

# Арифметизация логики

## Общие замечания

- ▶ Рассматриваем функции  $\mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ .
- ▶ Обозначим вектор  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  как  $\vec{x}$ .

# Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы  $Z$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $S$ )

1. *Примитив «Ноль»* ( $Z$ )

$$Z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z(x_1) = 0$$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение (Примитивы $Z$ , $N$ , $U$ , $S$ )

### 1. Примитив «Ноль» ( $Z$ )

$$Z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z(x_1) = 0$$

### 2. Примитив «Инкремент» ( $N$ )

$$N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad N(x_1) = x_1 + 1$$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение (Примитивы $Z$ , $N$ , $U$ , $S$ )

### 1. Примитив «Ноль» ( $Z$ )

$$Z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z(x_1) = 0$$

### 2. Примитив «Инкремент» ( $N$ )

$$N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad N(x_1) = x_1 + 1$$

### 3. Примитив «Проекция» ( $U$ ) — семейство функций; пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$

$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad U_n^k(\vec{x}) = x_k$$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение (Примитивы $Z$ , $N$ , $U$ , $S$ )

### 1. Примитив «Ноль» ( $Z$ )

$$Z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z(x_1) = 0$$

### 2. Примитив «Инкремент» ( $N$ )

$$N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad N(x_1) = x_1 + 1$$

### 3. Примитив «Проекция» ( $U$ ) — семейство функций; пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$

$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad U_n^k(\vec{x}) = x_k$$

### 4. Примитив «Подстановка» ( $S$ ) — семейство функций; пусть

$$g : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$S\langle g, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle(\vec{x}) = g(f_1(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x}))$$

# Примитивная рекурсия

## Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$ )

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ . Тогда  $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y - 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

## Примитивная рекурсия

### Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$ )

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ . Тогда  $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y-1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

### Пояснение

```
res := f(x1...xn);  
for yi = 0 to y-1 do  
    res := g(x1...xn, yi, res);
```



## Примитивная рекурсия

### Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$ )

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ . Тогда  $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y-1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

### Пояснение

```
res := f(x1...xn);  
for yi = 0 to y-1 do  
    res := g(x1...xn, yi, res);
```

### Пример

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 3) = g(\vec{x}, 2, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 2))$$

## Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия»,  $R$ )

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ . Тогда  $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y-1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);  
for yi = 0 to y-1 do  
    res := g(x1...xn, yi, res);
```

Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 3) &= g(\vec{x}, 2, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 2)) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1))) \end{aligned}$$

# Примитивная рекурсия

## Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$ )

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ . Тогда  $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y-1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

## Пояснение

```
res := f(x1...xn);  
for yi = 0 to y-1 do  
    res := g(x1...xn, yi, res);
```

## Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 3) &= g(\vec{x}, 2, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 2)) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1))) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1)))) \end{aligned}$$

# Примитивная рекурсия

## Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$ )

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ . Тогда  $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y-1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

## Пояснение

