

Лекция 7

Неразрешимость исчисления предикатов
Аксиоматика Пеано и формальная арифметика

Машина Тьюринга

Определение

Машина Тьюринга — упорядоченная тройка:

1. *Внешний алфавит q_1, \dots, q_n*
2. *Внутренний алфавит (состояний) s_1, \dots, s_k ; s_s — начальное, s_f — конечное.*
3. *Таблица переходов $\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s', \leftrightarrow \rangle$*

Определение

Состояние машины Тьюринга — упорядоченная тройка:

1. *Бесконечная лента с символом-заполнителем q_ϵ , текст конечной длины.*
2. *Головка над определённым символом*
3. *Символ состояния (состояние в узком смысле) — символ внутреннего алфавита.*

Машина, меняющая все 0 на 1, а все 1 — на 0

1. Внешний алфавит $\varepsilon, 0, 1$.
2. Внутренний алфавит s_s, s_f (начальное и завершающее состояния соответственно).
3. Переходы:

	ε	0	1
s_s	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_s, 1, \rightarrow \rangle$	$\langle s_s, 0, \rightarrow \rangle$
s_f	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 0, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 1, \cdot \rangle$

Машина, меняющая все 0 на 1, а все 1 — на 0

1. Внешний алфавит $\varepsilon, 0, 1$.
2. Внутренний алфавит s_s, s_f (начальное и завершающее состояния соответственно).
3. Переходы:

	ε	0	1
s_s	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_s, 1, \rightarrow \rangle$	$\langle s_s, 0, \rightarrow \rangle$
s_f	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 0, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 1, \cdot \rangle$

Пример

Головка — на первом символе 011, состояние s_s .

Машина, меняющая все 0 на 1, а все 1 — на 0

1. Внешний алфавит $\varepsilon, 0, 1$.
2. Внутренний алфавит s_s, s_f (начальное и завершающее состояния соответственно).
3. Переходы:

	ε	0	1
s_s	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_s, 1, \rightarrow \rangle$	$\langle s_s, 0, \rightarrow \rangle$
s_f	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 0, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 1, \cdot \rangle$

Пример

Головка — на первом символе 011, состояние s_s .

011

Машина, меняющая все 0 на 1, а все 1 — на 0

1. Внешний алфавит $\varepsilon, 0, 1$.
2. Внутренний алфавит s_s, s_f (начальное и завершающее состояния соответственно).
3. Переходы:

	ε	0	1
s_s	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_s, 1, \rightarrow \rangle$	$\langle s_s, 0, \rightarrow \rangle$
s_f	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 0, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 1, \cdot \rangle$

Пример

Головка — на первом символе 011, состояние s_s .

011 \Rightarrow 111

Машина, меняющая все 0 на 1, а все 1 — на 0

1. Внешний алфавит $\varepsilon, 0, 1$.
2. Внутренний алфавит s_s, s_f (начальное и завершающее состояния соответственно).
3. Переходы:

	ε	0	1
s_s	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_s, 1, \rightarrow \rangle$	$\langle s_s, 0, \rightarrow \rangle$
s_f	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 0, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 1, \cdot \rangle$

Пример

Головка — на первом символе 011, состояние s_s .

011 \Rightarrow 111 \Rightarrow 101

Машина, меняющая все 0 на 1, а все 1 — на 0

1. Внешний алфавит $\varepsilon, 0, 1$.
2. Внутренний алфавит s_s, s_f (начальное и завершающее состояния соответственно).
3. Переходы:

	ε	0	1
s_s	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_s, 1, \rightarrow \rangle$	$\langle s_s, 0, \rightarrow \rangle$
s_f	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 0, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 1, \cdot \rangle$

Пример

Головка — на первом символе 011, состояние s_s .

011 \Rightarrow 111 \Rightarrow 101 \Rightarrow 100 ε

Машина, меняющая все 0 на 1, а все 1 — на 0

1. Внешний алфавит $\varepsilon, 0, 1$.
2. Внутренний алфавит s_s, s_f (начальное и завершающее состояния соответственно).
3. Переходы:

	ε	0	1
s_s	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_s, 1, \rightarrow \rangle$	$\langle s_s, 0, \rightarrow \rangle$
s_f	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 0, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 1, \cdot \rangle$

Пример

Головка — на первом символе 011, состояние s_s .

011 \Rightarrow 111 \Rightarrow 101 \Rightarrow 100 ε

Состояние s_f , завершающее.

Разрешимость

Определение

Язык — множество строк

Определение

Язык L разрешим, если существует машина Тьюринга, которая для любого слова w возвращает ответ «да», если $w \in L$, и «нет», если $w \notin L$.

Неразрешимость задачи останова

Определение

Рассмотрим все возможные описания машин Тьюринга. Составим упорядоченные пары: описание машины Тьюринга и входная строка. Из них выделим язык останавливающихся на данном входе машин Тьюринга.

Теорема

Язык всех останавливающихся машин Тьюринга неразрешим

Доказательство.

От противного. Пусть $S(x, y)$ — машина Тьюринга, определяющая, остановится ли машина x , примененная к строке y .

Неразрешимость задачи останова

Определение

Рассмотрим все возможные описания машин Тьюринга. Составим упорядоченные пары: описание машины Тьюринга и входная строка. Из них выделим язык останавливающихся на данном входе машин Тьюринга.

Теорема

Язык всех останавливающихся машин Тьюринга неразрешим

Доказательство.

От противного. Пусть $S(x, y)$ — машина Тьюринга, определяющая, остановится ли машина x , примененная к строке y .

$$W(x) = \text{if } (S(x,x)) \{ \text{while (true); return 0; } \} \text{ else } \{ \text{return 1; } \}$$

Неразрешимость задачи останова

Определение

Рассмотрим все возможные описания машин Тьюринга. Составим упорядоченные пары: описание машины Тьюринга и входная строка. Из них выделим язык останавливающихся на данном входе машин Тьюринга.

Теорема

Язык всех останавливающихся машин Тьюринга неразрешим

Доказательство.

От противного. Пусть $S(x, y)$ — машина Тьюринга, определяющая, остановится ли машина x , примененная к строке y .

$$W(x) = \text{if } (S(x, x)) \{ \text{while } (\text{true}); \text{return } 0; \} \text{ else } \{ \text{return } 1; \}$$

Что вернёт $S(\text{code}(W), \text{code}(W))$?



Кодируем состояние

1. внешний алфавит: n 0-местных функциональных символов q_1, \dots, q_n ; q_ε — символ-заполнитель.
2. список: ε и $c(l, s)$; «abc» представим как $c(q_a, c(q_b, c(q_c, \varepsilon)))$.
3. положение головки: «ab.rq» как $(c(q_b, c(q_a, \varepsilon)), c(q_r, c(q_q, \varepsilon)))$.
4. внутренний алфавит: k 0-местных функциональных символов s_1, \dots, s_k . Из них выделенные s_s — начальное и s_f — завершающее состояние.

Достижимые состояния

Предикатный символ $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$: если у машины x с начальной строкой y состояние s достижимо на строке $rev(w_l)@w_r$.

Достижимые состояния

Предикатный символ $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$: если у машины x с начальной строкой y состояние s достижимо на строке $rev(w_l)@w_r$. Будем накладывать условия: семейство формул C_m .

Достижимые состояния

Предикатный символ $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$: если у машины x с начальной строкой y состояние s достижимо на строке $rev(w_l)@w_r$. Будем накладывать условия: семейство формул C_m . Очевидно, начальное состояние достижимо:

$$C_0 = F_{x,y}(\varepsilon, x, s_s)$$

Кодируем переходы

1. Занумеруем переходы.

Кодируем переходы

1. Занумеруем переходы.
2. Закодируем переход m :

$$\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s', \rightarrow \rangle$$

$$C_m = \forall w_l. \forall w_r. F_{x,y}(w_l, c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(c(q_{k'}, w_l), w_r, s_{s'})$$

Кодируем переходы

1. Занумеруем переходы.
2. Закодируем переход m :

$$\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s', \rightarrow \rangle$$

$$C_m = \forall w_l. \forall w_r. F_{x,y}(w_l, c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(c(q_{k'}, w_l), w_r, s_{s'})$$

3. Переход посложнее:

$$\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s', \leftarrow \rangle$$

$$C_m = \forall w_l. \forall w_r. \forall t. F_{x,y}(c(t, w_l), c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(w_l, c(t, c(q_{k'}, w_r)), s_{s'}) \ \& \\ \forall w_l. \forall w_r. F_{x,y}(\varepsilon, c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(\varepsilon, c(q_{\varepsilon}, c(q_{k'}, w_r)), s_{s'})$$

Кодируем переходы

1. Занумеруем переходы.
2. Закодируем переход m :

$$\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s', \rightarrow \rangle$$

$$C_m = \forall w_l. \forall w_r. F_{x,y}(w_l, c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(c(q_{k'}, w_l), w_r, s_{s'})$$

3. Переход посложнее:

$$\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s', \leftarrow \rangle$$

$$C_m = \forall w_l. \forall w_r. \forall t. F_{x,y}(c(t, w_l), c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(w_l, c(t, c(q_{k'}, w_r)), s_{s'}) \ \& \\ \forall w_l. \forall w_r. F_{x,y}(\varepsilon, c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(\varepsilon, c(q_{\varepsilon}, c(q_{k'}, w_r)), s_{s'})$$

4. и т.п.

Итоговая формула

$$C = C_0 \& C_1 \& \dots \& C_n$$

«правильное начальное состояние и правильные переходы между состояниями»

Итоговая формула

$$C = C_0 \& C_1 \& \dots \& C_n$$

«правильное начальное состояние и правильные переходы между состояниями»

Теорема

состояние s со строкой $rev(w_l)@w_r$ достижимо тогда и только тогда, когда
 $C \vdash F_{x,y}(w_l, w_r, s)$

Итоговая формула

$$C = C_0 \& C_1 \& \dots \& C_n$$

«правильное начальное состояние и правильные переходы между состояниями»

Теорема

состояние s со строкой $rev(w_l)@w_r$ достижимо тогда и только тогда, когда
 $C \vdash F_{x,y}(w_l, w_r, s)$

Доказательство.

(\Leftarrow) Рассмотрим модель: предикат $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$ положим истинным, если состояние достижимо.

Итоговая формула

$$C = C_0 \& C_1 \& \dots \& C_n$$

«правильное начальное состояние и правильные переходы между состояниями»

Теорема

состояние s со строкой $rev(w_l)@w_r$ достижимо тогда и только тогда, когда
 $C \vdash F_{x,y}(w_l, w_r, s)$

Доказательство.

(\Leftarrow) Рассмотрим модель: предикат $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$ положим истинным, если состояние достижимо. Это — модель для C (по построению C_m).

Итоговая формула

$$C = C_0 \& C_1 \& \dots \& C_n$$

«правильное начальное состояние и правильные переходы между состояниями»

Теорема

состояние s со строкой $rev(w_l)@w_r$ достижимо тогда и только тогда, когда
 $C \vdash F_{x,y}(w_l, w_r, s)$

Доказательство.

(\Leftarrow) Рассмотрим модель: предикат $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$ положим истинным, если состояние достижимо. Это — модель для C (по построению C_m). Значит, доказуемость влечёт истинность (по корректности).

Итоговая формула

$$C = C_0 \& C_1 \& \dots \& C_n$$

«правильное начальное состояние и правильные переходы между состояниями»

Теорема

состояние s со строкой $rev(w_l)@w_r$ достижимо тогда и только тогда, когда
 $C \vdash F_{x,y}(w_l, w_r, s)$

Доказательство.

(\Leftarrow) Рассмотрим модель: предикат $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$ положим истинным, если состояние достижимо. Это — модель для C (по построению C_m). Значит, доказуемость влечёт истинность (по корректности).

(\Rightarrow) Индукция по длине лога исполнения.



Неразрешимость исчисления предикатов: доказательство

Теорема

Язык всех доказуемых формул исчисления предикатов неразрешим

Т.е. нет машины Тьюринга, которая бы по любой формуле s определяла, доказуема ли она.

Неразрешимость исчисления предикатов: доказательство

Теорема

Язык всех доказуемых формул исчисления предикатов неразрешим

Т.е. нет машины Тьюринга, которая бы по любой формуле s определяла, доказуема ли она.

Доказательство.

s_f — завершающее состояние.

Неразрешимость исчисления предикатов: доказательство

Теорема

Язык всех доказуемых формул исчисления предикатов неразрешим

Т.е. нет машины Тьюринга, которая бы по любой формуле s определяла, доказуема ли она.

Доказательство.

s_f — завершающее состояние.

Умение определять истинность формулы $\exists w_l. \exists w_r. F_{x,y}(w_l, w_r, s_f)$ разрешает задачу останова. □

Аксиоматика Пеано и формальная арифметика

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}).

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:

1.1 $A \cup B = \mathbb{Q}$

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:
 - 1.1 $A \cup B = \mathbb{Q}$
 - 1.2 Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \leq a$, то $x \in A$

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:
 - 1.1 $A \cup B = \mathbb{Q}$
 - 1.2 Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \leq a$, то $x \in A$
 - 1.3 Если $b \in B$, $x \in \mathbb{Q}$ и $b \leq x$, то $x \in B$

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:
 - 1.1 $A \cup B = \mathbb{Q}$
 - 1.2 Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \leq a$, то $x \in A$
 - 1.3 Если $b \in B$, $x \in \mathbb{Q}$ и $b \leq x$, то $x \in B$
 - 1.4 A не содержит наибольшего.

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:

1.1 $A \cup B = \mathbb{Q}$

1.2 Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \leq a$, то $x \in A$

1.3 Если $b \in B$, $x \in \mathbb{Q}$ и $b \leq x$, то $x \in B$

1.4 A не содержит наибольшего.

\mathbb{R} — множество всех возможных дедекиндовых сечений.

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:

1.1 $A \cup B = \mathbb{Q}$

1.2 Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \leq a$, то $x \in A$

1.3 Если $b \in B$, $x \in \mathbb{Q}$ и $b \leq x$, то $x \in B$

1.4 A не содержит наибольшего.

\mathbb{R} — множество всех возможных дедекиндовых сечений.

2. Рациональные (\mathbb{Q}).

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:

1.1 $A \cup B = \mathbb{Q}$

1.2 Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \leq a$, то $x \in A$

1.3 Если $b \in B$, $x \in \mathbb{Q}$ и $b \leq x$, то $x \in B$

1.4 A не содержит наибольшего.

\mathbb{R} — множество всех возможных дедекиндовых сечений.

2. Рациональные (\mathbb{Q}).

$Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ — множество всех простых дробей.

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:

1.1 $A \cup B = \mathbb{Q}$

1.2 Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \leq a$, то $x \in A$

1.3 Если $b \in B$, $x \in \mathbb{Q}$ и $b \leq x$, то $x \in B$

1.4 A не содержит наибольшего.

\mathbb{R} — множество всех возможных дедекиндовых сечений.

2. Рациональные (\mathbb{Q}).

$Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ — множество всех простых дробей.

$\langle p, q \rangle$ — то же, что $\frac{p}{q}$

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:

1.1 $A \cup B = \mathbb{Q}$

1.2 Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \leq a$, то $x \in A$

1.3 Если $b \in B$, $x \in \mathbb{Q}$ и $b \leq x$, то $x \in B$

1.4 A не содержит наибольшего.

\mathbb{R} — множество всех возможных дедекиндовых сечений.

2. Рациональные (\mathbb{Q}).

$Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ — множество всех простых дробей.

$\langle p, q \rangle$ — то же, что $\frac{p}{q}$

$\langle p_1, q_1 \rangle \equiv \langle p_2, q_2 \rangle$, если $p_1 q_2 = p_2 q_1$

Какие мы знаем числа?

1. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:

1.1 $A \cup B = \mathbb{Q}$

1.2 Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \leq a$, то $x \in A$

1.3 Если $b \in B$, $x \in \mathbb{Q}$ и $b \leq x$, то $x \in B$

1.4 A не содержит наибольшего.

\mathbb{R} — множество всех возможных дедекиндовых сечений.

2. Рациональные (\mathbb{Q}).

$Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ — множество всех простых дробей.

$\langle p, q \rangle$ — то же, что $\frac{p}{q}$

$\langle p_1, q_1 \rangle \equiv \langle p_2, q_2 \rangle$, если $p_1 q_2 = p_2 q_1$

$$\mathbb{Q} = Q / \equiv$$

Целые числа

«Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.»
Леопольд Кронеккер

Целые числа

«Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.»
Леопольд Кронеккер

$$\mathbb{Z} : \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Целые числа

*«Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.»
Леопольд Кронеккер*

$$\mathbb{Z} : \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

► $Z = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$

Целые числа

*«Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.»
Леопольд Кронеккер*

$$\mathbb{Z} : \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

- ▶ $Z = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$
- ▶ Интуиция: $\langle x, y \rangle = x - y$

Целые числа

*«Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.»
Леопольд Кронеккер*

$$\mathbb{Z} : \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

- ▶ $Z = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$
- ▶ Интуиция: $\langle x, y \rangle = x - y$
- ▶

$$\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$$

Целые числа

*«Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.»
Леопольд Кронеккер*

$$\mathbb{Z} : \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

- ▶ $Z = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$
- ▶ Интуиция: $\langle x, y \rangle = x - y$
- ▶

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle &= \langle a + c, b + d \rangle \\ \langle a, b \rangle - \langle c, d \rangle &= \langle a + d, b + c \rangle\end{aligned}$$

Целые числа

*«Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.»
Леопольд Кронеккер*

$$\mathbb{Z} : \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

- ▶ $Z = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$
- ▶ Интуиция: $\langle x, y \rangle = x - y$
- ▶

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle &= \langle a + c, b + d \rangle \\ \langle a, b \rangle - \langle c, d \rangle &= \langle a + d, b + c \rangle\end{aligned}$$

- ▶ Пусть $\langle a, b \rangle \equiv \langle c, d \rangle$, если $a + d = b + c$. Тогда $\mathbb{Z} = Z / \equiv$

Целые числа

*«Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.»
Леопольд Кронеккер*

$$\mathbb{Z} : \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

- ▶ $Z = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$
- ▶ Интуиция: $\langle x, y \rangle = x - y$
- ▶

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle &= \langle a + c, b + d \rangle \\ \langle a, b \rangle - \langle c, d \rangle &= \langle a + d, b + c \rangle\end{aligned}$$

- ▶ Пусть $\langle a, b \rangle \equiv \langle c, d \rangle$, если $a + d = b + c$. Тогда $\mathbb{Z} = Z / \equiv$
- ▶ $0 = [\langle 0, 0 \rangle]$, $1 = [\langle 1, 0 \rangle]$, $-7 = [\langle 0, 7 \rangle]$

Натуральные числа

$\mathbb{N} : 1, 2, \dots$ или $\mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$

Натуральные числа

$\mathbb{N} : 1, 2, \dots$ или $\mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$

Определение

N (или, более точно, $\langle N, 0, (') \rangle$) соответствует аксиоматике Пеано, если следующее определено/выполнено:

Натуральные числа

$\mathbb{N} : 1, 2, \dots$ или $\mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$

Определение

N (или, более точно, $\langle N, 0, (') \rangle$) соответствует аксиоматике Пеано, если следующее определено/выполнено:

1. Операция «штрих» $(') : N \rightarrow N$, причём нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$.

Натуральные числа

$\mathbb{N} : 1, 2, \dots$ или $\mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$

Определение

N (или, более точно, $\langle N, 0, (') \rangle$) соответствует аксиоматике Пеано, если следующее определено/выполнено:

1. Операция «штрих» $(') : N \rightarrow N$, причём нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$.
Если $x = y'$, то x назовём следующим за y , а y — предшествующим x .

Натуральные числа

$\mathbb{N} : 1, 2, \dots$ или $\mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$

Определение

N (или, более точно, $\langle N, 0, (') \rangle$) соответствует аксиоматике Пеано, если следующее определено/выполнено:

1. Операция «штрих» $(') : N \rightarrow N$, причём нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$.
Если $x = y'$, то x назовём следующим за y , а y — предшествующим x .
2. Константа $0 \in N$: нет $x \in N$, что $x' = 0$.

Натуральные числа

$\mathbb{N} : 1, 2, \dots$ или $\mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$

Определение

N (или, более точно, $\langle N, 0, (') \rangle$) соответствует аксиоматике Пеано, если следующее определено/выполнено:

1. Операция «штрих» $(') : N \rightarrow N$, причём нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$.
Если $x = y'$, то x назовём следующим за y , а y — предшествующим x .
2. Константа $0 \in N$: нет $x \in N$, что $x' = 0$.
3. Индукция. Каково бы ни было свойство («предикат») $P : N \rightarrow V$, если:
 - 3.1 $P(0)$
 - 3.2 При любом $x \in N$ из $P(x)$ следует $P(x')$то при любом $x \in N$ выполнено $P(x)$.

Натуральные числа

$\mathbb{N} : 1, 2, \dots$ или $\mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$

Определение

N (или, более точно, $\langle N, 0, (') \rangle$) соответствует аксиоматике Пеано, если следующее определено/выполнено:

1. Операция «штрих» $(') : N \rightarrow N$, причём нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$.
Если $x = y'$, то x назовём следующим за y , а y — предшествующим x .
2. Константа $0 \in N$: нет $x \in N$, что $x' = 0$.
3. Индукция. Каково бы ни было свойство («предикат») $P : N \rightarrow V$, если:
 - 3.1 $P(0)$
 - 3.2 При любом $x \in N$ из $P(x)$ следует $P(x')$то при любом $x \in N$ выполнено $P(x)$.

Как построить? Например, в стиле алгебры Линденбаума:

Натуральные числа

$\mathbb{N} : 1, 2, \dots$ или $\mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$

Определение

N (или, более точно, $\langle N, 0, (') \rangle$) соответствует аксиоматике Пеано, если следующее определено/выполнено:

1. Операция «штрих» $(') : N \rightarrow N$, причём нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$.
Если $x = y'$, то x назовём следующим за y , а y — предшествующим x .
2. Константа $0 \in N$: нет $x \in N$, что $x' = 0$.
3. Индукция. Каково бы ни было свойство («предикат») $P : N \rightarrow V$, если:
 - 3.1 $P(0)$
 - 3.2 При любом $x \in N$ из $P(x)$ следует $P(x')$то при любом $x \in N$ выполнено $P(x)$.

Как построить? Например, в стиле алгебры Линденбаума:

1. N — язык, порождённый грамматикой $\nu ::= 0 \mid \nu \langle ' \rangle$

Натуральные числа

$\mathbb{N} : 1, 2, \dots$ или $\mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$

Определение

N (или, более точно, $\langle N, 0, (') \rangle$) соответствует аксиоматике Пеано, если следующее определено/выполнено:

1. Операция «штрих» $(') : N \rightarrow N$, причём нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$.
Если $x = y'$, то x назовём следующим за y , а y — предшествующим x .
2. Константа $0 \in N$: нет $x \in N$, что $x' = 0$.
3. Индукция. Каково бы ни было свойство («предикат») $P : N \rightarrow V$, если:
 - 3.1 $P(0)$
 - 3.2 При любом $x \in N$ из $P(x)$ следует $P(x')$то при любом $x \in N$ выполнено $P(x)$.

Как построить? Например, в стиле алгебры Линденбаума:

1. N — язык, порождённый грамматикой $\nu ::= 0 \mid \nu \langle ' \rangle$
2. 0 — это «0», x' — это $x \dashv \langle ' \rangle$

Примеры: что не соответствует аксиомам Пеано

1. \mathbb{Z} , где $x' = x^2$

Примеры: что не соответствует аксиомам Пеано

1. \mathbb{Z} , где $x' = x^2$

Функция «штрих» не инъективна: $-3^2 = 3^2 = 9$

Примеры: что не соответствует аксиомам Пеано

1. \mathbb{Z} , где $x' = x^2$

Функция «штрих» не инъективна: $-3^2 = 3^2 = 9$

2. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, где $x' = x + 1$

Примеры: что не соответствует аксиомам Пеано

1. \mathbb{Z} , где $x' = x^2$

Функция «штрих» не инъективна: $-3^2 = 3^2 = 9$

2. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, где $x' = x + 1$

$6' = 0$, что нарушает свойства 0

Примеры: что не соответствует аксиомам Пеано

1. \mathbb{Z} , где $x' = x^2$

Функция «штрих» не инъективна: $-3^2 = 3^2 = 9$

2. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, где $x' = x + 1$

$6' = 0$, что нарушает свойства 0

3. $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, где $x' = x + 1$

Примеры: что не соответствует аксиомам Пеано

1. \mathbb{Z} , где $x' = x^2$

Функция «штрих» не инъективна: $-3^2 = 3^2 = 9$

2. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, где $x' = x + 1$

$6' = 0$, что нарушает свойства 0

3. $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, где $x' = x + 1$

пусть $P(x)$ означает « $x \in \mathbb{Z}$ »:

Примеры: что не соответствует аксиомам Пеано

1. \mathbb{Z} , где $x' = x^2$

Функция «штрих» не инъективна: $-3^2 = 3^2 = 9$

2. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, где $x' = x + 1$

$6' = 0$, что нарушает свойства 0

3. $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, где $x' = x + 1$

пусть $P(x)$ означает « $x \in \mathbb{Z}$ »:

3.1 $P(0)$ выполнено: $0 \in \mathbb{Z}$.

Примеры: что не соответствует аксиомам Пеано

1. \mathbb{Z} , где $x' = x^2$

Функция «штрих» не инъективна: $-3^2 = 3^2 = 9$

2. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, где $x' = x + 1$

$6' = 0$, что нарушает свойства 0

3. $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, где $x' = x + 1$

пусть $P(x)$ означает « $x \in \mathbb{Z}$ »:

3.1 $P(0)$ выполнено: $0 \in \mathbb{Z}$.

3.2 Если $P(x)$, то есть $x \in \mathbb{Z}$, то и $x + 1 \in \mathbb{Z}$ — так что и $P(x')$ выполнено.

Примеры: что не соответствует аксиомам Пеано

1. \mathbb{Z} , где $x' = x^2$

Функция «штрих» не инъективна: $-3^2 = 3^2 = 9$

2. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, где $x' = x + 1$

$6' = 0$, что нарушает свойства 0

3. $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, где $x' = x + 1$

пусть $P(x)$ означает « $x \in \mathbb{Z}$ »:

3.1 $P(0)$ выполнено: $0 \in \mathbb{Z}$.

3.2 Если $P(x)$, то есть $x \in \mathbb{Z}$, то и $x + 1 \in \mathbb{Z}$ — так что и $P(x')$ выполнено.

Однако, $P(0.5)$ ложно.

Пример доказательства

Теорема

0 единственен: если t таков, что при любом y выполнено $y' \neq t$, то $t = 0$.

Пример доказательства

Теорема

0 единственен: если t таков, что при любом y выполнено $y' \neq t$, то $t = 0$.

Доказательство.

- Определим $P(x)$ как «либо $x = 0$, либо $x = y'$ для некоторого $y \in N$ ».

Пример доказательства

Теорема

0 единственен: если t таков, что при любом y выполнено $y' \neq t$, то $t = 0$.

Доказательство.

- ▶ Определим $P(x)$ как «либо $x = 0$, либо $x = y'$ для некоторого $y \in N$ ».
1. $P(0)$ выполнено, так как $0 = 0$.

Пример доказательства

Теорема

0 единственен: если t таков, что при любом y выполнено $y' \neq t$, то $t = 0$.

Доказательство.

- ▶ Определим $P(x)$ как «либо $x = 0$, либо $x = y'$ для некоторого $y \in N$ ».
 1. $P(0)$ выполнено, так как $0 = 0$.
 2. Если $P(x)$ выполнено, то возьмём x в качестве y : тогда для $P(x')$ будет выполнено $x' = y'$.

Пример доказательства

Теорема

0 единственен: если t таков, что при любом y выполнено $y' \neq t$, то $t = 0$.

Доказательство.

- ▶ Определим $P(x)$ как «либо $x = 0$, либо $x = y'$ для некоторого $y \in N$ ».
 1. $P(0)$ выполнено, так как $0 = 0$.
 2. Если $P(x)$ выполнено, то возьмём x в качестве y : тогда для $P(x')$ будет выполнено $x' = y'$.

Значит, $P(x)$ для любого $x \in N$.

Пример доказательства

Теорема

0 единственен: если t таков, что при любом y выполнено $y' \neq t$, то $t = 0$.

Доказательство.

- ▶ Определим $P(x)$ как «либо $x = 0$, либо $x = y'$ для некоторого $y \in N$ ».
 1. $P(0)$ выполнено, так как $0 = 0$.
 2. Если $P(x)$ выполнено, то возьмём x в качестве y : тогда для $P(x')$ будет выполнено $x' = y'$.

Значит, $P(x)$ для любого $x \in N$.

- ▶ Рассмотрим $P(t)$: «либо $t = 0$, либо $t = y'$ для некоторого $y \in N$ ». Но так как такого y нет, то неизбежно $t = 0$.



Обозначения и определения

Определение

$$1 = 0', 2 = 0'', 3 = 0''', 4 = 0'''', 5 = 0''''', 6 = 0'''''', 7 = 0''''''', 8 = 0'''''''', 9 = 0'''''''''$$

Обозначения и определения

Определение

$$1 = 0', 2 = 0'', 3 = 0''', 4 = 0'''', 5 = 0''''', 6 = 0'''''', 7 = 0''''''', 8 = 0'''''''', 9 = 0'''''''''$$

Определение

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Обозначения и определения

Определение

$$1 = 0', 2 = 0'', 3 = 0''', 4 = 0'''', 5 = 0''''', 6 = 0'''''', 7 = 0''''''', 8 = 0'''''''', 9 = 0'''''''''$$

Определение

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Например,

$$2 + 2 = 0'' + 0'' =$$

Обозначения и определения

Определение

$$1 = 0', 2 = 0'', 3 = 0''', 4 = 0'''', 5 = 0''''', 6 = 0'''''', 7 = 0''''''', 8 = 0'''''''', 9 = 0'''''''''$$

Определение

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Например,

$$2 + 2 = 0'' + 0'' = (0'' + 0')' =$$

Обозначения и определения

Определение

$$1 = 0', 2 = 0'', 3 = 0''', 4 = 0'''', 5 = 0''''', 6 = 0'''''', 7 = 0''''''', 8 = 0'''''''', 9 = 0'''''''''$$

Определение

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Например,

$$2 + 2 = 0'' + 0'' = (0'' + 0')' = ((0'' + 0)')' =$$

Обозначения и определения

Определение

$$1 = 0', 2 = 0'', 3 = 0''', 4 = 0'''', 5 = 0''''', 6 = 0'''''', 7 = 0''''''', 8 = 0'''''''', 9 = 0'''''''''$$

Определение

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Например,

$$2 + 2 = 0'' + 0'' = (0'' + 0')' = ((0'' + 0)')' = ((0'')')' = 0''' = 4$$

Обозначения и определения

Определение

$$1 = 0', 2 = 0'', 3 = 0''', 4 = 0'''', 5 = 0''''', 6 = 0'''''', 7 = 0''''''', 8 = 0'''''''', 9 = 0'''''''''$$

Определение

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Например,

$$2 + 2 = 0'' + 0'' = (0'' + 0')' = ((0'' + 0)')' = ((0'')')' = 0''' = 4$$

Определение

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \text{если } b = 0 \\ a \cdot c + a, & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

Доказательство.

Пусть $P(x)$ — это $x + 0 = 0 + x$.

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

Доказательство.

Пусть $P(x)$ — это $x + 0 = 0 + x$.

1. Покажем $P(0)$. $0 + 0 = 0 + 0$

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $P(x)$ — это $x + 0 = 0 + x$.

1. Покажем $P(0)$. $0 + 0 = 0 + 0$
2. Покажем, что если $P(x)$, то $P(x')$. Покажем $P(x')$, то есть $x' + 0 = \dots$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $P(x)$ — это $x + 0 = 0 + x$.

1. Покажем $P(0)$. $0 + 0 = 0 + 0$

2. Покажем, что если $P(x)$, то $P(x')$. Покажем $P(x')$, то есть $x' + 0 = \dots$

$$\dots = x' \qquad a = x', b = 0: \quad x' + 0 \Rightarrow x'$$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $P(x)$ — это $x + 0 = 0 + x$.

1. Покажем $P(0)$. $0 + 0 = 0 + 0$

2. Покажем, что если $P(x)$, то $P(x')$. Покажем $P(x')$, то есть $x' + 0 = \dots$

$$\dots = x' \qquad a = x', b = 0: \quad x' + 0 \Rightarrow x'$$

$$\dots = (x)'$$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $P(x)$ — это $x + 0 = 0 + x$.

1. Покажем $P(0)$. $0 + 0 = 0 + 0$

2. Покажем, что если $P(x)$, то $P(x')$. Покажем $P(x')$, то есть $x' + 0 = \dots$

$$\dots = x' \quad a = x', b = 0: \quad x' + 0 \Rightarrow x'$$

$$\dots = (x)'$$

$$\dots = (x + 0)' \quad a = x, b = 0: \quad (x + 0) \Leftarrow (x)$$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $P(x)$ — это $x + 0 = 0 + x$.

1. Покажем $P(0)$. $0 + 0 = 0 + 0$

2. Покажем, что если $P(x)$, то $P(x')$. Покажем $P(x')$, то есть $x' + 0 = \dots$

$$\dots = x' \qquad a = x', b = 0: \quad x' + 0 \Rightarrow x'$$

$$\dots = (x)'$$

$$\dots = (x + 0)' \qquad a = x, b = 0: \quad (x + 0) \Leftarrow (x)$$

$$\dots = (0 + x)' \qquad P(x): \quad (x + 0) \Rightarrow (0 + x)$$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $P(x)$ — это $x + 0 = 0 + x$.

1. Покажем $P(0)$. $0 + 0 = 0 + 0$

2. Покажем, что если $P(x)$, то $P(x')$. Покажем $P(x')$, то есть $x' + 0 = \dots$

$$\dots = x' \quad a = x', b = 0: \quad x' + 0 \Rightarrow x'$$

$$\dots = (x)'$$

$$\dots = (x + 0)' \quad a = x, b = 0: \quad (x + 0) \Leftarrow (x)$$

$$\dots = (0 + x)' \quad P(x): \quad (x + 0) \Rightarrow (0 + x)$$

$$\dots = 0 + x' \quad a = 0, b = x': \quad 0 + x' \Leftarrow (0 + x)'$$

Пример: коммутативность сложения (лемма 1)

Лемма (1)

$$a + 0 = 0 + a$$

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $P(x)$ — это $x + 0 = 0 + x$.

1. Покажем $P(0)$. $0 + 0 = 0 + 0$

2. Покажем, что если $P(x)$, то $P(x')$. Покажем $P(x')$, то есть $x' + 0 = \dots$

$$\dots = x' \quad a = x', b = 0: \quad x' + 0 \Rightarrow x'$$

$$\dots = (x)'$$

$$\dots = (x + 0)' \quad a = x, b = 0: \quad (x + 0) \Leftarrow (x)$$

$$\dots = (0 + x)' \quad P(x): \quad (x + 0) \Rightarrow (0 + x)$$

$$\dots = 0 + x' \quad a = 0, b = x': \quad 0 + x' \Leftarrow (0 + x)'$$

Значит, $P(a)$ выполнено для любого $a \in N$.



Пример: коммутативность сложения (завершение)

Лемма (2)

$$a + b' = a' + b$$

Пример: коммутативность сложения (завершение)

Лемма (2)

$$a + b' = a' + b$$

Доказательство.

$$P(x) \text{ — это } a + x' = a' + x$$

Пример: коммутативность сложения (завершение)

Лемма (2)

$$a + b' = a' + b$$

Доказательство.

$P(x)$ — это $a + x' = a' + x$

1. $a + 0' = (a + 0)' = (a)' = a' = a' + 0$

Пример: коммутативность сложения (завершение)

Лемма (2)

$$a + b' = a' + b$$

Доказательство.

$P(x)$ — это $a + x' = a' + x$

1. $a + 0' = (a + 0)' = (a)' = a' = a' + 0$

2. Покажем, что $P(x')$ следует из $P(x)$: $a + x'' = (a + x')' = (a' + x)' = a' + x'$



Пример: коммутативность сложения (завершение)

Лемма (2)

$$a + b' = a' + b$$

Доказательство.

$P(x)$ — это $a + x' = a' + x$

1. $a + 0' = (a + 0)' = (a)' = a' = a' + 0$

2. Покажем, что $P(x')$ следует из $P(x)$: $a + x'' = (a + x')' = (a' + x)' = a' + x'$



Теорема

$$a + b = b + a$$

Пример: коммутативность сложения (завершение)

Лемма (2)

$$a + b' = a' + b$$

Доказательство.

$P(x)$ — это $a + x' = a' + x$

1. $a + 0' = (a + 0)' = (a)' = a' = a' + 0$

2. Покажем, что $P(x')$ следует из $P(x)$: $a + x'' = (a + x')' = (a' + x)' = a' + x'$



Теорема

$$a + b = b + a$$

Доказательство индукцией по b : $P(x)$ — это $a + x = x + a$.

1. $a + 0 = 0 + a$ (лемма 1)

Пример: коммутативность сложения (завершение)

Лемма (2)

$$a + b' = a' + b$$

Доказательство.

$P(x)$ — это $a + x' = a' + x$

1. $a + 0' = (a + 0)' = (a)' = a' = a' + 0$
2. Покажем, что $P(x')$ следует из $P(x)$: $a + x'' = (a + x')' = (a' + x)' = a' + x'$



Теорема

$$a + b = b + a$$

Доказательство индукцией по b : $P(x)$ — это $a + x = x + a$.

1. $a + 0 = 0 + a$ (лемма 1)
2. $a + x' = (a + x)' = (x + a)' = x + a' = x' + a$



Уточнение исчисления предикатов

- ▶ Пусть требуется доказывать утверждения про равенство. Введём $E(p, q)$ — предикат «равенство».

Уточнение исчисления предикатов

- ▶ Пусть требуется доказывать утверждения про равенство. Введём $E(p, q)$ — предикат «равенство».
- ▶ Однако, $\not\models E(p, q) \rightarrow E(q, p)$: если $D = \{0, 1\}$ и $E(p, q) ::= (p > q)$, то $\not\models E(p, q) \rightarrow E(q, p)$.

Уточнение исчисления предикатов

- ▶ Пусть требуется доказывать утверждения про равенство. Введём $E(p, q)$ — предикат «равенство».
- ▶ Однако, $\not\models E(p, q) \rightarrow E(q, p)$: если $D = \{0, 1\}$ и $E(p, q) ::= (p > q)$, то $\not\models E(p, q) \rightarrow E(q, p)$.
- ▶ Конечно, можем указывать $\forall p. \forall q. E(p, q) \rightarrow E(q, p) \vdash \varphi$.

Уточнение исчисления предикатов

- ▶ Пусть требуется доказывать утверждения про равенство. Введём $E(p, q)$ — предикат «равенство».
- ▶ Однако, $\not\models E(p, q) \rightarrow E(q, p)$: если $D = \{0, 1\}$ и $E(p, q) ::= (p > q)$, то $\not\models E(p, q) \rightarrow E(q, p)$.
- ▶ Конечно, можем указывать $\forall p. \forall q. E(p, q) \rightarrow E(q, p) \vdash \varphi$.
- ▶ Но лучше добавим аксиому $\forall p. \forall q. E(p, q) \rightarrow E(q, p)$.

Уточнение исчисления предикатов

- ▶ Пусть требуется доказывать утверждения про равенство. Введём $E(p, q)$ — предикат «равенство».
- ▶ Однако, $\not\models E(p, q) \rightarrow E(q, p)$: если $D = \{0, 1\}$ и $E(p, q) ::= (p > q)$, то $\not\models E(p, q) \rightarrow E(q, p)$.
- ▶ Конечно, можем указывать $\forall p. \forall q. E(p, q) \rightarrow E(q, p) \vdash \varphi$.
- ▶ Но лучше добавим аксиому $\forall p. \forall q. E(p, q) \rightarrow E(q, p)$.
- ▶ Добавив необходимые аксиомы, получим *теорию первого порядка*.

Теория первого порядка

Определение

Теорией первого порядка назовём исчисление предикатов с дополнительными («нелогическими» или «математическими»):

- ▶ *предикатными и функциональными символами;*
- ▶ *аксиомами.*

Сущности, взятые из исходного исчисления предикатов, назовём логическими

Порядок логики/теории

Порядок	Кванторы	Формализует суждения о...	Пример
нулевой	запрещены	об отдельных значениях	И.В.
первый	по предметным переменным	о множествах $S = \{t \mid \psi[x := t]\}$	И.П.
второй	по предикатным переменным	о множествах множеств $S = \{\{t \mid P(t)\} \mid \varphi[p := P]\}$	
	...		

Формальная арифметика

Определение

Формальная арифметика — теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими ...

- ▶ *двуместными функциональными символами $(+)$, (\cdot) ; одноместным функциональным символом $(')$, нульместным функциональным символом 0 ;*

Формальная арифметика

Определение

Формальная арифметика — теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими ...

- ▶ *двуместными функциональными символами $(+)$, (\cdot) ; одноместным функциональным символом $(')$, нульместным функциональным символом 0 ;*
- ▶ *двуместным предикатным символом $(=)$;*

Формальная арифметика

Определение

Формальная арифметика — теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими ...

- ▶ двуместными функциональными символами $(+)$, (\cdot) ; одноместным функциональным символом $(')$, нульместным функциональным символом 0 ;
- ▶ двуместным предикатным символом $(=)$;
- ▶ восемью нелогическими аксиомами:
 - (A1) $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$
 - (A2) $a = b \rightarrow a' = b'$
 - (A3) $a' = b' \rightarrow a = b$
 - (A4) $\neg a' = 0$
 - (A5) $a + 0 = a$
 - (A6) $a + b' = (a + b)'$
 - (A7) $a \cdot 0 = 0$
 - (A8) $a \cdot b' = a \cdot b + a$

Формальная арифметика

Определение

Формальная арифметика — теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими ...

- ▶ двуместными функциональными символами $(+)$, (\cdot) ; одноместным функциональным символом $(')$, нульместным функциональным символом 0 ;
- ▶ двуместным предикатным символом $(=)$;
- ▶ восемью нелогическими аксиомами:
 - (A1) $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$ (A5) $a + 0 = a$
 - (A2) $a = b \rightarrow a' = b'$ (A6) $a + b' = (a + b)'$
 - (A3) $a' = b' \rightarrow a = b$ (A7) $a \cdot 0 = 0$
 - (A4) $\neg a' = 0$ (A8) $a \cdot b' = a \cdot b + a$
- ▶ нелогической схемой аксиом индукции $\psi[x := 0] \ \& \ (\forall x. \psi \rightarrow \psi[x := x']) \rightarrow \psi$, с метапеременными x и ψ .

Докажем, что $a = a$

Пусть $\top ::= 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$, тогда:

Докажем, что $a = a$

Пусть $\top ::= 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$, тогда:

- (1) $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$ (Акс. A1)
- (2) $(a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow \top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ (Сх. акс. 1)
- (3) $\top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ (М.Р. 1, 2)
- (4) $\top \rightarrow (\forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ (Введ. \forall)

Докажем, что $a = a$

Пусть $\top ::= 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$, тогда:

- | | | |
|-----|--|--------------------|
| (1) | $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$ | (Акс. A1) |
| (2) | $(a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow \top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 1) |
| (3) | $\top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 1, 2) |
| (4) | $\top \rightarrow (\forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (5) | $\top \rightarrow (\forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (6) | $\top \rightarrow (\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |

Докажем, что $a = a$

Пусть $\top ::= 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$, тогда:

- | | | |
|-----|--|--------------------|
| (1) | $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$ | (Акс. A1) |
| (2) | $(a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow \top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 1) |
| (3) | $\top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 1, 2) |
| (4) | $\top \rightarrow (\forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (5) | $\top \rightarrow (\forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (6) | $\top \rightarrow (\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (7) | \top | (Сх. акс 1) |
| (8) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 7, 6) |

Докажем, что $a = a$

Пусть $\top ::= 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$, тогда:

- | | | |
|-----|---|--------------------|
| (1) | $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$ | (Акс. A1) |
| (2) | $(a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow \top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 1) |
| (3) | $\top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 1, 2) |
| (4) | $\top \rightarrow (\forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (5) | $\top \rightarrow (\forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (6) | $\top \rightarrow (\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (7) | \top | (Сх. акс 1) |
| (8) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 7, 6) |
| (9) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow$
$\rightarrow (\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 11) |

Докажем, что $a = a$

Пусть $\top ::= 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$, тогда:

- | | | |
|------|---|--------------------|
| (1) | $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$ | (Акс. A1) |
| (2) | $(a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow \top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 1) |
| (3) | $\top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 1, 2) |
| (4) | $\top \rightarrow (\forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (5) | $\top \rightarrow (\forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (6) | $\top \rightarrow (\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (7) | \top | (Сх. акс 1) |
| (8) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 7, 6) |
| (9) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow$
$\rightarrow (\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 11) |
| (10) | $\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c$ | (М.Р. 8, 9) |

Докажем, что $a = a$

Пусть $\top ::= 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$, тогда:

- | | | |
|------|---|--------------------|
| (1) | $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$ | (Акс. A1) |
| (2) | $(a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow \top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 1) |
| (3) | $\top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 1, 2) |
| (4) | $\top \rightarrow (\forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (5) | $\top \rightarrow (\forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (6) | $\top \rightarrow (\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (7) | \top | (Сх. акс 1) |
| (8) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 7, 6) |
| (9) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow$
$\rightarrow (\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 11) |
| (10) | $\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c$ | (М.Р. 8, 9) |
| (12) | $\forall c. a + 0 = a \rightarrow a + 0 = c \rightarrow a = c$ | (М.Р. 10, 11) |

Докажем, что $a = a$

Пусть $\top ::= 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$, тогда:

- | | | |
|------|---|--------------------|
| (1) | $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$ | (Акс. A1) |
| (2) | $(a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow \top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 1) |
| (3) | $\top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 1, 2) |
| (4) | $\top \rightarrow (\forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (5) | $\top \rightarrow (\forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (6) | $\top \rightarrow (\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (7) | \top | (Сх. акс 1) |
| (8) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 7, 6) |
| (9) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow$
$\rightarrow (\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 11) |
| (10) | $\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c$ | (М.Р. 8, 9) |
| (12) | $\forall c. a + 0 = a \rightarrow a + 0 = c \rightarrow a = c$ | (М.Р. 10, 11) |
| (14) | $a + 0 = a \rightarrow a + 0 = a \rightarrow a = a$ | (М.Р. 12, 13) |

Докажем, что $a = a$

Пусть $\top ::= 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$, тогда:

- | | | |
|------|---|--------------------|
| (1) | $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$ | (Акс. A1) |
| (2) | $(a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow \top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 1) |
| (3) | $\top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 1, 2) |
| (4) | $\top \rightarrow (\forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (5) | $\top \rightarrow (\forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (6) | $\top \rightarrow (\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (7) | \top | (Сх. акс 1) |
| (8) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 7, 6) |
| (9) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow$
$\rightarrow (\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 11) |
| (10) | $\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c$ | (М.Р. 8, 9) |
| (12) | $\forall c. a + 0 = a \rightarrow a + 0 = c \rightarrow a = c$ | (М.Р. 10, 11) |
| (14) | $a + 0 = a \rightarrow a + 0 = a \rightarrow a = a$ | (М.Р. 12, 13) |
| (15) | $a + 0 = a$ | (Акс. A5) |
| (16) | $a + 0 = a \rightarrow a = a$ | (М.Р. 15, 14) |
| (17) | $a = a$ | (М.Р. 15, 16) |