ЛЕКЦИЯ 1. МНОЖЕСТВА

Дискретная математика — часть математики, изучающая дискретные (как правило, конечные) математические структуры. Является теоретической основой информатики.

УЧЕБНИКИ:

1. Белоусов, Ткачев. ДМ (МГТУ)
2. Новиков. ДМ для программистов
3. Краснов и др. Вся высшая математика (т.7)

СИМВОЛИКА ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Множество – понятие неопределяемое. Множество – это совокупность.

Множества: $A, B, \ldots, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

Принадлежность: $a \in A$

Включение: $A \subset B, A \subseteq B$

Пустое множество и универсум: $\varnothing, U$

МОЩНОСТЬ

Определение. Мощностью конечного множества называется количество его элементов: $|A|$.

Для бесконечного множества понятие мощности сложнее (счётные и несчётные множества).

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ

1. перечисление элементов;
2. характеристический предикат;
3. характеристическая функция (область определения – универсум, значения – 0 и 1);
4. бинарный массив (если на конечном универсуме задан порядок).

Примеры:

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, n < 6\}$
3. $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \le 5 \\ 0, x > 5 \end{cases}$
4. Если взять универсум $U = [0, 1, 2, \ldots, 255]$, то A=[0,1,1,1,1,1,0,…,0]

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. объединение;
2. пересечение;
3. разность;
4. симметрическая разность;
5. дополнение.

Задание: **записать все операции через предикаты и показать на Диаграмме Эйлера-Венна.**

Операции объединения и пересечения обобщаются на бесконечную совокупность множеств.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ

1. *идемпотентность*:
   $A \cup A = A$, $\quad A \cap A = A$;
2. *коммутативность*:
   $A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$;
3. *ассоциативность*:
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
4. *дистрибутивность*:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
5. *поглощение*:
   $(A \cap B) \cup A = A$, $\quad (A \cup B) \cap A = A$;
6. свойства нуля:
   $A \cup \varnothing = A$, $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$;
7. свойства единицы:
   $A \cup U = U$, $\quad A \cap U = A$;

8. *инволютивность*:
   $\overline{\overline{A}} = A$;
9. *законы де Моргана*[1]:
   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
10. свойства дополнения:
    $A \cup \overline{A} = U$, $\quad A \cap \overline{A} = \varnothing$;
11. выражение для разности:
    $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
12. Выражение для симметрической разности:
    $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
    $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

А как все эти свойства доказать?

СПОСОБЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТОЖДЕСТВ

1. диаграммы Венна для левой и правой частей (не более 3-х множеств);
2. метод тождественных преобразований;
3. использование таблиц истинности;
4. метод характеристических функций.

Примеры. Доказать или опровергнуть тождество:

1. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ - верно
2. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ - неверно
3. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ - верно

ПОДМНОЖЕСТВА И БУЛЕАН

БУЛЕАН

Определение. Множество всех подмножеств множества М называется **булеаном** и обозначается $\mathrm{B}(A)$ или 2^A.

Теорема (о мощности булеана). $\left|2^A\right| = 2^{|A|}$.

Доказательство: (через бинарный массив и правило умножения).

АЛГЕБРА ПОДМНОЖЕСТВ

Множество всех подмножеств данного множества с введёнными выше операциями образуют алгебру. Она, как мы увидим, изоморфна *алгебре булевых функций* и *алгебре высказываний*.

ГЕНЕРАЦИЯ ПОДМНОЖЕСТВ И КОДЫ ГРЕЯ

Во многих задачах требуется перебрать ВСЕ подмножества данного множества. Один из способов – перебрать в порядке возрастания все двоичные коды длины *n*. Недостаток такой генерации в том, что порядок следования подмножеств не связан с их составом: например за 011 идёт 100.

Определение. Последовательность, в которой перечислены все двоичные коды длины N называется **последовательностью Грея**, если любые два последовательных кода отличаются друг от друга ровно в одном разряде.

Например: 00, 01, 11, 10

Теорема. Для любого N такая последовательность существует.

Доказательство. По индукции. Пусть имеется такая последовательность длины $(N-1)$. Выпишем все коды в порядке Грея, а потом ещё раз в обратном порядке. К первой половине в начало припишем 0, а ко второй – 1.

Задание: написать программу, генерирующую коды Грея

ПРАВИЛО ВКЛЮЧЕНИЯ-ИСКЛЮЧЕНИЯ*

Теорема 1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Доказательство. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, причём эти множества не пересекаются. Отсюда $|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$.

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| + |A \cap B| - |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Теорема 2. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Доказательство аналогично.

В общем случае формулу для этого правила мы выведем позже.