

**КАФЕДРА ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии»**

## **«Исследование методов оптимизации сетей для нахождения максимальных потоков»**

\_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_) (подпись) (Ф.И.О.)

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
« 03 » сентября 2020 г.

## **ЗАДАНИЕ** **на НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКУЮ РАБОТУ (НИР)**

За время выполнения НИР студенту необходимо:

**1.** Определить тематические и временные границы поиска информации по заданной теме; осуществить самостоятельный поиск аналитического и статистического материала с использованием доступных информационных ресурсов; изучить документацию; проанализировать и зафиксировать состояние изучаемого вопроса и сформулировать перспективные направления дальнейших исследований.

**в том числе:**

- *Ознакомиться с существующими методами по нахождению многополюсных максимальных потоков; рассмотреть один из алгоритмов исследуемой области; рассмотреть практическое применение данного алгоритма; выявить достоинства и недостатки рассматриваемого метода.*

**2.** Подготовить реферативный отчет о проделанной работе и защитить результаты НИР.

Дата выдачи задания « 03 » сентября 2020 г.

Руководитель НИР \_\_\_\_\_

Задание получил студент(ка) гр.ИУК4-52Б \_\_\_\_\_

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ МНОГОПОЛЮСНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОТОКОВ.....	5
1.1. Общие сведения об исследуемой области.....	5
1.2. Метод анализа сети для решения задачи о многополюсном максимальном потоке. ....	6
2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА СЕТИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МНОГОПОЛЮСНОГО МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА .....	11
2.1. Постановка задачи.....	11
2.2. Применение метода к поставленной задаче.....	11
2.3. Анализ работы алгоритма при изменении входных данных .....	14
2.3. Анализ полученных результатов .....	17
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	18
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	19

## **ВВЕДЕНИЕ**

В теории оптимизации и теории графов, задача о максимальном потоке является одной из самых важных. Она является частным случаем более трудных задач, как например задача о циркуляции. Благодаря алгоритмам, решающим данную задачу, обеспечивается работа всех современных программ, связанных с сетевыми структурами. Решение подобных задач может потребовать огромных ресурсов и времени, поэтому особенно актуально рассмотреть методы, которые позволят оптимизировать базовые алгоритмы по решению данной задачи.

Целью данной научно-исследовательской работы является изучение и применение метода анализа сети для оптимизации решения задачи о многополюсном максимальном потоке.

Для достижения цели научно-исследовательской работы были поставлены следующие задачи:

1. Ознакомиться с существующими методами по нахождению многополюсных максимальных потоков.
2. Рассмотреть один из алгоритмов исследуемой области.
3. Рассмотреть практическое применение исследуемого метода.
4. Сделать выводы на основании изученных материалов.

# 1. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ МНОГОПОЛЮСНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

## 1.1. Общие сведения об исследуемой области

Задачи о потоках в сетях можно сформулировать как задачи линейного программирования. Но благодаря специальной структуре потоковых задач для них было получено большое число эффективных алгоритмов и изящных теорем, чем и объясняется особое внимание к ним. В большинстве из этих задач решения всегда целочисленные, чего нельзя сказать о решении общей задачи линейного программирования.

Так же, как дорожную карту можно смоделировать ориентированным графом, чтобы найти кратчайший путь из одной точки в другую, неориентированный или ориентированный граф можно интерпретировать как некоторую транспортную сеть и использовать его для решения задач о потоках вещества в системе трубопроводов. Можно представить, что некоторый продукт передается по системе от источника, где данный продукт производится, к стоку, где он потребляется. Источник производит продукцию с некоторой постоянной скоростью, а сток с той же скоростью потребляет продукт. Интуитивно потоком продукта в любой точке системы является скорость движения продукта. С помощью транспортных сетей можно моделировать течение жидкостей по трубопроводам, движение деталей на сборочных линиях, передачу тока по электрическим сетям, информации — по информационным сетям и т.д.

Каждое ребро сети можно рассматривать как канал, по которому движется продукт. Каждый канал имеет заданную пропускную способность, которая характеризует максимальную скорость перемещения продукта по каналу, например, 200 литров жидкости в минуту для трубопровода или 20 ампер для провода электрической цепи. Вершины являются точками пересечения каналов; через вершины, отличные от источника и стока, продукт проходит, не накапливаясь. Иными словами, скорость поступления продукта в вершину должна быть равна скорости его удаления из вершины. Это свойство называется

свойством сохранения потока; в случае передачи тока по электрическим цепям ему соответствует закон Кирхгофа. В задаче о максимальном потоке необходимо найти максимальную скорость пересылки продукта от источника к стоку, при которой не будут нарушаться ограничения пропускной способности. Это одна из простейших задач, возникающих в транспортных сетях.

