

Министерство образования и науки Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Горбунов А.К., Силаева Н.А., Крицкая А.Р.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Учебный практикум по курсам «Физика» и «Физика и естествознание»

для всех специальностей и направлений подготовки

Калуга, 2018

УДК 534.16
ББК 22.213
К82

Учебный практикум «Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны» издается в соответствии с учебным планом для подготовки специалистов и бакалавров по следующим специальностям и направлениям подготовки КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана: 15.03.01, 09.03.04, 10.03.01, 13.03.03, 09.03.01, 11.03.03, 15.03.06, 20.03.01, 27.03.05, 27.03.04, 10.05.03, 15.05.01, 23.05.01

Учебный практикум рассмотрен и одобрен:

Кафедрой «Физика» (ФН4-КФ) 24.01.2018 протокол № 6
Зав. кафедрой ФН4-КФ А.К. Горбунов
Методической комиссией ФНК 30.01.18 протокол № 1
Председатель методической комиссии ФНК К.Л. Анфилов
Методической комиссией КФ МГТУ 06.02.18 протокол № 1
Председатель методической комиссии О.Л. Перерва
Рецензент: д.т.н., профессор кафедры
ФН5-КФ МГТУ им. Н.Э.Баумана М.В. Астахов

Авторы: А.К. Горбунов, Н.А. Силаева, А.Р. Крицкая,
Аннотация.

Учебный практикум «Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны» составлен в соответствии с рабочей программой курса «Физика» и «Физика и естествознание» и предназначен для проведения занятий у студентов 2 курса всех специальностей и направлений подготовки КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Методические указания к каждому практическому занятию содержат краткую теоретическую часть, примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения. Наличие поясняющих определений, рисунков, ответов к задачам и используемой литературы, позволяет считать методические указания законченными и рекомендовать их как преподавателям для проведения семинарского занятия, так и студентам для более углубленного изучения электростатики, электродинамики и магнетизма.

© Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018 г.

© Коллектив авторов, 2018 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Практическое занятие №1 ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНЫХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ, ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ	3
1.1. Движение частиц в электрических и магнитных полях.	3
1.2. Электромагнитная индукция	12
1.3. Энергия магнитного поля.....	14
1.4. Задачи для самостоятельного решения.....	15
1.5. Литература	16
2. Практическое занятие №2 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.....	17
2.1. Волновое уравнение.....	17
2.2. Плоские электромагнитные волны.....	18
2.3. Энергия электромагнитных волн	21
2.4. Задачи для самостоятельного решения.....	28
2.5. Литература	29
3. Практическое занятие №3 ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА 30	30
3.1. 1. Понятия когерентности, интерференции.....	30
3.2. 3. Классические интерференционные опыты.....	32
3.3. Задачи для самостоятельного решения.....	41
3.4. Литература	42
4. Практическое занятие №4 ДИФРАКЦИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА.....	43
4.1. Основные понятия, законы, формулы понятие дифракции	43
4.2. Дифракционная решётка	49
4.3. Задачи для самостоятельного решения.....	56
4.4. Поляризация	58
4.5. Задачи для самостоятельного решения.....	67
4.6. Литература	68

1. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1 ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНЫХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ, ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.1. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ.

Теоретические сведения

Сила F , действующая на заряд Q , движущийся в магнитном поле с индукцией B (сила Лоренца), выражается формулой

$$\vec{F} = Q[\vec{v}, \vec{B}] \text{ или } F = |Q|vB \sin \alpha,$$

где α – угол, образованный вектором скорости v движущейся частицы и вектором \vec{B} индукции магнитного поля.

Пример 1. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 400B$, попал в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1,5 мТл$. Определить: 1) радиус R кривизны траектории; 2) частоту n вращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости электрона перпендикулярен линиям индукции.

РЕШЕНИЕ. 1). Радиус кривизны траектории электрона определим, исходя из следующих соображений: на движущийся в магнитном поле электрон действует сила Лоренца \vec{F} . (Действием силы тяжести можно пренебречь.) Вектор силы Лоренца перпендикулярен вектору скорости и, следовательно, по второму закону Ньютона, сообщает электрону нормальное ускорение a_n : $F = ma_n$. Подставив сюда выражения F и a_n , получим

$$|e|vB \sin \alpha = mv^2 / R, (1)$$

где e, v, m – заряд, скорость, масса электрона; B – индукция магнитного поля; R – радиус кривизны траектории; α – угол между направлениями векторов скорости v и индукции B (в нашем случае $\vec{v} \perp \vec{B}$ и $\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$).

Из формулы (1) найдем

$$R = \frac{mv}{|e|B} \quad (2)$$

Входящий в выражение (2) импульс mv выразим через кинетическую энергию T электрона:

$$mv = \sqrt{2mT} \quad (3)$$

Но кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U , определяется равенством $T = |e|U$. Подставив это выражение T в формулу (3), получим $mv = \sqrt{2m|e|U}$. Тогда выражение (2) для радиуса кривизны приобретает вид

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{|e|}} \quad (4)$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу длины (м):

$$\begin{aligned} \frac{[m]^{1/2} [U]^{1/2}}{[B][e]^{1/2}} &= \frac{(1\text{кг})^{1/2} \cdot (1\text{В})^{1/2}}{1\text{Тл} \cdot (1\text{Кл})^{1/2}} = \left[\frac{1\text{кг} \cdot 1\text{В}}{(1\text{Тл})^2 \cdot 1\text{Кл}} \right]^{1/2} = \left[\frac{1\text{кг} \cdot 1\text{В} \cdot (1\text{А})^2 \cdot (1\text{м})^2}{(1\text{Н})^2 \cdot 1\text{А} \cdot 1\text{с}} \right]^{1/2} = \\ &= \left[\frac{1\text{кг} \cdot 1\text{Дж} \cdot (1\text{м})^2}{1\text{Н} \cdot 1\text{с}^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{1\text{кг} \cdot 1\text{м}^3}{1\text{Н} \cdot 1\text{с}^2} \right]^{1/2} = 1\text{м} \end{aligned}$$

После вычисления по формуле (4) найдем

$$R = 45\text{мм}.$$

2). Для определения частоты вращения воспользуемся формулой, связывающей частоту со скоростью и радиусом кривизны траектории,

$$n = \frac{v}{2\pi R}$$

Подставив R из выражения (2) в эту формулу, получим

$$n = \frac{1}{2\pi} \frac{|e|}{m} B.$$

Произведя вычисления, найдем

$$n = 4,20 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 2. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,03 \text{ Тл}$ по окружности радиусом $r = 10 \text{ см}$. Определить скорость v электрона.

РЕШЕНИЕ. Движения электрона по окружности в однородном магнитном поле совершается под действием силы Лоренца. Поэтому можно написать

$$\frac{mv^2}{r} = |e|Bv, (1)$$

откуда найдем импульс электрона:

$$p = mv = |e|Br (2)$$

Релятивистский импульс выражается формулой

$$p = m_0 c \beta / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Выполнив преобразования, получим следующую формулу для определения скорости частицы:

$$\beta = \frac{p / (m_0 c)}{\sqrt{1 + (p / (m_0 c))^2}} (3)$$

В данном случае $p = |e|Br$. Следовательно,

$$\beta = \frac{p / (m_0 c)}{\sqrt{1 + (|e|Br / (m_0 c))^2}}. (4)$$

В числитель и знаменатель формулы (4) входит выражение $|e|Br / (m_0 c)$. Вычислим его отдельно:

$$|e|Br / (m_0 c) = 1,76.$$

Подставив найденное значение $|e|Br / (m_0 c)$ в формулу (4), получим

$$\beta = 0,871, \text{ или } v = c\beta = 2,61 \cdot 10^8 \text{ м / с}.$$

Электрон, обладающий такой скоростью, является релятивистским.

ПРИМЕР 3. Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 104 \text{ В}$ и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ($E = 10 \text{ кВ / м}$) и магнитное ($B = 0,1 \text{ Тл}$) поля.

Найти отношение заряда альфа-частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

РЕШЕНИЕ. Для того чтобы найти отношение заряда Q альфа-частицы к ее массе m , воспользуемся связью между работой сил электрического поля и изменением кинетической энергии частиц:

$$QU = mv^2 / 2,$$

откуда

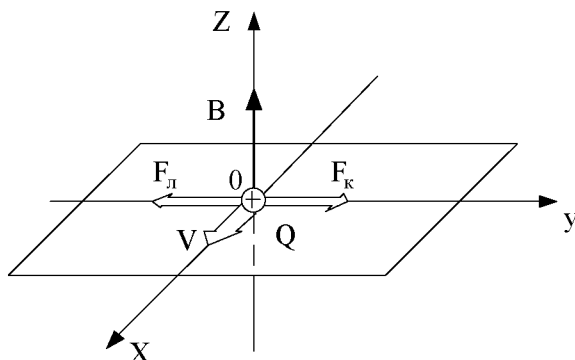
$$Q / m = v^2 / (2U) \quad (1)$$

Скорость v альфа-частицы найдем из следующих соображений. 0,

В скрещенных электрическом и магнитном полях на движущуюся заряженную частицу действуют две силы:

- а) сила Лоренца $F_L = Q[vB]$, направленная перпендикулярно скорости v и вектору магнитной индукции B ;
- б) кулоновская сила $F_K = QE$, сонаправленная с вектором напряженности E электростатического поля ($Q>0$).

Сделаем рисунок с изображением координатных осей и векторных величин.



Направим вектор магнитной индукции B вдоль оси Oz (рис 1), скорость v – в положительном направлении оси Ox , тогда F_L и F_K будут направлены так, как это указано на рисунке.

Альфа-частица не будет испытывать отклонения, если геометрическая сумма сил $F_{\text{л}} + F_{\text{к}}$ будет равна нулю. В проекции на ось Oy получим следующее равенство (при этом учтено, что вектор скорости v перпендикулярен вектору магнитной индукции B и $\sin(vB) = 1$):

$$QE - QvB = 0,$$

откуда

$$v = E / B.$$

Подставив это выражение скорости в формулу (1), получим

$$Q / m = E^2 / (2UB^2).$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу отношения заряда к массе (Кл/кг):

$$\frac{[E^2]}{[U][B^2]} = \frac{(1B / м)^2}{1B \cdot (1I)^2} = \frac{(1B \cdot A)^2}{1B \cdot (1H)^2} = \frac{1Дж \cdot Кл}{(1H \cdot с)^2} = \frac{1Кл \cdot м}{1H \cdot с^2} = 1Кл / кг.$$

Произведем вычисления:

$$\frac{Q}{m} = \frac{(10^4)^2}{2 \cdot 104(0,1)^2} Кл / кг = 4,81 \cdot 10^7 Кл / кг = 48,1 МКл / кг.$$

Пример 4. Электрон, обладающий кинетической энергией $T_1 = 10эВ$, влетел в однородное электрическое поле с напряженностью $E = 10В / м$ в направлении поля и прошел в нем расстояние $r = 50см$. Определить скорость электрона в конце указанного пути.

РЕШЕНИЕ. В соответствии с определением вектора напряженности электрического поля \vec{E} , на электрон, влетевший в направлении вектора напряженности поля, действует сила \vec{F} , направленная противоположно движению.

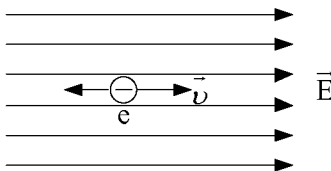


Рис. 2.

Следовательно, электрон тормозится под действием этой силы F (рис.2). на пути движения электрона электрическое поле совершает работу A .

$$A = eU, (1)$$

где e – заряд электрона; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$; U – разность потенциалов на пути движения.

Работа сил электростатического поля затрачена на изменение кинетической энергии электрона

$$eU = T_1 - T_2, (2)$$

где T_1 и T_2 – кинетические энергии электрона до и после прохождения замедляющего поля.

Кинетическая энергия электрона в конце пути

$$T_2 = \frac{m_e v_2^2}{2}, (3)$$

где m_e – масса электрона; v_2 – скорость электрона в конце пути.

Считая, что электрическое поле является однородным, используем связь между напряженностью E и разностью потенциалов U на отрезке пути, пройденном электроном

$$U = Er, (4)$$

Подставив (3) и (4) в выражение (2), получим

$$eEr = T_1 - \frac{m_e v_2^2}{2}.$$

Выразим скорость электрона v_2 в конце пути

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(T_1 - eEr)}{m_e}}.$$

Подставим числовые значения

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 0,5)}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = \sqrt{1,76 \cdot 10^{12}} = 1,33 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Пример 5. α – частица, прошедшая в электрическом поле ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi = 2,0 \text{ кВ}$, влетела в магнитное поле с индукцией $B = 2,0 \text{ Тл}$ под углом $\alpha = 30^\circ$ к силовым линиям поля. Определить радиус и шаг спирали, описываемой α – частицей.

РЕШЕНИЕ. Скорость частицы, влетевшей в магнитное поле под углом к линиям индукции, можно разложить на две составляющие: параллельную вектору магнитной индукции \vec{B} (\vec{v}_{\parallel}) и перпендикулярную ему (\vec{v}_{\perp}) (рис.3).

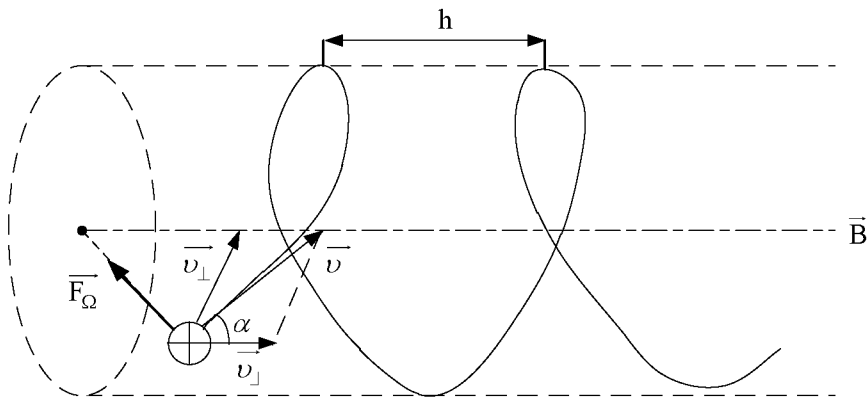


Рис. 3.

Со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору \vec{v}_{\perp} и изменяющая его направление. Сила Лоренца вызывает движение частицы по окружности в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной ин-

дукции \vec{B} . Составляющая \vec{v}_{\parallel} в магнитном поле не изменяется, так как в направлении, параллельном вектору магнитной индукции на α – частицу не действует никакая сила; в этом направлении частица движется по инерции. Результатом сложения двух движений (движения по окружности с постоянной по величине скоростью v_{\perp} и равномерного перемещения со скоростью \vec{v}_{\parallel} вдоль силовой линии поля) является движение частицы по спирали, ось которой параллельна вектору \vec{B} . (Если заряженная частица влетает, а магнитное поле в направлении, перпендикулярном линиям индукции, составляющая \vec{v}_{\parallel} отсутствует, и частица движется по окружности в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции \vec{B}).

Так как сила Лоренца \vec{F}_L перпендикулярна вектору \vec{v}_{\perp} , она является центростремительной силой F_y :

$$F_x = F_y.$$

Но

$$F_x = qvB \sin \alpha = qv_{\perp} B, \text{ а } F_y = \frac{mv_{\perp}^2}{R},$$

Где q – заряд частицы, v – ее скорость; B – индукция магнитного поля, в котором движется частица; α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} ; R – радиус спирали, описываемой частицей; m – масса частицы.

Поэтому

$$qv_{\perp} B = \frac{mv_{\perp}^2}{R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}, (1)$$

Шаг спирали

$$h = v_{\parallel} T = v T \cos \alpha ,$$

где T – период обращения частицы.

Но

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi v_{\perp} m}{qB v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB} .$$

Учитывая это, можно записать

$$h = v \frac{2\pi m}{B} \cos \alpha = \frac{2\pi m v}{qB} \cos \alpha , (2)$$

Ускоряясь в электрическом поле, частица приобрела скорость v . При этом приращение кинетической энергии ΔK частицы согласно закону сохранения и превращения энергии равно работе A , которую совершило поле при движении в нем частицы: $\Delta K = A$.

Приращение кинетической энергии частицы $\Delta K = K_2 - K_1$. С учетом того, что начальная скорость частицы в электрическом поле

$$v_1 = 0, \quad \Delta K = K_2 = \frac{mv^2}{2}$$

Работа перемещения частицы в электрическом поле

$$A = q \Delta \varphi ,$$

где $\Delta \varphi$ – ускоряющая разность потенциалов.

Приравняв выражения для $\square K$ и A , получим:

$$\frac{mv^2}{2} = q\square\varphi.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2q\square\varphi}{m}}, (3)$$

Подставив выражение (3) в формулы (1) и (2), получим:

$$R = \frac{m\sqrt{\frac{2q\square\varphi}{m}} \sin \alpha}{qB} = \sqrt{\frac{2m\square\varphi}{q}} \cdot \frac{\sin \alpha}{B},$$

$$h = \frac{2\pi m\sqrt{\frac{2q\square\varphi}{m}} \sin \alpha}{qB} \cos \alpha = \frac{2\pi}{B} \sqrt{\frac{2m\square\varphi}{q}} \cdot \cos \alpha.$$

1.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Пример 6. Плоскость проволочного витка площадью $S = 100\text{см}^2$ и сопротивлением $R = 5$ Ом, находящегося в однородном магнитном пол напряженностью $H = 10$ кА/м, перпендикулярна линиям магнитной индукции. При повороте витка в магнитном поле отсчет гальванометра, замкнутого на виток, составляет 12,6 мкКл. Определите угол поворота витка.

Дано: $S = 100\text{см}^2 = 10^{-2}\text{м}^2$; $R = 5$ Ом; $H = 10$ кА/м = 10^4 А/м;
 $dQ = 12,6$ мкКл = $12,6 \cdot 10^{-5}$ Кл .

Найти: α .

Решение.

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \varepsilon_i = \varepsilon, \varepsilon = IR = R \frac{dQ}{dt}, R \frac{dQ}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}, RdQ = -d\Phi, RdQ = -(\Phi_2 - \Phi_1),$$

$$\Phi_2 = \mu_0 HS \cos \alpha, \Phi_1 = \mu_0 HS, RdQ = \mu_0 HS(1 - \cos \alpha), \cos \alpha = 1 - \frac{RdQ}{\mu_0 HS}.$$

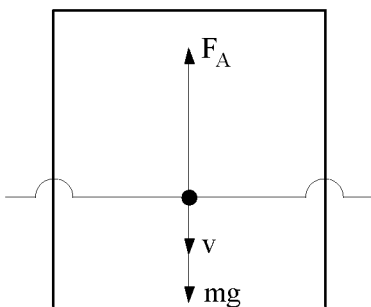
Ответ: $\alpha = 60^\circ$.

Пример 7. Две гладкие замкнутые металлические шины, расстояние между которыми равно 30 см, со скользящей перемычкой, которая может двигаться без трения, находятся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, перпендикулярном плоскости контура. Перемычка массой $m = 5$ г скользит вниз с постоянной скоростью $V = 0,5$ м/с. Определите сопротивление перемычки, пренебрегая самоиндукцией контура и сопротивлением остальной части контура.

Дано: $a = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$; $B = 0,1$ Тл; $m = 5 \text{ г} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$; $V = 0,5$ м/с.

Найти: R .

Решение.



$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, |\varepsilon_i| = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t} = \frac{BS}{t} = \frac{Bavt}{t} = Bav, \varepsilon = IR, R = \frac{\varepsilon}{I},$$

$$mg = F_A = IBa, I = \frac{mg}{Ba}, R = \frac{BavBa}{mg} = \frac{B^2 a^2 v}{mg}.$$

Ответ: $R = 9,2 \text{ МОм}$.

Пример 8. Соленоид диаметром $d = 3$ см имеет однослойную обмотку из плотно прилегающих друг к другу витков алюминиевого провода ($\rho = 26 \text{ нОм} \cdot \text{м}$) диаметром $d_1 = 0,3$ мм. По соленоиду течет ток $I_0 = 0,5$ А. Определите количество электричества Q , протекающее по соленоиду, если его концы закоротить.

Дано: $d = 3 \text{ см} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $\rho = 26 \text{ нОм} \cdot \text{м} = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$; $d_1 = 0,3 \text{ мм} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$; $I_0 = 0,5 \text{ А}$.

Найти: Q .

Решение.

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, Q = \int_0^{\infty} I dt = I_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{R}{L}t} dt = \frac{L}{R} I_0, L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l} \Big|_{\mu=1} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l},$$

$$l = Nd_1, S = \frac{\pi d^2}{4}, L = \frac{\mu_0 N^2 \pi d^2}{4Nd_1} = \frac{\mu_0 N \pi d^2}{4d_1}, R = \rho \frac{l_1}{S_1}, l = \pi dN, S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4},$$

$$R = \rho \frac{4dN}{d_1^2}, Q = \frac{\mu_0 N \pi d^2 d_1^2 I_0}{4d_1 \rho \cdot 4dN} = \frac{\mu_0 \pi d d_1}{16\rho} I_0.$$

Ответ: $Q = 42,7 \text{ мкКл}$.

1.3. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Пример 9. Торойд с воздушным сердечником содержит 20 витков на 1 см. Определите объемную плотность энергии в тороиде, если по его обмотке протекает ток 3 А.

Дано: $\frac{N}{l} = 20 \text{ см}^{-1} = 2 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$; $I = 3 \text{ А}$.

Найти: w .

Решение.

$$w = \frac{W}{V}, W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} \Big|_{\mu=1} = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 NI, B_l = \mu_0 NI,$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I, w = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{l^2 2\mu_0} = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{N}{l} \right)^2 I^2.$$

Ответ: $w = 22,6 \text{ Дж} / \text{м}^3$.

1.4. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Ион, несущий один элементарный заряд, движется в однородном магнитном поле с индукцией $B=0,015 \text{ Тл}$ по окружности радиусом $R=10 \text{ см}$. Определить импульс р иона.

Ответ: $2,4 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$.

Задача 2. Частица, несущая один элементарный заряд, влетела в однородное магнитное поле с индукцией $B=0,5 \text{ Тл}$. Определить момент импульса L , которым обладала частица в магнитном поле, если ее траектория представляла дугу окружности радиусом $R=0,2 \text{ см}$.

Ответ: $L = B|e|R^2 = 3,2 \cdot 10^{-25} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$.

Задача 3. Электрон движется в магнитном поле с индукцией $B=0,02 \text{ Тл}$ по окружности радиусом $R=1 \text{ см}$. Определить кинетическую энергию T электрона (в джоулях и электрон-вольтах).

Ответ: $T = B^2 r^2 l^2 / (2m) = 0,563 \text{ фДж} = 3,52 \text{ кэВ}$ (m — масса электрона).

Задача 4. Заряженная частица, прошедшая ускоряющую разность потенциалов $U = 2 \text{ кВ}$, движется в однородном магнитном поле с индукцией $B=15,1 \text{ мТл}$ по окружности радиусом $R=1 \text{ см}$. Определить отношение $|e|/m$ заряда частицы к ее массе и скорость v частицы.

Ответ: 175 ГКл/кг; 26,5 Мм/с.

Задача 5. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B=0,1\text{Тл}$ перпендикулярно линиям индукции. Определить силу F , действующую на частицу со стороны поля, если радиус R кривизны траектории равен $0,5\text{см}$.

Ответ: $F = B^2 e^2 r / m = 1,4\text{ пН}$.

Задача 6 Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле напряженностью $H=10\text{кА/м}$. Вычислить период T вращения электрона.

Ответ: 2,84 нс.

Задача 7. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B=9\text{мТл}$ по винтовой линии, радиус R которой равен 1см и шаг $h=7,8\text{ см}$. Определить период T обращения электрона и его скорость v .

Ответ: 3,97нс; 25 Мм/с.

Задача 8. В однородном магнитном поле с индукцией $B=2\text{Тл}$ движется протон. Траектория его движения представляет собой винтовую линию с радиусом $R=10\text{см}$ и шагом $h=60\text{см}$. Определить кинетическую энергию T протона.

Ответ: $T = (4\pi^2 R^2 + h^2) B^2 e^2 / (8\pi^2 m) = 580\text{ фДж}$, (m – масса протона).

1.5. Литература

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.Е. Иродов. – СПб.: Лань. 2016. – 416с.

2. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.В. Савельев. – СПб.: Лань. 2013. – 288.

2.1. Волновое уравнение

Положим, что некоторая физическая величина s распространяется со скоростью v в направлении X оси. В случае электромагнитных волн под s можно подразумевать напряженность электрического или магнитного поля. Нетрудно видеть, что общая форма записи этого процесса есть:

$$s = f\left(t - \frac{x}{v}\right). (1)$$

здесь t обозначает время, x координату рассматриваемой точки, f символ произвольной функции. Любая произвольная функция, если только она зависит от аргумента $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, выражает волнообразный процесс.

Если s есть напряженность электрического поля в электромагнитной волне, то последняя формула выражает распределение поля в пространстве. Вид функции зависит от начальных условий процесса. В частности, если f обозначает \sin или \cos , то (1) переходит в уравнение гармонической волны.

$$E = E_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right). (2)$$

Таким образом, формула (1) представляют собой общее выражение волны, распространяющейся в направлении оси X .

Функция s удовлетворяет простому дифференциальному уравнению. Чтобы найти его, продифференцируем формулу (1) два раза по координате. Это дает:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} f'',$$

где штрихами обозначено дифференцирование по всему аргументу. Вторая же частная производная по времени равна

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = f''.$$

Сравнивая эти выражения, мы видим, что искомое дифференциальное уравнение есть

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Оно называется волновым уравнением.

Мы предполагали, что волна распространяется в одном определенном направлении, которое мы считали совпадающим с направлением оси X (или ему противоположным). Если волна распространяется во всех направлениях, то волновое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right).$$

Таким образом, если какая-либо физическая величина распространяется волнообразно, то она удовлетворяет волновому уравнению. И наоборот, если удастся показать, что рассматриваемая величина подчиняется волновому уравнению, то можно утверждать, что возможно ее распространение в виде волны. При этом непосредственно получается и скорость распространения волны, которая равна квадратному корню

из коэффициента при $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$.

2.2. Плоские электромагнитные волны

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла. Будем считать, что среда представляет собой однородный диэлектрик. Тогда в уравнениях нужно положить $j_x = j_y = j_z = 0$.

