Лекция 1.5. Интерполяция

Интерполяция в вычислительной математике - это способ нахождения некой величины, основываясь на наборе уже известных величин.

Многим из тех, кто сталкивается с научными и инженерными расчётами часто приходится оперировать наборами значений, полученных экспериментальным путём или методом случайной выборки. Как правило, на основании этих наборов требуется построить функцию, на которую могли бы с высокой точностью попадать другие получаемые значения. Такая задача называется аппроксимацией кривой.

Интерполяцией называют такую разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит точно через имеющиеся точки данных.

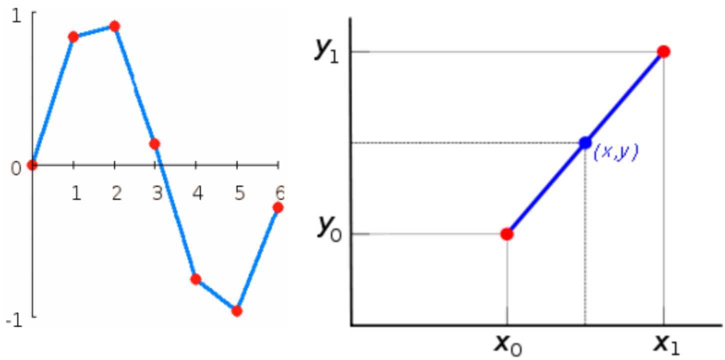
Существует также близкая к интерполяции задача, которая заключается в аппроксимации какой-либо сложной функции другой, более простой функцией. Если некоторая функция слишком сложна для производительных вычислений, можно попытаться вычислить её значение в нескольких точках, а по ним построить, т.е. интерполировать, более простую функцию. Разумеется, использование упрощенной функции не позволяет получить такие же точные результаты, какие давала бы первоначальная функция. Но в некоторых классах задач достигнутый выигрыш в простоте и скорости вычислений может перевесить получаемую погрешность в результатах.

Предположим, что имеется некий набор (вектор) вещественных значений абсцисс $x_0, xj \ldots x_n$, которому однозначно соответствует вектор вещественных значений ординат $y_0, y_j \ldots y_n$. В таком случае задача одномерной интерполяции состоит в поиске некоторой функции f (x), такой что $f(x_i) = y_t$, где i е [0, n]. При этом значения функции f (x) должны принимать ***разумные*** значения на интервале $[x_0, x_n]$. Критерий ***разумности*** в данном случае весьма неочевиден, и, возможно, ему так и не будет дано точного определения.

Очень важно для решения задачи интерполяции определить, каким образом должна вести себя функция ***f***(x) ***(интерполянт)*** для значений ***x***, не содержащихся в начальном векторе. В конце концов, исходный набор данных может быть интерполирован бесконечным набором конечных функций, поэтому неплохо было бы иметь какой-либо критерий отбора. Обычно подобный критерий формируется в терминах гладкости и простоты. К примеру, ***f*** (x) должна быть аналитична и максимальное значение | ***f***''(x) | по всему интервалу должно быть насколько возможно мало, или функция ***f*** (x) должна являться полиномом наименьшей степени и т. д.

Фактически, данная формула будет работать и для x, выходящих за рамки интервала [x0, x1]. В этом случае, способ нахождения величины y будут называть экстраполяцией.

Главным недостатком такого способа интерполяции будет являться отсутствие возможности построения гладких функций для набора узлов длиннее, чем в два элемента. В таком случае график кривой будет принимать вид ломаной:



Так же, общий вид функции для интерполяции более чем для двух узлов трудно реализуем математически.

Полиномиальная интерполяция

Исторически и прагматически наиболее важным классом интерполирующих функций является семейство алгебраических полиномов. Полиномы обладают очевидным достоинством - их легко вычислять. Кроме того, их легко складывать, умножать, интегрировать и дифференцировать. Если *p(x)* - некий полином, а ***c*** - некая константа, то полиномом будет и p(***x*** + c).

К сожалению, класс функций может обладать вышеуказанными свойствами, но при этом не иметь нужных аппроксимационных качеств. К счастью, у нас есть веские основания полагать, что любая непрерывная функция на замкнутом интервале может быть хорошо приближена неким полиномом. Это следует из раннего результата теории приближений, так называемой ***аппроксимационной теоремы Вейерштрасса:***

Если f - непрерывная на конечном замкнутом интервале [a, b] функция, то для любого ε> 0 существует такой полином pn (x), n = n(x), такой что: max || f (x) - pn (x) ||< ε, x   [a, b]

Хотя некоторые доказательства теоремы Вейерштрасса носят конструктивный характер, получаемые полиномы обычно имеют столь высокие степени, что пользоваться ими не практично. С другой стороны, устанавливая факт существования полинома $\boldsymbol{p_n}$ (x), данная теорема ничего не говорит о возможности нахождения интерполяционного полинома для заданного множества точек. И хотя утешительно знать, что некий полином $\boldsymbol{p_n}$ (x) может аппроксимировать с заданной точностью функцию ***f*** (x) на заданном интервале [a, b], нет гарантии, что такой полином может быть найден каким-либо практичным алгоритмом.

В математике аппроксимационной теоремой Вейерштрасса (Стоуна — Вейерштрасса) называют теорему, утверждающую, что для любой непрерывной функции на отрезке можно подобрать последовательность многочленов, равномерно сходящихся к этой функции на отрезке.

Многочлен (или **полином**) от n переменных — это конечная формальная сумма вида

$$\sum_I c_I x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n},$$

где $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ есть набор из целых неотрицательных чисел (называется **мультииндекс**), c_I — число (называемое «коэффициент многочлена»), зависящее только от мультииндекса I.

Иначе говоря, многочленом называют сумму одночленов.

В частности, многочлен от одной переменной есть конечная формальная сумма вида

$$c_0 + c_1 x^1 + \dots + c_n x^n,$$

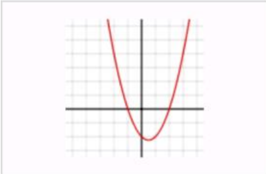
где c_i фиксированные коэффициенты, а x — переменная.

Полином степени $\boldsymbol{n}$ можно записать по степеням $\boldsymbol{x}$:

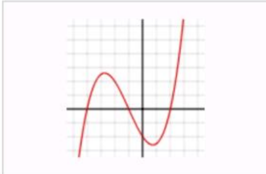
$$p_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_0 x^n = \sum_{i=0}^{n} a_0 x^n$$

В данном уравнении $\boldsymbol{n}$ **+** 1 коэффициентов. Чтобы их определить, необходимо поставить $\boldsymbol{n}$+1 корректных условий. Именно поэтому при интерполяции требуют, чтобы функция проходила через $\boldsymbol{n}$+1 точек (x, y), где все $\boldsymbol{x}$ различны. Это дает систему из $\boldsymbol{n}$ +1 линейных уравнений, позволяющую определить коэффициенты $\boldsymbol{a_i}$.

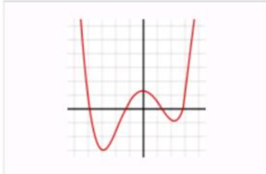
После того, как для решения задачи интерполяции мы решили воспользоваться полиномом степени $\boldsymbol{n}$, осталось определиться только с базисом в пространстве с таким многочленом. В приведенном выше примере был взят базис одночленов $\boldsymbol{x^n}$, что приводит к системе линейных уравнений, которая может быть решена. Однако использование подобного базиса приводит к недостаточной обусловленности, так как последовательные степени $\boldsymbol{x^n}$ на интервале [0,1] почти линейно зависимы. Поэтому на практике выбирается иной базис.



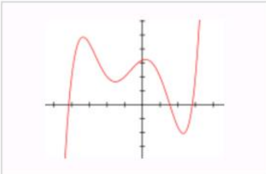
Polynomial of degree 2:
$f(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$



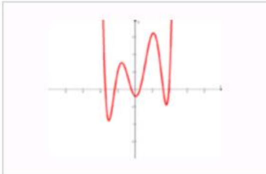
Polynomial of degree 3:
$f(x) = x^3/4 + 3x^2/4 - 3x/2 - 2 = 1/4\ (x+4)(x+1)(x-2)$



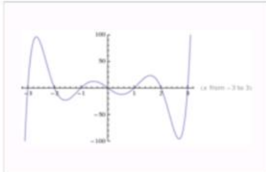
Polynomial of degree 4:
$f(x) = 1/14\ (x+4)(x+1)(x-1)(x-3) + 0.5$



Polynomial of degree 5:
$f(x) = 1/20\ (x+4)(x+2)(x+1)(x-1)(x-3) + 2$



Polynomial of degree 6:
$f(x) = 1/30\ (x+3.5)(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)(x-4) + 2$



Polynomial of degree 7:
$f(x) = (x-3)(x-2)(x-1)(x)(x+1)(x+2)(x+3)$

$$P = 3x^2 - 2x + 5xy - 2$$
$$Q = -3x^2 + 3x + 4y^2 + 8\,,$$

then

$$P + Q = 3x^2 - 2x + 5xy - 2 - 3x^2 + 3x + 4y^2 + 8\,,$$

which can be simplified to

$$P + Q = x + 5xy + 4y^2 + 6\,.$$

$$P = 2x + 3y + 5$$
$$Q = 2x + 5y + xy + 1,$$

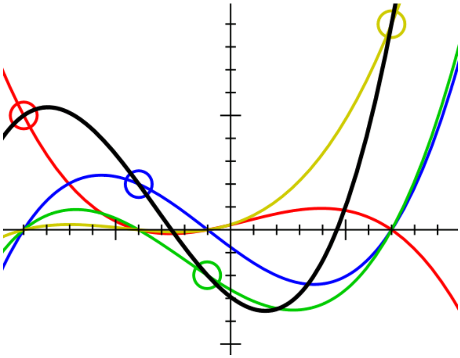
then

$$\begin{array}{rcccccccc} PQ & = & (2x \cdot 2x) & + & (2x \cdot 5y) & + & (2x \cdot xy) & + & (2x \cdot 1) \\ & + & (3y \cdot 2x) & + & (3y \cdot 5y) & + & (3y \cdot xy) & + & (3y \cdot 1) \\ & + & (5 \cdot 2x) & + & (5 \cdot 5y) & + & (5 \cdot xy) & + & (5 \cdot 1) \end{array}$$

which can be simplified to

$$PQ = 4x^2 + 21xy + 2x^2y + 12x + 15y^2 + 3xy^2 + 28y + 5\,.$$

Геометрический смысл полиномиальной интерполяции можно выразить следующим образом. В пространстве имеется ***n*** точек с известными нам координатами ***(x, y).*** Для каждой из этих точек (***x,y),*** в соответствии с неким базисом (функцией) определяется одночлен, имеющий значение в точке (x_i, y_i), а во всех остальных известных точках - 0. В этом случае, линейная комбинация одночленов, даст конечный полином, проходящий точно через указанные точки:



На данном рисунке **красным**, **синим**, **зеленым** и **желтым** указаны одночлены, а **черным** - конечный полином.

Стоит помнить, что внешний вид интерполирующей функции определяется выбранным нами базисом. При смене базиса изменяется и вид функции.

Базисные полиномы Лагранжа

Базисные полиномы Лагранжа, получившие свое имя в честь Джозефа Луиса Лагранжа, были впервые открыты Эдвардом Варингом в 1779 году, а затем Леонардом Эйлером в 1783.

Основные ограничения на использование данного базиса для интерполяционного полинома - значения в узлах $\boldsymbol{x}$ должны быть уникальными и отсортированы в порядке возрастания.

В простейшем случае, для $\boldsymbol{n} = 1$ (два узла) интерполяционный полином Лагранжа превращается в линейную функцию. В иных случаях он описывается как линейная комбинация базисных полиномов Лагранжа:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i$$

где y_i выступают в качестве коэффициентов, а $\boldsymbol{L_i}$ (x) - базис, имеющий форму:

$$L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Данный вид полинома применяется в случаях, когда для одних и тех же данных ***x***, необходимо строить множество полиномов при изменяющихся $\boldsymbol{y_i}$.

$$l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{x-x_0}{x_i-x_0}\cdots\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdots\frac{x-x_n}{x_i-x_n}$$

Найдем формулу интерполяции для $f(x)=\tan(x)$ имеющей следующие значения:

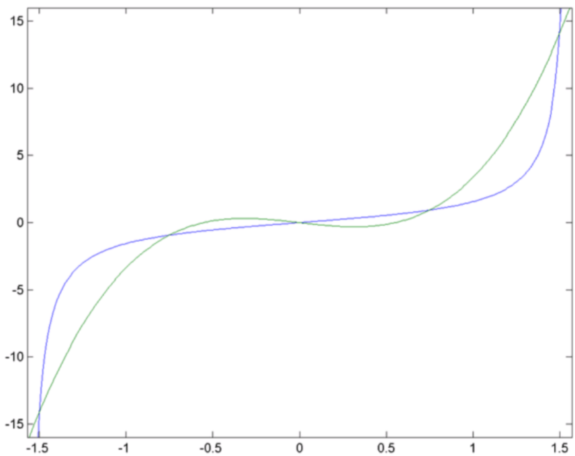
$$\begin{aligned}
&x_0=-1.5 && f(x_0)=-14.1014\\
&x_1=-0.75 && f(x_1)=-0.931596\\
&x_2=0 && f(x_2)=0\\
&x_3=0.75 && f(x_3)=0.931596\\
&x_4=1.5 && f(x_4)=14.1014.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_0(x)&=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3}\cdot\frac{x-x_4}{x_0-x_4}=\frac{1}{243}x(2x-3)(4x-3)(4x+3)\\
\ell_1(x)&=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3}\cdot\frac{x-x_4}{x_1-x_4}=-\frac{8}{243}x(2x-3)(2x+3)(4x-3)\\
\ell_2(x)&=\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_3}{x_2-x_3}\cdot\frac{x-x_4}{x_2-x_4}=\frac{3}{243}(2x+3)(4x+3)(4x-3)(2x-3)\\
\ell_3(x)&=\frac{x-x_0}{x_3-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_3-x_2}\cdot\frac{x-x_4}{x_3-x_4}=-\frac{8}{243}x(2x-3)(2x+3)(4x+3)\\
\ell_4(x)&=\frac{x-x_0}{x_4-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_4-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_4-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_4-x_3}=\frac{1}{243}x(2x+3)(4x-3)(4x+3).
\end{aligned}$$

$$l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{x-x_0}{x_i-x_0}\cdots\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdots\frac{x-x_n}{x_i-x_n}$$