Существуют различные методы ее решения: алгоритм Форда-Фалкерсона, Эдмондса-Карпа, Диница и др. Более того, основные методы, используемые в алгоритмах решения задач о максимальном потоке, можно применять для решения других задач, связанных с транспортными сетями. Такой задачей является нахождение многополюсных максимальных потоков, когда требуется найти максимальный поток между каждой парой вершин. Для данной задачи все вышеперечисленные алгоритмы будут неэффективны. Поэтому существует методы по оптимизации сети (метод анализа сети и синтеза сети).

## **1.2. Метод анализа сети для решения задачи о многополюсном максимальном потоке.**

Имеется неориентированная сеть с ограниченными пропускными способностями дуг  $b_{ij}$ . Требуется найти величины максимальных потоков между  $p$  узлами сети, где  $2 \leq p \leq n$ . Необходимо показать, что для этого не нужно  $\frac{p(p-1)}{2}$  раз вычислять максимальный поток между каждой парой узлов, а достаточно решить лишь  $p-1$  задач о максимальном потоке, причем каждый раз задача решается в более простой сети, чем исходная.

Основным приемом является процесс, называемый сжатием нескольких узлов в один узел. Основная идея состоит в том, что несколько узлов сети принимаются за один (рисунок 1.1). Другими словами, можно считать, что дуги между всеми «сжимаемыми» узлами получают бесконечную пропускную способность. При этом дуги, связывающие некоторый узел  $N_i$  (не принадлежащий числу сжимаемых) со всеми сжимаемыми узлами, заменяются

одной дугой с пропускной способностью, равной сумме пропускных способностей заменяемых связывающих дуг.

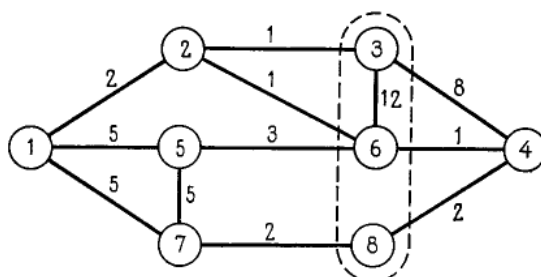


Рисунок 1.1. Пример исходной исследуемой сети

Например, если сжать узлы  $N_3, N_6$  и  $N_8$  один узел, то получится сеть, изображенная на рисунке 1.2. В сети на рисунке 1.1 величина максимального потока  $f_{27} = c(Y, \bar{Y}) = 4$ . Здесь  $Y = \{2\}$ ,  $\bar{Y} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , минимальный разрез  $(Y, \bar{Y})$  состоит из дуг  $A_{21}, A_{23}, A_{26}$ . Увеличение пропускных способностей дуг, не принадлежащих этому минимальному разрезу  $(Y, \bar{Y})$ , не повлияет на величину  $c(Y, \bar{Y})$  и может лишь увеличить пропускную способность других разрезов, разделяющих  $N_2$  и  $N_7$ . Таким образом, при сжатии узлов  $N_3, N_6, N_8$  разрез  $(Y, \bar{Y})$  останется минимальным разрезом, разделяющим  $N_2$  и  $N_7$ . Следовательно, при вычислении максимального потока  $f_{27}$  можно, например, сжать узлы  $N_3, N_6, N_8$  в один и производить вычисления в сети, изображенной на рисунке 1.2.

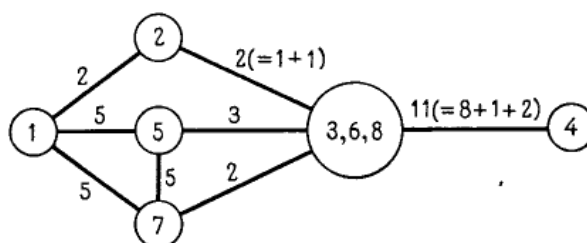


Рисунок 1.2. Исходная сеть с сжатым узлом

Если  $(X, \bar{X})$  – минимальный разрез, то при подсчете величины максимального потока между двумя узлами из  $\bar{X}$  можно сжать в один узел все узлы множества  $X$ .

На следующем этапе необходимо рассмотреть произвольную сеть  $N$ , состоящую из  $n$  узлов и найти величины максимальных потоков между заданными  $p$  узлами сети  $N$ . Эти  $p$  узлов, между которыми ищется максимальный поток, называются полюсами, а остальные  $n - p$  узлов обычными или промежуточными узлами. Можно допустить, что имеется некоторая другая сеть  $N'$ , которая состоит из  $p$  узлов, причем величины максимальных потоков между  $p$  полюсами сети  $N$  равны величинам максимальных потоков между  $p$  узлами сети  $N'$ . (Две сети, имеющие равные величины максимальных потоков между некоторым множеством узлов, называются потоко-эквивалентными или просто эквивалентными относительно этого множества узлов.) Тогда можно найти искомые величины максимальных потоков между  $p$  узлами, рассматривая сеть  $N'$ . Оказывается, что для каждой сети  $N$  всегда существует эквивалентная ей сеть  $N'$ , являющаяся деревом. Рассматриваемый ниже алгоритм позволяет по сети  $N$  построить эквивалентное ей дерево  $N'$ . В этом алгоритме процесс нахождения максимальных потоков между  $p$  полюсами сети состоит из двух шагов, которые повторяются до тех пор, пока не будет построено дерево  $N'$ , эквивалентное исходной сети  $N$ :

Шаг 1 заключается в решении задачи о максимальном потоке между двумя выбранными полюсами, причем обычно эта задача решается в сети, меньшей, чем исходная сеть  $N$ , так как некоторое множество узлов сжато в один узел. При нахождении максимального потока выделяют минимальный разрез, затем переходят к шагу 2.

