ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Цель: сформировать практические навыки проведения вычислительных экспериментов, анализа их результатов;

Задачи: исследование влияния погрешности входных данных на решение вычислительной задачи, вычисления решения системы линейных уравнений.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Причиной погрешностей в вычислительных устройствах является так называемая нормализованная запись чисел. Поясним это на примере гипотетической ЭВМ, которая «работает» с десятичными числами.

Нормализованная запись числа имеет следующий вид:

знак числа	десятичная точка	м	а	н	т	и	с	с	а	$*10^{\text{порядок}}$

Мантисса всегда по модулю меньше единицы. Количество разрядов в мантиссе после десятичной точки определяет название конечноразрядноі арифметики. В данном случае разрядная сетка мантиссы содержит восемь разрядов, такая арифметика называется восьмиразрядной.

Пример. Записать в четырехразрядной арифметике число 670594,32. Имеем

$$670594{,}32 = 0{,}67059432 \bullet 10^6 = 0{,}6705 \bullet 10^6.$$

Не уместившиеся в разрядную сетку цифры гипотетическая ЭВМ отбросила без округления.

Уже на стадии изучения вычисления погрешности значения функции нескольких приближенных аргументов можно ввести ключевые, подчас друг друга подменяющие и дополняющие понятия: «обусловленность задачи», «чувствительность» решения к изменению формирующих задачу входных параметров, «устойчивость» решения по отношению к малым изменениям входных данных. Чаще всего мы вначале будем использовать термин «обусловленность задачи».

Обусловленностью задачи ν будем называть отношение относительной погрешности решения к относительной погрешности входного параметра (или совокупной характеристики этих входных параметров). Если $\nu < 10$, то условимся считать задачу хорошо обусловленной, если же $\nu \geq 10$, то — плохо обусловленной.

Есть три способа оценки числа обусловленности задачи. Первый способ основан на использовании аналитической формулировки задачи. Второй способ называется способом численного эксперимента. Его суть состоит в том, что входным параметрам придаются малые отклонения в обе стороны от него, а затем находятся отношения относительной погрешности решения и относительной погрешности всех входных параметров. Третий способ, назовем его численно-аналитическим, состоит в том, что вначале находится аналитическая оценка числа обусловленности, а затем проводится численный эксперимент по его получению. Наибольшее из всех полученных отношений принимается за число обусловленности задачи.

Поясним применение термина обусловленности к оценке постановки задачи и использования результатов ее решения в практических целях на примере следующей задачи.

Для алгебраического многочлена $P(x) = -4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 7x - 12$ вначале вычислить его значение при $x = -0{,}325$ и абсолютной погрешности $\Delta x = 0{,}0005$ и оценить число обусловленности. Затем провести оценку числа обусловленности численным экспериментом, изменив $x = -0{,}325$ на $x = -0{,}326$.

В первом случае имеем

$\delta x = \frac{0{,}0005}{|-0{,}325|}100\% = 0{,}154\%$, $P(-0{,}325) = -14{,}\ 8081;$

$\Delta P = |-16x^3+15x^2 - 6x + 7|\ \Delta x = 0{,}0055;$

$\delta P = \frac{0{,}0055}{|14{,}8081|}100\% = 0{,}037\%;\ v = \frac{0{,}037}{0{,}154} = 0{,}0491.$

Во втором случае имеем

$P(-0{,}326) = -14{,}\ 920;$

$\delta P = \frac{|-14{,}920-(-14{,}8081)|}{|-14{,}920|}100\% = 0{,}75\%;$

$\delta x = \frac{0{,}001}{|-0{,}326|}100\% = 0{,}307\%;\ v = \frac{0{,}75}{0{,}307} = 2{,}45.$

Выбираем в качестве числа обусловленности v = 2,45.

Задача хорошо обусловлена.

Известный пример Уилкинсона демонстрирует плохо обусловленную задачу. Многочлен

$P_{20}(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-20) = x^{20} - - 210\,x^{19} + \ldots + 20!$

имеет двадцать хорошо отделимых действительных корней:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_{20} = 20.$$

Предположим, что только в одном его коэффициенте, а именно при x^{19}, сделана ошибка: вместо -210 в развернутый вид многочлена $P_{20}(x)$ подставлено число $-(210 + 2^{-23}) \approx -(210+10^{-7})$. Полученный при этом так называемый возмущенный многочлен будет иметь следующие корни (ограничимся записью трех цифр после запятой):

$x_1 \approx 1{,}000;\ x_2 \approx 2{,}000;\ x_3 \approx\ 3{,}000;$

$x_4 \approx\ 4{,}000;\ x_5 \approx 5{,}000;\ x_6 \approx\ 6{,}000;$

$x_7 \approx\ 7{,}000;\ x_8 \approx \sim 8{,}007;\ x_9 \approx 8{,}917;$

$x_{10,11} \approx 10{,}095 \pm 0{,}644i;\ x_{12,\,13} \approx 11{,}794 \pm 1{,}652i;$

$x_{14,\,15} \approx\ 13{,}992 \pm 2{,}519i;\ x_{16,17} \approx 16{,}731 \pm 2{,}813i;$

$x_{18,19} \approx 19{,}502 \pm 1{,}940i;\ x_{20} \approx\ 20{,}847.$

Как видим, весьма малое возмущение (сопоставимое с одинарной точностью проводимых расчетов) всего лишь в одном коэффициенте даже качественно изменило набор корней данного многочлена: половина из них перестала быть действительными.

Рассмотрим еще один пример, демонстрирующий разную чувствительность значений по отношению к малым изменениям различных независимых аргументов.

Вычислить значение функции $z(x, y) = x^{0,5} \cdot \cos(y)$, при $x = 2,4$ и $y = 1,56$, оценить его абсолютную и относительную погрешности, если все числа записаны со всеми верными знаками, степень 0,5 задана точно. С помощью численного эксперимента оценить число обусловленности задачи вычисления $z(x, y)$:

а) по погрешности числа 2,4;

б) по погрешности числа 1,56.

Запишем функцию $z(2,4; 1,56) = 2,4^{0,5} \cdot \cos 1,56$. Имеем $\Delta x = 0,1$: $\Delta y = 0,01$.

$\Delta z = |z_x|\, \Delta x + |z_y|\, \Delta y = 0,5 \cdot 2,4^{-0,5} \cos 1,56 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 2,4^{-0,5} \cos 1,56 \cdot 0,01 =$

$= 0,0158.$

Вычислим $z(2,4; 1,56) = 2,4^{0,5} \cdot \cos 1,56 = 0,0167$; $\delta z = 94,61\%$.

Теперь проведем численный эксперимент. Изменим вначале $x = 2,4$ до $x = 2,39$, тогда

$z_1(x, y) = 2,39^{0,5} \cdot \cos 1,56 = 0,01669$. Число обусловленности —

$$\nu \geq \frac{|x|}{|x-x_1|} \frac{|z-z_1|}{|z|} = 0,05.$$

Теперь изменим второй аргумент. Имеем $y = 1,56$; $y_1 = 1,57$, тогда $z_1(x, y) = 2,4^{0,5} \cdot \cos 1,57 = 0,0012$. Число обусловленности

$$\nu \geq \frac{|y|}{|y-y_1|} \frac{|z-z_1|}{|z|} = 143,52.$$

Заметим, что при вычислении суммы приближенных чисел на ЭВМ могут не выполняться классические аксиомы, в частности переместительный закон. Источником этого является несовершенство вычислительных средств, ибо они могут оперировать лишь с ограниченным количеством десятичных разрядов, отбрасывая или округляя те разряды, которые не укладываются в прокрустово ложе, характерное для данной ЭВМ. Приведем пример суммирования чисел, имеющих разные порядки. При этом будем считать, что все расчеты производятся на гипотетической ЭВМ, оперирующей лишь с четырьмя десятичными разрядами, а значение пятого разряда учитывается при округлении четвертого. Заметим, что при сложении чисел разных порядков ЭВМ выравнивает порядки, сдвигая меньшее число вправо:

$10,26 + 7,624 + 0,5032 + 0,08465 + 0,03416 = 18,49.$

Изменяя порядок суммирования, а именно складывая числа в обратном порядке, получим

$0,03416 + 0,08465 + 0,5032 + 7,624 + 10,26 = 18,51.$

Если в приведенном примере результаты суммирования в прямом и обратном направлениях различаются не столь сильно, то при последовательном прибавлении к числу $1,001 \cdot 10^3$ десяти тысяч одинаковых чисел $1,001 \cdot 10^{-1}$ получится сумма $1,001 \cdot 10^3$, которая отличается вдвое от результата суммирования в обратном порядке: $2,002 \cdot 10^3$.