```
res := f(x1...xn);  
for yi = 0 to y-1 do  
    res := g(x1...xn, yi, res);
```

## Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 3) &= g(\vec{x}, 2, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 2)) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1))) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1)))) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, f(\vec{x})))) \end{aligned}$$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

Функция  $f$  — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов  $Z$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $S$  и  $R$ .

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

Функция  $f$  — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов  $Z$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $S$  и  $R$ .

## Теорема

$f(x) = x + 2$  примитивно-рекурсивна

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

Функция  $f$  — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов  $Z$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $S$  и  $R$ .

## Теорема

$f(x) = x + 2$  примитивно-рекурсивна

## Доказательство.

$$f = S\langle N, N \rangle$$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

Функция  $f$  — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов  $Z$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $S$  и  $R$ .

## Теорема

$f(x) = x + 2$  примитивно-рекурсивна

## Доказательство.

$$f = S\langle N, N \rangle$$

$$N(x) = x + 1$$

$$S\langle g, f \rangle(x) = g(f(x))$$



# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

Функция  $f$  — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов  $Z$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $S$  и  $R$ .

## Теорема

$f(x) = x + 2$  примитивно-рекурсивна

## Доказательство.

$$f = S\langle N, N \rangle$$

$$N(x) = x + 1$$

$$S\langle g, f \rangle(x) = g(f(x))$$

$$f, g = N$$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

Функция  $f$  — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов  $Z$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $S$  и  $R$ .

## Теорема

$f(x) = x + 2$  примитивно-рекурсивна

## Доказательство.

$$f = S\langle N, N \rangle$$

$$N(x) = x + 1$$

$$S\langle g, f \rangle(x) = g(f(x))$$

$$f, g = N$$

$$S\langle N, N \rangle(x) = N(N(x)) = (x + 1) + 1$$



## Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$  примитивно-рекурсивна

Доказательство.

$$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle:$$

## Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

### Лемма

$f(a, b) = a + b$  примитивно-рекурсивна

### Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$ :

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

## Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

### Лемма

$f(a, b) = a + b$  примитивно-рекурсивна

### Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$ :

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

► База.  $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$

## Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

### Лемма

$f(a, b) = a + b$  примитивно-рекурсивна

### Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$ :

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База.  $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход.  $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y + 1) =$

## Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

### Лемма

$f(a, b) = a + b$  примитивно-рекурсивна

### Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$ :

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

- ▶ База.  $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- ▶ Переход.  $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y + 1) =$   
 $\dots = S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y)) =$

## Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

### Лемма

$f(a, b) = a + b$  примитивно-рекурсивна

### Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$ :

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

- ▶ База.  $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- ▶ Переход.  $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y + 1) =$   
 $\dots = S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y)) =$   
 $\dots = S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, x + y) =$



## Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

### Лемма

$f(a, b) = a + b$  примитивно-рекурсивна

### Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle$ :

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База.  $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход.  $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y + 1) =$   
...  $= S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y)) =$   
...  $= S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, x + y) =$   
...  $= N(x + y) = x + y + 1$



# Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание

## Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление

## Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел

## Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел
4. Неформально: все функции, вычисляемые конечным числом вложенных циклов for:

```
for (int i1 = 0; i_1 < g1(x1...xn); i1++) {  
    for (int i2 = 0; i_2 < g2(x1...xn,i1); i2++) {  
        ...  
        for (int ik = 0; ik < gk(x1...xn,i1,i2...); ik++) {  
            // выражение без циклов  
        }  
        ...  
    }  
}
```

# Общерекурсивные функции

## Определение

*Функция — общерекурсивная, если может быть построена при помощи примитивов  $Z$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $S$ ,  $R$  и примитива минимизации:*

$$M\langle f \rangle(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0\}$$

*Если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) > 0$  при любом  $y$ , результат неопределён.*

# Общерекурсивные функции

## Определение

*Функция — общерекурсивная, если может быть построена при помощи примитивов  $Z$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $S$ ,  $R$  и примитива минимизации:*

$$M\langle f \rangle(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0\}$$

*Если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) > 0$  при любом  $y$ , результат неопределён.*

Пример:

Пусть  $f(x, y) = x - y^2$ , тогда  $\lceil \sqrt{x} \rceil = M\langle f \rangle(x)$