Шаг 2 заключается в нахождении очередной дуги дерева, при этом используется выделенный на шаге 1 минимальный разрез. (Алгоритм заканчивается, когда найдено  $p - 1$  дуг дерева.) Далее выбирается некоторая новая пара полюсов и осуществляется сжатие некоторых подмножеств узлов исходной сети, в результате чего получается сеть, которая будет использоваться в следующий раз на шаге 1. После этого необходимо снова перейти к шагу 1.



Сначала произвольным образом выделяются два полюса и решается в исходной сети  $N$  задача о максимальном потоке между ними. При этом будет выделен минимальный разрез  $(X, \bar{X})$  пропускной способности  $c(X, \bar{X})$ . Он будет символически изображаться двумя «вершинами», соединенными дугой с пропускной способностью  $v_i = c(X, \bar{X})$  (рисунок 1.3) (Эта дуга является первой дугой дерева  $N'$ .) В одну из вершин помещаются все узлы множества  $X$ , а в другую — узлы множества  $\bar{X}$ . Сами вершины обозначаются следующим образом:  $x, \bar{x}$  и т.д.

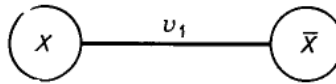


Рисунок. 1.3. Результат сжатия дуги

Затем выбирается в построенном дереве (рисунок 1.3) любая вершина, содержащая 2 или более полюсов, в ней выделяются два произвольных полюса, сжимаются узлы другой вершины в один узел и решается задача о максимальном потоке между двумя выделенными полюсами в сжатой сети. Например, если выделить два полюса в  $x$ . Тогда все узлы из  $\bar{X}$  можно сжать в один узел. Решение задачи о максимальном потоке в сжатой сети дает новый минимальный разрез пропускной способности  $v_2$ . Получается дерево, изображенное на рисунке 2.4, где пропускная способность новой дуги равна  $v_2$ . Необходимо заметить, что вершина  $\bar{x}$  связывается дугой с вершиной  $\bar{y}$ , если множества  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  принадлежат к одной и той же части нового разреза величины  $v_2$ ; вершина  $\bar{x}$  связывается дугой с  $y$ , если множества  $\bar{X}$  и  $Y$  принадлежат к одной и той же части разреза величины  $v_2$ .

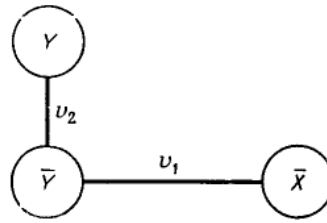


Рисунок. 1.4. Формирование дерева минимальных разрезов

Далее процесс разбиения вершин дерева продолжается аналогично. На каждом этапе разбиению подвергается некоторая вершина  $u$ , которая содержит не меньше двух полюсов. Если вершину  $u$  удалить из дерева, то оно распадается на несколько компонент связности. При решении задачи о максимальном потоке между двумя полюсами из  $u$  все узлы, кроме узлов, из  $u$ , попавшие в одну компоненту связности, сжимаются в один узел. После того как задача о максимальном потоке будет решена  $p - 1$  раз, будет построено дерево  $T$ , каждая вершина которого содержит ровно один полюс и, может быть, несколько промежуточных узлов. (Заметим, что задача о максимальном потоке обычно решается в сети, более простой, чем исходная, благодаря сжатию некоторых узлов.)

Описанный выше метод анализа сети позволяет строить эквивалентную сеть, которая является деревом. Существует много деревьев, которые потоко-эквивалентны некоторой заданной сети. Однако иногда потоко-эквивалентное дерево при построении обладает следующей особенностью: каждая ветвь этого дерева соответствует некоторому минимальному разрезу в исходной сети.

Поэтому это дерево называется деревом разрезов. Дерево разрезов, содержащее  $n$  узлов, изображает  $n - 1$  минимальных разрезов исходной сети, которые не пересекаются друг с другом.

## 2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА СЕТИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МНОГОПОЛЮСНОГО МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

### 2.1. Постановка задачи

Имеется неориентированная сеть (рисунок 2.2), построенная на основе фрагмента карты дорог города Калуги (рисунок 2.1), с ограниченными пропускными способностями дуг  $b_{ij}$  (автомобилей в час). Требуется найти величины максимальных потоков между  $p$  узлами сети  $A_i$ , где  $i$  - номер узла (пересечения дорог на карте), где  $2 \leq p \leq n$ .

