

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

Вариант 3

Выполнили: Степанов Илья Алексеевич

Бондаренко Андрей Владимирович

Группа: Р3215

Преподаватель: Поздняков Семен Сергеевич

Дата сдачи: 15.12.2025

Задание

1. Аналитическое описание заданных множеств

1) Исходная область Ω :

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$$

Это бесконечная вертикальная полоса в первой четверти, ограниченная сверху прямой $\operatorname{Im}(z) = \pi$

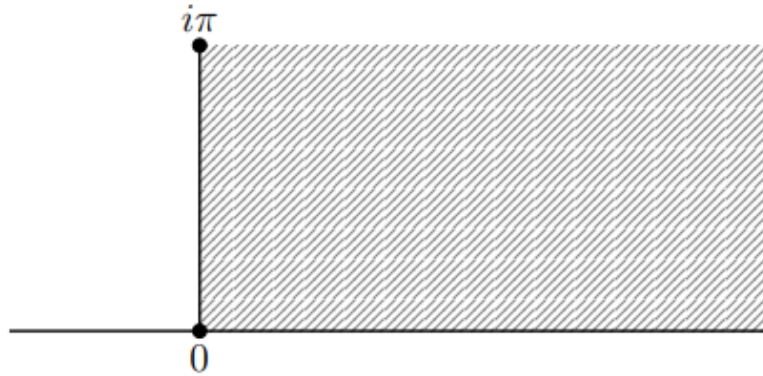


Рис. 1: Исходная область Ω

2) Конечная область G :

$$G = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) > 0\} \setminus (D_1 \cup D_2),$$

где

$$D_1 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - 1| < 1, \operatorname{Im}(w) > 0\}, \quad D_2 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w + 1| < 1, \operatorname{Im}(w) > 0\}$$

Область G представляет собой верхнюю полуплоскость с двумя вырезанными полу-кругами радиуса 1 с центрами в точках $w = \pm 1$

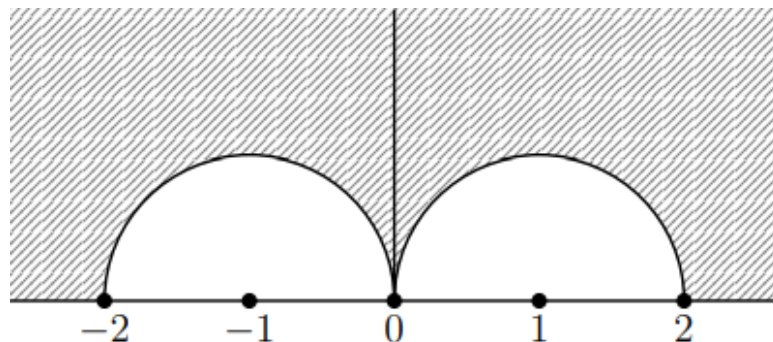
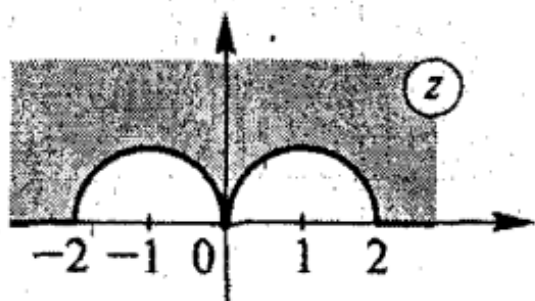


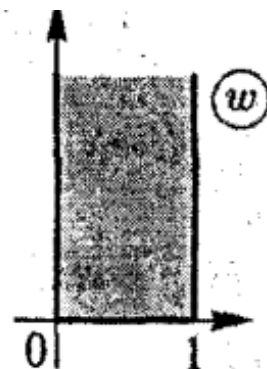
Рис. 2: Конечная область G

2. Построение обратного отображения $g : G \rightarrow \Omega$

Обратное отображение можно взять из приложения на странице 20



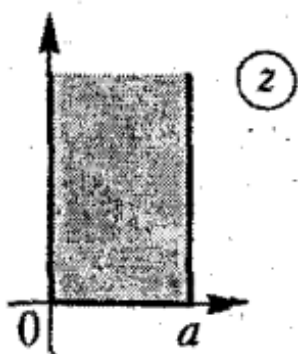
$$w = \frac{z-2}{z}$$



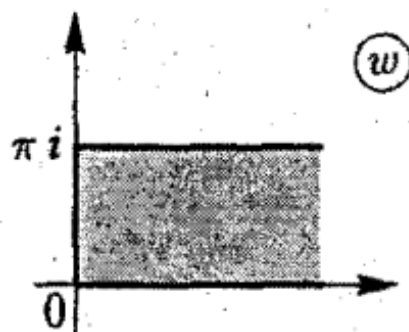
Полуплоскость $\text{Im } z > 0$
с удаленными полукругами

Полуполоса $0 < \text{Re } w < 1$,
 $\text{Im } w > 0$

№ 53



$$w = \frac{\pi}{i} \left(\frac{z}{a} - 1 \right)$$



Полуполоса $0 < \text{Re } z < a$,
 $\text{Im } z > 0$

Полуполоса $0 < \text{Im } w < \pi$,
 $\text{Re } w > 0$

Рис. 3: Обратное отображение из G в Ω

Соответственно вместо a подставляем 2 и получаем:

$$f_2^{-1}(w) = 1 - \frac{2}{w}$$

$$f_1^{-1}(\xi) = \frac{\pi}{2i}(\xi - 2)$$

Их композиция $g = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$:

$$g(w) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(w)) = -\frac{\pi}{2i} \left(\left(1 - \frac{2}{w} \right) - 2 \right) \implies g(w) = -\frac{\pi}{2i} \left(-1 - \frac{2}{w} \right)$$

$$g(w) = \frac{\pi}{2i} \left(1 + \frac{2}{w} \right).$$

3. Построение конформного отображения $f : \Omega \rightarrow G$

Для построения отображения используем промежуточную область – вертикальную полосу:

$$U = \{\xi \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(\xi) < 2, \operatorname{Im}(\xi) > 0\}$$



Рис. 4: Промежуточная область U

1) **Отображение** $f_1 : \Omega \rightarrow U$ Возьмём обратное к $f_1^{-1}(\xi) = \frac{\pi}{2i}(\xi - 2)$

$$z = -\frac{\pi}{2i}(\xi - 2) \implies z = -\frac{\pi}{2i}(\xi - 2) \implies \xi - 2 = -\frac{2i}{\pi}z$$

$$\xi = f_1(z) = -\frac{2i}{\pi}z + 2.$$

2) **Отображение** $f_2 : U \rightarrow G$

$$f_2^{-1}(w) = 1 - \frac{2}{w}$$

$$\xi = 1 - \frac{2}{w} \implies w - w\xi = 2 \implies w - 2 = w\xi \implies w(1 - \xi) = 2$$

$$f_2(\xi) = \frac{2}{1 - \xi}$$

Полное прямое отображение:

$$f(z) = f_2(f_1(z)) = \frac{2}{1 - \left(-\frac{2i}{\pi}z + 2\right)} = \frac{2}{\frac{2i}{\pi}z - 1}$$

4. Визуализация отображения

Для визуализации поэтапного преобразования области Ω в область G была написана программа на Python.

Код программы

```
1 import math
2
3 import matplotlib
4 matplotlib.use('TkAgg')
5 import numpy as np
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 def generate_region_points(n_points=500000):
8     points = []
9     for _ in range(n_points):
10         x = np.random.uniform(0.001, 40)
11         y = np.random.uniform(0, math.pi)
12         points.append((x, y))
13     return points
14 def preob(p):
15     points = []
16     for i in p:
17         x = i[0]
18         y = i[1]
19         points.append((2-(2*y/math.pi), 2*x/math.pi))
20     return points
21
22 def preob2(p):
23     points = []
24     for i in p:
25         x = i[0]
26         y = i[1]
27         points.append(((2*(1-x))/((1-x)**2 +y**2),
28                        (2*y)/((1-x)**2+y**2)))
29     return np.array(points)
30
31 def generate_image(i,area,color,title,xmin,xmax,ymin,ymax):
32     axes[i].scatter(np.array(area)[: , 0], np.array(area)[: , 1],
33                     s=0.05, color=color, alpha=0.7)
```

```

34     axes[i].set_xlabel('Re')
35     axes[i].set_ylabel('Im')
36     axes[i].set_title(title)
37     axes[i].grid(True, alpha=0.3)
38     axes[i].set_aspect('equal')
39     axes[i].set_xlim(xmin, xmax)
40     axes[i].set_ylim(ymin, ymax)
41
42
43 base = generate_region_points()
44 medium = preob(base)
45 final = preob2(medium)
46 fig, axes = plt.subplots(1, 3, figsize=(18, 6))
47 generate_image(0, base, 'red', 'Starting points \n  $0 < x < \infty, 0 \leq y \leq \pi$ ', 0, 8, 0, 6)
48 generate_image(1, medium, 'blue', 'After the first conversion\n  $(x, y) \rightarrow (2 - 2y/\pi, 2x/\pi)$ ', 0, 4, 0, 8)
49 generate_image(2, final, 'green', 'After the second conversion\n  $(x, y) \rightarrow (2(1-x)/((1-x)^2+y^2), 2y/((1-x)^2+y^2))$ ', -4, 4, 0, 6)
50 plt.tight_layout()
51 plt.show()

```

Листинг 1: Визуализация конформного отображения

Результаты визуализации

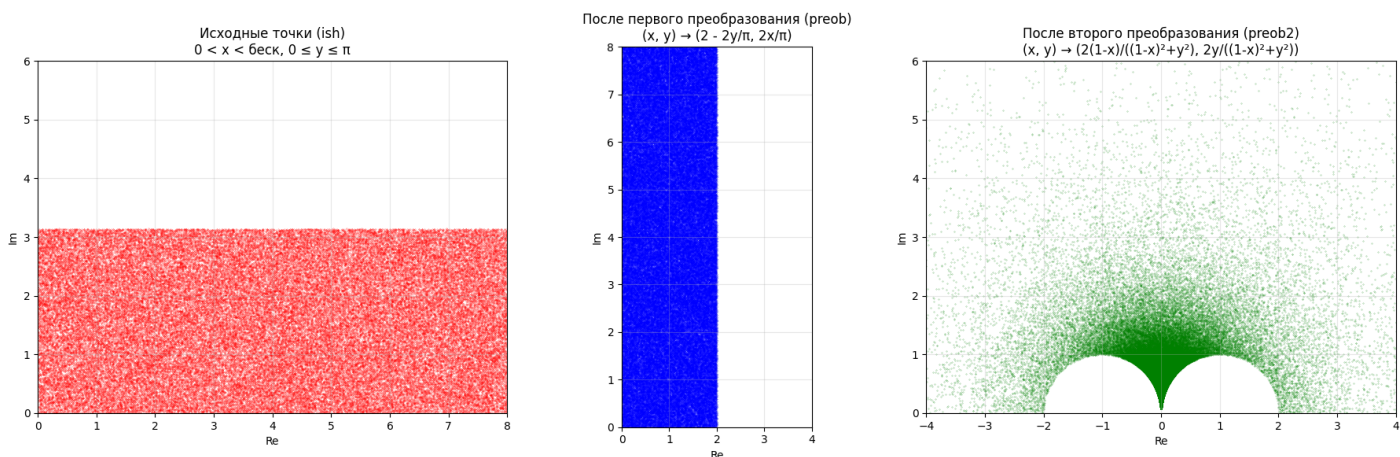


Рис. 5: Поэтапное преобразование области Ω в область G

Анимация преобразования

Для наглядности также создана анимация преобразования. С ней можно ознакомиться по ссылкам. <https://github.com/AndrewBond-005/tfkp-lab-2>
<https://drive.google.com/drive/folders/1NfG0Ldc5mI1EeZDihTPm6ZiBiq4UjXrl?dmr=1&ec=wgc-drive-hero-goto>

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено аналитическое исследование конформного отображения между двумя сложными областями комплексной плоскости.

1. Были аналитически описаны все используемые области
2. С использованием композиции классических преобразований построено конформное отображение $f : \Omega \rightarrow G$ Получено выражение:

$$f(z) = -\frac{2}{1 + \frac{2i}{\pi}z}.$$

3. Построено обратное отображение $g : G \rightarrow \Omega$:

$$g(w) = -\frac{\pi}{2i} \left(1 + \frac{2}{w} \right).$$

4. Написали программу на языке Python которая визуализирует области и применяет отображения к точкам. (так же была построена анимация отображения)