Министерство образования и науки Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Горбунов А.К., Силаева Н.А., Крицкая А.Р.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. МАГНИТОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Методические указания к выполнению домашней работы
по курсам «Физика» и «Физика и естествознание»

для всех специальностей и направлений подготовки

Калуга, 2018

УДК 534.16
ББК 22.213
К82

Методические указания составлены в соответствии с учебным планом для подготовки специалистов и бакалавров по следующим специальностям и направлениям подготовки КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана: 15.03.01, 09.03.04, 10.03.01, 13.03.03, 09.03.01, 11.03.03, 15.03.06, 20.03.01, 27.03.05, 27.03.04, 10.05.03, 15.05.01, 23.05.01

Методические указания рассмотрены и одобрены:
Кафедрой «Физика» (ФН4-КФ)
протокол № 7 от 19.02 2018 г.
Зав. кафедрой ФН4-КФ ____________ д.ф.-м.н., профессорА.К. Горбунов
Методической комиссией ФНК
протокол № 2 от 28 февраля 2018 г.
Председатель метод.комиссии ____________ к.х.н., доцентК.Л. Анфилов
Методической комиссией КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана
протокол № 2 от 06.03 2018 г.
Председатель метод.комиссии ____________ д.э.н., профессор О.Л. Перерва

Рецензент ____________ профессор кафедры ФН5-КФ, д.т.н., М.В. Астахов
Авторы ____________ профессор кафедры ФН4-КФ, д.ф.-м..н., А.К. Горбунов
____________ ст. преподаватель кафедры ФН4-КФ, Н.А. Силаева
____________ доцент кафедры ФН4-КФ, к.п.н., А.Р. Крицкая

Аннотация.

Методические указания составлены в соответствии с рабочей программой курса «Физика» и «Физика и естествознание» и предназначены для организации самостоятельной работы студентов 2 курса всех специальностей и направлений подготовки КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Методические указания содержат цели и задачи работы, краткую теоретическую часть, рекомендации по выполнению домашней работы, требования к выполнению и оформлению отчета, примеры решения типовых задач и индивидуальные задания для самостоятельного решения. Наличие поясняющих определений, справочных данных, контрольных вопросов и заданий позволяет считать методические указания законченными и рекомендовать их студентам при выполнении домашней работы.

Оглавление

1. ВВЕДЕНИЕ 3
2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ 3
2.1. Электростатическое поле в вакууме. Принцип суперпозиции... 3
2.2. Теорема гаусса. Поле в диэлектрике 13
2.3. Электрическое поле в диэлектриках 18
2.4. Энергия электростатического поля 28
2.5. Магнитное поле токов 38
3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ 50
4. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ50
5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ (ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ)..51
6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ..59
7. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ 59

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель выполнения домашнего задания: формирование у студентов практических навыков определения значений параметров следующих физических процессов - силовых и энергитических характеристик магнитных и электрических полей, .
Задачи: определить значения параметров процессов - силовых и энергитических характеристик магнитных и электрических полей

Работая над домашним заданием, студент использует, закрепляет и углубляет знания, полученные на лекционных и практических занятиях по курсу «Физика» и «Физика и естествознание» и приобретает навыки самостоятельной работы с информацией.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ.

Анализ многочисленных ситуаций взаимодействия зарядов, размещенных на различного рода поверхностях и в объемах, приводит к пониманию «принципа независимости действия электрических зарядов». Согласно этому принципу, точечное взаимодействие двух зарядов не зависит от того, находятся ли взаимодействующие заряды в какой-либо системе зарядов или же они являются свободными зарядами. Связывая полевое воздействие одного заряда на другой с эмпирическим знанием закона Кулона, вводят силовую характеристику поля в виде векторного отношения

$$\frac{\sum \overrightarrow{\mathbf{F_i}}}{\mathbf{q}^*} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{F}_1}}{\mathbf{q}^*} + \frac{\overrightarrow{\mathbf{F}_2}}{\mathbf{q}^*} + \ldots + \frac{\overrightarrow{\mathbf{F_n}}}{\mathbf{q}^*}, \qquad (1)$$

где силы $\overrightarrow{\mathbf{F}_1}; \overrightarrow{\mathbf{F}_2}; \ldots; \overrightarrow{\mathbf{F_n}}$ определены действием зарядов $\mathbf{q}_1; \mathbf{q}_2; \ldots; \mathbf{q_n}$ на заряд $\mathbf{q}^*$. Каждое слагаемое $\frac{\overrightarrow{\mathbf{F_i}}}{\mathbf{q}}$ является «силовой напругой» i – того заряда - q_i в точке поля где находится исследуемый заряд q^* вектор

$\overrightarrow{\mathbf{E_i}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{F_i}}}{\mathbf{q}^*}$ получает название вектора напряженности электростатического поля в точке созданного i – тым зарядом системы.

Равенство (1) представленное в виде $\vec{\mathbf{E}} = \overrightarrow{\mathbf{E}_1} + \overrightarrow{\mathbf{E}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathbf{E}_\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \overrightarrow{\mathbf{E_i}}$ отражает ситуацию, которую называют *принципом суперпозиции электростатического поля*.

Сам принцип складывается из системы обобщающих выводов, сделанных на основе анализа явлений, и трактуется следующим образом: «напряженность в точке создаваемого электрического поля является суммой напряженностей, которые создаются каждым точечным зарядом системы». Напряженность в точке поля рассматривается как равнодействующий вектор. Как и любая векторная физическая величина, напряженность электростатического поля отображает процесс направленно разворачивающегося во времени и в пространстве определенного физического явления, и этот процесс имеет знаковые отображения:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{q}}\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{x}}{\mathbf{dt}^2} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{y}}{\mathbf{dt}^2} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{z}}{\mathbf{dt}^2}\right)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{i}}\mathbf{E_x} + \vec{\mathbf{j}}\mathbf{E_y} + \vec{\mathbf{k}}\mathbf{E_z} \text{ где}$$

$$\mathbf{E_x} = \int_1^2 \mathbf{dE_x}\,;\ \mathbf{E_y} = \int_1^2 \mathbf{dE_y}\,;\ \mathbf{E_z} = \int_1^2 \mathbf{dE_z}$$

Линейные интегралы являются выражениями принципа суперпозиции электростатического поля. Составление подынтегральных выражений осуществляется различными способами действий выполняемых теми, кто решает поставленную проблемную задачу. Среди применяемых способов действий особое место уделяется выбору лабораторных систем отсчета с использованием системы не только прямолинейных декартовых координат, но и с использованием системы полярных, сферических, цилиндрических и др. координат.

Студентам, использующим данное методическое пособие при самостоятельной работе по выполнению домашних заданий необходимо осваивать приемы составления подынтегральных выражений на основе одновременного использования нескольких систем отсчета.

Пример 1. Если требуется определить напряженность электрического поля в центре плоского тонкого витка, по которому равномерно размещен заряд, то в этом случае удобно воспользоваться двумя системами отсчета: плоской декартовой системой XOY и полярной системой координат. Начало декартовой системы координат и полюс полярной системы координат совмещают и, устанавливая соотношения между дифференциальными элементами преобразующих выражений, определяют величину модуля вектора напряженности электростатического поля в центре равномерно заряженного витка (рис.1).

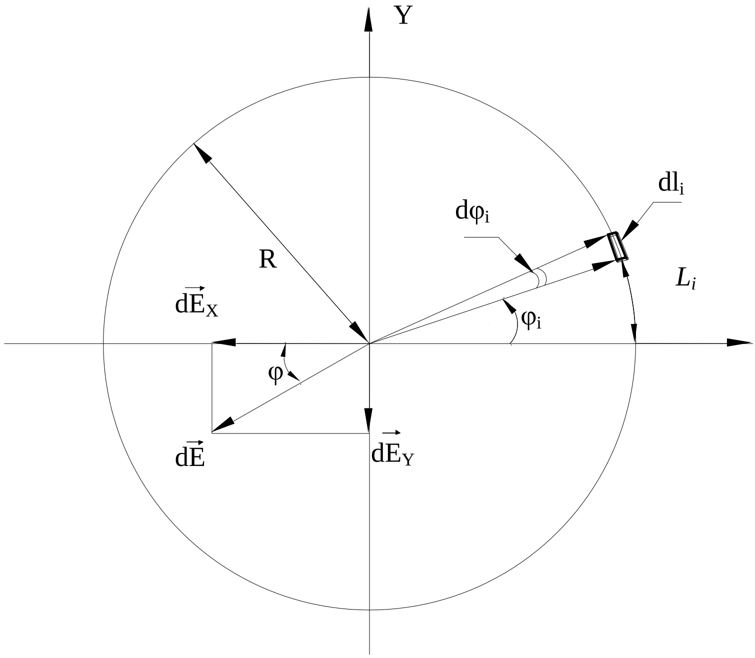


Рис.1.

$$\mathbf{d\vec{E}} = \mathbf{d\vec{E}_x} + \mathbf{d\vec{E}_y}$$

$$\mathbf{E_x} = \oint_{\mathbf{l}} \mathbf{dE_x}$$

$$\mathbf{E_y} = \oint_{\mathbf{l}} \mathbf{dE_y}$$

$$\mathbf{dE_x} = \left|\mathbf{d\vec{E}}\right| \cdot \mathbf{cos\varphi}$$

$$\left|\mathbf{d}\vec{\mathbf{E}}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau\cdot\mathbf{dl}}{\mathbf{R}^2}$$

где

$$\tau\cdot\mathbf{dl} = \mathbf{dq}$$

$$\mathbf{dl} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{d}\varphi$$

$$\mathbf{dE_x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau\mathbf{R}\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{R}^2}\cdot\mathbf{cos}\varphi$$

$$\mathbf{dE_y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau\mathbf{R}\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{R}^2}\cdot\mathbf{sin}\varphi$$

$$\mathbf{E_x} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{\mathbf{R}}\cdot(\mathbf{cos}\varphi)\mathbf{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{sin}\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$E_y = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{R}\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{R}\cdot\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\left(\cos 0 - \cos 2\pi\right) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\left(1-1\right) = 0$$

$$\left|\vec{\mathbf{E}}\right| = \sqrt{\mathbf{E_x^2} + \mathbf{E_y^2}} = 0$$

Следственный вывод: Система зарядов в физическом вакууме, равномерно и непрерывно распределенных на поверхности тонкого кругового витка, создает в центре витка электростатическое поле, напряженность которого равна нулю.

Вопросы для самоконтроля:

– как рассчитать поле в точках, смещенных относительно центра витка, при условии $\tau = \mathbf{const}$?;
– какова величина поля в центре витка, если $\tau = \tau_0 \, \mathbf{cos}\varphi$?;

Пример 2. Рассматривается случай, когда электростатическое поле создается системой зарядов равномерно и непрерывно распределенных на шаровой поверхности. Производится оценка модуля вектора напряженности в центре шаровой поверхности. В этом случае рекомендуется исходить из того, что физическая ситуация имеет явно выраженную центральную симметрию. По этой причине удобно использовать сочетание трехмерной прямоугольной декартовой системы координат со сферической системой координат (рис.2).

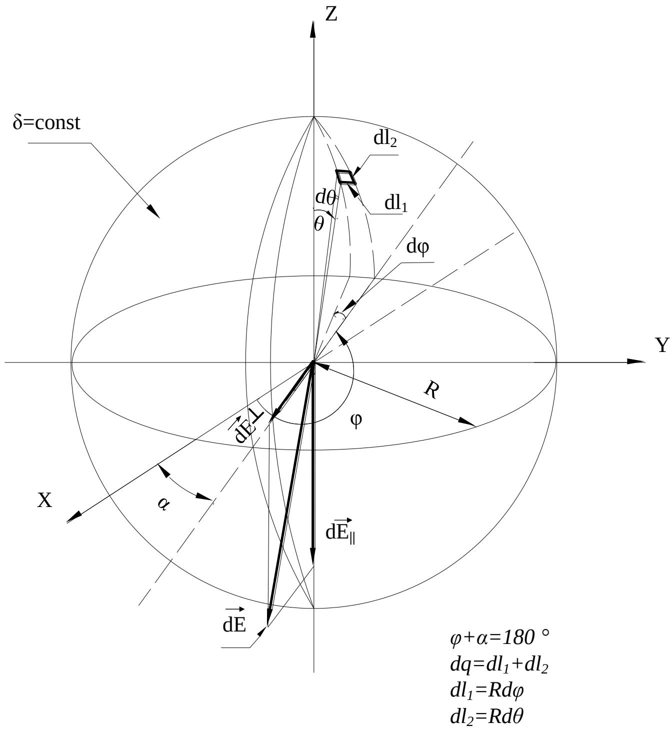


Рис.2

Поиск подынтегральных выражений будет определен следующим порядком действий:

– Составляется выражение элементарного точечного заряда в дифференциальной форме.

$$\mathbf{dq = \sigma \cdot dl_1 \cdot dl_2}$$

$$\mathbf{dl_1 = Rd\varphi}$$

$$\mathbf{dl_2 = Rd\theta}$$

$$\mathbf{dq = \sigma \cdot R^2 \cdot d\varphi \cdot d\theta}$$

– Составляется выражение модуля вектора напряженности, создаваемого зарядом dq в точке O.

$$\left|\mathbf{d\vec{E}}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{R}^2\cdot\mathbf{d\varphi}\cdot\mathbf{d\theta}}{\mathbf{R}^2} = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{d\varphi}\cdot\mathbf{d\theta}}{4\pi\varepsilon_0}$$

– Составляются дифференциальные выражения проекций вектора элементарной напряженности на координатные оси OX, OY, OZ.

$$\mathbf{dE_\perp = dE\cdot sin\theta}$$

$$\mathbf{dE_x = dE_\perp\cdot cos\alpha}$$

$$\mathbf{dE_y = dE_\perp\cdot sin\alpha}$$

$$\boldsymbol{\pi+\alpha=\varphi;\quad sin\varphi=-sin\alpha;\quad d\varphi=d\alpha;}$$

$$\mathbf{dE_z = dE\cdot cos\theta}$$

$$\mathbf{dE_x} = \frac{\boldsymbol{\sigma\cdot d\varphi\cdot d\theta(sin\theta)(-cos\varphi)}}{4\pi\varepsilon_0}$$

1) $\mathbf{E_x} = -\frac{\boldsymbol{\sigma}}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{2\pi}\mathbf{cos\varphi d\varphi}\int\limits_0^{\pi}\mathbf{sin\theta d\theta} = 0$

2) $\int\limits_0^{\pi}\mathbf{sin\theta d\theta = (-cos\theta)}\Big|_0^{\pi} = \mathbf{cos\theta}\Big|_{\pi}^{0} = 1-(-1) = 2$

3) $\int\limits_0^{2\pi}\mathbf{cos\varphi d\varphi = sin\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0$

4) $\mathbf{dE_y} = \frac{\boldsymbol{\sigma\cdot d\alpha\cdot d\theta sin\theta sin\alpha}}{4\pi\varepsilon_0}$

5) $E_y = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\alpha d\alpha = 0$

$$\alpha=\varphi-\pi\quad \varphi\Rightarrow[0\div 2\pi]\quad \alpha\Rightarrow[-\pi\div\pi]$$

6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathbf{sin\alpha d\alpha = (-cos\alpha)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \mathbf{cos\alpha}\Big|_{\pi}^{-\pi} = (-1)-(-1) = 0$

7) $\int\limits_0^{\pi}\mathbf{sin\theta d\theta = (-cos\theta)}\Big|_0^{\pi} = \mathbf{cos\theta}\Big|_{\pi}^{0} = 1+1 = 2$

$$\mathbf{E_y} = 0$$

$$\mathbf{dE_z} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{d\varphi d\theta \cos\theta}}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{E_z} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \mathbf{d\varphi} \int_0^{\pi} \mathbf{\cos\theta d\theta} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi \cdot (-\mathbf{\sin\theta})\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\left|\vec{\mathbf{E}}\right| = \sqrt{\mathbf{E_x^2} + \mathbf{E_y^2} + \mathbf{E_z^2}} = 0$$

Следственный вывод: убедились, что модуль вектора напряженности в центре шаровой поверхности, равномерно заряженной электрическим зарядом, имеет нулевое значение.

Вопрос для самоконтроля: будет ли вектор напряженности иметь нулевое значение в соседних точках внутри сферы?

Пример 4 . Тонкое непроводящее кольцо радиуса R заряжено с линейной плотностью $\tau = \tau_0 \cos\varphi$, где τ_0 – постоянная отрицательная величина, φ - азимутальный угол. Найти модуль напряженности электрического поля:

а) в центре кольца;

б) на оси кольца в зависимости от расстояния x до его центра. Исследовать полученное выражение при x>>R (рис. 4).

Преподавателю рекомендуется:

– используя принцип суперпозиции в создании векторной характеристики $\vec{\mathbf{E}}$ электростатического поля, показать на примере решения данной задачи сочетание полярной и прямоугольной декартовой системы координат. Объяснить, что знание величины модуля вектора напряженности электростатического поля определяется значением проекций вектора $\vec{\mathbf{E}}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат;
– учесть, что в создании поля вектора $\vec{\mathbf{E}}$ принимают участие как отрицательные заряды кольца, так и положительные;
– выполнить порядок действий, соответствующий приведенному решению, начав поиск величины $\vec{\mathbf{E}}$ в центре витка.

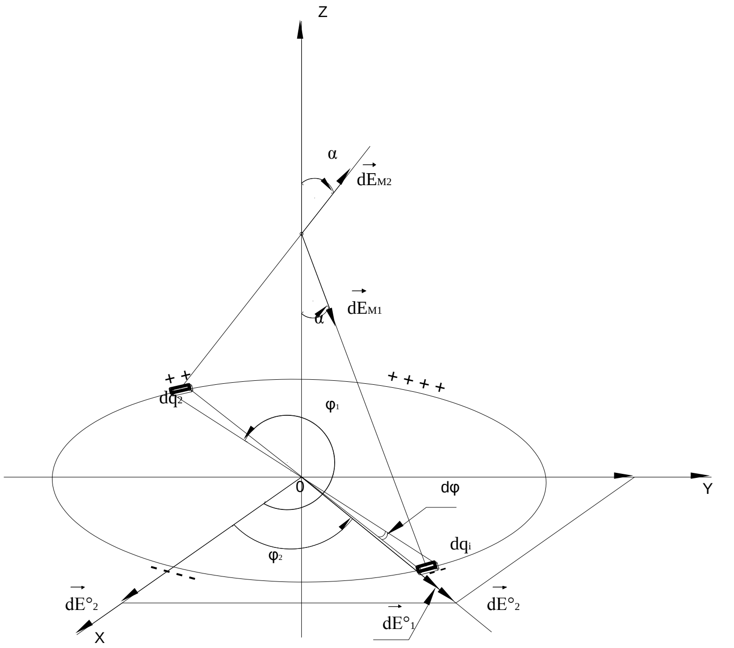


Рис.4

1) $d\left|\vec{E}_0\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\left|\tau\left(\varphi\right)\right|dl}{R^2} = \frac{\left|\tau\left(\varphi\right)\right|Rd\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\left|\tau\left(\varphi\right)\right|d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R};$

2) $dE_x^0 = \frac{\left|\tau_0\right|\cdot\left|\cos\ \varphi\right|\cos\ \varphi d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R};$

3) $dE_y^0 = \frac{\tau\left(\varphi\right)\sin\varphi d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\tau_0\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\tau_0\sin 2\varphi d\varphi}{8\pi\varepsilon_0 R};$

$$E_y^0 = \frac{\tau_0}{8\pi\varepsilon_0 R}\cdot\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\tau_0}{8\pi\varepsilon_0 R}\cdot\frac{1}{2}\left(1-1\right) = 0;$$

$$\left|\vec{E}^0\right| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\left|\tau_0\right|}{4\varepsilon_0 R} > 0.$$

$$4)\left|d\vec{E}^{M}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau(\varphi)dl}{r^2};\ r^2 = R^2 + z^2;\ dl = Rd\varphi.$$

$$dE_z^M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau(\varphi)dl}{r^2}\cos\alpha = \frac{\tau(\varphi)Rd\varphi\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)} = \frac{\tau_0\cdot(\cos\varphi)R\cdot d\varphi\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)};.$$

$$E_z^M = \frac{\tau_0 R\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\ d\varphi = \frac{\tau_0 R\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}\cdot(\sin\varphi)\ \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$5)dE_x^M = \frac{\tau_0\cdot(\cos\varphi)R\cdot d\varphi}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}\cdot(\sin\alpha)\cos\varphi.$$

$$6)dE_y^M = \frac{\tau_0\cdot(\cos\varphi)R\cdot d\varphi}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}\cdot(\sin\alpha)\sin\varphi.$$

$$E_x^M = \frac{\tau_0\cdot R\cdot(\sin\alpha)}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\ d\varphi = \frac{\tau_0\cdot R\cdot(\sin\alpha)}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}\cdot\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\ \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\tau_0\cdot R\cdot(\sin\alpha)\pi}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)} = \frac{\tau_0\cdot R\cdot(\sin\alpha)}{4\varepsilon_0(R^2+z^2)}.$$

$$E_y^M = \frac{\tau_0\cdot R\cdot(\sin\alpha)}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\varphi}{2}\ d\varphi = \frac{\tau_0\cdot R\cdot(\sin\alpha)}{8\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}\cdot(-\cos 2\varphi)\ \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$7)\left|\vec{E}^{M}\right| = \sqrt{(E_x^M)^2 + (E_y^M)^2 + (E_z^M)^2} = \frac{\tau_0 R\cdot(\sin\alpha)}{4\varepsilon_0(R^2+z^2)},$$

где $\sin\alpha = \dfrac{R}{r}.$

$$\left|\vec{E}^{M}\right| = \frac{\tau_0 R^2}{4\varepsilon_0 r(R^2+z^2)} = \frac{\tau_0 R^2}{4\varepsilon_0 r^3} = \frac{\tau_0 R^2}{4\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

частные случаи:

$$a)\ z = 0;\ \left|\vec{E}^{0}\right| = \frac{\tau_0}{4\varepsilon_0 R};\ b)\ z \gg R;\ \left|\vec{E}^{M}\right| = \frac{\tau_0 R^2}{4\varepsilon_0 z^3}.$$

Задача 2. Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень длины 2a заряжен равномерно зарядом q. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра стержня до точки прямой, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр, исследовать полученное выражение.

Рекомендуемый порядок действий:

– учесть, что расстояние “r” отсчитывается от центра стержня, и начало прямоугольной декартовой системы координат совместить с точкой середины стержня;
– точку полюса полярной системы координат совместить с изучаемой точкой на перпендикуляре к середине стержня, а полярную ось совместить с направлением оси OX;
– нанести указанные элементы на рисунок (рис. 5).

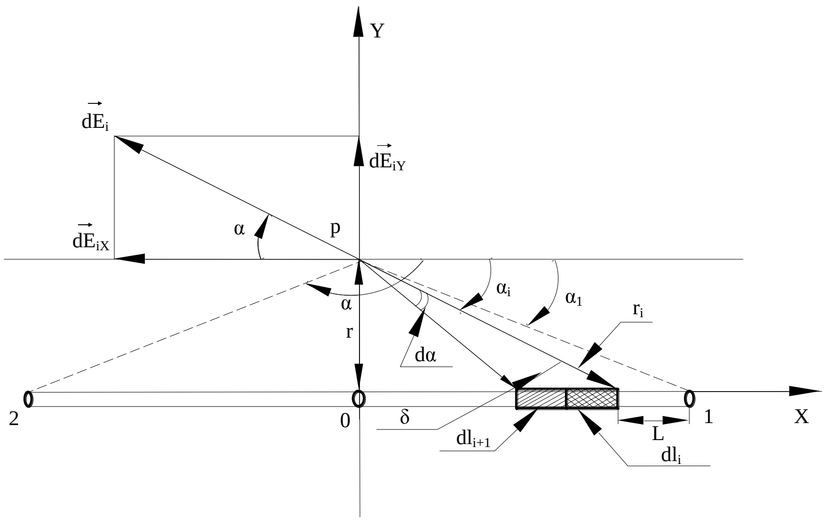


Рис.5

$$1)\left.\begin{aligned}\delta &= \mathbf{r}\cdot \mathbf{d}\alpha\\ \delta &= \mathbf{dl}\cdot \mathbf{sin}\alpha\end{aligned}\right\}\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{d}\alpha=\mathbf{dl}\cdot\mathbf{sin}\alpha.\ \ \frac{\mathbf{d}\alpha}{\mathbf{sin}\alpha}=\frac{\mathbf{dl}}{\mathbf{r}}.$$

$$2)\mathbf{dE_y} = \mathbf{dE_i} \cdot \mathbf{sin\alpha} = \left(\frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{dl}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \mathbf{r}^2}\right) \cdot \mathbf{sin\alpha}.\ \mathbf{r}^2 = \mathbf{h}^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{l})^2;\ \mathbf{dE_i} = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{dl}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \mathbf{r}^2};$$

$$\mathbf{dE_y} = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{d\alpha}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \mathbf{r}^2} = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d\alpha}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \mathbf{r}};\ \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{r}} = \mathbf{sin\alpha}.$$

$$\mathbf{dE_y} = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d\alpha} \cdot \mathbf{sin\alpha}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \mathbf{h}};$$

$$\mathbf{E_y} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{4\pi\varepsilon_0\mathbf{h}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathbf{sin\alpha\ d\alpha} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{4\pi\varepsilon_0\mathbf{h}} (-\mathbf{cos\alpha})\ \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\mathbf{E_y} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{4\pi\varepsilon_0\mathbf{h}} (\mathbf{cos\alpha_1} - \mathbf{cos\alpha_2}).$$

если $\alpha_1 = 0^o$; $\alpha_2 = 180^o$,

то $\mathbf{E_y} = \dfrac{\boldsymbol{\tau}}{4\pi\varepsilon_0\mathbf{h}}(1 - (-1)) = \dfrac{\boldsymbol{\tau}}{2\pi\varepsilon_0\mathbf{h}}$

$$3)\ \mathbf{dE_x} = \mathbf{dE_i}\ \mathbf{cos\alpha};\ \mathbf{E_x} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{4\pi\varepsilon_0\mathbf{h}} \int_{\alpha_1}^{180^o - \alpha_1} \mathbf{cos\alpha\ d\alpha} = 0;$$

$$\left|\vec{\mathbf{E}}^0\right| = \sqrt{\mathbf{E_y^2} + \mathbf{E_x^2}} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{2\pi\varepsilon_0\mathbf{h}}$$

2.2. «ТЕОРЕМА ГАУССА. ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ»

Сформулированная немецким математиком Гауссом в начала 20-го столетия теорема в историю физики вошла под его именем и является очень удобным средством для расчета напряженностей полей как в средах, не содержащих диэлектрики, так и в средах, содержащих диэлектрики.

Электростатическая теорема Гаусса в вакууме

Первое знакомство с теоремой Гаусса рекомендуется начать с изучения ее свойств **в среде воображаемого вакуума.**

Выполнить следующий порядок действий:

в инерциальной системе отсчета располагается точечный электростатический заряд q_i^* (для удобства выбирается положительный заряд);

заряд мысленно окружается совершенно произвольной поверхностью S мысленно воображаемой фигуры;

в произвольной точке M построенной поверхности S устанавливается величина вектора электрической напряженности, созданной точечным зарядом q_i^*

$$\left|\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{i}}\right| = \frac{\mathbf{q}_{\mathbf{i}}^*}{4\pi\varepsilon_0 \mathbf{r}_{\mathbf{i}}^2} = \mathbf{E}_{\mathbf{i}} \qquad (1)$$

на поверхности S с центром в выбранной точке M мыслительным действием проводят окружность бесконечно малого радиуса, внутри которой образуется бесконечно малая мысленно воображаемая поверхность dS_i, которой в силу допускаемой малости ставят в соответствие плоскую форму. В таком случае вся поверхность S будет состоять из единиц этой поверхности

$$\mathbf{S} = \lim_{\Delta S \to 0} \sum \Delta \mathbf{S}_{\mathbf{i}} = \oint_{\mathbf{S}} \mathbf{dS}_{\mathbf{i}}; \qquad (2)$$

Каждая мысленно устанавливаемая поверхность $\mathbf{dS}_{\mathbf{i}}$ (рис.1), пронизывается потоком $\mathbf{d\Phi}_{\mathbf{i}}$ вектора $\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{i}}$, величина которого оценивается правилом

$$\mathbf{d\Phi}_{\mathbf{i}} = (\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{i}}, \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}) = \mathbf{E}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{dS}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{cos}\alpha_{\mathbf{i}}$$

если $\alpha = 0^0$ $\mathbf{d\Phi}_{\mathbf{i}} > 0$,

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\mathbf{d\Phi}_{\mathbf{i}} = 0$,

$\alpha = \pi$ $\mathbf{d\Phi}_{\mathbf{i}} < 0$

(Аналогичные рассуждения выполняются относительно вектора $\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}$ и потока $\mathbf{d\Phi}_{\mathbf{k}}$);

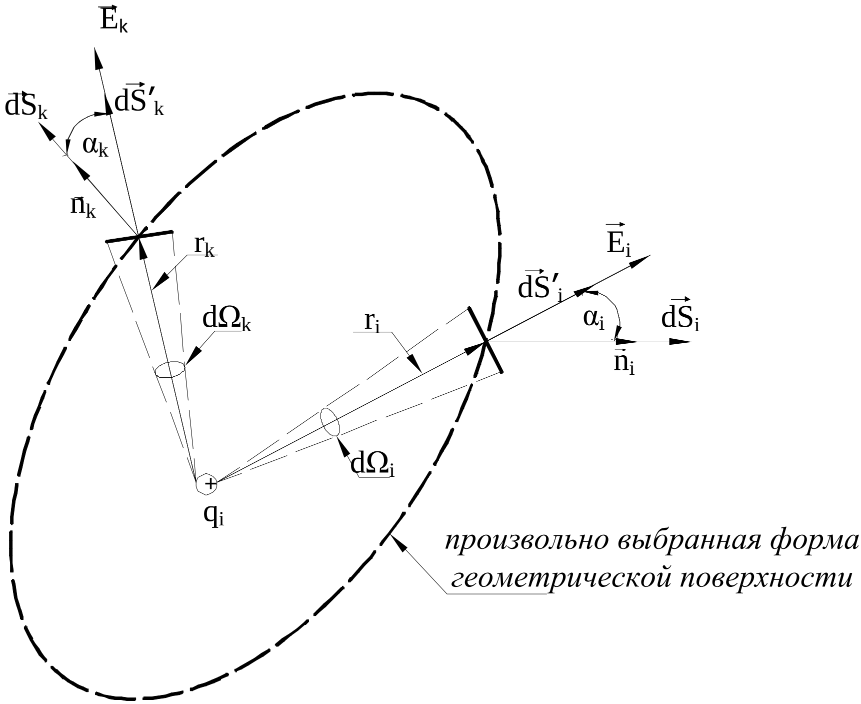


Рис.1

$$\mathbf{d\Phi_i = E_i \cdot dS'_i; \quad dS'_i = r_i^2 d\Omega; E_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}}$$

$$\mathbf{d\Phi_k = E_k \cdot dS'_k; \quad dS'_k = r_k^2 d\Omega; E_k = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}}$$

$$\mathbf{d\Phi_i = d\Phi_k = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot d\Omega}$$

Делается вывод, что элементарные потоки вектора $\vec{E}$ электростатического поля точечного заряда q^* через произвольные элементарные площади единой замкнутой поверхности одинаковы по своему численному значению.

Каждое численное значение отображает уровень материализации поля. Уровень материализации поля возрастает с увеличением величины численного значения потока.

Считая воображаемый вакуум непрерывной средой, уместно подсчитать величину полного потока векторов $\vec{E}$, создаваемых зарядом q_i через замкнутую поверхность произвольной формы, окружающую заряд q_i ; полному потоку уместно поставить в соответствие число, определяемое действием

$$\mathbf{\Phi} = \oint_S \mathbf{d\Phi} \qquad (3)$$

получим выражение полного потока через замкнутую поверхность

$$\mathbf{\Phi} = \oint_S \frac{\mathbf{q}^*}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \mathbf{d\Omega} = \int_0^{4\pi} \frac{\mathbf{q}^*}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \mathbf{d\Omega} = \frac{\mathbf{q}^*}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{\mathbf{q}^*}{\varepsilon_0};$$

обращаясь к принципу суперпозиции электростатического поля, преподаватель вместе со студентами высчитывает величину суммы потоков, создаваемых всеми точечными зарядами, находящимися внутри поверхности

$$\mathbf{\Phi_E} = \sum \frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_0} = \frac{\sum \mathbf{q}}{\varepsilon_0}, \qquad (4)$$

анализ полученного выражения учитывает свойства дискретности электрического заряда;

рекомендуется выражение элементарного потока вектора $\vec{E}$ привести к виду

$$\mathbf{d\Phi} = (\mathbf{E}\cos\alpha)\mathbf{dS} = \mathbf{E_n dS};$$

если внутри замкнутой поверхности мысленно расположить $n-oe$ количество точечных зарядов, то легко сообразить, что каждый из них создает поток вектора $\vec{E}$ через площадку dS, определяемый по выведенной формуле

$$\mathbf{d\Phi}_1 = \mathbf{E}_{1\mathbf{n}} \cdot \mathbf{dS}$$

$$\mathbf{d\Phi}_2 = \mathbf{E}_{2\mathbf{n}} \cdot \mathbf{dS}$$

$$\mathbf{...}$$

$$\mathbf{d\Phi_k} = \mathbf{E_{kn}} \cdot \mathbf{dS}$$

$$\mathbf{d\Phi} = \sum \mathbf{d\Phi_i} = (\mathbf{E}_{1\mathbf{n}} + \mathbf{E}_{2\mathbf{n}} + \mathbf{...} + \mathbf{E_{kn}}) \cdot \mathbf{dS}$$

или

$$\mathbf{d\Phi} = \mathbf{E_n} \cdot \mathbf{dS}.$$

В последней записи величина E_n является нормальной составляющей равнодействующего вектора $\vec{E}$ в точке M замкнутой поверхности;

обращаем внимание на тот факт, что подсчитать величину нормальной составляющей вектора $\vec{E}$ в точке М поверхности возможно подсчитать единственным способом – составить равенство

$$\frac{\sum \mathbf{q}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} = \oint_{\mathbf{S}} \mathbf{E_n dS}, \qquad (5)$$

считается, что все заряды суммы расположены внутри замкнутой поверхности S, и если левая часть равенства дискретна, то и правая часть равенства обязана быть дискретной. Величина геометрической поверхности не является дискретной величиной, следовательно, дискретной может быть только нормальная составляющая $\vec{E}_n$. А по этой причине величину E_n можно вычислять способом разбиения всей поверхности на части, вынося за знак интеграла E_n, тех участков поверхности, на которых она неизменна по величине. Таким образом, расчетная формула, исходящая из теоремы Гаусса сводится к действиям над равенством

$$\frac{\sum \mathbf{q}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} = \mathbf{E_{1n}} \int_{\mathbf{S}_1} \mathbf{dS} + \mathbf{E_{2n}} \int_{\mathbf{S}_2} \mathbf{dS} + \ldots + \mathbf{E_{kn}} \int_{\mathbf{S_k}} \mathbf{dS} \qquad (6)$$

рекомендуется обратить особое внимание на вычисление величины напряженности электрического поля вблизи поверхности заряженного проводника. Исходя из условия стационарности зарядов на поверхности проводника, делается вывод о том, что тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ на поверхности проводника обязана иметь нулевое значение. Применение теоремы Гаусса для отыскания нормальной составляющей дает результат

$$\mathbf{E_n} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}; \;\; \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{E_n} \qquad (7)$$

Очевидно, что прямых функциональных зависимостей величин $\sigma(R)$ от кривизны поверхности не существует. По этой причине значение σ поверхностной плотности зарядов получается из значения нормальной составляющей $\vec{E}_n$.

Рекомендуется проанализировать вытекающее из теоремы Гаусса выражение

$$\nabla \vec{\mathbf{E}} = \left(\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{E_z}}{\partial \mathbf{z}} \right) = \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} \cdot \boldsymbol{\rho}$$

$$\mathbf{E_x} \neq 0; \mathbf{E_y} \neq 0; \mathbf{E_z} \neq 0$$
$$\mathbf{E_x} = 0; \mathbf{E_y} \neq 0; \mathbf{E_z} \neq 0$$
$$\mathbf{E_x} = 0; \mathbf{E_y} = 0; \mathbf{E_z} \neq 0 \qquad (8)$$
$$\mathbf{E_x} = 0; \mathbf{E_y} = 0; \mathbf{E_z} = 0$$

и применить к решению задач на вычисление нормальной составляющей напряженности электростатического поля в среде физического вакуума для случаев распределения зарядов на бесконечной плоскости; по поверхности заряженной сферы; внутри заряженного сферически ограниченного объема; на протяженно заряженной нити.

2.3. Электрическое поле в диэлектриках

. Основные положения

существует научный вывод формулы напряженности электрического поля диполя

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{r}^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}; \qquad (9)$$

в соответствии с формулой

$$\vec{\mathbf{N}} = [\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{E}}] \qquad (10)$$

момент сил $\vec{N}$ стремится повернуть диполь, чтобы его электрический момент $\vec{p}$ мог бы установиться в направлении поля;

электрический диполь в электрическом поле обладает потенциальной энергией

$$\mathbf{W} = -\vec{\mathbf{p}}\vec{\mathbf{E}}; \qquad (11)$$

некоторый объем изотропного диэлектрика в электрическом поле характеризуется вектором поляризации $\vec{P}$

$$\vec{\mathbf{P}} = \chi\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}}, \qquad (12)$$

где χ -диэлектрическая восприимчивость диэлектрика;

$\vec{E}$ - поле в установленном объеме диэлектрика;

нормальная составляющая P_n вектора поляризации по численному значению равна поверхностной плотности связанных зарядов, выходящих на поверхность, ограничивающую установленный объем диэлектрика

$$\mathbf{P_n} = \boldsymbol{\sigma}' \tag{13}$$

нормальная составляющая E_n поля на внутренней поверхности диэлектрика определена значением поверхностной плотности связанных зарядов

$$\mathbf{E_n} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varepsilon}_0} \tag{14}$$

$(\boldsymbol{\sigma}' > 0, \mathbf{E_n} > 0)$ $(\boldsymbol{\sigma}' < 0, \mathbf{E_n} < 0)$

выбранный объем диэлектрика характеризуется объемной плотностью связанных зарядов ρ', в каждой точке которого выполняется равенство

$$\boldsymbol{\rho}' = -\left(\frac{\partial \mathbf{P_x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{P_y}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{P_z}}{\partial \mathbf{z}}\right) = -\nabla\vec{\mathbf{P}} \tag{15}$$

Необходимо обратить внимание на анализ этого выражения

$\mathbf{P_x} = \mathbf{const}; \mathbf{P_y} = \mathbf{const}; \mathbf{P_z} \neq \mathbf{const};$

$\mathbf{P_x} = \mathbf{const}; \mathbf{P_y} \neq \mathbf{const}; \mathbf{P_z} \neq \mathbf{const};$

$\mathbf{P_x} \neq \mathbf{const}; \mathbf{P_y} \neq \mathbf{const}; \mathbf{P_z} = \mathbf{const};$

$\mathbf{P_x} = \mathbf{const}; \mathbf{P_y} = \mathbf{const}; \mathbf{P_z} = \mathbf{const};$

в том случае, если плотность связанных зарядов $\rho' \neq 0$ для каждой точки объема диэлектрика будет выполняться равенство

$$\nabla\vec{\mathbf{E}} = \left(\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{E_z}}{\partial \mathbf{z}}\right) = \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} \cdot (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'), \tag{16}$$

где ρ - плотность свободных зарядов в точке объема диэлектрика;

необходимо обратить внимание студентов на существующий теоретический вывод зависимости

$$\boldsymbol{\rho}' = -\frac{1}{1+\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\varepsilon}_0\vec{\mathbf{E}}\nabla\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\rho}), \tag{17}$$

дальнейшее использование этой зависимости приводит к выражению

$$\nabla(\boldsymbol{\varepsilon}_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}) = \boldsymbol{\rho}; \tag{18}$$

источником электростатического поля в диэлектрической среде являются не только сторонние, но и связанные заряды. Равнодействующий вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$, определенный в точках диэлектрической среды, называют вектором электрической индукции и обозначают символом $\vec{\mathbf{D}}$. В случае, когда поверхность диэлектрика совпадает с эквипотенциальной поверхностью, все слагаемые вектора в изотропных диэлектриках имеют одинаковую направленность (рис.2).

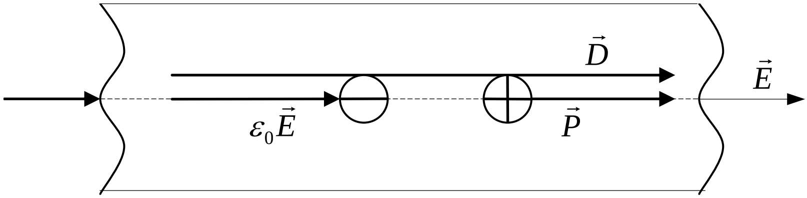


Рис.2

Выражение вектора $\vec{\mathbf{D}}$ преобразуется и принимает вид

$$\vec{\mathbf{D}} = \boldsymbol{\varepsilon}_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\varepsilon}_0\vec{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\chi}\vec{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\varepsilon}_0(1+\boldsymbol{\chi})\vec{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\varepsilon}\vec{\mathbf{E}}, \text{ где } \boldsymbol{\varepsilon} = 1+\boldsymbol{\chi}; \qquad (19)$$

ε - относительная диэлектрическая проницаемость;

$\vec{\mathbf{E}}$ – поле внутри диэлектрика;

$$\vec{\mathbf{D}} = \boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\varepsilon}\vec{\mathbf{E}} \qquad (20)$$

Последнее преобразование

$$\nabla\vec{\mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{D_x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{D_y}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{D_z}}{\partial \mathbf{z}} = \boldsymbol{\rho} \qquad (21)$$

приводит к выражению

$$\oint_{\mathbf{S}} (\vec{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}}) = \int_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\mathbf{dV} \qquad (22)$$

В таком виде полученное выражение читается как теорема Гаусса для диэлектрической среды:

$\oint_{\mathbf{S}} (\vec{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}}) = \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{D}}$ - поток вектора $\vec{D}$ через замкнутую поверхность S объема диэлектрика;

$\int_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\mathbf{dV} = \sum \mathbf{q_i}$ - сумма зарядов, заключенная внутри поверхности объема диэлектрика;

на границе двух диэлектриков происходит изменение характеристик поля в соответствии с существующими закономерностями:

$$
\begin{aligned}
&\vec{\mathbf{D}}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\varepsilon}_1\vec{\mathbf{E}}_1; && \vec{\mathbf{D}}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\varepsilon}_2\vec{\mathbf{E}}_2;\\
&\left|\vec{\mathbf{D}}_1\right| = \sqrt{\mathbf{D}_{1\tau}^2 + \mathbf{D}_{1\mathbf{n}}^2}; && \left|\vec{\mathbf{D}}_2\right| = \sqrt{\mathbf{D}_{2\tau}^2 + \mathbf{D}_{2\mathbf{n}}^2};\\
&\left|\vec{\mathbf{E}}_1\right| = \sqrt{\mathbf{E}_{1\tau}^2 + \mathbf{E}_{1\mathbf{n}}^2}; && \left|\vec{\mathbf{E}}_2\right| = \sqrt{\mathbf{E}_{2\tau}^2 + \mathbf{E}_{2\mathbf{n}}^2};\\
&\mathbf{E}_{1\tau} = \mathbf{E}_{2\tau}; && \mathbf{D}_{1\mathbf{n}} = \mathbf{D}_{2\mathbf{n}};\\
&\frac{\mathbf{D}_{1\tau}}{\mathbf{D}_{2\tau}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{\boldsymbol{\varepsilon}_2}; && \frac{\mathbf{E}_{1\mathbf{n}}}{\mathbf{E}_{2\mathbf{n}}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{\boldsymbol{\varepsilon}_1}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Для освоения учебного материала в объеме рассмотренных теоретически сформулированных зависимостей *рекомендуется* решить следующие задачи.

