

## Cơ học kỹ thuật: ĐỘNG LỰC HỌC

Engineering Mechanics: KINETICS

Động lực học:  
công – năng lượng

Bộ môn Cơ học ứng dụng

HUST

Hanoi University of Science and Technology

Cơ học kỹ thuật Engineering Mechanics  
ĐỘNG LỰC HỌC KINETICSĐỘNG LỰC HỌC:  
CÔNG – NĂNG LƯỢNGBộ môn Cơ học ứng dụng  
GV: .....

HUST

Hanoi University of Science and Technology

Động lực học cơ hệ: Công – năng lượng. Kinetics of a mechanical systems: Work - energy

## CÔNG CỦA LỰC VÀ CÔNG CỦA NGẪU LỰC

1. Công của lực
2. Công của ngẫu lực
3. Công của một số lực thường gặp
4. Công suất và hiệu suất

HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

3

Động lực học cơ hệ: Công – năng lượng. Kinetics of a mechanical systems: Work - energy

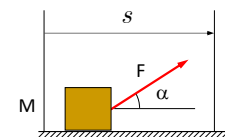
## 1. Công của lực

Công của lực trong di chuyển hữu hạn

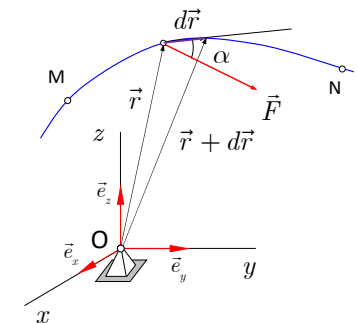
$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

$$A_{MN} = \int_{\vec{r}_M}^{\vec{r}_N} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_M}^{s_N} F \cos \alpha \, ds$$

$$= \int_M^N (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Trường hợp  $F \cos \alpha = \text{const.}$ 

$$A_{MN} = F \cos \alpha \, s$$



HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

4

## 2. Công của ngẫu lực

Công của ngẫu lực tác dụng lên vật rắn  $\vec{M} = (\vec{F}, \vec{F}')$

$$d'A = \vec{F}' \cdot d\vec{r}_A + \vec{F} \cdot d\vec{r}_B \\ = \vec{F}' \cdot \vec{v}_A dt + \vec{F} \cdot \vec{v}_B dt$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \Rightarrow \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{u}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{u} \times \vec{F})$$

$$dA = \vec{F}' \cdot \vec{v}_A dt + \vec{F} \cdot (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}) dt \\ = \vec{F}' \cdot \vec{v}_A dt + \vec{F} \cdot \vec{v}_A dt + \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{u}) dt \\ = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{u}) dt = (\vec{u} \times \vec{F}) \cdot \vec{\omega} dt$$

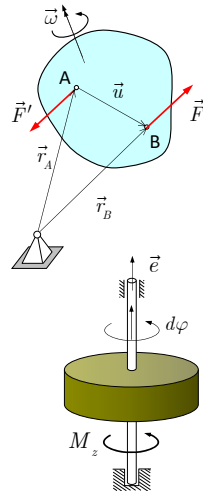
$$\vec{F}' \cdot \vec{v}_A dt + \vec{F} \cdot \vec{v}_A dt = -\vec{F} \cdot \vec{v}_A dt + \vec{F} \cdot \vec{v}_A dt = 0$$

Công của ngẫu lực tác dụng lên vật rắn quay quanh trục z cố định

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} = \vec{M}_z d\varphi$$

$$\text{if } M_z = \text{const} \Rightarrow A = M_z \varphi$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u} \\ d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt$$



HUST

Department of Applied Mechanics

5

## 3. Tính công của một số lực thường gặp

Công của trọng lực  $\vec{G} = -G\vec{e}_z \Rightarrow d'A = \vec{G} \cdot d\vec{r} = -Gdz$

Khi lực di chuyển:  $M_0(x_0, y_0, z_0) \rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1)$

$$A_{M_0 M_1} = \int_{\vec{r}_{M_0}}^{\vec{r}_{M_1}} \vec{G} \cdot d\vec{r} = -\int_{z_0}^{z_1} Gdz = -G(z_1 - z_0)$$

$$h = |z_1 - z_0|,$$

$$A_{M_0 M_1} = \pm Gh$$

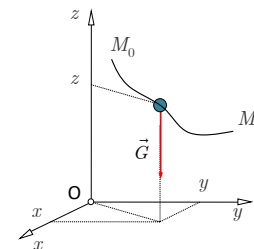
Công thức trên cho thấy công của trọng lực không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo điểm đặt lực mà chỉ phụ thuộc điểm đầu và điểm cuối của đường di chuyển.

Công của trọng lực tác dụng lên cơ hệ bằng tổng công trọng lực tác dụng lên các chất điểm thuộc hệ

$$A_{M_0 M_1} = -\sum_{k=1}^n G_k(z_{1k} - z_{0k}) \quad Gz_C = \sum_{k=1}^n G_k z_k \quad G = \sum G_k$$

$$\Rightarrow Gz_{1,C} = \sum_{k=1}^n G_k z_{1,k}, \quad Gz_{0,C} = \sum_{k=1}^n G_k z_{0,k}$$

$$A_{M_0 M_1} = -G(z_{1,C} - z_{0,C}) = \pm Gh, \quad h = |z_{1,C} - z_{0,C}|$$



HUST

Department of Applied Mechanics

6

## 3. Tính công của một số lực thường gặp

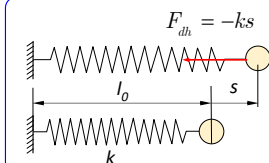
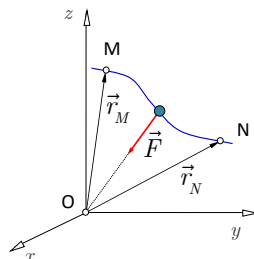
Công của lực đàn hồi tuyến tính  $\vec{F}_{dh} = -k\vec{r}, \quad k = \text{const}$

$$d'A = \vec{F}_{dh} \cdot d\vec{r} = -k\vec{r} \cdot d\vec{r} \Rightarrow A = -\int_{\vec{r}_M}^{\vec{r}_N} k\vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2}k(\vec{r}_N^2 - \vec{r}_M^2)$$

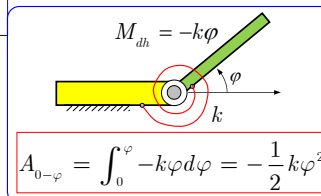
$$\text{if } \vec{r}_M = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}k\vec{r}_N^2 = -\frac{1}{2}k\delta^2$$

$\delta = r_N$  độ giãn (hoặc nén) của lò xo tính từ vị trí cân bằng

Cũng như công của trọng lực, công của lực đàn hồi tuyến tính cũng chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối mà không phụ thuộc quỹ đạo điểm đặt lực.



$$A_{0-s} = \int_0^s -ks ds = -\frac{1}{2}ks^2$$



$$A_{0-\varphi} = \int_0^\varphi -k\varphi d\varphi = -\frac{1}{2}k\varphi^2$$

HUST

Department of Applied Mechanics

7

## 3. Tính công của một số lực thường gặp

Công của lực tác dụng lên vật rắn

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}_B = \vec{F} \cdot (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}) dt \\ = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A + (\vec{u} \times \vec{F}) \cdot (\vec{\omega} dt)$$

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A + \vec{m}_A(\vec{F}) \cdot d\vec{\varphi}$$

A là điểm bất kỳ thuộc vật

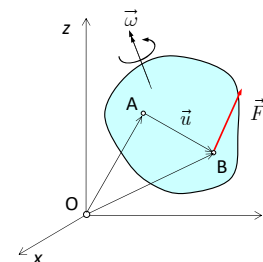
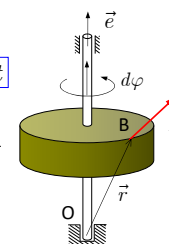
Vật tịnh tiến (B, C thuộc vật)

