

Арифметизация логики

Общие замечания

- ▶ Рассматриваем функции $\mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$.
- ▶ Обозначим вектор $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ как \vec{x} .

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z , N , U , S)

1. *Примитив «Ноль»* (Z)

$$Z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z(x_1) = 0$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z , N , U , S)

1. Примитив «Ноль» (Z)

$$Z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z(x_1) = 0$$

2. Примитив «Инкремент» (N)

$$N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad N(x_1) = x_1 + 1$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z , N , U , S)

1. Примитив «Ноль» (Z)

$$Z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z(x_1) = 0$$

2. Примитив «Инкремент» (N)

$$N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad N(x_1) = x_1 + 1$$

3. Примитив «Проекция» (U) — семейство функций; пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$

$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad U_n^k(\vec{x}) = x_k$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. Примитив «Ноль» (Z)

$$Z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z(x_1) = 0$$

2. Примитив «Инкремент» (N)

$$N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad N(x_1) = x_1 + 1$$

3. Примитив «Проекция» (U) — семейство функций; пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$

$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad U_n^k(\vec{x}) = x_k$$

4. Примитив «Подстановка» (S) — семейство функций; пусть

$$g : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$S\langle g, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle(\vec{x}) = g(f_1(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x}))$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Тогда $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$, причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y - 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Тогда $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$, причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y-1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);  
for yi = 0 to y-1 do  
    res := g(x1...xn, yi, res);
```


Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Тогда $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$, причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y-1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);  
for yi = 0 to y-1 do  
    res := g(x1...xn, yi, res);
```

Пример

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 3) = g(\vec{x}, 2, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 2))$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Тогда $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$, причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y-1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);  
for yi = 0 to y-1 do  
    res := g(x1...xn, yi, res);
```

Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 3) &= g(\vec{x}, 2, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 2)) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1))) \end{aligned}$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Тогда $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$, причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y-1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);  
for yi = 0 to y-1 do  
    res := g(x1...xn, yi, res);
```

Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 3) &= g(\vec{x}, 2, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 2)) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1))) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1)))) \end{aligned}$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Тогда $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$, причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y-1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);  
for yi = 0 to y-1 do  
    res := g(x1...xn, yi, res);
```

Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 3) &= g(\vec{x}, 2, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 2)) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1))) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1)))) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, f(\vec{x})))) \end{aligned}$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z , N , U , S и R .

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z , N , U , S и R .

Теорема

$f(x) = x + 2$ примитивно-рекурсивна

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z , N , U , S и R .

Теорема

$f(x) = x + 2$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$$f = S\langle N, N \rangle$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z , N , U , S и R .

Теорема

$f(x) = x + 2$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$$f = S\langle N, N \rangle$$

$$N(x) = x + 1$$

$$S\langle g, f \rangle(x) = g(f(x))$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z , N , U , S и R .

Теорема

$f(x) = x + 2$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$$f = S\langle N, N \rangle$$

$$N(x) = x + 1$$

$$S\langle g, f \rangle(x) = g(f(x))$$

$$f, g = N$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z , N , U , S и R .

Теорема

$f(x) = x + 2$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$$f = S\langle N, N \rangle$$

$$N(x) = x + 1$$

$$S\langle g, f \rangle(x) = g(f(x))$$

$$f, g = N$$

$$S\langle N, N \rangle(x) = N(N(x)) = (x + 1) + 1$$



Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle:$$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$:

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$:

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

► База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$:

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y + 1) =$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$:

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

- ▶ База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- ▶ Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y + 1) =$
 $\dots = S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y)) =$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$:

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y + 1) =$
... $= S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y)) =$
... $= S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, x + y) =$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$:

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

- ▶ База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- ▶ Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y + 1) =$
... $= S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y)) =$
... $= S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, x + y) =$
... $= N(x + y) = x + y + 1$



Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел
4. Неформально: все функции, вычисляемые конечным числом вложенных циклов for:

```
for (int i1 = 0; i_1 < g1(x1...xn); i1++) {  
    for (int i2 = 0; i_2 < g2(x1...xn,i1); i2++) {  
        ...  
        for (int ik = 0; ik < gk(x1...xn,i1,i2...); ik++) {  
            // выражение без циклов  
        }  
        ...  
    }  
}
```

Общерекурсивные функции

Определение

Функция — общерекурсивная, если может быть построена при помощи примитивов Z , N , U , S , R и примитива минимизации:

$$M\langle f \rangle(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0\}$$

Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) > 0$ при любом y , результат неопределён.

Общерекурсивные функции

Определение

Функция — общерекурсивная, если может быть построена при помощи примитивов Z , N , U , S , R и примитива минимизации:

$$M\langle f \rangle(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0\}$$

Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) > 0$ при любом y , результат неопределён.

Пример:

Пусть $f(x, y) = x - y^2$, тогда $\lceil \sqrt{x} \rceil = M\langle f \rangle(x)$

```
int sqrt(int x) {  
    int y = 0;  
    while (x-y*y > 0) y++;  
    return y;  
}
```

Выразительная сила

Определение

Функция Аккермана:

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & m = 0 \\ A(m - 1, 1), & m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Теорема

Функция Аккермана — общерекурсивная, но не примитивно-рекурсивная.

Выразительная сила

Определение

Функция Аккермана:

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & m = 0 \\ A(m - 1, 1), & m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Теорема

Функция Аккермана — общерекурсивная, но не примитивно-рекурсивная.

Определение

Тезис Чёрча для общерекурсивных функций: любая эффективно-вычислимая функция $\mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ является общерекурсивной.

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ означает $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ означает $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

Определение (Литерал числа)

$$\bar{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\bar{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ означает $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

Определение (Литерал числа)

$$\bar{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\bar{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть $\psi := x_1 = 0$.

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ означает $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

Определение (Литерал числа)

$$\bar{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\bar{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть $\psi := x_1 = 0$. Тогда $\psi(\bar{3})$ соответствует формуле $0''' = 0$

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ , что:

1. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, то $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, то $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ , что:

1. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, то $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, то $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ , что:

1. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, то $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, то $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$.

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ , что:

1. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, то $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, то $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash \rho = \rho$ при $\rho := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$:

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ , что:

1. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, то $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, то $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash \rho = \rho$ при $\rho := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ , что:

1. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, то $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, то $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- ▶ $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...
- ▶ $\vdash \neg p = q$ при $p := \overline{k}$, $q := \overline{s}$ при всех $k, s \in \mathbb{N}_0$ и $k \neq s$.

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ , что:

1. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, то $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, то $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- ▶ $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...
- ▶ $\vdash \neg p = q$ при $p := \overline{k}$, $q := \overline{s}$ при всех $k, s \in \mathbb{N}_0$ и $k \neq s$.
 $\vdash \neg 0 = 0'$, $\vdash \neg 0 = 0''$, $\vdash \neg 0''' = 0'$, ...



Представимость функций в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что функция $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ представима в ФА, если существует формула φ , что:

1. если $f(a_1, \dots, a_n) = u$, то $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
2. если $f(a_1, \dots, a_n) \neq u$, то $\vdash \neg \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
3. для всех $a_i \in \mathbb{N}_0$ выполнено
 $\vdash (\exists x. \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, x)) \ \& \ (\forall p. \forall q. \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, p) \ \& \ \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, q) \rightarrow p = q)$

Соответствие рекурсивных и представимых функций

Теорема

Любая рекурсивная функция представима в $\Phi.A.$

Соответствие рекурсивных и представимых функций

Теорема

Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.

Теорема

Любая представимая в Ф.А. функция рекурсивна.

Примитивы Z , N , U представимы в $\Phi.A.$

Теорема

Примитивы Z , N и U_n^k представимы в $\Phi.A.$

Примитивы Z , N , U представимы в $\Phi.A.$

Теорема

Примитивы Z , N и U_n^k представимы в $\Phi.A.$

Доказательство.

► $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0,$

Примитивы Z , N , U представимы в $\Phi.A.$

Теорема

Примитивы Z , N и U_n^k представимы в $\Phi.A.$

Доказательство.

- ▶ $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \ \& \ x_2 = 0$

Примитивы Z , N , U представимы в $\Phi.A.$

Теорема

Примитивы Z , N и U_n^k представимы в $\Phi.A.$

Доказательство.

- ▶ $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \ \& \ x_2 = 0$
- ▶ $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x'_1$

Примитивы Z , N , U представимы в $\Phi.A.$

Теорема

Примитивы Z , N и U_n^k представимы в $\Phi.A.$

Доказательство.

- ▶ $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \ \& \ x_2 = 0$
- ▶ $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x'_1$
- ▶ $v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$

Примитивы Z , N , U представимы в $\Phi.A.$

Теорема

Примитивы Z , N и U_n^k представимы в $\Phi.A.$

Доказательство.

► $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \ \& \ x_2 = 0$

► $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x'_1$

► $v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$

формальнее: $v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := \left(\bigwedge_{i \neq k, n+1} x_i = x_i \right) \ \& \ x_k = x_{n+1}$



Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

Теорема

Пусть функции f, g_1, \dots, g_k представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle$ представима в Ф.А.

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

Теорема

Пусть функции f, g_1, \dots, g_k представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle$ представима в Ф.А.

Доказательство.

Пусть f, g_1, \dots, g_k представляются формулами $\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_k$.

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

Теорема

Пусть функции f, g_1, \dots, g_k представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle$ представима в Ф.А.

Доказательство.

Пусть f, g_1, \dots, g_k представляются формулами $\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_k$.

Тогда $S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle$ будет представлена формулой

$$\exists g_1 \dots \exists g_k. \varphi(g_1, \dots, g_k, x_{n+1}) \& \gamma_1(x_1, \dots, x_n, g_1) \& \dots \& \gamma_k(x_1, \dots, x_n, g_k)$$



β -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

β -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β -функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c)$

Здесь $(\%)$ — остаток от деления.

β -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β -функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c)$

Здесь $(\%)$ — остаток от деления.

Теорема

β -функция Гёделя представима в $\Phi.A.$ формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q. (b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

β -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β -функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c)$

Здесь $(\%)$ — остаток от деления.

Теорема

β -функция Гёделя представима в $\Phi.A.$ формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q. (b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление b на x с остатком: найдутся частное (q) и остаток (d) , что $b = q \cdot x + d$ и $0 \leq d < x$.

β -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β -функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c)$

Здесь $(\%)$ — остаток от деления.

Теорема

β -функция Гёделя представима в $\Phi.A.$ формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q. (b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление b на x с остатком: найдутся частное (q) и остаток (d) , что $b = q \cdot x + d$ и $0 \leq d < x$.

Теорема

Если $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$, то найдутся такие $b, c \in \mathbb{N}_0$, что $a_i = \beta(b, c, i)$

Доказательство свойства β -функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если u_0, \dots, u_n — попарно взаимно-просты, и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$.

Доказательство свойства β -функции

Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если u_0, \dots, u_n — попарно взаимно-просты, и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$.
Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.*

Доказательство свойства β -функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если u_0, \dots, u_n — попарно взаимно-просты, и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

► $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

Доказательство свойства β -функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если u_0, \dots, u_n — попарно взаимно-просты, и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

► $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

Пусть p — простое, $u_i \div p$ и $u_j \div p$ ($i < j$).

Доказательство свойства β -функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если u_0, \dots, u_n — попарно взаимно-просты, и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

► $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

Пусть p — простое, $u_i \div p$ и $u_j \div p$ ($i < j$). Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.
Значит, $c \div p$ или $(j - i) \div p$.

Доказательство свойства β -функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если u_0, \dots, u_n — попарно взаимно-просты, и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

► $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

Пусть p — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ ($i < j$). Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$. Так как $j - i \leq n$, то $c \vdots (j - i)$, потому если и $(j - i) \vdots p$, всё равно $c \vdots p$.

Доказательство свойства β -функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если u_0, \dots, u_n — попарно взаимно-просты, и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

► $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

Пусть p — простое, $u_i \div p$ и $u_j \div p$ ($i < j$). Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$. Значит, $c \div p$ или $(j - i) \div p$. Так как $j - i \leq n$, то $c \div (j - i)$, потому если и $(j - i) \div p$, всё равно $c \div p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \div p$, отсюда $1 \div p$ — что невозможно.

Доказательство свойства β -функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если u_0, \dots, u_n — попарно взаимно-просты, и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- ▶ $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

Пусть p — простое, $u_i \div p$ и $u_j \div p$ ($i < j$). Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$. Значит, $c \div p$ или $(j - i) \div p$. Так как $j - i \leq n$, то $c \div (j - i)$, потому если и $(j - i) \div p$, всё равно $c \div p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \div p$, отсюда $1 \div p$ — что невозможно.

- ▶ $0 \leq a_i < u_i$.

Доказательство свойства β -функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если u_0, \dots, u_n — попарно взаимно-просты, и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

► $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

Пусть p — простое, $u_i \div p$ и $u_j \div p$ ($i < j$). Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$. Значит, $c \div p$ или $(j - i) \div p$. Так как $j - i \leq n$, то $c \div (j - i)$, потому если и $(j - i) \div p$, всё равно $c \div p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \div p$, отсюда $1 \div p$ — что невозможно.

► $0 \leq a_i < u_i$.

Условия китайской теоремы об остатках выполнены и найдётся b , что

$$a_i = b \% (1 + c \cdot (i + 1)) = \beta(b, c, i)$$



Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ .

Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ .

Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ .

Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

$$a_1 \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ .

Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$$

...

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

$$a_1 \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$$

$$a_y \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ .

Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$$

...

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

$$a_1 \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$$

$$a_y \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$$

По свойству β -функции, найдутся b и c , что $\beta(b, c, i) = a_i$ для $0 \leq i \leq y$.

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ .

Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$$

...

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1}) \quad a_y \quad \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \quad \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

$$a_1 \quad \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$$

По свойству β -функции, найдутся b и c , что $\beta(b, c, i) = a_i$ для $0 \leq i \leq y$.

Теорема

Примитив $R\langle f, g \rangle$ представим в Ф.А. формулой $\rho(x_1, \dots, x_n, y, a)$:

$$\exists b. \exists c. (\exists a_0. \hat{\beta}(b, c, 0, a_0) \& \varphi(x_1, \dots, x_n, a_0))$$

$$\& \quad \forall k. k < y \rightarrow \exists d. \exists e. \hat{\beta}(b, c, k, d) \& \hat{\beta}(b, c, k', e) \& \gamma(x_1, \dots, x_n, k, d, e)$$

$$\& \quad \hat{\beta}(b, c, y, a)$$

Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

Теорема

Пусть функция $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представима в Ф.А. формулой $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$.
Тогда примитив $M\langle f \rangle$ представим в Ф.А. формулой

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \neg\varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \ \& \ \forall u. u < y \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

Теорема

Пусть функция $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представима в Ф.А. формулой $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$. Тогда примитив $M\langle f \rangle$ представим в Ф.А. формулой

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \neg\varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \ \& \ \forall u. u < y \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

Теорема

Если f — рекурсивная функция, то она представима в Ф.А.

Доказательство.

Индукция по структуре f .



Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна φ , что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна φ , что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна φ , что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.

Рекурсивность представимых функций в $\Phi.A.$

Фиксируем f и x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна φ , что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.

Рекурсивность представимых функций в $\Phi.A.$

Фиксируем f и x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна φ , что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.
3. Параллельный перебор значений и доказательств: $s = 2^y \cdot 3^p$. Переберём все s , по s получим y и p . Проверим, что p — код доказательства $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(17	$\&$	0	0, 0	$27 + 6$
5)	19	\forall	(')	0, 1	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	\exists	(+)	0, 2	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	\vdash	(.)	1, 2	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	\neg	$25 + 6 \cdot k$	x_k	(=)	0, 2	$29 + 6 \cdot 9$
13	\rightarrow	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	\vee	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(17	&	0	0, 0	$27 + 6$
5)	19	\forall	(')	0, 1	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	\exists	(+)	0, 2	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	\vdash	(.)	1, 2	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	\neg	$25 + 6 \cdot k$	x_k	(=)	0, 2	$29 + 6 \cdot 9$
13	\rightarrow	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	\vee	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

2. Формула. $\phi \equiv s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Гёделев номер: $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$.

Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(17	&	0	0, 0	$27 + 6$
5)	19	\forall	(')	0, 1	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	\exists	(+)	0, 2	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	\vdash	(.)	1, 2	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	\neg	$25 + 6 \cdot k$	x_k	(=)	0, 2	$29 + 6 \cdot 9$
13	\rightarrow	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	\vee	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

2. Формула. $\phi \equiv s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Гёделев номер: $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$.

3. Доказательство. $\Pi = \delta_0 \delta_1 \dots \delta_{k-1}$, его гёделев номер:

$$\ulcorner \Pi \urcorner = 2^{\ulcorner \delta_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner \delta_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{\ulcorner \delta_{k-1} \urcorner}$$

Проверка доказательства на корректность

Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$\mathit{proof}(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — гёделев номер вывода, } f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Проверка доказательства на корректность

Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$\text{proof}(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — гёделев номер вывода, } f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Идея доказательства.

1. Проверка доказательства вычислима.

Проверка доказательства на корректность

Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$\text{proof}(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — гёделев номер вывода, } f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Идея доказательства.

1. Проверка доказательства вычислима.
2. Согласно тезису Чёрча, любая вычислимая функция вычислима с помощью рекурсивных функций.



Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. Функции $plog_k(n) = \max\{p : n \vdash k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ и $snd(x) = plog_3(x)$.

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. Функции $plog_k(n) = \max\{p : n \vdash k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ и $snd(x) = plog_3(x)$.
2. Числовые литералы: $\bar{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\bar{k}(x) = k$.

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. Функции $plog_k(n) = \max\{p : n \vdash k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ и $snd(x) = plog_3(x)$.
2. Числовые литералы: $\bar{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\bar{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, и f представима в Ф.А. формулой φ , то f — рекурсивна.

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. Функции $plog_k(n) = \max\{p : n \leq k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ и $snd(x) = plog_3(x)$.
2. Числовые литералы: $\bar{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\bar{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, и f представима в Ф.А. формулой φ , то f — рекурсивна.

Доказательство.

Пусть заданы x_1, x_2, \dots, x_n . Ищем $\langle y, p \rangle$, что $\text{proof}(\ulcorner \varphi \urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$,

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. Функции $plog_k(n) = \max\{p : n \leq k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ и $snd(x) = plog_3(x)$.
2. Числовые литералы: $\bar{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\bar{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, и f представима в Ф.А. формулой φ , то f — рекурсивна.

Доказательство.

Пусть заданы x_1, x_2, \dots, x_n . Ищем $\langle y, p \rangle$, что $\text{proof}(\ulcorner \varphi \urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$, напомним: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $p = \ulcorner \Pi \urcorner$, Π — доказательство $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y})$.

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. Функции $plog_k(n) = \max\{p : n \leq k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ и $snd(x) = plog_3(x)$.
2. Числовые литералы: $\bar{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\bar{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, и f представима в Ф.А. формулой φ , то f — рекурсивна.

Доказательство.

Пусть заданы x_1, x_2, \dots, x_n . Ищем $\langle y, p \rangle$, что $\text{proof}(\ulcorner \varphi \urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$, напомним: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $p = \ulcorner \Pi \urcorner$, Π — доказательство $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y})$.

$$f = S\langle \text{fst}, M\langle S\langle \text{proof}, \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, U_{n+1}^1, U_{n+1}^2, \dots, U_{n+1}^n, S\langle \text{fst}, U_{n+1}^{n+1} \rangle, S\langle \text{snd}, U_{n+1}^{n+1} \rangle \rangle \rangle \rangle$$



Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Парадокс лжеца

Предложение, указанное в центре данного слайда — ложное.

Проблема останова

Теорема

Невозможно разработать программу (функцию) *bool p (string source, string arg)*, возвращающую *true*, если программа с исходным кодом *source* имеет один аргумент типа *string* и оканчивает работу, если ей передать на вход значение *arg*.

Доказательство.

- ▶ Определим программу

```
bool s (std::string arg) {  
    if (s (arg)) { while (true); }  
    return true;  
}
```

- ▶ Пусть её полный исходный код — в переменной *source*.
- ▶ Что вернёт *p (source, source)*?



Самоприменимость

Определение

Определим функцию W_1 : $W_1(x, p) = 1$, если $x = \ulcorner \xi \urcorner$, где ξ — формула с единственной свободной переменной x_1 , а p — доказательство самоприменения ξ :

$$\vdash \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$$

$W_1(x, p) = 0$, если это не так.

Теорема Гёделя, вспомогательные определения

Теорема

Существует формула ω_1 со свободными переменными x_1 и x_2 , такая, что:

1. $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$, если p — гёделев номер доказательства самоприменения φ ;
2. $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$ иначе.

Доказательство.

Опираясь на рекурсивность функции `proof`, легко показать рекурсивность W_1 .
Значит, эта функция представима в формальной арифметике некоторой формулой τ_1 . Возьмём $\omega_1(x_1, x_2) := \tau_1(x_1, x_2, \overline{1})$. □

Определение

Определим формулу $\sigma(x) := \forall p. \neg \omega(x, p)$

Омега-непротиворечивость

Определение

Если для любой формулы $\phi(x)$ из $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\bar{1}), \vdash \phi(\bar{2}), \dots$ выполнено $\nvdash \exists x. \neg \phi(x)$, то теория омега-непротиворечива.

Теорема

Омега-непротиворечивость влечёт непротиворечивость

Доказательство.

Пусть $\phi(x) \equiv (x = x) \rightarrow (x = x) \rightarrow (x = x)$. Тогда $\vdash \phi(x)$ при всех x . Тогда $\nvdash \exists x. \neg \phi(x)$ — то есть существует недоказуемая формула, т.е. теория непротиворечива.



Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

- ▶ Если формальная арифметика непротиворечива, то $\not\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.
- ▶ Если формальная арифметика ω -непротиворечива, то $\not\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.