Из рассмотренных примеров следует, что при сложении положительных чисел их необходимо предварительно расположить в порядке возрастания.

Рассмотрим еще один пример, в котором демонстрируется нарушение сочетательного закона. Пусть вновь в четырехразрядной арифметике требуется сложить четыре числа:

$9,824 + 9,778 + 9,793 + 9,814 = 39,20$.

Сложим те же числа, разбив их с помощью скобок на две пары:

$(9,824 + 9,778) + (9,793 + 9,814) = 19,60 + 19,61 = 39,21$.

Получим, что $a + b + c + d \neq (a + b) + (c + d)$.

При нахождении разности двух близких приближенных чисел возможна так называемая потеря точности. Поясним ее на примере. Пусть требуется найти разность двух чисел $x = 6,135$и $y = 6,134$, верных (в широком смысле) в написанных знаках, а также указать абсолютную и относительную погрешности результата. $\Delta x = 0,001$; $\Delta y = 0,001$; $\Delta x\text{-}y = 0,002$; $\delta_{x\text{-}y} = 200\%$.

Таким образом, погрешность результата оказалась много больше погрешностей исходных данных. Чтобы избежать подобных ситуаций, при нахождении разности применяют преобразование исходных формул, содержащих разности близких чисел. Если невозможно совершить подобное преобразование, то уменьшаемое и вычитаемое следует брать с достаточным числом запасных верных знаков.

Приведем два примера нарушения классических законов теории действительных чисел, связанных с умножением.

Пусть в четырехразрядной арифметике требуется найти произведение двумя способами:

$4\ (2,573-2,572) = 0,004$;

$4 \cdot 2,573 - 4 \cdot 2,572 = 10,29 - 10,29 = 0,000$

Получили разные результаты, свидетельствующие о том, что

$a(b - c) \neq ab - ac$.

Поскольку каждая вычислительная машина может работать лишь с ограниченным множеством чисел $\min \leq |x| \leq \max$, то операция умножения может выводить за эти пределы.

Предположим, что на гипотетической ЭВМ, в которой максимально допустимое число имеет порядок 10^{16}, требуется найти произведение трех чисел $x_1 = 2 \cdot 10^9$, $x_2 = 5 \cdot 10^{-6}$, $x_3 = 4 \cdot 10^8$.

При одном порядке умножения получим

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 4 \cdot 10^{12}$.

Когда сомножители расположены в другом порядке, а именно

$x_1 \cdot x_3 \cdot x_2 = 2 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^8 \text{-} 5 \cdot 10^{-6}$,

умножение x_1 на x_3 выходит за пределы допустимого числа

$x_1 \bullet x_3 = 8 \bullet 10^{17}$, и при счете на ЭВМ произойдет так называемый аварийный останов. Таким образом, при вычислении на ЭВМ произведения возможны ситуации, когда

$x_1\, x_2\, x_3 \neq x_1\, x_3\, x_2$.

Заметим, что, как при умножении приближенных чисел, так и при делении, в результате целесообразно сохранять столько значащих цифр, сколько их в числе с наибольшей относительной погрешностью.

В заключение остановимся на вопросе о «машинном эпсилон». Так называют максимальное положительное число ε, которое воспринимается данной ЭВМ как число 0. Для определения значения ε наберем следующие инструкции:

```
epsilon ← 1
while     1 + epsilon >1
     epsilon← epsilon/2
```

Полученное значение машинного эпсилон (для смартфонов ($\varepsilon \sim 10^{-16}$) свидетельствует о том, что в подавляющем числе учебных вычислительных задач эффектами, связанными с конечноразрядностью ЭВМ можно пренебречь.

Но это совсем не означает, что про этот эффект можно забыть совсем. Рассмотрим пример, в котором конечноразрядность ЭВМ приводит к неверному результату.

Приведем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

к треугольному виду согласно алгоритму Гаусса с выбором главного элемента. При машинном счете дроби 2/3 и 1/3 будут заменены на вещественные константы

a = 0,666666666666667, b = 0,333333333333333

соответственно ($\Delta a = 10^{-15}$, $\Delta b = 10^{-15}$), что приведет к следующим результатам:

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 3{,}3E-16 & 1{,}6E-16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Отсюда следует, что Rang(B) = 2, хотя очевидно, что Rang(A) = 1. Эта грубая ошибка была получена вследствие того, что константы 3,3E-16 и 1,6E-16 находятся за пределами машинного нуля ε и поэтому были восприняты интерпретатором как ненулевые вещественные числа.

Можно разными способами бороться с этим вредным эффектом машинной арифметики. Например, можно ввести дополнительный условный оператор if в виде

```
if a<1.0E-15

     a←0
```

Возможна другая организация вычислений, например:

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений

Норму матрицы-столбца $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ (или матрицы-строки) условимся искать в виде суммы модулей всех его элементов: $||B|| = |b_1| + |b_2| + ... + |b_n|$. Норму матрицы будем вычислять как наибольшее число из сумм модулей элементов по столбцам. Не ограничивая общности, запишем соответствующее равенство для матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$||A|| = \max\{|a_{11}| + |a_{21}| + |a_{31}|;\ |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{32}|;\ |a_{13}| + |a_{23}| + |a_{33}|\}$.

Теорема 1. Пусть даны две системы A • X = B и A • X* = = B* с одинаковыми и точными матрицами A и близкими правыми частями B и B*. Тогда справедлива следующая оценка, связывающая относительную погрешность решения $\delta x = \frac{||X-X^*||}{||X||}100\%$ с относительной погрешностью правых частей $\delta B = \frac{||B-B^*||}{||B||}100\%$: $\delta X \approx ||A||•||A^{-1}||•\delta B$.

Теорема 2. Пусть даны две системы A•X = B и A*•X* = B с одинаковыми правыми частями B и близкими матрицами A и A*. Тогда справедлива следующая оценка, связывающая относительную погрешность решения $\delta x = \frac{||X-X^*||}{||X||}100\%$ с относительной погрешностью матрицы $\delta A = \frac{||A-A^*||}{||A||}100\%$: $\delta X \approx ||A||•||A^{-1}||•\delta A$.

Определение. Числом обусловленности ν задачи нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений A • X = B называется произведение нормы прямой матрицы на норму обратной матрицы $\nu = ||A|| • ||A^{-1}||$.

Условимся считать задачу хорошо обусловленной, если $1 \le \nu \le 10$, и плохо обусловленной, если $\nu > 10$.

Для системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 3{,}00 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9{,}0 \end{cases}$, найти число обусловленности и, считая правые части верными в написанных знаках, вычислить относительную погрешность решения.

Выпишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и найдём обратную матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/9 & -6/9 & 5/9 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем нормы прямой и обратной матриц: $||A|| = 8$, $||A^{-1}|| = 3$. Число обусловленности $\nu = ||A|| • ||A^{-1}|| = 8 • 3 = 24$, так как $\nu > 10$, то задача плохо обусловлена. Матрица-столбец правых частей $B = \begin{pmatrix} 3{,}00 \\ 4 \\ 9{,}0 \end{pmatrix}$. Норма ||B|| = 16. Поскольку правые части верны в написанных знаках, отклонение приближенной матрицы-столбца B от точного ее значения B* имеет вид

$B - B^* = \begin{pmatrix} \pm 0{,}01 \\ \pm 1 \\ \pm 0{,}1 \end{pmatrix}$ и ||B – B*|| = 1,11.

Относительная погрешность правых частей: $\delta B = \frac{1{,}11}{16} 100\% \approx 7\%$.

Относительная погрешность решения: $\delta x = \frac{\|X - X^*\|}{\|X\|} 100\% = v\ \delta B = 27 \cdot\ 7\% \approx 189\%$.

ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ

Задание 1. Экспериментально оценить число обусловленности задачи по отношению к погрешности верного в написанных знаках аргумента x_1, полагая, что x_2 и x_3 точные числа.

1. $z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^4 + 2x_1^2 x_2 x_3 - 4x_1^3 x_2^2 - 2x_1;$
   $x_1 = 1{,}001;\ x_2 = 0{,}025;\ x_3 = 10{,}001.$
2. $z(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + \sqrt{x_1^2 - x_2 x_3};$
   $x_1 = -10;\ x_2 = 4{,}3;\ x_3 = 1{,}1.$
3. $z(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3};$
   $x_1 = -18{,}1;\ x_2 = 1{,}4;\ x_3 = 40{,}01.$
4. $z(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{e^{x_1} - e^{x_2}\sqrt{x_3}};$
   $x_1 = 1{,}02;\ x_2 = 1{,}01;\ x_3 = 4{,}14.$
5. $z(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 2x_2^2 - 4x_3^3 x_2^2;$
   $x_1 = 1{,}05;\ x_2 = 0{,}25;\ x_3 = 2{,}01.$
6. $z(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + x_2^2}{x_3};$
   $x_1 = 3{,}28;\ x_2 = 0{,}932;\ x_3 = 1{,}132.$
7. $z(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 + x_2 x_1 + x_3 x_1;$
   $x_1 = 2{,}104;\ x_2 = 1{,}935;\ x_3 = 0{,}845.$
8. $z(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{2\sqrt{x_1} + 3\sqrt{x_3}}{x_3};$
   $x_1 = 3{,}18;\ x_2 = 4{,}21;\ x_3 = 5{,}13.$
9. $z(x_1, x_2, x_3) = \ln x_1 \sin(x_2 + x_3);$
   $x_1 = 3{,}4;\ x_2 = 5{,}95;\ x_3 = 3{,}80.$
10. $z(x_1, x_2, x_3) = \ln(\sin(x_3) + x_2) - x_1;$
    $x_1 = 2{,}0;\ x_2 = 1{,}0;\ x_3 = 3{,}14.$
11. $z(x_1, x_2, x_3) = x_3 \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2};$
    $x_1 = -3{,}1;\ x_2 = 4{,}05;\ x_3 = 40{,}01.$
12. $z(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2} + x_2^{x_3};$
    $x_1 = 3{,}0;\ x_2 = 2;\ x_3 = 2{,}01.$
13. $z(x_1, x_2, x_3) = \cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}\right);$
    $x_1 = -1{,}1;\ x_2 = 2{,}14;\ x_3 = 3{,}201.$
14. $z(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} \ln(x_1^2 + x_3^3);$
    $x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 2{,}05;\ x_3 = 1{,}01.$

15. $z(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^3 - x_2^2}{x_3 + x_2}$;

$x_1 = 2{,}28$; $x_2 = 0{,}9$; $x_3 = 1{,}132$.

16. $z(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_3 + x_2^2}$;

$x_1 = 1{,}48$; $x_2 = 1{,}8$; $x_3 = 1{,}1$.

17. $z(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2}{x_3}}$;

$x_1 = 1{,}41$; $x_2 = 22, 8$; $x_3 = 1{,}1$.

18. $z(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}$;

$x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 10{,}8$; $x_3 = 25{,}11$.

19. $z(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\dfrac{x_1^2 - x_3}{x_3 - x_2}}$;

$x_1 = 5{,}41$; $x_2 = 0{,}08$; $x_3 = 1{,}1$.

20. $z(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + x_3^3$;

$x_1 = 0{,}4$; $x_2 = 2{,}8$; $x_3 = 1{,}5$.

21. $z(x_1, x_2, x_3) = x_3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;

$x_1 = 3{,}11$; $x_2 = 4{,}08$; $x_3 = 5{,}1$.

22. $z(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3^2 + x_1^3$;

$x_1 = 1{,}4$; $x_2 = 2{,}8$; $x_3 = 4{,}2$.

23. $z(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_3 x_2^3}$;

$x_1 = 2{,}11$; $x_2 = 4{,}18$; $x_3 = 7{,}1$.

24. $z(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{x_2 x_3^2}$;

$x_1 = 10{,}4$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 4{,}1$.

25. $z(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_3^2)\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x_2}\right)$;

$x_1 = 1{,}4$; $x_2 = 4{,}001$; $x_3 = 2{,}5$.

Задание 2. Коэффициенты основной матрицы системы точны, а правые части верны в написанных знаках. Не решая системы, априорно оценить относительную погрешность решения:

$$\begin{cases} (N+1)x_1 + (N+2)x_2 + (N+3)x_3 = 2N+5 \\ \left(N + \dfrac{1001+N}{1000}\right)x_1 + (N+2{,}001)x_2 + (N+3{,}005)x_3 = 2N+5{,}006, \\ (N+0{,}9999)x_1 + (N+1{,}9999)x_2 + (N+2{,}9002)x_3 = 2N+4{,}9001 \end{cases}$$

N – номер варианта.

ФОРМА ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

На выполнение лабораторной работы отводится 1 занятие (2 академических часа: 2 часа на выполнение и на подготовку отчета).

Номер варианта студенту выдается преподавателем.

Отчет на защиту предоставляется в печатном виде.

Структура отчета (на отдельном листе(-ах)): титульный лист, формулировка задания (вариант), этапы выполнения работы, результаты выполнения работы, выводы