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}_B = \vec{F} \cdot d\vec{r}_C$$

Vật quay quanh trục cố định  $d\vec{r} = \vec{v} dt = \vec{\omega} \times \vec{r} dt$

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt \\ = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{\omega} dt = \vec{m}_O(\vec{F}) \cdot d\vec{\varphi} = \vec{m}_z(\vec{F}) \cdot d\vec{\varphi}$$

$$\text{if } M = m_z(\vec{F}) = \text{const} \Rightarrow A = M \cdot \varphi$$



Vật là tấm CDSP  $\omega \perp \vec{u}$

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A + \vec{m}_A(\vec{F}) \cdot d\vec{\varphi}$$

HUST

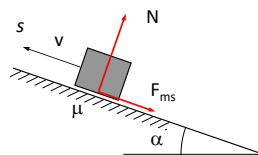
Department of Applied Mechanics

8

### 3. Tính công của một số lực thường gặp

Công của lực ma sát trượt

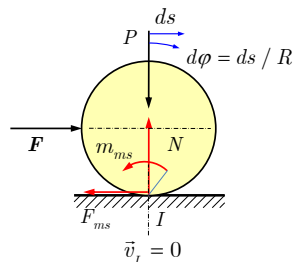
$$\begin{aligned} d'A &= \vec{F}_{ms} \cdot \vec{v} dt = -F_{ms} v dt = -F_{ms} ds \\ F_{ms} &= \mu N \\ d'A &= -\mu N ds \Rightarrow A = -\mu N s \quad (\text{if } N = \text{const}) \end{aligned}$$



Công của lực ma sát khi **vật lăn không trượt**:

Công của lực ma sát  $d'A = \vec{F}_{ms} \cdot \vec{v}_I dt = 0$

Công của ngẫu lực ma sát lăn  $d'A = -m_{ms} \omega dt = -m_{ms} d\varphi$



### 3. Tính công của một số lực thường gặp

Công của các nội lực trong cơ hệ:

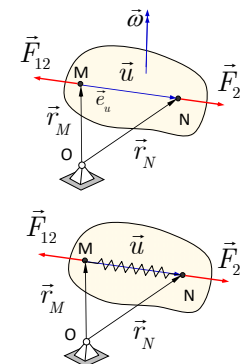
$$d'A = \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_M + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_N$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_N &= \vec{r}_M + \vec{u} \Rightarrow d\vec{r}_N = d\vec{r}_M + d\vec{u} \\ d\vec{u} &= d(u\vec{e}_u) = du\vec{e}_u + \vec{\omega} dt \times \vec{u} \\ &= du\vec{e}_u + d\vec{\theta} \times \vec{u}, \quad d\vec{\theta} = \vec{\omega} dt \\ d\vec{r}_N &= d\vec{r}_M + du\vec{e}_u + d\vec{\theta} \times \vec{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'A &= \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_M + \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_M + du\vec{e}_u + d\vec{\theta} \times \vec{u}) \\ &= \vec{F}_{12} \cdot du\vec{e}_u + \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{\theta} \times \vec{u}) \\ &= \vec{F}_{12} \cdot du\vec{e}_u + (\vec{u} \times \vec{F}_{12}) \cdot d\vec{\theta} \end{aligned}$$

$$d'A = \vec{F}_{12} \cdot du\vec{e}_u = \pm F_{12} \cdot du$$

Như vậy, có thể kết luận là nội lực có thể sinh công hoặc không sinh công tùy thuộc vào từng trường hợp cụ thể.



Trường hợp hai điểm M và N thuộc một vật rắn, khoảng cách giữa hai điểm không đổi, khi đó  $du = 0$  và nội lực không sinh công.

Nếu khoảng cách giữa hai điểm M và N thuộc hệ có thể thay đổi, chẳng hạn có một lò xo nối hai điểm này, khi đó  $du \neq 0$  và nội lực sẽ sinh công.

Liên kết dây căng không dẫn và tại các khớp trơn nhẵn (không ma sát): nội lực không sinh công.