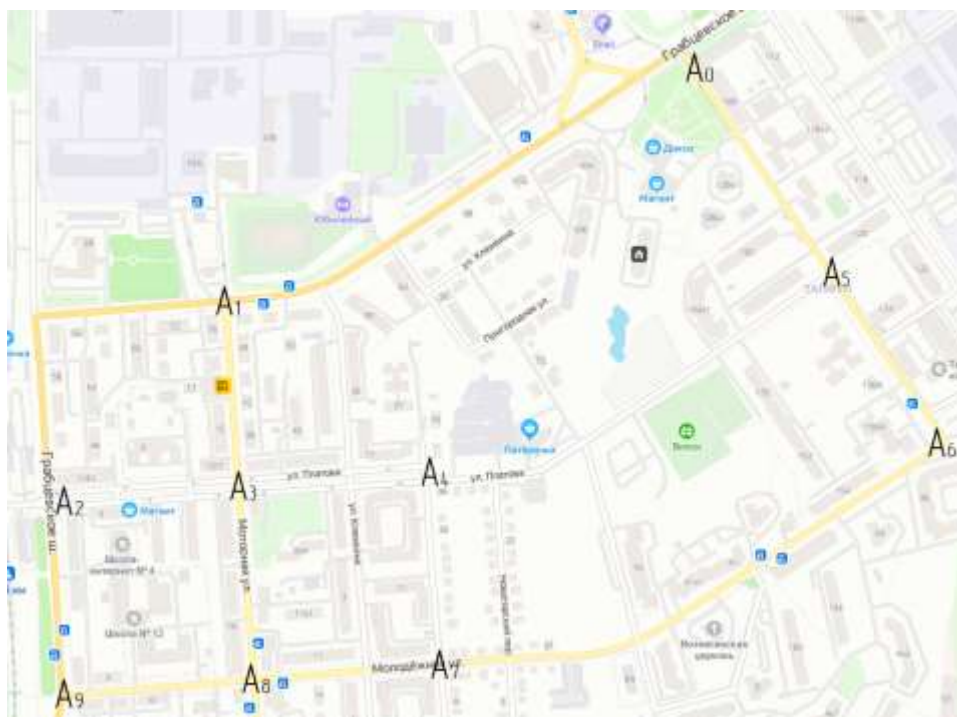


Рисунок 2.1. Фрагмент карты дорог города Калуги

### 2.2. Применение метода к поставленной задаче

Для решения данной задачи необходимо воспользоваться методом анализа сети. Данный метод позволяет вычислять максимальный поток между  $p$  узлами за  $p-1$  решений задачи о максимальном потоке, благодаря чему не нужно

$\frac{p(p-1)}{2}$  раз вычислять максимальный поток между каждой парой узлов. Причем при решении задачи методом анализа сети каждый раз задача решается в более простой сети, чем исходная.

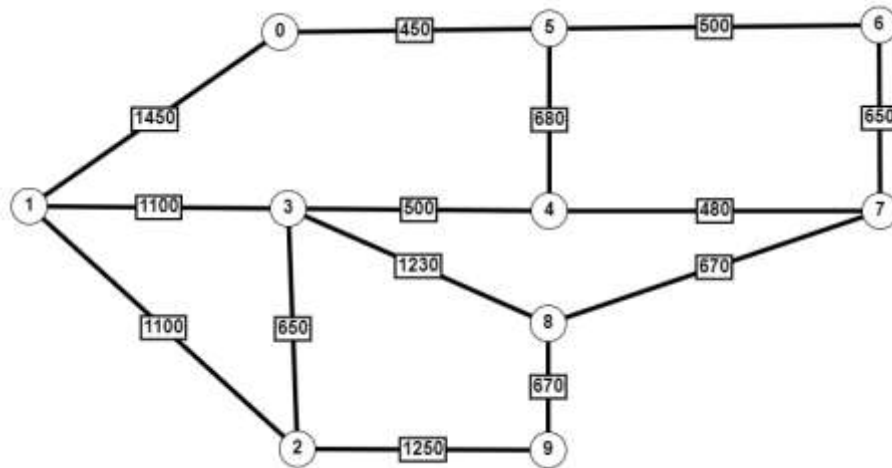


Рисунок 2.2. Преобразованная сеть из карты дорог

На первом этапе выполнения необходимо сделать начальный разрез сети (рисунок 2.3).

