

# Теория множеств

# Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$

## Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$
2.  $X = \{x \mid x \notin x\}$ . Выполнено ли  $X \in X$ ?

## Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$
2.  $X = \{x \mid x \notin x\}$ . Выполнено ли  $X \in X$ ?
3. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?

# Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$
2.  $X = \{x \mid x \notin x\}$ . Выполнено ли  $X \in X$ ?
3. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
4. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.

# Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$
2.  $X = \{x \mid x \notin x\}$ . Выполнено ли  $X \in X$ ?
3. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
4. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
5. Что такое множество? Не будем отвечать, поступим иначе.

# Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$
2.  $X = \{x \mid x \notin x\}$ . Выполнено ли  $X \in X$ ?
3. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
4. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
5. Что такое множество? Не будем отвечать, поступим иначе.

## Определение

*Теория множеств — теория первого порядка, с дополнительным нелогическим двухместным функциональным символом  $\in$ , и следующими дополнительными нелогическими аксиомами и схемами аксиом.*

# Аксиоматика ZF, равенство

## Определение

*Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.*

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.



# Аксиоматика ZF, равенство

## Определение

*Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.*

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

## Определение

*Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей*

# Аксиоматика ZF, равенство

## Определение

*Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.*

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

## Определение

*Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей*

## Определение

$$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

# Аксиоматика ZF, равенство

## Определение

*Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.*

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

## Определение

*Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей*

## Определение

$$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

$$A = B \equiv A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A$$

# Аксиоматика ZF, равенство

## Определение

*Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.*

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

## Определение

*Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей*

## Определение

$$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

$$A = B \equiv A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A$$

## Определение

*Аксиома равенства: равные множества содержатся в одних и тех же множествах.*

$$\forall x. \forall y. \forall z. x = y \ \& \ x \in z \rightarrow y \in z.$$

# Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

## Определение

*Аксиома пустого. Существует пустое множество  $\emptyset$ .*

$$\exists s. \forall t. \neg t \in s$$

# Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

## Определение

*Аксиома пустого. Существует пустое множество  $\emptyset$ .*

$$\exists s. \forall t. \neg t \in s$$

## Определение

*Аксиома пары. Существует  $\{a, b\}$ . Каковы бы ни были два множества  $a$  и  $b$ , существует множество, состоящее в точности из них.*

$$\forall a. \forall b. \exists s. a \in s \ \& \ b \in s \ \& \ \forall c. c \in s \rightarrow c = a \vee c = b$$

## Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

### Определение

*Аксиома объединения: существует  $\cup x$ . Для любого непустого множества  $x$  найдется такое множество, которое состоит в точности из тех элементов, из которых состоят элементы  $x$ .*

$$\forall x. (\exists y. y \in x) \rightarrow \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow \exists s. y \in s \ \& \ s \in x$$

## Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

### Определение

*Аксиома объединения: существует  $\cup x$ . Для любого непустого множества  $x$  найдется такое множество, которое состоит в точности из тех элементов, из которых состоят элементы  $x$ .*

$$\forall x. (\exists y. y \in x) \rightarrow \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow \exists s. y \in s \ \& \ s \in x$$

### Определение

*Аксиома степени: существует  $\mathcal{P}(x)$ . Каково бы ни было множество  $x$ , существует множество, содержащее в точности все возможные подмножества множества  $x$ .*

$$\forall x. \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow y \subseteq x$$



# Аксиоматика ZF. Схема аксиом выделения

## Определение

*Схема аксиом выделения: существует  $\{t \in x \mid \varphi(t)\}$ . Для любого множества  $x$  и любой формулы от одного аргумента  $\varphi(y)$  ( $b$  не входит свободно в  $\varphi$ ), найдется  $b$ , в которое входят те и только те элементы из множества  $x$ , что  $\varphi(y)$  истинно.*

$$\forall x. \exists b. \forall y. y \in b \leftrightarrow (y \in x \ \& \ \varphi(y))$$

## Немного теорем

### Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

## Немного теорем

### Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

### Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары:  $\{X, X\}$



## Немного теорем

### Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

### Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары:  $\{X, X\}$



### Теорема

*Пустое множество единственно.*

## Немного теорем

### Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

### Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары:  $\{X, X\}$



### Теорема

*Пустое множество единственно.*

### Доказательство.

Пусть  $\forall p. \neg p \in s$  и  $\forall p. \neg p \in t$ . Тогда  $s \subseteq t$  и  $t \subseteq s$ .



## Немного теорем

### Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

### Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары:  $\{X, X\}$



### Теорема

*Пустое множество единственно.*

### Доказательство.

Пусть  $\forall p. \neg p \in s$  и  $\forall p. \neg p \in t$ . Тогда  $s \subseteq t$  и  $t \subseteq s$ .



### Теорема

*Для двух множеств  $s$  и  $t$  существует множество, являющееся их пересечением.*

## Немного теорем

### Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

### Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары:  $\{X, X\}$



### Теорема

*Пустое множество единственно.*

### Доказательство.

Пусть  $\forall p. \neg p \in s$  и  $\forall p. \neg p \in t$ . Тогда  $s \subseteq t$  и  $t \subseteq s$ .



### Теорема

*Для двух множеств  $s$  и  $t$  существует множество, являющееся их пересечением.*

### Доказательство.

$$s \cap t = \{x \in s \mid x \in t\}$$



# Упорядоченная пара

## Определение

*Упорядоченная пара. Упорядоченной парой двух множеств  $a$  и  $b$  назовём  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ , или  $\langle a, b \rangle$*

## Теорема

*Упорядоченную пару можно построить для любых множеств.*

## Доказательство.

Применить аксиому пары, теорему о существовании  $\{X\}$ , аксиому пары.



## Теорема

*$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$  тогда и только тогда, когда  $a = c$  и  $b = d$ .*



# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:*  $x' \equiv x \cup \{x\}$

# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:*  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

*Аксиома бесконечности.* Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

# Аксиома бесконечности

## Определение

Инкремент:  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

Аксиома бесконечности. Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset$

# Аксиома бесконечности

## Определение

Инкремент:  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

Аксиома бесконечности. Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset, \{\emptyset\}$

# Аксиома бесконечности

## Определение

Инкремент:  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

Аксиома бесконечности. Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$

# Аксиома бесконечности

## Определение

Инкремент:  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

Аксиома бесконечности. Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$   
...

# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:*  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

*Аксиома бесконечности.* Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$   
...

(неформально)  $\omega = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots\}$ .

# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:*  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

*Аксиома бесконечности.* Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$   
...

(неформально)  $\omega = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots\}$ . Тогда  $N_1 = \omega \cup \{\omega, \omega', \omega'', \dots\}$  подходит.



## Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).

## Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).
2. Линейный: частичный +  $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$ .

## Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).
2. Линейный: частичный +  $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$ .
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

## Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).
2. Линейный: частичный +  $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$ .
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

### Пример

$\mathbb{Z}$  не вполне упорядочено: в  $\mathbb{Z}$  нет наименьшего.

## Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).
2. Линейный: частичный +  $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$ .
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

### Пример

$\mathbb{Z}$  не вполне упорядочено: в  $\mathbb{Z}$  нет наименьшего.

### Пример

Отрезок  $[0, 1]$  не вполне упорядочен:  $(0, 1)$  не имеет наименьшего.

## Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).
2. Линейный: частичный +  $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$ .
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

### Пример

$\mathbb{Z}$  не вполне упорядочено: в  $\mathbb{Z}$  нет наименьшего.

### Пример

Отрезок  $[0, 1]$  не вполне упорядочен:  $(0, 1)$  не имеет наименьшего.

### Пример

$\mathbb{N}$  вполне упорядочено.

# Ординалы

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

# Ординалы

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением  $(\in)$  транзитивное множество.



# Ординалы

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением  $(\in)$  транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset$ ,

# Ординалы

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением ( $\in$ ) транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset$ ,  $\emptyset'$ ,

# Ординалы

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением  $(\in)$  транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

# Ординалы

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением  $(\in)$  транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

## Определение

Предельный ординал: такой  $x$ , что  $x \neq \emptyset$  и нет  $y : y' = x$

# Ординалы

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением  $(\in)$  транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

## Определение

Предельный ординал: такой  $x$ , что  $x \neq \emptyset$  и нет  $y : y' = x$

## Определение

Ординал  $x$  конечный, если он меньше любого предельного.

# Ординалы

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением  $(\in)$  транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

## Определение

Предельный ординал: такой  $x$ , что  $x \neq \emptyset$  и нет  $y : y' = x$

## Определение

Ординал  $x$  конечный, если он меньше любого предельного.

## Теорема

Если  $x, y$  — ординалы, то  $x \in y$  или  $y \in x$ .

# Предельные ординалы, $\omega$

## Определение

$\omega$  — наименьший предельный ординал.

# Предельные ординалы, $\omega$

## Определение

$\omega$  — наименьший предельный ординал.

## Теорема

$\omega$  существует.



# Предельные ординалы, $\omega$

## Определение

$\omega$  — наименьший предельный ординал.

## Теорема

$\omega$  существует.

## Доказательство.

Пусть  $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$ . Пусть  $\theta$  таков, что  $\theta \in \omega$ . Тогда  $\theta$  конечен.

# Предельные ординалы, $\omega$

## Определение

$\omega$  — наименьший предельный ординал.

## Теорема

$\omega$  существует.

## Доказательство.

Пусть  $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$ . Пусть  $\theta$  таков, что  $\theta \in \omega$ . Тогда  $\theta$  конечен. Пусть  $\theta'$  таков, что  $\theta' = \omega$ . Тогда  $\theta \in \omega$ . □

## Пример

$\omega'$  — тоже ординал.

# Операции над ординалами

## Определение

$\sup x$  — *наименьший ординал, содержащий  $x$ :  $x \subseteq \sup x$ .*

# Операции над ординалами

## Определение

$\sup x$  — *наименьший ординал, содержащий  $x$ :  $x \subseteq \sup x$ .*

## Пример

$$\sup\{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \emptyset''', \emptyset''''\} =$$

# Операции над ординалами

## Определение

$\sup x$  — *наименьший ординал, содержащий  $x$ :  $x \subseteq \sup x$ .*

## Пример

$$\sup\{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \emptyset''', \emptyset''''\} = \emptyset''''$$

# Операции над ординалами

## Определение

$\sup x$  — наименьший ординал, содержащий  $x$ :  $x \subseteq \sup x$ .

## Пример

$$\sup\{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \emptyset''', \emptyset''''\} = \emptyset''''$$

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \emptyset \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ \sup\{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

# Операции над ординалами

## Определение

$\sup x$  — наименьший ординал, содержащий  $x$ :  $x \subseteq \sup x$ .

## Пример

$$\sup\{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \emptyset''', \emptyset''''\} = \emptyset''''$$

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \emptyset \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ \sup\{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Пример

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\};$$

# Операции над ординалами

## Определение

$\sup x$  — наименьший ординал, содержащий  $x$ :  $x \subseteq \sup x$ .

## Пример

$$\sup\{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \emptyset''', \emptyset''''\} = \emptyset''''$$

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \emptyset \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ \sup\{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Пример

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}; 1 + \omega = \sup\{1 + \emptyset, 1 + 1, 1 + 2, \dots\}$$



# Операции над ординалами

## Определение

$\sup x$  — наименьший ординал, содержащий  $x$ :  $x \subseteq \sup x$ .

## Пример

$$\sup\{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \emptyset''', \emptyset''''\} = \emptyset''''$$

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \emptyset \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ \sup\{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Пример

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}; 1 + \omega = \sup\{1 + \emptyset, 1 + 1, 1 + 2, \dots\} = \omega$$

## Ещё операции над ординалами

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \emptyset \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \sup\{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Ещё операции над ординалами

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \emptyset \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \sup\{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \emptyset \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ \sup\{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Ещё операции над ординалами

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \emptyset \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \sup\{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \emptyset \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ \sup\{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

### Пример

$$\omega \cdot \omega = \sup\{\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\}$$

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

*Гостиница с  $\omega$  номерами, въезжает постоялец.*

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

*Гостиница с  $\omega$  номерами, въезжает постоялец.  $1 + \omega = \omega$*

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

*Гостиница с  $\omega$  номерами, въезжает постоялец.  $1 + \omega = \omega$  Добавить элемент перед бесконечностью.*

## Пример

*Ввести особое значение  $+\infty$ .*

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

*Гостиница с  $\omega$  номерами, въезжает постоялец.  $1 + \omega = \omega$  Добавить элемент перед бесконечностью.*

## Пример

*Ввести особое значение  $+\infty$ .  $\omega + 1 \neq \omega$*



# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

*Гостиница с  $\omega$  номерами, въезжает постоялец.  $1 + \omega = \omega$  Добавить элемент перед бесконечностью.*

## Пример

*Ввести особое значение  $+\infty$ .  $\omega + 1 \neq \omega$  Добавить элемент после бесконечности.*

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

*Гостиница с  $\omega$  номерами, въезжает постоялец.  $1 + \omega = \omega$  Добавить элемент перед бесконечностью.*

## Пример

*Ввести особое значение  $+\infty$ .  $\omega + 1 \neq \omega$  Добавить элемент после бесконечности.*

## Пример

*Упорядочивание алгебраических типов.*

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

*Гостиница с  $\omega$  номерами, въезжает постоялец.  $1 + \omega = \omega$  Добавить элемент перед бесконечностью.*

## Пример

*Ввести особое значение  $+\infty$ .  $\omega + 1 \neq \omega$  Добавить элемент после бесконечности.*

## Пример

*Упорядочивание алгебраических типов.*

Neg of nat | Pos of nat

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

*Гостиница с  $\omega$  номерами, въезжает постоялец.  $1 + \omega = \omega$  Добавить элемент перед бесконечностью.*

## Пример

*Ввести особое значение  $+\infty$ .  $\omega + 1 \neq \omega$  Добавить элемент после бесконечности.*

## Пример

*Упорядочивание алгебраических типов.*

Neg of nat | Pos of nat

$\omega + \omega$  — в самом деле, Neg 5  $\prec$  Pos 5. Neg 5 в данном упорядочении соответствует 5, а Pos 5 соответствует  $\omega + 5$ .

# Дизъюнктные множества

## Определение

*Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.*

$$Dj(x) \equiv \forall y. \forall z. (y \in x \ \& \ z \in x \ \& \ \neg y = z) \rightarrow \neg \exists t. t \in y \ \& \ t \in z$$

# Дизъюнктивные множества

## Определение

*Дизъюнктивное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.*

$$Dj(x) \equiv \forall y. \forall z. (y \in x \ \& \ z \in x \ \& \ \neg y = z) \rightarrow \neg \exists t. t \in y \ \& \ t \in z$$

## Пример

*Дизъюнктивное:*  $\{\{1, 2\}, \{\rightarrow\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$

# Дизъюнктные множества

## Определение

*Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.*

$$Dj(x) \equiv \forall y. \forall z. (y \in x \ \& \ z \in x \ \& \ \neg y = z) \rightarrow \neg \exists t. t \in y \ \& \ t \in z$$

## Пример

*Дизъюнктное:*  $\{\{1, 2\}, \{\rightarrow\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$

*Не дизъюнктное:*  $\{\{1, 2\}, \{\rightarrow\}, \{\alpha, \beta, \gamma, 1\}\}$

# Прямое произведение множеств

## Определение

Прямое произведение дизъюнктного множества  $a$  — множество  $\times a$  всех таких множеств  $b$ , что:

- ▶  $b$  пересекается с каждым из элементов множества  $a$  в точности в одном элементе
- ▶  $b$  содержит элементы только из  $\cup a$ .

$$\forall b. b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \ \& \ \forall y. y \in a \rightarrow \exists! x. x \in y \ \& \ x \in b)$$



# Прямое произведение множеств

## Определение

Прямое произведение дизъюнктного множества  $a$  — множество  $\times a$  всех таких множеств  $b$ , что:

- ▶  $b$  пересекается с каждым из элементов множества  $a$  в точности в одном элементе
- ▶  $b$  содержит элементы только из  $\cup a$ .

$$\forall b. b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \ \& \ \forall y. y \in a \rightarrow \exists! x. x \in y \ \& \ x \in b)$$

## Пример

$$\times \{\{\triangle, \square\}, \{1, 2, 3\}\} = \{\{\triangle, 1\}, \{\triangle, 2\}, \{\triangle, 3\}, \{\square, 1\}, \{\square, 2\}, \{\square, 3\}\}$$

# Аксиома выбора

## Определение

*Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.*

$$\forall t. Dj(t) \rightarrow (\forall x. x \in t \rightarrow \exists p. p \in x) \rightarrow (\exists p. p \in \times t)$$

# Аксиома выбора

## Определение

*Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.*

$$\forall t. Dj(t) \rightarrow (\forall x. x \in t \rightarrow \exists p. p \in x) \rightarrow (\exists p. p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить,

# Аксиома выбора

## Определение

*Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.*

$$\forall t. Dj(t) \rightarrow (\forall x. x \in t \rightarrow \exists p. p \in x) \rightarrow (\exists p. p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить, любая сюръективная функция имеет частичную обратную, и т.п.

## Определение

*Аксиоматика  $ZF$  + аксиома выбора =  $ZFC$*

# Аксиома выбора

## Определение

*Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.*

$$\forall t. Dj(t) \rightarrow (\forall x. x \in t \rightarrow \exists p. p \in x) \rightarrow (\exists p. p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить, любая сюръективная функция имеет частичную обратную, и т.п.

## Определение

*Аксиоматика  $ZF$  + аксиома выбора =  $ZFC$*

# Дискуссия вокруг аксиомы выбора

## Пример

*Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям.*

# Дискуссия вокруг аксиомы выбора

## Пример

*Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям.*

## Теорема

*Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.*

# Дискуссия вокруг аксиомы выбора

## Пример

*Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям.*

## Теорема

*Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.*

## Теорема

*Теорема (Козэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.*



# Дискуссия вокруг аксиомы выбора

## Пример

*Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям.*

## Теорема

*Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.*

## Теорема

*Теорема (Козэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.*

## Пример

*Односторонние функции: Sha256 и т.п. У Sha256 есть обратная.*

# Дискуссия вокруг аксиомы выбора

## Пример

*Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям.*

## Теорема

*Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.*

## Теорема

*Теорема (Козэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.*

## Пример

*Односторонние функции: Sha256 и т.п. У Sha256 есть обратная.*

## Теорема

*Теорема Диаконеску: ZFC поверх интуиционистского исчисления предикатов содержит правило исключённого третьего.*

## Ещё аксиомы

### Определение

*Аксиома фундирования. В каждом непустом множестве найдется элемент, не пересекающийся с исходным множеством.*

$$\forall x. x = \emptyset \vee \exists y. y \in x \ \& \ y \cap x = \emptyset$$

Аксиома фундирования исключает множества, которые могут принадлежать сами себе (возможно, через цепочку принадлежностей):  $X \in Y \in Z \in X$

## Ещё аксиомы

### Определение

*Аксиома фундирования. В каждом непустом множестве найдется элемент, не пересекающийся с исходным множеством.*

$$\forall x. x \neq \emptyset \vee \exists y. y \in x \ \& \ y \cap x = \emptyset$$

Аксиома фундирования исключает множества, которые могут принадлежать сами себе (возможно, через цепочку принадлежностей):  $X \in Y \in Z \in X$

### Определение

*Схема аксиом подстановки. Если задана некоторая функция  $f$ , представимая в исчислении предикатов (то есть задана некоторая формула  $\phi$ , такая, что  $f(x) = y$  тогда и только тогда, когда  $\phi(x, y) \ \& \ \exists! z \phi(x, z)$ ), то для любого множества  $S$  существует множество  $f(S)$  — образ множества  $S$  при отображении  $f$ .*

$$\forall s. (\forall x. \forall y_1. \forall y_2. x \in s \ \& \ \phi(x, y_1) \ \& \ \phi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \rightarrow (\exists t. \forall y. y \in t \leftrightarrow \exists x. x \in s \ \& \ \phi(x, y))$$