```
int sqrt(int x) {  
    int y = 0;  
    while (x-y*y > 0) y++;  
    return y;  
}
```

# Выразительная сила

## Определение

*Функция Аккермана:*

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & m = 0 \\ A(m - 1, 1), & m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

## Теорема

*Функция Аккермана — общерекурсивная, но не примитивно-рекурсивная.*



# Выразительная сила

## Определение

*Функция Аккермана:*

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & m = 0 \\ A(m - 1, 1), & m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

## Теорема

*Функция Аккермана — общерекурсивная, но не примитивно-рекурсивная.*

## Определение

*Тезис Чёрча для общерекурсивных функций: любая эффективно-вычислимая функция  $\mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$  является общерекурсивной.*

# Новые обозначения

## Определение

Запись вида  $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$  означает  $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

# Новые обозначения

## Определение

Запись вида  $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$  означает  $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

## Определение (Литерал числа)

$$\bar{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\bar{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

# Новые обозначения

## Определение

Запись вида  $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$  означает  $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

## Определение (Литерал числа)

$$\bar{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\bar{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть  $\psi := x_1 = 0$ .

# Новые обозначения

## Определение

Запись вида  $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$  означает  $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

## Определение (Литерал числа)

$$\bar{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\bar{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть  $\psi := x_1 = 0$ . Тогда  $\psi(\bar{3})$  соответствует формуле  $0''' = 0$

## Выразимость отношений в Ф.А.

### Определение

Будем говорить, что отношение  $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$  выразимо в ФА, если существует формула  $\rho$ , что:

1. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$ , то  $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$ , то  $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

## Выразимость отношений в Ф.А.

### Определение

Будем говорить, что отношение  $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$  выразимо в ФА, если существует формула  $\rho$ , что:

1. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$ , то  $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$ , то  $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

### Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.:  $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

## Выразимость отношений в Ф.А.

### Определение

Будем говорить, что отношение  $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$  выразимо в ФА, если существует формула  $\rho$ , что:

1. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$ , то  $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$ , то  $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

### Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.:  $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

### Доказательство.

Пусть  $\rho := x_1 = x_2$ .



## Выразимость отношений в Ф.А.

### Определение

Будем говорить, что отношение  $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$  выразимо в ФА, если существует формула  $\rho$ , что:

1. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$ , то  $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$ , то  $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

### Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.:  $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

### Доказательство.

Пусть  $\rho := x_1 = x_2$ . Тогда:

- $\vdash \rho = \rho$  при  $\rho := \overline{k}$  при всех  $k \in \mathbb{N}_0$ :

## Выразимость отношений в Ф.А.

### Определение

Будем говорить, что отношение  $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$  выразимо в ФА, если существует формула  $\rho$ , что:

1. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$ , то  $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$ , то  $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

### Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.:  $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

### Доказательство.

Пусть  $\rho := x_1 = x_2$ . Тогда:

- $\vdash \rho = \rho$  при  $\rho := \overline{k}$  при всех  $k \in \mathbb{N}_0$ :  $\vdash 0 = 0$ ,  $\vdash 0' = 0'$ ,  $\vdash 0'' = 0''$ , ...

## Выразимость отношений в Ф.А.

### Определение

Будем говорить, что отношение  $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$  выразимо в ФА, если существует формула  $\rho$ , что:

1. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$ , то  $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$ , то  $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

### Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.:  $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

### Доказательство.

Пусть  $\rho := x_1 = x_2$ . Тогда:

- ▶  $\vdash p = p$  при  $p := \overline{k}$  при всех  $k \in \mathbb{N}_0$ :  $\vdash 0 = 0, \vdash 0' = 0', \vdash 0'' = 0'', \dots$
- ▶  $\vdash \neg p = q$  при  $p := \overline{k}, q := \overline{s}$  при всех  $k, s \in \mathbb{N}_0$  и  $k \neq s$ .

## Выразимость отношений в Ф.А.

### Определение

Будем говорить, что отношение  $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$  выразимо в ФА, если существует формула  $\rho$ , что:

1. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$ , то  $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$ , то  $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

### Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.:  $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$

### Доказательство.

Пусть  $\rho := x_1 = x_2$ . Тогда:

