

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

**ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2**

Вариант 3

Выполнили: Степанов Илья Алексеевич

Бондаренко Андрей Владимирович

Группа: Р3215

Преподаватель: Поздняков Семен Сергеевич

Дата сдачи: 15.12.2025

## Задание

### 1. Аналитическое описание заданных множеств

1) Исходная область  $\Omega$ :

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$$

Это бесконечная вертикальная полоса в первой четверти, ограниченная сверху прямой  $\operatorname{Im}(z) = \pi$

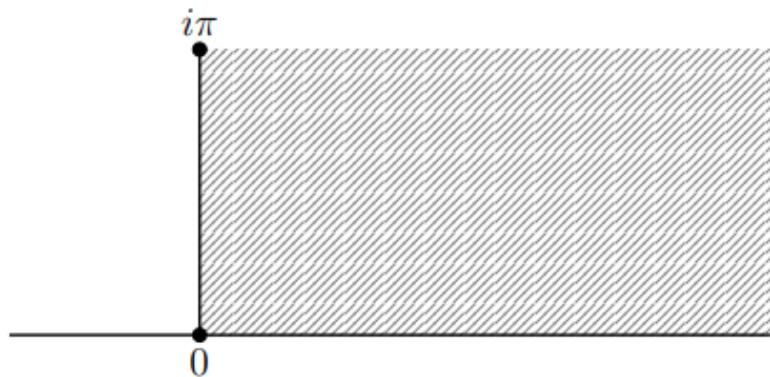


Рис. 1: Исходная область  $\Omega$

2) Конечная область  $G$ :

$$G = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) > 0\} \setminus (D_1 \cup D_2),$$

где

$$D_1 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - 1| < 1, \operatorname{Im}(w) > 0\}, \quad D_2 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w + 1| < 1, \operatorname{Im}(w) > 0\}$$

Область  $G$  представляет собой верхнюю полуплоскость с двумя вырезанными полуциркулями радиуса 1 с центрами в точках  $w = \pm 1$

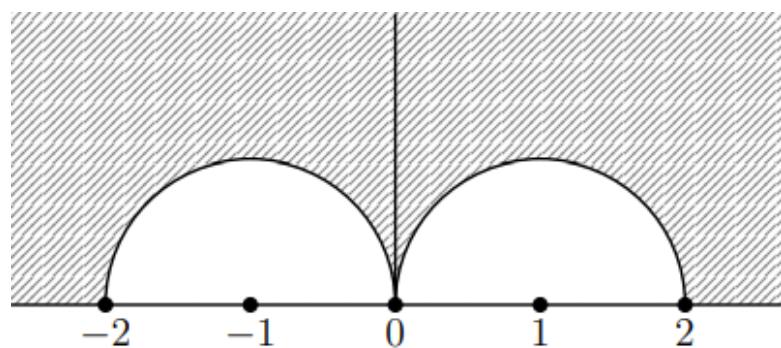
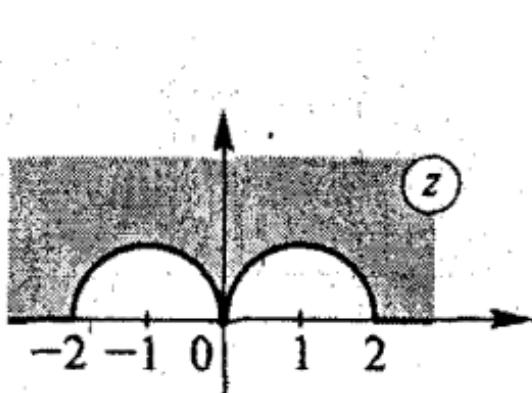


Рис. 2: Конечная область  $G$

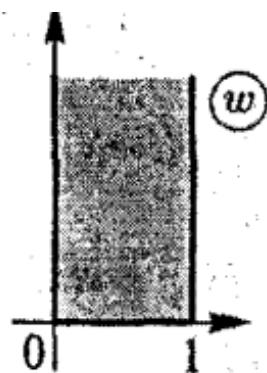
## 2. Построение обратного отображения $g : G \rightarrow \Omega$

Обратное отображение можно взять из приложения на странице 20



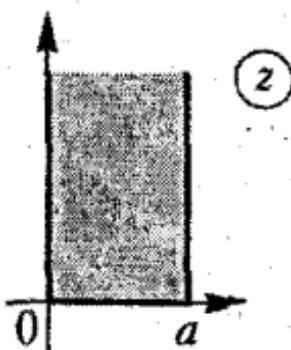
**Полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$   
с удаленными полукругами**

$$w = \frac{z-2}{z}$$



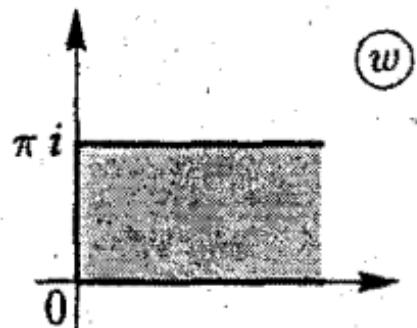
**Полуполоса  $0 < \operatorname{Re} w < 1$ ,  
 $\operatorname{Im} w > 0$**

**№ 53**



**Полуполоса  $0 < \operatorname{Re} z < a$ ,  
 $\operatorname{Im} z > 0$**

$$w = \frac{\pi}{i} \left( \frac{z}{a} - 1 \right)$$



**Полуполоса  $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ ,  
 $\operatorname{Re} w > 0$**

Рис. 3: Обратное отображение из  $G$  в  $\Omega$

Соответственно вместо а подставляем 2 и получаем:

$$f_2^{-1}(w) = 1 - \frac{2}{w}$$

$$f_1^{-1}(\xi) = \frac{\pi}{2i}(\xi - 2)$$

Их композиция  $g = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$ :

$$g(w) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(w)) = -\frac{\pi}{2i} \left( \left( 1 - \frac{2}{w} \right) - 2 \right) \implies g(w) = -\frac{\pi}{2i} \left( -1 - \frac{2}{w} \right)$$

$$g(w) = \frac{\pi}{2i} \left( 1 + \frac{2}{w} \right).$$

### 3. Построение конформного отображения $f : \Omega \rightarrow G$

Для построения отображения используем промежуточную область – вертикальную полу-полосу:

$$U = \{ \xi \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(\xi) < 2, \operatorname{Im}(\xi) > 0 \}$$



Рис. 4: Промежуточная область  $U$

1) Отображение  $f_1 : \Omega \rightarrow U$  Возьмём обратное к  $f_1^{-1}(\xi) = \frac{\pi}{2i}(\xi - 2)$

$$\begin{aligned} z = -\frac{\pi}{2i}(\xi - 2) &\implies z = -\frac{\pi}{2i}(\xi - 2) \implies \xi - 2 = -\frac{2i}{\pi}z \\ \xi = f_1(z) &= -\frac{2i}{\pi}z + 2. \end{aligned}$$

2) Отображение  $f_2 : U \rightarrow G$

$$f_2^{-1}(w) = 1 - \frac{2}{w}$$

$$\xi = 1 - \frac{2}{w} \implies w - w\xi = 2 \implies w - 2 = w\xi \implies w(1 - \xi) = 2$$

$$f_2(\xi) = \frac{2}{1 - \xi}$$

Полное прямое отображение:

$$f(z) = f_2(f_1(z)) = \frac{2}{1 - \left(-\frac{2i}{\pi}z + 2\right)} = \frac{2}{\frac{2i}{\pi}z - 1}$$

### 4. Визуализация отображения

Для визуализации поэтапного преобразования области  $\Omega$  в область  $G$  была написана программа на Python.

## Код программы

```
1 import math
2
3 import matplotlib
4 matplotlib.use('TkAgg')
5 import numpy as np
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 def generate_region_points(n_points=500000):
8     points = []
9     for _ in range(n_points):
10         x = np.random.uniform(0.001, 40)
11         y = np.random.uniform(0, math.pi)
12         points.append((x, y))
13
14     return points
15
16 def preob(p):
17     points = []
18     for i in p:
19         x = i[0]
20         y = i[1]
21         points.append((2-(2*y/math.pi), 2*x/math.pi))
22
23     return points
24
25 def preob2(p):
26     points = []
27     for i in p:
28         x = i[0]
29         y = i[1]
30         points.append(((2*(1-x))/((1-x)**2+y**2),
31                     (2*y)/((1-x)**2+y**2)))
32
33     return np.array(points)
34
35
36 def generate_image(i, area, color, title, xmin, xmax, ymin, ymax):
37     axes[i].scatter(np.array(area)[:, 0], np.array(area)[:, 1],
38                    s=0.05, color=color, alpha=0.7)
```

```

34     axes[i].set_xlabel('Re')
35     axes[i].set_ylabel('Im')
36     axes[i].set_title(title)
37     axes[i].grid(True, alpha=0.3)
38     axes[i].set_aspect('equal')
39     axes[i].set_xlim(xmin, xmax)
40     axes[i].set_ylim(ymin, ymax)

41
42
43 base = generate_region_points()
44 medium = preob(base)
45 final = preob2(medium)
46 fig, axes = plt.subplots(1, 3, figsize=(18, 6))
47 generate_image(0,base,'red','Starting points \n 0 < x < inf, 0
48           pi',0,8,0,6)
49 generate_image(1,medium,'blue','After the first conversion
50           (preob)\n(x, y)      (2 - 2y/pi, 2x/pi)',0,4,0,8)
51 generate_image(2,final,'green','After the second conversion
52           (preob2)\n(x, y)      (2(1-x)/((1-x)^2+y^2),
53           2y/((1-x)^2+y^2))',-4,4,0,6)
54 plt.tight_layout()
55 plt.show()

```

Листинг 1: Визуализация конформного отображения

## Результаты визуализации

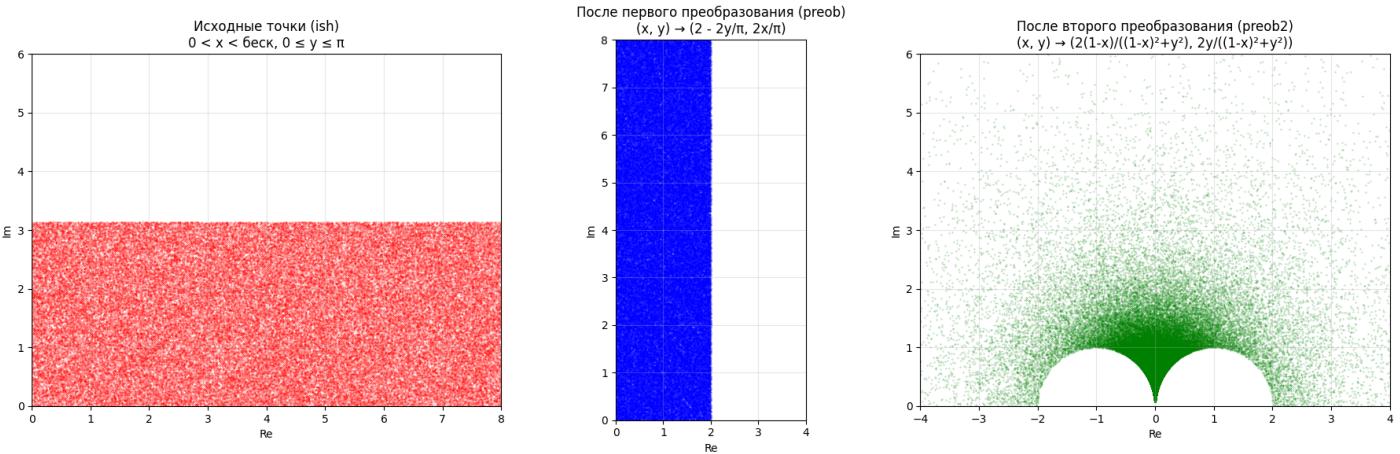


Рис. 5: Поэтапное преобразование области  $\Omega$  в область  $G$

## Анимация преобразования

Для наглядности также создана анимация преобразования. С ней можно ознакомится по ссылкам. <https://github.com/AndrewBond-005/tfkp-lab-2>  
<https://drive.google.com/drive/folders/1NfG0Ldc5mI1EeZDihTPm6ZiBiq4UjXrl?dmr=1&ec=wgc-drive-hero-goto>

## Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено аналитическое исследование конформного отображения между двумя сложными областями комплексной плоскости.

1. Были аналитически описаны все используемые области
2. С использованием композиции классических преобразований построено конформное отображение  $f : \Omega \rightarrow G$  Получено выражение:

$$f(z) = -\frac{2}{1 + \frac{2i}{\pi}z}.$$

3. Построено обратное отображение  $g : G \rightarrow \Omega$ :

$$g(w) = -\frac{\pi}{2i} \left( 1 + \frac{2}{w} \right).$$

4. Написали программу на языке Python которая визуализирует области и применяет отображения к точкам. (так же была построена анимация отображения)