

## Вычислительная физика, Осень 2020 ВШЭ. Задание 4.<sup>a</sup>

1. **(10)** Сгенерируйте случайную симметричную матрицу  $A$  размера  $1000 \times 1000$ :

---

```
n = 1000
a = np.random.normal(0, 1, (n, n))
A = a + a.T
```

---

Используя функцию `numpy.linalg.eigvalsh`, найдите спектр матрицы  $A$  и постройте гистограмму распределения собственных значений (`plt.hist`).

2. **(15)** Сгенерируйте случайную симметричную и положительно определенную матрицу  $A$  размера  $10 \times 10$ :

---

```
n = 10
a = np.random.normal(0, 1, (n, n))
A = a @ a.T
```

---

Найдите спектр этой матрицы с помощью функции `numpy.linalg.eigvalsh`. Имплементируйте QR-алгоритм без сдвигов (используйте `numpy.linalg.qr`) и найдите спектр матрицы с его помощью. Сколько итераций требуется, чтобы приблизить минимальное собственное значение с точностью 1%?

3. **(15)** Рассмотрите матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите спектр матрицы  $A$ . Пусть  $\sigma_\epsilon$  – множество таких [комплексных]  $z$ , что  $z$  является собственным значением матрицы  $A + \delta A$  с некоторым  $\|\delta A\|_2 < \epsilon$ . Изобразите  $\sigma_{0.1}$  и  $\sigma_{0.01}$  (используйте без доказательства эквивалентность утверждений i и iv из задачи 26.1 Trefethen, Bau).

4. **(20)** Рассмотрите матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Реализуйте следующие методы нахождения максимального собственного значения (стартовый случайный вектор):

- Степенная итерация
- Обратная итерация с  $\mu = 3.5$
- Обратная итерация с  $\mu = 3.7$

Сколько шагов  $k$  требуется в каждом случае для того, чтобы получить настоящий собственный вектор  $v$  с точностью  $\|v - v_k\|_2 < 10^{-3}$ ?

5. **(25)** Рассмотрите диагональную матрицу  $D$  размера  $n \times n$  и вектор–столбец  $u$ . Выберите  $D$  и  $u$  случайным образом (сгенерировав их элементы их стандартного нормального распределения) и найдите минимальное собственное значение и соответствующий собственный ему собственный вектор матрицы

$$A = D + \frac{uu^T}{u^T u}.$$

Рассмотрите случаи  $n = 10^2$  и  $n = 10^5$  – во втором случае Вам, возможно, пригодится Bunch–Nielsen–Sorensen formula

---

<sup>a</sup> Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]

6. (30) Рассмотрите матрицу  $A$  размера  $32 \times 32$ , задаваемую следующей формулой:

$$A_{ij} = -\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1} + \delta_{i,j-2}.$$

- Найдите спектр матрицы  $A$ .
- Используя функцию `scipy.linalg.expm`, постройте  $\|e^{At}\|_2$  как функцию  $t$  на интервале  $0 \leq t \leq 50$ .
- Используя (без доказательства) эквивалентность утверждений i и iii из задачи 26.1 Trefethen, Bau, изобразите в комплексной плоскости множество  $\sigma_\epsilon$  [см. определение в Задаче 3] для  $\epsilon = 10^{-i}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .