СДНФ

Одной из задач булевой алгебры является задача представить произвольную булеву функцию, в том числе заданную таблично, используя только переменные, их отрицания, булевы суммы и булевы произведения. Для того, чтобы доказать такую возможность, сделаем предварительно несколько замечаний.

Определим $x^\sigma = \begin{cases} x, \text{ если } \sigma = 1 \\ \bar{x}, \text{ если } \sigma = 0 \end{cases}$. Из этого определения следует, что $0^0 = \bar{0} = 1;\ 0^1 = 0;\ 1^0 = \bar{1} = 0;\ 1^1 = 1$. Легко заметить, что $x^\sigma = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \sigma$; в противном случае $x^\sigma = 0$.

Элементарной конъюнкцией (минитермом) переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$, где σ_i равно 0 или 1. Выражение, представляющее собой булеву сумму элементарных конъюнкций, называется *дизъюнктивной нормальной формой (суммой произведений)*, так что, если $m_1, m_2, \ldots, m_k$ есть элементарные конъюнкции, то $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ – дизъюнктивная нормальная форма.

Любая ненулевая булева функция может быть представлена в виде *совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ)*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n},$$

где суммирование происходит по тем и только тем наборам $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, на которых функция принимает значения, равные единице.

Например, если равны единице $f(0,0,1)$, $f(0,1,1)$, $f(1,0,1)$, то, в соответствии с теоремой

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^0 x_2^0 x_3^1 + x_1^0 x_2^1 x_3^1 + x_1^1 x_2^0 x_3^1$$

или, используя определение x^σ,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3.$$

2.3. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм

Как правило, разложение функций в СДНФ содержит значительно большее количество переменных и операций, чем необходимо для практической реализации этой функции. Элементарные конъюнкции в СДНФ могут различаться только по одной переменной, так что в одну из них входит сама переменная, а в другую – её отрицание. В этом случае возможно объединить эти конъюнкции.

На практике наиболее востребованной оказалась задача минимизации – нахождения минимальной формулы, реализующей данную функцию. Наиболее детально эта задача исследована для отыскания дизъюнктивных нормальных форм, минимальных по числу вхождений переменных. Рассмотрим три алгоритма: минимизацию на единичном кубе, карты Карно и алгоритм Квайна-Маккласки.

Минимизация на единичном кубе.

Данный алгоритм отличается наглядностью, но удобен лишь при минимизации ДНФ до трех переменных.

Изобразим единичный куб таким образом, чтобы одна из его вершин лежала в начале системы координат $Ox_1x_2x_3$, а плоскости граней были параллельны координатным плоскостям. В таком случае координаты его вершин соответствуют всем возможным наборам значений переменных x_1, x_2, x_3.

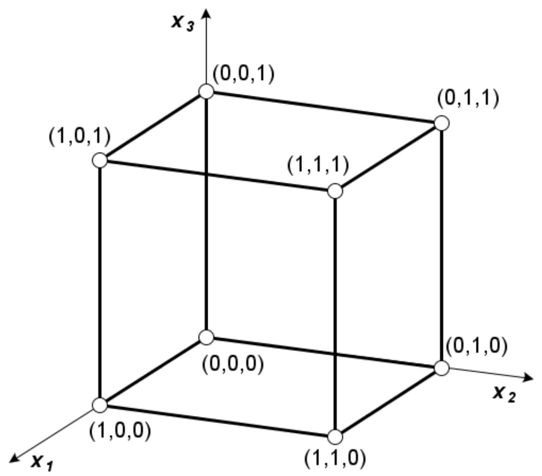

Рис. 5

Обратим внимание, что при переходе по ребру от одной вершины к другой изменяется значение лишь одной переменной.

Пусть мы имеем функцию с таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Построим для нее СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

Выделим те вершины, которые соответствуют наборам значений, входящим в ДНФ. Две выделенные вершины лежат на одном ребре – вершины с координатами (1,0,0) и (1,1,0). Значит, при изменении значения x_2 при фиксированных значениях $x_1 = 1$ и $x_3 = 0$ значение самой функции не изменилось и осталось равным 1, поэтому в данной ситуации переменную x_2 можно исключить, а соответствующие элементарные конъюнкции заменить одним минитермом – $x_1\bar{x}_3$.

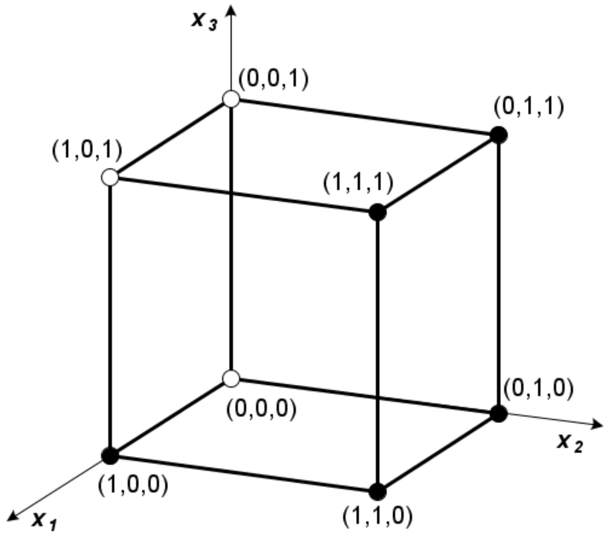

Рис. 6а

Также мы видим, что четыре вершины лежат на одной грани. Это позволяет исключить уже две переменные. Действительно, при $x_2 = 1$ переменные x_1, x_3 принимают все возможные комбинации значений, а функция по-прежнему остается равной 1. Поэтому оставшиеся элементарные конъюнкции можно заменить одним минитермом – x_2.

Так как все выделенные вершины вошли в какое-либо объединение, процесс минимизации ДНФ считаем завершенным. Данная функция может быть представлена как

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_1\bar{x}_3 .$$

При желании, можно построить для нее таблицу истинности и убедиться, что она соответствует заданной функции.

Графически объединение вершин представим следующим образом:

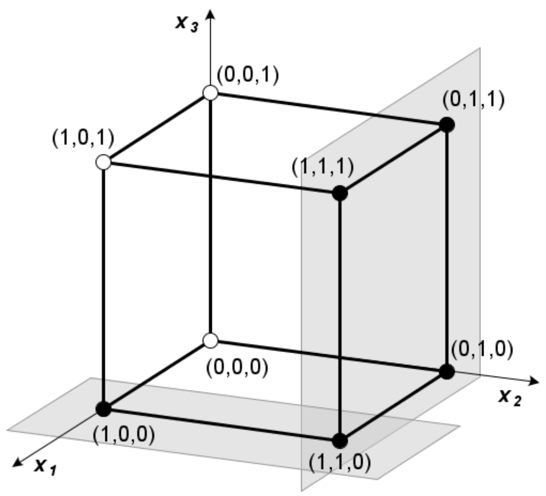

Рис. 6б

Очевидно, что вершины, лежащие на одной грани, можно объединить в пределах ребер, как мы это сделали с вершинами (1,0,0) и (1,1,0). Полученная таким образом функция также будет иметь требуемую таблицу истинности. Но так как нашей целью является минимизация ДНФ, требуется получить как можно более крупные объединения и меньшее количество слагаемых.

Если какая-либо из вершин не может быть ни с кем объединена, соответствующая элементарная конъюнкция полностью переносится в минимальную ДНФ.

Карты Карно

Карты Карно также представляют собой графический метод минимизации ДНФ, который подходит и для большего количества переменных. Рассмотрим его на примере функции трёх переменных.

В этом случае карта Карно представляет собой прямоугольник, разделённый на восемь квадратов. Каждый из квадратов соответствует одной из возможных элементарных конъюнкций. Два квадрата будут смежными, если элементарные конъюнкции, которые они представляют, различаются только по одной переменной. Кроме того, смежными являются и квадраты, расположенные в одной строке в первом и последнем столбцах.

Для представления функции отметим те квадраты, что соответствуют элементарным конъюнкциям, входящим в СДНФ (или, что то же самое, соответствуют наборам, на которых функция принимает значение 1).

Для того чтобы упростить ДНФ функции трёх переменных, будем использовать блоки из смежных квадратов. Блок из двух смежных квадратов (размера 2×1 или 1×2) будет соответствовать произведению, содержащему только две переменные, блок из четырёх смежных квадратов (размера 4×1 или 2×2) представляет собой единственную переменную.

Целью алгоритма является нахождение покрытия всех единиц на карте и только их так, чтобы использовать минимальное число блоков, выбирая при этом в начале блоки большего размера.

Надо отметить, что решение задачи может быть не единственным, но суммарное число переменных в разных минимальных решениях будет одно и то же.

Например, пусть СДНФ функции имеет вид

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1 x_2 x_3}+\overline{x_1 x_2}x_3+\overline{x_1}x_2x_3+x_1\overline{x_2}x_3+x_1x_2x_3 .$$

Требуется, используя карту Карно, найти минимальную ДНФ, представляющую ту же самую функцию.

	$\overline{x_1 x_2}$	$\overline{x_1}x_2$	x_1x_2	$x_1\overline{x_2}$
$\overline{x_3}$	1			
x_3	1	1	1	1

Рис. 7

Из рисунка видно, что лежащие в нижнем ряду единицы можно покрыть прямоугольником 4×1, который соответствует переменной x_3. Оставшуюся в левом верхнем углу единицу можно покрыть прямоугольником 1×2, покрывающим также и единицу в левом нижнем углу (отметим, что покрытие прямоугольником 1×2 в соответствии с алгоритмом предпочтительнее покрытия квадратом 1×1). Данный прямоугольник соответствует произведению $\overline{x_1 x_2}$. Поскольку клеток с единицами больше не осталось, то алгоритм закончен и минимальная ДНФ, представляющая исходную функцию, имеет вид

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_3+\overline{x_1 x_2}.$$

	$\overline{x_1 x_2}$	$\overline{x_1}x_2$	x_1x_2	$x_1\overline{x_2}$
$\overline{x_3}$	1			
x_3	1	1	1	1

Рис. 8

Если число переменных другое, то соответственно видоизменяются и карты Карно. Так, для четырёх переменных они имеют размер 4×4, для пяти – 8×4, для шести – 8×8 и т.д., при этом надо строго следить, чтобы соседние столбцы, как и соседние строки, различались между собой только по одной переменной. Покрытие единиц на этих картах может осуществляться только подходящими прямоугольниками размера $2^k \times 2^m$ (где k и m – неотрицательные целые числа). Необходимо отметить, что уже для функции от девяти переменных использование карт Карно становиться довольно затруднительным, не говоря о функциях с большим числом переменных.

Алгоритм Квайна-Маккласки

В связи с этим потребовалось составить алгоритм минимизации СДНФ, который мог бы работать с любым числом переменных. Предложенный в 1950-х годах В. Квайном и Э. Маккласки метод минимизации состоит из двух частей. В первой части алгоритма находятся произведения – кандидаты на включение в минимальную ДНФ, во второй части определяются те из них, что действительно будут включены. Продемонстрируем работу этого алгоритма на примере.

Пример. Используя метод Квайна-Маккласки, найти минимальную ДНФ для функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2x_3 .$$

Для удобства запишем каждую из элементарных конъюнкций в виде битовой строки (или, что то же самое, выпишем все наборы, на которых функция принимает значение 1). Первый бит строки равен 1, если в элементарную конъюнкцию входит x_1, и равен 0, если входит $\overline{x}_1$. Аналогично получим и остальные биты. Затем отсортируем битовые строки, по числу единиц, входящих в них. Результат показан в следующей таблице.

Элементарная конъюнкция	Битовая строка	Число единиц
$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	000	0
$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$	001	1
$\overline{x}_1x_2x_3$	011	2
$x_1\overline{x}_2x_3$	101	
$x_1x_2x_3$	111	3

Элементарные конъюнкции можно объединить, если они различаются ровно по одной переменной. Следовательно, объединение битовых строк возможно, если число символов 1 отличается в них ровно на единицу, то есть объединение возможно только для строк из двух соседних групп. Когда две элементарные конъюнкции объединяются в одно произведение, то число переменных в нём равно двум. Соответствующая битовая строка будет содержать * для обозначения отсутствующей переменной. Например, элементарные конъюнкции $x_1\overline{x}_2x_3$ и $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$, представляемые битовыми строками 101 и 001 соответственно, могут быть объединены в произведение $\overline{x}_2x_3$, которое представляется строкой *01. Все пары элементарных конъюнкций, которые могут быть объединены, и получающиеся произведения, представлены в таблице.

	Строка		Строка		Строка
1	000	(1,2)	00*	(2,3,4,5)	**1
2	001	(2,3)	0*1		
3	011	(2,4)	*01		
4	101	(3,5)	*11		
5	111	(4,5)	1*1		

Затем объединяются попарно произведения, состоящие из двух переменных. Их объединение возможно, если они содержат одни и те же переменные и различаются лишь по одной из них. В приложении к битовым строкам это означает, что эти строки должны содержать * на одной и той же позиции и должны различаться только по одной цифре на оставшихся позициях. Например, мы можем объединить $\overline{x}_2x_3$ и x_2x_3, представляемые битовыми строками *01 и *11, как x_3, которой соответствует битовая строка **1.

В таблице также указано, какие элементарные конъюнкции использованы для формирования произведений.

Следующим шагом алгоритма будет построение минимального множества произведений, необходимых для представления булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$. Мы используем те произведения (или переменные), которые не использовались при объединениях, и начинаем с произведений, имеющих наименьшее количество переменных в своей записи. Затем переходим к таблице, в которой в строке записывается произведение, которое возможно войдёт в минимальную ДНФ, а столбцы представляют собой исходные элементарные конъюнкции. Если кандидат на вхождение в ДНФ включает в себя соответствующую элементарную конъюнкцию, то клетку, стоящую на пересечении этих строки и столбца, отмечаем (например, поставим X). В этом случае говорят, что произведение покрывает элементарную конъюнкцию. Необходимо, чтобы каждая из элементарных конъюнкций была покрыта по крайней мере одним из произведений. Это означает, что в каждом из столбцов должен иметься хотя бы один X. Следовательно, если в столбце находится только один X, то соответствующее произведение должно быть включено в минимальную ДНФ. Результаты применения второй части алгоритма к исходной функции приведены в таблице.

	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$	$\overline{x_1}x_2x_3$	$x_1\overline{x_2}x_3$	$x_1x_2x_3$
x_3		X	X	X	X
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	X	X			

Из таблицы видно, что в минимальную ДНФ нужно включить и x_3, и $\overline{x_1}\,\overline{x_2}$. Следовательно, минимальная ДНФ для функции имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}.$$

Задание 3

Для булевой функции, представленной таблицей истинности, составить совершенную дизъюнктивную нормальную форму и минимизировать ее, используя единичный куб, карты Карно и алгоритм Квайна-Маккласки:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

В первую очередь запишем СДНФ данной функции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3$$

На единичном кубе отметим и объединим соответствующие вершины (рис. 8). В результате объединения вершин (0,0,1) и (1,0,1) получаем слагаемое $\overline{x_2}x_3$, а ребро с вершинами (0,0,0) и (0,1,0) дает элементарную конъюнкцию $\overline{x_1}\,\overline{x_3}$. Очевидно, что вершины (0,0,0) и (0,0,1) также могут быть объединены, но поскольку они уже вошли в другие слагаемые, данное объединение будет лишним.

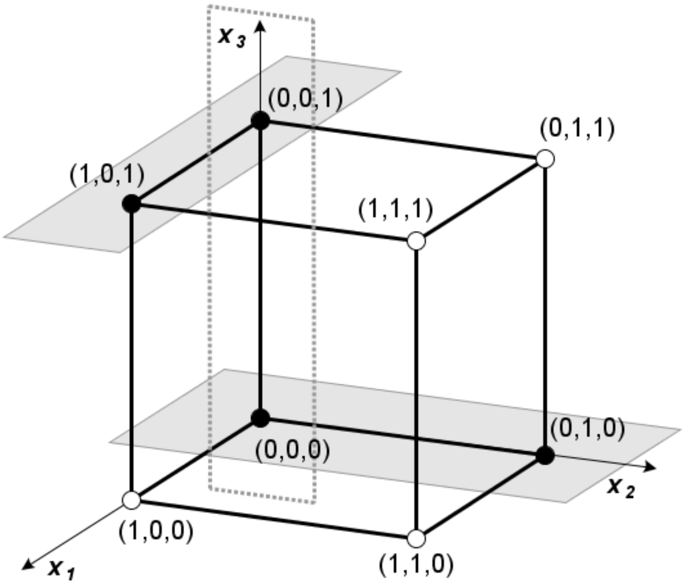

Рис. 8

Таким образом, минимальная ДНФ имеет вид:

$$f = \overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_3 .$$

Замечание. Если бы при нулевых значениях переменных функция также была равна нулю, то вершину (0,1,0) нельзя было бы объединить с другой вершиной даже в пределах ребра. В таком случае минимальная ДНФ приняла бы вид $f = \overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$.

Проведем минимизацию с использованием карт Карно. Отметим квадраты, соответствующие полученной ранее СДНФ, и по возможности покроем их прямоугольниками.

Обратим внимание, что первый столбец мы не включаем в минимальную ДНФ, т.к. соответствующие квадраты уже покрыты другими блоками. Кроме того, при покрытии помним о том, что первый и четвертый столбцы считаются соседними.

	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$\overline{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\overline{x}_2$
$\overline{x}_3$	1	1		
x_3	1			1

Имеем функцию

$$f = \overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_3 .$$

Как видно, данная функция совпадает с результатом, полученным ранее.

И наконец, проведем минимизацию алгоритмом Квайна-Макгласки. Заполним таблицу по аналогии с разобранными ранее примерами:

<table>
<tr><th>Битовая строка</th><th>Число единиц</th></tr>
<tr><td>000</td><td>0</td></tr>
<tr><td>001</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>010</td></tr>
<tr><td>101</td><td>2</td></tr>
</table>

Сравним элементарные конъюнкции, стоящие в соседних группах:

	Строка		Строка
1	000	(1,2)	00*
2	001	(1,3)	0*0
3	010	(2,4)	*01
4	101		

Дальнейшее объединение невозможно, поэтому можно сразу перейти к заключительному этапу:

	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2 x_3$
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	X	X		
$\bar{x}_1\bar{x}_3$	X		X	
$\bar{x}_2 x_3$		X		X

В третьем и четвертом столбце только по одному X, поэтому соответствующие элементарные конъюнкции $\bar{x}_1\bar{x}_3$ и $\bar{x}_2 x_3$ обязательно войдут в состав минимальной ДНФ. Конъюнкцию $\bar{x}_1\bar{x}_2$ включать в минимальную ДНФ не нужно, поскольку слагаемые $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ и $\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$ уже отмечены во второй и третьей строках. Таким образом получаем:

$$f = \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3 .$$

Элементарная конъюнкция $\bar{x}_1\bar{x}_2$, которую мы исключили из рассмотрения, как раз соответствует тому объединению на единичном кубе и на картах Карно, от которого мы отказались сразу, заметив его избыточность.

3. ОТНОШЕНИЯ

3.1. Бинарные отношения

Отношением R множеств A и B называется произвольное подмножество их декартова произведения $A \times B$. Если $(a,b) \in R$, то это обозначается aRb; при этом говорят, что a и b находятся в отношении R. Если $A = B$, то отношение R есть подмножество декартова произведения $A \times A$; такое отношение называются бинарным отношением на A.

Например, пусть $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Тогда $R = \{(a,b) \mid a \vdots b\}$ – множества пар чисел таких, что a без остатка делится на b – есть бинарное отношение на множестве A.

Отношения могут быть заданы одним из следующих способов:

- словами (используя подходящие высказывания);
- как множество упорядоченных пар;
- как график (если A – числовое множество, то отношение можно представить как множество всех точек плоскости, для которых xRy);
- как ориентированный граф;
- как матрица.

Рассмотрим подробнее два последних способа задания отношения.

Пусть A – конечное множество и R – бинарное отношение на нём. Изобразим элементы этого множества точками на плоскости (эти точки принято называть *вершинами*). Для каждой упорядоченной пары отношения R нарисуем *дугу* (линию со стрелкой), соединяющую вершины, представляющие компоненты пары. Такой объект называется ориентированным графом.

Пример. Изобразим отношение, заданное в примере, в виде ориентированного графа. Запишем сначала отношение R как множество упорядоченных пар

$$R = \{(1,1);(2,1);(2,2);(3,1);(3,3);(4,1);(4,2);$$
$$(4,4);(5,1);(5,5);(6,1);(6,2);(6,3);(6,6)\}.$$

Затем построим соответствующий ориентированный граф (рис. 9).

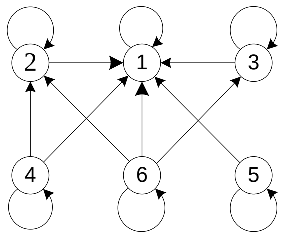

Рис. 9

Ещё один способ задания бинарного отношения на конечном множестве основан на использовании матриц. Пронумеруем элементы множества A и выпишем их в установленном порядке: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Для определения отношения R зададим матрицу M размера $n \times n$. Элементы матрицы m_{ij} определим следующим образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, a_j) \in R, \\ 0, & \text{если } (a_i, a_j) \notin R. \end{cases}$$

В таких обозначениях матрица отношения R из примера 1 имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Надо заметить, что задание отношения на A как множество упорядоченных пар, как ориентированный граф и как матрица допустимо лишь для конечного множества A.

3.2. Свойства отношений

Отношение R на множестве A называется

- *рефлексивным,* если $(a,a) \in R$ для всех $a \in R$;
- *антирефлексивным,* если $(a,a) \notin R$ для любого $a \in R$;
- *симметричным,* если для всех a и b, принадлежащих A, из $(a,b) \in R$ следует, что $(b,a) \in R$;
- *антисимметричным,* если для всех a и b, принадлежащих A, из $(a,b) \in R$ и $(b,a) \in R$ следует, что $a = b$;
- *транзитивным,* если для любых a, b и c, принадлежащих A, из $(a,b) \in R$ и $(b,c) \in R$ следует, что $(a,c) \in R$.
- *линейным (полным)*, если для всех a и b, принадлежащих A, $a = b$ или $(a,b) \in R$, или $(b,a) \in R$.

Если рефлексивное отношение задано ориентированным графом, то каждая вершина имеет петлю, то есть дугу, начинающуюся и заканчивающуюся в одной и той же вершине.

У графа, представляющего антирефлексивное отношение, наоборот, отсутствует петля у любой вершины.

Граф симметричного отношения вместе с дугой из вершины a в вершину b имеет дугу, направленную в обратную сторону,

Если граф представляет антисимметричное отношение, то при наличии дуги из вершины a в несовпадающую с ней вершину b, дуга из b в a обязательно будет отсутствовать.

Граф транзитивного отношения устроен так, что вместе с дугами из вершины a в вершину b и из b в c у него обязательно будет дуга из a в c.

Если заменить в графе линейного отношения дуги ребрами – линиями без указания направления, то полученный неориентированный граф будет полным графом.

Используя представление в виде матриц, также можно судить о свойствах рассматриваемого отношения.

Если отношение рефлексивно, то на главной диагонали матрицы все элементы m_{ii} равны единице. В случае, если отношение антирефлексивно, то элементы m_{ii} в матрице отношения равны нулю.

Матрица симметричного отношения будет симметричной, то есть для любых i, j выполняется $m_{ij} = m_{ji}$, или, в матричной записи, $M = M^T$.

В матрице антисимметричного отношения выполняется условие $m_{ij} + m_{ji} < 2$ для любых i, j.

Для матрицы транзитивного отношения справедливо $M^2 \le M$ (правило возведения в степень матрицы отношения описано далее). Знак неравенства в данном случае означает, что при умножении матрицы отношения на себя в ней не появляются новые единицы (новые пары элементов множества).

И наконец, в матрице линейного отношения $m_{ij} + m_{ji} > 0$.

Например, отношение из примера в предыдущем параграфе является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

3.3. Операции над отношениями

Так как отношения являются множествами, то для них определены те же операции:

- пересечение отношений R_1 и R_2: $a(R_1 \cap R_2)b \Leftrightarrow aR_1b$ и aR_2b;
- объединение отношений R_1 и R_2: $a(R_1 \cup R_2)b \Leftrightarrow aR_1b$ или aR_2b;
- дополнение отношения R: $a\overline{R}b \Leftrightarrow (a,b) \notin R.$

Кроме того, для отношений можно ввести и дополнительные операции.

Отношение R^{-1} называется *обратным* к отношению R, если оно состоит из всех пар элементов (b,a), таких, что $(a,b)\in R$.

Легко заметить, что для получения обратного отношения в ориентированном графе достаточно изменить направления всех дуг, а в случае, когда отношение R представлено матрицей, достаточно транспонировать эту матрицу.

Пусть R_1 и R_2 — бинарные отношения на множестве A. *Композицией* отношений R_1 и R_2 называется бинарное отношение R, определяемое на множестве A как

$R=R_1\circ R_2=\{(a,b)|\,\exists c:(a,c)\in R_1,(c,b)\in R_2\}.$

Пример. Отношения R_1 и R_2 заданы матрицами $M1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ и $M2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ соответственно. Найти матрицу, задающую отношение

а) $R_1\cap R_2$; б) $R_1\cup R_2$; в) $\overline{R_1}$; г) $R_1\circ R_2$; д) $R_2\circ R_1$.

Решение.

а) В матрице M, задающей пересечение $R_1\cap R_2$, $m_{ij}=1\Leftrightarrow m1_{ij}=1$ и $m2_{ij}=1$, т.е. матрица M определяется как поэлементная конъюнкция матриц $M1$ и $M2$:

$$M=M1\wedge M2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix};$$

б) В матрице M, задающей объединение $R_1\cup R_2$, $m_{ij}=1\Leftrightarrow m1_{ij}=1$ или $m2_{ij}=1$ (матрица M определяется как поэлементная дизъюнкция матриц $M1$ и $M2$):

$$M=M1\vee M2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix};$$

в) В матрице M, задающей дополнение R_1, $m_{ij}=1\Leftrightarrow m1_{ij}=0$ или $m_{ij}=0\Leftrightarrow m1_{ij}=1$, поэтому

$$M=\overline{M1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix};$$

г) Матрица M, задающая композицию $R_1\circ R_2$, получается по правилам перемножения матриц, но вместо операций сложения и умножения используются логическое сложение (дизъюнкция) и логическое умножение (конъюнкция) соответственно:

$$M=M1\odot M2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix};$$

д) Аналогично $R_2\circ R_1$:

$$M=M2\odot M1=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Определение. *Степенью отношения* R на множестве A называется его композиция с самим собой:

$$R^n=\underbrace{R\circ R\circ\ldots\circ R}_{n\text{ раз}}.$$

По определению, $R^0=E$ (тождественное отображение), $R^1=R,\ R^2=R\circ R,\ R^n=R^{n-1}\circ R.$

Заметим, что отношение R транзитивно тогда и только тогда, когда $R^2\subset R$.

3.4. Замыкание отношений

Пусть R — бинарное отношение на множестве A.

Определение. *Замыканием отношения* R относительно свойства P называется отношение R_P, удовлетворяющее условиям:

1. R_P обладает свойством P;
2. $R \subset R_P$;
3. R_P — наименьшее из таких множеств, то есть, если какое-то отношение R^* содержит R и обладает свойством P, то $R_P \subset R^*$.

Пусть R – отношение на множестве A:

а) $R \cup I$ есть рефлексивное замыкание R (где $I = \{(a,a) \mid \forall a \in A\}$);

б) $R \cup R^{-1}$ есть симметричное замыкание R;

в) если A – конечное множество, содержащее n элементов, то отношение $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$ есть транзитивное замыкание R.

Соответственно, матрица рефлексивного замыкания находится как $M_R = M \vee E$, поскольку единичная матрица E является матрицей тождественного отношения I.

Так как матрица обратного отношения получается из матрицы исходного отношения путем транспонирования, для матрицы симметричного замыкания имеем:

$M_S = M \vee M^T$.

Наконец, матрица транзитивного замыкания отношения на конечном множестве, содержащем n элементов, определяется следующим образом:

$M_T = M \vee M^2 \vee M^3 \vee \ldots \vee M^n$.

Задание 4.

Построить рефлексивное, симметричное и транзитивное замыкание для отношения, заданного матрицей:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рефлексивное замыкание имеет вид:

$$M_R = M \vee E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем симметричное замыкание:

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_S = M \vee M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для построения транзитивного замыкания последовательно найдем матрицы M^2, M^3, M^4:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^4 = M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, матрица транзитивного замыкания имеет вид:

$$M_T = M \vee M^2 \vee M^3 \vee M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечания:

1. Вычислив M^2, можно ответить на вопрос, является ли исходное отношение транзитивным. Для этого достаточно проверить, появились ли в результате умножения новые единицы. Если в матрице M^2 новых единиц не образовалось, это означает, что рассматриваемое отношение изначально является транзитивным, а значит, находить его транзитивное замыкание нет смысла. В нашем примере исходное отношение не транзитивно (новая единица выделена жирным).
2. В общем случае все требуемые степени матрицы могут быть различными.
3. Если в процессе возведения матрицы в степень получилась матрица, полностью состоящая из единиц, дальнейшее возведение в степень не требуется: за счет дизъюнкции матрица транзитивного замыкания также будет состоять только из единиц.

4. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

4.1. Основные правила комбинаторики

Комбинаторика – это наука о комбинациях, которая позволяет решить две главные задачи: подсчитать количество возможных комбинаций (решений задачи) и перечислить их.

Существует четыре ключевых правила комбинаторики:

1. Правило умножения. Если первый элемент комбинации можно выбрать x_1 способами, после чего второй элемент комбинации выбирается x_2 способами, и т.д., а последний элемент кобинации - x_N способами, то всего можно составить $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_N$ комбинаций. Обратим внимание, что в данном случае элементы выбираются последовательно. Типичный пример – составление пароля из заданного количества символов.
2. Правило сложения. Если все комбинации можно разбить на N непересекающихся классов, в первом из которых - x_1 комбинация, во втором - x_2 комбинаций, и т.д., то общее число комбинаций - $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N$. Например, при подсчете количества паролей, содержащих от 6 до 8 символов, общее число комбинаций складывается из трех значений: количество паролей из 6 символов, количество паролей из 7 символов и количество паролей из 8 символов. В каждом из трех случаев, как указывалось ранее, для подсчета числа паролей уже используется правило умножения.
3. Правило вычитания. Если подсчитать количество комбинаций, удовлетворяющих определенному требованию, затруднительно, то подсчитывают общее число комбинаций (без ограничений) и вычитают из полученного значения количество комбинаций, нарушающих указанное требование.
4. Правило деления. Если при подсчёте комбинаций каждая из них была посчитана k раз, то полученный результат нужно поделить на k.

4.2. Основные типы комбинаций

Перестановка из N различных объектов – это комбинация, которая получается в результате любого их упорядочивания.

Первый элемент комбинации можно выбрать N способами, второй элемент – $(N-1)$ способами (поскольку выбирать мы теперь можем только из $(N-1)$ объекта), и т.д. Согласно правилу умножения получаем:

$$P_N = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot 1 = N!$$

Размещение из N по k – это комбинация, которая получается в результате *последовательного* выбора без возвращения любых k объектов из N имеющихся (порядок выбора при этом учитывается).

Рассуждения здесь аналогичны предыдущему случаю, за исключением того, что выбираем только k объектов, а не все N:

$$A_N^k = N(N-1)...(N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

Если при выборе объектов порядок значения не имеет, то мы получаем следующий тип комбинаций – сочетания.

Сочетание из N по k – это комбинация, которая получается в результате *одновременного* выбора любых k объектов из N имеющихся (порядок выбора при этом не учитывается).

Пример. Если мы выбираем из группы студентов трех человек для поездки в лагерь, то для подсчета возможных вариантов выбора используются сочетания, поскольку эти трое равноправны между собой. Если же речь идет о выборе призеров (первое, второе и третье места), то порядок выбора, кто на каком месте, уже играет роль, и подсчитывается число возможных размещений.

Допустим, мы выбрали трех человек произвольно (сочетания), а затем подсчитали, сколькими способами можно разделить между ними призовые места (перестановки). По определению, таким образом мы можем найти количество размещений. Для подсчета количества сочетаний справедлива формула:

$$C_N^k = \frac{A_N^k}{k!} = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

Перечисленные выше комбинации объединяло одно – при добавлении объекта в комбинацию он убирался из возможных вариантов выбора в дальнейшем, т.е. объекты в комбинациях не повторялись. Очевидно, что при возможности повторений количество комбинаций изменится.

Так, размещение с повторениями из N по k – это комбинация, которая получается в результате последовательного выбора с возвращением любых k объектов из N имеющихся (порядок выбора при этом учитывается).

Поскольку один и тот же предмет можно выбрать многократно, теперь каждый (а не только первый) элемент комбинации выбирается N способами. Соответственно, получаем

$$\overline{A}_N^k = N^k.$$

Сочетание с повторениями из N по k – это комбинация, которая получается в результате выбора с возвращением любых k объектов из N имеющихся (порядок выбора не учитывается, один и тот же предмет может быть выбран многократно).

Формула для подсчета количества сочетаний с повторениями выводится несколько сложнее, чем в предыдущих случаях. Для этого перейдем к следующей задаче: определить, сколькими способами можно разложить k шаров по N ящикам, причем допустимо класть в один ящик несколько шаров. Это допущение как раз обеспечивает эквивалентность задачи выбору объектов с возвращением. Поскольку существует $C_{N+k-1}^k = C_{N+k-1}^{N-1}$ способов размещения шаров, то получаем:

$$\overline{C}_N^k = C_{N+k-1}^k = C_{N+k-1}^{N-1}.$$

Замечание. Один из вариантов решения задачи о шарах заключается в рассмотрении ситуации под другим углом: условно есть k мест для расположения шаров и $N-1$ место для расстановки перегородок между ящиками, т.е. всего есть $N+k-1$ позиций. Поэтому можно не раскладывать шары по ящикам, а либо выбрать k позиций для шаров, либо, что равносильно, выбрать $N-1$ позиций для перегородок из имеющихся $N+k-1$ мест.

Допустим, N объектов разбиваются на m групп из одинаковых (неразличимых) объектов, причем в первой группе - n_1 объектов, во второй группе - n_2 объектов, и т.д., причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = N$. Если мы будем переставлять объекты, относящиеся к одной и той же группе, то новой перестановки мы не получим. Учитывая все случаи перестановок внутри групп, получаем формулу для подсчета перестановок с повторениями:

$$\overline{P}_N = \frac{N!}{n_1!...n_m!}.$$

Задание 5.

Определить, сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = k$, если переменные x_1, x_2, x_3 удовлетворяют заданным неравенствам.

Пусть по условию задачи имеем:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20,\ x_1 > 4,\ x_2 < 7,\ x_3 \le 5.$$

Поскольку переменные должны быть неотрицательными целыми числами, то найти решение данного уравнения по сути является тем же самым, что «разложить» число из правой части уравнения по «ящикам»-переменным. Как было указано выше, сделать это можно $\overline{C}_N^k = C_{N+k-1}^k = C_{N+k-1}^{N-1}$ способами, где $N = 3$ – число переменных, а $k = 20$ – правая часть уравнения.

Таким образом, общее количество решений данного уравнения без ограничений на переменные составляет $\overline{C}_3^{20}$. Для данного уравнения – это мощность универсума решений:

$$|U| = \overline{C}_3^{20}.$$

Пусть A - множество решений уравнения при $x_1 > 4$. Поскольку решения целочисленные, то будем рассматривать ограничение как $x_1 \ge 5$. Тогда рассуждаем следующим образом: так как x_1 точно равен хотя бы 5, то можно считать, что мы решаем уравнение

$x_1 + x_2 + x_3 = 20 - 5$, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 = 15$,
так как свободному «распределению» по переменным доступно только 15.

Получаем $|A| = \overline{C}_3^{15}$.

Искать мощность множества решений при $x_2 < 7$ неудобно, поэтому воспользуемся правилом вычитания. Рассмотрим B – множество решений при ограничении $x_2 \geq 7$. Тогда условию задачи будет удовлетворять множество $U \setminus B = \overline{B}$. Имеем

$$|B| = \overline{C}_3^{20-7} = \overline{C}_3^{13}.$$

Аналогично вводим множество C – множество решений при ограничении $x_3 \geq 6$ (условию задачи удовлетворяет множество $\overline{C}$, соответствующее ограничению $x_3 \leq 5$).

$$|C| = \overline{C}_3^{20-6} = \overline{C}_3^{14}.$$

Множество решений, удовлетворяющих всем заданным ограничениям на переменные, – это пересечение множеств A, $\overline{B}$ и $\overline{C}$.

Построим диаграмму Венна:

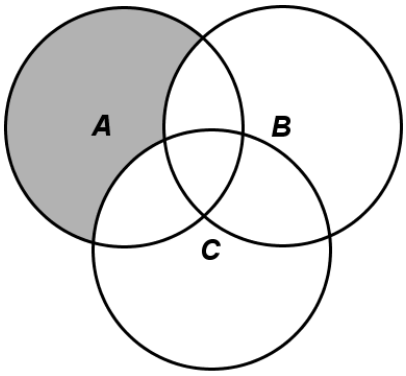

Рис. 10

Как следует из принципа включения-исключения, мощность указанного множества можно найти следующим образом:

$$|A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Множество $A \cap B$ – множество решений при $x_1 \geq 5$ и $x_2 \geq 7$, поэтому

$$|A \cap B| = \overline{C}_3^{20-5-7} = \overline{C}_3^{8}.$$

$A \cap C$ – множество решений при $x_1 \geq 5$ и $x_3 \geq 6$, значит

$$|A \cap C| = \overline{C}_3^{20-5-6} = \overline{C}_3^{9}.$$

Наконец, $A \cap B \cap C$ – множество решений при $x_1 \geq 5$, $x_2 \geq 7$ и $x_3 \geq 6$. Соответственно,

$$|A \cap B \cap C| = \overline{C}_3^{20-5-7-6} = \overline{C}_3^{2}.$$

Получаем

$$|A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = \overline{C}_3^{15} - \overline{C}_3^{8} - \overline{C}_3^{9} + \overline{C}_3^{2} = C_{17}^{15} - C_{10}^{8} - C_{11}^{9} + C_4^{2} =$$

$$\frac{17!}{15!2!} - \frac{10!}{8!2!} - \frac{11!}{9!2!} + \frac{4!}{2!2!} = \frac{16 \cdot 17}{2} - \frac{9 \cdot 10}{2} - \frac{10 \cdot 11}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} = 136 - 45 - 55 + 6 = 42.$$

Таким образом, при указанных ограничениях на переменные данное уравнение имеет 42 решения.

Список литературы

1. Белоусов, А.И. Дискретная математика: учебник для вузов / А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015 – 743 с.:ил. (Математика в техническом университете; вып. 19).
2. Дехтярь, М.И. Основы дискретной математики [Электронный ресурс] / М.И. Дехтярь. - 2-е изд., испр. - М. : Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016. - 184 с. : граф. - (Основы информационных технологий). - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428981
3. Шевелев, Ю.П. Дискретная математика. [Электронный ресурс] / Ю.П. Шевелев. - СПб. : Лань, 2016. - 592 с. - Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/71772