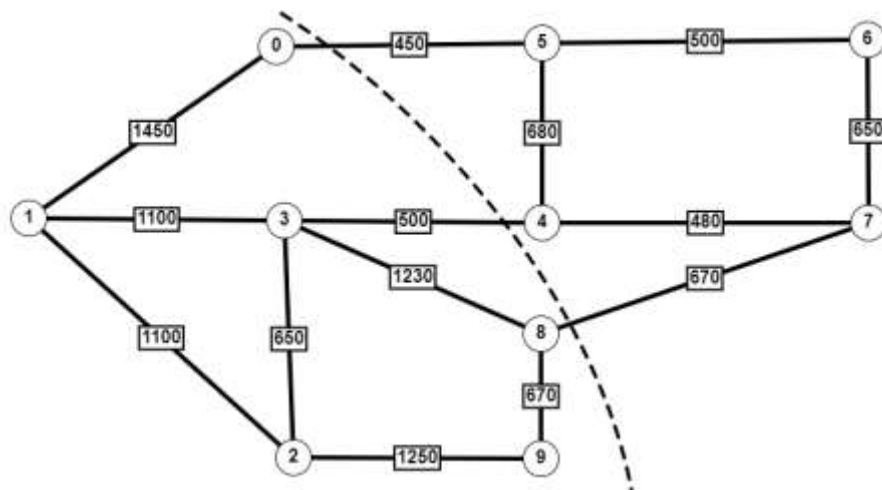


Рисунок 2.3 Начальный разрез сети

Далее необходимо рекурсивно выполнять алгоритм анализа сети до тех пор, пока не сформируется дерево разрезом (рисунок 2.8).

Шаги выполнения анализа сети показаны на рисунках 2.4 – 2.8.

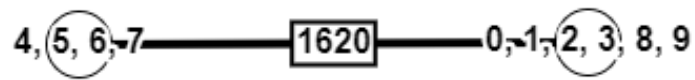


Рисунок 2.4 Первый шаг выполнения алгоритма

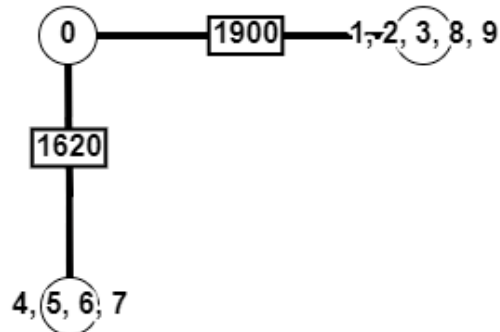


Рисунок 2.5 Второй шаг выполнения алгоритма

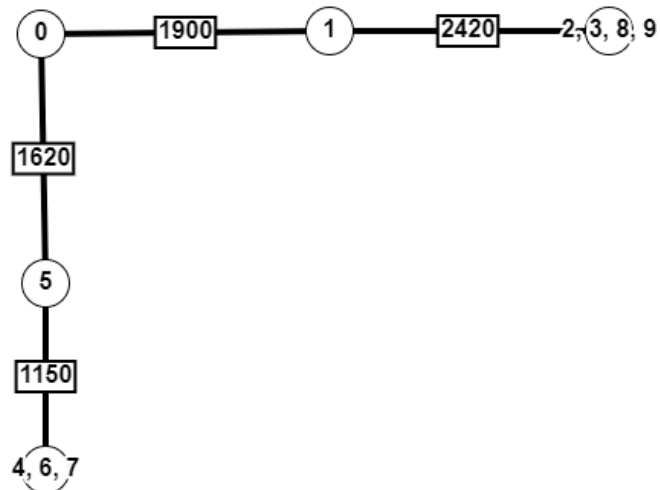


Рисунок 2.6 Третий шаг выполнения алгоритма

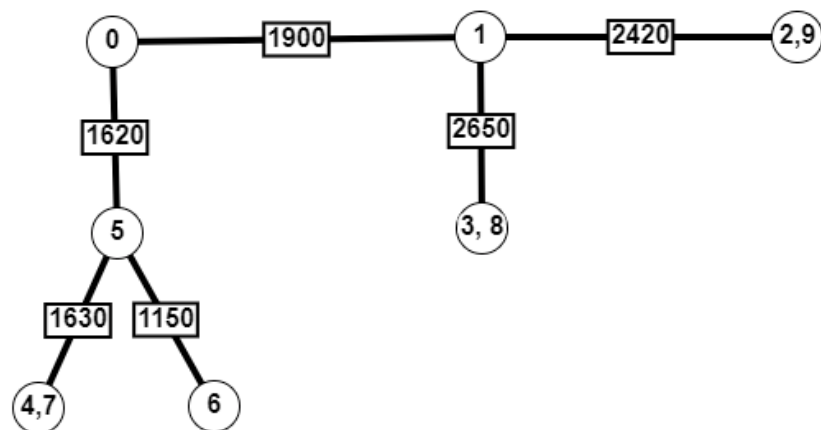


Рисунок 2.7 Четвертый шаг выполнения алгоритма

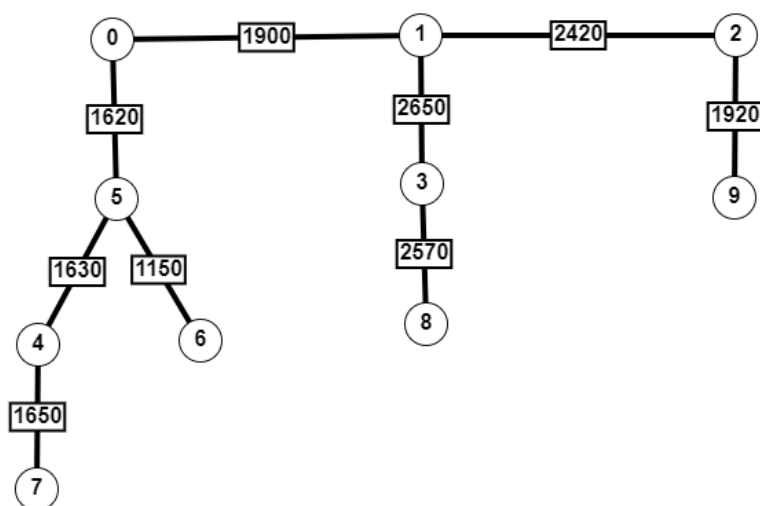


Рисунок 2.8 Полученное дерево минимальных разрезов

По дереву минимальных разрезов (рисунок 2.8), содержащему каждый узел сети, можно получить таблицу многополюсного максимального потока.

Таблица 1. Многополюсный максимальный поток

	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>	A <sub>8</sub>	A <sub>9</sub>
A <sub>0</sub>	$\infty$	1900	1900	1900	1620	1620	1150	1620	1900	1900
A <sub>1</sub>	1900	$\infty$	2420	2650	1620	1620	1150	1620	2570	1920
A <sub>2</sub>	1900	2420	$\infty$	2420	1620	1620	1150	1620	2420	1920
A <sub>3</sub>	1900	2650	2420	$\infty$	1620	1620	1150	1620	2570	1920
A <sub>4</sub>	1620	1620	1620	1620	$\infty$	1630	1150	1650	1620	1920
A <sub>5</sub>	1620	1620	1620	1620	1630	$\infty$	1150	1630	1620	1620
A <sub>6</sub>	1150	1150	1150	1150	1150	1150	$\infty$	1150	1150	1150
A <sub>7</sub>	1620	1620	1620	1620	1650	1630	1150	$\infty$	1620	1620
A <sub>8</sub>	1900	2570	2570	2570	1620	1620	1150	1620	$\infty$	1920
A <sub>9</sub>	1900	1920	1920	1920	1620	1620	1150	1620	1920	$\infty$

### 2.3. Анализ работы алгоритма при изменении входных данных

Для того, чтобы провести анализ полученных результатов, необходимо провести ряд изменений в исходном графе:

- уменьшить пропускную способность одной или нескольких дуг;
- убрать одну или нескольких вершин.

Для этого используется тот же граф, что и на рисунке 2.2 с некоторыми модернизациями:

- допускается, что дуги  $A_3 - A_8$ ,  $A_3 - A_8$ ,  $A_3 - A_8$ , изменили свою пропускную способность на 200, 200, 100 соответственно для первого случая;
- допускается, что из графа исключились вершины  $A_2$ ,  $A_6$  для второго случая.

Для первого случая граф с разрезом будет иметь вид (рисунок 2.9):

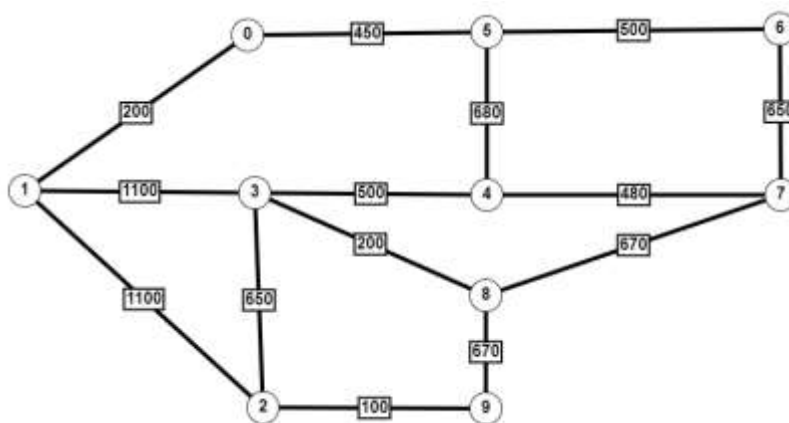


Рисунок 2.9. Граф с измененными данными (случай 1)

Тогда, выполняя такое же количество шагов, дерево многополюсного максимального потока будет иметь вид (рисунок 2.10):

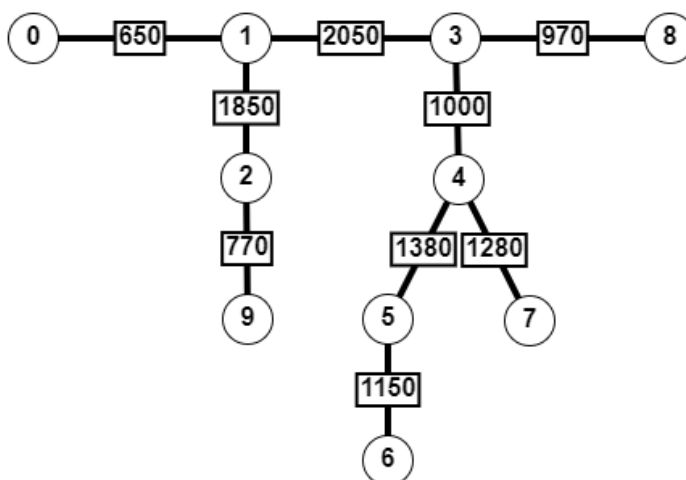


Рисунок 2.10. Полученное дерево разрезом (случай 1)

По дереву минимальных разрезом для случая 1 (рисунок 2.10), содержащему каждый узел сети, можно получить таблицу многополюсного максимального потока.

Таблица 2. Многополюсный максимальный поток для случая 1

	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>	A <sub>8</sub>	A <sub>9</sub>
A <sub>0</sub>	∞	650	650	650	650	650	650	650	650	650
A <sub>1</sub>	650	∞	1850	2050	1000	1000	1000	1000	970	770
A <sub>2</sub>	650	1850	∞	1850	1000	1000	1000	1000	970	770
A <sub>3</sub>	650	2050	1850	∞	1000	1000	1000	1000	970	770
A <sub>4</sub>	650	1000	1000	1000	∞	1380	1150	1280	970	770
A <sub>5</sub>	650	1000	1000	1000	1380	∞	1150	1280	970	770
A <sub>6</sub>	650	1000	1000	1000	1150	1150	∞	1150	970	770
A <sub>7</sub>	650	1000	1000	1000	1280	1280	1150	∞	970	770
A <sub>8</sub>	650	970	970	970	970	970	970	970	∞	770
A <sub>9</sub>	650	770	770	770	770	770	770	770	770	∞

Для второго случая граф с разрезом будет иметь вид (рисунок 2.11):

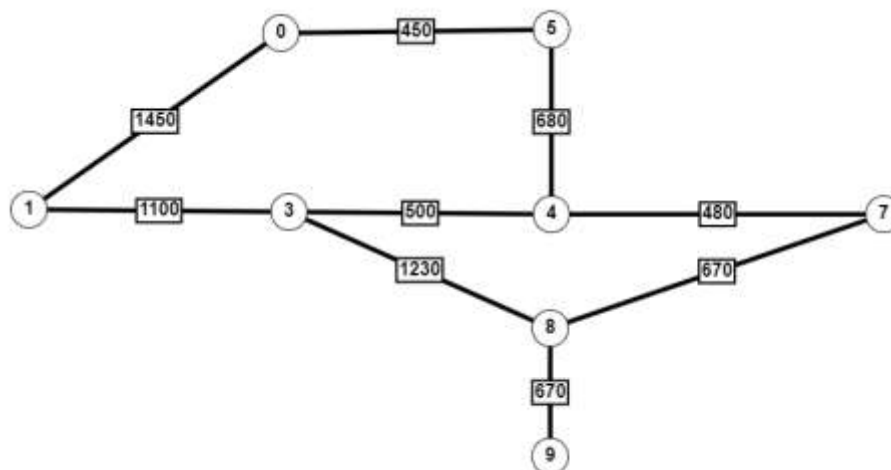


Рисунок 2.11. Граф с измененными данными (случай 2)

Тогда, выполняя уже меньшее в связи с уменьшением вершин количество шагов, дерево многополюсного максимального потока будет иметь вид (рисунок 2.12):

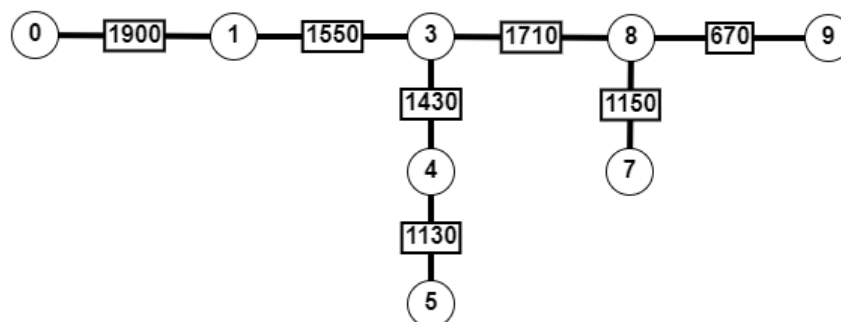


Рисунок 2.12. Полученное дерево разрезом (случай 2)



По дереву минимальных разрезов для случая 2 (рисунок 2.12), содержащему каждый узел сети, можно получить таблицу многополюсного максимального потока.

