

Вычислительная физика, Осень 2020 ВШЭ. Задание 4.^a

1. (10) Сгенерируйте случайную симметричную матрицу A размера 1000×1000 :

```
n = 1000
a = np.random.normal(0, 1, (n, n))
A = a + a.T
```

Используя функцию `numpy.linalg.eigvalsh`, найдите спектр матрицы A и постройте гистограмму распределения собственных значений (`plt.hist`).

2. (15) Сгенерируйте случайную симметричную и положительно определенную матрицу A размера 10×10 :

```
n = 10
a = np.random.normal(0, 1, (n, n))
A = a @ a.T
```

Найдите спектр этой матрицы с помощью функции `numpy.linalg.eigvalsh`. Имплементируйте QR-алгоритм без сдвигов (используйте `numpy.linalg.qr`) и найдите спектр матрицы с его помощью. Сколько итераций требуется, чтобы приблизить минимальное собственное значение с точностью 1%?

3. (15) Рассмотрите матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите спектр матрицы A . Пусть σ_ϵ — множество таких [комплексных] z , что z является собственным значением матрицы $A + \delta A$ с некоторым $\|\delta A\|_2 < \epsilon$. Изобразите $\sigma_{0.1}$ и $\sigma_{0.01}$ (используйте без доказательства эквивалентность утверждений i и iv из задачи 26.1 Trefethen, Bau).

4. (20) Рассмотрите матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Реализуйте следующие методы нахождения максимального собственного значения (стартовый случайный вектор):

- Степенная итерация
- Обратная итерация с $\mu = 3.5$
- Обратная итерация с $\mu = 3.7$

Сколько шагов k требуется в каждом случае для того, чтобы получить настоящий собственный вектор v с точностью $\|v - v_k\|_2 < 10^{-3}$?

5. (20) Рассмотрите матрицу A размера 32×32 , задаваемую следующей формулой:

$$A_{ij} = -\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1} + \delta_{i,j-2}.$$

- Найдите спектр матрицы A .
- Используя функцию `scipy.linalg.expm`, постройте $\|e^{At}\|_2$ как функцию t на интервале $0 \leq t \leq 50$.
- Используя (без доказательства) эквивалентность утверждений i и iii из задачи 26.1 Trefethen, Bau, изобразите в комплексной плоскости множество σ_ϵ [см. определение в Задаче 3] для $\epsilon = 10^{-i}$, $i = 1, \dots, 5$.

^a Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]

6. **(25)** Рассмотрите диагональную матрицу D размера $n \times n$ и вектор–столбец u . Выберите D и u случайным образом (сгенерировав их элементы их стандартного нормального распределения) и найдите минимальное собственное значение и соответствующий собственный ему собственный вектор матрицы

$$A = D + \frac{uu^T}{u^T u}.$$

Рассмотрите случаи $n = 10^2$ и $n = 10^5$ – во втором случае Вам, возможно, пригодится Bunch–Nielsen–Sorensen formula