Задача 1. Система состоит из шара радиуса R, заряженного сферически симметрично и окружающей среды, заполненной зарядом с объемной плотностью $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}/\mathbf{r}$, где α - постоянная, r – расстояние от центра шара.

Найти заряд шара, при котором модуль напряженности электрического поля вне шара не зависит от r. Чему равна эта напряженность? Диэлектрическая проницаемость внутри и за пределами шара ε=1.

Цель состоит в определении характера электростатического поля в среде физического вакуума с помощью электростатической теоремы Гаусса.

В соответствии с предлагаемым рисунком (рис.3) *выполняем* следующий порядок действий:

$$\rho = \frac{a}{r}$$

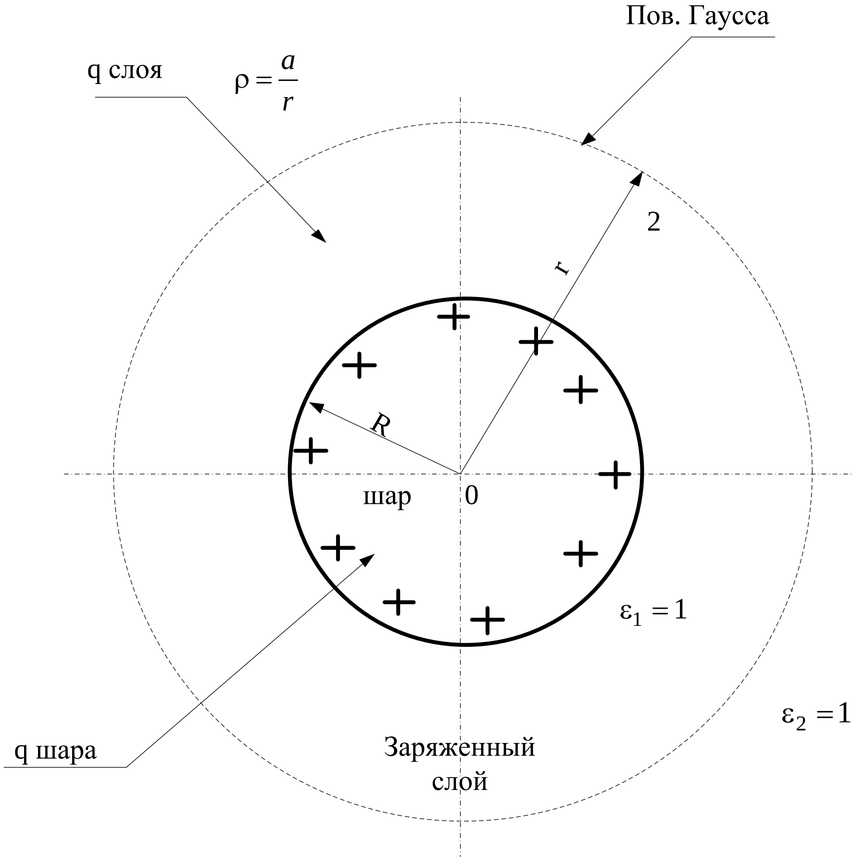


Рис. 3

записывается общее выражение теоремы Гаусса для среды, не содержащей диэлектрика

$$\oint\limits_{S} \mathbf{E_n dS} = \frac{\mathbf{q_{шара}} + \mathbf{q_{слоя}}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}$$

определяется заряд шарового слоя

$$\mathbf{q}_{\text{слоя}} = \int\limits_{V_1}^{V_2} \rho \mathbf{dV}; \quad \mathbf{dV} = 4\pi \mathbf{r}^2 \mathbf{dr},$$

$$\text{где } \rho = \frac{\alpha}{\mathbf{r}}; \quad \mathbf{q}_{\text{слоя}} = \int\limits_{R}^{r} \frac{\alpha}{\mathbf{r}} 4\pi \mathbf{r}^2 \mathbf{dr} = 2\pi\alpha\left(\mathbf{r}^2 - \mathbf{R}^2\right);$$

находится выражение нормальной составляющей E_n вектора $\vec{\mathbf{E}}$

$$\mathbf{E_n} 4\pi \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{q}_{\text{шара}} + 2\pi\alpha\left(\mathbf{r}^2 - \mathbf{R}^2\right)}{4\pi\varepsilon_0 \mathbf{r}^2},$$

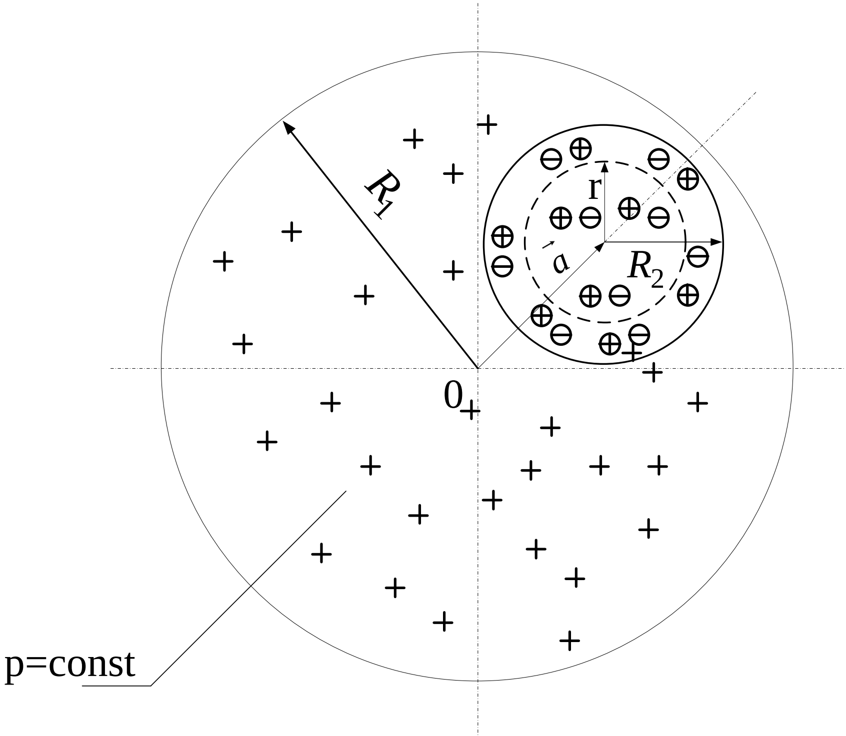
$$\text{если } \mathbf{q}_{\text{шара}} = 2\pi\alpha \mathbf{R}^2; \quad \mathbf{E_n} = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}.$$

Анализ полученного выражения убеждает в независимости величины E_n от размера r.

Задача 2. Внутри шара, заряженного равномерно с объемной плотностью ρ, имеется сферическая полость. Центр полости смещен относительно центра шара на расстояние, характеризуемое вектором $\vec{a}$. Найти напряженность $\vec{E}$ поля внутри полости.

Предлагаемая к рассмотрению задача преследует учебную цель – познакомиться с методом, называемым «достроить рассматриваемую материальную ситуацию до принятия симметричной формы». Этот прием основан на проявлении изотропности материального пространства по отношению к сферическому объему заряженного физического вакуума.

в соответствии с предлагаемым рисунком (рис.4) *выполняем следующий порядок действий*:



объем полости сферы мысленно заполняется зарядами противоположного знака одинаковой объемной плотности

$$\mathbf{q}_{\text{шара}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \mathbf{R}_1^3; \quad \mathbf{q}_{\text{полости}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \mathbf{R}_2^3$$

дважды применяется теорема Гаусса:

$$\oint_{S1} \mathbf{E}_{1n} \mathbf{dS} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi(\mathbf{a}+\mathbf{r})^3\right)}{\varepsilon_0};$$

$$\oint_{S2} \mathbf{E}_{2n} \mathbf{dS} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi \mathbf{r}^3\right)}{\varepsilon_0};$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_{1\mathbf{n}} - \mathbf{E}_{2\mathbf{n}} = \frac{\rho \mathbf{a}}{\varepsilon_0}.$$

Разность нормальных составляющих объясняется проявлением принципа суперпозиции электростатического поля.

Задача 3. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью ρ>1 по шару радиуса R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε>1.

Найти:

а) модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра шара; изобразить графики зависимостей E(r) и φ(r);

б) объемную и поверхностную плотности связанных зарядов.

Рассматриваемая среда не является физическим вакуумом, среда заполнена полярными диполями и является диэлектрической средой. В таких средах теорема Гаусса применяется в форме записи уравнения (22). В соответствии с рис.5 выполняется порядок действий:

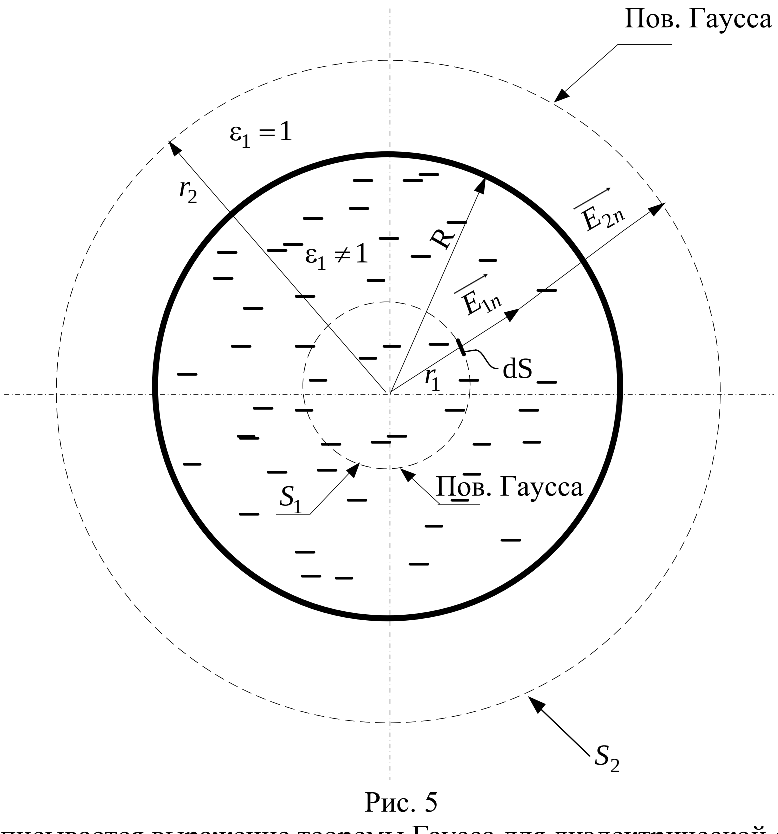


Рис. 5

записывается выражение теоремы Гаусса для диэлектрической среды

$$\oint\limits_{S} \mathbf{D_n dS} = \sum \mathbf{q}^{\text{своб}};$$

на основании записанного выражения в соответствии с предлагаемым рисунком (рис.5)

$$\oint\limits_{S1} \mathbf{D_{1n}^{I} dS} = \rho \frac{\varphi}{3} \pi \mathbf{r}_1^3, \quad \textbf{где}\ \mathbf{S} = 4\pi \mathbf{r}_1^2;$$

$$\mathbf{D_{1n}} = \frac{\rho \mathbf{r}_1}{3}; \quad \mathbf{E_{1n}^{I}} = \frac{\mathbf{D_{1n}^{I}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{\rho \mathbf{r}_1}{3\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Полагая $\mathbf{E_r^I}(\mathbf{r}) = \mathbf{E_{1n}^I}$ (поверхность S_1 совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля сторонних зарядов), запишем закон $\mathbf{E_r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}$, на основании которого находят закон распределения электрического потенциала во внутренней области диэлектрика

$$\int \partial \varphi = -\int \frac{\rho \mathbf{r}}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \partial \mathbf{r}$$

$$\varphi + \mathbf{C}_1 = -\frac{\rho \mathbf{r}^2}{6\varepsilon_0 \varepsilon} + \mathbf{C}_2$$

$$\textbf{при}\ \mathbf{r} = 0 \quad \varphi_0 = \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1.$$

Следовательно $\varphi^{\mathbf{I}}(\mathbf{r}) - \frac{\rho \mathbf{r}^2}{6\varepsilon_0 \varepsilon_1} + \varphi_0.$

Величину φ_0 считают равной величине потенциала точек поверхности диэлектрика. С этой целью обращаются к известной зависимости электрической емкости шарового диэлектрика от радиуса шара

$$\mathbf{C} = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{R}; \quad \varphi = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{C}}; \quad \mathbf{q} = \oint\limits_{V} \rho \mathbf{dV}; \quad \rho = \mathbf{const}; \quad \mathbf{q} = \frac{4}{3} \pi \mathbf{R}^3; \quad \varphi^{\mathbf{nob}} = \frac{\rho \mathbf{R}^2}{3\varepsilon_0 \varepsilon} = \varphi_0.$$

Окончательный вывод о распределении величины электрического потенциала внутри однородного изотропного диэлектрика

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho \mathbf{r}^2}{6\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{\rho \mathbf{R}^2}{3\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Анализ полученного выражения приводит к существованию параболической зависимости, отображаемой на рисунке (рис.6).

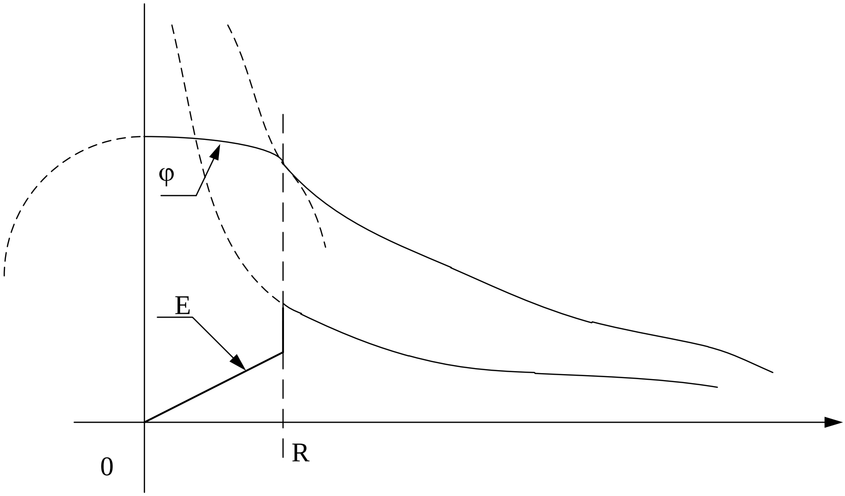


Рис. 6

Рекомендуется обратить внимание на тот факт, $\varepsilon_2 \neq 1$что сторонние заряды в таком случае обязаны удерживаться на своих местах наличием сторонних сил, в противном случае они обязаны придти в движение.

Терминология, в соответствии с которой сторонние заряды называют свободными, в данном случае становится некорректной.

Дальнейший поиск функциональной зависимости $E^{II}(r)$ осуществляется на основании использования теоремы Гаусса вне области диэлектрика

$$\oint_{S2} \mathbf{E}_{2n}^{II} \mathbf{dS} = \frac{\mathbf{q}^{\text{стор}} + \mathbf{q}^{\text{связ}}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}; \quad \mathbf{q}^{\text{стор}} = \frac{4\pi\mathbf{R}^3}{3} \cdot \boldsymbol{\rho}; \quad \mathbf{q}^{\text{связ}} = 0; \quad \mathbf{S}_2 \, 4\pi\mathbf{r}_2^2;$$

$$\mathbf{E}_{2n}^{II} = \frac{4\pi\mathbf{R}^3\boldsymbol{\rho}}{3\boldsymbol{\varepsilon}_0 \oint_{S2} \mathbf{dS}} = \frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{R}^3}{3\boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{r}_2^2}.$$

Совпадение по форме поверхности S_2 с эквипотенциальной поверхностью дает возможность считать, что $\mathbf{E}_{2n}^{II} = \mathbf{E}_{r}^{II}(\mathbf{r})$.

Дальнейшее нахождение закона распределения электрического потенциала по области II осуществляется в соответствии с порядком действий

$$\partial\varphi^{II} = -E_r^{II}(r)\partial r;\ \varphi^{II}(r) + C_2 = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\partial r + C_3;$$

$$\varphi^{II}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + (C_3 - C_2).$$

ï ðè $r = R\ \varphi^{II}(r) = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0\varepsilon};\ C_3 - C_2 = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}\cdot\dfrac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon};$

$$\varphi^{II}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Аналитическое исследование распределения нормальной составляющей вектора $\vec{\mathbf{E}}$ на границе диэлектрической среды приводит к пониманию численного разрыва $\mathbf{E}_{2\mathbf{n}}^{\mathbf{II}} > \mathbf{E}_{1\mathbf{n}}^{\mathbf{II}}$**;** анализ распределения потенциала приводит к стыковке параболической и гиперболической зависимостей (рис.6). Сторонние заряды в таком случае обязаны удерживаться на своих местах сторонними силами.

2.4. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

• Энергия заряженного проводника выражается через заряд Q, потенциал (φ и электрическую емкость C проводника следующими соотношениями:

$$W = \frac{1}{2}C\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\varphi$$

• Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU$$

где C — электрическая емкость конденсатора; U — разность потенциалов на его пластинах.

• Объемная плотность энергии (энергия электрического поля, приходящаяся на единицу объема)

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED$$

где E — напряженность электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью ε ; D — электрическое смещение.

ЗАДАЧА 1. Между обкладками плоского конденсатора параллельно им введена металлическая пластинка толщиной a=8,0 мм. Определить емкость конденсатора, если площадь каждой из обкладок S=100 см2, а расстояние между ними l=10,0 мм

РЕШЕНИЕ: Емкость конденсатора найдем из определяющей формулы (6), если предварительно выразим напряжение на обкладках конденсатора как функцию заряда его обкладок.

В результате явления электростатической индукции свободные заряды в металлической пластинке, введенной в конденсатор, перераспределятся так, что напряженность электрического поля внутри пластинки станет равной нулю:

$$E_{вн} = 0 \tag{1}$$

С другой стороны, индуцированные заряды распределятся по поверхностям пластинки так, что она станет подобной плоскому конденсатору *CD* (рис. 2), вставленному в данный конденсатор *AB*. Известно, что напряженность поля в пространстве вне плоского конденсатора равна нулю. Поэтому введение пластинки в конденсатор *AB* не изменит напряженности однородного поля в пространстве вне пластинки. Пусть эта напряженность равна *E*. Выразим ее через заряд конденсатора на основании формул (12а) и (11):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \tag{2}$$

Из соотношения (5) с учетом формул (1) и (2) находим напряжение на обкладках конденсатора:

$$\varphi_A - \varphi_B = E(l-a) = q(l-a)/\varepsilon_0 S \tag{3}$$

Подставив в формулу (6) вместо напряжения его значение по (3), получим

$$C = \varepsilon_0 S/(l-a) \tag{4}$$

Выразим входящие в (4) величины в единицах СИ: $S = 1{,}00 \times 10^{-2}\,м^2, l = 10{,}0 \cdot 10^{-2}\,м, a = 0{,}80 \cdot 10^{-2}\,м$. Выполнив вычисление, найдем:

$C = 4{,}4 \cdot 10^{-11} \Phi = 44 n\Phi$

ЗАДАЧА 2. Как изменяется энергия заряженного плоского воздушного конденсатора ($\varepsilon = 1$) при уменьшении расстояния между его пластинами? Рассмотреть два случая:

1) конденсатор отключен от источника напряжения,
2) конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения.

Решение. 1. Если конденсатор отключен от источника напряжения, то заряд на его обкладках не будет изменяться при сближении пластин, т. е.

$q = const$

В то же время емкость конденсатора, как это следует из формулы (7), будет увеличиваться. Поэтому воспользуемся той из трех формул (10), в которой энергия конденсатора выражается через его заряд и емкость:

$$W = \frac{q^3}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

Видим, что при сближении пластин конденсатора его энергия, будучи пропорциональной величине *l*, *уменьшается.* Заметим, что за счет убыли энергии конденсатора совершается работа сил притяжения обкладок при их сближении:

$$A = -\Delta W \tag{1}$$

2. На обкладках конденсатора поддерживается постоянное напряжение:

$U = const$

Поэтому воспользуемся той из формул (10), в которой энергия конденсатора выражается через напряжение и емкость. Тогда, учитывая соотношение (7), получим:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \frac{1}{l}$$

Следовательно, при сближении пластин энергия конденсатора, будучи обратно пропорциональной величине *l, увеличивается.*

ЗАМЕЧАНИЕ: Выясним, за счет чего во втором случае увеличилась энергия конденсатора и совершалась работа сил притяжения обкладок. Возрастание емкости конденсатора при постоянном напряжении означает, согласно формуле (6), увеличение заряда на его пластинах. Значит, при сближении пластин на них дополнительно перейдут от

источника напряжения заряды Δq. Сообщение одной пластине положительного заряда Δq, а другой отрицательного заряда $-\Delta q$ эквивалентно перемещению заряда Δq с одной обкладки на другую.
Так как этот переход происходит при постоянном напряжении *U***,** то источник напряжения совершит работу

$$A_{ист} = \Delta qU = \Delta(CU)U = \Delta C \cdot U^2 \qquad (2)$$

С другой стороны, энергия конденсатора увеличится на

$$\Delta W = \Delta(CU^2 / 2) = \Delta C \cdot U^2 / 2 \qquad (3)$$

Сравнивая правые части равенств (2) и (3), видим, что работа, совершаемая при сближении пластин источником напряжения, в два раза больше прироста энергии конденсатора. Таким образом, теперь за счет энергии источника напряжения увеличивается энергия конденсатора ΔW, а также совершается работа *A* сил притяжения пластин.
По закону сохранения энергии,

$$A_{ист} = \Delta W + A$$

Отсюда

$$A = A_{ист} - \Delta W = 2\,\Delta W - \Delta W = \Delta W \qquad (3)$$

Сопоставляя формулы (I) и (4), приходим к выводу: при изменении емкости заряженного конденсатора электрические силы совершают работу, равную ***убыли*** энергии конденсатора случае постоянства заряда на его пластинах и ***равную приращению*** энергии конденсатора в случае постоянства напряжения на пластинах.
ЗАДАЧА 5. Объемная плотность энергии электрического поля внутри заряженного плоского конденсатора с твердым диэлектриком (е = 6,0) равна 2,5 Дж/м^3. Найти давление, производимое пластинами площадью S = 20 см^2 на диэлектрик, а также силу *F'*, которую необходимо приложить к пластинам для их отрыва от диэлектрика.
РЕШЕНИЕ. Притягиваясь друг к другу с силой *F*, пластины конденсатора сжимают диэлектрик, заключенный между ними.
Учитывая, что сила давления F_n равномерно распределена по поверхности диэлектрика, найдем искомое давление

$$p = \frac{F_Д}{S} = \frac{F}{S} \qquad (1)$$

Как известно (см. задачу № 5), сила притяжения пластин конденсатора (при q = const) равна взятой с обратным знаком производной*от его энергии по расстоянию между пластинами:

$$F = -\frac{dW}{dl}$$

Поскольку в единице объема конденсатора заключена энергия *w*, равная ее объемной плотности, то полное изменение энергии dW при перемещении пластины конденсатора на расстояние dl равно

$$dW = \omega dV = \omega S dl$$

Из двух последних равенств получаем силу притяжения пластин:

$$F = -\omega S \qquad (2)$$

откуда на основании формулы (1) находим

$$p = -\omega = -2{,}5\,Па \qquad (3)$$

Отрицательный знак в формулах (2) и (3) означает, что величины F и p направлены в сторону уменьшения расстояния I.

Чтобы найти силу F', необходимую для отрыва пластин от диэлектрика, снова применим энергетический метод. Рассмотрим конденсатор в тот момент, когда под действием силы F', направленной наружу, пластина, отрываясь от диэлектрика, переместится на расстояние dl. Работа силы F' равна

$$\delta A = F' dl \qquad (4)$$

За счет работы этой внешней силы энергия конденсатора возрастет на величину dW. По закону сохранения энергии,

$dW = \delta A$, (5)

Из формул (4) и (5) имеем

$$F' = \frac{dW}{dl} .$$

Теперь прирост энергии конденсатора, связанный с увеличением его объема, равен

$$dW = \omega_0 S dl ,$$

где ω_0 — объемная плотность энергии поля в зазоре, появившемся при смещении пластины. Из двух последних равенств найдем

$F' = \omega_0 S$, (6)

Чтобы найти величину ω_0, воспользуемся формулой (11). Так как индукция D и в зазоре ($\varepsilon = 1$), и в диэлектрике имеет одно и то же значение, то $\omega_0 = \varepsilon\omega$ и согласно формуле (6) получим

$$F' = \varepsilon\omega S = 3 \cdot 10^{-2} H$$

Пример 3. В электрическое поле между двумя параллельными разноименно заряженными плоскостями вносится плоская пластина из однородного изотропного диэлектрика (рис. 3).

Цель:

доказать сохранение нормальной составляющей вектора $\vec{\mathbf{D}}$ на границе двух диэлектриков;

установить соотношение между сторонними зарядами и индуцированными связанными зарядами диэлектрика;

Преподаватель, в соответствии с рисунком 3, выполняет комплекс преобразующих действий:

устанавливается поле внутри диэлектрика

$$\mathbf{E_{qn}} = \mathbf{E}_{0\mathbf{n}} - \mathbf{E}'_{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_{0\mathbf{n}} - \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} = \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}'),$$

где $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{E}'_{\mathbf{n}}$; $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{E}'_{\mathbf{qn}}$; $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{E}_{0\mathbf{n}}$;

E_0 – поле вне диэлектрика

с учетом того, что $1 + \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\varepsilon}$, получаем

$$\mathbf{D_{qn}} = \mathbf{D}_{0\mathbf{n}} \ \mathbf{u} \ \boldsymbol{\sigma}' = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} - 1}{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma}.$$

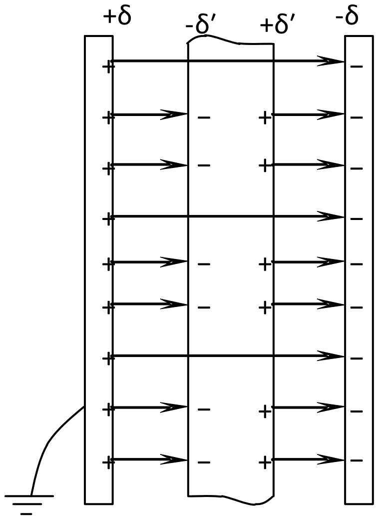


Рис.3

Пример 4. Поле внутри шарового слоя из диэлектрика.

Рассматривается тот случай, когда заряженную зарядом q сферу радиуса R окружают слоем из однородного изотропного диэлектрика (рис.4). Радиусы слоя $R_1 < R_2$.

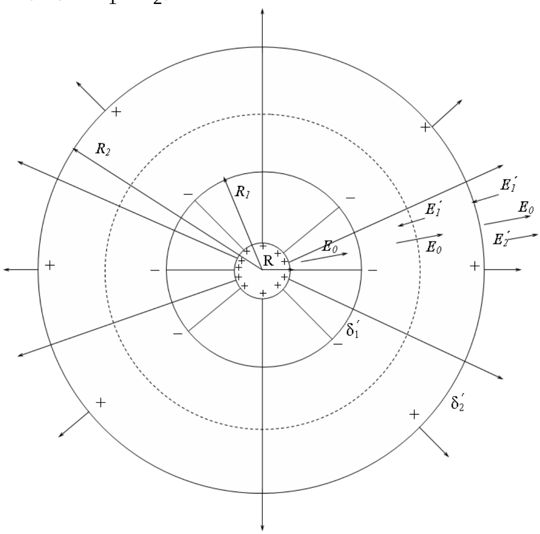


Рис.4

Рекомендуется:

обратить внимание на изменение густоты силовых линий в связи с тем, что поверхностная плотность связанных зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика различна $\left|\boldsymbol{\sigma}_2^{'}\right| < \left|\boldsymbol{\sigma}_1^{'}\right|$;

самостоятельно разобрать существующий вывод известной формулы

$$\left|\vec{\mathbf{E}}\right| = \frac{1}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon}_0} \cdot \frac{\left|\mathbf{q}^{\pm}\right|}{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}^2}\mathbf{;}\ \ \mathbf{E_r} = \pm\frac{1}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon}_0} \cdot \frac{\left|\mathbf{q}^{\pm}\right|}{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}^2}\mathbf{;}$$

проанализировать преломление нормальной составляющей E_n на внутренней и внешней границе диэлектрика в соответствии с закономерностями $\mathbf{E}_0(\mathbf{R}_1) = \boldsymbol{\varepsilon}_1\mathbf{E}(\mathbf{R}_1)$ **и** $\boldsymbol{\varepsilon}_1\mathbf{E}(\mathbf{R}_2) = \mathbf{E}_0(\mathbf{R}_2)$;

выполнить анализ известного преобразования

$$\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1 = -\int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \mathbf{E_r dr} = \pm\frac{\mathbf{q}}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\frac{1}{\mathbf{R}_2} - \frac{1}{\mathbf{R}_1}\right)$$

; имеем $R_2<R_1$ и, если источником поля являются отрицательные заряды на сферической поверхности, то $\boldsymbol{\varphi}_1 < \boldsymbol{\varphi}_2$ $\boldsymbol{\sigma}_1^{'} > 0$ $\boldsymbol{\sigma}_2^{'} < 0$; если $\boldsymbol{\sigma}_1^{'} < 0$ $\boldsymbol{\sigma}_2^{'} > 0$**;** то $\boldsymbol{\varphi}_1 > \boldsymbol{\varphi}_2$ (источник положителен);

проанализировать случай R_1=a; R_2=b; a и b радиусы сферических поверхностей пластин конденсатора. В ходе анализа устанавливается эквивалентность полю одиночной сферы, но такая система обязана иметь значение потенциала одной из поверхностей, от которого и будет произведен отсчет разности потенциалов. Обозначенная величина потенциала равна потенциалу поверхности, индуцирующей заряд противоположного знака. Для поверхности Земли $\boldsymbol{\varphi}_{\textbf{земли}} = 0$; для точек в электрической схеме определяется косвенным методом.