Таблица 3. Многополюсный максимальный поток для случая 2

	$A_0$	$A_1$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_7$	$A_8$	$A_9$
$A_0$	$\infty$	1900	1550	1430	1130	1150	1550	670
$A_1$	1900	$\infty$	1550	1430	1130	1150	1550	670
$A_3$	1550	1550	$\infty$	1430	1130	1150	1710	670
$A_4$	1430	1430	1430	$\infty$	1130	1150	1430	670
$A_5$	1130	1130	1130	1130	$\infty$	1130	1130	670
$A_7$	1150	1150	1150	1150	1130	$\infty$	1150	670
$A_8$	1550	1710	1430	1430	1130	1150	$\infty$	670
$A_9$	670	670	670	670	670	670	670	$\infty$

### 2.3. Анализ полученных результатов

В ходе применения метода анализа сети для нахождения многополюсного потока было выявлено, что он полностью пригоден для практического применения, а также на порядок уменьшает время выполнения поиска попарных максимальных потоков. Алгоритм также показывает корректную работы при изменении входной структуры данных (как при резком изменении весов, так и при удалении вершин). Несмотря на то, что разрез на графе производится в одном и том же месте, корректное дерево максимального потока получается совершенно другим. Это говорит о том, что в процессе изменения входных параметров были затронуты узлы и дуги, влияющие на ключевые пропускные способности в сети. Однако, не смотря на всю свою эффективность алгоритм будет показывать плохие результаты работы для сети, представленной в виде ориентированного графа, так как построение дерева будет происходить на порядок сложнее.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В ходе выполнения научно-исследовательской работы было проведено ознакомление с существующими методами по нахождению многополюсных максимальных потоков, в качестве примера был изучен и практически использован метод анализа сети для оптимизации решения задачи о многополюсном максимальном потоке. Выявлены плюсы и минусы рассматриваемого алгоритма.

Практическое применение рассмотренного метода будет обеспечивать эффективную работу всех современных программ, связанных с сетевыми структурами, экономя огромное количество времени, в отличие от применения стандартных методов. А дальнейшее усовершенствование алгоритма для работы с ориентированными графами позволит расширить область применения до его работы с новыми графовыми структурами, такими как графовые базы данных и обработка интернет ресурсов.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аверченков, В.И. Основы научного творчества [Электронный ресурс]: учеб. пособие/ В.И. Аверченков, Ю.А. Малахов. — Брянск: Брянский государственный технический университет, 2012. — 156 с.— Режим доступа: [<http://www.iprbookshop.ru/7004>].
2. Астанина, С.Ю. Научно-исследовательская работа студентов (современные требования, проблемы и их решения) [Электронный ресурс]: монография/ С.Ю. Астанина, Н.В. Шестак, Е.В. Чмыхова. — М.: Современная гуманитарная академия, 2012.— 156 с.— Режим доступа: [<http://www.iprbookshop.ru/16934>].
3. Губарев, В.В. Квалификационные исследовательские работы [Электронный ресурс]: учеб. пособие/ В.В. Губарев, О.В. Казанская. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014. — 80 с.— Режим доступа: [<http://www.iprbookshop.ru/47691>].
4. Минина, И.В. Основы современных компьютерных технологий : учебное пособие : [12+] / И.В. Минина, А.В. Прилепина, Т.Ю. Спивак ; Оренбургский государственный университет. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, 2014. – Ч. 4. – 143 с. : схем., табл., ил. – Режим доступа: [<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=492640>].
5. Новиков, Ю.Н. Подготовка и защита бакалаврской работы, магистерской диссертации, дипломного проекта [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю.Н. Новиков. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 34 с. — URL: [<https://e.lanbook.com/book/122187>].
6. Половинкин, А.И. Основы инженерного творчества. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.И. Половинкин.— СПб : Лань, 2019. — 364 с.— Режим доступа: [<https://e.lanbook.com/book/123469>].
7. Рекомендации по написанию и оформлению курсовой работы, выпускной квалификационной работы и магистерской диссертации [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Е.В. Зудина [и др.]. —

Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2016. — 57 с.— Режим доступа: [<http://www.iprbookshop.ru/57785>].

8. Рыжков, И.Б. Основы научных исследований и изобретательства. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.Б. Рыжков. — СПб.: Лань, 2013. — 224 с. — Режим доступа: [<http://e.lanbook.com/book/30202>].

9. Соколов, А.В. Методы оптимальных решений : учебное пособие : в 2 т / А.В. Соколов, В.В. Токарев. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Физматлит, 2012. — Т. 1. Общие положения. Математическое программирование. — 562 с. : схем., табл. — (Анализ и поддержка решений). — Режим доступа: [<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457697>].

10. Т. Ху. Целочисленное программирование и потоки в сетях — 1974, изд. Мир — 167 с.

11. Федунец, Н.И. Методы оптимизации : учебное пособие / Н.И. Федунец, Ю.Г. Черников. — Москва : Горная книга, 2009. — 376 с. — Режим доступа: [<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229023>].