Получим

$$
\begin{aligned}
L(x) = \frac{1}{243}\Big(&f(x_0)x(2x-3)(4x-3)(4x+3) \\
&- 8f(x_1)x(2x-3)(2x+3)(4x-3) \\
&+ 3f(x_2)(2x+3)(4x+3)(4x-3)(2x-3) \\
&- 8f(x_3)x(2x-3)(2x+3)(4x+3) \\
&+ f(x_4)x(2x+3)(4x-3)(4x+3)\Big) \\
= 4.834848x^3 - 1.477474x.&
\end{aligned}
$$



Пример 2

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = 1$$
$$x_1 = 2 \qquad f(x_1) = 4$$
$$x_2 = 3 \qquad f(x_2) = 9.$$

$$L(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 4 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 9 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2}$$
$$= x^2.$$

Пример 3

$$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 1$$
$$x_1 = 2 \quad f(x_1) = 8$$
$$x_2 = 3 \quad f(x_2) = 27$$

$$L(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 8 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 27 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2}$$
$$= 6x^2 - 11x + 6.$$

Базисные полиномы Ньютона

Предположим, что имеется ***n*** +1 известных точек (узлов) (***x,,y,), i* = *0,...n***, таких, что все ***xi,*** уникальны. В таком случае, интерполяционный полином Ньютона описывается как линейная комбинация базисных полиномов Ньютона:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i N_i(x),$$

где базисный полином Ньютона определяется как:

$$N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_0),$$

а ***ci***, являются коэффициентами, получившими название разделенных разностей порядка ***i*** на значениях x0,...xn. Разделенные разности в таком случае записываются в виде [x0,...xn]. Первой разделенной разностью, или разделенной разностью первого порядка на точках x0, x1 называют величину

$$[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

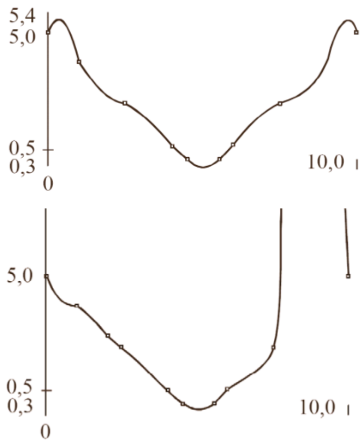
Разделенные разности более высоких порядков определяются рекуррентно. Например, разделенная разность второго порядка в точках x_0, x_1, x_2 определяется через две разделенные разности меньшего порядка $[x_0,x_1]$ и $[x_1,x_2]$ следующим образом:

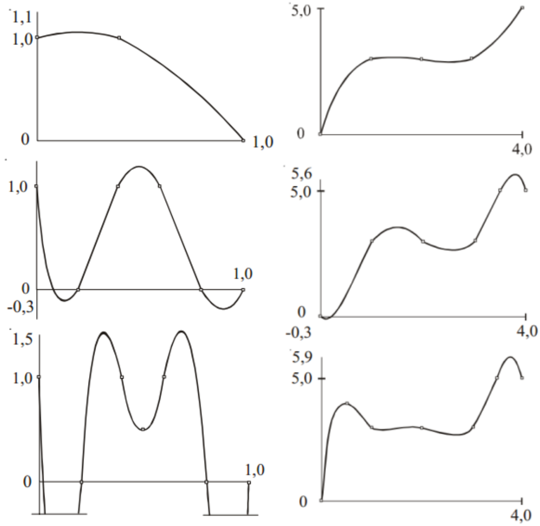
$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

В общем виде разделенную разность порядка n можно описать через разделенные разности порядка n -1:

$$[x_i, \ldots x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, \ldots x_{i+n}] - [x_i, \ldots x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

Значения разделенных разностей не зависят от нумерации точек. Однако добавление новой точки приводит к появлению значительных осцилляций:





Базисные полиномы Ньютона преимущественно используют, когда имеется необходимость быстрого добавления точек.

For $k + 1$ data points we construct the Newton basis as

$$n_j(x) := \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i) \qquad j = 0, \ldots, k.$$

Using these polynomials as a basis for Π_k we have to solve

$$\begin{bmatrix} 1 & & \ldots & & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & & & \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_k - x_0 & \ldots & \ldots & \prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \\ \vdots \\ \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \\ \vdots \\ \\ y_k \end{bmatrix}$$

to solve the polynomial interpolation problem.

This system of equations can be solved recursively by solving

$$\sum_{i=0}^{j} a_i n_i(x_j) = y_j \qquad j = 0, \ldots, k.$$

Example

The divided differences can be written in the form of a table. For example, for a function *f* is to be interpolated on points $x_0, \ldots, x_n$. Write

$$
\begin{array}{llll}
x_0 & f(x_0) & & \\
 & & \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} & \\
x_1 & f(x_1) & & \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} \\
 & & \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & \\
x_2 & f(x_2) & & \vdots \\
 & & \vdots & \\
\vdots & & & \vdots \\
 & & \vdots & \\
x_n & f(x_n) & &
\end{array}
$$

For example, suppose we are to construct the interpolating polynomial to $f(x) = \tan(x)$ using divided differences, at the points

$$
\begin{array}{lllll}
x_0 = -\frac{3}{2} & x_1 = -\frac{3}{4} & x_2 = 0 & x_3 = \frac{3}{4} & x_4 = \frac{3}{2} \\
f(x_0) = -14.1014 & f(x_1) = -0.931596 & f(x_2) = 0 & f(x_3) = 0.931596 & f(x_4) = 14.1014
\end{array}
$$

Using six digits of accuracy, we construct the table

$$
\begin{array}{cccccc}
-\frac{3}{2} & -14.1014 & & & & \\
 & & 17.5597 & & & \\
-\frac{3}{4} & -0.931596 & & -10.8784 & & \\
 & & 1.24213 & & 4.83484 & \\
0 & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & 1.24213 & & 4.83484 & \\
\frac{3}{4} & 0.931596 & & 10.8784 & & \\
 & & 17.5597 & & & \\
\frac{3}{2} & 14.1014 & & & &
\end{array}
$$

Thus, the interpolating polynomial is

$$
-14.1014+17.5597(x+\tfrac{3}{2})-10.8784(x+\tfrac{3}{2})(x+\tfrac{3}{4})+4.83484(x+\tfrac{3}{2})(x+\tfrac{3}{4})(x)+0(x+\tfrac{3}{2})(x+\tfrac{3}{4})(x)(x-\tfrac{3}{4}) =
$$
$$
= -0.00005 - 1.4775x - 0.00001x^2 + 4.83484x^3
$$

Кусочно-полиномиальные интерполяции

Увеличение числа точек ведет к увеличению степени полинома, приводящему в свою очередь к повышению вычислительных затрат. Кроме того, увеличение степени полинома так же может приводить к появлению осцилляций, нежелательных при интерполяции.

Кусочно-полиномиальная интерполяция является решением данной проблемы. Подразумевается, что на каждом интервале ***[xi, xi+1]*** будут независимо друг от друга строиться собственные полиномы, которые в последствии будут сшиваться. Данный подход позволяет снизить степень полинома и как следствие - вычислительные затраты.

Кривые Безье

Кривые Безье были разработаны в 60-х годах XX века независимо друг от друга Пьером Безье (Bezier) из автомобилестроительной компании «Рено» и Полем де Кастелье (de Casteljau) из компании «Ситроен», где применялись для проектирования кузовов автомобилей.

Несмотря на то, что открытие де Кастелье было сделано несколько ранее Безье (1959), его исследования не публиковались и скрывались компанией как производственная тайна до конца 1960-х.

Впервые кривые были представлены широкой публике в 1962 году французским инженером Пьером Безье, который, разработав их независимо от де Кастелье, использовал их для компьютерного проектирования автомобильных кузовов. Кривые были названы именем Безье, а именем де Кастелье назван разработанный им рекурсивный способ определения кривых (алгоритм де Кастелье).

Впоследствии это открытие стало одним из важнейших инструментов систем автоматизированного проектирования (CAD) и программ компьютерной графики.

Кривая Безье — это параметрическая кривая, задаваемая линейной комбинацией:

$$B(t) = P_i b_{i,n}, 0 < t < 1,$$

Где p - функция компонент-векторов опорных вершин, а $\boldsymbol{b_{in}}$ - базис полинома, именуемого так же ***полиномом Бернштейна,*** названного так в честь Сергея Натановича Бернштейна. Базис Бернштейна записывается в виде:

$$b_{i.n}(t) = \binom{i}{n} t^i (i-t)^{n-i}$$

$$\binom{i}{n} = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

Где $\boldsymbol{n}$ - степень полинома, а $\boldsymbol{i}$ - номер вершины.

Описываемые прежде методы позволяют построить интерполяционную кривую, проходящую через все опорные точки. Во многих случаях они выдают неплохие результаты. В то же время они обладают недостатками, делающими их непригодными для построения кривой в диалоговом режиме.

Кривая Безье определяется вершинами ***характеристического многоугольника,*** которые, естественно, описывает ее форму. Основное отличие от вышеизложенных методов заключается в том, что данная кривая в точности будет проходить лишь через две точки - начальную и конечную. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся версии кривых Безье.

(n + 1) **базисных многочленов Бернштейна** степени n находятся по формуле

$$b_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

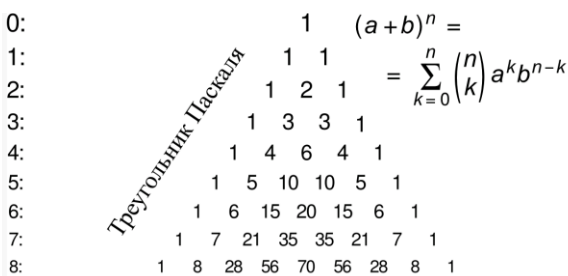
где $\binom{n}{k}$ — биномиальный коэффициент.

Линейная комбинация базисных полиномов Бернштейна

$$B_n(f;x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x)$$

называется **многочленом (полиномом) Бернштейна** или **многочленом в форме Бернштейна** степени n.

Коэффициенты $f\left(\frac{k}{n}\right)$ называются **коэффициентами Бернштейна** или **коэффициентами Безье**.



Примеры

некоторые базисные полиномы Бернштейна:

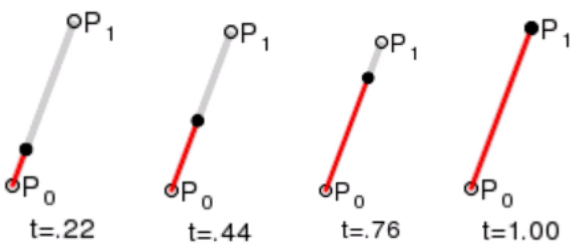
$$b_{0,0}(x) = 1$$
$$b_{0,1}(x) = 1 - x$$
$$b_{1,1}(x) = x$$
$$b_{0,2}(x) = (1 - x)^2$$
$$b_{1,2}(x) = 2x(1 - x)$$
$$b_{2,2}(x) = x^2 \, .$$

Линейные кривые

При n = 1 кривая представляет собой отрезок прямой линии, опорные точки P_0, P_1 описывают начало и конец отрезка. В данном случае кривая описывается уравнением:

$$B(t) = (1-t)P_0 + tP_i$$

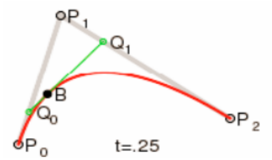
Не трудно заметить, что в данном случае уравнение описывает линейную закономерность. Параметр t в этом уравнении определяет на каком расстоянии от P_0 к P_i располагается $B(t)$. К примеру, при значении t = 0.25 это соответствовало бы четверти расстояния.



Квадратные кривые

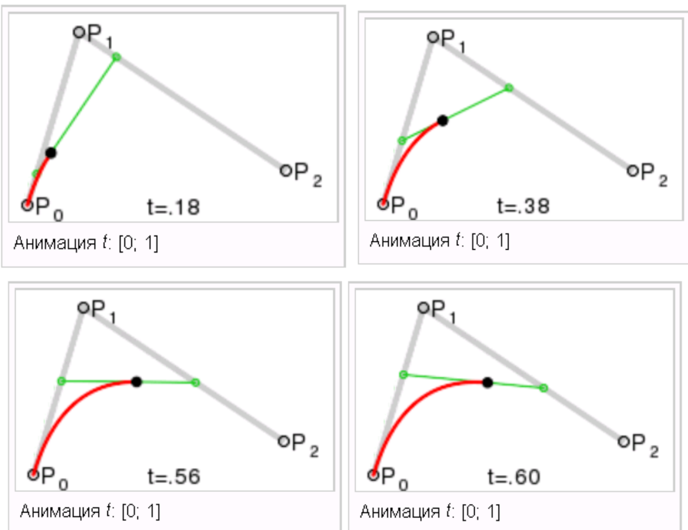
Кривые Безье второго порядка *(n = 2)* задаются тремя опорными точками P_0, P_1, P_2, а уравнение принимает вид:

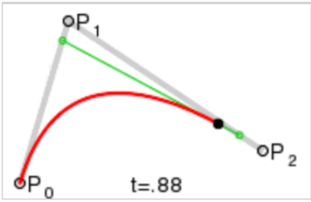
$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$



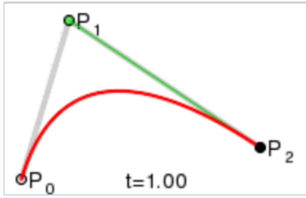
Для построения квадратных кривых Безье методом де Кастелье требуется выделение двух промежуточных точек Q0 и Q1 из условия, чтобы параметр t изменялся от 0 до 1:

– Точка Q0 изменяется от P0 до P1 и описывает линейную кривую Безье.
– Точка Q1 изменяется от P1 до P2 и также описывает линейную кривую Безье.
– Точка B изменяется от Q0 до Qj и описывает квадратную кривую Безье.





Анимация t: [0; 1]



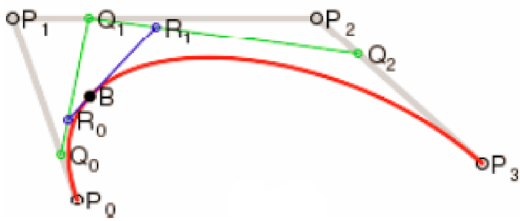
Анимация t: [0; 1]

Кубические кривые

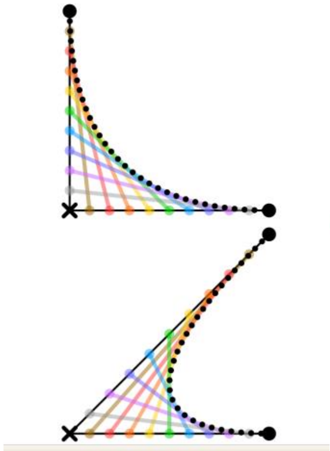
Кривая Безье третьего порядка ($n = 3$) задается четырьмя опорными точками P_0, P_1, P_2, P_3, а выражение принимает вид:

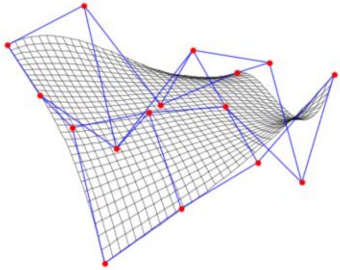
$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$$

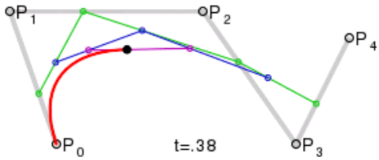
Четыре опорные точки P_0,P_1,P_2,P_3, заданные в 2-х или 3-мерном пространстве определяют форму кривой. Линия берёт начало из точки P_0 направляясь к P_1 и заканчивается в точке P_3 подходя к ней со стороны P_2 . То есть кривая не проходит через точки P_1 и P_2 , они используются для указания её направления. Длина отрезка между P_0 и P_1 определяет, как скоро кривая повернёт к P_3 .



Для построения кривых Безье больших порядков требуется и больше точек, при этом, сами кривые больших порядков строятся через кривые меньших. Так при построении кривой Безье четвертого порядка, будут использованы точки, полученные от кривых третьего порядка, и так далее.





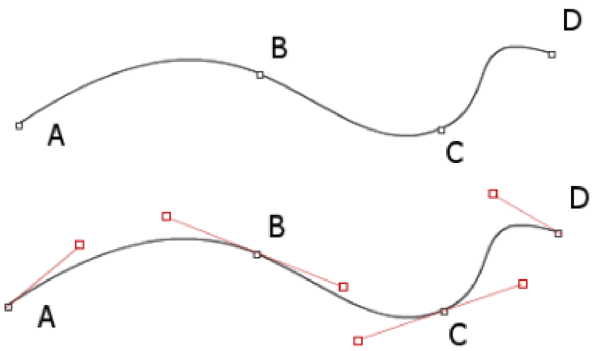


$$C(t) = 1t^0(1-t)^4P_0 + 4t^1(1-t)^3P_1 + 6t^2(1-t)^2P_2 + 4t^3(1-t)^1P_3 + 1t^4(1-t)^0P_4\ ,\ t \in [0,1]$$

Сплайны, составленные из кривых Безье

Понятие сплайна пришло из машиностроения, где *сплайном* называли гибкую рейку. Закрепив эту линейку в нужных местах чертежа, добивались плавной формы кривой, после чего, обводили ее карандашом.

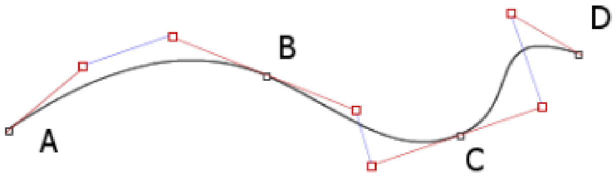
Наиболее популярная в компьютерной графике разновидность сплайнов является расширением свойств кривых Безье. Как известно, при увеличении числа опорных точек, возрастает степень кривой, что приводит к росту вычислительных затрат. Вдобавок, кривые Безье не проходят через указанные точки, а лишь аппроксимируют форму описывающего их характеристического многоугольника. Эти два недостатка призван исправить способ, который лучше всего описать наглядно:



На данном рисунке изображена кривая, проходящая *точно* через четыре свои опорные точки. В отличие от кривых Безье, сплайны, составленные из них, обладают подобным свойством. Между тем, в каждой из опорных точек возможно локальное редактирование кривизны через *направляющие.*

Как не трудно заметить, направляющие есть в каждой из опорных точек, каждая из них состоит из двух сегментов (прямых), притом, что концы этих сегментов (как и сама опорная точка) всегда расположены на одной прямой. Исключением являются лишь начальная и конечная опорные точки кривой (они имеют только по одному направляющему сегменту).

Вся хитрость заключается в том, что на самом деле данная кривая фактически состоит из трех сшитых сегментов, каждый из которых представляет собой кривую Безье третьего порядка. В чем не трудно убедиться, взглянув на следующий рисунок.



В процессе построения подобного рода сплайнов пользователь задает лишь узловые точки, через которые будет проходить сам сплайн. При этом, наибольшую трудность представляет автоматически расставлять концы направляющих таким образом, чтобы смежные сегменты характеристического многоугольника лежали на одной прямой. Невыполнение данного условия приведет к потере гладкости в точках сшивки.

Однако, не смотря на достоинства, подобный способ решения задачи интерполяции имеет и свои недостатки. Одним из них является неспособность подобных сплайнов правдоподобно аппроксимировать, к примеру, окружность, а также ряд других математических функций, требующих высоких порядков кривой. Поэтому в паре с описанным методом в последнее время часто применяют большое обобщенное представление о кривых Безье.

В-Сплайны

Основу метода Безье составляет аппроксимация многочленами Бернштейна. Однако можно выбрать и другие наборы базисных функций, например В-сплайны, по отношению к которым базис Бернштейна является частным случаем. В сравнении с многочленами Бернштейна В-сплайны обладают следующими дополнительными преимуществами:

– Аппроксимация В-сплайнами обеспечивает более точное приближение ломаной (характеристического многоугольника), чем аппроксимация многочленами Бернштейна.
– При аппроксимации методом Безье на значения координат каждой точки кривой оказывают влияние все вершины ломаной Безье. Это затрудняет корректирование отдельных участков кривой. В то же время аппроксимация В-сплайнами обладает желательной локальностью. Этим способом можно производить локальные изменения кривой без полного пересчета.
– Единственным путем увеличения (уменьшения) порядка кривой Безье является увеличение (уменьшение) числа вершин и соответствующей ломаной Безье. В методе В-сплайнов эти два

параметра независимы и, следовательно, могут быть выбраны произвольно.

Кривая, построенная на основе В-сплайн-базиса, описывается следующим образом:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t)$$

где $\boldsymbol{P_i}$ - функция вершин аппроксимируемой ломаной (таких $\boldsymbol{n}$ + 1),а $\boldsymbol{N_{i,k}}$ ***(t)*** - весовая

функция ***i-й*** нормализованной В-сплайн базисной кривой порядка k, которая задается рекуррентными соотношениями:

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1, x_i < t < x_{i+1} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

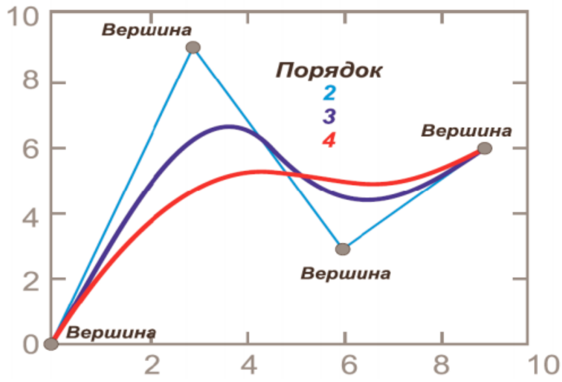
$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} - \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

Здесь ***xi*** - элементы узлового вектора, а t принадлежит [0, n - k + 2].

Узловой вектор представляет собой неубывающую последовательность. Этот вектор вводится для учета собственной кривизны В-сплайн кривой, и определяется количеством контрольных точек, порядком кривой, а так же наличием ***сложных (кратных) узлов.***

Порядок кривой отражается в узловом векторе в виде обязательных кратных узлов в начале и конце кривой. К примеру, узловой вектор для 5-ти контрольных точек кривой третьего порядка ***(k = 3)*** выглядел бы [0,0,0,1,2,3,3,3]. Кривая второго порядка для того же набора точек имела бы узловой вектор [0,0,1,2,3,4,4].

При увеличении порядка В-сплайн кривой увеличивается ее гладкость. При уменьшении порядка, кривая приближается к очертаниям характеристического многоугольник. При порядке кривой 2 кривая представляется в виде ломаной, в точности, повторяющей очертания характеристического многоугольника.



В-сплайн по отношению к кривым Безье обладают одним явным достоинством. В-сплайн базис позволяет производить локальную коррекцию кривизны, изменяя при этом лишь внешний вид одного из участков, а не всей кривой.