Рекомендуется обратить внимание на то, что:

стационарное равновесие зарядов на границе диэлектрика с физическим вакуумом указывает на отсутствие разности потенциалов в пограничной зоне и по этой причине в направлении вектора установившейся напряженности происходит непрерывная убыль электрического потенциала;

на указанной границе сохраняется величина нормальной составляющей вектора электрической индукции.

Далее выполняются преобразующие действия

1) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, **где** $\mathbf{u} = \mathbf{E}_0\mathbf{d}$; $\mathbf{u}_1 = \mathbf{E}_{1n} \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}$; $\mathbf{u}_2 = \mathbf{E}_{2n} \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}$;

2) $\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n}$; $\boldsymbol{\varepsilon}_0\mathbf{E}_{1n} = \boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\varepsilon}_2\mathbf{E}_{2n}$; $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = 1$; $\boldsymbol{\varepsilon}_2 > 1$;

3) $\mathbf{E}_{1n} = \frac{2\boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\varepsilon}_2}{\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 1}$; $\mathbf{E}_{2n} = \frac{2\mathbf{E}_0}{\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 1}$;

4) $\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n} = \frac{2\boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\varepsilon}_2\mathbf{E}_0}{\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 1}$.

Электрическое поле в конденсаторах. Электрическая емкость конденсаторов

Пример 5. Определить величину электрической емкости С плоского конденсатора, заполненного двумя слоями диэлектриков толщиною d_1 и d_2 с диэлектрической проницаемостью ε_1 и ε_2 (рис.5).

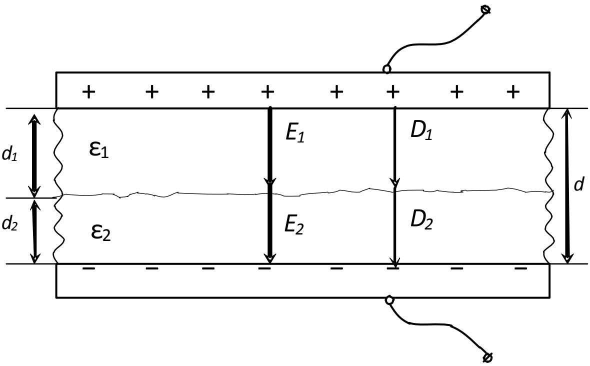


Рис.5

формула $\mathbf{C} = \frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta \boldsymbol{\varphi}}$, определяющая электрическую емкость конденсатора, распространяется на все типы конденсаторов;

величина электрического потенциала в любой точке сложного электрического поля внутри конденсатора, в том числе и на границе двух диэлектриков является следственной величиной. Стационарная неподвижность связанных зарядов обоих диэлектриков дает основание считать величину потенциала на границе двух диэлектриков неразрывной;

связь между количественными характеристиками $\vec{\mathbf{D}}$ **и** $\vec{\mathbf{E}}$ электростатического поля на границе двух диэлектриков сохраняется для всех внутренних точек диэлектрика;

дальнейшие действия преподавателя связаны с выполнением преобразующих действий

$$C=\frac{q}{u};\ u=u_1+u_2;\ q=\sigma S;\ \vec{D}_1=\vec{D}_2;$$

$$u_1=E_1d_1=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\cdot d_1;\ u_2=E_2d_2=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\cdot d_2;$$

$$C=\frac{\sigma S}{\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\cdot d_1+\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\cdot d_2}.$$

Принимая во внимание, что $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}$

$$\mathbf{C}=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0\mathbf{S}}{\frac{\mathbf{d}_1}{\boldsymbol{\varepsilon}_1}+\frac{\mathbf{d}_2}{\boldsymbol{\varepsilon}_2}}.$$

Рекомендуется: выполнить следственный анализ состояния электростатического поля в момент, предшествующий возможному пробою диэлектрика. Пробой одного диэлектрика, а возможно и двух сразу, связан с переходом связанных зарядов через границу двух диэлектриков. Условием, при котором возможен пробой, может служить превышение величины E_n, максимально установленного допустимого значения E_n^{max}. Основной причиной пробоя является повышенное количество сторонних зарядов, поступающих от источника питания на пластины конденсатора. Если сложится условие $\mathbf{u}=\mathbf{d}_1\mathbf{E}_1^{\mathbf{max}}+\mathbf{d}_2\mathbf{E}_2$, то пробой наступит в первом диэлектрике; если $\mathbf{u}=\mathbf{d}_1\mathbf{E}_1^{\mathbf{max}}+\mathbf{d}_2\mathbf{E}_2^{\mathbf{max}}$, то пробой наступит одновременно в двух диэлектриках. Нетрудно рассчитать соотношения между параметрами диэлектриков при одновременном пробое:

$$\mathbf{D}_1=\mathbf{D}_2;\ \boldsymbol{\varepsilon}_1\frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{d}_1}=\boldsymbol{\varepsilon}_2\frac{\mathbf{u}_2}{\mathbf{d}_2};\ \boldsymbol{\varepsilon}_1\mathbf{E}_1^{\mathbf{max}}=\boldsymbol{\varepsilon}_2\mathbf{E}_2^{\mathbf{max}};\ \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{\boldsymbol{\varepsilon}_2}\cdot\frac{\mathbf{d}_2}{\mathbf{d}_1}=\frac{\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_1}.$$

В частном случае, если $\boldsymbol{\varepsilon}_1\mathbf{d}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_2\mathbf{d}_1$ или $\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{\boldsymbol{\varepsilon}_2}=\frac{\mathbf{d}_1}{\mathbf{d}_2}$, то $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_1=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}$.

Следственный вывод – при сформулированном соотношении параметров диэлектрика пробой наступит при напряжении равном половине ЭДС источника питания. Этот вывод используется при решении задачи 5.

2.5. «Магнитное поле токов»

Опыт показывает, что электрические токи взаимодействуют между собой. Например, два тонких прямолинейных параллельных проводника, по которым текут токи, притягивают друг друга, если токи в них имеют одинаковое направление, и отталкивают, если токи противоположны. Сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины каждого из параллельных проводников, пропорциональна величинам токов в них I_1 и I_2, и обратно пропорциональна расстоянию b между ними:

Закон взаимодействия токов был установлен в 1820 г. Ампером. На основании этого соотношения устанавливается единица силы тока в СИ. Единица силы тока в СИ - ампер определяется как сила, не изменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии $1\,м$ один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2\cdot 10^7\,H$ на каждый метр длины.

Взаимодействие токов осуществляется через поле, называемое магнитным. Это название происходит оттого, что, как обнаружил в 1820 г. Эрстед, поле, возбуждаемое током, оказывает ориентирующее действие на магнитную стрелку. В опыте Эрстеда проволока, по которой тёк ток, была натянута над магнитной стрелкой, вращающейся на игле. При включении тока стрелка устанавливалась перпендикулярно к проволоке. Изменение направления тока заставляло стрелку повернуться в противоположную сторону. Из опыта Эрстеда следует, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной.

Магнитная индукция $\vec{B}$ - векторная величина, определяемая из закона Ампера по силе взаимодействия $d\vec{F}$ линейного элемента тока $Id\vec{l}$ с исследуемым магнитным полем. Величина $\vec{B}$ измеряется в $H/A\cdot м = B\cdot c/м^2 = Тл$.

Для большей наглядности в описание магнитных процессов вводят понятие линий магнитной индукции, (силовых линий) т. е. воображаемых линий в пространстве, проведенных так, что касательная к линии в каждой точке совпадает по направлению с вектором магнитной индукции. Интеграл вектора магнитной индукции по некоторой поверхности называется магнитным потоком через эту поверхность.

Магнитный поток измеряется в вольт - секундах (веберах), и является скалярной величиной. Величину магнитной индукции $\vec{B}$ можно рассматривать как поверхностную плотность магнитного потока.
Логично было бы по аналогии с напряженностью электрического поля $\vec{E}$ назвать $\vec{B}$ напряженностью магнитного поля. Однако по историческим причинам основную силовую характеристику магнитного поля назвали магнитной индукцией. Название же напряженность магнитного поля оказалось присвоенным вспомогательной величине $\vec{H}$, аналогичной вспомогательной характеристике $\vec{D}$ электрического поля.
Магнитное поле в отличие от электрического не оказывает действия на покоящийся заряд. Сила возникает лишь тогда, когда заряд движется.
Проводник с током представляет собой электрически нейтральную систему зарядов, в которой заряды одного знака движутся в одну сторону, а заряды другого знака движутся в противоположную сторону (либо покоятся). Отсюда следует, что магнитное поле порождается движущимися зарядами.
Итак, движущиеся заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства - создают в нем магнитное поле. Это поле проявляется в том, что на движущиеся в нем заряды (токи) действуют силы.
Напряженность магнитного поля $d\vec{H}$, создаваемая в данной точке элементом тока $Id\vec{l}$ равна

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},(1)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный от элемента $Id\vec{l}$ в рассматриваемую точку.
Из этого выражения следует, что величина напряженности магнитного поля в точке, удаленной на расстояние r от элемента тока, равна

$$dH = \frac{1}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2},(2)$$

где α - угол между; $Id\vec{l}$ и радиусом - вектором $\vec{r}$, проведенным от элемента тока в рассматриваемую точку.
Направление вектора напряженности магнитного поля $d\vec{H}$ перпендикулярно к плоскости, содержащей вектора $Id\vec{l}$ и $\vec{r}$, и образует с ними правую тройку. Это направление подчиняется правилу правого буравчика.
Формулы (1) и (2), выражающие напряженность магнитного поля $d\vec{H}$,

созданного элементом тока, и его величину dH носят название закона Био - Савара - Лапласа.
Для магнитного поля, так же как и для электрического, справедлив принцип наложения или суперпозиции:
если имеется система элементов тока, то результирующее поле $\vec{H}$ равно векторной сумме полей созданных каждым элементом системы.
Определим величину магнитного поля в центре кругового проводника. В этом случае все элементы проводника перпендикулярны к радиус-вектору $\vec{r}$ и $\sin\alpha = 1$. Расстояние всех элементов провода до центра круга одинаково и равно радиусу круга R.

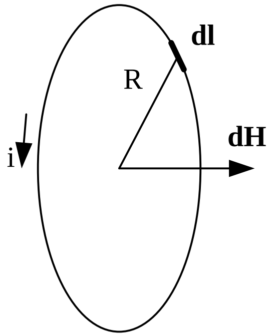


Рис.1

Поэтому (2) дает

$$dH = \frac{1}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{R^2}.$$

Все элементы тока создают магнитное поле одинакового направления, перпендикулярное к плоскости витка, и поэтому полная напряженность поля в центре кругового витка равна:

$$H = \frac{1}{4\pi}\int\frac{Idl\sin\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{I}{R}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2R},$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Направление магнитного поля находим по правилу правого буравчика, который нужно расположить параллельно касательной к кругу (в направлении тока). Если ток обтекает виток против часовой стрелки, то правило правого буравчика дает, что $d\vec{H}$ в центре круга направлено от витка к наблюдателю.

Найдем напряженность поля, создаваемого прямым проводом в точке A (рис.2), удаленной на расстоянии R от оси провода.

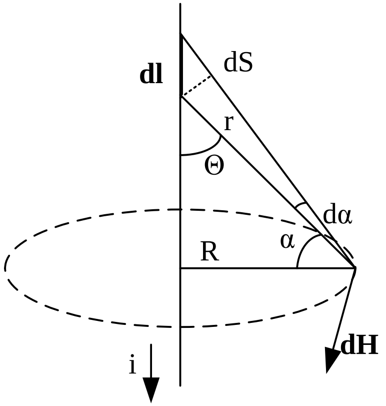


Рис 2

Длину провода будем считать весьма большой по сравнению с расстоянием R. В этом случае направление магнитного поля всех элементов провода одинаково (перпендикулярно к плоскости чертежа), и поэтому можно складывать абсолютные значения напряженностей. Напряженность поля созданного каким-либо элементом проводника $Id\vec{l}$ выражается формулой (1). Из рис. видно, что

$$\frac{dl\sin\Theta}{r} = \frac{dl\cos\alpha}{r} = \frac{ds}{r} = d\alpha\,,\, r = \frac{R}{\cos\alpha}\,.$$

Подставляя эти выражения в(2), мы находим, что напряженность, создаваемая одним элементом тока, равна

$$dH = \frac{1}{4\pi}\frac{Idl\sin\Theta}{r^2} = \frac{I}{4\pi R}\cos\alpha d\alpha\,.$$

Поэтому для результирующей напряженности поля получаем

$$H = \frac{I}{4\pi R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha d\alpha = \frac{I}{2\pi R}\,.$$

Это поле направлено перпендикулярно к плоскости, содержащей провод и отрезок R, так же как и на Рис. 2.

В электростатическом поле напряжение не зависит от формы контура и для замкнутого контура всегда равно нулю. Это позволило ввести разность потенциалов двух точек поля, зависящую только от положения этих точек.

Аналогично этому мы введем понятие магнитного напряжения вдоль контура L

$$U_m = \int \vec{H} d\vec{s}\ , U_m = \int H_S ds\ .$$

где $d\vec{s}$ - элемент длины контура L, а H_S, - проекция напряженности магнитного поля на направление вектора $d\vec{s}$. Однако, в отличие от электрического напряжения в поле неподвижных зарядов, магнитное напряжение зависит от формы контура L и не определяется только положением точек начала и конца этого контура. Поэтому однозначной разности потенциалов в магнитном поле не существует. Магнитное напряжение по замкнутому контуру, вообще говоря, не равно нулю.

Рассмотрим, от чего и как зависит магнитное напряжение.

Наиболее просто это можно сделать на примере поля, создаваемого прямым длинным проводом. Предположим сначала, что контур L есть часть окружности между точками 1 и 2 , совпадающая с одной из силовых линий. В этом случае во всех точках контура (окружности) напряженность поля одинакова.

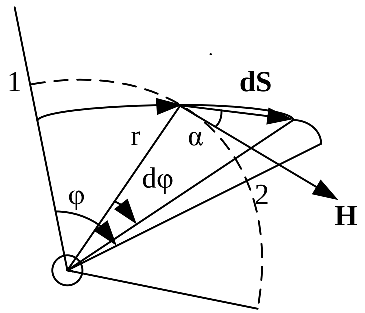


Рис. 3

Далее, так как контур совпадает с силовой линией, то во всех точках

$$H = const\ , H_S = H = \frac{I}{2\pi R}\ ,$$ и поэтому

$$U_m = \int H_S ds = \frac{Is}{2\pi R} = \frac{I\varphi}{2\pi}.$$

Рассмотрим теперь произвольный контур L, лежащий в плоскости, перпендикулярной к току. Магнитное напряжение вдоль элемента $d\vec{s}$ этого контура есть

$$dU_m = H_S ds = H\cos\alpha ds = \frac{I}{2\pi R}\cos\alpha ds = \frac{Id\varphi}{2\pi},$$

и поэтому, суммируя магнитное напряжение по всему контуру, мы получим прежнюю формулу.

Если контур L не лежит в плоскости, перпендикулярной к элементам тока, то любой элемент этого контура $d\vec{s}$ можно разложить на составляющую $d\vec{s}_1$ перпендикулярную, и составляющую $d\vec{s}_2$, параллельную к элементам тока.

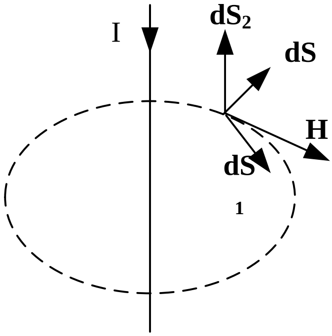


Рис. 4

Так как составляющая $d\vec{s}_2$ перпендикулярна $\vec{H}$, то $H_S = 0$ и $U_m = 0$, значит, что магнитное напряжение вдоль $d\vec{s}$ такое же, как вдоль $d\vec{s}_1$.

Отсюда следует, что магнитное напряжение вдоль произвольного контура такое же, как и для проекции этого контура на плоскость, перпендикулярную к элементу тока.

Отсюда следует, что для любого контура в магнитном поле справедливо выражение

$$\oint_L H_S ds = I_0$$

где I_0 - полный ток, охваченный контуром L.

Вычислим напряженность поля внутри замкнутой тороидальной катушки.

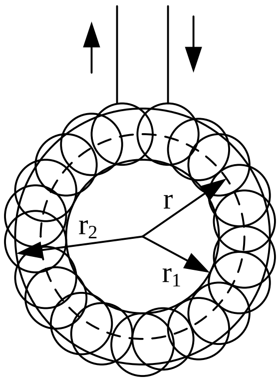


Рис. 5

Из соображений симметрии очевидно, что напряженность $\vec{H}$ одинакова во всех точках окружности, центр которой совпадает с центром тороида, поэтому магнитное напряжение вдоль этой окружности равно $H2\pi r$.

Рассматриваемая окружность охватывает все витки катушки. Если полное число витков катушки есть N, а сила тока в ней равна I, то наша окружность охватывает ток NI. Поэтому по теореме о магнитном напряжении мы имеем

$$H2\pi r = NI .$$

Следует иметь в виду, что поле внутри тороида не вполне однородно. Напряженность наибольшая у внутренней стороны катушки и наименьшая у внешней стороны.

Будем теперь неограниченно увеличивать радиус тороида r. Тогда величина $\frac{r_2 - r_1}{r_2}$ будет стремиться к нулю и поле сделается однородным. Любой отрезок тороида перейдет при этом в прямую катушку или соленоид.

Напряженность поля внутри соленоида можно найти из формулы

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = nI, n = \frac{N}{2\pi r} .$$

где n - число витков на единицу длины катушки.

Мы видим, что напряженность магнитного поля в достаточно длинном соленоиде равна произведению силы тока и числа витков на единицу длины катушки. Соленоиды широко используют в технических устройствах и в лабораторной практике, так как с их помощью можно просто создать однородное магнитное поле известной напряженности.

Рассмотрим еще вычисление магнитного поля длинного прямого провода в точке, лежащей вне провода на расстоянии R от его оси.

В этом случае в качестве контура для вычисления магнитного напряжения удобно выбрать окружность радиуса R, перпендикулярную к проводнику и имеющую центр на оси проводника. Теорема о магнитном напряжении (Теорема Стокса) дает

$$2\pi RH = I\,,\; H = \frac{I}{2\pi R}\,.$$

Мы видим, что расчет при помощи магнитного напряжения гораздо проще, нежели непосредственное суммирование полей отдельных элементов тока.

Задача 1. Ток течет подлинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиуса R (рис. 6).

Определить индукцию в каждой точке оси полуцилиндра.

Решение.

Рассмотрим поле в прямоугольной Декартовой системе координат XYZ.

Ось Z совпадает с осью полуцилиндра.

Систему токов задаём в цилиндрической системе координат $Zr\varphi$.

Определим индукцию в каждой точке оси Z, по принципу суперпозиции выразив её значение по теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$ от каждого элемента системы.

Элемент системы представляет собой бесконечный проводник расположенный параллельно оси Z, шириной $Rd\varphi$ по которому протекает ток dI.

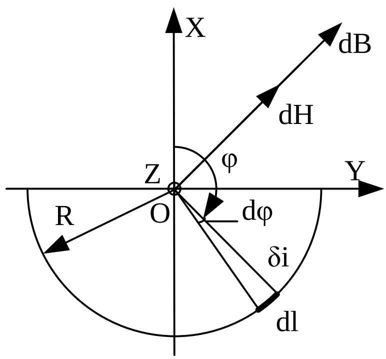


Рис. 6

$$\int_{0}^{2\pi R} dH\delta l = dI\,,\ \text{где - }\ dI = \frac{Id\varphi}{\pi}\,,$$

$$dH = \frac{dI}{2\pi R}.$$

Так как плоскость XZ является плоскостью симметрии системы токов, то в каждой точке этой плоскости вектор индукции $\vec{B}$ нормален к ней, то есть $B = B_Y$.

В каждой точке оси Z направление вектора $d\vec{H}$ перпендикулярно плоскости, в которой лежит ось Z и проводник с током dI, а его проекция на ось Y равна $dH\cos\varphi$.

Интегрируя по всем элементам системы токов, определяем H_Y и далее B_Y.

$$H_Y = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dI}{3\pi R}\cos\varphi = \frac{I}{2\pi^2 R}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{I}{\pi^2 R}.$$

$$B_Y = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

Задача 3.Очень длинный прямой соленоид имеет радиус сечения R и n витков на единицу длины. По соленоиду течет постоянный ток I Пусть z - расстояние, отсчитываемое вдоль оси соленоида от его торца. Найти:

а) индукцию магнитного поля на оси как функцию z;

б) расстояние z_0 до точки на оси, в которой индукция поля отличается от B в глубине соленоида на $\beta = 1\%$.

Решение.

Система токов имеет осевую симметрию, поэтому в каждой точке оси вектор индукции имеет только осевую проекцию.

Рассмотрим систему токов в цилиндрической системе координат, ось Z совпадает с осью соленоида.

Определим индукцию B_Z в каждой точке оси Z по принципу суперпозиции.

Используя закон Био - Савара выражаем индукцию созданную одним витком, представив витки соленоида сплошным тонким цилиндром с линейной плотностью тока $\tau = nI$.

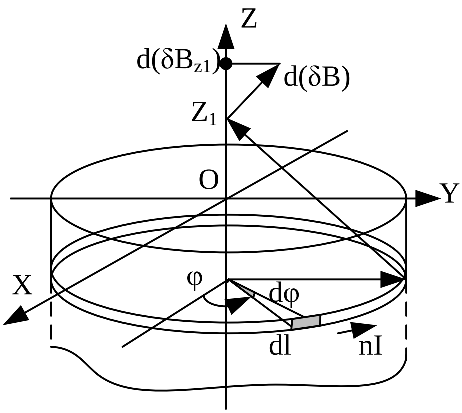


Рис. 8

Величина тока в витке $dI = \tau dz_2$.

$$\delta\left(d\vec{B}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI\delta\vec{l} \times \vec{r}}{r^3};$$

$$\delta\left(dB_{z1}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI\delta l}{R^2 + \left(z_1 + z_2\right)^2}\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(z_1 + z_2\right)^2}};$$

Интегрируя по элементам δl, имеем величину индукции создаваемую в точке z_1 кольцом с током dI.

$$dB_{z1} = \frac{\mu_0 dIR^2}{2\left(R^2 + \left(z_1 + z_2\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Интегрируя по всем виткам, определим индукцию dB_{z1} в точке z_1 оси соленоида.

$$B_{z1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mu_0 R^2 nIdz_2}{2\left(R^2 + \left(z_1 + z_2\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 R^2 nI}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{d\left(z_1 + z_2\right)}{\left(R^2 + \left(z_1 + z_2\right)^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\frac{z_1}{\left(R^2 + z_1^2\right)^{1/2}} - 1\right).$$

Индукция в глубине соленоида при z_1 меньше нуля и стремящемся к бесконечности $B_0 = \mu_0 nI$ (известное значение).

Определим координату z_0, где индукция составляет β от B_0.

$$\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\frac{z_1}{\left(R^2+z_1^2\right)^{1/2}}-1\right)=-\beta\mu_0 nI\,;\ \frac{z_1}{\left(R^2+z_1^2\right)^{1/2}}=-2\beta+1\,;$$

$$z_1^2=(2\beta-1)^2\left(z_1^2+R^2\right)=z_1^2(2\beta-1)^2+R^2(2\beta-1)^2\,;$$

$$z_1=\frac{R(2\beta-1)}{2\sqrt{\beta(\beta-1)}}\approx 5R\,.$$

Задача 3. Два соленоида одинаковой длины и почти одинакового сечения вставлены полностью один в другой. Найти их взаимную индуктивность, если их индуктивности равны L_1 и L_2.

Индуктивность равна отношению потокосцепления к току, а взаимная индуктивность равна отношению взаимного потокосцепления к соответствующему току. Исходя из сказанного, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} L_1 I_1=\Psi_1=w_1\Phi_0 \\ L_2 I_2=\Psi_2=w_2\Phi_0 \\ M_{12} I_2=\Psi_{12}=\Psi_1=w_1\Phi_0 \\ M_{21} I_1=\Psi_{21}=\Psi_{12}=\Psi_2=w_2\Phi_0 \end{cases}.$$

Так как по условию задачи соленоиды имеют одинаковую длину и одинаковое сечение, то поток вектора индукции для каждого витка соленоида одинаков

$$\begin{cases} L_1 I_1=M_{12} I_2 \\ L_2 I_2=M_{21} I_1 \end{cases}.$$

Перемножая уравнения и сокращая на общие множители, имеем

$$L_1 L_2=M_{12}^2,\ M_{12}=\sqrt{L_1 L_2}\,.$$

Задача 4. Найти энергию взаимодействия двух контуров с токами I_1 и I_2, если оба контура имеют вид окружностей с радиусами a и b $(a \ll b)$, центры этих контуров находятся в одной точке и плоскости контуров составляют друг с другом угол Θ_0.

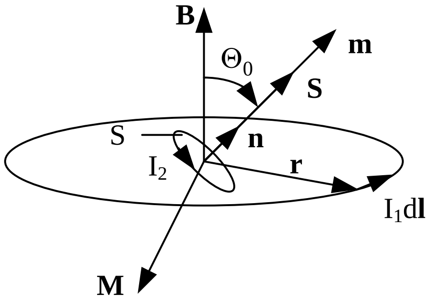


Рис.6

Так как второй контур радиуса a гораздо меньше первого, то поле в котором находится второй контур можем считать однородным, с индукцией равной индукции в центре кругового витка с током.

Определим индукцию в центре большого витка по закону Био - Савара_ - Лапласа.

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{bd\varphi b}{b^3} = \frac{\mu_0 I_1}{2b}.$$

На виток с током в однородном магнитном поле действует момент силы, равный:

$$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}_0, M = I_2\pi a^2 B_0 \sin\Theta,$$

где $\vec{m}$ - магнитный момент второго витка.

$$\vec{m} = I_2\vec{S}\ , m = I_2\pi a^2 .$$

Энергия, которой обладает второй контур, находясь в магнитном поле первого контура численно равна работе совершаемой контуром при повороте его вектора магнитного момента в направлении вектора индукции первого контура.

$$W = -\int_0^{\Theta_0} Md\Theta = -\frac{\mu_0 I_1}{2b} I_2\pi a^2 \int_0^{\Theta_0}\sin\Theta d\Theta = \frac{\mu_0 I_1}{2b} I_2\pi a^2\left(1-\cos\Theta_0\right).$$

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

При решении проверив правильность общего решения, подставить числа в окончательную формулу и указать единицы измерения искомой физической величины, проверив правильность ее размерности. Задач целесообразно использовать следующие методические рекомендации:

1. Изучив условие задачи, сделать краткую его запись, выразив все данные в СИ, и дать схематический чертеж, поясняющий содержание задачи. При работе с векторными величинами необходимо соблюдать правильное обозначение векторов, изображая векторы графически, следует соотносить их длины в соответствии с условием задачи.
2. Выяснив, какие физические законы лежат в основе данной задачи, решить ее в общем виде, т.е. выразить искомую физическую величину через заданные в задаче величины в буквенных обозначениях без подстановки числовых значений в промежуточные формулы.
3.

4. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

<u>Практические занятия и домашние задания</u>

1.В текущем семестре студент должен посетить восемь практических занятий и выполнить два домашних задания.

2.**Студент, пропустивший практическое занятие, обязан** проработать тему занятия и представить преподавателю задачи, рассмотренные в аудитории и рекомендованные для решения дома.

3.Домашние задания выдает преподаватель на первом занятии путем распределения вариантов задания.

4.Домашние задание студент выполняет в отдельной тетради объемом 24 листа.

5.**Каждая задача домашнего задания должна быть представлена в следующем виде:**

-полное условие задачи;

-рисунок, поясняющий суть задачи, с указанием геометрических и физических величин, приведенных в условии;

-решение задачи в общем виде с подробными пояснениями;
-проверка размерности решения и его анализ.
6.Сдача отчета по домашней работе проводится по мере их решения, а последняя задача не позднее 7 (*для домашнего задания №1*) и 14 (*для домашнего задания №2*) недели семестра.
7.Работу над ошибками студент выполняет в тетради для домашней работы.
8.Консультации по домашнему заданию проводятся преподавателем еженедельно, а защита заданий на 7 (*для домашнего задания №1*) и 14 (*для домашнего задания №2*) неделе семестра.

Методическая комиссия кафедры физики

5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ (ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ)

Вариант №1

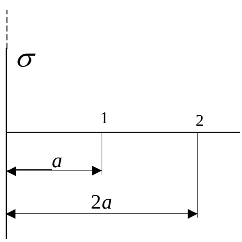
Задача №1 Пространство заполнено зарядом с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \exp\left(-\alpha r^3\right)$, где ρ_0 и α – положительные постоянные, а r – расстояние от центра системы. Найти $E(r)$.

Ответ: $E(r) = \dfrac{\rho_0}{3\alpha\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r^2}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)$.

Задача №2 На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ. Найти потенциал и напряженность поля в точке, лежащей на оси отрезка на расстоянии a от ближайшего его конца.Ответ: $\varphi = \dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\dfrac{l+a}{a}$;

$$E = \frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0 a(l+a)}.$$

Задача №3



Поле создается бесконечно- большой по размерам равномерно заряженной тонкой плоскостью $(+\sigma = const)$. Найти работу по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2.

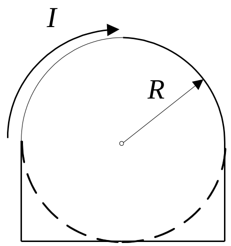
Ответ: $A = \dfrac{q\sigma a}{2\varepsilon_0\varepsilon}$.

Задача №4 Вычислить энергию поля двух металлических шаров радиусами R_1 и R_2 и зарядами q_1 и q_2. Расстояние между центрами шаров равно a.

Ответ: $W = \dfrac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} + \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

Задача №5 Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов U, зажата диэлектрическая пластинка с проницаемостью ε и толщиной d. Определить плоскость связанных зарядов на поверхности диэлектрической пластины.

Ответ: $\sigma_\rho = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)U/d$.



Задача №6

По плоскому контуру из тонкого провода течет ток $I = 100A$. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в точке O. Радиус R изогнутой части контура равен 20 см.

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right) = 298\text{мкТл}$.

Вариант №2

Задача №1 Полусфера радиуса R заряжена равномерно с поверхностной плотностью σ. Найти E в центре полусферы.

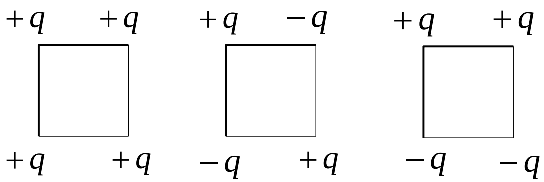
Ответ: $E = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}$.

Задача №2 По тонкому проволочному кольцу радиуса R, находящемуся в вакууме, равномерно распределен заряд q. Приняв ось кольца за ось X, найти φ и E на оси кольца как функцию координаты X (начало координат поместить в центре кольца).

Ответ: $\varphi(x) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + R^2}}$; $E(x) = \dfrac{qx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\left(x^2 + R^2\right)^3}}$.

Задача №3 Тонкий стержень согнут в кольцо радиуса R. Он заряжен с линейной плотностью τ. Какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд q из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии l от его центра.

Ответ: $A = \dfrac{q\tau}{4\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}}\right)$.



Задача №4

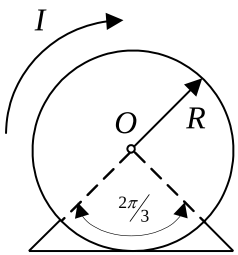
Найти взаимную потенциальную энергию для каждой из систем точечных зарядов, изображенных на рисунке. Все заряды одинаковы по абсолютной величине и располагаются в вершинах квадрата со стороной a.

Ответ:

$$W_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\sqrt{2} + 4\right), W_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\sqrt{2} - 4\right), W_1 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{2}.$$

Задача №5 Расстояние между пластинами плоского конденсатора равно d, разность потенциалов U. На нижней пластине лежит пластина диэлектрика толщиной d_2 и проницаемостью ε. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на этой пластине.Ответ:

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon d_1 + d_2}.$$



Задача №6 По плоскому контуру из тонкого провода течет ток $I = 100A$. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в точке O. Радиус R изогнутой части контура равен 20 см. Ответ:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) = 306 мкТл.$$

Вариант №3

Задача №1Шар радиуса R имеет положительный заряд, объемная плотность которого $\rho = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$, где ρ_0 - постоянная, r – расстояние от центра шара. Найти $E(r)$ внутри и вне шара.

Ответ: $1) r < R; E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 r^2}{4R\varepsilon\varepsilon_0}; 2) r \ge R; E(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon r^3} - \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$

Задача №2 Тонкий однородный диск радиусом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Найти φ и E на оси диска как функцию координаты X.

Ответ: $\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2 + R^2} - |x|\right]; \ E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right].$

Задача №3 Тонкий стержень согнут в полукольцо. Стержень заряжен с линейной плотностью τ. Какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд q из центра полукольца в бесконечность?

Ответ: $A = \frac{q\tau}{4\varepsilon_0}.$

Задача №4 Сплошной парафиновый шар радиусом R заряжен равномерно по объему с объемной плотностью ρ. Определить энергию электрического поля, сосредоточенную в самом шаре, и энергию вне его.

Ответ: $W_1 = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\varepsilon_0\varepsilon}; W_2 = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0}.$

Задача №5 В пространстве, наполовину заполненном диэлектриком с проницаемостью ε, создано однородное электрическое поле, напряженность которого в воздухе E_1. Вектор $\vec{E}_1$ образует угол α с границей диэлектрик-воздух, которую можно считать плоской. Определить численные значения векторов $\vec{D}$, $\vec{E}$, и $\vec{P}$ в диэлектрике.

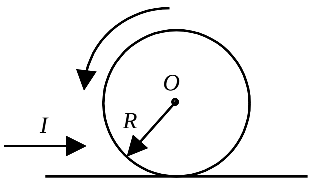
Ответ: $D_2 = D_1\sqrt{\sin^2\alpha + \varepsilon^2\cos^2\alpha}$; $E_2 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}E_{n1}^2 + E_{\tau 1}^2}$;

$P_2 = D_2 - \varepsilon_0 E_2$.

Задача №6 Бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 50A$ имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом $R = 10 см$. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током.

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(\pi + 1) = 414 мкТл$.

ВАРИАНТ 4.



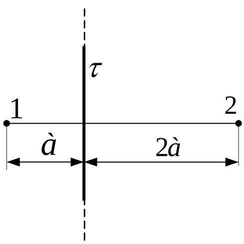
Задача 1.Система состоит из тонкого проволочного кольца и полубесконечной нити совпадает с центром кольца. Радиус кольца R. Кольцо заряжено зарядом q, а нить заряжена равномерно с линейной плотностью r. Найти силу их взаимодействия.

Ответ: $F = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0}$

Задача 2.Найти потенциал и напряженность поля в центре полусферы радиусом R, заряженной с постоянной поверхностной плотностью σ. Положить $\varepsilon = 1$.

Ответ: $\varphi = \frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}; E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$

Задача 3. Бесконечная прямая нить несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью τ. Определить работу $\grave{A}_{12}$ сил поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2.

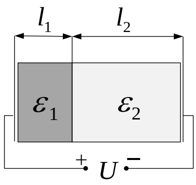


Ответ: $A_{12} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2$

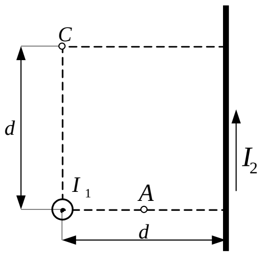
Задача 4.Зная, что энергия электрического поля определяется выражением

$W = \int\limits_{(V)} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon R^3}{2} dV$, показать, что энергия шара радиуса R, заряженного по объему с постоянной плотностью ρ, равна $W = \frac{4\rho^2 R^5 \pi}{15\varepsilon_0}$, при $\varepsilon = 1$.

Задача 5.Найти энергию этого конденсатора, если площадь каждой пластины равна S (см. рис.)Ответ: $W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S U}{2(l_1\varepsilon_2 + l_2\varepsilon_1)}$



Задача 6.Два бесконечно длинных прямых проводника скрещены под прямым углом. По проводам текут токи $I_1 = 80A$ и $I_2 = 60A$. Расстояние d между проводниками равно 10см. Определить магнитную индукцию B в точке A, одинаково удаленной от обоих проводников.

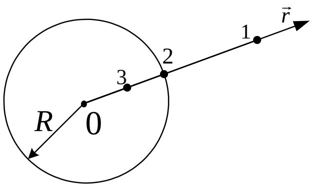


Ответ: $B = \frac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 400ìêÒë$

ВАРИАНТ 5.

Задача 1.Найти силу, действующую на отрезок нити длиной $r_2 - r_1$ заряженной с линейной плотностью τ_2 и находящейся вдоль радиуса от бесконечно длинной нити, заряженной с линейной плотностью τ_1 .Ответ: $F = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left|\frac{r_2}{r_1}\right|$

Задача 2.Заряд q равномерно распределен по объему шара радиуса R . Используя теорему гаусса и определение потенциала, найти потенциалы в точках 1, 2, 3 и 0 как функцию r .Ответ:



$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}; \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R};$$

$$\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{R^2 - r^2}{2}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

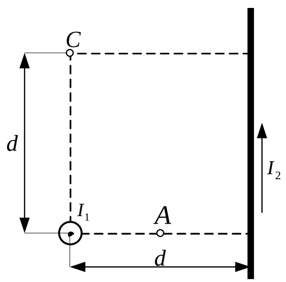
Задача 3.Определить работу электрических сил, если четыре одинаковых по величине и знаку заряда q, расположенных вдоль прямой на расстояниях r друг от друга, перенести в вершины тетраэдра с длиной ребра r.Ответ: $\grave{A}_{ýë} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{5q^2}{3r}$

Задача 4.Определить потенциальную энергию диполя во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$. Электрический момент диполя равен $\vec{p}$. (Дать два решения.)

Ответ: $W = -\vec{p}\vec{E}$

Задача 5.Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2мм. Разность потенциалов $U = 1{,}8 \hat{e}\hat{A}.$ Диэлектрик – стекло. Определить диэлектрическую восприимчивость χ стекла и поверхностную плотность σ' поляризационных (связанных) зарядов на поверхности стекла.

Ответ: $\chi = 6; \sigma' = 47{,}7 \frac{ì\hat{e}\hat{E}ë}{ì^2}$

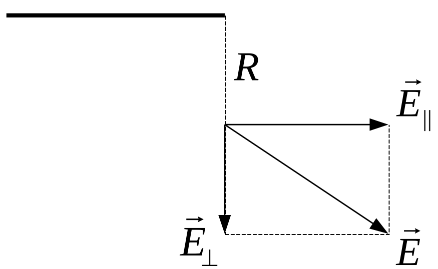


Задача 6.По двум бесконечно длинным прямым проводам, скрещенным под прямым углом, текут токи $I_1 = 30A$ и $I_2 = 40A.$ Расстояние d между проводами равно 20см. Определить магнитную индукцию B в точке C, одинаково удаленной от обоих проводников на расстояние, равное d.

Ответ: $B = 50 ì\hat{e}\grave{O}ë$

ВАРИАНТ 6.

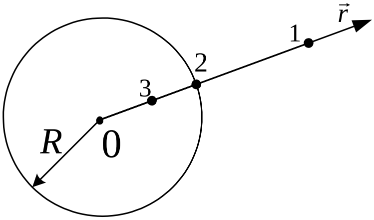
Задача 1.Полубесконечная нить заряжена равномерно с линейной плотностью τ. Найти $E_\perp, E_\parallel$ и результирующую E, на расстоянии R от нити у её конца.



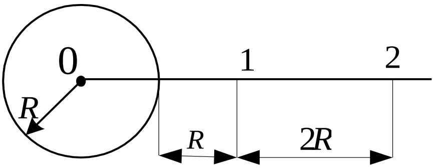
Ответ:

$$E_\perp = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}; E_\parallel = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R};$$

$$E = \sqrt{2} \cdot \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



Задача 2.Заряд q равномерно распределен по поверхности сферы радиуса R. Используя теорему Гаусса и определение потенциала найти потенциал поля в точках 1, 2, 3 и 0 как функцию r.Ответ: $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}; \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}; \varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$



Задача 3.Определить работу сил поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2 поля, созданного заряженным проводящим шаром. Потенциал шара равен φ.

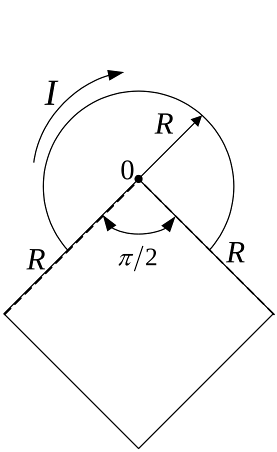
Ответ: $A_{12} = \frac{q\varphi}{4}$

Задача 4.Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов U. Площадь пластины конденсатора S, а расстояние между пластинами l_1. Какую работу совершат электрические силы, если расстояние между обкладками увеличить до l_2, не отключая конденсатор от источника? (Найти два решения.)

Ответ: $A = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2}\left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right)$

Задача 5.Металлический шар радиусом $R = 5ì$ окружен равномерным слоем фарфора толщиной $d = 2ñì$. Определить поверхностные плотности σ_1' и σ_2' связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд шара $Q = 10íÊë$.Ответ:

$$\sigma_1' = -\frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 0{,}26\frac{ìêÊë}{ì^2}$$



Задача 6.По плоскому контуру из тонкого провода течет ток $I = 100A$. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в точке O. Радиус R изогнутой части контура равен 20см.

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 l}{8R}\left(3 + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right) = 271\,\text{ìêÒë}$.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключается физический смысл теориемы Гаусса для электростатического поля в вакууме?
2. Поясните, что такое линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов.
3. Дайте определение потениала данной точки электростатического поля и разности потенциалов двух точек поля.
4. Какова связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля? Каков физический смысл этих понятий?
5. Как определяестя вектор электрического смещения?
6. Выведите формулу для энергии заряженного конденсатора, выражая ее через заряд на обкладках конденсатора и через напряженность поля.
7. Записав закон Био-Савара-Лапласа, объясните его физический смысл.
8. Рассчитайте, применяя закон Био-Савара-Лапласа, магнитное поле прямого тока, и в центре кругового витка проводника с током.
9. Найдите выражение для силы взаимодействия двух бесконечных прямолинейных одинаковых токов противоположного направления.

7. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.Е. Иродов. – Электрон.дан.– СПб.: Лань. 2016. – 416с. – режим доступа: http://e.lanbook.com/book/71750

2. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.В. Савельев.- Электрон.дан.– СПб.: Лань, 2013. – 288с. – режим доступа: http://e.lanbook.com/book/32823