

Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова

Экономический Факультет

Кафедра Экономической Информатики

Выпускная квалификационная работа по теме:

**«Применение нейронных сетей и эконометрических
методов в прогнозировании доходностей акций»**

Выполнил:

Студент 4 курса э408 группы

Гришин А. Ю.

Преподаватель:

Кандидат экономических наук,
Кандидат физико-математических наук,
Кандидат юридических наук,
Доцент кафедры Экономической Информатики

Сидоренко В.Н.

Москва, 2023

Оглавление	2
1 Введение	3
1.1 Актуальность	4
1.2 Цели	5
1.3 Задачи	5
2 Подготовительная часть	5
2.1 Формализация проблемы	6
2.1.1 Гипотеза эффективного рынка	7
2.1.2 Гипотеза фрактального рынка	8
2.1.3 Проверяемая гипотеза	9
2.2 Наиболее популярные методы решения	9
2.2.1 Exponentially Weighted Moving Average	11
2.2.2 Auto-regressive Integrated Moving Average	16
2.2.3 Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity	22
2.2.4 Auto-regressive Fractionally Integrated Moving Average . .	30
2.2.5 Fractionally Integrated GARCH	38
2.2.6 Singular Spectrum Analysis	41
2.2.7 Fourier analysis	41
2.2.8 Wavelet analysis	42
2.2.9 Neural Networks	42
2.2.9.1 Multilayer Perceptron	42
2.2.9.2 Recurrent Neural Network	42
2.2.9.3 Wavelet Network	42
2.2.9.4 Алгоритмы обучения: GD семейство	42
3 Описание данных и эксперимент	42
3.1 Развивающийся рынок (Китай)	42
3.2 Развитый рынок (США)	42
4 Обсуждение выводов	42
5 Заключение	42
Список литературы	46

1 Введение

Современный мир нельзя представить без валюты и денег в принципе. Каждый день всякий человек на Земле имеет с ними дело: кто-то с большей суммой, кто-то с меньшей, однако все мы неразрывно связаны с деньгами. Апогеем валютного триумфа в истории человека можно назвать создание предприятий: объединений людей на основе некоторой общей цели, которой впоследствии стали считать - получение прибыли. Логика проста: один человек получает сумму N за один рабочий день \Rightarrow 2 человек получают $2N$, однако, что даст им стимул к объединению усилий? Только факт того, что вместе они заработают $(2 + \varepsilon)N$ денег, где ε - выигрыш от работы вместе. Но можно ли как-то получить сумму больше, чем указанная? Да, производить больше ¹, пытаться подстраиваться под клиента ²: предугадывать потребности клиента и делать на конкретный товар скидку, пытаться угадать, когда спрос на тот или иной вид продукции будет больше в зависимости от времени года ³. То есть можно подстраиваться с двух сторон: работая над собой и изменять что-то внутри организации, а можно смотреть на то, что необходимо клиентам и делать именно это, именно тогда, когда это нужно. Получаются 2 крайности, которые необходимо уметь комбинировать.

Развивая финансовый рынок, получаем закономерное действие компаний - выход на IPO ⁴ и становление их публичными. Таким образом, уже владелец компании (он же владелец акции) стремится увеличить свою выгоду от владения долей, иначе зачем ему вообще тратить деньги на покупку ценных бумаг компании. Ведь важно то, чтобы вложенная сумма "отбивалась" с некоторой надбавкой, то есть человек зарабатывает то, что вложил, а также что-то сверх. Это сверх и есть искомый ε , который человек стремится увеличить как можно сильнее. Справедливо задать вопрос: "А зачем ему все это? Зачем вкладываться куда-то, чтобы получить больше?". Иными словами, зачем иметь больше того, чем есть сейчас? Логический ответ на это пытались дать многие экономисты, начиная с Адама Смита (1729–1737) [26] и его идеей о рациональном человеке (*homo economicus*), однако большинство теорий, изложенных им же и позднее его последователями (членами классической школы) выдвигали это как предпосылку всего анализа. Следовательно, без выполнения данного условия о стремлении человека к максимизации собственной выгоды, большинство экономических теорий не являются работающими.

Однако, опуская этот философский вопрос и возвращаясь к методам моделирования человеческого поведения, нельзя не заметить, что сами классики не

¹Делай больше, клиент все купит - это очень похоже на тезис, что каждый товар находит своего покупателя \Rightarrow тезис о "базаре справедливого обмена" Роберта Оуэна. Подробнее о том, что именно предлагалось сделать рассказано в работе [37].

²Человека/компании, который пользуется услугами данной компании.

³Очевидно, что мороженое будут покупать заметно в меньших количествах зимой по сравнению с летом.

⁴IPO - Initial Public Offering - первый выход на биржу, когда компания продает свои акции неограниченному кругу лиц, делая их совладельцами.

углублялись в именно математическое моделирование и как следствие - описание экономической деятельности человека посредством формул, а делали это лишь через построения причинно-следственных связей, у истоков которых стояла проблема стоимости.

Намного позже Альфред Маршалл, английский экономист, живший в 1842-1924, являясь представителем неоклассической школы (кем его "обозвал" Торстейн Бунде Веблен), выпускает учебник "Принципы экономической науки" [21], в котором сводит воедино все труды и знания, полученные на пути развития и становления Экономии, а также собственные работы, посвященные применению наиболее полно описанного математического подхода к анализу экономической деятельности человека.

В настоящее время для анализа экономических показателей используются всевозможные методы будь то математические или нет. Однако Математика - точная наука, значит, если получится понять, когда и сколько продукции компании будет потреблять клиент (или получать дивидендов держатель акций), то можно будет без проблем еще сильнее уменьшить издержки на производство, что в свою очередь, приведет к получению еще большей экономической прибыли.

Так как в современной науке набирает популярность применение глубоких нейронных сетей к различным видам деятельности (медицина, металлургия, космическая промышленность, киноиндустрия, материаловедение, биология, биохимия, ...) [2], значит, не лишнее - проверить, а имеет ли смысл вообще применять данные методы к финансовым задачам, а конкретно именно к предсказанию доходностей акций.

Настоящая работа является попыткой произвести сравнительный анализ наиболее популярных на данный момент математических моделей предсказания доходностей акций, примененных к 30 компаниям развитого (США) и развивающегося (Китай: Шанхай) рынков соответственно. Сравнение производится по характеристике качества прогнозирования доходности на 1 рабочий день биржи.

1.1 Актуальность

Данное исследование актуально с двух позиций: научная - выявив наиболее удачную с точки зрения предсказания на 1 день модель, в дальнейших исследованиях можно стараться развивать только ее, чтобы получать более точные результаты, а не пытаться выбрать между тем, над какой именно моделью из их множества работать, практическая - трейдерам или просто акционерам будет намного легче воспринимать временные ряды доходностей, так как они смогут с определенной точностью предсказывать конкретное значение подобного ряда на момент времени $t + 1$, что возможно даже приумножит их доход.

1.2 Цели

Целью настоящего исследования является помощь трейдерам или акционерам в прогнозировании доходностей акций. А умение качественно (с определенной точностью) предсказывать доходность приводит к умению формировать ответ на вопрос вида Buy or Hold? ⁵ достаточно быстро и аккуратно. Ведь основная проблема финансовых временных рядов - непредсказуемость, таким образом, нужно постараться решить данный вопрос так, чтобы на выходе было наиболее прибыльно и наименее рискованно, следовательно - наиболее точно. Отсюда появляется большая надежность финансовых инструментов с точки зрения человека, который заключает опционы или просто старается приумножить свое благосостояние посредством формирования собственного портфеля. Далее следует успешность фирмы, а отсюда, ведя разговор о финансовых рынках, возможность страны развить их еще сильнее и, возможно - увеличить благосостояние своих резидентов, а значит, возможность стать из развивающейся развитой.

1.3 Задачи

Задачей текущего исследования является проведение сравнительного анализа между моделями машинного и глубокого обучения с целью выявления той, которая дает наиболее точный прогноз на период длиной 1 рабочий день биржи. Для этого: 1) Загружаем данные 2) Предобрабатываем данные 3) Проводим статистический анализ данных 4) Среди всех обученных алгоритмов выбираем тот, у кого лучший результат 5) Сформировать сравнительную таблицу между моделями по всем имеющимся данным. Несмотря на громоздкость поставленных задач, весь их комплект можно оформить в один алгоритм и, таким образом, применять его к любому набору входных данных (при условии, конечно, что входные данные - временной ряд). То есть появляется новая задача следующего вида: **на вход** программе подается временной ряд, **на выход** - показатели выбранной далее тестовой статистики для каждой из рассматриваемых моделей. ⁶

2 Подготовительная часть

В чем заключается суть данной работы? С концептуальной стороны вопроса ответ очевиден: дан временной ряд, необходимо предсказать его следующее значение наиболее точным образом. Но прежде чем перейти к рассмотрению использованных моделей, формализуем поставленную задачу, ведь не всегда понятно, что имеется в виду под "наиболее точно" и "временной ряд".

⁵Buy or Hold - Покупаем акцию или продаем?

⁶Набор используемых моделей представлен в блоке ниже.

2.1 Формализация проблемы

Пусть на вход программе, назовем ее f , подается временной ряд вида: $y_t : t = \overline{1, N}$. Пока что никаких предпосылок относительно данного временного ряда нет. Тогда задача алгоритма f предсказать \hat{y}_{t+1} так, чтобы значение $|\hat{y}_{t+1} - y_{t+1}|$ было минимальным. То есть $f : \mathbb{R}^{N \times 1} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f(y) = \hat{y}_{t+1}$, где $y = (y_1, \dots, y_N)^T$. В терминах глубокого обучения, имеем задачу класса sequence to one⁷. **Q:** Но в принципе, что такое временной ряд? **А:** Временной ряд - это последовательность значений, относящихся к одному объекту в разные моменты времени. То есть, за тот период, когда за объектом наблюдали и снимали показатели. В нашем случае временной ряд - это набор доходностей акций за определенный период времени, то есть не ставится ограничение на знак данных величин, ведь она (доходность) может быть как отрицательной, так и положительной. **Q:** Почему именно доходности? **А:** Говоря о них, нет необходимости задумываться о том, сколько реально стоит та или иная акция/ценная бумага: 20 руб. или 2'000 руб. В анализе доходностей нас интересует: насколько они изменяются относительно некоторого момента времени. **Q:** Какого момента? **А:** Логично представлять доходность как прирост вида:

$$r_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1 \quad (1)$$

То есть, как изменяется в процентах цена на некоторый актив (не обязательно акцию, хотя в нашем случае именно на нее) относительно предыдущего рабочего дня биржи. Однако внутри самой "акции" фигурирует несколько показателей, характеризующих ее в конкретный момент времени: цена открытия, максимальная и минимальная цены, цена закрытия, скорректированная цена закрытия и общая сумма сделок. Акцент делается на анализе цен открытия (так как с точки зрения автора работы важнее всего - хорошо начать рабочий день), хотя несомненно наличие взаимосвязи между ценой открытия и закрытия или иными доступными показателями. Когда есть возможность - другие показатели включаются в анализ, когда нет такой возможности (классическая модель не предназначена) - не включаются. Подводя итог: **Дано:** $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, **Найти:** $\hat{y}_{N+1} : |\hat{y}_{N+1} - y_{N+1}| \rightarrow \min$. Подставляя вышеупомянутое равенство, имеем задачу оптимизации:

$$|f(y) - y_{N+1}| \rightarrow \min_{\beta \in \mathbb{R}^k} \quad (2)$$

Где β - набор параметров модели, хотя некоторые из них имеют неоптимизируемые параметры (гиперпараметры), но в общем случае задача имеет подобный вид. Но проблема в том, что y_{N+1} неизвестно, а значит, невозможно подобрать алгоритм абсолютно точного прогнозирования, значит, необходимо на основе

⁷Sequence to one - задача получения одного значения, исходя из набора данных. К таким задачам относят: семантический анализ текста, классификацию картинок и так далее.

имеющейся информации сформировать алгоритм, который наиболее точным образом описывает предложенные ему данные, а далее делает предсказание, причем предсказание, как можно меньше отличающееся от реального значения. Только теперь, проведя подобные рассуждения, мы находимся в области машинного обучения и можем говорить о гипотезах рынка⁸. Ведь для каждого типа рынка характерны свои особенности, следовательно, закономерный вопрос: почему мы вообще имеем право пытаться предсказывать что-то для развитой или развивающейся экономик. Изложение двух нижестоящих теорий представлено в сжатом виде, что делает повествование о них поверхностным, но достаточным для понимания всех особенностей работы.

2.1.1 Гипотеза эффективного рынка

Это одна из самых неоднозначных в плане количества последователей инвестиционная теория, ставящая своей целью описать принципы движения цен на активы, первоначальная версия которой "представлена" Луи Башелье в 1900 году. В его работе показана независимость доходности акций от течения времени, таким образом, Башелье пришел к выводу: "Вероятность роста цены в любой момент времени равна вероятности ее падения, а математическое ожидание спекулянта равно нулю". Много раз менявшая свою формулировку, начиная с Пола Самуэльсона: "На конкурентных рынках на всякого продавца найдется покупатель. Если можно быть уверенным, что цена вырастет, значит, она уже выросла", в 1960-ых годах она (гипотеза) приобрела формальный вид в труде Юджина Фама, использовавшего в исследованиях модель случайного блуждания, выведенную Башелье. По итогам эксперимента, Юджин Фама [8] привел доказательство того, что вся доступная информация уже заложена в бумагах (позднее: "рынок полностью отражает всю доступную информацию"), то есть бесполезно пытаться предугадывать цены, любое предсказание не сбудется. Более того, единственный фактор, который способен повлиять на цену - это выходящие в будущем новости. А значит, перманентное доминирование над рынком не является возможным, а активное инвестирование не является состоятельным. Более подробная информация изложена в статье от 13 сентября 2022 года [9]. На данный момент существует 3 основных гипотезы эффективности рынка:

1. **Слабая гипотеза** - в цене содержится вся историческая информация об активе и только фундаментальный анализ иногда может обеспечить избыточную доходность.
2. **Полусильная гипотеза** - в ценах содержится вся публичная информация, таким образом, избыточную доходность может обеспечить только закрытая от широкой публики информация (инсайдерская).

⁸Гипотезы рынка - обоснование исследования на качественном уровне, то есть утверждения о возможности проводить какой-либо технический анализ.

3. **Сильная гипотеза** - в ценах содержится как общедоступная, так и закрытая информация. Таким образом, ничто не может дать инвесторам избыточную доходность по сравнению со среднерыночным показателем.

Тогда напрашивается вывод: если быть сторонником ГЭР, то настоящая работа не имеет смысла, ведь технический анализ не может дать дополнительной доходности для любой степени ее силы. Однако, по словам Мартина Свэлла, проанализировавшего историю данной гипотезы в работе [24]: "Строго говоря, гипотеза [прежде всего, в ее сильной форме] ложна, но по духу глубоко верна . . . До тех пор, пока текущая гипотеза не будет заменена лучшей гипотезой, критика имеет ограниченную ценность". Отсюда все-таки следует обоснование, почему существует так много математических моделей, пытающихся прогнозировать доходность активов. Отсюда следует, что в современном мире количество методов предсказания настолько велико, что исследователю сложно выбрать нужный, это еще одно подтверждение, почему настоящая работа имеет смысл.

2.1.2 Гипотеза фрактального рынка

Часто в качестве доказательства ложности ГЭР приводятся в пример финансовые кризисы, так как по ГЭР вероятность возникновения подобного кризиса пренебрежимо мала или приблизительно ноль. Таким образом, появляется еще одна гипотеза: Гипотеза Фрактального Рынка (ГФР), чьим родоначальником является Бенуа Мандельброт [31], по которой можно объяснять кризисы. Ее основные характеристики: 1) график доходностей активов имеет фрактальную (всегда $1 < D < 2$) размерность 2) Различные окна (интервалы) исходного графика могут быть самоподобными 3) Каждому финансовому графику присуща своя уникальная структура и соответственно ее свойства 4) Финансовый график обладает памятью о своих исходных условиях (имеет долгосрочную память; формальный способ проверки данного утверждения вводится позже). Для выполнения данной гипотезы предполагается, что рынок является стабильным, если он включает в себе очень много инвесторов с различными горизонтами планирования (это гарантия ликвидности). Объяснение кризисов происходит следующим образом, описанным в статье Палювиной А.С. [38]: "Когда инвесторы меняют свои инвестиционные горизонты (например, фундаментальная информация становится ненадежной, а долгосрочные инвесторы уходят с рынка или сокращают свои горизонты), баланс между краткосрочной и долгосрочной перспективами искажается, рынок становится менее ликвидным и возникает кризис". Таким образом, из данной гипотезы следует вывод, что информационный и инвестиционный горизонты оказывают влияние на поведение инвестора.

2.1.3 Проверяемая гипотеза настоящего исследования

Гипотеза, подтверждение которой настоящая работа ставит одной из своих ключевых задач, заключается в проверке суждения, что нейросетевой (далее NN) поход является наиболее эффективным применительно к исследуемой области финансовых рынков, а точнее к временным рядам цен/доходностей акций. То есть главный вопрос: нейросеть лучше справляется с прогнозированием доходностей акций по цене открытия на один рабочий день биржи по сравнению с другими использованными моделями или нет?

2.2 Наиболее популярные методы решения

В настоящем исследовании последовательно рассматриваются такие модели как: Exponentially Weighted Moving Average, Auto-regressive Integrated Moving Average, Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity, Auto-regressive Fractionally Integrated Moving Average, Fractionally Integrated GARCH, Singular Spectrum Analysis, Fourier & Wavelet analysis, а также Transformers и моделирование сезонности. Далее рассказывается подробнейшим образом о математической подоплеке каждой из моделей. Важно понимать, что у данной работы нет задачи предоставить полноценное обоснование, почему та или иная модель однозначно работает, однако где-то все-таки приводится подробное описание, а где-то лишь качественные рассуждения и ссылки на более подробное обоснование. Сразу стоит отметить, обращаясь к последнему пункту плана (Transformers и моделирование сезонности), что он рассматривается с точки зрения: почему он тут не нужен [34], несмотря на революцию в Natural Language Processing, устроенную методом self-attention [30] и несмотря на важный аспект моделирования временных рядов - сезонность. Механизм self-attention создан для вычленения смысла из данных. То есть: дан набор слов, к ему в соответствие ставится вектор (она называется embedding), а после к данному набору чисел применяются известные алгоритмы ML или DL. Однако в текущей задаче в ряде доходностей или цен (одно можно получить из другого) нет контекста, то есть и сам механизм теряет свою значимость. Трансформеры оперируют понятием контекста, отвечающего за связь слова с окружающими его словами. Математически-интуитивно это можно рассматривать следующим образом: $\{w_j\}_{j=1}^n$ - все предложение, смотрим на конкретное слово (не в начале и не в конце: между словом и концом/началом должно быть как минимум еще одно слово) $w_i : i \in (1, n)$. Контекстом данного слова называется набор $w_k : k \in \{i-l, \dots, i-1, i+1, \dots, i+l\} : l \in \mathbb{N}$. тут пропущено само слово, так как для него окно одного размера влево и вправо является контекстом. Это значит, что при таком последовательном выборе контекста необходимо максимизировать вероятность получения конкретного слова w_i . Данная задача ставится в процессе создания качественного эмбединга (сопоставления чисел словам; алгоритм Word2Vec [22]), но в текущей задаче нет необходимости рас-

смаатривать такую смысловую взаимосвязь между величинами ряда, так как, исходя из качественных рассуждений, на вход подается единственное число, которое никак, с точки зрения смысла, не связано с другими. Исходя из этого и делается вывод, что механизм трансформеров проигрывает более простым линейным моделям [34]. Что касается сезонности, то, несмотря на подтверждение ее наличия в финансовых временных рядах [23], все-таки рассматриваем модели без корректировки на данную составляющую. Подобное рассуждения приводится, опираясь на Гипотезу Эффективного Рынка, утверждающую, что финансовые временные ряды не зависят от времени, иначе рынок перестал бы быть эффективным [25]. Данное суждение весьма прозаично относительно показанного факта в блоке 2.1.1 о некорректности всей гипотезы в целом. В итоге получается, что из ГЭР рассматривается (принимается как верное) только суждение об отсутствии сезонности, а все остальные положения принимаются как ложные. Таким образом, в данной работе не рассматриваются как Трансформеры, так и сезонность ряда (даже если эта составляющая присутствует, то она все равно относится к шуму). Далее приступаем к описанию моделей, рассматриваемых в настоящей работе. Для удобства делим их на требующие стационарность и не требующие. **Q:** Что такое стационарность? **A:** Существует определение как для случая, когда 1) временной ряд воспринимается как последовательная реализация случайных величин как-то распределенных, так и для случая, когда 2) временной ряд - некоторый сигнал, например, от светодиода или от звукового динамика. Последовательно:

1. Временной ряд - реализация набора зависимых случайных величин с различным - изменяющимся во времени - распределением. Случайная выборка - простейший частный случай для временного ряда, так как все полученные данные являются следствием реализации не одной случайной величины с некоторым распределением, а некоторого набора. Данные распределения заранее неизвестны и их пока что не представляется физической возможности определить, так как для их определения необходимо было бы посетить параллельную вселенную, где данная величина реализовалась бы иначе. То есть для максимальной точности потребовалось бы посещения $n \rightarrow \infty$ параллельных вселенных. Отсюда и возможность оперировать только частными случаями временных рядов - случайной выборкой. Таким образом, под всеми последующими упоминаниями термина "временной ряд" понимается термин "случайная выборка" - частный случай реализации временного ряда. Для данного определения существуют 2 понятия стационарности: в узком (сильном) и в широком (слабом) смысле. Взяты из работы Н. В. Артамонова, Е. А. Ивина [40], но переработаны для удобства восприятия.

Определение 1 Если: $\forall p, t_1, \dots, t_p, l \in \mathbb{N} \Rightarrow$ распределение $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_p}$ идентично распределению $y_{t_1+l}, y_{t_2+l}, \dots, y_{t_p+l}$. **То:** Временной ряд называется стационарным в узком смысле (строго стационарным).

Определение 2 *Если:* $\forall t \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{E}(y_t) = \mu \in \mathbb{R}, \mathbb{V}(y_t) = \gamma_0, \text{cov}(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k : \mu, \gamma_0, \gamma_k$ не зависят от t . *То:* Временной ряд называется стационарным в широком смысле (слабо стационарным).

2. Временной ряд - просто набор чисел, содержащий информацию об объекте и полученный в ходе эксперимента (наблюдения за объектом). В этом случае стационарности дается следующее определение:

Определение 3 *Если:* спектр амплитуд сигнала является постоянным во времени. *То:* Сигнал называется стационарным.

В данном случае имеет место деление: стационарный, значит, либо детерминированный (то есть: однозначно определяется по некоторому закону и является периодическим/квазипериодическим/непериодическим), либо случайный (например, модели финансового рынка, основанного на Броуновском Движении [27] или Белом шуме [18]); нестационарный, значит, непрерывный или переходный. Более подробно о данном понятии и формальном его осознании рассказывается в блоках 2.2.7 (Анализ Фурье) и 2.2.8 (Wavelet анализ).

Исходя из вышеперечисленных определений, выделяем 2 группы моделей: стационарные и нестационарные. Стационарные модели - те, для которых необходимо выполнение предпосылки о слабой (стр. 11 опр. 2) или сильной (стр. 10 опр. 1) стационарности. Нестационарные - те, для которых нет строгой необходимости в этом (они могут работать как со стационарными данными, так и с нестационарными).

2.2.1 Exponentially Weighted Moving Average

Предполагаем, что в наличии есть данные о некотором показателе $\theta_t : t = \overline{1, n}$. В данный момент перед нами не стоит задача предсказания следующего показателя, нужно только визуально выявить тренд, чтобы приблизительно понять направление движение показателя в осях (время, значение). Конечно, в этой формулировке отсутствует строгость, пока что останавливаемся на том, что есть. Экспоненциальная скользящая средняя занимается тем, что уже заложено в ее названии: сглаживает показатели посредством усреднения. То есть в текущем значении (t) используется как значение в предыдущий момент времени ($t - 1$), так и значение наблюдения в момент времени (t). Иными словами, получается выпуклая линейная комбинация текущего и предыдущего значений:

$$v_t = \beta \cdot v_{t-1} + (1 - \beta) \cdot \theta_t : \beta \in (0, 1) \quad (3)$$

Где β - показатель, пропорциональный примерному количеству дней, по которым происходит усреднение, а $v_0 = 0$ - первое значение экспоненциальной

скользящей средней. Для изучения данного рекуррентного соотношения "раскручиваем" его в обратном направлении:

$$\begin{aligned}
v_t &= (1 - \beta) \cdot \theta_t + \beta \cdot \overbrace{\{(1 - \beta)\theta_{t-1} + \beta v_{t-2}\}}^{v_{t-1}} \\
&= (1 - \beta) \cdot \theta_t + \beta \cdot \{(1 - \beta) \cdot \theta_{t-1} + \beta \cdot \overbrace{\{(1 - \beta) \cdot \theta_{t-2} + \beta \cdot v_{t-3}\}}^{v_{t-2}}\}
\end{aligned} \tag{4}$$

Для лучшего понимания, рассматриваем частный случай:

$$\begin{aligned}
v_4 &= \beta \cdot v_3 + (1 - \beta) \cdot \theta_4 \\
v_3 &= \beta \cdot v_2 + (1 - \beta) \cdot \theta_3 \\
v_2 &= \beta \cdot v_1 + (1 - \beta) \cdot \theta_2 \\
v_1 &= \beta \cdot v_0 + (1 - \beta) \cdot \theta_1 \\
v_0 &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
v_4 &= (1 - \beta)\theta_4 + \beta((1 - \beta)\theta_3 + \beta((1 - \beta)\theta_2 + \beta((1 - \beta)\theta_1 + \overbrace{\beta \cdot 0}^{v_0=0}))) \\
&= (1 - \beta)\theta_4 + (1 - \beta)\beta \cdot \theta_3 + (1 - \beta)\beta^2 \cdot \theta_2 + (1 - \beta)\beta^3 \cdot \theta_1 \\
&= (1 - \beta) \sum_{t=1}^4 \beta^{4-t} \cdot \theta_t
\end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично происходит раскрытие и для больших показателей v_n . А значит, получается формула вида:

$$v_n = (1 - \beta) \sum_{t=0}^n \beta^t \cdot \theta_{n-t} \tag{7}$$

Отсюда качественно делаем вывод, что последним значениям наблюдаемого показателя (θ) соответствует большее значение коэффициента, то есть чем ближе θ_t к v_n с точки зрения индекса, тем больше при нем коэффициент. Теперь, возвращаясь к названию модели, отмечаем, что она должна усреднять по конкретному количеству временных единиц, следовательно, β (единственный гиперпараметр) должен регулировать указанный показатель (то есть количество дней, по которым происходит усреднение). Обычно, рассматривается следующее соотношение: $\beta = 1 - \alpha/(N + 1)$, где N - количество дней, а α - фактор сглаживания. Опираясь на [29], полагаем $\alpha = 2$ как наиболее распространенное значение.

Далее рассматриваем подробнее первые значения EWMA, а конкретнее - для лучшего осознания - самое первое: $v_0 \Rightarrow v_1 = (1 - \beta) \cdot \theta_1 \Rightarrow$ при $\beta \rightarrow 1 - 0$

получаем, что $(1 - \beta) \cdot \theta_1 \ll \theta_1$, что крайне плохо отражается на самих значениях. Таким образом, вычленение тренда становится более трудным на начальных этапах из-за плохого "разогрева" модели. Данная проблема называется bias (смещение), а ее решение bias correction (коррекция смещения) соответственно. Основой подобной корректировки является множитель вида $(1 - \beta^t)$. Очевидно, что при $\beta \in (0, 1)$, а именно так и есть по построению, $\lim_{t \rightarrow +0} (1 - \beta^t) = 0$, а $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - \beta^t) = 1$.

$$\begin{aligned} v_n &= (1 - \beta^n)^{-1} \cdot (\beta \cdot v_{n-1} + (1 - \beta) \cdot \theta_n) \\ v_n &= (1 - \beta^n)^{-1} \cdot (1 - \beta) \left(\sum_{t=0}^n \beta^t \cdot \theta_{n-t} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда на начальных этапах коррекция выравнивает ранее сильно уменьшенные значения EWMA, а на последующих (при $n \rightarrow \infty$) ее влияние ослабеваем, постепенно сводясь к 0 (то есть - делению на 1). Данный способ занимает очень мало памяти компьютера, так как для вычисления ему всегда необходимо хранить только 2 переменные: v_t и β .

Иллюстрируем вышеизложенную теорию на примере реальных данных. Рассматривается цена открытия акций компании Apple за 2021 год. Первоначально сами значения, представленные в координатах (t - месяц года, y_t - цена в рублях), имеют вид:



Рис. 1: Цены открытия акций Apple (AAPL) 2021 (руб.)

Исходя из графика, получаем, что данные очень нестабильны, то есть с первого взгляда невозможно точно сказать, каков тренд. Однако в общих

чертах графика однозначно видно, что от малых значений цен показатели переходят к большим. Применяем к данным модель EWMA.

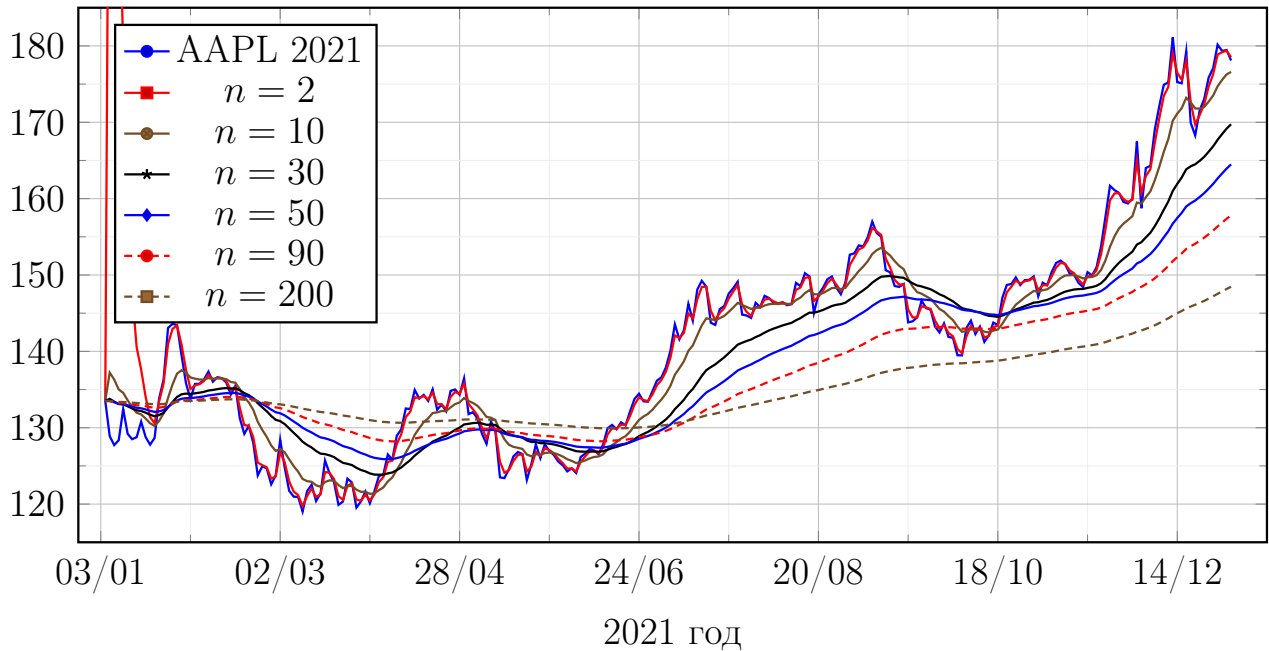


Рис. 2: EWMA, цены открытия AAPL 2021 (руб.)

Глядя на полученный результат сразу ясно, что тренд восходящий, однако это предположение делается только на основе визуального анализа. Пока что никаких алгоритмов нет. Однако нельзя недооценивать полученную информацию, так как более явный тренд позволяет моделям (нейронных сетей) более точно настраиваться на обучающую выборку, что часто приводит к улучшению результату предсказаний (если, конечно не довести до переобучения: данные термины и теория объясняется в блоке 2.2.9 стр. 42). Также стоит отметить всплеск, случившийся при $n = 2$. Это произошло именно из-за технических особенностей добавленного множителя, корректирующего смещение.

Последним пунктом необходимо рассказать более подробно о самом корректирующем множителе. **Q:** Почему у него именно такой вид, ведь можно просто сделать первое значение таким же, как в исходном ряду? **A:** 1) необходимо корректировать вычисления, исходя из одной формулы, так как цель - прийти именно к общности 2) при последующих наблюдения данный коэффициент становится чрезвычайно малым $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - \beta^t) = 1$, а при первоначальных значениях не оказывает влияния $\lim_{t \rightarrow +0} (1 - \beta^t) = 0$. Однако при индексах (речь о непрерывных), стремящихся к 0, обратная величина стремится к ∞ , что очень плохо с вычислительной точки зрения, так как у компьютера может произойти переполнение памяти и вместо числа получится NaN или Null, что не позволит далее осуществлять расчеты. Поэтому в начале графике наблюдается резкий всплеск, сходящийся впоследствии к исходному ряду. Далее приводится график значений корректирующих коэффициентов в зависимости от β и от t .

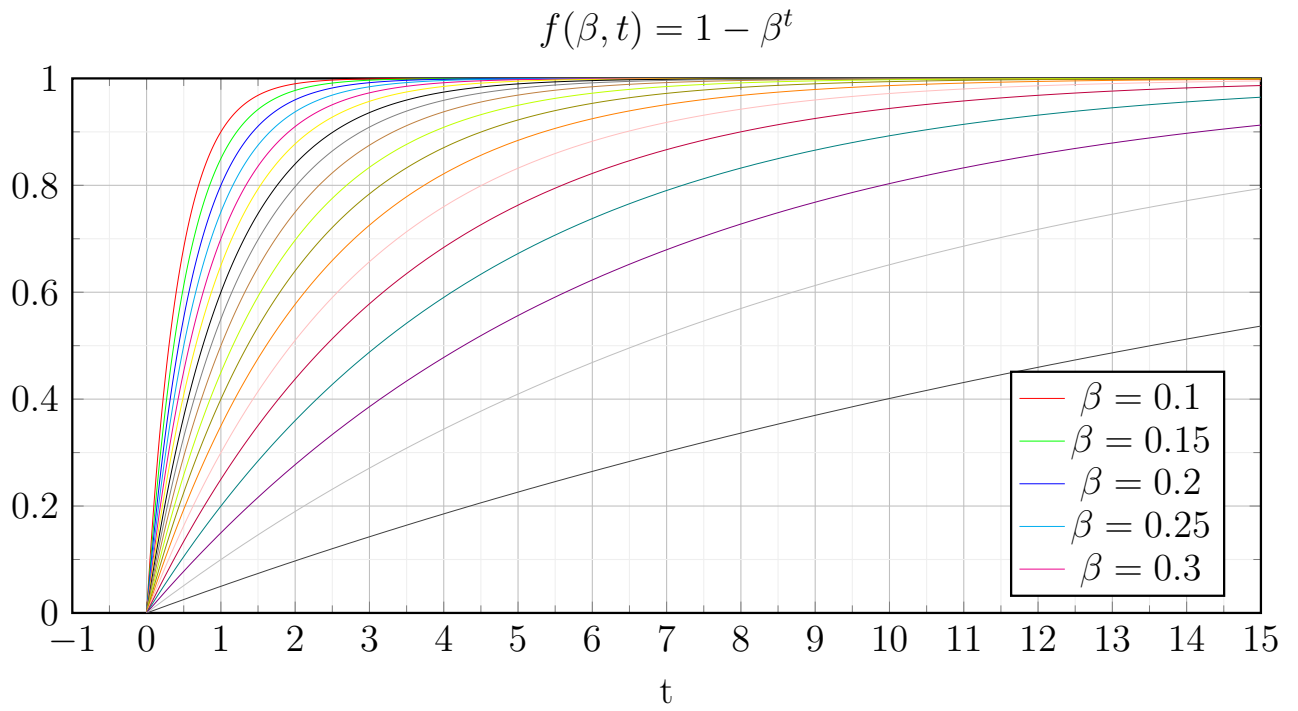


Рис. 3: График корректирующих коэффициентов

В трехмерном пространстве это выглядит так:

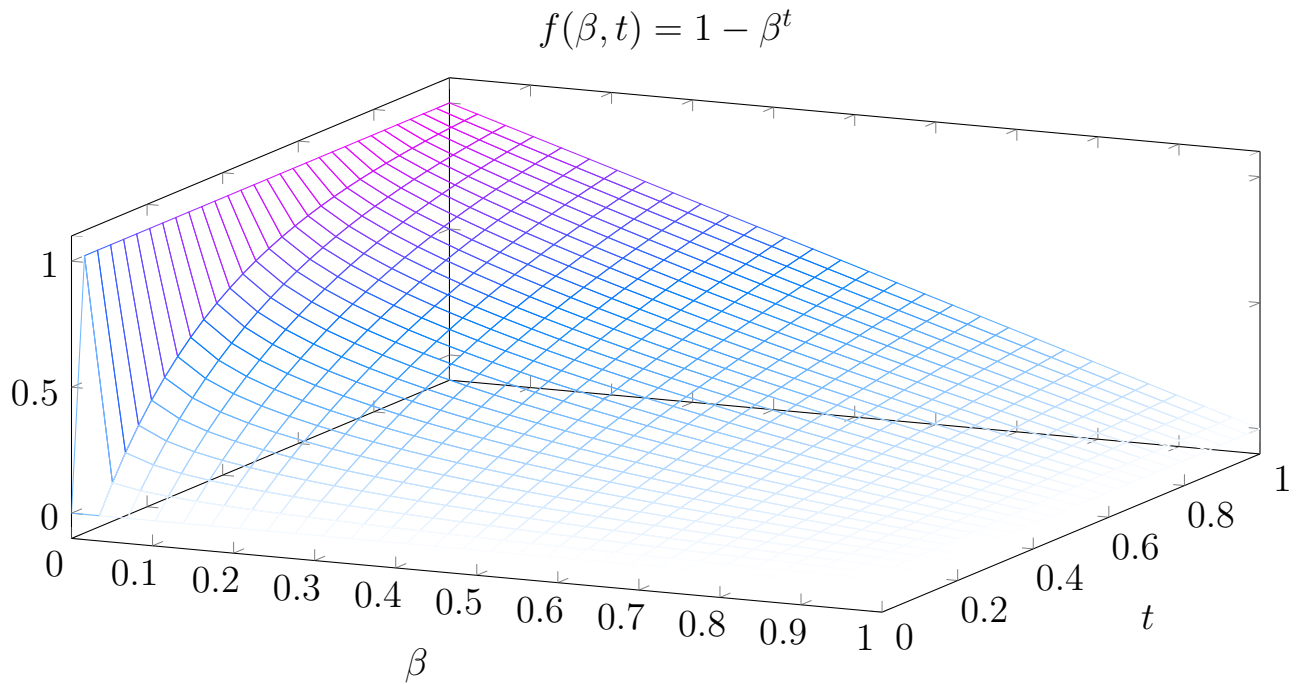


Рис. 4: Трехмерное изображение корректирующих коэффициентов

Данная модель является наиболее простой, однако она обладает возможностью предсказания.

$$v_{t+1} = k \cdot y_t + (1 - k) \cdot v_t : k \in (0, 1) \quad (9)$$

В данном случае v_t - это предсказанное значение на момент времени t . Модель не является устойчивой к наличию сезонности и тренду, однако факт того, что предсказания возможны есть. Значит, эта модель включается в список попадающих в сравнительную таблицу.

2.2.2 Auto-regressive Integrated Moving Average

Логичным предположением является тот факт, что значения конкретного временного ряда зависят от своих предыдущих значений, как было показано на примере EWMA (2.2.1 стр. 11). Обобщая данную мысль, текущее (t) значение временного ряда может зависеть от некоторого на k шагов отстающего от него значения ($t - k$). Тогда получается формула вида:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{p=1}^q \alpha_p \cdot y_p + \varepsilon_t : \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (10)$$

Пока что никаких ограничений на α_p не накладывается. **Q:** Но что такое переход от y_t элементу ряда к y_{t-1} ? **A:** Это применение некоторого оператора лага (Lag/Backshift) $B : By_t = y_{t-1}, B^2 y_t = y_{t-2}$ и так далее. **Q:** Что должен представлять из себя данный оператор? **A:** 1) Он должен быть линейен, то есть: $B(x_t + k \cdot y_t) = Bx_t + k \cdot By_t = x_{t-1} + k \cdot y_{t-1} : k \in \mathbb{R}$. **Q:** Как грамотно задать данный оператор? **A:** Представляем ситуацию, в которой необходимо из вектора $Y_n = (y_1, \dots, y_n)^T$ получить вектор $Y_{n-1} = (0, y_1, \dots, y_{n-1})^T$, тогда матрица $B : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$ имеет вид.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Во-первых, она квадратная, во-вторых интересно, что данный оператор является нильпотентным степени n . Из этого следует, что а) единственное собственное значение B это 0 б) $B^n = O$ (нулевая матрица), то есть степень нильпотентности не превосходит n . Более подробно в работе [39]. Но прежде, чем переписать полученную выше сумму в надлежащем виде, вспоминаем о возможной зависимости y_t от предыдущих значений скользящей средней (ε_{t-l}), где ε_{t-l} - значение, полученное из белого шума⁹.

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k B^k y_t + \sum_{j=1}^q \beta_j B^j \varepsilon_t + \varepsilon_t \quad (12)$$

$$\left(1 - \sum_{k=1}^p \alpha_k B^k\right) y_t = \alpha_0 + \left(\sum_{j=1}^q \beta_j B^j\right) \varepsilon_t$$

⁹Белый шум - независимые, взятые из одного распределения величины - часто $N(0, \sigma^2)$.

При этом $B\alpha_0 = \alpha_0 : \alpha_0 \in \mathbb{R}$ по построению. Таким образом, получаем модель авторегрессионной скользящей средней ARMA(p, q). Но по первоначальной предпосылке о стационарности 2 стр. 11, есть желание обобщить модель на случай нестационарных рядов. То есть сделать ее более универсальной. Для этого формально выводим условие стационарности. Выражению $1 - \sum_{k=1}^p \alpha_k B^k$ в соответствие ставим характеристическое уравнение $1 - \sum_{k=1}^p \alpha_k z^k$. Тогда если все корни данного уравнения (в силу Основной теоремы Алгебры, полученный полином над комплексной плоскостью имеет не более, чем p различных корней) $|z_i| > 1$, то данный ряд стационарен. Подробнее для AR(1):

$$\begin{aligned} y_t = \alpha \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t &\Rightarrow 1 - \alpha \cdot z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{\alpha} \\ y_{t+1} - \alpha \cdot y_t &\approx 0 \Rightarrow \lambda - \alpha = 0 \Rightarrow y_t \approx c \cdot \alpha^t : c \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (13)$$

Получается, чтобы числовые значения данного ряда не уходили в ∞ при $t \rightarrow \infty$ необходимо, чтобы в случае AR(1) $|z| > 1$, а $|\alpha| < 1$. Аналогично для случаев AR(p). Таким образом, вывод: необходим множитель, который помогал бы последовательности переходить к d -ому порядку интегрирования. **Q:** Как это сделать? **A:** $\nabla^1 y_t = y_t - y_{t-1} = y_t - B y_t = (1 - B)y_t$, $\nabla^2 y_t = \nabla^1 y_t - \nabla^1 y_{t-1} = (1 - B)y_t - (1 - B)y_{t-1} = (1 - B)y_t - (1 - B)B y_t = (1 - 2B + B^2)y_t = (1 - B)^2 y_t$ и так далее. Получается, что необходимый множитель: $\nabla^d = (1 - B)^d$. Соответственно формула ARIMA(p, d, q) имеет вид:

$$\underbrace{\left(1 - \sum_{k=1}^p \alpha_k \cdot B^k\right)}_{\text{AR}(p)} \underbrace{(1 - B)^d}_{\text{I}(d)} y_t = \underbrace{\alpha_0}_{\text{const}} + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^q \beta_j \cdot B^j\right)}_{\text{MA}(q)} \varepsilon_t \quad (14)$$

Получившаяся модель включает в себя авторегрессионную составляющую порядка p , скользящую среднюю порядка q и интегрированность порядка d . Также стоит отметить, что любой стационарный процесс можно разложить в бесконечный (абсолютно сходящийся) процесс скользящего среднего. Более известен данный факт под названием - разложение Вольда [5]. Для примера предполагаем, что некоторый процесс AR(1) стационарен.

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 + \alpha \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \\ (1 - \alpha B) \cdot y_t &= \alpha_0 + \varepsilon_t \\ (1 - \alpha B)^{-1} (1 - \alpha B) y_t &= (1 - \alpha B)^{-1} (\alpha_0 + \varepsilon_t) \\ y_t &= (1 - \alpha B)^{-1} \cdot \alpha_0 + (1 - \alpha B)^{-1} \cdot \varepsilon_t \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{Но ряд стационарен} \Rightarrow y_t = \sum_{j=1}^{\infty} B^j \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} B^j \varepsilon_t = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j \cdot B^j \varepsilon_t$$

Более подробно о данной модели написано в [4]. Процесс обучения (то есть подбора соответствующих коэффициентов модели) происходит посредством применения ММП (Метода Максимального Правдоподобия), максимизирующего

вероятность наиболее точно описать входные данные. Глобальная задача, стоящая перед алгоритмом подбора параметров (читать далее - алгоритма обучения) это:

$$\sum_p^n e_p^2 \rightarrow \min_{\alpha \in \mathbb{R}^p, \beta \in \mathbb{R}^q} \quad (16)$$

Где $e_p = y_p - \hat{y}_p$ - остаток (разница между предсказанным и исходным значением). Это очень похоже на Метода Наименьших Квадратов (МНК), только МНК дает аналитическую формулу оценок коэффициентов, а в общем случае это не всегда возможно, поэтому для подобных задач часто применяется ММП. Тут же встает вопрос: **Q**: Как понять, какая модель лучше описывает данные? **A**: 1) Критерий Акаике (AIC):

$$J_{AIC} = 2k + n \cdot \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (y_p - \hat{y}_p)^2 \right] \quad (17)$$

Где k - количество параметров в обучаемой модели, n - общее количество наблюдений, $(y_p - \hat{y}_p)^2 = e_p^2$ - остаток от регрессии 2) Байесовский информационный критерий (BIC):

$$J_{BIC} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (y_p - \hat{y}_p)^2 + \frac{k \hat{\sigma}^2 \ln(n)}{n} \quad (18)$$

Где $\hat{\sigma}^2$ - оценка (так как реальное значение неизвестно) дисперсии шума ряда, полученного по формуле $(y - \hat{y})$. [1] **Q**: Однако тут появляется еще один вопрос: как человеку понять, какой порядок $AR(\cdot)$ и $MA(\cdot)$ должен быть? **A**: Существует 2 способа, чтобы выяснить это. $ACF(k)$ (Auto Correlation Function) и $PACF(k)$ (Partial Auto Correlation Function). Как видно из названия - это некоторые функции от переменной k . **Q**: Что они характеризуют? **A**: 1) ACF - основанная на конкретном наборе данных дискретная функция, вычисляемая на основе формулы:

$$ACF(k) = \hat{\rho}_k = \text{corr}(y_t, y_{t-k}) \quad (19)$$

2) $PACF$ - частная автокорреляционная функция. Вычисляется на основе оцененной модели $AR(k)$. Строится график коэффициентов при лагах. В итоге формула функции приобретает вид:

$$PACF(k) = \hat{\alpha}_k \quad (20)$$

Как было сделано для предыдущей модели, иллюстрируем вышеизложенную теорию на примере. Рассматриваем цены открытия акций компании Apple за 2021 год. Стоит заранее сказать, что прежде, чем обучить модель, проверяем сам ряд на стационарность, то есть - на наличие корней $|z_j| < 1$, что свидетельствует о нестационарности исследуемого ряда.

- В настоящем исследовании проверка стационарности временного ряда проводится посредством применения Аугментированного теста Dickey–Fuller (ADF) [13], а также Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) [17]. Для ADF **H0** - нестационарность (простая незначимость переменной), то есть наличие единичного корня, а для KPSS **H0** - стационарность ряда.

	ADF	KPSS
Статистика	0.017	1.802
P-val	0.96	< 0.01
Критическое значение (1%)	−3.457	0.739
Критическое значение (5%)	−2.873	0.463
Критическое значение (10%)	−2.573	0.347

Таблица 1: Тестирование исходного ряда на стационарность

Следовательно, ряд не является стационарным. Таким образом, переходим к первым разностям и проводим повторное тестирование.

	ADF	KPSS
Статистика	−17.740	0.239
P-val	0.00	$\gg 0.10$
Критическое значение (1%)	−3.457	0.739
Критическое значение (5%)	−2.873	0.463
Критическое значение (10%)	−2.573	0.347

Таблица 2: Тестирование первых разностей на стационарность

- Далее строим ACF и PACF, чтобы выяснить порядок авторегрессии и скользящей средней. Делать это уже имеем право, так как полученный процесс является стационарным.

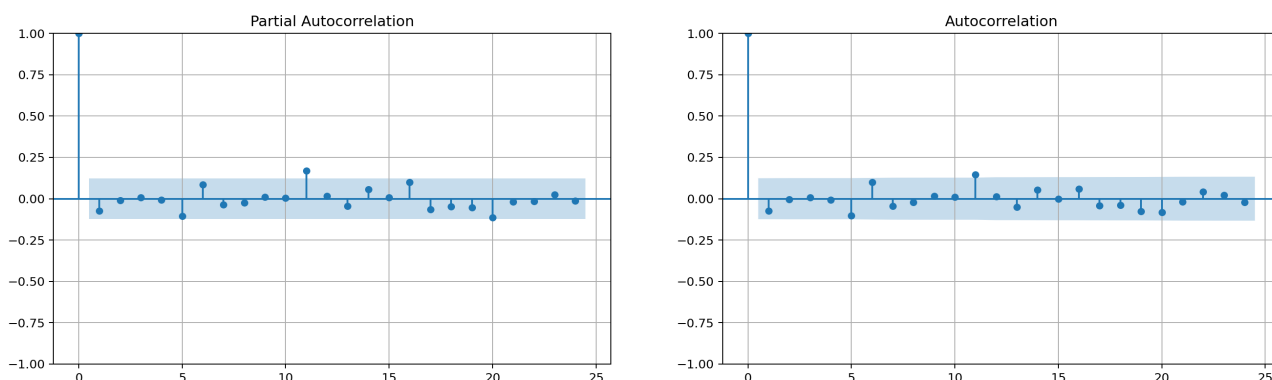


Рис. 5: ACF и PACF для $\nabla^1 y_t$

В данном случае получаем, что лучшим вариантом модели является случайное блуждание. Модель вида - пример для Random Walk(k), впервые разработанная Луи Башелье [9] в 1900 году в работе, посвященной анализу фондового рынка:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{p=1}^k y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (21)$$

То есть формальная запись модели, которую мы оцениваем далее - это ARIMA(0, 1, 0). Так как ни скользящей средней, ни автокорреляции не было выявлено для 1-ой разности.

- Получаем сводную таблицу о качестве полученной модели:

Модель	ARIMA(0, 1, 0)		
Зависимая переменная	Цена открытия		
Количество наблюдений	222		
AIC	934.71		
BIC	941.56		
Тест Ljung-Box (Q)	0.04	P-val (0.83)	
Тест Jarque-Bera (JB)	6.50	P-val (0.04)	
Тест Heteroskedasticity	0.51	P-val (0.00)	
Константа - α_0	0.079	std (0.135)	P-val (0.557)
Оцененная дисперсия - σ^2	3.949	std (0.324)	P-val (0.000)

Таблица 3: Таблица по оценке иллюстративной модели ARIMA(0, 1, 0)

Тест Ljung-Box [14] - проверка на наличие автокорреляции в остатках. **Н0**: автокорреляции в остатках нет, то есть получен белый шум. Тест Jarque-Bera [10]- тест на нормальность, где **Н0**: нормальность входных на тест данных. Однако в данном случае присутствует гетероскедастичность, которую можно убрать посредством применения скорректированной ковариационной матрицы НАС [33], однако в текущем случае необходим лишь пример модели, а не идеальная ее версия, поэтому оставляем ситуацию с ошибками модели как есть и исследуем остатки регрессии.

- В графическом варианте остатки регрессии представляются как некоторый процесс (без тестов не можем сказать, какой именно), а также плотность распределения данного числового ряда.

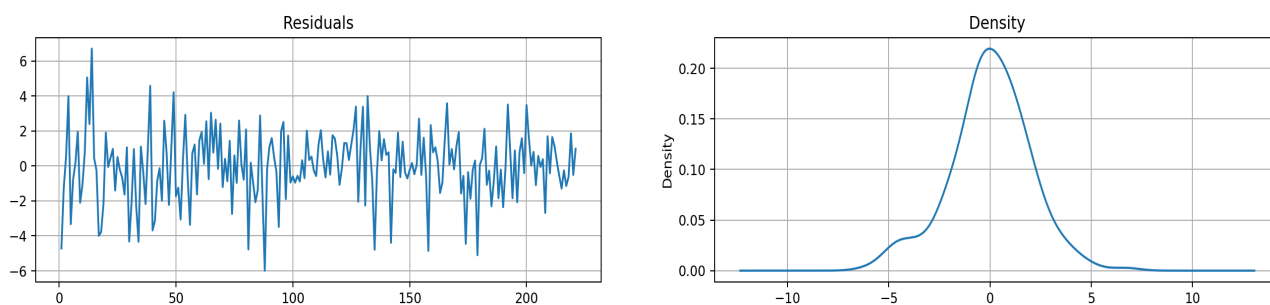


Рис. 6: Остатки и распределение остатков моделирования RW

Исходя из визуального анализа, распределение похоже на нормальное, более того формальные показатели, а именно тесты Ljung-Box и Jarque-Bera, также подтверждают данное предположение. Отсюда вывод, модель подобрана корректно, более ничего необъясненного в данных не осталось. Остался только белый шум. Однако также проверяем: есть ли в остатках модели автокорреляция.

- Основываясь на графиках ACF и PACF, вывод: автокорреляции в остатках нет.

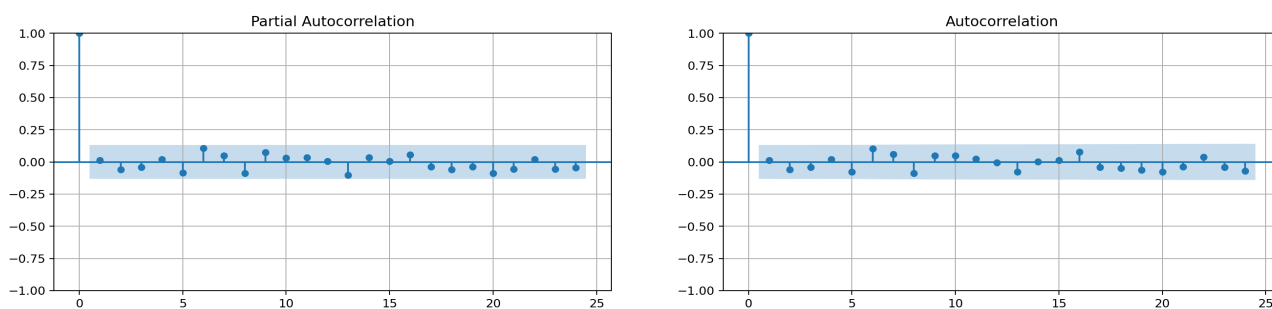


Рис. 7: ACF и PACF для остатков моделирования RW

- Несмотря на информативность уже изображенных графиков, главной ценностью настоящей модели является способность к предсказанию.

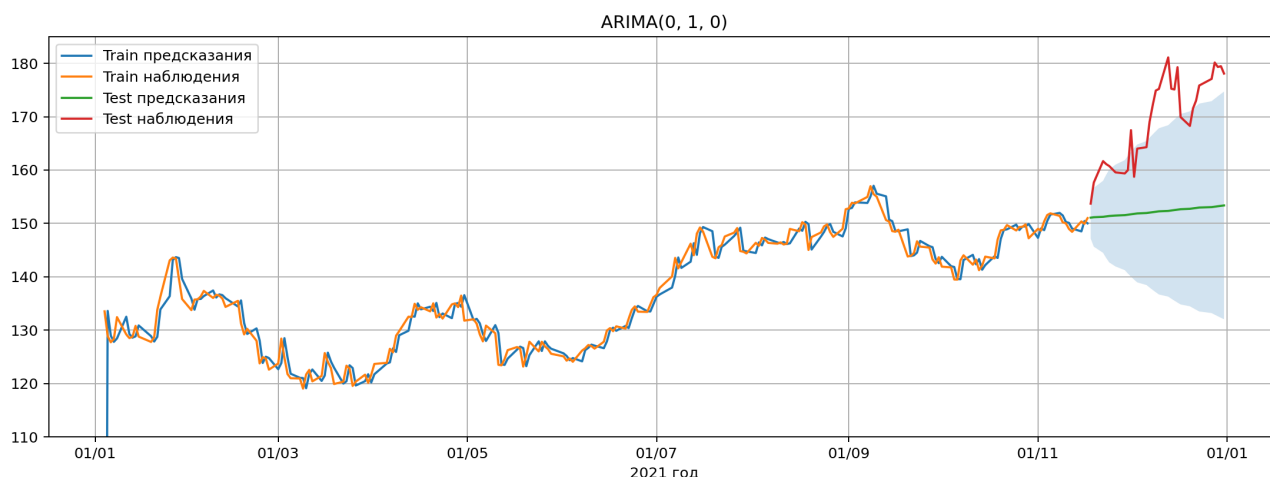


Рис. 8: Моделирование предсказаний посредством модели RW

Здесь синим цветом выделяется доверительный интервал для уровня значимости 5%. Причем интересно, что в доверительный интервал почти не попадают реальные значения, что говорит о больших трудностях как для описания данных, так и для предсказания посредством Random Walk. Train/Test - это дробление выборки на обучающие данные (на которых подбираются коэффициенты) и тестовые (на которых проводится проверка адекватности предсказаний модели). Если подобного дробления не проводить, то возможно переобучение, откуда получаем нулевую точность предсказания. Отсюда вывод, что для получения большей точности необходим поиск иного рода моделей. Но, как только что было сказано, с помощью данной модели можно предсказывать последующие значения числовой последовательности, опираясь на исходные показатели временного ряда, поэтому данная модель также включается в список сравнительной таблицы.

2.2.3 Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity

Теперь рассматриваем следующее соображение: глядя на график доходностей Apple за 2021 год (для цен открытия), видно, что в какие-то моменты волатильность больше, а в какие-то меньше.

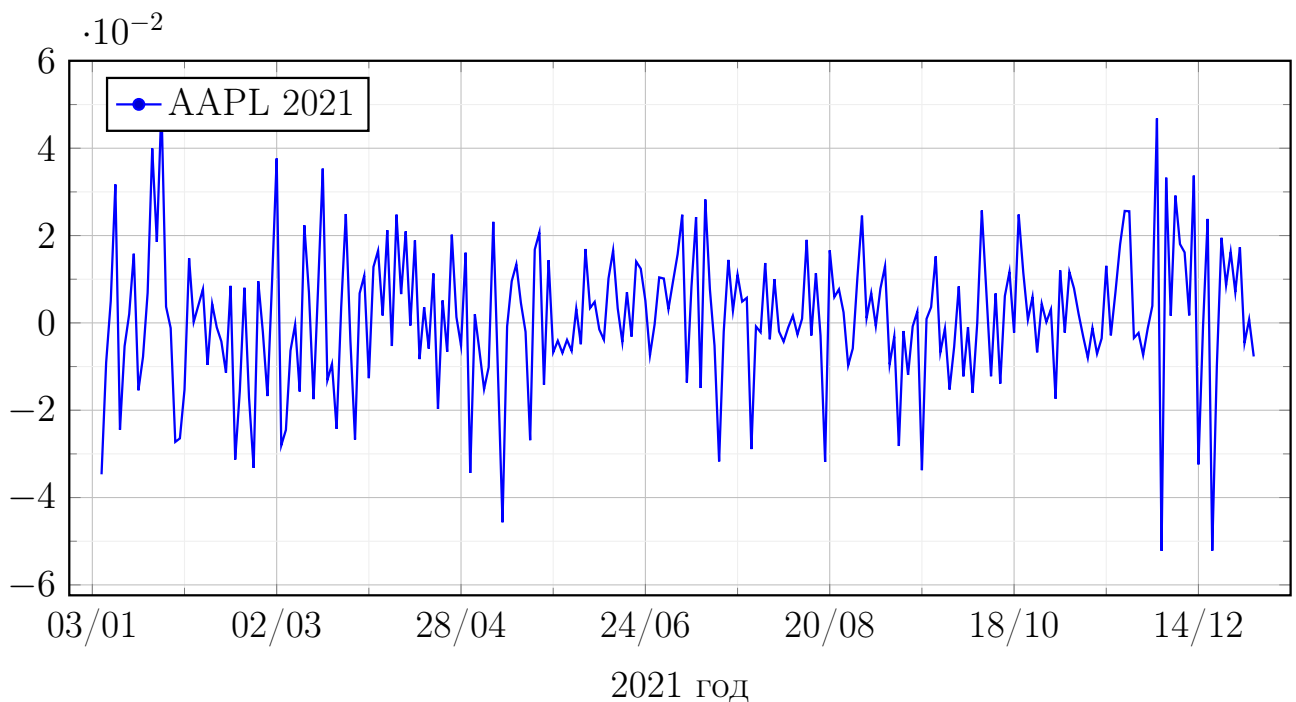


Рис. 9: Доходности цен открытия акций Apple (AAPL) 2021 (%)

Данное явление носит название "кластеризация волатильности". Было бы неплохо научиться ее предсказывать, для чего и была разработана модель ARCH [7] и как ее обобщение - модель GARCH [3]. Для большей простоты в понимании рассматриваем первоначально ARCH, а затем - GARCH.

1. Пусть есть некоторая модель (неважно какая конкретно - Constant, ARIMA, ADL, DL, однако требуем, чтобы исследуемый процесс был стационарен). Тогда, представляем исследуемую модель в формальном виде:

$$\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + u_t \\
\mu_t &\Rightarrow \text{моделирование среднего значения} \\
u_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\
\sigma_t^2 &= \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j u_{t-j}^2 \Rightarrow \text{моделирование условной дисперсии}
\end{aligned} \tag{22}$$

Где ω - константа, μ_t - предсказание среднего значения некоторой моделью, u_t - некоторая величина, зависящая от своих предыдущих значений, σ_t и ε_t , где σ_t - показатель характеризующий волатильность, а $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ то есть - случайные шоки. Тогда, вычисляя условную дисперсию u_t и математическое ожидание соответственно, получаем:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(u_t) &= \sigma_t^2 = \mathbb{V}(u_t | u_{t-1}, \dots, u_{t-p}) = \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j u_{t-j}^2 \\
\mathbb{E}(\sigma_t^2) &= \sigma^2 = \mathbb{E} \left(\omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j u_{t-j}^2 \right) = \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j \sigma^2 \\
\sigma^2 &= \frac{\omega}{1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j}
\end{aligned} \tag{23}$$

При этом, в силу неотрицательности дисперсии, необходимо учитывать, что $\alpha_j > 0 : j = \overline{1, p}$. Также $\mathbb{E}(\sigma_t^2) = \mathbb{E}(u_t^2) - \mathbb{E}(u_t)\mathbb{E}(u_t) = \sigma^2$. Более того, при этом $\mathbb{E}(u_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t) \cdot \sqrt{\cdot}$, но для большей ясности расписываем $\text{cov}(u_t, u_{t-1} | u_{t-2}, \dots, u_{t-p}) = \text{cov}(\varepsilon_t \cdot \sqrt{\omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots}, \varepsilon_{t-1} \cdot \sqrt{\cdot}) = \sqrt{\cdot} \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \cdot \sqrt{\omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots}) - \mathbb{E}(\sqrt{\cdot} \cdot \varepsilon_t) \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}) = \dots = \mathbb{E}(\varepsilon_t) \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}) = 0$. Таким образом показано, что $\text{cov}(u_t, u_{t-1}) = 0$, однако появляется закономерный вопрос. **Q:** Каким образом данная модель поддается оценке? **A:** Посредством Метода Максимального Правдоподобия.

2. Теперь рассматриваем обобщение ARCH на более высокий уровень. Предполагается наличие зависимости между σ_t^2 и u_{t-p}^2 , а также предыдущими значениями σ_{t-q}^2 , что в формальном смысле приобретает вид:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j u_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \phi_i \sigma_{t-i}^2 \tag{24}$$

Таким образом, получаем модель, способную предсказывать волатильность доходности, но не саму доходность как таковую. Данное замечание крайне важно

в условии моделей условной гетероскедастичности, так как прогнозированием именно показателя доходности выступает выбранная для μ_t модель. Существуют и иные дополнения модели: FIGARCH (2.2.5 стр. 38), а также TGARCH (Threshold GARCH) и EGARCH (Exponential GARCH) и так далее. Более подробно о них в [36]. Вывод является то, что данная модель предоставляет возможность предсказывать не саму зависимую переменную (y_t), а ее волатильность (u_t). Наиболее часто применяется GARCH(1, 1) [12]. Однако сразу стоит отметить, что при работе с GARCH моделями предполагается, что волатильность симметрична, то есть равновероятно можно отклониться как вниз, так и вверх. Далее для наглядности, действуя по уже отработанному алгоритму, проводим эксперимент на реальных данных: цены акций Apple за 2021 год.

Глядя на график 9 стр. 22, видим, как уже было отмечено ранее, наличие периодов сильной и слабой волатильности. Для этого формально строим PACF как для доходностей, так и для их квадратов. В случае наличия автокорреляции во втором случае и отсутствия ее в первом, получаем необходимое количество лагов в ARCH модели.

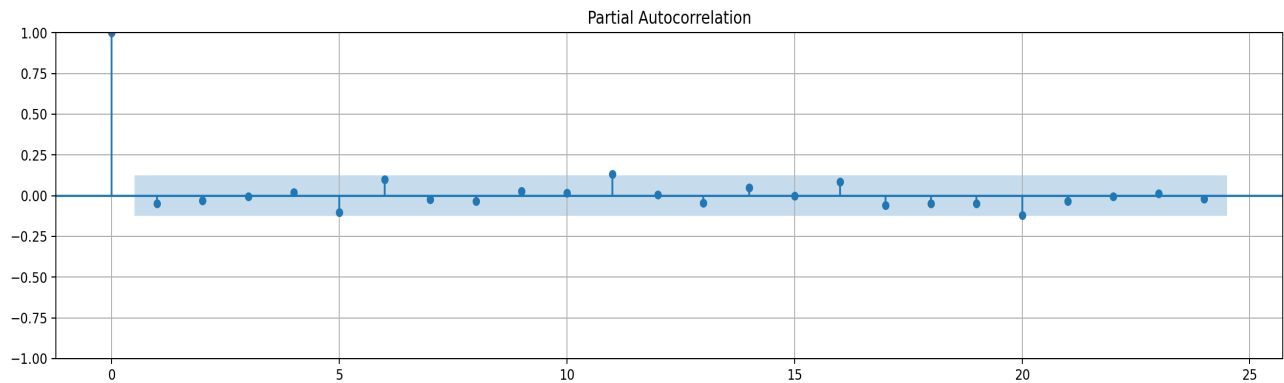


Рис. 10: PACF ряда доходностей (Apple цены открытия 2021)

Замечаем, что никаких значимых связей не наблюдается. Строим PACF для квадратов доходностей.

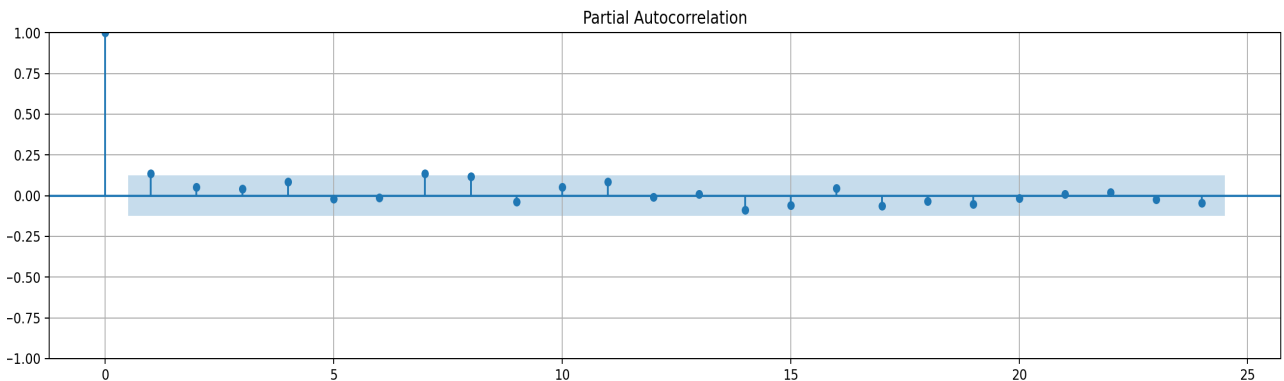


Рис. 11: PACF ряда квадратов доходностей (Apple цены открытия 2021)

Откуда получаем почти не значимый показатель для 1-ого лага, а этого уже достаточно, чтобы попытаться применить модель ARCH(1). Несмотря на свою наглядность, только что показанный способ является необходимым, но не достаточным условием именно такого лага, значит, далее, основываясь на критерии BIC выбираем лучшую из обученных моделей модель. При этом моделирование среднего значения оставляем как классическое среднее, то есть: $\mu_t \equiv \mu$. Однако для большей уверенности в своих показателях, используем полноценный ряд доходностей компании Apple, начиная с ее выхода на IPO. Показатель доходности вычисляется на основе цен открытия.

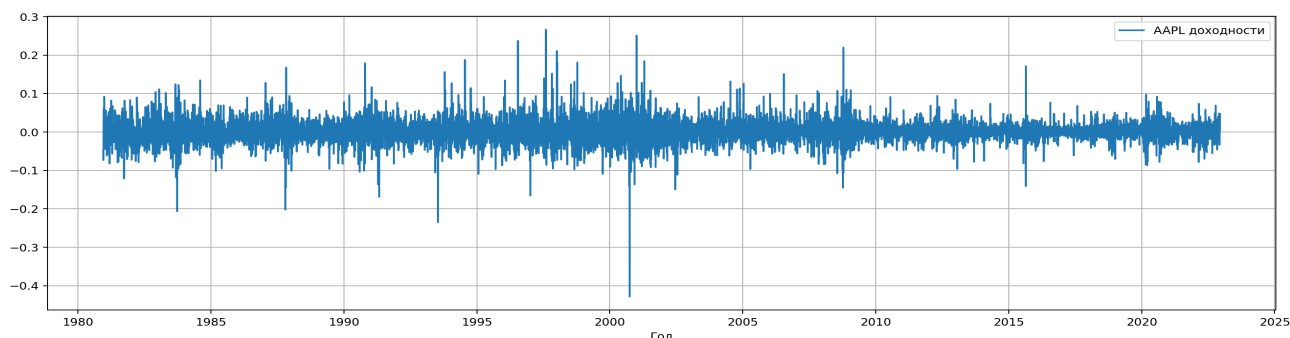


Рис. 12: Доходности Apple (с выхода на IPO по 2022) не в %

Квадраты доходностей соответственно имеют вид:

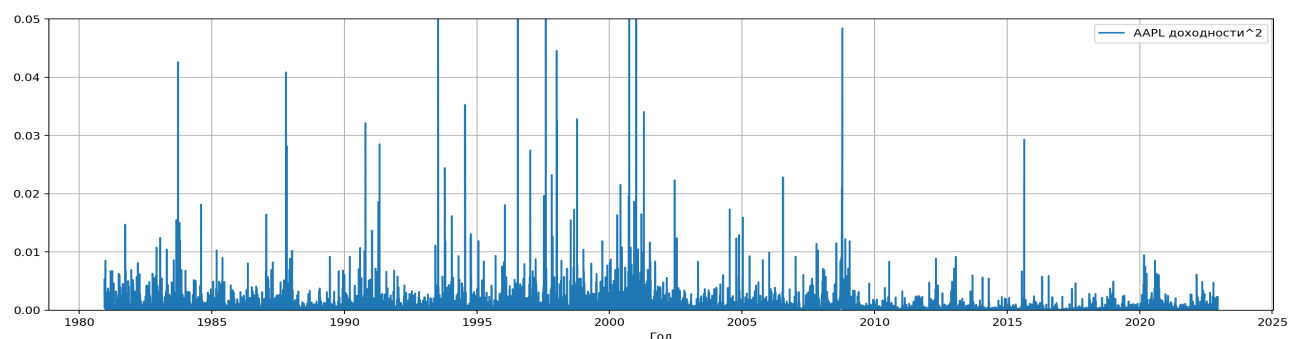


Рис. 13: Квадраты доходностей Apple (с выхода на IPO по 2022) не в %

Таким образом, им соответствующие PACF выглядят:

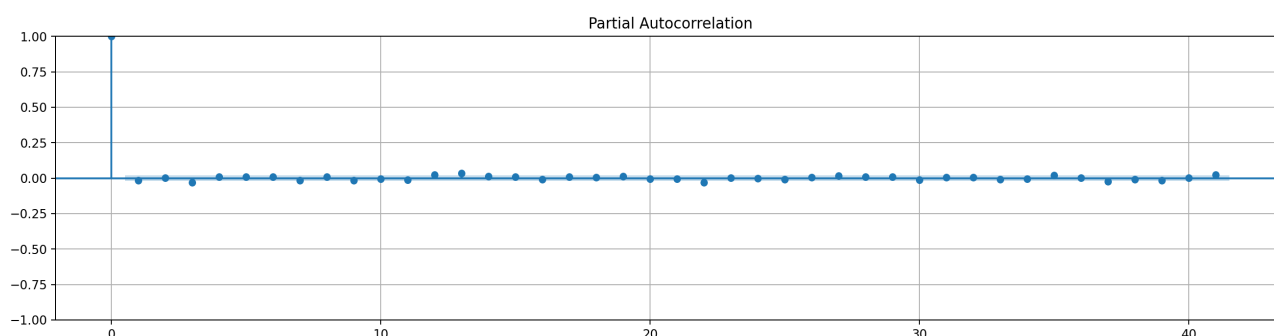


Рис. 14: PACF ряда доходностей Apple (с выхода на IPO по 2022)

Аналогично предыдущему случаю, никаких значимых связей тут тоже не наблюдается. Строим PACF для квадратов доходностей.

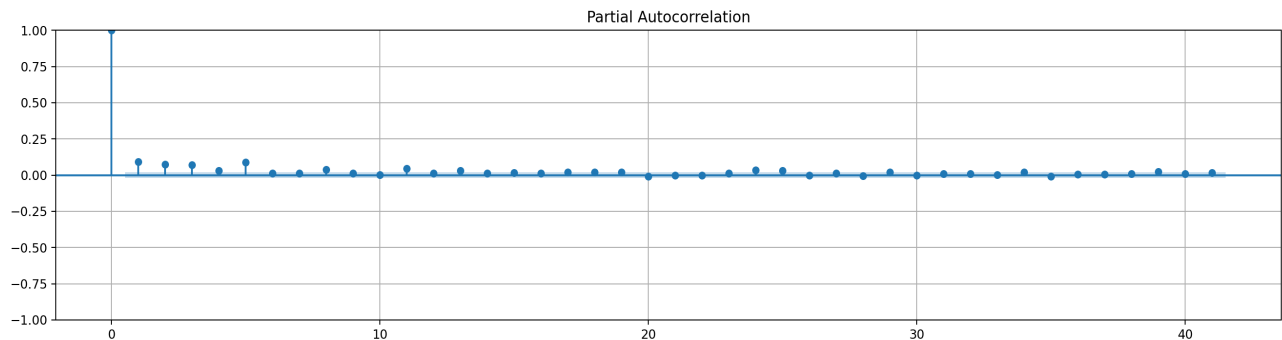


Рис. 15: PACF ряда квадратов доходностей Apple (с выхода на IPO по 2022)

А тут уже точно есть четко выраженная автокорреляционная зависимость, что однозначно сигнализирует о необходимости проверки моделей из ARCH семейства. Таким образом, для начала вычисляем $GARCH(p, q)$ такие, что $(p, q) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, а потом все $ARCH(p) : p = \bar{1}, 10$. Это делается для лучшего понимания, какая модель наиболее качественно описывает данные. Причем отмечаем, что $GARCH(1, 1)$ является признанным хорошим вариантом моделирования финансовых временных рядов [12].

	GARCH(1, 1)	GARCH(1, 2)	GARCH(2, 1)	GARCH(2, 2)
μ	0.174*** (0.024)	0.170*** (0.025)	0.174*** (0.028)	0.168 (0.159)
ω	0.073* (0.024)	0.089** (0.042)	0.073 (0.078)	0.119 (0.716)
α_1	0.068*** (0.024)	0.089*** (0.028)	0.068*** (0.014)	0.079 (0.228)
α_2	-	-	0.000 (0.051)	0.037 (0.053)
β_1	0.927*** (0.026)	0.430 (0.772)	0.927*** (0.709)	0.000 (3.782)
β_2	-	0.474 (0.757)	-	0.875 (3.243)
BIC	50'056.5	50'054.1	50'065.7	50'047.3
n	10'590	10'590	10'590	10'590
Note:	* $p < 0.1$, ** $p < 0.05$, *** $p < 0.01$			

Таблица 4: Сводная таблица моделей GARCH

Таблица 5: Сводная таблица оцененных моделей. (* $p < 0.1$, ** $p < 0.05$, *** $p < 0.01$)

	ARCH(1)	ARCH(2)	ARCH(3)	ARCH(4)	ARCH(5)	ARCH(6)	ARCH(7)	ARCH(8)	ARCH(9)	ARCH(10)
μ	0.137*** (0.029)	0.175*** (0.029)	0.184*** (0.027)	0.178*** (0.026)	0.186*** (0.026)	0.187*** (0.026)	0.189*** (0.026)	0.188*** (0.025)	0.191*** (0.025)	0.191*** (0.025)
ω	5.993*** (0.241)	4.789*** (0.227)	3.891*** (0.205)	3.352*** (0.221)	3.002*** (0.195)	2.709*** (0.199)	2.408*** (0.198)	2.257*** (0.199)	2.135*** (0.202)	2.110*** (0.206)
α_1	0.307*** (0.054)	0.239*** (0.045)	0.227*** (0.048)	0.206*** (0.041)	0.174*** (0.028)	0.166*** (0.027)	0.149*** (0.024)	0.144*** (0.023)	0.140*** (0.022)	0.140*** (0.022)
α_2	-	0.0236*** (0.038)	0.218*** (0.036)	0.207*** (0.036)	0.169*** (0.034)	0.161*** (0.034)	0.150*** (0.034)	0.148*** (0.034)	0.142*** (0.031)	0.141*** (0.031)
α_3	-	-	0.163*** (0.026)	0.152*** (0.026)	0.144*** (0.025)	0.139*** (0.025)	0.125*** (0.024)	0.117*** (0.023)	0.116*** (0.023)	0.113*** (0.023)
α_4	-	-	-	0.122*** (0.028)	0.091*** (0.009)	0.083*** (0.019)	0.079*** (0.018)	0.069*** (0.017)	0.062*** (0.018)	0.059*** (0.018)
α_5	-	-	-	-	0.134*** (0.031)	0.112*** (0.030)	0.120*** (0.031)	0.111*** (0.029)	0.104*** (0.029)	0.104*** (0.029)
α_6	-	-	-	-	-	0.086*** (0.025)	0.084*** (0.026)	0.075*** (0.024)	0.067*** (0.022)	0.066*** (0.022)
α_7	-	-	-	-	-	-	0.093*** (0.026)	0.083*** (0.026)	0.080*** (0.026)	0.080*** (0.026)
α_8	-	-	-	-	-	-	-	0.067*** (0.019)	0.063*** (0.019)	0.063*** (0.019)
α_9	-	-	-	-	-	-	-	-	0.055*** (0.025)	0.052*** (0.025)
α_{10}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.013 (0.013)
BIC	51'448.5	51'062.1	50'785.2	50'654.5	50'427.6	50'367.6	50'301.6	50'259.5	50'240.5	50'247.0
n	10'590	10'590	10'590	10'590	10'590	10'590	10'590	10'590	10'590	10'590

По итогам, получается, что лучшая полученная модель имеет наименьший BIC, таким образом, это безоговорочно модель из семейства GARCH, а не ARCH, однако лучше использовать GARCH(1, 1), так как для GARCH(2, 2), для которого BIC меньше всех, и GARCH(1, 2), имеют незначащие коэффициенты. Отсюда вывод, что лучшая модель, описывающая исходные данные представлена в виде GARCH(1, 1). Далее рисуем график доходностей и доверительный интервал по правилу 2-х сигм.

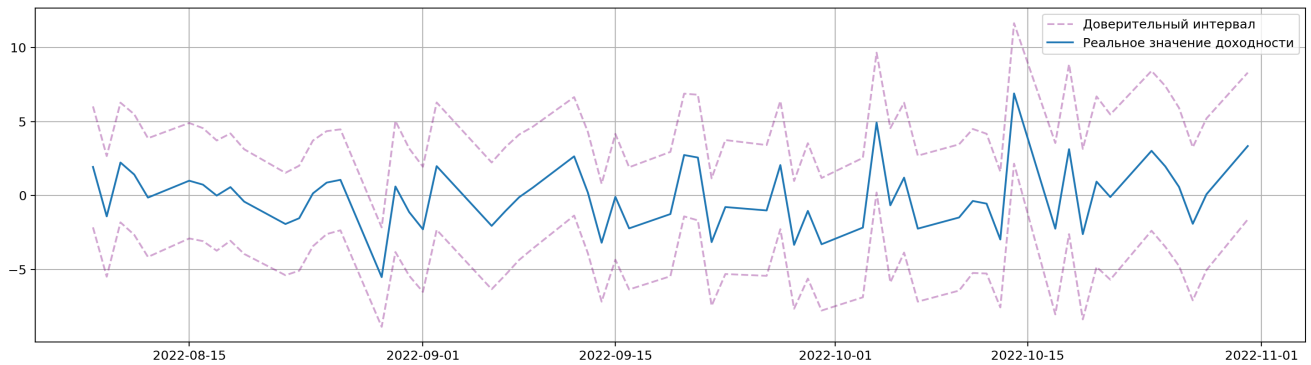


Рис. 16: Доходности (%) Apple и доверительный интервал ($r_t \pm 2\hat{\sigma}_t$) 2022 г.

Далее показываем предсказание условной гетероскедастичности.

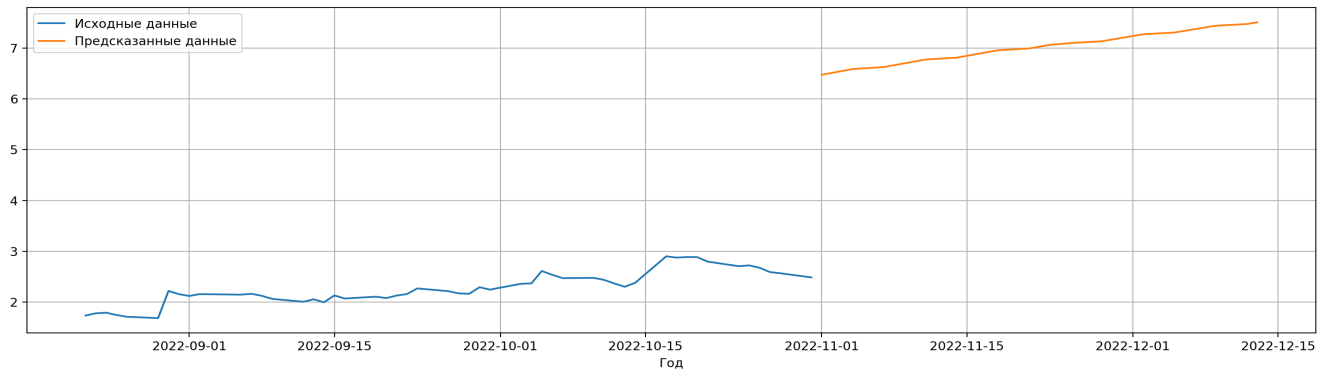


Рис. 17: Прогнозирование условной дисперсии на 30 рабочих дней биржи

И в итоге рисуем график прогноза условной дисперсии и самого значения доходности посредством применения модели среднего для будущей доходности и модели GARCH(1, 1) для ее волатильности.

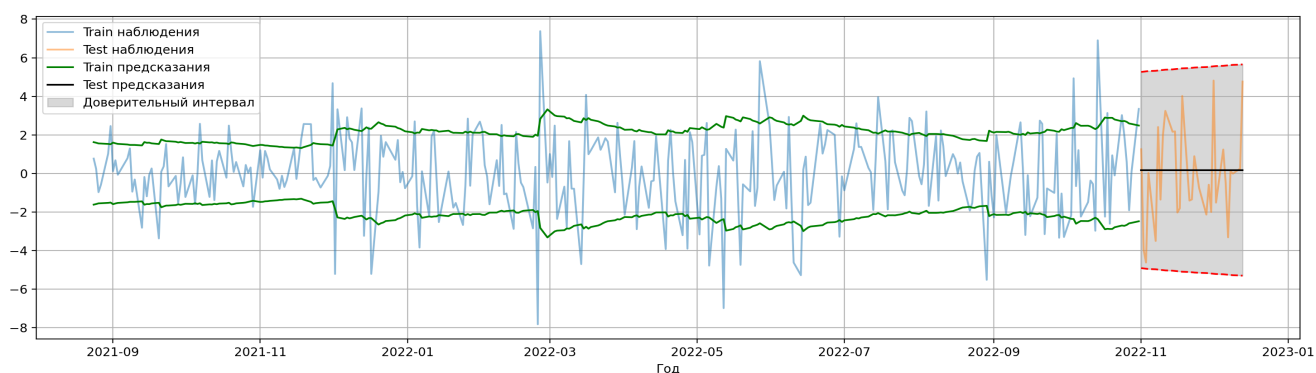


Рис. 18: (частичный) Прогнозирование доходностей Apple на 30 рабочих дней биржи (в %)

Отсюда заметен достаточно большой доверительный интервал, что позволяет предположить, что волатильность актива должна была значительно увеличиться. Полностью график не был включен, так как, исходя из большого количества наблюдений, не получается визуально отследить качество прогноза, однако он (полноценный график) имеет вид:

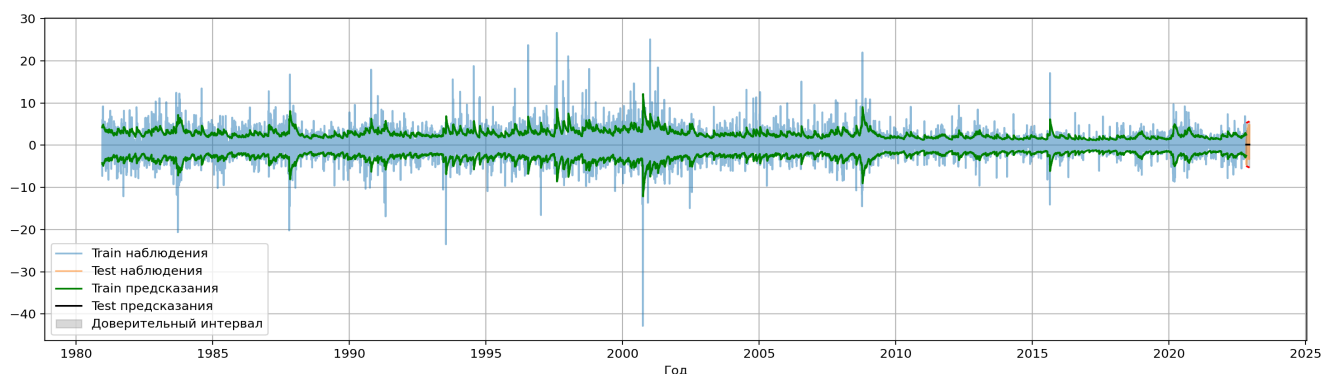


Рис. 19: (полный) Прогнозирование доходностей Apple на 30 рабочих дней биржи (в %)

Тут же заметно качество, с которым GARCH описывает условную гетероскедастичность, что не позволяет не отметить точность данной работы: большая часть интервалов соблюдена и обоснована. В конечно счете, модель может прогнозировать, то есть подходит для финального сравнительного списка. Включаем ее в анализ.

2.2.4 Auto-regressive Fractionally Integrated Moving Average

Ранее рассматривалась модель $\text{ARIMA}(p, d, q)$, принимавшая вид:

$$\underbrace{\left(1 - \sum_{k=1}^p \alpha_k B^k\right)}_{\text{AR}(p)} \underbrace{(1 - B)^d}_{\text{I}(d)} y_t = \underbrace{\alpha_0}_{\text{const}} + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^q \beta_j B^j\right)}_{\text{MA}(q)} \varepsilon_t \quad (25)$$

Для удобства записи, вводим переобозначение $\alpha_p(B) = (1 - \sum_{k=1}^p \alpha_k B^k)$, а также $\beta_q(B) = (\sum_{j=1}^q \beta_j B^j) \varepsilon_t$, что преобразует вышеннаписанное выражение:

$$\alpha_p(B)(1 - B)^d y_t = \alpha_0 + \beta_q(B) \varepsilon_t \quad (26)$$

При рассмотрении ARIMA делалось негласное предположение, что $d \in \mathbb{N}$, так как логично, что временные лаги могут быть только целыми и только дискретными. Однако, расширяя данный показатель [38] на $d \in \mathbb{R}$, получаем процесс, называемый дробно-интегрированным, а само название модели изменяется на ARFIMA [11], что расшифровывается как авторегрессионная фрактально-интегрированная скользящая средняя. Понятно, что все остальные параметры сохраняются.

$\text{ARFIMA}(0, d, 0) \Rightarrow (1 - B)^d y_t = \varepsilon_t \Rightarrow y_t = (1 - B)^{-d} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \varepsilon_{t-j}$, основываясь на стационарности процесса и разложении Вольда [5], представляем $\text{AR}(1)$ в виде $\text{MA}(\infty)$. Далее, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора для $(1 - B)^{-d}$, получаем:

$$\begin{aligned} (1 - B)^{-d} &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-d) \cdot \dots \cdot (-d - p + 1)}{p!} (-B)^p \\ (1 - B)^{-d} &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p (-d - i + 1)}{p!} (-B)^p \\ (1 - B)^{-d} &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} h_p B^p \\ h_p &= \frac{\Gamma(p + d)}{\Gamma(d) \Gamma(p + 1)} \end{aligned} \quad (27)$$

И из подобного разложения [41] в случае стационарности следует факт:

$$\text{ARFIMA}(0, d, 0) : (1 - B)^d y_t = \varepsilon_t \Rightarrow y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \varepsilon_{t-j} \quad (28)$$

Теорема 1 (Основные свойства $I(d)$ процесса [15]) *Если: $d < 0.5$, то: процесс стационарен. Если: $d > 0.5$, то: процесс не является стационарным. Если: $d > -0.5$, то разложение (28) обратимо. Если: $d \in (-0.5, 0.5)$, то: 1) ковариационная функция:*

$$y_t : \gamma_k = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)}\sigma_\varepsilon^2$$

2) корреляционная функция при $k \rightarrow \infty$ ведет себя как:

$$\rho_k \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)}k^{2d-1}$$

При этом важно заметить, что условия $d \in (-0.5, 0.5)$ всегда можно добиться, применив необходимое количество раз обычное дифференцирование ряда. Все вышеизложенное - преамбула к процессам с долгосрочной памятью.

Определение 4 (Процесс с длинной памятью) *Если: $\exists \alpha \in (0, 1), c > 0$: для ACF верно $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_k}{ck^{-\alpha}} = 1$, то: стационарный процесс называется процессом с длинной памятью.*

Закономерный вопрос: **Q:** Как эту память обнаружить? **A:**

- Тест Dickey-Fuller и Phillips-Perron (**H0:** нестационарность) имеют малую мощность, следовательно, они плохо отличают $I(1)$ от $I(d) : d < 1$.
- KPSS тест (**H0:** стационарность) состоятелен при стационарных процессах с длинной памятью ($I(d) : |d| < 0.5$), но необходимо ≥ 1000 наблюдений.
- Наиболее распространен тест Rescaled Range Statistics (R/S).
- DFA - Detrended Fluctional Analysis (Детрендированный Флуктуационный Анализ). Менее распространен, но применяется.

Подводя промежуточный итог, указываем, что в уравнении ARFIMA(p, d, q) отвечает за LM (Long Memory), а что за SM (Short Memory).

$$\begin{aligned} \alpha_p(B)(1-B)^d y_t &= \alpha_0 + \beta_q(B)\varepsilon_t \\ y_t &= (\alpha_p(B)(1-B)^d)^{-1} \{\alpha_0 + \beta_q(B)\varepsilon_t\} \\ y_t &= \underbrace{(1-B)^{-d}}_{\text{LM}} \underbrace{\alpha_p(B)^{-1}\beta_q(B)}_{\text{SM}} \varepsilon_t \end{aligned} \quad (29)$$

Практическое применения данной модели происходит следующим образом: 1) Оцениваем d 2) Преобразуем ряд 3) Оцениваем p и q при условии, что для нового ряда $d = 0$, то есть ряд стационарен. Исторически одни из первых работ на данную тему были [15], [16] применены к изучению в области гидрологии

(а точнее - разливам Нила). Главная гипотеза: если в году t засуха, то в году $t + 1$ высока вероятность, что тоже будет засуха. Далее [11] применили данный метод к макроданным. Важно также заметить, что для ARFIMA показатели ACF убывают медленнее, чем для ARIMA, таким образом можно выявить наличие LR (Long Run) памяти визуально. Но более формально это происходит посредством теста R/S, введенного в [16], а примененного к финансовым рядам уже в [20]. Подробнее R/S рассматривается как отношение значений размаха частичных сумм к стандартному отклонению. **Q:** Как вычисляется R/S статистика? **A:**

1. Дан ряд y_1, \dots, y_T .
2. Делим исходный ряд на несколько интервалов вида: $n = T, n = T/2, n = T/4, \dots$
3. Вычисляем статистику:

$$R/S_t = \frac{1}{\hat{\sigma}_t^2} \left(\max_{1 \leq k \leq t} \left\{ \sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y}_t) \right\} - \min_{1 \leq k \leq t} \left\{ \sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y}_t) \right\} \right) \quad (30)$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t (y_j - \bar{y}_t)^2 \quad \bar{y}_t = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t y_j$$

4. Предполагаем для R/S статистики, что она увеличивается пропорционально корню из временного промежутка. Тогда:

$$R/S_t \approx \frac{\sum_{j=1}^t R_j}{\sum_{j=1}^t S_j} \approx (c \cdot n)^H : n \rightarrow \infty \quad (31)$$

$$\log(R/S_t) \approx \hat{c} + \hat{H} \log(\hat{n})$$

Где R_n - размах, S_n - стандартное отклонение, c - константа, H - показатель Херста (часто называется экспонентой Херста).

Выводы: 1) **Если:** $H > 0.5$ и значима, **то:** процесс называется персистентным, то есть следующие друг за другом приращения процесса имеют тенденцию сохранять знак и имеют положительную автокорреляцию. **Если:** $H = 0.5$ и значима, **то:** тенденции не выражены (например, белый шум). **Если:** $H < 0.5$, **то:** процесс антиперсистентен и имеет отрицательную автокорреляцию (любая тенденция стремится смениться на противоположную). Таким образом, получаем алгоритм действий:

1. Рисуем ACF для исходного процесса. Если ACF убывает гиперболически, то возможно, что процесс дробно-интегрированный. То есть в нем присутствует длинная память.

2. Доводим исходный ряд до стационарности путем классического дифференцирования.
3. Вычисляем константу Херста для стационарного ряда.
4. Используя, полученный показатель d , переходим от исходного ряда, который дан изначально, к дробно-интегрированному.
5. К полученному дробно-интегрированному ряду применяем модель ARIMA.

Однако у данного способа вычисления R/S статистики есть свои недостатки: 1) Чувствительность к SR зависимости 2) Чувствительность к гетероскедастичности. Существует решение, предложенное Andrew Lo [19]. Идея решения - преобразование σ^2 .

$$\begin{aligned}
Q_t \equiv R/S_t &= \frac{1}{\hat{\sigma}_t^2(q)} \left(\max_{1 \leq k \leq t} \left\{ \sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y}_t) \right\} - \min_{1 \leq k \leq t} \left\{ \sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y}_t) \right\} \right) \\
\hat{\sigma}_t^2(q) &= \hat{\sigma}_t^2 + 2 \sum_{j=1}^q \omega_j(q) \hat{\gamma}_{jt} \\
\omega_j(q) &= 1 - \frac{j}{q+1} : q < t \\
\hat{\gamma}_{jt} &= \frac{1}{t} \sum_{i=j+1}^t (y_i - \bar{y}_t)(y_{i-j} - \bar{y}_t)
\end{aligned} \tag{32}$$

Где $\hat{\sigma}_t^2$ и $\hat{\gamma}_j$ - дисперсия и автоковариация для y . Тестирование наличия LR памяти имеет **Н0**: SR память. Критические значения для данной статистики другие, а именно:

α	Левый край	Правый край
1%	[0.721	2.098]
5%	[0.809	1.862]
10%	[0.861	1.747]

Таблица 6: Критические значения для модифицированной R/S

Другим способом оценки показателя H является DFA, работающий по принципу: "Убирай все, что кажется трендом и анализируй остаток". Формальный алгоритм оценки имеет следующий вид [35]:

1. Дан ряд $y_t : t = \overline{1, T}$.
2. Вычисляем $y_t^{\text{cum}} = \sum_{i=1}^t (y_i - \bar{y}_t)$.

3. Разбиваем кумулятивный ряд на N сегментов длины δ .
4. Для каждого сегмента вычисляем:

$$F_i(\delta) = \sqrt{\frac{1}{\delta} \sum_{t=i\cdot\delta+1}^{(i+1)\cdot\delta} (y_t^{\text{cum}} - y_t^{\text{trend}})^2} : i = \overline{0, N-1} \quad (33)$$

$F_i(\delta)$ и есть флуктуационная функция, а y_t^{trend} - значение в точке t функции локального линейного тренда, аппроксимирующего динамику данного ряда.

5. Полученные значения далее усредняются:

$$\overline{F(\delta)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_j(\delta) \quad (34)$$

6. Все расчеты проводятся для нескольких δ .
7. Далее оценивается линейная регрессия:

$$\ln(\overline{F(\delta)}) = \alpha \ln(\delta) + b : \alpha, b \in \mathbb{R} \quad (35)$$

8. В итоге экспонента Херста равна:

$$H = \begin{cases} \alpha & , y_t - \text{стационарен} \\ \alpha - 1 & , y_t - \text{нестационарен} \end{cases} \quad (36)$$

Далее оцениваем ARFIMA на реальных данных. Аналогично всем моделям раньше, используем в качестве образца цену открытия акций Apple за 2021. Последовательно выполняем вышеописанные действия:

1. ACF и PACF для исходного ряда. Подчеркиваю: для исходного, а не стационарного, так как не факт, что для первых разностей значимы те же лаги, что и для исходного ряда. Также: для корректности вычислений используем весь исходный ряд, то есть с выхода Apple на IPO по 2022 год.

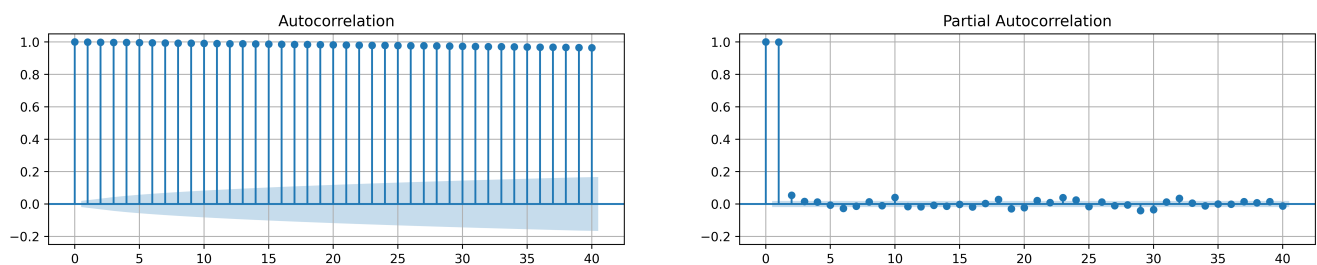


Рис. 20: ACF и PACF для цены открытия акций Apple (с IPO по 2022 г)

Анализируя график ACF, видим, что даже 40-й лаг значим, таким образом, делается вывод, что имеющийся процесс имеет длинную память, то есть имеет смысл вычислять экспоненту Херста.

2. Переходим к стационарному ряду, так как исходный, даже посредством визуального анализа не является стационарным. Более того, исходя из теста KPSS (**H0**: стационарность), стационарность ряда отвергается на 1%-ом уровне значимости.

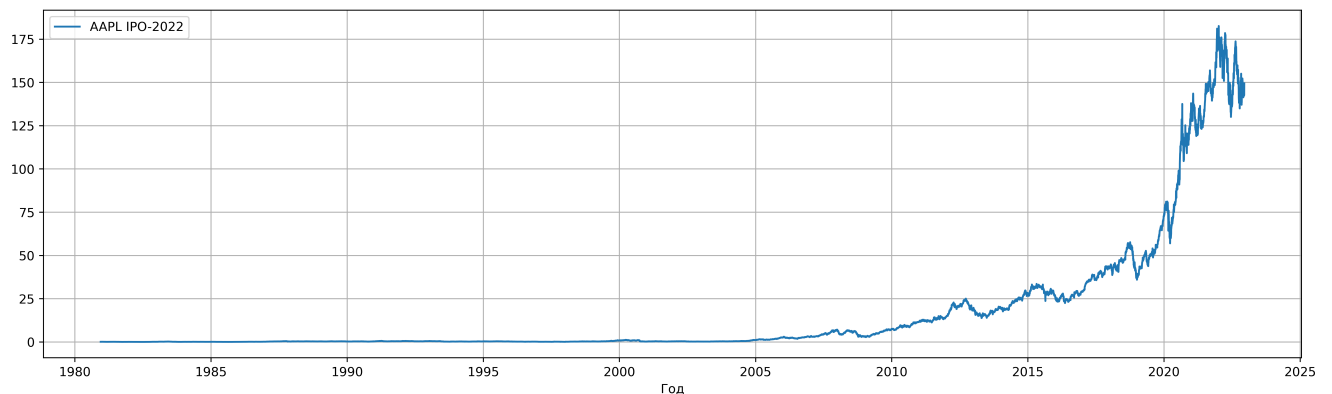


Рис. 21: Цены открытия акций Apple (с IPO по 2022 г)

Переходим к 1-м разностям:

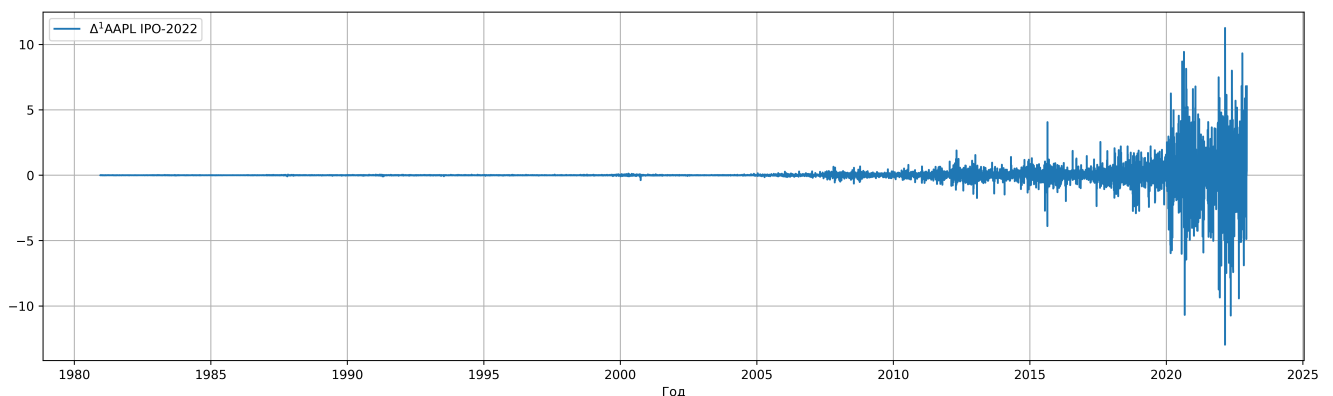


Рис. 22: Первые разности цены открытия акций Apple (с IPO по 2022 г)

Посредством проведенного ADF (**H0**: нестационарность, Augmented Dickey-Fuller [13]) теста, получаем безоговорочную стационарность. Даже несмотря на нестационарность первых разностей по KPSS, оставляем ряд таким, какой он есть.

3. Далее оцениваем экспоненту Херста посредством применения R/S модифицированной статистики. Получаем, что значение вычисленной стати-

стики 2.674, что позволяет отвергнуть **H0**: наличие краткосрочной памяти на 1%-м уровне. Таким образом, действительно, у процесса есть долгосрочная память ¹⁰. Сама же экспонента Херста равна 0.566, то есть, используя соотношение:

$$H = 0.5 + d \tag{37}$$

Получаем, что порядок интегрирования (d) равняется приблизительно 0.066.

4. Переходим к дробно-интегрированному процессу.



Рис. 23: Дробные разности цены открытия акций Apple (с IPO по 2022 г)

5. Далее, применяя ранее описанный алгоритм ARIMA, подбираем модель, наиболее точно описывающую полученные значения, и прогнозируем цены уже для дробно-интегрированного ряда.

Модель	ARFIMA(0, 1, 2)		
Зависимая переменная	Дробная разность Цены открытия		
Количество наблюдений	10'561		
AIC	24'596		
BIC	24'618		
Тест Ljung-Box (Q)	0.10	P-val (0.75)	
Тест Jarque-Bera (JB)	1'290'551	P-val (0.00)	
Тест Heteroskedasticity	23'355	P-val (0.00)	
Первый лаг MV - β_1	−0.144	std (0.044)	P-val (0.00)
Второй лаг MV - β_2	−0.072	std (0.037)	P-val (0.05)
Оцененная дисперсия - σ^2	0.601	std (0.044)	P-val (0.00)

Таблица 7: Таблица по оценке иллюстративной модели ARFIMA(0, 1+0.066, 2)

¹⁰Результат получен при использовании пакета Gretl под названием «ModRS_test», опубликованного в 2018 году Daniel Ventosa.

Остатки модели и их плотность распределения имеют вид:

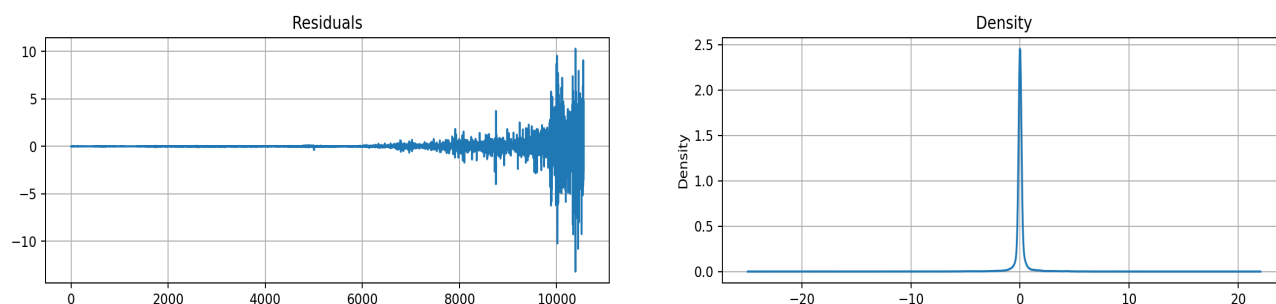


Рис. 24: Остатки и их распределение от $\text{ARFIMA}(0, 1 + 0.066, 2)$

Трудно сказать, что их плотность напоминает нормальное распределение, более того сами остатки далеко не одинаковые. Подобное ухудшение в качестве предсказаний (по сравнению с ARIMA) получилось из-за того, что для модели с долгосрочной памятью необходимо очень много наблюдений, в то время как ARIMA подобного требования не выдвигает. Более того, необходимо принять особенность самих данных, ведь, глядя на график цены открытия Apple видно, что растет она экспоненциально, что заметно ухудшает способность модели корректно выдавать прогнозное значение. Далее рассматриваем автокорреляцию в остатках.

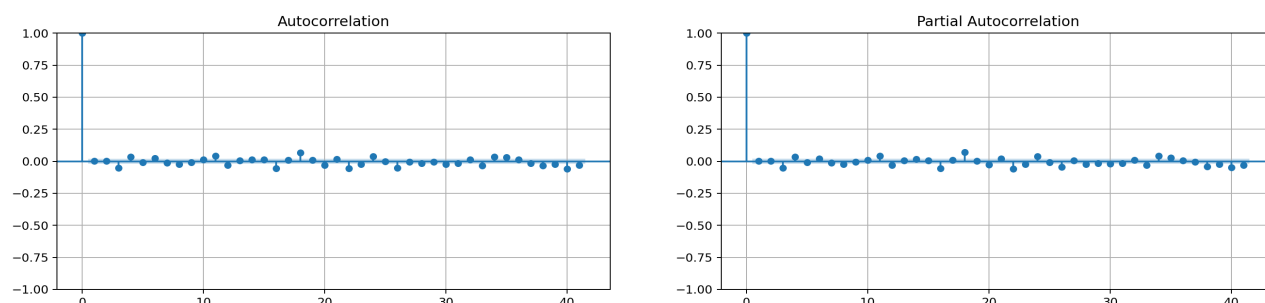


Рис. 25: ACF и PACF для остатков моделирования $\text{ARFIMA}(0, 1 + 0.66, 2)$

Тут наблюдается автокорреляция, однако более высоких порядков, чем 1-2, то есть пока что отбрасываем ее. Следовательно, делаем вывод, что автокорреляции нет, даже, несмотря на то, что она есть. В итоге, пытаемся прогнозировать значения цен открытия. Хотя сразу отмечаем, что подобной малой модели трудно описать имеющиеся данные из-за их доступного количества и их особенностей соответственно.

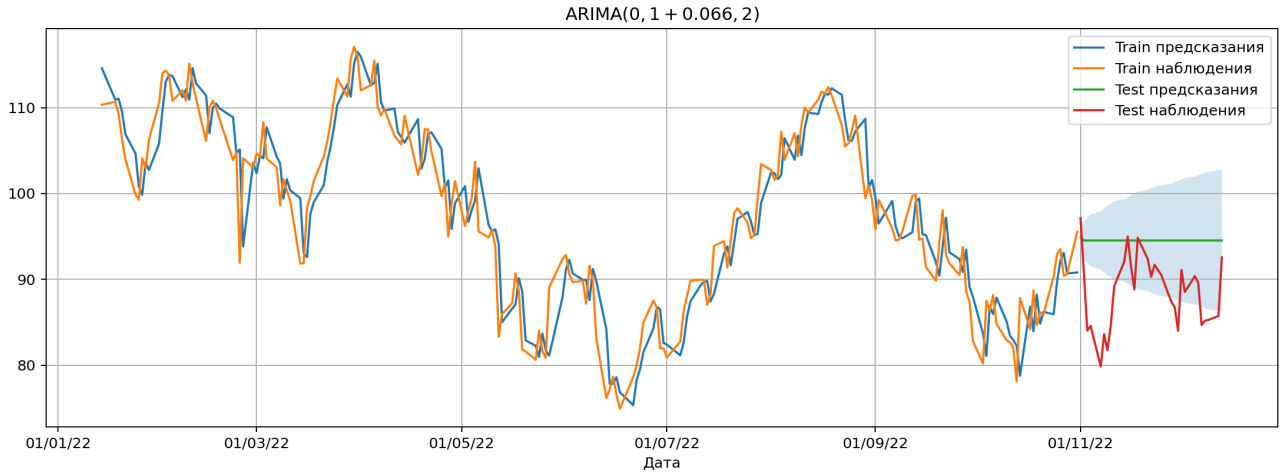


Рис. 26: Моделирование предсказаний посредством модели

Вывод таков, что настоящая модель не может корректно обработать, то есть обучиться на предоставленных данных, несмотря на оправдывающую себя математику теории фракталов, стоящую за ней (моделью). Напоминаю, что подобное произошло не из-за низкого качества модели, а из-за поведения цен открытия Apple. То есть, конечно, данная модель участвует в формировании финальной сравнительной таблицы, однако берем на заметку, что для Apple лучше использовать комбинацию авторегрессионных моделей и моделей, описывающий условную гетероскедастичность: ARCH, GARCH, FIGARCH. Так как волатильность цены открытия, исходя из графика остатков, увеличивается все больше и больше под конец наблюдаемых значений.

2.2.5 Fractionally Integrated GARCH

Пользуясь только что введенным методом дифференцирования рядов в фрактальном пространстве, анализируем поведение модели GARCH и переходим к так называемой FIGARCH. Первоначально имеем уравнение для GARCH (24 стр. 23). Однако теперь имеет смысл переписать его в более компактном виде:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_p(B)u_t^2 + \beta_q(B)\sigma_t^2 \quad (38)$$

Где $\alpha_p(B)$ и $\beta_q(B)$ - полиномы соответствующих степеней от лагового оператора. Далее, пользуясь переобозначением вида $v_t = u_t^2 - \sigma_t^2 = (\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2 : \varepsilon_t \sim N(0, 1)$, получаем эквивалентную запись [28]:

$$\begin{aligned} u_t^2 &= \omega + \alpha_p(B)u_t^2 + \beta_q(B)u_t^2 - \beta_q(B)v_t + v_t \\ [1 - \alpha_p(B) - \beta_q(B)]u_t^2 &= \omega + [1 - \beta_q(B)]v_t \end{aligned} \quad (39)$$

Подобная запись уже очень похожа на ARMA, однако определяется данная модель иначе, а точнее - $ARMA(m, q) : m = \max(p, q), v_t = u_t^2 - \sigma_t^2$. Интересно, что процесс v_t интерпретируется как шоки для условной дисперсии, так как

$\mathbb{E}(v_t) = \mathbb{E}(u_t^2 - \sigma_t^2) = \mathbb{E}(u_t^2) - \mathbb{E}(\sigma_t^2) = 0$. Следовательно интегрированный GARCH процесс записывается как:

$$[1 - \alpha_p(B) - \beta_q(B)](1 - B)u_t^2 = \omega + [1 - \beta_q(B)]v_t \quad (40)$$

Финальным штрихом при переходе от GARCH к FIGARCH является замена 1-й разности в $(1 - B)$ на дробно интегрированную, где $(1 - B)^d : d \in (0, 1)$. В итоге выражение (41) становится:

$$[1 - \alpha_p(B) - \beta_q(B)](1 - B)^d u_t^2 = \omega + [1 - \beta_q(B)]v_t \quad (41)$$

Таким образом, получаем модель, способную описывать более сложные временные колебания в данных, в том числе и финансовых, по сравнению с другими GARCH-подобными моделями [6]. Также отмечаем, что $(1 - B)^d$ можно расписать не только так, как было сделано для модели ARFIMA (27 стр. 30), но и в виде:

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - d)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(-d)} B^k \quad (42)$$

Для оценки параметров данной модели используется Maximum Likelihood Estimation (Метод Максимального Правдоподобия), однако, исходя из реальных исследований, имеем, что предположение о нормальном распределении остатков в случае с методом MLE (ММП) приводит к более плохому результату, чем применение устойчивого метода quasi-MLE, описанного в [32]. Аналогично всему предыдущему проводим эксперимент, основываясь на доходностях цены открытия акций Apple. В итоге получаем сводную таблицу моделей вида:

	$(0, d, 0)$	$(1, d, 0)$	$(0, d, 1)$	$(1, d, 1)$
μ	0.099*** (0.022)	0.099*** (0.022)	0.106*** (0.013)	0.105*** (0.027)
ω	1.108*** (0.107)	1.108*** (0.126)	0.589*** (0.090)	0.308*** (0.088)
α_1	-	0.000 (0.025)	-	0.273*** (0.082)
d	0.212*** (0.010)	0.212*** (0.010)	0.290*** (0.020)	0.329*** (0.026)
β_1	-	-	0.190*** (0.027)	0.492*** (0.085)
ν	1.199*** (0.027)	1.199*** (0.027)	1.206*** (0.026)	1.205*** (0.027)
BIC	48'832	48'841	48'774	48'772
n	10'560	10'560	10'560	10'560

Note: $*p < 0.1$, $**p < 0.05$, $***p < 0.01$

Таблица 8: Сводная таблица моделей FIGARCH

Замечаем, что в каждой модели параметр d значим на 1%-ом уровне и, если вычислять значение экспоненты Херста, то в каждой случае получаем персистентный процесс. Однако как и в предыдущих моделях, информационный критерий BIC позволяет выявить лучшую с точки зрения описания данных - FIGARCH(1, 0.329, 1), что даже меньше, чем в случае с моделью GARCH(1, 1) (2.2.3 стр. 26), где $BIC = 50'056$. То есть полученная модель еще качественнее описывает данные. Смотрим на построенные ею прогнозные значения волатильности и показателя доходности.

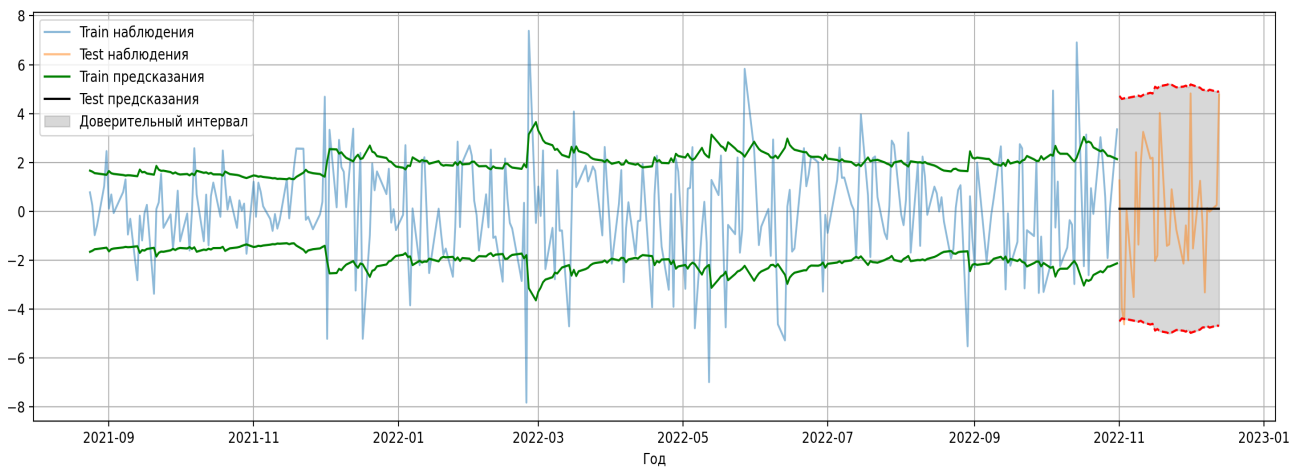


Рис. 27: Предсказания доходности (в %) и волатильности моделью FIGARCH(1, 0.329, 1)

И далее смотрим на прогнозирование показателя условной дисперсии:

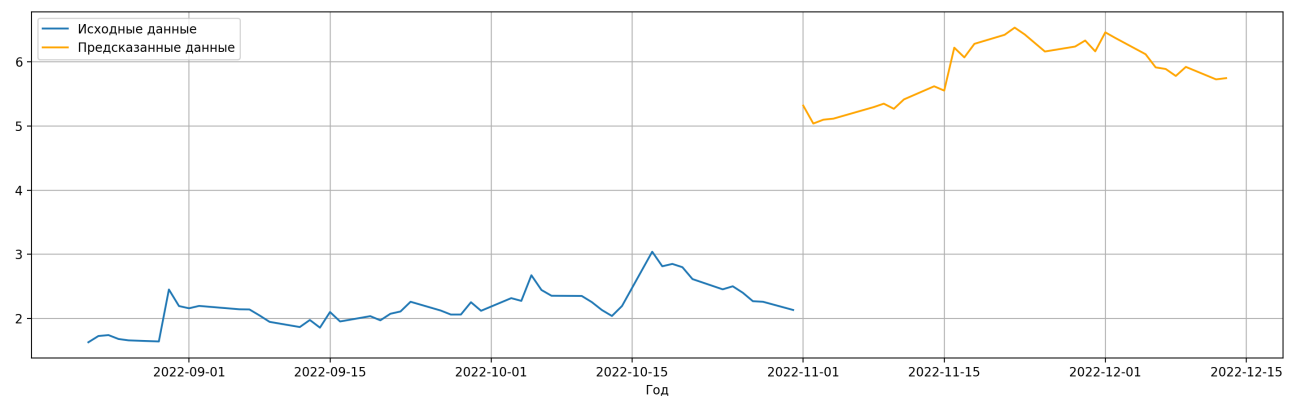


Рис. 28: Предсказание условной гетероскедастичности моделью FIGARCH(1, 0.329, 1)

В итоге получаем, что модель FIGARCH лучше описывает условную гетероскедастичность, чем модель GARCH. Это не делает GARCH менее применимым, однако, исходя из статистических соображений только что проведенного эксперимента, предполагаем, что FIGARCH позволяет достичь более качественного результата в описании данных для рынка, на котором выполняются условия фрактальности [38]. FIGARCH включается в итоговую таблицу.

2.2.6 Singular Spectrum Analysis

2.2.7 Fourier analysis

Теперь рассматриваем второе определение стационарности (3 стр. 11). То есть в настоящий момент под временным рядом понимается некоторый сигнал, полученный путем записи данных, характеризующих некоторый объект в конкретные моменты времени.

Задаемся вопросом **Q**: Можно ли как-то представить функцию вида $f(t)$ (исследуемый сигнал) в виде конечного или бесконечного наложения синусоид (под синусоидой понимается как косинус, так и синус). **A**: 1) Замечаем, что струна сама по себе при условии фиксированных концов как раз колеблется по синусоиде. Причем на ее длине всегда уместается конечное количество волн (как раз условие закрепленности струны и обеспечивает данный факт). Сама же простейшая форма колебания струны называется "гармоникой". Отсюда и название анализа: гармонический анализ. Но тогда не очевидно, можно ли представить сложную форму колебания в виде простейшей? 2) Выводим разложение в ряд Фурье и соответственно алгоритм FFT (Fast Fourier Transform).

Пусть задан некоторый периодический сигнал вида: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с периодом T . Тогда угадываем внешний вид разложения, а далее - формальным способом вычисляем коэффициенты в данном разложении. Нам необходимо, чтобы исходный сигнал был представим в виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\} \quad (43)$$

Вспоминая определение ортогональности векторов из \mathbb{R}^n , вводим по аналогии операцию ортогональности над функциями и соответственно получаем:

$$p = \int_0^T g(t) \cdot f(t) dt \quad (44)$$

Тогда в силу того, что взяты были функции $\cos(\cdot)$ и $\sin(\cdot)$, проверяем на ортогональность:

1. $\sin(k\omega t), \sin(l\omega t)$.

$$p = \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = \begin{cases} 0 & , k \neq l \\ \frac{T}{2} & , k = l \end{cases} \quad (45)$$

2. $\cos(k\omega t), \cos(l\omega t)$.

$$p = \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(l\omega t) dt = \begin{cases} 0 & , k \neq l \\ \frac{T}{2} & , k = l \end{cases} \quad (46)$$

3. $\cos(k\omega t), \sin(l\omega t)$.

$$p = \int_0^T \cos(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = 0 \quad (47)$$

Тогда, опираясь на 43, получаем формулы для коэффициентов:

1.

2.2.8 Wavelet analysis

2.2.9 Neural Networks

2.2.9.1 Multilayer Perceptron

2.2.9.2 Recurrent Neural Network

2.2.9.3 Wavelet Network

2.2.9.4 Алгоритмы обучения: GD семейство

3 Описание данных и эксперимент

3.1 Развивающийся рынок (Китай)

3.2 Развитый рынок (США)

4 Обсуждение выводов

5 Заключение

Список литературы

- [1] Antonios K Alexandridis and Achilleas D Zapranis. *Wavelet neural networks: with applications in financial engineering, chaos, and classification*. John Wiley & Sons, 2014. https://books.google.ru/books?hl=en&lr=&id=cYpgAwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR13&dq=wavelet+networks+and+applications&ots=PRTQtLGg33&sig=8S6--06eRo8bYywfQpmCyT5rMME&redir_esc=y#v=onepage&q=wavelet%20networks%20and%20applications&f=false.
- [2] Nathan Benaich and Ian Hogarth. *State of AI Report 2022*. Air Street Capital, Plural, 2022. <https://www.stateof.ai/>.
- [3] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986.
- [4] George EP Box, Gwilym M Jenkins, Gregory C Reinsel, and Greta M Ljung. *Time series analysis: forecasting and control*. John Wiley & Sons, 2015.
- [5] Christiano. Wold representation theorem. *Northwestern University: FINC-520*, . <https://faculty.wcas.northwestern.edu/lchrist/finc520/wold.pdf>.
- [6] James Davidson. Moment and memory properties of linear conditional heteroscedasticity models, and a new model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(1):16–29, 2004.
- [7] Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.
- [8] Eugene Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The journal of Finance*, 25(2):383–417, 1970. <https://www.jstor.org/stable/2325486>.
- [9] FinEX. *Гипотеза эффективного рынка: что это и как использовать*. FinEX, Статья от: 13 Сентября 2022. https://finex-etf.ru/university/news/gipoteza_effektivnogo_rynka_что_eto_i_kak_ispolzovat.
- [10] Yulia R. Gel and Joseph L. Gastwirth. A robust modification of the jarque–bera test of normality. *Economics Letters*, 99(1):30–32, 2008. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165176507001838>.
- [11] Clive WJ Granger and Roselyne Joyeux. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of time series analysis*, 1(1):15–29, 1980.

- [12] Peter R Hansen and Asger Lunde. A forecast comparison of volatility models: does anything beat a garch (1, 1)? *Journal of applied econometrics*, 20(7):873–889, 2005.
- [13] R.I.D. Harris. Testing for unit roots using the augmented dickey-fuller test: Some issues relating to the size, power and the lag structure of the test. *Economics Letters*, 38(4):381–386, 1992. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016517659290022Q>.
- [14] Hossein Hassani and Mohammad Reza Yeganegi. Selecting optimal lag order in ljung–box test. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 541:123700, 2020. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437119320618>.
- [15] J. R. M. Hosking. Fractional differencing. *Biometrika*, 68(1):165–176, 1981.
- [16] Harold Edwin Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American society of civil engineers*, 116(1):770–799, 1951.
- [17] Dongin Lee and Peter Schmidt. On the power of the kpss test of stationarity against fractionally-integrated alternatives. *Journal of Econometrics*, 73(1):285–302, 1996. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304407695017410>.
- [18] L.S. Lima and L.L.B. Miranda. Price dynamics of the financial markets using the stochastic differential equation for a potential double well. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 490:828–833, 2018. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437117308324?casa_token=rz0z1Zw26ZUAAAAA:TLYp15l0en3WJC65uWCpHNNGIItqli5Iuqa5yb5LSZKPj5mznOHBbH3r_CwTyjDHAe2ZYaVGA.
- [19] Andrew W. Lo. Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, 59(5):1279–1313, 1991. <http://www.jstor.org/stable/2938368>.
- [20] Benoit Mandelbrot. Statistical methodology for nonperiodic cycles: from the covariance to r/s analysis. In *Annals of Economic and Social Measurement, Volume 1, Number 3*, pages 259–290. NBER, 1972.
- [21] Alfred Marshall. *Elements of economics of industry: being the first volume of Elements of Economics*, volume 1. Macmillan, 1903.
- [22] Tomas Mikolov, Kai Chen, Greg Corrado, and Jeffrey Dean. Efficient estimation of word representations in vector space. *arXiv preprint arXiv:1301.3781*, 2013. <https://arxiv.org/abs/1301.3781>.

- [23] Mostafa Seif, Paul Docherty, and Abul Shamsuddin. Seasonal anomalies in advanced emerging stock markets. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 66:169–181, 2017. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1062976917300832>.
- [24] Martin Sewell. History of the efficient market hypothesis. *Rn*, 11(04):04, 2011. http://www.cs.ucl.ac.uk/fileadmin/UCL-CS/images/Research_Student_Information/RN_11_04.pdf.
- [25] Savva Shanaev and Binam Ghimire. A generalised seasonality test and applications for cryptocurrency and stock market seasonality. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 86:172–185, 2022. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1062976922000801>.
- [26] Adam Smith. *The Wealth of Nations: An inquiry into the nature and causes of the Wealth of Nations*. Harriman House Limited, 2010.
- [27] Pantelis Tassopoulos and Yorgos Protonotarios. Brownian motion & the stochastic behavior of stocks. *Journal of Mathematical Finance*, 12(1):138–149, 2021.
- [28] Maryam Tayefi and TV Ramanathan. An overview of figarch and related time series models. *Austrian journal of statistics*, 41(3):175–196, 2012. <https://www.ajs.or.at/index.php/ajs/article/view/vol41%2C%20no3%20-%202>.
- [29] CFI Team. Exponentially weighted moving average (ewma). *Corporate Finance Institute (CFI)*, 2023. url: <https://corporatefinanceinstitute.com/about-cfi/>.
- [30] Ashish Vaswani, Noam Shazeer, Niki Parmar, Jakob Uszkoreit, Llion Jones, Aidan N Gomez, Łukasz Kaiser, and Illia Polosukhin. Attention is all you need. *Advances in neural information processing systems*, 30, 2017. <https://proceedings.neurips.cc/paper/2017/file/3f5ee243547dee91fbd053c1c4a845aa-Paper.pdf>.
- [31] Constantinos E. Vorlow. The (mis)behavior of markets: A fractal view of risk, ruin and reward. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 61(3):513–515, 2006. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167268106000692>.
- [32] Andrew A Weiss. Asymptotic theory for arch models: estimation and testing. *Econometric theory*, 2(1):107–131, 1986.
- [33] Kenneth D. West. *Heteroskedasticity and autocorrelation corrections*, pages 135–144. Palgrave Macmillan UK, London, 2010. https://doi.org/10.1057/9780230280830_15.

- [34] Ailing Zeng, Muxi Chen, Lei Zhang, and Qiang Xu. Are transformers effective for time series forecasting? *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2023. <https://github.com/cure-lab/LTSF-Linear>.
- [35] РВ Гарафутдинов. Исследование влияния некоторых параметров модели arfima на точность прогноза финансовых временных рядов. *Прикладная эконометрика*, 62:85, 2021.
- [36] Вербик и Марно. Путеводитель по современной эконометрике. *Корреляция*, 2008.
- [37] Роберт Оуэн. *Спорная область между двумя мирами*. Strelbytskyy Multimedia Publishing, 2018.
- [38] АС Палювина. Фрактальный анализ финансового рынка на основе коэффициента Хёрста. *Вектор экономики*, pages 30–30, 2019. <http://www.vectoreconomy.ru/images/publications/2019/4/mathematicalmethods/Palyuvina.pdf>.
- [39] Тарас Евгеньевич Панов. Линейная алгебра и геометрия. *Механико-математический факультет МГУ*, 2021. <http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching/slides-linalg/panov-linalg-lec10.pdf>.
- [40] Н. В. Артамонов; Е. А. Ивин; А. Н. Курбацкий; Д. Фантаццини. Введение в анализ временных рядов: учебное пособие для вузов. *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, Кафедра эконометрики и математических методов экономики*. – Вологда : ВолНЦ РАН, 2021. – 134 с.: ил., табл., 2021. <https://mse.msu.ru/wp-content/uploads/2021/03/%D0%92%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D0%B2-%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7-%D0%B2%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85-%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BE%D0%B2-1.pdf>.
- [41] Международный эконометрический журнал на русском языке №2. Квантиль. *Международный эконометрический журнал на русском языке: Квантиль*, март 2007. <http://quantile.ru/02/N2.htm>.