- ▶  $\vdash p = p$  при  $p := \overline{k}$  при всех  $k \in \mathbb{N}_0$ :  $\vdash 0 = 0$ ,  $\vdash 0' = 0'$ ,  $\vdash 0'' = 0''$ , ...
- ▶  $\vdash \neg p = q$  при  $p := \overline{k}$ ,  $q := \overline{s}$  при всех  $k, s \in \mathbb{N}_0$  и  $k \neq s$ .  
 $\vdash \neg 0 = 0'$ ,  $\vdash \neg 0 = 0''$ ,  $\vdash \neg 0''' = 0'$ , ...



# Представимость функций в Ф.А.

## Определение

Будем говорить, что функция  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  представима в ФА, если существует формула  $\varphi$ , что:

1. если  $f(a_1, \dots, a_n) = u$ , то  $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
2. если  $f(a_1, \dots, a_n) \neq u$ , то  $\vdash \neg \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
3. для всех  $a_i \in \mathbb{N}_0$  выполнено  
 $\vdash (\exists x. \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, x)) \ \& \ (\forall p. \forall q. \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, p) \ \& \ \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, q) \rightarrow p = q)$

# Соответствие рекурсивных и представимых функций

## Теорема

*Любая рекурсивная функция представима в  $\Phi.A.$*

# Соответствие рекурсивных и представимых функций

## Теорема

*Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.*

## Теорема

*Любая представимая в Ф.А. функция рекурсивна.*

Примитивы  $Z$ ,  $N$ ,  $U$  представимы в  $\Phi.A.$

### Теорема

*Примитивы  $Z$ ,  $N$  и  $U_n^k$  представимы в  $\Phi.A.$*



Примитивы  $Z$ ,  $N$ ,  $U$  представимы в  $\Phi.A.$

### Теорема

*Примитивы  $Z$ ,  $N$  и  $U_n^k$  представимы в  $\Phi.A.$*

Доказательство.

►  $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0,$

Примитивы  $Z$ ,  $N$ ,  $U$  представимы в  $\Phi.A.$

### Теорема

*Примитивы  $Z$ ,  $N$  и  $U_n^k$  представимы в  $\Phi.A.$*

*Доказательство.*

- ▶  $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$ , формальнее:  $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \ \& \ x_2 = 0$

Примитивы  $Z$ ,  $N$ ,  $U$  представимы в  $\Phi.A.$

### Теорема

*Примитивы  $Z$ ,  $N$  и  $U_n^k$  представимы в  $\Phi.A.$*

*Доказательство.*

- ▶  $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$ , формальнее:  $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \ \& \ x_2 = 0$
- ▶  $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x'_1$

Примитивы  $Z$ ,  $N$ ,  $U$  представимы в  $\Phi.A.$

### Теорема

*Примитивы  $Z$ ,  $N$  и  $U_n^k$  представимы в  $\Phi.A.$*

*Доказательство.*

- ▶  $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$ , формальнее:  $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \ \& \ x_2 = 0$
- ▶  $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x'_1$
- ▶  $v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$

Примитивы  $Z$ ,  $N$ ,  $U$  представимы в  $\Phi.A.$

### Теорема

Примитивы  $Z$ ,  $N$  и  $U_n^k$  представимы в  $\Phi.A.$

### Доказательство.

- ▶  $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$ , формальнее:  $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \ \& \ x_2 = 0$
- ▶  $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x'_1$
- ▶  $v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$   
формальнее:  $v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := \left( \bigwedge_{i \neq k, n+1} x_i = x_i \right) \ \& \ x_k = x_{n+1}$



Примитив  $S$  представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

Примитив  $S$  представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

### Теорема

*Пусть функции  $f, g_1, \dots, g_k$  представимы в Ф.А. Тогда  $S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle$  представима в Ф.А.*

Примитив  $S$  представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

### Теорема

*Пусть функции  $f, g_1, \dots, g_k$  представимы в Ф.А. Тогда  $S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle$  представима в Ф.А.*

### Доказательство.

Пусть  $f, g_1, \dots, g_k$  представляются формулами  $\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ .



Примитив  $S$  представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

### Теорема

Пусть функции  $f, g_1, \dots, g_k$  представимы в Ф.А. Тогда  $S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle$  представима в Ф.А.

### Доказательство.

Пусть  $f, g_1, \dots, g_k$  представляются формулами  $\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ .

Тогда  $S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle$  будет представлена формулой

$$\exists g_1 \dots \exists g_k. \varphi(g_1, \dots, g_k, x_{n+1}) \& \gamma_1(x_1, \dots, x_n, g_1) \& \dots \& \gamma_k(x_1, \dots, x_n, g_k)$$



## $\beta$ -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

## $\beta$ -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

### Определение

$\beta$ -функция Гёделя:  $\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c)$

Здесь  $(\%)$  — остаток от деления.

## $\beta$ -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

### Определение

$\beta$ -функция Гёделя:  $\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c)$

Здесь  $(\%)$  — остаток от деления.

### Теорема

$\beta$ -функция Гёделя представима в  $\Phi.A.$  формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q. (b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

## $\beta$ -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

### Определение

$\beta$ -функция Гёделя:  $\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c)$

Здесь  $(\%)$  — остаток от деления.

### Теорема

$\beta$ -функция Гёделя представима в  $\Phi.A.$  формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q. (b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление  $b$  на  $x$  с остатком: найдутся частное  $(q)$  и остаток  $(d)$ , что  $b = q \cdot x + d$  и  $0 \leq d < x$ .

## $\beta$ -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

### Определение

$\beta$ -функция Гёделя:  $\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c)$

Здесь  $(\%)$  — остаток от деления.

### Теорема

$\beta$ -функция Гёделя представима в  $\Phi.A.$  формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q. (b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление  $b$  на  $x$  с остатком: найдутся частное  $(q)$  и остаток  $(d)$ , что  $b = q \cdot x + d$  и  $0 \leq d < x$ .

### Теорема

Если  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$ , то найдутся такие  $b, c \in \mathbb{N}_0$ , что  $a_i = \beta(b, c, i)$

## Доказательство свойства $\beta$ -функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если  $u_0, \dots, u_n$  — попарно взаимно-просты, и  $0 \leq a_i < u_i$ , то существует такой  $b$ , что  $a_i = b \% u_i$ .*

## Доказательство свойства $\beta$ -функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если  $u_0, \dots, u_n$  — попарно взаимно-просты, и  $0 \leq a_i < u_i$ , то существует такой  $b$ , что  $a_i = b \% u_i$ .  
Положим  $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$  и  $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$ .*



## Доказательство свойства $\beta$ -функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если  $u_0, \dots, u_n$  — попарно взаимно-просты, и  $0 \leq a_i < u_i$ , то существует такой  $b$ , что  $a_i = b \% u_i$ .*

Положим  $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$  и  $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$ .

►  $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$ , если  $i \neq j$ .

## Доказательство свойства $\beta$ -функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если  $u_0, \dots, u_n$  — попарно взаимно-просты, и  $0 \leq a_i < u_i$ , то существует такой  $b$ , что  $a_i = b \% u_i$ .*

Положим  $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$  и  $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$ .

►  $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$ , если  $i \neq j$ .

Пусть  $p$  — простое,  $u_i \div p$  и  $u_j \div p$  ( $i < j$ ).

## Доказательство свойства $\beta$ -функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если  $u_0, \dots, u_n$  — попарно взаимно-просты, и  $0 \leq a_i < u_i$ , то существует такой  $b$ , что  $a_i = b \% u_i$ .*

Положим  $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$  и  $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$ .

►  $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$ , если  $i \neq j$ .

Пусть  $p$  — простое,  $u_i \div p$  и  $u_j \div p$  ( $i < j$ ). Заметим, что  $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$ .  
Значит,  $c \div p$  или  $(j - i) \div p$ .

## Доказательство свойства $\beta$ -функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если  $u_0, \dots, u_n$  — попарно взаимно-просты, и  $0 \leq a_i < u_i$ , то существует такой  $b$ , что  $a_i = b \% u_i$ .*

Положим  $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$  и  $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$ .

►  $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$ , если  $i \neq j$ .

Пусть  $p$  — простое,  $u_i \vdots p$  и  $u_j \vdots p$  ( $i < j$ ). Заметим, что  $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$ .  
Значит,  $c \vdots p$  или  $(j - i) \vdots p$ . Так как  $j - i \leq n$ , то  $c \vdots (j - i)$ , потому если и  $(j - i) \vdots p$ , всё равно  $c \vdots p$ .

## Доказательство свойства $\beta$ -функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если  $u_0, \dots, u_n$  — попарно взаимно-просты, и  $0 \leq a_i < u_i$ , то существует такой  $b$ , что  $a_i = b \% u_i$ .*

Положим  $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$  и  $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$ .

►  $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$ , если  $i \neq j$ .

Пусть  $p$  — простое,  $u_i \div p$  и  $u_j \div p$  ( $i < j$ ). Заметим, что  $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$ . Значит,  $c \div p$  или  $(j - i) \div p$ . Так как  $j - i \leq n$ , то  $c \div (j - i)$ , потому если и  $(j - i) \div p$ , всё равно  $c \div p$ . Но и  $(1 + c \cdot (i + 1)) \div p$ , отсюда  $1 \div p$  — что невозможно.

## Доказательство свойства $\beta$ -функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если  $u_0, \dots, u_n$  — попарно взаимно-просты, и  $0 \leq a_i < u_i$ , то существует такой  $b$ , что  $a_i = b \% u_i$ .*

Положим  $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$  и  $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$ .

- ▶  $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$ , если  $i \neq j$ .

Пусть  $p$  — простое,  $u_i \div p$  и  $u_j \div p$  ( $i < j$ ). Заметим, что  $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$ . Значит,  $c \div p$  или  $(j - i) \div p$ . Так как  $j - i \leq n$ , то  $c \div (j - i)$ , потому если и  $(j - i) \div p$ , всё равно  $c \div p$ . Но и  $(1 + c \cdot (i + 1)) \div p$ , отсюда  $1 \div p$  — что невозможно.

- ▶  $0 \leq a_i < u_i$ .

## Доказательство свойства $\beta$ -функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если  $u_0, \dots, u_n$  — попарно взаимно-просты, и  $0 \leq a_i < u_i$ , то существует такой  $b$ , что  $a_i = b \% u_i$ .*

Положим  $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$  и  $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$ .

►  $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$ , если  $i \neq j$ .

Пусть  $p$  — простое,  $u_i \div p$  и  $u_j \div p$  ( $i < j$ ). Заметим, что  $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$ . Значит,  $c \div p$  или  $(j - i) \div p$ . Так как  $j - i \leq n$ , то  $c \div (j - i)$ , потому если и  $(j - i) \div p$ , всё равно  $c \div p$ . Но и  $(1 + c \cdot (i + 1)) \div p$ , отсюда  $1 \div p$  — что невозможно.

►  $0 \leq a_i < u_i$ .

Условия китайской теоремы об остатках выполнены и найдётся  $b$ , что

$$a_i = b \% (1 + c \cdot (i + 1)) = \beta(b, c, i)$$



Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$  представлены формулами  $\varphi$  и  $\gamma$ .

Зафиксируем  $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$ .



Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$  представлены формулами  $\varphi$  и  $\gamma$ .

Зафиксируем  $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$ .

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

## Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$  представлены формулами  $\varphi$  и  $\gamma$ .

Зафиксируем  $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$ .

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

$$a_1 \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$$

## Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$  представлены формулами  $\varphi$  и  $\gamma$ .

Зафиксируем  $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$ .

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$$

...

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

$$a_1 \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$$

$$a_y \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$$

## Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$  представлены формулами  $\varphi$  и  $\gamma$ .

Зафиксируем  $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$ .

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$$

...

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

$$a_1 \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$$

...

$$a_y \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$$

По свойству  $\beta$ -функции, найдутся  $b$  и  $c$ , что  $\beta(b, c, i) = a_i$  для  $0 \leq i \leq y$ .

## Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$  представлены формулами  $\varphi$  и  $\gamma$ .

Зафиксируем  $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$ .

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$$

...

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1}) \quad a_y \quad \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \quad \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

$$a_1 \quad \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$$

По свойству  $\beta$ -функции, найдутся  $b$  и  $c$ , что  $\beta(b, c, i) = a_i$  для  $0 \leq i \leq y$ .

### Теорема

Примитив  $R\langle f, g \rangle$  представим в Ф.А. формулой  $\rho(x_1, \dots, x_n, y, a)$ :

$$\begin{aligned} & \exists b. \exists c. (\exists a_0. \hat{\beta}(b, c, 0, a_0) \& \varphi(x_1, \dots, x_n, a_0)) \\ & \& \quad \forall k. k < y \rightarrow \exists d. \exists e. \hat{\beta}(b, c, k, d) \& \hat{\beta}(b, c, k', e) \& \gamma(x_1, \dots, x_n, k, d, e) \\ & \& \quad \hat{\beta}(b, c, y, a) \end{aligned}$$

# Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

## Теорема

Пусть функция  $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$  представима в Ф.А. формулой  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$ .  
Тогда примитив  $M\langle f \rangle$  представим в Ф.А. формулой

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \neg\varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \ \& \ \forall u. u < y \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

## Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

### Теорема

Пусть функция  $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$  представима в Ф.А. формулой  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$ . Тогда примитив  $M\langle f \rangle$  представим в Ф.А. формулой

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \neg\varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \ \& \ \forall u. u < y \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

### Теорема

Если  $f$  — рекурсивная функция, то она представима в Ф.А.

### Доказательство.

Индукция по структуре  $f$ .



## Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем  $f$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Обозначим  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .



## Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем  $f$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Обозначим  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . По представимости нам известна  $\varphi$ , что  $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$ .

## Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем  $f$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Обозначим  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . По представимости нам известна  $\varphi$ , что  $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$ . Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

## Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем  $f$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Обозначим  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . По представимости нам известна  $\varphi$ , что  $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$ . Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.

## Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем  $f$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Обозначим  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . По представимости нам известна  $\varphi$ , что  $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$ . Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.

## Рекурсивность представимых функций в $\Phi.A.$

Фиксируем  $f$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Обозначим  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . По представимости нам известна  $\varphi$ , что  $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$ . Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.
3. Параллельный перебор значений и доказательств:  $s = 2^y \cdot 3^p$ . Переберём все  $s$ , по  $s$  получим  $y$  и  $p$ . Проверим, что  $p$  — код доказательства  $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$ .

# Гёделева нумерация

## 1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	$k, n$	Гёделев номер
3	(	17	$\&$	0	0, 0	$27 + 6$
5	)	19	$\forall$	(')	0, 1	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	$\exists$	(+)	0, 2	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	$\vdash$	(.)	1, 2	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	$\neg$	$25 + 6 \cdot k$	$x_k$	(=)	0, 2	$29 + 6 \cdot 9$
13	$\rightarrow$	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	$f_k^n$			
15	$\vee$	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	$P_k^n$			

# Гёделева нумерация

## 1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	$k, n$	Гёделев номер
3	(	17	&	0	0, 0	$27 + 6$
5	)	19	$\forall$	(')	0, 1	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	$\exists$	(+)	0, 2	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	$\vdash$	(.)	1, 2	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	$\neg$	$25 + 6 \cdot k$	$x_k$	(=)	0, 2	$29 + 6 \cdot 9$
13	$\rightarrow$	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	$f_k^n$			
15	$\vee$	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	$P_k^n$			

2. Формула.  $\phi \equiv s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ . Гёделев номер:  $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$ .

# Гёделева нумерация

## 1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	$k, n$	Гёделев номер
3	(	17	&	0	0, 0	$27 + 6$
5	)	19	$\forall$	(')	0, 1	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	$\exists$	(+)	0, 2	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	$\vdash$	(.)	1, 2	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	$\neg$	$25 + 6 \cdot k$	$x_k$	(=)	0, 2	$29 + 6 \cdot 9$
13	$\rightarrow$	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	$f_k^n$			
15	$\vee$	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	$P_k^n$			

2. Формула.  $\phi \equiv s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ . Гёделев номер:  $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$ .

3. Доказательство.  $\Pi = \delta_0 \delta_1 \dots \delta_{k-1}$ , его гёделев номер:

$$\ulcorner \Pi \urcorner = 2^{\ulcorner \delta_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner \delta_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{\ulcorner \delta_{k-1} \urcorner}$$



# Проверка доказательства на корректность

## Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$\text{proof}(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — гёделев номер вывода, } f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

# Проверка доказательства на корректность

## Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$\text{proof}(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — гёделев номер вывода, } f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Идея доказательства.

1. Проверка доказательства вычислима.

# Проверка доказательства на корректность

## Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$\text{proof}(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — гёделев номер вывода, } f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Идея доказательства.

1. Проверка доказательства вычислима.
2. Согласно тезису Чёрча, любая вычислимая функция вычислима с помощью рекурсивных функций.



# Перебор доказательств

## Лемма

*Следующие функции рекурсивны:*

1. Функции  $plog_k(n) = \max\{p : n \vdash k^p\}$ ,  $fst(x) = plog_2(x)$  и  $snd(x) = plog_3(x)$ .

# Перебор доказательств

## Лемма

*Следующие функции рекурсивны:*

1. Функции  $plog_k(n) = \max\{p : n \vdash k^p\}$ ,  $fst(x) = plog_2(x)$  и  $snd(x) = plog_3(x)$ .
2. Числовые литералы:  $\bar{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\bar{k}(x) = k$ .

# Перебор доказательств

## Лемма

*Следующие функции рекурсивны:*

1. Функции  $plog_k(n) = \max\{p : n \leq k^p\}$ ,  $fst(x) = plog_2(x)$  и  $snd(x) = plog_3(x)$ .
2. Числовые литералы:  $\bar{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\bar{k}(x) = k$ .

## Теорема

*Если  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ , и  $f$  представима в Ф.А. формулой  $\varphi$ , то  $f$  — рекурсивна.*

# Перебор доказательств

## Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. Функции  $plog_k(n) = \max\{p : n \leq k^p\}$ ,  $fst(x) = plog_2(x)$  и  $snd(x) = plog_3(x)$ .
2. Числовые литералы:  $\bar{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\bar{k}(x) = k$ .

## Теорема

Если  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ , и  $f$  представима в Ф.А. формулой  $\varphi$ , то  $f$  — рекурсивна.

## Доказательство.

Пусть заданы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Ищем  $\langle y, p \rangle$ , что  $\text{proof}(\ulcorner \varphi \urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$ ,

# Перебор доказательств

## Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. Функции  $plog_k(n) = \max\{p : n \leq k^p\}$ ,  $fst(x) = plog_2(x)$  и  $snd(x) = plog_3(x)$ .
2. Числовые литералы:  $\bar{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\bar{k}(x) = k$ .

## Теорема

Если  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ , и  $f$  представима в Ф.А. формулой  $\varphi$ , то  $f$  — рекурсивна.

## Доказательство.

Пусть заданы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Ищем  $\langle y, p \rangle$ , что  $\text{proof}(\ulcorner \varphi \urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$ , напомним:  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $p = \ulcorner \Pi \urcorner$ ,  $\Pi$  — доказательство  $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y})$ .



# Перебор доказательств

## Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. Функции  $plog_k(n) = \max\{p : n \leq k^p\}$ ,  $fst(x) = plog_2(x)$  и  $snd(x) = plog_3(x)$ .
2. Числовые литералы:  $\bar{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\bar{k}(x) = k$ .

## Теорема

Если  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ , и  $f$  представима в Ф.А. формулой  $\varphi$ , то  $f$  — рекурсивна.

## Доказательство.

Пусть заданы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Ищем  $\langle y, p \rangle$ , что  $\text{proof}(\ulcorner \varphi \urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$ , напомним:  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $p = \ulcorner \Pi \urcorner$ ,  $\Pi$  — доказательство  $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y})$ .

$$f = S\langle \text{fst}, M\langle S\langle \text{proof}, \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, U_{n+1}^1, U_{n+1}^2, \dots, U_{n+1}^n, S\langle \text{fst}, U_{n+1}^{n+1} \rangle, S\langle \text{snd}, U_{n+1}^{n+1} \rangle \rangle \rangle \rangle$$



Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Парадокс лжеца

Предложение, указанное в центре данного слайда — ложное.

# Проблема останова

## Теорема

Невозможно разработать программу (функцию) *bool p (string source, string arg)*, возвращающую *true*, если программа с исходным кодом *source* имеет один аргумент типа *string* и оканчивает работу, если ей передать на вход значение *arg*.

## Доказательство.

- ▶ Определим программу

```
bool s (std::string arg) {  
    if (s (arg)) { while (true); }  
    return true;  
}
```

- ▶ Пусть её полный исходный код — в переменной *source*.
- ▶ Что вернёт *p (source, source)*?



# Самоприменимость

## Определение

Определим функцию  $W_1$ :  $W_1(x, p) = 1$ , если  $x = \ulcorner \xi \urcorner$ , где  $\xi$  — формула с единственной свободной переменной  $x_1$ , а  $p$  — доказательство самоприменения  $\xi$ :

$$\vdash \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$$

$W_1(x, p) = 0$ , если это не так.

# Теорема Гёделя, вспомогательные определения

## Теорема

Существует формула  $\omega_1$  со свободными переменными  $x_1$  и  $x_2$ , такая, что:

1.  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства самоприменения  $\varphi$ ;
2.  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$  иначе.

## Доказательство.

Опираясь на рекурсивность функции `proof`, легко показать рекурсивность  $W_1$ .  
Значит, эта функция представима в формальной арифметике некоторой формулой  $\tau_1$ . Возьмём  $\omega_1(x_1, x_2) := \tau_1(x_1, x_2, \overline{1})$ . □

## Определение

Определим формулу  $\sigma(x) := \forall p. \neg \omega(x, p)$

# Омега-непротиворечивость

## Определение

Если для любой формулы  $\phi(x)$  из  $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\bar{1}), \vdash \phi(\bar{2}), \dots$  выполнено  $\not\vdash \exists x. \neg \phi(x)$ , то теория омега-непротиворечива.

## Теорема

Омега-непротиворечивость влечёт непротиворечивость

## Доказательство.

Пусть  $\phi(x) \equiv (x = x) \rightarrow (x = x) \rightarrow (x = x)$ . Тогда  $\vdash \phi(x)$  при всех  $x$ . Тогда  $\not\vdash \exists x. \neg \phi(x)$  — то есть существует недоказуемая формула, т.е. теория непротиворечива.



# Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики*

- ▶ Если формальная арифметика непротиворечива, то  $\nVdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .
- ▶ Если формальная арифметика  $\omega$ -непротиворечива, то  $\nVdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .