

## Метод наименьших квадратов

**Цель:** сформировать практические навыки создания программной реализации системы с заданными свойствами

**Задачи:** изучение метода наименьших квадратов, как способа аппроксимации функций.

**Задача 5.1.** Функция  $y=f(x)$  задана таблицей значений  $y_0, y_1, \dots, y_n$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Используя метод наименьших квадратов (МНК), найти многочлен  $P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$  наилучшего среднеквадратичного приближения оптимальной степени  $m=m^*$ . За оптимальное значение  $m^*$  принять ту

степень многочлена, начиная с которой величина 
$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum_{k=0}^n (P_m(x_k) - y_k)^2}$$

стабилизируется или начинает возрастать.

**ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:**

1. Задать векторы  $x$  и  $y$  исходных данных.
2. Найти многочлены  $P_m$ ,  $m=0,1,2,\dots$ , по методу наименьших квадратов. Вычислить соответствующие им значения  $\sigma_m$ .
3. Построить гистограмму зависимости  $\sigma_m$  от  $m$ , на основании которой выбрать оптимальную степень  $m^*$  многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения.
4. На одном чертеже построить графики многочленов  $P_m$ ,  $m=0,1,2,\dots, m^*$ , и точечный график исходной функции.

**Задача 5.2.** В таблице приведены результаты наблюдений за перемещением  $x$  материальной точки по оси  $Ox$  в моменты времени  $t \in [t_0, T]$ . Известно, что движение является равномерным и описывается линейной зависимостью  $x(t)=vt+b$ . Используя метод наименьших квадратов, определить скорость  $v$  и спрогнозировать положение точки в момент времени  $t=2T$ . На одном чертеже построить график движения точки и точечный график исходных наблюдений.

**Задача 5.3.** Зависимость между величинами  $x$  и  $y$  описывается функцией  $y=f(x, a, b)$ , где  $a$  и  $b$  – неизвестные параметры. Найти эти параметры, сведя исходную задачу к линейной задаче метода наименьших квадратов.

**Задача 5.4.** В таблице приведены результаты наблюдений за движением материальной точки в плоскости  $(x,y)$ . Известно, что движение осуществляется по кривой, описываемой многочленом  $y = kx^m + b$  (степень многочлена  $m$  задана в индивидуальном варианте).

Используя метод наименьших квадратов, определить коэффициенты  $k$  и  $b$ . Определить значение  $\bar{x}$  координаты  $x$ , соответствующее значению  $\bar{y}$  координаты  $y$  ( $\bar{y}$  задано в индивидуальном варианте).

**Задача 5.5.** Известно, что  $y=c_1\sin(a\pi x)+c_2\cos(b\pi x)$ , где коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  подлежат определению. Используя метод наименьших квадратов, определить  $c_1$  и  $c_2$ .

## ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ

**Отчет** по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче:

- 1) постановка задачи;
- 2) необходимый теоретический материал;
- 3) **вывод оценок погрешности;**
- 4) решение поставленной задачи;
- 5) анализ полученных результатов;
- 6) графический материал;
- 7) тексты программ.

Схема вариантов лабораторной работе 5

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	5.1.1, 5.2.1	11	5.1.11, 5.5.2
2	5.1.2, 5.3.1	12	5.1.12, 5.3.5
3	5.1.3, 5.4.1	13	5.1.13, 5.3.6
4	5.1.4, 5.5.1	14	5.1.14, 5.3.7
5	5.1.5, 5.3.2	15	5.1.15, 5.2.3
6	5.1.6, 5.3.3	16	5.1.16, 5.4.4
7	5.1.7, 5.3.4	17	5.1.17, 5.4.3
8	5.1.8, 5.2.2	18	5.1.18, 5.5.3
9	5.1.9, 5.5.5	19	5.1.19, 5.3.8
10	5.1.10, 5.4.2	20	5.1.20, 5.3.9

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 5

Таблица к задаче 5.1

$x$ $y$		$x$ $y$		$x$ $y$		$x$ $y$		$x$ $y$	
5.1.1		5.1.2		5.1.3		5.1.4		5.1.5	
-1	-2.25	0	4.568	-1	3.614	-0.5	0.72	-2.1	14.1982
-0.7	-0.77	0.375	3.365	-0.74	1.199	-0.25	1.271	-1.8	11.4452
-0.43	0.21	0.563	2.810	-0.48	-0.125	0	1.2	-1.5	9.1586

