

# Теорема Лёвенгейма-Сколема

## Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е.

$\langle j, y, n, p, r, c \rangle$ :

$j$  — гёделев номер названия научного журнала (книги);

$y$  — год издания;

$n$  — номер;

$p$  — страница;

$r$  — строка;

$c$  — позиция

## Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е.

$\langle j, y, n, p, r, c \rangle$ :

$j$  — гёделев номер названия научного журнала (книги);

$y$  — год издания;

$n$  — номер;

$p$  — страница;

$r$  — строка;

$c$  — позиция

2. Попробуете предъявить число  $x$ , не имеющее номера? Это рассуждение сразу даст номер.

# Мощность модели и аксиоматизации

## Определение

*Пусть задана модель  $\langle D, F_n, P_n \rangle$  для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность  $D$ .*

# Мощность модели и аксиоматизации

## Определение

*Пусть задана модель  $\langle D, F_n, P_n \rangle$  для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность  $D$ .*

## Определение

*Пусть задана формальная теория с аксиомами  $\alpha_n$ . Её мощность — мощность множества  $\{\alpha_n\}$ .*

# Мощность модели и аксиоматизации

## Определение

*Пусть задана модель  $\langle D, F_n, P_n \rangle$  для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность  $D$ .*

## Определение

*Пусть задана формальная теория с аксиомами  $\alpha_n$ . Её мощность — мощность множества  $\{\alpha_n\}$ .*

## Пример

*Формальная арифметика, исчисление предикатов, исчисление высказываний — счётно-аксиоматизируемые.*

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,



# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,  $F'_n, P'_n$  — сужение  $F_n, P_n$  (замкнутое на  $D'$ ).

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,  $F'_n, P'_n$  — сужение  $F_n, P_n$  (замкнутое на  $D'$ ).
2.  $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  при  $x_i \in D'$ .

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,  $F'_n, P'_n$  — сужение  $F_n, P_n$  (замкнутое на  $D'$ ).
2.  $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  при  $x_i \in D'$ .

## Пример

Когда сужение  $\mathcal{M}$  не является элементарной подмоделью?

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,  $F'_n, P'_n$  — сужение  $F_n, P_n$  (замкнутое на  $D'$ ).
2.  $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  при  $x_i \in D'$ .

## Пример

Когда сужение  $\mathcal{M}$  не является элементарной подмоделью?

$\forall x. \exists y. x \neq y$ . Истинно в  $\mathbb{N}$ .

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,  $F'_n, P'_n$  — сужение  $F_n, P_n$  (замкнутое на  $D'$ ).
2.  $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  при  $x_i \in D'$ .

## Пример

Когда сужение  $\mathcal{M}$  не является элементарной подмоделью?

$\forall x. \exists y. x \neq y$ . Истинно в  $\mathbb{N}$ . Но пусть  $D' = \{\square\}$ .

# Теорема Лёвенгейма-Сколема

## Теорема

*Пусть  $T$  — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель  $\mathcal{M}$ . Тогда найдётся элементарная подмодель  $\mathcal{M}'$ , причём  $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$ .*

# Теорема Лёвенгейма-Сколема

## Теорема

*Пусть  $T$  — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель  $\mathcal{M}$ . Тогда найдётся элементарная подмодель  $\mathcal{M}'$ , причём  $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$ .*

## Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим  $D_0$  — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.

# Теорема Лёвенгейма-Сколема

## Теорема

*Пусть  $T$  — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель  $M$ . Тогда найдётся элементарная подмодель  $M'$ , причём  $|M'| = \max(\aleph_0, |T|)$ .*

## Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим  $D_0$  — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.
2. Будем последовательно пополнять  $D_i$ :  $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \dots$ , следя за мощностью.  $D' = \bigcup D_i$ .
3. Покажем, что  $\langle D', F_n, P_n \rangle$  — требуемая подмодель.





Начальный  $D_0$

Пусть  $\{f_k^0\}$  — все 0-местные функциональные символы теории.

## Начальный $D_0$

Пусть  $\{f_k^0\}$  — все 0-местные функциональные символы теории.

1.  $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$ , если есть хотя бы один  $f_k^0$ .

## Начальный $D_0$

Пусть  $\{f_k^0\}$  — все 0-местные функциональные символы теории.

1.  $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$ , если есть хотя бы один  $f_k^0$ .
2. Если таких  $f_k^0$  нет, возьмём какое-нибудь одно значение из  $D$ .

## Начальный $D_0$

Пусть  $\{f_k^0\}$  — все 0-местные функциональные символы теории.

1.  $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$ , если есть хотя бы один  $f_k^0$ .
2. Если таких  $f_k^0$  нет, возьмём какое-нибудь одно значение из  $D$ .

## Начальный $D_0$

Пусть  $\{f_k^0\}$  — все 0-местные функциональные символы теории.

1.  $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$ , если есть хотя бы один  $f_k^0$ .
2. Если таких  $f_k^0$  нет, возьмём какое-нибудь одно значение из  $D$ .

Очевидно,  $|D_0| \leq |T|$ .

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .



## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем
  - 2.2  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y \in D$  и  $x_i \in D_k$  либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории. Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем
  - 2.2  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y \in D$  и  $x_i \in D_k$  либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
  - 2.3  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  тождественно истинен или ложен, но при  $y' \in D \setminus D_k$  отличается — добавим  $y'$  к  $D_{k+1}$ .

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем
  - 2.2  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y \in D$  и  $x_i \in D_k$  либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
  - 2.3  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  тождественно истинен или ложен, но при  $y' \in D \setminus D_k$  отличается — добавим  $y'$  к  $D_{k+1}$ . Вместе добавим всевозможные  $\llbracket \theta(y') \rrbracket$ .

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем
  - 2.2  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y \in D$  и  $x_i \in D_k$  либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
  - 2.3  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  тождественно истинен или ложен, но при  $y' \in D \setminus D_k$  отличается — добавим  $y'$  к  $D_{k+1}$ . Вместе добавим всевозможные  $\llbracket \theta(y') \rrbracket$ .

Всего добавили не больше  $|T| \cdot |D_k|$ .

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории. Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем
  - 2.2  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y \in D$  и  $x_i \in D_k$  либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
  - 2.3  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  тождественно истинен или ложен, но при  $y' \in D \setminus D_k$  отличается — добавим  $y'$  к  $D_{k+1}$ . Вместе добавим всевозможные  $\llbracket \theta(y') \rrbracket$ .

Всего добавили не больше  $|T| \cdot |D_k| \cdot |\cup D_i| \leq |T| \cdot |D_k| \cdot |\aleph_0| = \max(|T|, |\aleph_0|)$

$\mathcal{M}'$  — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ .



## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ .

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ . Каждый  $x_i$  добавлен на каком-то шаге — максимум  $t$ .

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ . Каждый  $x_i$  добавлен на каком-то шаге — максимум  $t$ . Если  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  бывает истинен и ложен при  $y_t, y_f \in D$ , то  $y_t, y_f \in D_{t+1}$  (по построению).

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ . Каждый  $x_i$  добавлен на каком-то шаге — максимум  $t$ . Если  $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  бывает истинен и ложен при  $u_t, u_f \in D$ , то  $u_t, u_f \in D_{t+1}$  (по построению). Поэтому если  $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ , то и  $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ .

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ . Каждый  $x_i$  добавлен на каком-то шаге — максимум  $t$ . Если  $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  бывает истинен и ложен при  $y_t, y_f \in D$ , то  $y_t, y_f \in D_{t+1}$  (по построению). Поэтому если  $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ , то и  $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ . Если же  $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  не меняется от  $u$ , то тем более  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .



## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ . Каждый  $x_i$  добавлен на каком-то шаге — максимум  $t$ . Если  $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  бывает истинен и ложен при  $y_t, y_f \in D$ , то  $y_t, y_f \in D_{t+1}$  (по построению). Поэтому если  $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ , то и  $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ . Если же  $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  не меняется от  $u$ , то тем более  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .
  - 2.3  $\tau \equiv \exists u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  — аналогично.

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ .

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ . Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория.

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ . Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть  $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ .

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ . Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть  $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ . В чём ошибка?

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ . Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть  $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ . В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке.

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ . Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть  $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ . В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке. Внутри теории не выразить все способы нумерации, которые возможны.