

Теорема о корректности формальной арифметики

## Два вида индукции

### Определение

(Принцип математической индукции) Какое бы ни было  $\varphi(x)$ , если  $\varphi(0)$  и при всех  $x$  выполнено  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$ , то при всех  $x$  выполнено и само  $\varphi(x)$ .

### Определение

(Принцип полной математической индукции) Какое бы ни было  $\psi(x)$ , если  $\psi(0)$  и при всех  $x$  выполнено  $(\forall t. x < t \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \psi(x')$ , то при всех  $x$  выполнено и само  $\psi(x)$ .

### Теорема

Принципы математической индукции эквивалентны

### Доказательство.

$(\Rightarrow)$  взяв  $\varphi := \psi$ , имеем выполненность  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$ , значит,  $\forall x. \psi(x)$ .

## Два вида индукции

### Определение

(Принцип математической индукции) Какое бы ни было  $\varphi(x)$ , если  $\varphi(0)$  и при всех  $x$  выполнено  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$ , то при всех  $x$  выполнено и само  $\varphi(x)$ .

### Определение

(Принцип полной математической индукции) Какое бы ни было  $\psi(x)$ , если  $\psi(0)$  и при всех  $x$  выполнено  $(\forall t. x < t \rightarrow \psi(t)) \rightarrow \psi(x')$ , то при всех  $x$  выполнено и само  $\psi(x)$ .

### Теорема

Принципы математической индукции эквивалентны

### Доказательство.

$(\Rightarrow)$  взяв  $\varphi := \psi$ , имеем выполненность  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$ , значит,  $\forall x. \psi(x)$ .

$(\Leftarrow)$  возьмём  $\psi(x) := \forall t. t \leq x \rightarrow \varphi(t)$



# Трансфинитная индукция

## Теорема

*Принцип трансфинитной индукции. Если для  $\varphi(x)$  — некоторого утверждения теории множеств — выполнено:*

1.  $\varphi(\emptyset)$
  2. Если  $\forall u. u \in v \rightarrow \varphi(u)$ , то  $\varphi(v)$  (где  $v$  - это ординал)
- то  $\forall u. \varphi(u)$

# Индукция для натуральных чисел

## Лемма

Свойство индукции выполнено для натуральных чисел: если  $\varphi(0)$  и  $\forall x \in \mathbb{N}_0. f(x) \rightarrow f(x')$ , то  $\forall x \in \mathbb{N}_0. f(x)$ .

## Доказательство.

Пусть  $\varphi(\emptyset)$  и  $\forall u. (u \in \omega) \rightarrow \varphi(u) \rightarrow \varphi(u')$ . Рассмотрим  $\tau(n) = \forall u. u \in n \rightarrow \varphi(u)$ . Очевидно, что если  $m \in n$ , то  $\tau(n) \rightarrow \tau(m)$ . Значит, выполнены условия принципа трансфинитной индукции для  $\omega$ , отсюда  $\tau(\omega)$ , отсюда  $\forall u. (u \in \omega) \rightarrow \varphi(u)$ .  $\square$

## Исчисление $S_\infty$

1. Язык: связки  $\neg, \vee, \forall$ ; нелогические символы:  $(+), (\cdot), ('), 0, (=)$ .
2. Аксиомы: все истинные формулы вида  $\theta_1 = \theta_2$ ; все истинные отрицания формул вида  $\neg\theta_1 = \theta_2$  ( $\theta_i$  — термы без переменных).
3. Структурные (слабые) правила:

$$\frac{\zeta \vee \alpha \vee \beta \vee \delta}{\zeta \vee \beta \vee \alpha \vee \delta} \qquad \frac{\alpha \vee \alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta}$$

сильные правила

$$\frac{\delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta}{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta} \quad \frac{\alpha \vee \delta}{\neg\neg\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha[x := \theta] \vee \delta}{(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

и ещё два правила ...

## Ещё правила $S_\infty$

бесконечная индукция

$$\frac{\alpha[x := \bar{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{2}] \vee \delta \quad \dots}{(\forall x. \alpha) \vee \delta}$$

сечение

$$\frac{\zeta \vee \alpha \quad \neg \alpha \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Здесь:

$\alpha$  — секущая формула

Число связок в  $\neg \alpha$  — степень сечения.

## Дерево доказательства

1. Доказательства образуют деревья.
2. Каждой формуле в дереве сопоставим порядковое число (ординал).
3. Порядковое число заключения любого неструктурного правила строго больше порядкового числа его посылок (больше или равно в случае структурного правила).

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\overline{0 = 0}}{\dots}}{\overline{0' = 0'}} \quad \frac{\frac{\overline{0' = 0'}}{\dots}}{\overline{0'' = 0''}} \quad \dots}{\overline{0 = 0} \quad \overline{0' = 0'} \quad \overline{0'' = 0''} \quad \dots} \\
 (\forall a. a = a)_\omega
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\overline{0 = 0} \quad \overline{0' = 0'} \quad \overline{0'' = 0''} \quad \dots}{(\forall a. a = a)_1}
 \end{array}$$

4. Существует конечная максимальная степень сечения в дереве (назовём её степенью вывода).



# Любая теорема Ф.А. — теорема $S_\infty$

## Теорема

Если  $\vdash_{\text{фа}} \alpha$ , то  $\vdash_\infty |\alpha|_\infty$

## Теорема

Если Ф.А. противоречива, то противоречива и  $S_\infty$

## Пример

Обратное неверно:

$$\frac{\neg\omega(\bar{0}, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \quad \neg\omega(\bar{1}, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \quad \neg\omega(\bar{2}, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \quad \dots}{\forall x. \neg\omega(x, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner})}$$

# Обратимость правил

## Теорема

*Если формула  $\alpha$  доказана и имеет вид, похожий на заключение правил де Моргана, отрицания и бесконечной индукции — то посылки соответствующих правил могут быть получены из самой формулы  $\alpha$  доказательством, причём доказательством с не большей степенью и не большим порядком.*

## Доказательство.

Например, формула вида  $\neg\neg\alpha \vee \delta$ .

# Обратимость правил

## Теорема

*Если формула  $\alpha$  доказана и имеет вид, похожий на заключение правил де Моргана, отрицания и бесконечной индукции — то посылки соответствующих правил могут быть получены из самой формулы  $\alpha$  доказательством, причём доказательством с не большей степенью и не большим порядком.*

## Доказательство.

Например, формула вида  $\neg\neg\alpha \vee \delta$ .

Проследим историю  $\alpha$ ; она получена:

1. ослаблением — заменим  $\neg\neg\alpha$  на  $\alpha$  в этом узле и последующих.
2. отрицанием — выбросим правило, заменим  $\neg\neg\alpha$  на  $\alpha$  в последующих.

Изменённый вывод — доказательство требуемого.



# Устранение сечений

## Теорема

Если  $\alpha$  имеет вывод степени  $m > 0$  порядка  $t$ , то можно найти вывод степени строго меньшей  $m$  с порядком  $2^t$ .

## Доказательство.

Трансфинитная индукция по порядку  $t$ .

1. База. Если  $t = 0$ , то неструктурных правил нет, отсюда  $m = 0$ .
2. Переход. Рассмотрим заключительное правило.
  - 2.1 Не сечение.
  - 2.2 Сечение, секущая формула — элементарная.
  - 2.3 Сечение, секущая формула —  $\neg\alpha$ .
  - 2.4 Сечение, секущая формула —  $\alpha \vee \beta$ .
  - 2.5 Сечение, секущая формула —  $\forall x.\alpha$ .



## Случай 1. Не сечение

$$\frac{\pi_{t_0} \quad \pi_{t_1} \quad \pi_{t_2} \quad \dots}{\alpha}$$

Заменяем доказательства посылок  $\pi_i$  по индукционному предположению.

1. Если  $m'_i < m_i$ , то  $\max m'_i < \max m_i$
2. Если  $t_i \leq t$ , то  $2^{t_i} \leq 2^t$ .

## Случай 2.4. Сечение с формулой вида $\forall x.\alpha$

$$\frac{\zeta \vee \forall x.\alpha \quad \neg(\forall x.\alpha) \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Причём степень и порядок выводов компонент, соответственно,  $(m_1, t_1)$  и  $(m_2, t_2)$ .

1. По индукции, вывод  $\zeta \vee \forall x.\alpha$  можно упростить до  $(m'_1, 2^{t_1})$ .
2. По обратимости, для постоянного  $\theta$  можно построить вывод  $\zeta \vee \alpha[x := \theta]$  за  $(m'_1, 2^{t_1})$ .
3. В формуле  $(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta$  формула  $\neg\forall x.\alpha$  получена либо ослаблением, либо квантификацией из  $\neg\alpha[x := \theta_k] \vee \delta_k$ .

3.1 Каждое правило квантификации заменим на:

$$\frac{\zeta \vee \alpha[x := \theta_k] \quad (\neg\alpha[x := \theta_k]) \vee \delta_k}{\zeta \vee \delta_k}$$

3.2 Остальные вхождения  $\neg\forall x.\alpha$  заменим на  $\zeta$  (в правилах ослабления).

4. В получившемся дереве меньше степень — так как в  $\neg\alpha[x := \theta]$  меньше связок, чем в  $\neg\forall x.\alpha$ .
5. Нумерацию можно также перестроить.

# Теорема об устранении сечений

## Определение

*Итерационная экспонента*

$$(a \uparrow)^m(t) = \begin{cases} t, & m = 0 \\ a^{(a \uparrow)^{m-1}(t)}, & m > 0 \end{cases}$$

## Теорема

Если  $\vdash_{\infty} \sigma$  степени  $m$  порядка  $t$ , то найдётся доказательство без сечений порядка  $(2 \uparrow)^m(t)$

## Доказательство.

В силу конечности  $m$  воспользуемся индукцией по  $m$  и теоремой об уменьшении степени.



# Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

*Система  $S_{\infty}$  непротиворечива*

Доказательство.



# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана?

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_{\infty}$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_{\infty}$ , то она выводима и в  $S_{\infty}$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).
2. Отрицание?

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ( $\neg\neg\alpha \vee \delta$ ).

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ( $\neg\neg\alpha \vee \delta$ ).
3. Бесконечная индукция или квантификация?

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ( $\neg\neg\alpha \vee \delta$ ).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ( $\neg\neg\alpha \vee \delta$ ).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление?



# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_{\infty}$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_{\infty}$ , то она выводима и в  $S_{\infty}$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ( $\neg\neg\alpha \vee \delta$ ).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление? Нет дизъюнкции ( $\alpha \vee \delta$ ).

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ( $\neg\neg\alpha \vee \delta$ ).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление? Нет дизъюнкции ( $\alpha \vee \delta$ ).

То есть, неизбежно,  $\neg 0 = 0$  — аксиома, что также неверно.