-0.14	0.44	0.75	2.624	-0.21	-0.5838	0.25	0.7363	-1.2	7.2426
-0.14	0.64	1.125	0.674	0.05	-0.538	0.5	0.24	-0.9	6.3640
0.43	0.03	1.313	0.557	0.31	-0.2855	0.75	-0.175	-0.6	4.8182
0.71	-0.22	1.5	0.384	0.58	0.1111	1	-0.36	-0.3	6.1088
1	-0.84	1.690	-0.566	0.84	0.4529	1.25	-0.328	0	3.9536
1.29	-1.2	1.875	-1.44	1.1	0.6711	1.5	0	0.3	4.6872
1.57	-1.03	2.063	-1.696	1.36	0.6625	1.75	0.3538	0.6	4.7601
1.86	-0.37	2.25	-1.91	1.63	0.4501	2	0.72	0.9	5.8511
2.14	0.61	2.438	-2.819	1.89	0.157	2.25	0.6969	1.2	7.1010
2.43	2.67	2.625	-3.625	2.15	-0.1876	2.5	0	1.5	9.1792
2.71	5.04	2.813	-3.941	2.41	-0.542	2.75	-1.792	1.8	11.421
3	8.90	3	-4.367	2.95	-0.1983	3	-5.16	2.1	14.097
5.1.6		5.1.7		5.1.8		5.1.9		5.1.10	
0	-0.9	-0.70	-4.152	0	1.019	2.5	6.109	-3.6	-2.397
0.2	-0.6482	-0.41	1.244	0.3	1.4889	2.75	2.615	-3.08	-0.401
0.4	-0.2436	-0.12	3.182	0.6	2.2079	3	-0.157	-2.56	-0.577
0.6	-0.1	0.17	2.689	0.9	3.0548	3.25	-2.010	-2.04	-1.268
0.8	0.0231	0.46	0.950	1.2	3.8648	3.5	-2.697	-1.52	-0.933
1	0.0260	0.75	-2.743	1.5	4.2161	3.75	-3.615	-1	-0.359
1.2	0.0967	1.04	-5.839	1.8	5.1180	4	-3.478	-0.48	1.107
1.4	-0.2203	1.33	-7.253	2.1	5.7661	4.25	-2.250	0.04	1.300
1.6	-0.3230	1.62	-6.100	2.4	6.6720	4.5	0.193	0.56	1.703
1.8	-0.6472	1.91	-2.144	2.7	7.1960	4.75	2.086	1.08	-0.299
2	-0.7630	2.20	6.103	3	7.8551	5	5.882	1.6	-1.417
5.1.11		5.1.12		5.1.13		5.1.14		5.1.15	
0	2.25	-1	0.192	-0.7	1.04	-3	0.262	-0.7	3.822
0.17	1.106	-0.75	-0.054	-0.5	1.08	-2.55	-1.032	-0.375	-1.498
0.33	0.3951	-0.5	-0.209	-0.3	0.68	-2.1	-1.747	-0.05	-2.419
0.5	-0.0334	-0.25	-0.429	-0.1	0.38	-1.65	-1.981	0.275	-1.292

0.67	-0.20	0	-0.413	0.1	0.07	-1.2	-0.564	0.6	0.828
0.83	-0.1137	0.25	-0.491	0.3	-0.03	-0.75	0.774	0.925	1.963
1	0.0294	0.5	-0.357	0.5	-0.38	-0.3	2.400	1.25	2.401
1.17	0.1008	0.75	-0.434	0.7	-0.22	0.15	2.131	1.575	1.877
1.33	0.3	1	-0.140	0.9	-0.36	0.6	2.2	1.9	2.200
1.5	-0.0021	1.25	-0.130	1.1	-0.33	1.05	-0.393	2.25	-1.378
1.67	-0.3682	1.5	0.142	1.3	-0.28	1.5	-1.815	2.55	-2.395
1.83	-1.119	1.75	0.288	1.5	-0.17	1.95	-0.788	2.875	-1.460
2	-2.226	2	0.876	1.7	0.27	2.4	8.030	3.2	3.604

5.1.16		5.1.17		5.1.18		5.1.19		5.1.20	
-3.2	-0.173	-0.7	4.166	2	1.108	6	7.079	-0.7	-12.917
-2.66	-0.574	-0.31	-2.278	2.4	1.832	6.4	-1.509	-0.41	3.619
-2.12	-1.811	0.08	-3.172	2.8	2.413	6.8	-7.654	-0.2	9.586
-1.58	-1.849	0.47	-0.506	3.2	3.656	7.2	-12.211	0.17	7.949
-1.04	0.123	0.86	2.748	3.6	5.126	7.6	-13.941	0.46	1.543
-0.5	1.462	1.25	2.665	4	5.552	8	-15.117	0.75	-8.057
0.04	2.399	1.64	1.353	4.4	6.024	8.4	-13.720	1.04	-16.150
0.58	1.300	2.03	-0.294	4.8	7.202	8.8	-10.702	1.33	-20.562
1.12	1.703	2.42	-1.613	5.2	8.590	9.2	-4.696	1.62	-17.720
1.66	-2.045	2.81	-2.223	5.6	8.953	9.6	3.501	1.91	-6.200
2.2	2.817	3.2	4.04	6	10.046	10	10.572	2.2	18.115

Таблица к задаче 5.2

5.2.1	$t$	1	1.4	1.8	2.6	3	3.4	3.8	4.2	4.6	5
	$x$	10.60	18.01	25.85	44	50.64	60.2	68.27	77.77	84.50	93.4
5.2.2	$t$	1	1.625	2.25	2.88	3.5	4.13	4.75	5.375	6	
	$x$	14.86	27.15	41.19	54	69.03	81.6	96.11	109.4	124.03	
5.2.3	$t$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	
	$x$	3.732	9.378	15.53	22	29.52	35.2	42.35	48.61	55.51	
5.2.4	$t$	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	4.2	4.8	5.4	6
	$x$	6.449	19.97	33.91	48.2	64.15	76.9	106.2	122.2	135.6	149
5.2.5	$t$	2	3.2	4.4	5	5.6	6.8	7.4	8		
	$x$	18.50	35.73	54.65	62.4	71.74	90.5	98.10	107.6		
5.2.6	$t$	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	
	$x$	13.85	14.30	15.84	16.9	18.89	19.7	21.03	22.08	23.95	

Таблица к задаче 5.3

N $f(x,a,b)$ $x \quad y$		N $f(x,a,b)$ $x \quad y$		N $f(x,a,b)$ $x \quad y$		N $f(x,a,b)$ $x \quad y$		N $f(x,a,b)$ $x \quad y$	
5.3.1		5.3.2		5.3.3		5.3.4		5.3.5	
$ae^{bx^2}$		$a + \frac{b}{x}$		$a + b \ln x$		$\sqrt{a + bx^2}$		$ae^{b x }$	
-2.5	0.876	0.1	5.53	0.1	0.479	-2.0	1.649	-1.5	0.0829
-2	0.29523	0.3	2.7967	0.2	0.7562	-1.6	1.942	-1.2	0.2192
-1.5	0.75958	0.5	2.25	0.3	0.9184	-1.2	2.142	-0.9	0.5794
-1	1.49184	0.7	2.0157	0.4	1.0335	-0.8	2.274	-0.6	1.5315
-0.5	2.23671	0.9	1.8856	0.5	1.1227	-0.4	2.35	-0.3	4.0481
0	2.56000	1.1	1.8027	0.6	1.1957	0	2.375	0	10.7
0.5	2.23671	1.3	1.7454	0.7	1.2573	0.4	2.35	0.3	4.0481
1	1.49184	1.5	1.7033	0.8	1.3107	0.8	2.274	0.6	1.5315
1.5	0.75958	1.7	1.6712	0.9	1.3579	1.2	2.142	0.9	0.5794
2	0.29523	1.9	1.6458	1.0	1.4	1.6	1.942	1.2	0.2192
2.5	0.0876	2.1	1.6252	1.1	1.4381	2.0	1.649	1.5	0.0829
5.3.6		5.3.7		5.3.8		5.3.9		5.3.10	
$e^{a+b x }$		$a + b(x+2)^3$		$\sqrt{a + bx} + 2$		$(ax + b)\sin x$		$(ax + b)\cos x$	
-2	8.16617	-4	-6.47	1	4.0199	0.5	1.7499	-1.0	0.756
-1.6	5.92986	-3.2	-3.2086	1.7	3.9404	0.75	2.5732	-0.8	1.0033
-1.2	4.30596	-2.4	-2.3433	2.4	3.8574	1	3.2817	-0.6	1.2215
-0.8	3.12677	-1.6	-2.2767	3.1	3.7706	1.25	3.8197	-0.4	1.4
-0.4	2.27050	-0.8	-1.4114	3.8	3.6793	1.5	4.1396	-0.2	1.5289
0	1.64872	0	1.85	4.5	3.5827	1.75	4.2065	0	1.6
0.4	2.27050	0.8	9.105	5.2	3.4799	2.0	3.5208	0.2	1.6073
0.8	3.12677	1.6	21.951	5.9	3.3693	2.25	2.7829	0.4	1.5474
1.2	4.30596	2.4	41.986	6.6	3.249	2.5	1.8224	0.6	1.4196

1.6	5.92986	3.2	70.806	7.3	3.1158	2.75	0.6915	0.8	1.2262
2	8.16617	4	110.01	8	2.9644	3	0.6915	1.0	0.9725

Таблица к задаче 5.4

5.4.1	$m=2$	x	2.3	2.6	2.8	3	3.3	3.6	3.8			
	$\bar{y}=7$	y	16	19	22	26	28	33	37			
5.4.2	$m=2$	x	1.5	2.1	2.7	3.3	3.9	4.5	5.1			
	$\bar{y}=8$	y	11.1	10.3	9.08	7.64	5.92	3.90	1.60			
5.4.3	$m=2$	x	2.5	2.8	3.1	3.4	3.7	4	4.3	4.6		
	$\bar{y}=6$	y	21	18.5	15.6	12.5	9.10	5.40	1.42	2.14		
5.4.4	$m=3$	x	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	
	$\bar{y}=5$	y	3.69	3.90	4.3	4.97	5.96	7.35	9.2	11.57	14.54	
5.4.5	$m=3$	x	1	1.4	1.8	2.2	2.6	3	3.4	3.8	4.2	4.6
	$\bar{y}=8$	y	2.1	2.45	3.07	4.03	5.42	7.3	9.76	12.87	16.72	21.4
5.4.6	$m=3$	x	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1		
	$\bar{y}=7$	y	50.6	48.1	45.0	41.2	36.7	31.4	25.3	18.3		

Таблица к задаче 5.5

Значения  $x_k = -1 + 0.1k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 20$

5.5.1	5.5.2	5.5.3	5.5.4	5.5.5	5.5.6	5.5.7	5.5.8
$a=4$	$a=3$	$a=3$	$a=3$	$a=4$	$a=2$	$a=1$	$a=2$
$b=2$	$b=1$	$b=2$	$b=4$	$b=0$	$b=3$	$b=4$	$b=1$
$y_k$	$y_k$	$y_k$	$y_k$	$y_k$	$y_k$	$y_k$	$y_k$
-0.3156	-1.0044	-1.3111	0.1931	0.8984	2.002	3.053	-2.32
-1.193	-0.4724	-2.8426	1.242	1.0916	1.7937	0.945	-0.9861
-0.6763	-0.2432	-2.4981	1.7388	1.0262	0.39	-2.45	0.0841
0.6968	-0.4119	-0.2912	1.7317	0.802	-0.9052	-2.4651	0.583

1.2	-0.6785	2.3164	1.2585	0.7105	-1.0023	0.4665	0.4912
0.2828	-0.5996	3.5128	0.1876	0.9056	0.0001	3.052	0.002
-0.7221	-0.0449	2.3528	-1.1307	1.0958	1.0025	0.9463	-0.4925
-0.4711	0.7788	-0.2767	-2.0600	1.0365	0.9054	-2.4652	-0.593
0.5024	1.4016	-2.5041	-2.0782	0.7972	-0.37	-2.467	-0.0841
0.7083	1.4446	-2.8408	-1.1179	0.6868	-1.7940	0.940	0.9852
-0.3085	1.0099	-1.3088	0.2087	0.9066	-2.003	3.053	2.315
-1.204	0.4743	0.7309	1.2317	1.0858	-0.5597	0.9417	3.3891
-0.6968	0.2475	1.6866	1.7312	1.0128	1.6174	-2.4703	3.8051
0.67	0.4091	1.0946	1.7316	0.7833	2.9025	-2.4712	3.2961
1.2049	0.6512	-0.2552	1.2483	0.7028	2.2468	0.938	1.9129
0.3095	0.6007	-0.8962	0.1898	0.9035	0.001	3.042	-0.003
-0.7008	0.0361	-0.2370	-1.1263	1.0815	-2.2365	0.933	-1.913
-0.5057	-0.7662	1.0992	-2.0577	1.0366	-2.902	-2.472	-3.2963
0.491	-1.3814	1.6841	-2.0713	0.7552	1.6172	-2.471	-3.8051
0.7244	-1.4429	0.7336	-1.1084	0.7185	0.5593	0.942	-3.3892
-0.3	-1.0072	-1.2845	0.2066	0.9218	2.0004	3.052	-2.285