Далее, мы ограничимся особенно простым случаем электромагнитного поля, когда E и H зависят от одной координаты (x) и от времени (одномерная задача). Это значит, что все пространство можно разбить на бесконечно тонкие плоские слои, внутри которых E и H имеют одно и то же значение во всех точках (плоская волна).

У всяких волн (механических, и электромагнитных) поверхность, во всех точках которой колебания имеют одинаковую фазу, называют фронтом волны.

В зависимости от того, какую форму имеет волновой фронт, мы говорим о плоских волнах, сферических волнах, цилиндрических волнах. Для одномерного случая уравнения Максвелла сильно упрощаются.

Так как все производные по y и z равны нулю, то из первого уравнения следует, что $\frac{\partial D_x}{\partial t} = 0$, а из второго уравнения $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$. Это значит, что составляющие полей D_x и B_x не зависят от времени.

Далее, из () и () получается, что $\frac{\partial D_x}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$ а значит, D_x и B_x , не зависят также и от координаты.

Поэтому

$$D_x = const, B_x = const.$$

Остающиеся уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Эти четыре уравнения можно сгруппировать в две независимые группы, одна из которых связывает y составляющие электрического и z составляющие магнитного поля:

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

другая z составляющие электрического поля и y составляющие магнитного поля:

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Это обозначает, что меняющееся во времени электрическое поле E_y вызывает появление только магнитного поля H_z , направленного вдоль оси Z , а переменное во времени магнитное поле H_z влечет появление электрического поля E_y , целиком направленного вдоль оси Y . Или, иначе, в электромагнитном поле электрическое и магнитное поля перпендикулярны друг к другу. Такой же вывод вытекает и из второй пары уравнений.

Найденный результат позволяет положить без нарушения общности, что все электрическое поле направлено вдоль одной из осей, например вдоль оси Y , а магнитное поле — вдоль оси Z . Поэтому в последних уравнениях можно положить $E_y = E$, $E_z = 0$, $H_z = H$, $H_y = 0$, и мы

находим окончательно уравнения Максвелла для одномерного случая в следующем простом виде

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}.$$

Исключим из уравнений Максвелла () магнитное поле H . Для этого умножим первое из уравнений на μ_0 и продифференцируем обе его части один раз по t . Получим:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}.$$

Второе уравнение продифференцируем по x . Это даст:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}.$$

Так как правые части этих уравнений одинаковы, то, следовательно, равны и левые части и поэтому

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}.$$

Такое же уравнение мы получили бы и для H , если бы из () исключили электрическое поле E .

Уравнение () есть волновое уравнение. Отсюда следует, что поля E и H могут распространяться в пространстве, т. е. могут существовать электромагнитные волны. Поэтому можно положить

$$E = \varphi\left(t \pm \frac{x}{v}\right), \quad H = \psi\left(t \pm \frac{x}{v}\right),$$

где v - скорость распространения электромагнитной волны. Далее,

согласно сказанному коэффициент перед $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ есть квадрат скорости распространения волн. Это дает

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}},$$

где c есть скорость распространения при $\varepsilon = \mu = 1$, т. е. в вакууме. Мы получили, таким образом, выражение для скорости распространения электромагнитных волн (закон Максвелла).

Электрическое и магнитное поля в электромагнитной волне взаимно связаны друг с другом. Поэтому между мгновенными значениями E и

H в любой точке существует определенное соотношение, которое также можно найти из уравнений Максвелла

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \Phi', \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{v} \Psi',$$

штрих обозначает дифференцирование по всему аргументу, то указанная подстановка даст

$$\epsilon \epsilon_0 \Phi' = -\frac{1}{v} \Psi'.$$

Переходя от производных к самим функциям, мы получаем

$$\epsilon \epsilon_0 \Phi = -\frac{1}{v} \Psi + C,$$

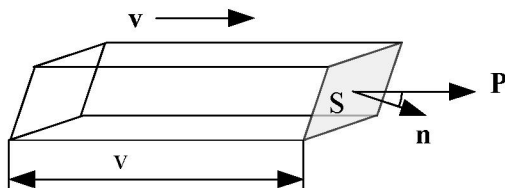
эта формула показывает, что в распространяющейся электромагнитной волне E пропорционально H .

2.3. Энергия электромагнитных волн

Мы знаем, что электромагнитные волны способны производить различные действия:

они накаливают лампочку, включённую в диполь, вызывают отклонение стрелки гальванометра, соединённого с детектором, и т.п. Это показывает, что электромагнитные волны переносят энергию.

Рассмотрим в поле электромагнитной волны произвольную площадку S и вычислим энергию ΔW , переносимую электромагнитной волной через эту площадку за малое время Δt . Для этого построим на площадке S , как на основании, параллелепипед, рёбра которого параллельны скорости распространения волны \vec{v} и имеют длину $v \Delta t$.



Объем этого параллелепипеда равен

$$\Delta \tau = S v \Delta t \cos \alpha,$$

где α - угол между нормалью \vec{n} к площадке S и скоростью \vec{v} . Так как за время Δt волна проходит расстояние $v \Delta t$, то очевидно, что

через нашу площадку пройдет энергия, заключенная внутри указанного параллелепипеда. Поэтому если u есть энергия единицы объема поля (объемная плотность энергии), то

$$\Delta W = u \Delta \tau = u S v \Delta t \cos \alpha .$$

Объемная плотность энергии электромагнитной волны складывается из энергии электрического поля $\frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2}$ и энергии магнитного

поля $\frac{\mu \mu_0 H^2}{2} ,$

$$u = \frac{1}{2} (\epsilon \epsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2) .$$

Напряженности E и H в электромагнитной волне связаны соотношением $\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H$. Поэтому можно также написать

$$u = \epsilon \epsilon_0 E^2 = \mu \mu_0 H^2 = \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E H .$$

Учитывая еще, что $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, имеем

$$\Delta W = E H S \cos \alpha \Delta t .$$

Следовательно, энергия, проходящая через площадку S в единицу времени $\frac{\partial W}{\partial t}$, равна

$$\frac{\partial W}{\partial t} = E H S \cos \alpha .$$

Полученный результат можно представить в более удобной форме. Введем вектор потока электромагнитной энергии, определяемый следующим образом

$$\vec{P} = [\vec{E} \vec{H}] .$$

Так как в электромагнитной волне \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны друг к другу, то численное значение этого вектора равно $P = E H$. Направление же вектора \vec{P} перпендикулярно \vec{E} и \vec{H} , т. е. совпадает с направлением скорости распространения волны v . Тогда () можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P_n S .$$

Здесь $P_n = P \cos \alpha$ есть проекция вектора \vec{P} на направление нормали \vec{n} к площадке S . Если площадка перпендикулярна к направлению \vec{P} (т.е. $\alpha = 0$) то $P_n = P$.

Таким образом, движение энергии в электромагнитном поле можно охарактеризовать при помощи вектора потока энергии \vec{P} .

Его направление даёт направление движения энергии. Численное значение вектор потока энергии равно энергии, проходящей за единицу времени через поверхность с площадью единица, перпендикулярную к направлению движения энергии.

Вектор потока электромагнитной энергии \vec{P} называют вектором Умова - Пойнтинга. Линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \vec{P} (линии вектора потока энергии) показывают пути, вдоль которых распространяется энергия электромагнитного поля.

В оптике линии, вдоль которых движется энергия света, называют; лучами. Приведенный вывод выражения () не является строгим, тем не менее, выражение (), полученное путем нестрогих рассуждений, оказывается справедливым для всех случаев.

Задача 1.

Пространство между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму круглых дисков, заполнено однородной слабо проводящей средой с удельной проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ϵ . Расстояние между обкладками d . Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность магнитного поля между обкладками на расстоянии r от их оси, если на конденсатор подано переменное напряжение $U_m \cos \omega t$.

Решение.

Считаем явления в конденсаторе квазистатическими.

Рассмотрим конденсатор в цилиндрической системе координат.

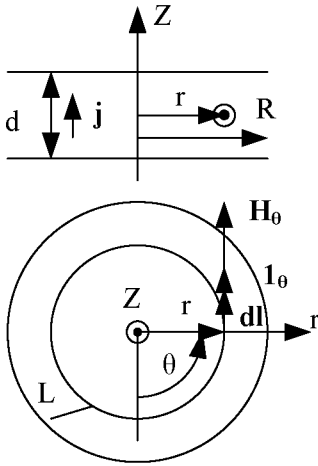


Рис.

Ось Z направлена по оси конденсатора.

Каждая плоскость Zr является плоскостью симметрии системы токов, поэтому в каждой точке плоскости вектор напряжённости магнитного поля H нормален к ней, $H = H_{\ominus}$.

По закону полного тока определим H_{\ominus} .

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) dS \quad (1)$$

где L - контур радиуса r , в каждой точке которого $d\vec{l}$ совпадают с ортом $\vec{1}_{\ominus}$, а из осевой симметрии системы следует, что H_{\ominus} константа.

S - поверхность, ограниченная контуром L в каждой точке которой вектора \vec{j} и $\frac{d\vec{D}}{dt}$ совпадают с нормалью с ней.

$$2\pi r H_{\ominus} = \sigma E \pi r^2 + \epsilon \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi r^2 \quad (2)$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_m \cos \omega t}{d},$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{U_m \omega \sin \omega t}{d}.$$

Подставляя эти выражения E и $\frac{dE}{dt}$ в уравнение, (2) находим:

$$H_{\ominus} = \frac{rU_m}{2d} (\sigma \cos \omega t + \varepsilon \varepsilon_0 \omega \sin \omega t) = H_m \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\text{где } H_m = \frac{rU_m}{2d} \sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0 \omega}$$

Задача 2.

Переменный синусоидальный ток частоты $\omega = 1000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ течет по обмотке прямого соленоида, радиус сечения которого $R = 6 \text{ см}$. Найти отношение амплитудных значений электрической и магнитной энергий внутри соленоида.

Решение

Считаем что процессы, происходящие в соленоиде квазистатические. Рассмотрим соленоид в цилиндрической системе координат, ось Z совпадает с осью соленоида.

Считаем соленоид длинным и соответственно магнитное поле внутри соленоида однородное.

Напряжённость поля изменяется по гармоническому закону

$$H = H_m \sin \omega t.$$

Из первого уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

где $-L$ круговой контур радиуса r , а S площадь охваченная этим контуром. После вычислений имеем

$$2\pi r E_{\ominus} = \mu \mu_0 H_m \omega \pi r^2 \cos \omega t,$$

$$E_{\ominus} = \frac{\mu \mu_0 H_m \omega r \cos \omega t}{2}.$$

Используя выражение для объёмной плотности энергии электрического и магнитного полей, определим отношение максимальных значений энергии полей соленоида, интегрируя их по объёму соленоида.

$$\frac{W_{\text{э}}}{W_{\text{м}}} = \frac{\int_V w_{\text{э}} dV}{\int_V w_{\text{м}} dV},$$

$$W_M = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V = \frac{\mu\mu_0 H_m^2}{2} \pi R^2,$$

$$W_\varphi = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \int_V E_{(r)}^2 r d\Theta dr dZ = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\mu\mu_0 H_m \omega}{2} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^1 dZ \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\mu\mu_0 H_m \omega}{2} \right)^2 2\pi \frac{R^4}{4}$$

$$\varepsilon=1, \mu=1,$$

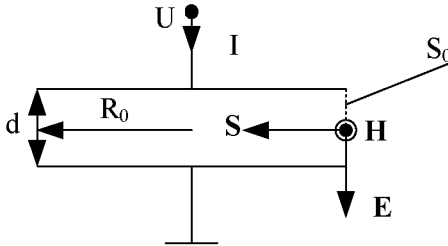
$$\frac{W_\varphi}{W_M} = \frac{\mu_0 H_m^2 \omega^2 \varepsilon_0 4\pi R^4}{32\mu_0 H_m^2 \pi R^2} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 R^2}{8}.$$

Задача 3. Плоский конденсатор с круглыми параллельными пластинами медленно заряжают. Показать, что поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность конденсатора равен приращению энергии конденсатора за единицу времени. Рассеянием поля на краях при расчете пренебречь.

Решение.

Определим поток вектора Пойнтинга, выразив его значение на боковой поверхности цилиндра радиуса R коаксиального с обкладками конденсатора.

Рассмотрим его в цилиндрической системе координат, ось Z совпадает с осью обкладок.



По второму уравнению Максвелла

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{dq}{dt},$$

для контура L радиуса R_0 имеем

$$2\pi R H_\Theta = \frac{dq}{dt},$$

напряжённость однородного поля между пластинами плоского конденсатора

$$E_Z d = \frac{q}{C}.$$

Энергия конденсатора

$$W_C = \frac{q^2}{2C}.$$

Выразим приращение энергии конденсатора и сравним её с потоком вектора Пойнтинга через боковую поверхность, ограниченную краями обкладок конденсатора

$$\frac{dW_C}{dt} = \frac{dq}{dt} \frac{q}{C} = 2\pi R H_{\Theta} E_Z d.$$

$$\oint_{S_0} \vec{S} d\vec{S}_0 = 2\pi R d E_Z H_{\Theta}.$$

Как видно эти выражения совпадают.

Задача 4. В направлении максимального излучения на расстоянии от элементарного диполя (волновая зона) $r_1 = 10\text{ м}$ амплитуда напряженности электрического поля $E_m = 6\text{ В/м}$. Найти среднее значение плотности потока энергии на расстоянии $r_2 = 20\text{ м}$ от диполя в направлении, составляющем угол $\Theta = 30^\circ$ с его осью.

Решение.

Амплитуда электромагнитной волны излучаемой диполем в волновой зоне

$$E_m \propto \frac{1}{r} \sin \Theta.$$

где r - расстояние до диполя,

Θ - угол между радиус-вектором \vec{r} и осью диполя.

Записывая выражение для амплитудных значений напряжённости электромагнитной волны для двух заданных точек, находим искомую амплитуду во второй точке.

$$\begin{cases} E_{1m} = k \frac{1}{r_1} \sin \theta_1 \\ E_{2m} = k \frac{1}{r_2} \sin \theta_2 \end{cases}, E_{2m} = E_{1m} \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \frac{r_1}{r_2}, \sin \theta_1 = 1.$$

Максимальная плотность потока энергии диполя характеризуется величиной вектора Пойнтинга и равна

$$S_{2m} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{2m}^2.$$

Среднее значение плотности потока за период колебаний

$$S_{2cp} = \frac{S_{2m}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{2m}^2 \sin^2 \theta_2 \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

2.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В вакууме в направлении оси x установилась стоячая электромагнитная волна, электрическая составляющая которой $\vec{E} = \vec{E}_m \cos kx \cos \omega t$. Найти магнитную составляющую волны $B_{(x,t)}$.

Изобразить примерную картину распределения электрической и магнитной составляющих волны \vec{E}_m и \vec{B}_m в моменты $t=0$ и $t = \frac{T}{4}$,

где T - период колебаний.

Ответ: $\vec{B} = \vec{B}_m \sin kx \sin \omega t$, $B_m = \frac{E_m}{c}$.

2. Плоский воздушный конденсатор, обкладки которого имеют форму дисков радиуса $R=6,0\text{см}$, подключен к переменному синусоидальному напряжению частоты $\omega = 1000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Найти отношение амплитудных значений магнитной и электрической энергий внутри конденсатора.

Ответ: $\frac{W_m}{W_e} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 R^2}{8} = 5,0 \cdot 10^{15}$.

3. По прямому проводнику круглого сечения течет постоянный ток I . Найти поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность участка данного проводника, имеющего сопротивление R .

Ответ: $\Phi_S = I^2 R$.

4. Энергия от источника постоянного напряжения U передается к потребителю по длинному прямому коаксиальному кабелю с пренебре-

жимо малым активным сопротивлением. Потребляемый ток равен I . Найти поток энергии через поперечное сечение кабеля. Внешняя проводящая оболочка кабеля предполагается тонкостенной.

Ответ: $\Phi = IU$.

5. Средняя мощность, излучаемая элементарным диполем, равна P_0 . Найти среднюю объемную плотность энергии электромагнитного поля в вакууме в волновой зоне на луче, перпендикулярном к оси диполя, на расстоянии r от него.

Ответ: $\langle \omega \rangle = \frac{3P_0}{8\pi r^2 c}$.

6. Постоянный по модулю электрический диполь с моментом p вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к оси диполя и проходящей через его середину. Найти мощность излучения такого диполя.

Ответ: $P = \frac{p^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^3}$.

7. Плоский конденсатор образован двумя дисками, между которыми находится однородная слабо проводящая среда. Конденсатор зарядили и отключили от источника напряжения. Пренебрегая краевыми эффектами, показать, что магнитное поле внутри конденсатора отсутствует.

8. Длинный прямой соленоид имеет n витков на единицу длины. По нему течет переменный ток $I = I_m \sin \omega t$. Найти плотность тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида. Радиус сечения соленоида R .

Ответ: $j_{cm(r \leq R)} = \frac{\ddot{B}r}{2}$, $j_{cm(r \geq R)} = \frac{\ddot{B}R^2}{2r}$, $\ddot{B} = \mu_0 n I = I_m \sin \omega t$.

2.5. Литература

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.Е. Иродов. – СПб.: Лань. 2016. – 416с.

2. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.В. Савельев. – СПб.: Лань. 2013. – 288.

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3 ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

3.1. 1. ПОНЯТИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ, ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

Пусть в некоторой точке пространства складываются две волны одинаковой частоты и поляриности

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \quad E_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

Результирующее колебание

$$E = E_1 + E_2 = A \cos(\omega t + \delta)$$

Где $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ - разность фаз

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta$$

Если разность фаз двух возбуждаемых монохроматическими волнами колебаний остается постоянной во времени, то волны называют когерентными.

В случае некогерентных волн δ непрерывно изменяется, поэтому $\langle \cos \delta \rangle = 0$ и

$$\langle A^2 \rangle = \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle$$

и т.к. $I \sim A^2$, то $I = I_1 + I_2$ -

интенсивности некогерентных складываются.

В случае когерентных волн $\cos \delta$ во времени не изменяется

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Для точек, где $\cos \delta > 0$ $I > I_1 + I_2$;

Для точек, где $\cos \delta < 0$ $I < I_1 + I_2$;

Таким образом, при наложении когерентных световых волн происходит интерференция, т.е. перераспределение светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других – минимумы интенсивности. Особенно отчетливо интерференция проявляется когда $I_1 = I_2$. Тогда в максимумах $I = 4I_1$; в минимумах $I = 0$.

Естественные источники света некогерентны. При наложении света от двух, например, электрических ламп, никогда не наблюдается интерференции. Причина заключается в механизме испускания света атомами источника. Продолжительность излучения света атомом $\tau \sim 10^{-8}$ с. За это время возбужденный атом растрчивает избыточную энергию и возвращается в невозбужденное (нормальное) состояние. Через некоторый промежуток времени атом может вновь возбуждаться и опять излучить порцию света.

Такое прерывистое излучение в виде отдельных кратковременных импульсов цугов волн характерно для любого источника света.

При спонтанном (самопроизвольном) излучении атомы излучают независимо друг от друга, т.е:

Начальные фазы цугов волн не связаны между собой, даже для одного и того же атома;

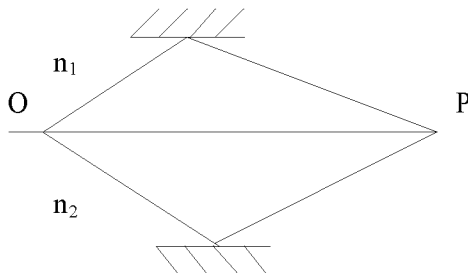
Значения ω для цугов могут несколько различаться;

Каждый цуг плоскополяризован; однако плоскости поляризации различных цугов ориентированы по-разному.

2. УСЛОВИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ МАКСИМУМОВ И МИНИМУМОВ

Когерентные световые волны можно получить, разделив (с помощью отражений или преломлений) волну, излучаемую одним источником, на две части.

Если заставить эти две волны пройти разные оптические пути, а потом наложить их друг на друга, наблюдается интерференция.



Пусть в т. О волна $E = A \cos \omega t$ Разделяется на две. Первая волна образует в точке Р колебание $E_1 = A \cos \omega(t - \frac{S_1}{v_1})$; а вторая – $E_2 = A \cos \omega(t - \frac{S_2}{v_2})$

Где S_1 - путь первой волны в среде с показателем преломления n_1

S_2 - путь второй волны в среде с показателем преломления n_2 .

В точке Р разность фаз колебаний:

$$\delta = \omega \left(\frac{S_2}{v_2} - \frac{S_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{C} (n_2 S_2 - n_1 S_1) = \frac{\omega}{C} \Delta,$$

где $\Delta = n_2 S_2 - n_1 S_1$ - оптическая разность хода.

Заменив $\frac{\omega}{C} = \frac{2\pi\nu}{C} = \frac{2\pi}{\lambda_0},$

получим $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta$

Если $\delta = \pm 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$), то волны усиливают друг друга, т.е.,

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = \pm 2\pi m; \Delta = \pm 2m \frac{\lambda_0}{2} - \text{условие максимума (оптическая раз-}$$

ность хода равна четному числу полуволен).

Если $\delta = \pm (2m + 1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$), то волны ослабляют друг друга, т.е.

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = \pm (2m + 1)\pi; \Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} - \text{условие минимума (оптиче-}$$

ская разность хода равна нечетному числу полуволен)

3.2. 3. КЛАССИЧЕСКИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ОПЫТЫ.

1. ОПЫТ ЮНГА.

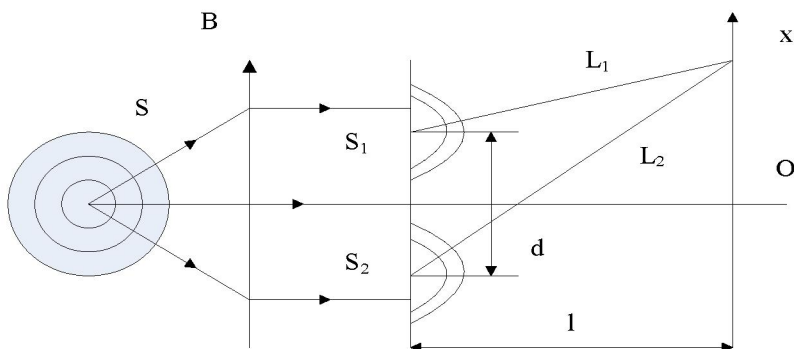


Рис. 1

Источник света S создает в отверстиях экрана вторичные источники S_1 и S_2 (рис.1). Всякое изменение фаз волн, излучаемых основным источником S , сопровождается точно такими же изменениями фаз волн, излучаемых вторичными источниками S_1 и S_2 . Таким образом, у волн, излучаемых источниками S_1 и S_2 , разность фаз остается неизменной, т.е. источники когерентны.

$$X_{\max} = \pm 2m \frac{l}{d} \frac{\lambda}{2}; \quad (\lambda = \frac{\lambda_0}{n})$$

$$X_{\min} = \pm (2m + 1) \frac{l}{d} \frac{\lambda}{2} - \text{на таких расстояниях от оси } SO \text{ распо-}$$

жены максимумы и минимумы интенсивности.

2. ЗЕРКАЛА ФРЕНЕЛЯ

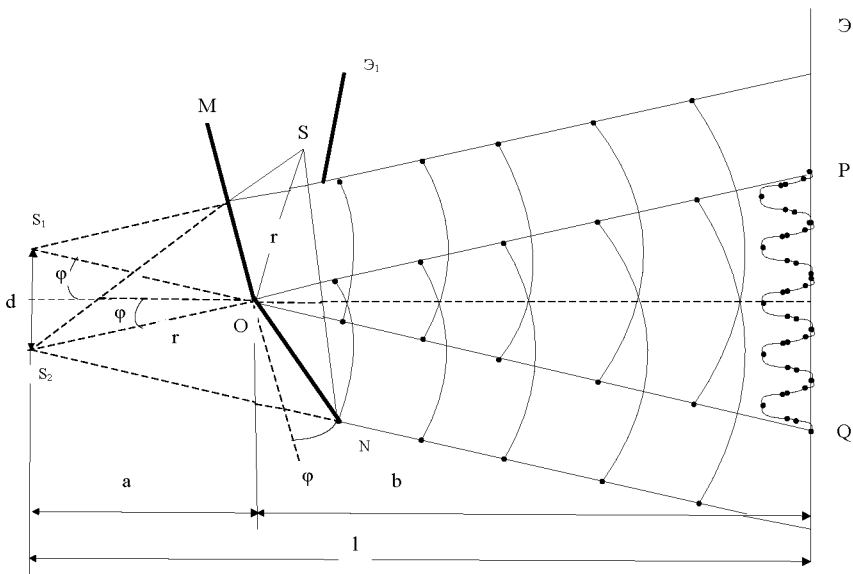


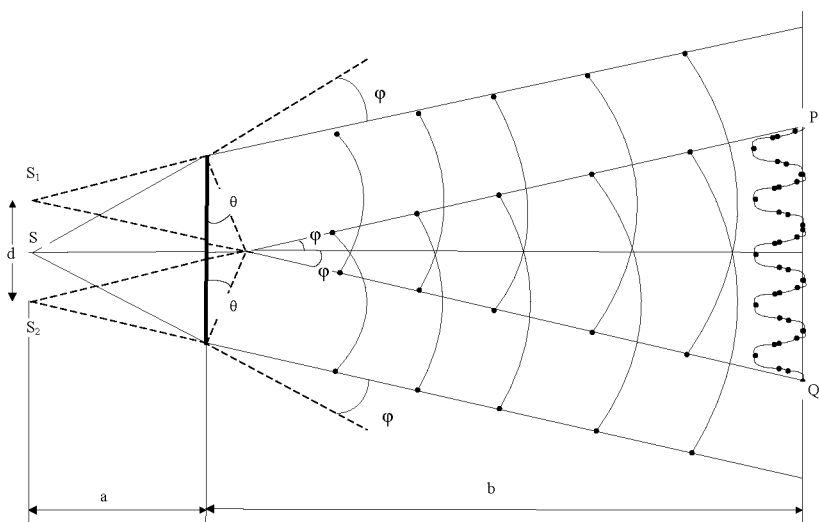
Рис. 2

Свет от узкой ярко освещенной щели S падает на два плоских зеркала OM и ON , наклоненных друг к другу под углом, близким к 180° (рис.2). Щель S устанавливается параллельно линии O пересечения плоскостей зеркал. При отражении падающий пучок разделяется на два когерентных пучка, как бы исходящих от мнимых источников S_1 и S_2 . Прямой свет от источника S загоразивается непрозрачным экраном \mathcal{E}_1 . В области PQ , где когерентные пучки перекрываются, наблюдаются параллельные интерференционные полосы.

3. БИПРИЗМА ФРЕНЕЛЯ

Изготовленные из одного куска стекла две призмы с малым преломляющим углом θ имеют общую грань (рис.3). Источником света служит ярко освещенная щель S , установленная параллельно ребру бипризмы. После преломления в бипризме падающий пучок света разделяется на два когерентных пучка с вершинами в мнимых изображениях S_1 и S_2 щели S . В области PQ экрана лучи перекрываются и дают систему параллельных интерференционных полос

4. БИЛИНЗА БИЙЕ



4. БИЛИНЗА БИЙЕ

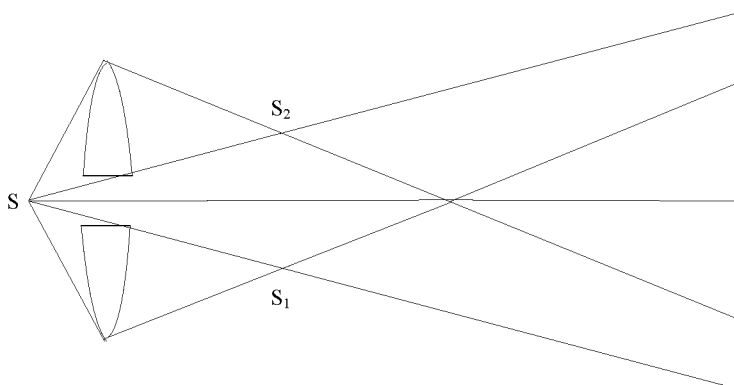


Рис. 4

Собирающая линза разделяется пополам (рис.4), и обе половинки её раздвигаются. Образовавшаяся система называется билинзой. На билинзу направляется свет от щели S , параллельной плоскости разреза. В S_1 и S_2 получаются действительные изображения щели S . Пучки

света, проходящие через S_1 и S_2 перекрываются. В местах перекрытия наблюдается интерференция.

5. ЗЕРКАЛО ЛЛОЙДА

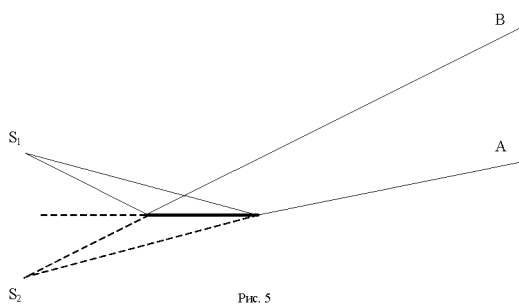


Рис. 5

Свет, исходящий из узкой ярко освещенной щели S_1 , отражается от полированной плоской поверхности черного стекла (рис.5). На участке AB экрана, где перекрываются прямой и отраженный свет, наблюдаются полосы интерференции.

4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В ПЛЕНКАХ И ПЛАСТИНКАХ

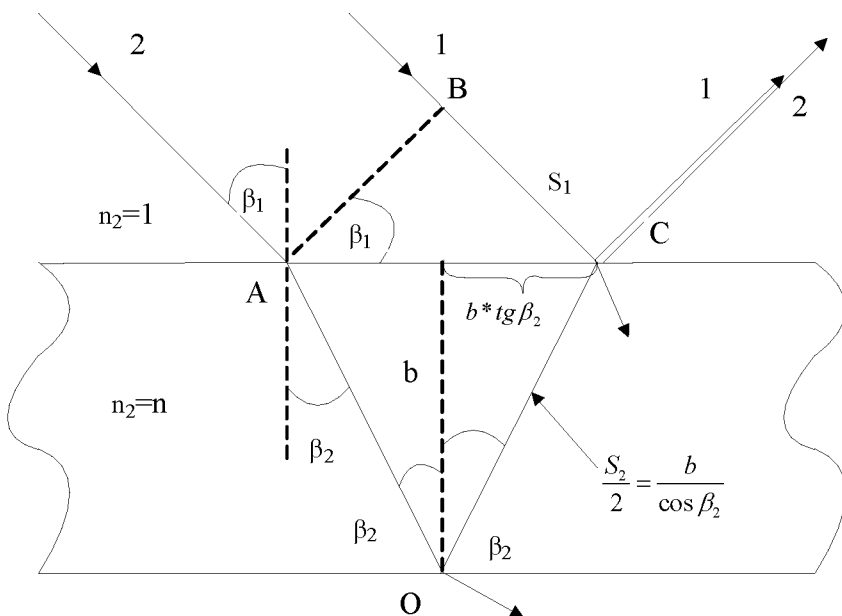


Рис. 6

При освещении тонкой пленки происходит наложение волн от одного и того же источника, отразившихся от передней и задней поверхностей пленки. При этом может возникнуть интерференция. Если свет белый, то интерференционные полосы окрашены. Они легко наблюдаются на стенках мыльных пузырей, на тонких пленках масла или нефти, плавающих по поверхности воды, на пленках, возникающих на поверхности металлов при закалке (цвета побежалости) и т.д.

Разность хода, приобретаемая лучами 1 и 2 до того как они сойдутся в точке С (рис.6) равна

$$\Delta = nS_2 - n_1 = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \beta} - \frac{\lambda_0}{2},$$

где $\frac{\lambda_0}{2}$ - добавочная разность хода, возникающая при отражении от верхней границы раздела (от оптически более плотной среды)

Далее различают два случая:

- Параллельная пластина – интерференционные полосы равного угла наклона.

- Пластины переменной толщины – интерференционные полосы равной толщины.

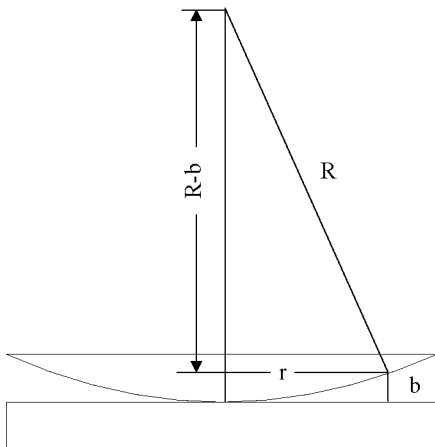


Рис. 7

Классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона. Они наблюдаются при отражении света от соприкасающихся друг с другом плоскопараллельной толстой стеклянной пластинки и плоско-выпуклой линзы с большим радиусом кривизны. Роль тонкой пленки, от поверхности которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой. При нормальном падении света полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей.

Радиусы светлых и темных колец Ньютона

$$r = \sqrt{R\lambda_0(m-1)/2} \quad (m=1,2,3...),$$

где m - номер кольца

R - радиус кривизны линзы

Во всех рассмотренных случаях интерференции необходимо, чтобы оптическая разность хода была бы не больше длины когерентности

$$\Delta \leq L_{\text{ког}} = C\tau_{\text{ког}},$$

$$\text{Где } \tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

а $\Delta\omega$ - полоса частот, занимаемая цугом волн в отличие от идеальной монохроматической волны. Отсюда следует, что чем ближе волна

к монохроматической (лазер), тем больше время и длина когерентности.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1 (Зеркало Лойда)

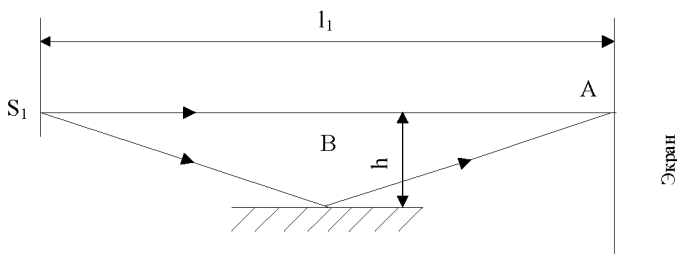


Рис. 8

Луч S_1A

перпендикулярен экрану, луч S_1BA отражен от зеркала, параллельно лучу S_1A (рис8)

$$S_1A = 1 \text{ м}$$

$$h = 2 \text{ мм}$$

Определить номер интерференционной полосы

Решение

$$\Delta = l_2 - l_1 + \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

$$l_2 = 2\left(\sqrt{\frac{l_1^2}{4} + h^2}\right) = l_1\left(\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l_1}\right)^2}\right) = l_1\left[1 + 2\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\right], \text{ т.к. } 2\frac{h}{l_1} \ll 1$$

Подставив l_2 в (1), получим:

$$\Delta = \frac{2h^2}{l_1} + \frac{\lambda}{2}$$

Разделим (3) на $\frac{\lambda}{2}$:

$$m = \frac{\Delta}{\lambda/2} = \frac{4h^2}{l_1\lambda} + 1$$

После вычислений найдём $m = 33$.

Т.к. на разности хода укладывается нечетное число длин полуволен, то в точке A наблюдается минимум интенсивности.

Пример 2 (Просветление оптики)

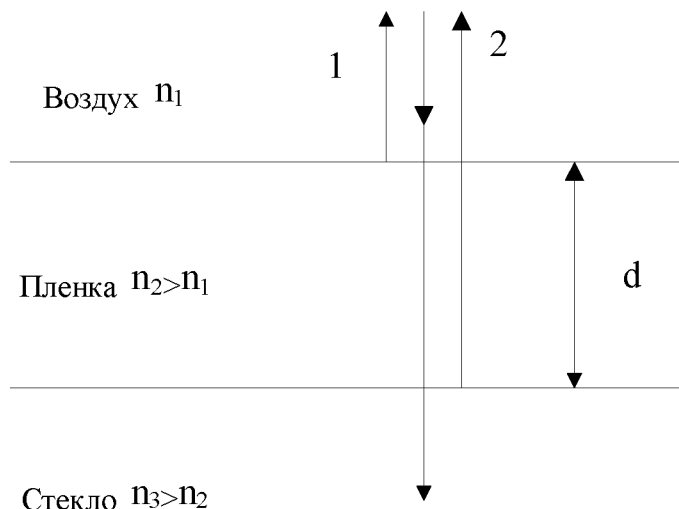


Рис. 8

Н

а стеклянную линзу ($n_3 = 1.6$), покрытую очень тонкой пленкой ($n_2 = 1.4$) падает нормально пучок света (рис.9). Определите толщину d пленки, при которой отраженный свет $\lambda = 0.55$ мкм максимально ослабляется.

Решение. В силу закона сохранения энергии можно утверждать, что количество прошедшего через пленку света увеличится как раз на величину погашенного за счет интерференции отраженного света. Поэтому задача известна как просветление оптики.

Интерferируют лучи отраженные от верхней (1) и нижней (2) поверхностей пленки.

Т.к. $n_1 < n_2 < n_3$, то при отражении от обеих поверхностей пленки происходит потеря полуволен. В результате оптическая разность хода будет такой, как если бы потеря полуволен не было, т.е.

$$\Delta = 2n_2d$$

Условие минимума

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

Положив $m = 0$, получим

$$2n_2 d = \frac{\lambda_0}{2}; \quad d = \frac{\lambda_0}{4n_2} = \frac{\lambda}{4} = 0,1 \text{ мкм}$$

Таким образом, просветляющая пленка должна быть четвертьволновой толщины. $\lambda = 0,55$ мкм – длина волны зеленого света, к которому чувствительность глаза максимальна. Поэтому просветление оптики осуществляется для зеленой составляющей белого света, а просветленная оптика в отраженном свете кажется окрашенной в фиолетовый свет (зеленая составляющая погашена за счет интерференции)

3.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача №1

Расстояние d между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить длину волны λ , испускаемого источником монохроматического света, если ширина полос интерференции на экране равна 1,5 мм.

Ответ: $\lambda = 500$ нм

Задача №2

В зеркале Ллойда (рис.8) длина волны источника $\lambda = 0,6$ мкм; $SA = r = 2$ м; $h = 0,55$ мм; $SB = BA$. Что будет наблюдаться в т. A экрана – максимум или минимум интенсивности?

Ответ: минимум; $\Delta = \frac{3}{2} \lambda$

Задача №3

На мыльную пленку ($n = 1,3$), находящуюся в воздухе, падает нормально пучек лучей белого света. При какой наименьшей толщине d пленки отраженный свет с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм оказывается максимально усиленным в результате интерференции.

Ответ: $d = 0,1 \text{ мм}$

Задача №4

Расстояние $\Delta r_{2,1}$ между вторым и первым темными кольцами Ньютона в отраженном свете равно 1 мм. Определить расстояние $r_{10,9}$ между десятым и девятым кольцами.

Ответ: $r_{10,9} = 0,39 \text{ мм}$

3.4. Литература

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.Е. Иродов. – СПб.: Лань. 2016. – 416с.
2. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.В. Савельев. – СПб.: Лань. 2013. – 288.

4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4 ДИФРАКЦИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ, ФОРМУЛЫ ПОНЯТИЕ ДИФРАКЦИИ

Определение дифракции как огибание светом препятствий не менее популяризационно, чем представление поведения электрона в атоме движением по стационарным орбитам.

На самом деле точной границы между явлениями интерференции и дифракции провести нельзя. Оба явления заключаются в перераспределении светового потока в результате суперпозиции волн, идущих от различных участков первоначальной волны.

В тех случаях, когда первоначальная волна делится на небольшое число дискретных (точечных) участков и рассматривается суперпозиция испускаемых по принципу Гюйгенса волн, исходящих от каждого из участков в отдельности, явление принято называть интерференцией.

В тех случаях, когда отдельный конечный участок плоской волны не считается точечным, и рассматривается сложение волн, исходящих от разных точек одного и того же участка, перераспределение интенсивности принято называть дифракцией.

ПРИНЦИП ФРЕНЕЛЯ

Принцип Френеля дополняет принцип Гюйгенса. С его помощью можно найти не только новый волновой фронт, но и рассчитать амплитуду волны. Основная идея Френеля состоит в предположении когерентности вторичных источников и их интерференции при наложении.

ЗОНЫ ФРЕНЕЛЯ

Чтобы понять суть принципа и метода, разработанного Френелем, рассмотрим прямолинейное распространение света от точечного источника монохроматического света S в точку наблюдателя P (Рис 1)

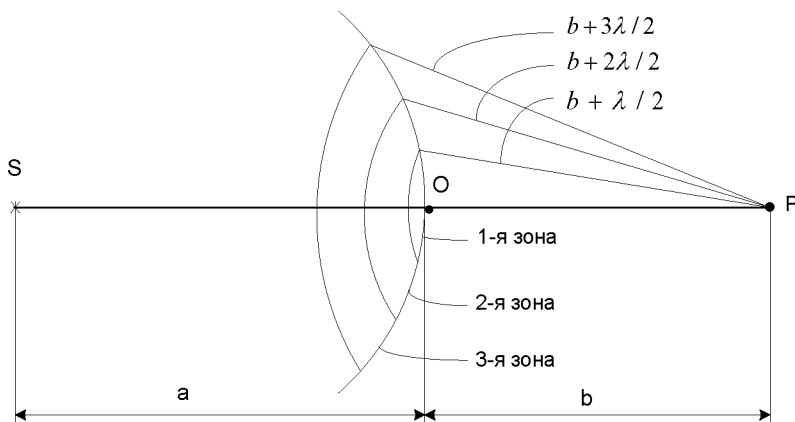


Рис 1

Волновая поверхность разбивается на зоны (зоны Френеля) так, что расстояние от краёв каждой зоны до точки наблюдения (D) отличаются на $\frac{\lambda}{2}$. Колебания, возбуждённые в точке D двумя соседними зонами, противоположны по фазе, т.к. разность хода от сходственных точек этих зон до точки D равна $\frac{\lambda}{2}$. Следовательно, амплитуда колебаний в точке P равна:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots ; \quad (1)$$

где A_i - амплитуда колебаний, возбуждённых в т. D вторичными источниками, находящимися в пределах одной i -ой зоны.

A_i является функцией площади зоны S_i и угол α_i между нормалью к поверхности зоны и направлением на точку D . Можно показать, что площади зоны равны, однако угол α_i возрастает с i , поэтому $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_i > \dots$. Неравенство усугубляется с увеличением расстояния до точки D с увеличением i .

Зоны Френеля малы (радиус первой зоны $r_1 = 0,5 \text{ мм}$), их общее число очень велико, поэтому для небольших изменений i зависимость A_i от i является линейной, т.е.

$$A_i = \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{2} \quad (2)$$

Перепишем (1) в виде

$$A = \frac{1}{2} A_1 + \left(\frac{1}{2} A_1 - A_2 + \frac{1}{2} A_3 \right) + \left(\frac{1}{2} A_3 - A_4 + \frac{1}{2} A_5 \right) + \dots = \frac{1}{2} A_1 \quad (3)$$

Таким образом, результирующее действие в точке D полностью открытого фронта волны равно действию половины одной только центральной зоны Френеля; все вторичные источники, кроме центрального, гасят друг друга, что как раз и равносильно прямолинейному распространению света от источника S в точку D .

Радиус k -ой зоны Френеля для сферической волны:

$$r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} k \lambda \quad (4)$$

Радиус k -ой зоны Френеля для плоской волны :

$$r_k = \sqrt{b k \lambda} \quad (5)$$

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ ОТ ПРОСТЕЙШИХ ПРЕГРАД. КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ

Построим на открытой части BC фронты волны зоны Френеля (Рис 2). Амплитуда результирующего колебания в точке D

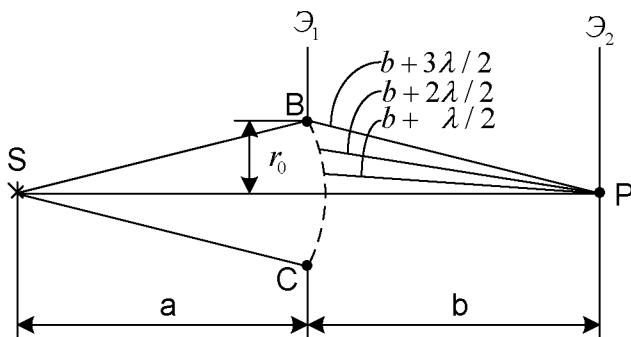


Рис 2

$$A = A_1 - A_2 + A_3 + \dots + (-1)^{m-1} A_m, \text{ т.е.}$$

$A = \frac{A_1 + A_m}{2}$, если m — нечётное, и в точке D наблюдается максимум интенсивности

$A = \frac{A_1 - A_m}{2}$, если m — чётное, и в точке D наблюдается минимум интенсивности.

Максимум и минимум тем сильнее отличаются между собой, чем ближе A_m к A_1 .

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \text{ — число открытых зон Френеля.}$$

Интереснее следующий факт. Если в отверстии укладывается только одна зона Френеля, амплитуда колебаний в точке P $A = A_1$, т.е. вдвое больше, чем без экрана. Соответственно интенсивность в 4 раза больше.

Ещё большую амплитуду можно получить с помощью зонной пластинки — стеклянной пластинки, вставленной в отверстие, на поверхности которой нанесено непрозрачное покрытие в виде концентрических слоёв, перекрывающих все четыре зоны Френеля.

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ. ДИСК

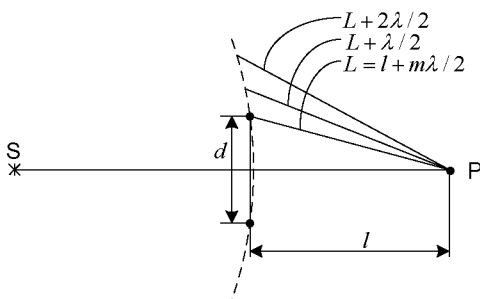


Рис 3

Интерференционная картина на экране имеет вид концентрических тёмных и светлых колец с центром в точке P , где всегда находится интерференционный максимум (пятно Пуассона).

$A = \frac{A_{m+1}}{2}$, если считать, что m первых зон Френеля закрыто диском (Рис. 3).

Пятно Пуассона—один из немногих случаев, когда явление названо не в честь учёного открывателя, а в честь его оппонента. Пуассон был членом конкурсной комиссии, куда Френель представил свою работу. Вывод Френеля о световом пятне в центре тени от диска показался ему «нелепым». Тут же был произведён опыт, доказавший справедливость волновой теории света Френеля (члены комиссии были сторонниками корпускулярной теории света).

По мере увеличения d яркость пятна Пуассона уменьшается, а следующее за ним кольцо расширяется, образуя область тени за диском (геометрическая оптика).

Безразмерный параметр $\frac{d^2}{\lambda l}$ позволяет определить характер дифракции.

Если $\frac{d^2}{\lambda l} \gg 1$ -геометрическая оптика.

Если $\frac{d^2}{\lambda l} \approx 1$ -дифракция Френеля.

Если $\frac{d^2}{\lambda l} \ll 1$ — 1-дифракция Фраунгофера (дифракция в параллельных лучах; $l \rightarrow \infty$).

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА НА ЩЕЛИ

Если бы дифракции не было и соблюдался закон прямолинейного распространения света, то на экране (Рис. 4) получилось бы изображение источника света в точке O (экран помещён в фокальной плоскости линзы). Вследствие дифракции на экране наблюдается интерференционная картина—система максимумов—размытых изображений источника, разделённых тёмными промежутками интерференционных минимумов.

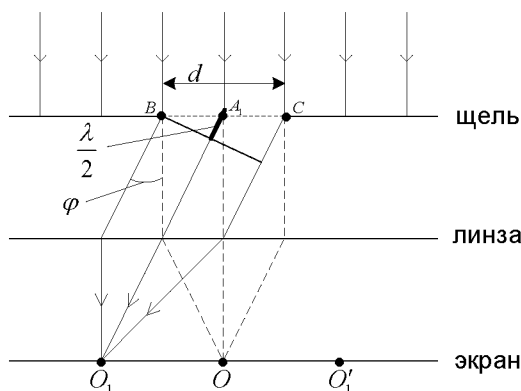


Рис 4

Определим, что наблюдается в точке O_1 — максимум или минимум?

Разобьём щель BC на зоны Френеля. Ширина зоны $BA_1 = \frac{\lambda}{2 \sin \varphi}$, так

что Δ от краёв B и A_1 зоны равна $\frac{\lambda}{2}$. При интерференции света от каждой пары соседних зон амплитуда результирующих колебаний равна нулю (т.к. фазы противоположны).

Результат интерференции определяется тем, сколько зон Френеля укладывается в щели.

Если число зон чётное, т.е. $d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}$ ($m = 1, 2, 3 \dots$) (6),

то наблюдается дифракционный минимум.

Если число зон нечётное, т.е. $d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$ ($m = 1, 2, 3 \dots$) (7),

то наблюдается дифракционный максимум

В направлении $\varphi = 0$ наблюдается самый интенсивный центральный максимум первого порядка: колебания, вызываемые в точке O всеми участками щели, совершаются в одной фазе.

Уже для максимума первого порядка интенсивность значительно слабее, т.к. в него попадает только треть светового пучка

($d \sin \varphi = \pm 3 \frac{\lambda}{2}$). В максимум второго порядка ($d \sin \varphi = \pm 5 \frac{\lambda}{2}$) попа-

дает только пятая часть пучка и т.д.

Шириной дифракционного максимума (на экране) называется расстояние между двумя ограничивающими его минимумами.

$$\text{Угловая ширина центрального максимума } \Delta\varphi = 2 \arcsin \frac{\lambda}{d} \quad (8)$$

4.2. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЁТКА

Дифракционной решёткой называется совокупность щелей в непрозрачном экране. Число таких щелей на 1 мм может быть очень велико (стандартные значения—300, 600, 1200, 1800 штрихов на 1 мм).

Для простоты рассмотрим две щели.

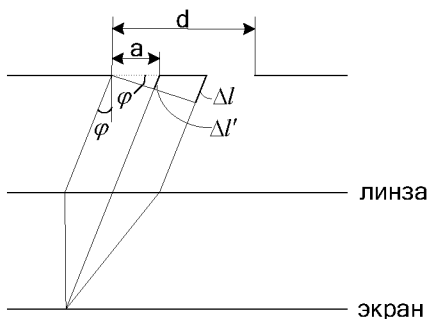


Рис 5

Дифракционная картина является результатом двух процессов: дифракции света от каждой отдельной щели и интерференции света от обеих щелей.

Дифракция от одной щели. Условие первого минимума ($m=1$)

$$\Delta l' = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \lambda; \quad \Delta l' = a \sin \varphi; \quad \sin \varphi_{1 \min}^D = \frac{\lambda}{a} \quad (9)$$

Интерференция от двух щелей. Условие первого минимума ($m=0$)

$$\Delta l = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}; \quad \Delta l = d \sin \varphi; \quad \sin \varphi_{1 \min}^I = \frac{\lambda}{2d} \quad (10)$$

Т.к. $a < d$ то $\varphi_{1 \min}^D > \varphi_{1 \min}^I$

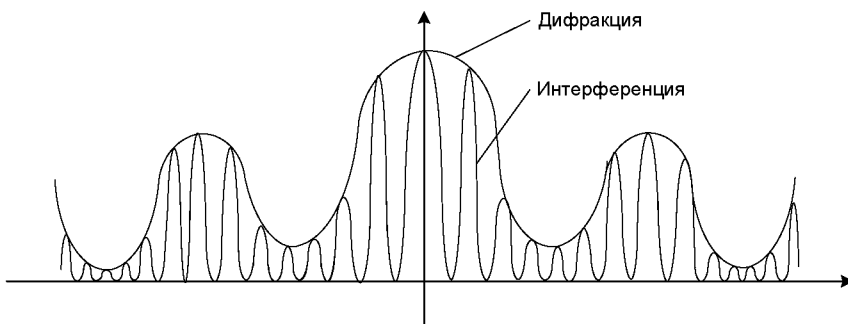


Рис 6

Таким образом, между максимумами и минимумами дифракции будут наблюдаться добавочные максимумы и минимумы, возникающие

вследствие интерференции, т.е. картина интерференции модулирована картиной дифракции (Рис 6).

Интенсивность света под произвольным углом φ

$$I = I_0 \frac{\sin^2(\pi a \sin \varphi / \lambda)}{(\pi a \sin \varphi / \lambda)^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi N d \sin \varphi / \lambda)}{\sin^2(\pi d \sin \varphi / \lambda)} \quad (11)$$

Где I_0 - интенсивность для угла $\varphi = 0$ и одной щели

N - число щелей

Условие главных максимумов дифракционной решетки $d \sin \varphi = m\lambda$, ($m = 0, 1, 2, \dots$)

Преимущество дифракционной решетки состоит в том, что чередование максимумов и минимумов происходит чаще и более резко чем у одной щели. С увеличением числа щелей (на 1 мм) максимумы получаются более яркими и узкими, а минимумы—более широкими и практически совершенно тёмные, что важно при использовании дифракционной решётки в дифракционном спектроскопе.

Если на дифракционную решётку падает белый свет, то максимумы (кроме центрального) приобретают радужную окраску, причём фиолетовым будет внутренний край (ближний к центральному максимуму) и красным—наружный. Поскольку явление разделения света по длинам волн называется дисперсией, то дифракционная решётка является дисперсионным прибором.

Угловой дисперсией называется величина $D = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi} \quad (12)$

Где k - порядковый номер дифракционного максимума

$\partial \varphi$ - угловое расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\partial \lambda$.

Разрешающая способность решётки определяется соотношением

$$R = \frac{\lambda}{\partial \lambda} = kN \quad (13)$$

Где $\partial \lambda$ - минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются раздельно.

Согласно критерию Рэлея два близких максимума воспринимаются глазом раздельно, если максимум для одной длины волны совпадает с минимумом для другой (не ближе).

ДИФРАКЦИЯ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ

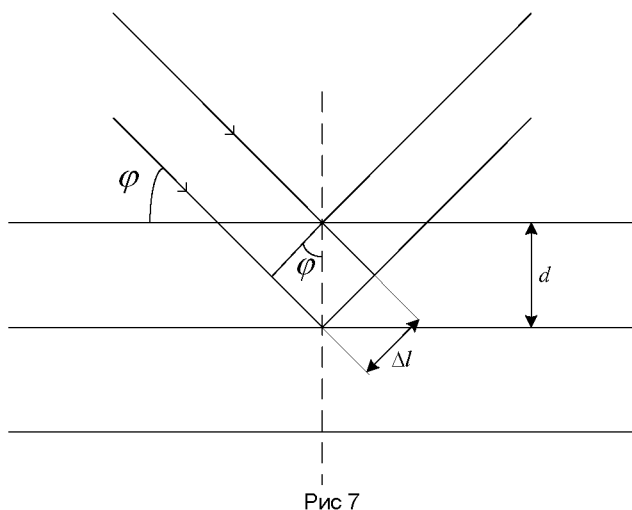


Рис 7

Благодаря тому, что длина волны рентгеновского излучения значительно меньше световой, дифракция обнаруживается на гораздо более частой решётке. Такой решёткой служат кристаллы, в которых роль щелей выполняют промежутки между атомами.

Лучи отражаются от параллельных плоскостей. Если разность хода составляет чётное число полуволн, то образуется максимум.

$$\Delta = 2\Delta l = 2d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

$$d \sin \varphi = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (14) \quad \text{формула Вульфа – Брэгга}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1

На диафрагму с круглым отверстием радиусом $r = 1$ мм падает нормально параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 0.05$ мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определить максимальное расстояние b_{\max} от центра отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины будет наблюдаться тёмное пятно.

Решение.

Расстояние, при котором будет видно тёмное пятно, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Если число зон чётное, то в центре дифракционной картины будет тёмное пятно.

Число зон Френеля, помещающихся в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее чётное число зон равно двум. Следовательно, максимальное расстояние, при котором ещё будет наблюдаться тёмное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должны поместиться две зоны Френеля.

Расстояние от точки наблюдения O на экране до края отверстия на $2(\lambda/2)$ больше, чем расстояние $R_0 = b_{\max}$

По теореме Пифагора получим

$$r^2 = (b_{\max} + 2\frac{\lambda}{2})^2 - b_{\max}^2 = 2\lambda b_{\max} + \lambda^2$$

Учтя, что $\lambda \ll b_{\max}$ и что членом, содержащим λ^2 , можно пренебречь, последнее равенство перепишем в виде

$$r^2 = 2\lambda b_{\max}, \text{ откуда } b_{\max} = \frac{r^2}{2\lambda}$$

Произведя вычисления по последней формуле, найдём $b_{\max} = 1$ м.

Пример 2

На щель шириной $a=0,1$ мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda=0,6$ мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L=1$ м.

Решение.

Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности.

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ , определяемыми условием $a \sin \varphi = \pm k \lambda$ (1),

где k — порядок минимума; в нашем случае равен единице.

Расстояние между двумя минимумами на экране определим по формуле: $l = 2L \tan \varphi$.

Заметив, что при малых углах $\tan \varphi \approx \sin \varphi$, перепишем эту формулу в виде

$$l = 2L \sin \varphi \quad (2)$$

Выразим $\sin \varphi$ из формулы (1) и в подставим его в равенство (2):

$$l = 2Lk \frac{\lambda}{a} \quad (3)$$

Произведя вычисления по формуле (3), получим $l = 1,2$ см.

Пример 3.

На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на $L = 1$ м. Расстояние l между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см.

Определить:

- 1) постоянную d дифракционной решетки;
- 2) число n штрихов на 1 см;
- 3) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка;

4) максимальный угол φ_{\max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

Решение

1. Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий k -му дифракционному максимуму, связаны соотношением $d \sin \varphi = k \lambda$ (1)

где k — порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

В данном случае $k=1$, (ввиду того, что $l/2 \ll L$), $\operatorname{tg} \varphi = (l/2)L$. С учетом последних трех равенств соотношение

(1) примет вид $d \frac{l}{2L} = \lambda$,

откуда постоянная решетки $d = 2L\lambda / l$

Подставляя данные, получим $d = 4,95$ мкм.

2. Число штрихов на 1 см найдем из формулы $n = 1/d$

После подстановки числовых значений получим $n = 2,02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$.

3. Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение k_{\max} исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90° . Из формулы (1) запишем

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda} \sin \varphi \quad (2)$$

Подставляя сюда значения величин, получим $k_{\max} = 9,9$.

Число k обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значении $\sin \varphi$ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно, $k_{\max} = 9$

Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по оди-

наковому числу максимумов, равному k_{\max} , т. е. всего $2k_{\max}$. Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов

$$N = 2k_{\max} + 1$$

Подставляя значение k_{\max} найдем

$$N = 2 \cdot 9 + 1 = 19.$$

4. Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим из соотношения (2) синус этого угла:

$$\sin \varphi_{\max} = k_{\max} \frac{\lambda}{d}. \text{ Отсюда } \varphi_{\max} = \arcsin(k_{\max} \frac{\lambda}{d}),$$

Подставив сюда значения величин λ , d , k_{\max} и произведя вычисления, получим

$$\varphi_{\max} = k_{\max} \frac{\lambda}{d} = 65,4^\circ$$

4.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

№1 Вычислить радиус ρ_5 пятой зоны Френеля для плоского волнового фронта ($\lambda = 0,5$ мкм), если построение делается для точки наблюдения, находящейся на расстоянии $b = 1$ м от фронта волны.

Ответ : $\rho_5 = 1,58$ мм

№2 Плоская световая волна падает нормально на диафрагму с круглым отверстием. В результате дифракции в некоторых точках оси отверстия, находящихся на расстояниях b_i от его центра, наблюдаются максимумы интенсивности.

1. Получить вид функции $b = f(r, \lambda, n)$, где r — радиус отверстия; λ — длина волны; n — число зон Френеля, открываемых для данной точки оси отверстием.

2. Сделать то же самое для точек оси отверстия, в которых наблюдаются минимумы интенсивности.

Ответ : 1) $b = r^2 / n\lambda$, где $\lambda = 1, 3, 5 \dots$

2) $b = r^2 / n\lambda$, где $\lambda = 2, 4, 6 \dots$

№3 Плоская световая волна ($\lambda = 0,7$ мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием радиусом $r = 1,4$ мм. Определить расстояния b_1, b_2, b_3 от диафрагмы до трех наиболее удаленных от нее точек, в которых наблюдаются минимумы интенсивности.

Ответ : $b_1 = 1,4l$; $b_2 = 0,7l$; $b_3 = 0,47l$

№4 На щель шириной $a = 0,05$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Определить угол φ между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

Ответ: $\varphi = 2^\circ 45'$

№5 Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонен на угол $\varphi_1 = 14^\circ$. На какой угол φ_2 отклонен максимум третьего порядка?

Ответ : $\varphi = 21^\circ 17'$

№6 На дифракционную решетку, содержащую $n = 500$ штрихов на 1 мм, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определить ширину b спектра первого порядка на экране, если расстояние L линзы до экрана равно 3 м. Границы видимости спектра $\lambda_{кр} = 780$ нм, $\lambda_{ф} = 400$ нм.

Ответ : $b = 66$ см.

№7 Какой наименьшей разрешающей силой R должна обладать дифракционная решётка, чтобы с её помощью можно было разрешить две спектральные линии калия ($\lambda_1 = 578 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 580 \text{ нм}$)? Какое наименьшее число N штрихов должна иметь эта решётка, чтобы разрешение было возможно в спектре второго порядка?

Ответ : $R = 290$, $N = \frac{R}{k}$

№8 Угловая дисперсия D_φ дифракционной решётки для излучения некоторой длины волны (при малых углах дифракции) составляет 5 мин. Определить разрешающую силу R этой решётки для излучения той же длины волны, если длина l решётки равна 2 см.

Ответ : $R = D_\varphi l = 2,91 \cdot 10^4$

4.4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

При отражении света от границы раздела двух диэлектриков имеют место соотношения (формулы Френеля):

$$I'_\perp = I_\perp \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}, \quad (1)$$

$$I'_\parallel = I_\parallel \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}, \quad (2)$$

где I_\perp, I'_\perp — интенсивности падающего и отраженного света, у которого колебания светового вектора (т. е. вектора напряженности E электрического поля световой волны) перпендикулярны плоскости падения; $I_\parallel, I'_\parallel$ — интенсивности падающего и отраженного света, у которого колебания светового вектора параллельны плоскости падения, i — угол падения, r — угол преломления.

Закон Брюстера: луч, отраженный от границы раздела двух диэлектриков, полностью поляризован, если угол падения i_B удовлетворяет условию.

$$\operatorname{tg} i_B = n, \quad (3)$$

где n — относительный показатель преломления.

Закон Малюса: интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор, пропорциональна квадрату косинуса угла ϕ между их главными плоскостями, т. е.

$$I = I_0 \cos^2 \phi, \quad (4)$$

где I_0 — интенсивность поляризованного света, падающего на анализатор.

Степень поляризации света

$$P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}), \quad (5)$$

где I_{\max} и I_{\min} — максимальная и минимальная интенсивности света, соответствующие двум взаимно перпендикулярным направлениям световых колебаний в луче.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Задачи, в которых рассматривается поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков, решаются с помощью формул Френеля (1), (2). Их частным случаем является закон Брюстера (см. задачу № 25-1). Обратите внимание: в формуле (3), выражающей закон Брюстера, n — относительный показатель преломления двух диэлектриков, на границе которых происходит отражение света.

Для расчетов величин $I'_{\perp}, I'_{\parallel}$ по формулам (1), (2) необходимо знать углы падения i и преломления r . При падении света на границу двух сред со стороны оптически более плотной среды может случиться, что вычисления дадут для угла преломления $\sin r = (\sin i) / n > 1$. Так как угла r , удовлетворяющего этому неравенству, не существует, такой результат должен означать, что свет не будет преломляться на данной границе, т. е. возникнет полное внутреннее отражение. В этом слу-

час $I'_{\perp} = I_{\perp}, I'_{\parallel} = I_{\parallel}$ и полная интенсивность отраженного луча
 ча $I' = I'_{\perp} + I'_{\parallel}$ равна интенсивности падающего луча $I = I_{\perp} + I_{\parallel}$.

2. Главной плоскостью (главным направлением) поляризатора называют плоскость, в которой происходят колебания световых векторов в плоскополяризованном луче, выходящем из прибора. Этими же терминами характеризуют анализатор, который представляет собой тот же прибор, что и поляризатор, но служит для анализа поляризованного света. Следовательно, величина Φ в формуле (4) является одновременно углом между плоскостями, в которых колеблются световые векторы двух плоскополяризованных лучей: падающего на анализатор и выходящего из него.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Пример 1. Вывести закон Брюстера с помощью формул Френеля (1), (2).

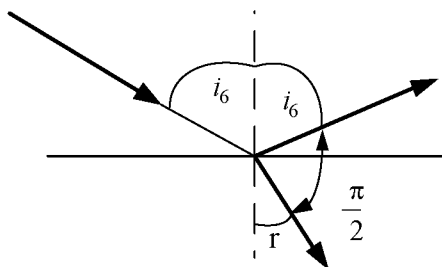


Рис.1

Решение. Предварительно заметим, что при падении света под углом Брюстера i_B , определяемым по (3), отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. Действительно, с учетом закона преломления света формулу (3) можно переписать так:

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = \frac{\sin i_B}{\sin r},$$

где r — угол преломления. Следовательно, $\cos i_B = \sin r$. Поскольку углы i_B, r — острые, то отсюда следует

$$i_B + r = \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

что означает взаимную перпендикулярность отраженного и преломленного лучей (рис. 1). Очевидно, обратив приведенные рассуждения, можно из соотношения (1) получить равенство (3), выражающее закон Брюстера.

Теперь обратимся к формулам Френеля. Из (2) при условии (1) сразу получаем $I'_{\parallel} = 0$. Это значит, что при угле падения i_B , определяемом по (3), в отраженном луче останутся световые колебания лишь одного направления (перпендикулярные плоскости падения), т. е. отраженный луч будет полностью поляризован. Но в этом и состоит закон Брюстера, являющийся, таким образом, следствием формул Френеля.

Пример 2. Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла ($n = 1,6$). Определить коэффициент Отражения.

Решение. Коэффициент отражения ρ показывает, какую долю от интенсивности падающего света I составляет интенсивность отраженного света I' т. е.

$$\rho = \frac{I'}{I}, \quad (1)$$

Свет, отраженный от диэлектрика под углом Брюстера, полностью поляризован. При этом в отраженном луче присутствуют лишь световые колебания, перпендикулярные плоскости падения (см. задачу № 1). Поэтому на основании формулы (1) и соотношения (1) задачи № 1 получим

$$I' = I'_{\perp} = I_{\perp} \sin^2(i_B - r), \quad (2)$$

Так как в естественном свете величина I_{\perp} составляет половину от полной интенсивности I , то из (1), (2) следует

$$\rho = \left(\frac{I_{\perp}}{I} \right) \sin^2(i_B - r) = 0,5 \sin^2(i_B - r), \quad (3)$$

Углы i_B, r можно найти, зная показатель преломления стекла n . По закону Брюстера, $\operatorname{tg} i_B = n = 1,6$. Отсюда $i_B = 58^\circ$, $r = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$; $i_B - r = 26^\circ$. Теперь из (3) получим

$$\rho = 0,5 \sin^2 26^\circ = 0,10, \text{ или } 10\%.$$

Пример 3. Определить с помощью формул Френеля коэффициент отражения естественного света при нормальном падении на поверхность стекла ($n = 1,50$).

Решение. Коэффициент отражения (см. задачу № 2) равен

$$\rho = \frac{I'}{I}.$$

Во всех случаях, кроме рассмотренного в предыдущей задаче, отраженный свет содержит колебания как параллельные, так и перпендикулярные плоскости падения. Следовательно, пользуясь обозначениями формул (1), (2), можно записать

$$\rho = (I'_{\perp} + I'_{\parallel})(I_{\perp} + I_{\parallel}), \quad (1)$$

Так как на стекло падает естественный свет, то

$$I_{\perp} = I_{\parallel}, \quad (2)$$

Для отраженного света, вообще говоря, как это следует из формул (1),

(2), $I'_{\perp} \neq I'_{\parallel}$. Однако при нормальном падении света, когда плоскость падения становится неопределенной (так как эта плоскость проходит через падающий луч и нормаль к поверхности), отраженный луч остается естественным. Поэтому, выбрав произвольно плоскость падения, запишем

$$I'_{\perp} = I'_{\parallel}, \quad (3)$$

Из формул (1) — (3) получаем

$$\rho = \frac{I'_{\perp}}{I_{\perp}} = \frac{I'_{\parallel}}{I_{\parallel}}, \quad (4)$$

Любое из двух отношений (4) выражается соответствующей формулой Френеля. Однако при нормальном падении света, когда $i = 0$, $r = 0$, формулы (1), (2) становятся неопределенными. Чтобы раскрыть неопределенность, будем считать углы i, r весьма малыми, но отличными от нуля (так, будто свет падает почти нормально). Тогда с помощью любой из формул (1), (2) можно найти ρ . Например, заменив в (1) синусы малых углов углами, имеем

$$\rho = \frac{I'_{\perp}}{I_{\perp}} = \left(\frac{i - r}{i + r} \right)^2.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на r и учитывая, что для

$$\frac{i}{r} = n$$

малых углов r , получим ответ:

$$\rho = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 = 4,0 \cdot 10^{-2}, \text{ или } 4,0\%.$$

Пример 4. Параксиальный пучок света проходит через центрированную оптическую систему, состоящую из $N=5$ стеклянных линз ($n = 1,50$). Используя результат, полученный в задаче № 3, определить, какая доля света пройдет через прибор. Поглощением света в стекле пренебречь.

Решение. Из условия следует, что свет, проходя оптическую систему, падает нормально или почти нормально на поверхности всех линз. Проходя каждую линзу, свет дважды отражается: один раз — на передней (по ходу света) поверхности линзы, второй раз — на задней поверхности. Очевидно, доля света, прошедшего всю систему, зависит от коэффициентов отражения света на обеих поверхностях каждой линзы.

Отражение света от передней поверхности линзы (имеется в виду, что каждая линза окружена воздухом) соответствует случаю, рассмотренному в задаче № 3, поэтому для коэффициента отражения имеем

$$\rho = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2, \quad (1)$$

где n — показатель преломления стекла относительно воздуха.

При отражении света от задней поверхности линзы среды стекло — воздух меняются ролями. Теперь, если в (1) вместо n подставить об-

ратную величину $n' = \frac{1}{n}$, где n' — показатель преломления воздуха относительно стекла, то найдем

$$\rho' = \left(\frac{n'-1}{n'+1} \right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}+1} \right)^2 = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2, \quad (2)$$

Сравнив (1) и (2), видим, что $\rho' = \rho$. Таким образом, для всех $2N$ поверхностей N линз коэффициенты отражения одинаковы.

Пусть I , I_1 — интенсивности света, падающего на систему линз, и света прошедшего первую границу. Из определения коэффициента отражения (см. задачу № 2) следует, что интенсивность света, отраженного от первой границы, равна ρI . Так как по закону сохранения энергии $\rho I + I_1 = I$, то

$$I_1 = I - \rho I = I(1 - \rho)$$

Аналогично, интенсивность света, прошедшего вторую границу,

$$I_2 = I_1(1 - \rho) = I(1 - \rho)^2$$

и т. д. Отсюда получим интенсивность света, прошедшего всю систему:

$$I_{2N} = I(1 - \rho)^{2N}$$

Взяв значение ρ из задачи № 3, получим ответ:

$$\frac{I_{2N}}{I} = (1 - \rho)^{2N} = (0,96)^{10} = 0,7$$

Пример 5. На пути частично поляризованного пучка света поместили николю. При повороте николя на угол $\varphi = 60^\circ$ из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\delta = 3,0$ раза. Найти степень поляризации падающего света.

Решение. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь плоскополяризованного и естественного света. Николю всегда пропускает половину падающего на его естественного света (превращая его в плоскополяризованный). Степень пропускания поляризованного света, падающего на николю, зависит, согласно закону Малюса (4), от взаимной ориентации главных плоскостей поляризатора и анализатора. Поэтому полная интенсивность света, прошедшего через николю,

$$I = 0,5I_n + I_p \cos^2 \varphi, \quad (1)$$

где I_n, I_p — интенсивности естественной и поляризованной составляющих света, падающего на николю. Чтобы воспользоваться формулой (5), заметим, что входящие в нее величины согласно (1) равны:

$$I_{\max} = 0,5I_n + I_p, \quad (2)$$

$$I_{\min} = 0,5I_n, \quad (3)$$

По условию, $I_{\max} = \delta I$, или, согласно формулам (1) — (3),

$$I_{\max} = \delta \left[I_{\min} + (I_{\max} - I_{\min}) \cos^2 \varphi \right], \quad (4)$$

Уравнение (4) содержит два неизвестных: I_{\max}, I_{\min} . Достаточно

$$\alpha = \frac{I_{\max}}{I_{\min}}$$

найти их отношение $\frac{I_{\max}}{I_{\min}}$, так как степень поляризации P , определяемую по (5), можно выразить через величину α :

$$P = \frac{(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)}, \quad (5)$$

Разделив обе части уравнения (4) на I_{\max} , имеем

$$1 = \delta \left[\alpha + (1 - \alpha) \cos^2 \varphi \right]$$

Выразив отсюда α и подставив в (5), получим ответ:

$$P = \frac{\delta - 1}{1 + \delta(1 - 2 \cos^2 \varphi)} = 0,8$$

Пример 6. Из кварца нужно вырезать пластинку, параллельную оптической оси кристалла, толщиной около 0,6 мм так, чтобы плоскополяризованный луч желтого света ($\lambda = 0,589$ мкм), пройдя пластинку, стал поляризованным по кругу. Рассчитать толщину пластинки, если для желтых лучей в кварце показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно равны: $n_o = 1,544$, $n_e = 1,553$.

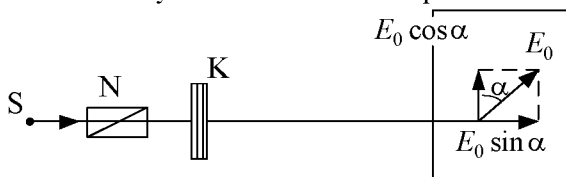


Рис. 2

Решение. Скорость света в кристалле зависит от угла α между вектором световых колебаний E и оптической осью кристалла. Так, в

кварце при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ скорость света — наибольшая, следовательно, пока-

затель преломления n_0 — наименьший (известно, что $n = \frac{c_0}{c}$, где c_0, c — скорости света в вакууме и данной среде соответственно); при $\alpha = 0$ скорость света — наименьшая, а показатель преломления — наибольший. Поэтому если на пластинку кварца K , вырезанную параллельно оптической оси кристалла, падает плоскополяризованный луч (например, испущенный источником S и прошедший через николь N , рис. 2), световые колебания которого имеют амплитуду E_0 и составляют угол α с оптической осью кристалла, то внутри пластинки будут распространяться по одному направлению, но с разной скоростью два луча — две компоненты поляризованного света. В одном луче — обыкновенном — колебания перпендикулярны оптической оси и имеют амплитуду $E_0 \sin \alpha$, в другом — необыкновенном — колебания параллельны оптической оси и имеют амплитуду $E_0 \cos \alpha$.

Заметим, что при $\alpha = 45^\circ$ амплитуды обоих лучей равны.

Обладая разными скоростями, обыкновенный и необыкновенный лучи, пройдя пластинку K , приобретут некоторую разность фаз Φ , которая согласно формуле (3) связана с оптической разностью хода лучей Δ соотношением

$$\Phi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}, \quad (1)$$

где величина Δ определяется формулами (1), (2):

$$\Delta = l(n_e - n_0), \quad (2)$$

Из (1), (2) получим разность фаз обоих лучей:

$$\Phi = 2\pi l(n_e - n_0) / \lambda, \quad (3)$$

В результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых периодов, но разных фаз возникнут эллиптические колебания, при которых конец вектора E описывает эллипс. В частности,

при равенстве амплитуд ($\alpha = 45^\circ$) и разности фаз $\Phi = \frac{\pi}{2}$ эллипс превратится в окружность. При этом свет будет поляризован по кругу.

Очевидно, к тому же результату придем, положив разность фаз равной

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

Из (3), (4) найдем толщину пластинки, необходимую для получения света с круговой поляризацией:

$$l = \frac{\left(k + \frac{1}{4}\right)\lambda}{n_0 - n_e}, \quad (5)$$

Подставив в (5) числовые значения l, λ, n_0, n_e (l принимаем равным 0,60 мм), найдем для числа k значение 8,9. Так как k — целое число, то, округлив результат до ближайшего целого числа, возьмем $k = 9$. Теперь, подставив $k = 9$ в (5), определим точное значение толщины пластинки (ближайшее к 0,6 мм), необходимое для круговой поляризации света: $l = 0,605 \text{ мм}$.

4.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Пучок света, идущий в воздухе, падает на поверхность жидкости под углом $\varepsilon_1 = 54^\circ$. Определить угол преломления ε_2 пучка, если отраженный пучок полностью поляризован.

Ответ: 36°

2. Пучок естественного света, идущий в воде, отражается от грани алмаза, погруженного в воду. При каком угле падения ε_B отраженный свет полностью поляризован?

Ответ: $61^\circ 12'$

3. Угол Брюстера ε_B при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57° . Определить скорость света в этом кристалле.

Ответ: 194 мм/с

4. Пучок естественного света падает на стеклянную ($m=1,6$) призму (рис. 3). Определить двугранный угол θ призмы, если отраженный пучок максимально поляризован.

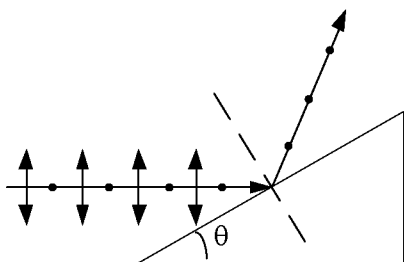


Рис. 3

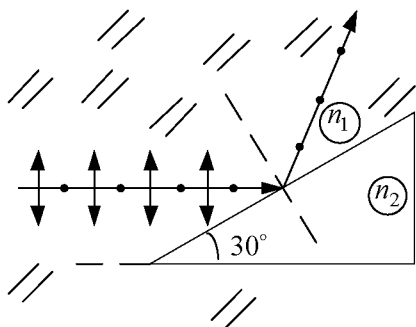


Рис. 4

Ответ: 32°

5. Алмазная призма находится в некоторой среде с показателем преломления n_1 . Пучок естественного света падает на призму так, как это показано на рис. 4. Определить показатель преломления n_1 среды, если отраженный пучок максимально поляризован.

Ответ: 1,40

4.6. Литература

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.Е. Иродов. – СПб.: Лань, 2016. – 416с.
2. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2013. – 288.