### 4. Công suất và hiệu suất

**Công suất** của máy được đo bởi khả năng sinh công hay cung cấp năng lượng trong một đơn vị thời gian.

Công suất là công do lực sinh ra trong một đơn vị thời gian, ký hiệu công suất là P, theo định nghĩa:

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \alpha = F \dot{s} \cos \alpha \quad [W=J/s]$$

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{M} \cdot d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \quad [W=J/s]$$

Đơn vị của công là Oát (Watt), ký hiệu là W, (1 W = 1 J/s).

**Hiệu suất** cơ học của máy được định nghĩa là tỷ lệ của công suất hữu ích tạo ra bởi máy và công suất đầu vào cung cấp cho máy.

$$\varepsilon = \frac{\text{power output}}{\text{power input}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\text{energy output}}{\text{energy input}}$$



## ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG NĂNG

1. Động năng của cơ hệ
2. Định lý biến thiên động năng
3. Ví dụ áp dụng

HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

13

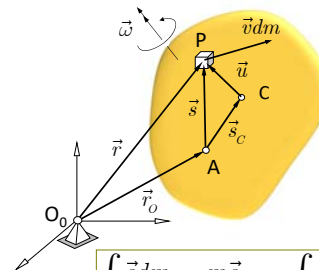


## 1. Động năng của cơ hệ

Động năng của chất điểm

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m v^2, \quad T \geq 0 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$$

Động năng của vật rắn



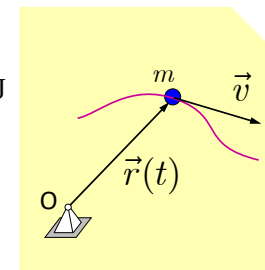
$$T = \frac{1}{2} \int_B \vec{v}^2 dm, \quad \vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{s}$$

$$T = \frac{1}{2} \int_B \vec{v}^2 dm$$

$$= \frac{1}{2} \int (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{s}) \cdot (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{s}) dm$$

$$= \frac{1}{2} \int \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A dm + \int \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \vec{s}) dm + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{s}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{s}) dm$$

$$A \equiv C \Rightarrow T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm$$



HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

14



## 1. Động năng của cơ hệ

Động năng của vật rắn phẳng

$\vec{\omega} \perp \vec{u}$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} \perp \vec{s} \Rightarrow (\vec{\omega} \times \vec{s}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{s}) = s^2 \omega^2, \quad \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A = v_A^2$$

$$T = \frac{1}{2} \int_B v^2 dm = \frac{1}{2} \int_B \vec{v} \cdot \vec{v} dm$$

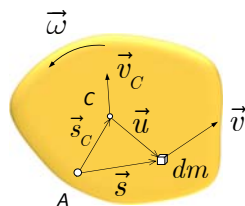
$$= \frac{1}{2} m v_A^2 + m \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \vec{s}_C) + \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

$$I_A = \int_B s^2 dm$$

Nếu chọn điểm A trùng với khối tâm C của vật, khi đó  $s_C = 0$

$$I_C = \int_B u^2 dm$$

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$



HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

15



## 1. Động năng của cơ hệ

Động năng của vật rắn chuyển động tịnh tiến

$\vec{\omega} = 0$

$$T = \frac{1}{2} \int_B \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} m v^2$$

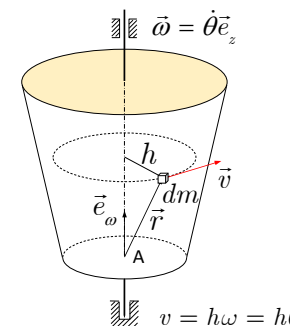
Động năng của vật rắn quay quanh trục cố định z

$$T = \frac{1}{2} \int_B \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} \left( \int_B h^2 dm \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$I_z = \int_B h^2 dm$$

Động năng của cơ hệ gồm nhiều vật rắn

Động năng của cơ hệ bằng tổng động năng của các vật thuộc hệ.



HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

16



## 2. Định lý biến thiên động năng / đối với chất điểm

**Định lý 1.** Đạo hàm theo thời gian động năng của chất điểm bằng công suất của lực tác dụng lên chất điểm:

$$\frac{dT}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (1)$$

**Chứng minh:** Xuất phát từ tiên đề 2 Newton

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

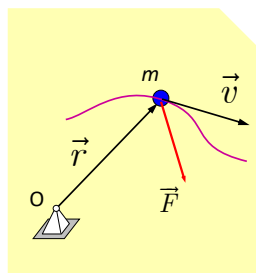
$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \frac{dT}{dt}$$

**Định lý 2.** (dạng vi phân)  $dT = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} = d'A$  (2)

**Định lý 3.** (dạng hữu hạn)

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}, \quad \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3)$$

$$T_1 + A_{1-2} = T_2 \quad (4)$$



## 2. Định lý biến thiên động năng / đối với cơ hệ

**Định lý 4.** Đạo hàm theo thời gian động năng của cơ hệ bằng tổng công suất của các nội lực và ngoại lực tác dụng lên cơ hệ:

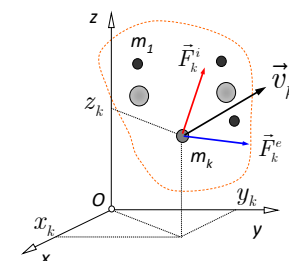
$$\frac{dT}{dt} = \sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k = \sum_k \vec{F}_k^e \cdot \vec{v}_k + \sum_k \vec{F}_k^i \cdot \vec{v}_k \quad (1)$$

**Chứng minh.** Đối với một chất điểm  $M_k$  thuộc cơ hệ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_k\vec{v}_k^2\right) = \vec{F}_k^e \cdot \vec{v}_k + \vec{F}_k^i \cdot \vec{v}_k$$

Lấy tổng hai vế với tất cả các chất điểm thuộc hệ

$$\sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_k\vec{v}_k^2\right) = \sum_k \vec{F}_k^e \cdot \vec{v}_k + \sum_k \vec{F}_k^i \cdot \vec{v}_k \quad (2)$$



## 2. Định lý biến thiên động năng / đối với cơ hệ

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k \vec{F}_k^e \cdot \vec{v}_k + \sum_k \vec{F}_k^i \cdot \vec{v}_k \quad (1)$$

**Định lý 5.** (dạng vi phân)

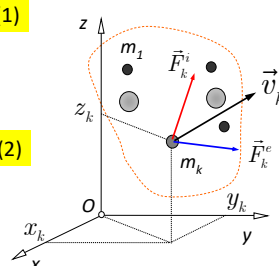
$$dT = \sum_k \vec{F}_k^e \cdot \vec{v}_k dt + \sum_k \vec{F}_k^i \cdot \vec{v}_k dt = \sum_k d'A(\vec{F}_k^e) + \sum_k d'A(\vec{F}_k^i) \quad (2)$$

**Định lý 6.** (dạng hữu hạn)

$$T_2 - T_1 = \sum_k A_{1-2}(\vec{F}_k^e) + \sum_k A_{1-2}(\vec{F}_k^i) \quad (3)$$

hoặc

$$T_1 + \sum_k A_{1-2}(\vec{F}_k^e) + \sum_k A_{1-2}(\vec{F}_k^i) = T_2$$



Lưu ý

- Định lý động năng dạng hữu hạn cho ta quan hệ giữa vận tốc và dịch chuyển.
- Khi áp dụng định lý động năng cần phân loại lực thành lực sinh công và lực không sinh công.



## 3. Ví dụ áp dụng

**Ví dụ 1.** Mô hình thang máy như trên hình. Mô men động cơ  $M_1 = \text{const}$  tác dụng làm hệ chuyển động từ trạng thái đứng yên. Cho biết các thông số hệ:  $r_1, l_1, r_2, l_2, m, m_C, g$ .

Xác định:

- vận tốc Cabin A theo góc quay động cơ  $\theta_1$ .
- gia tốc Cabin A
- Công suất động cơ khi cabin A có vận tốc v và gia tốc a hướng lên.

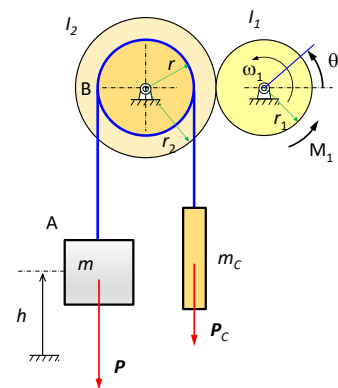
**Lời giải**

Phân tích chuyển động:

Các lực sinh công:  $M_1, \vec{P}, \vec{P}_C$

Tính động năng hệ khi Cabin A có vận tốc v đi lên

Tính tổng công các lực khi trục 1 quay được góc  $\theta_1$ .



$$\theta_1 = 0, h = 0$$

### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 1.

Tính động năng hệ khi Cabin A có vận tốc  $v$  đi lên

$$T = T_1 + T_2 + T_A + T_C \quad T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \quad T_A = \frac{1}{2} m v^2, \quad T_C = \frac{1}{2} m_C v_C^2$$

Động học

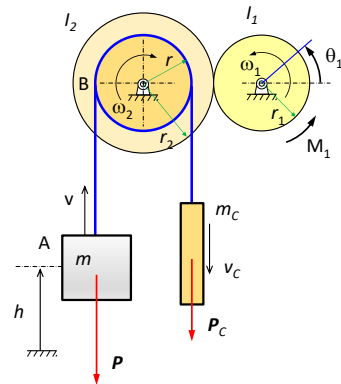
$$v_C = v_A = v, \quad \omega_2 = v / r, \quad \omega_1 = \omega_2 r_2 / r_1$$

$$\omega_1 = v r_2 / r_1 r \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{h} r_2 / r_1 r$$

$$\Rightarrow \theta_1 = h r_2 / r_1 r \Rightarrow h = \theta_1 r_1 r / r_2$$

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 = \frac{1}{2} m_{tg} v^2$$

$$m_{tg} = m + m_C + I_1 (r_2 / r_1 r)^2 + I_2 (1 / r)^2$$



### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 1.

Tính tổng công các lực khi trục 1 quay được góc  $\theta_1$

$$A_{0-\theta_1} = M_1 \theta_1 - mgh + m_C gh$$

Động học

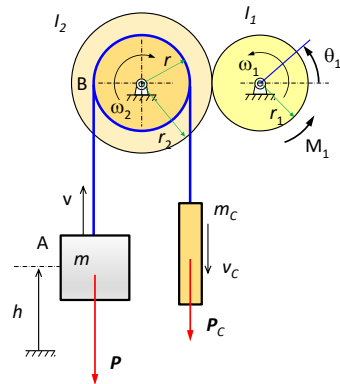
$$\omega_1 = v r_2 / r_1 r \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{h} r_2 / r_1 r \Rightarrow h = \theta_1 r_1 r / r_2$$

$$A_{0-\theta_1} = (M_1 + (m_C - m) g r_1 r / r_2) \theta_1$$

Định lý động năng dạng hữu hạn

$$T - T_0 = A_{0-\theta_1}, \quad T_0 = 0$$

$$\frac{1}{2} m_{tg} v^2 = (M_1 - m g r_1 r / r_2 + m_C g r_1 r / r_2) \theta_1 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2[M_1 + (m_C - m) g r_1 r / r_2] \theta_1}{m_{tg}}}$$



### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 1.

Tính gia tốc Cabin A

Áp dụng định lý động năng dạng đạo hàm

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dA}{dt} \Rightarrow m_{tg} v \dot{v} = [M_1 + (m_C - m) g r_1 r / r_2] \dot{\theta}_1$$

$$\omega_1 = v r_2 / r_1 r \quad a = \dot{v} = \frac{[M_1 + (m_C - m) g r_1 r / r_2] r_2}{m_{tg} r_1 r} \dot{\theta}_1$$

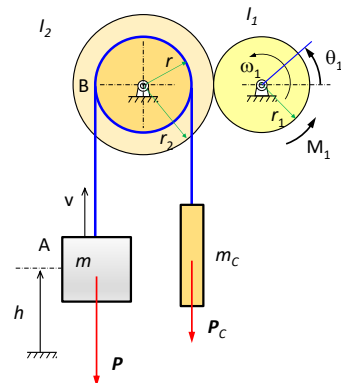
Công suất động cơ khi cabin A có vận tốc  $v$  và gia tốc  $a$  hướng lên.

Áp dụng định lý động năng dạng đạo hàm

$$\frac{dT}{dt} = P \Rightarrow m_{tg} v \dot{v} = \underbrace{M_1 \dot{\theta}_1}_{P_{dc}} + [(m_C - m) g r_1 r / r_2] \dot{\theta}_1$$

$$\Rightarrow P_{dc} = M_1 \omega_1 = m_{tg} v \dot{v} + [(m - m_C) g r_1 r / r_2] \dot{\theta}_1 \Rightarrow$$

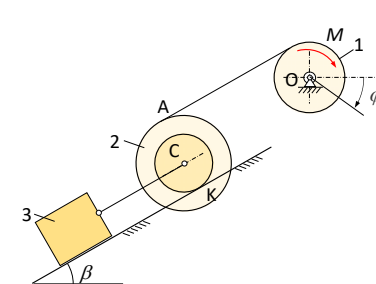
$$P_{dc} = [m_{tg} \dot{v} + (m - m_C) g] v$$



### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 2.

**Ví dụ 2.** Cho cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng đứng. Mô men động cơ  $M = \text{const}$  tác dụng làm hệ chuyển động từ trạng thái đứng yên.

Trục tời 1 là trụ tròn đặc đồng chất khối lượng  $m_1$ ,  $r_1$ . Con lăn hai tầng 2 có khối lượng  $m_2$ , bán kính nhỏ  $r_2$  và bán kính lớn  $R_2$ , mô men quán tính đối với trục qua tâm là  $I_2$ , **lăn không trượt** trên mặt nghiêng. Vật nặng 3 có khối lượng  $m_3$ , hệ số ma sát trượt động với mặt nghiêng là  $\mu$ . Các dây không trọng lượng, không dẫn.



Xác định:

- Vận tốc góc của trục tời phụ thuộc vào góc xoay của nó,  $\omega = \omega(\varphi)$ .
- Gia tốc góc của trục tời, gia tốc góc của con lăn, và gia tốc của vật 3.
- Biểu thức vận tốc góc của trục tời theo thời gian  $\omega_1(t)$ , khi kể đến mô men cản tại ổ trục O tỷ lệ vận tốc góc,  $M_c = k\omega$ .

### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 2.

Lời giải

Phân tích chuyển động:

Các lực sinh công:  $M, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{F}_3$

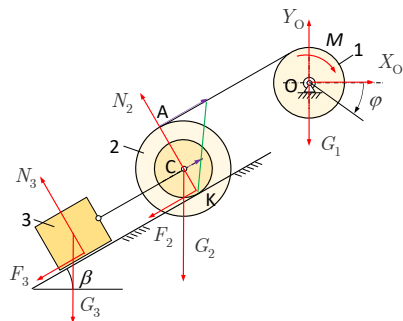
Tính động năng hệ khi trục 1 có vận tốc góc  $\omega$

Khi bỏ qua mô men cản ổ trục O:

Tính tổng công các lực khi trục 1 quay được góc  $\varphi$ .

Khi kể đến mô men cản ổ trục O:

Tính tổng công suất các lực khi trục 1 có vận tốc góc  $\omega$ .



HUST

Department of Applied Mechanics

25

### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 2.

Tính động năng hệ khi trục 1 có vận tốc góc  $\omega$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad T_1 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\varphi}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

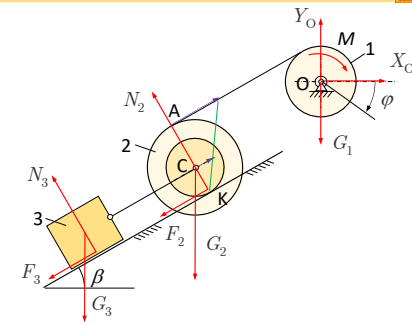
Động học  $v_A = r_1 \omega_1 = r_1 \omega,$

$$\omega_2 = v_A / (R_2 + r_2) = [r_1 / (R_2 + r_2)] \omega,$$

$$v_C = r_2 \omega_2 = r_2 [r_1 / (R_2 + r_2)] \omega, \quad v_3 = v_C$$

$$T = \frac{1}{2} \left\{ m_1 r_1^2 / 2 + (m_2 r_2^2 + I_2 + m_3 r_2^2) [r_1 / (R_2 + r_2)]^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{tg} \omega^2$$

$$I_{tg} = m_1 r_1^2 / 2 + (m_2 r_2^2 + I_2 + m_3 r_2^2) [r_1 / (R_2 + r_2)]^2$$



HUST

Department of Applied Mechanics

26

### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 2.

Tính tổng công của các lực khi trục 1 quay được góc  $\varphi$

$$A = M\varphi - (G_2 \sin \beta) s_C - (G_3 \sin \beta) s_3 - F_3 s_3$$

Động học  $s_3 = s_C = r_2 [r_1 / (R_2 + r_2)] \varphi$

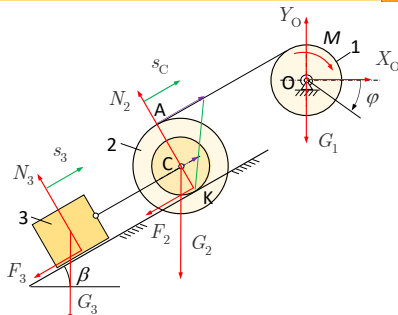
$$F_3 = \mu N_3, \quad N_3 = G_3 \cos \beta$$

$$A_{0-\varphi} = \left( M - \frac{r_1 r_2 [(G_2 + G_3) \sin \beta + \mu G_3 \cos \beta]}{(R_2 + r_2)} \right) \varphi$$

Định lý động năng dạng hữu hạn

$$T - T_0 = A \Rightarrow \frac{1}{2} I_{tg} \omega^2 = \left( M - \frac{r_1 r_2 [(G_2 + G_3) \sin \beta + \mu G_3 \cos \beta]}{(R_2 + r_2)} \right) \varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{I_{tg}} \left( M - \frac{r_1 r_2 [(G_2 + G_3) \sin \beta + \mu G_3 \cos \beta]}{(R_2 + r_2)} \right) \varphi} \equiv \omega(\varphi)$$



HUST

Department of Applied Mechanics

27

### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 2.

b) Tính gia tốc góc trục 1. Sử dụng định lý động năng dạng đạo hàm

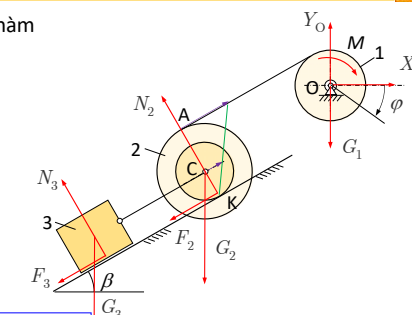
$$\frac{dT}{dt} = P = \frac{dA}{dt} \Rightarrow$$

$$I_{tg} \omega \dot{\omega} = \left( M - \frac{r_1 r_2 [(G_2 + G_3) \sin \beta + \mu G_3 \cos \beta]}{(R_2 + r_2)} \right) \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{M(R_2 + r_2) - r_1 r_2 [(G_2 + G_3) \sin \beta + \mu G_3 \cos \beta]}{(R_2 + r_2) I_{tg}} = \text{const}$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow M > \frac{r_1 r_2 [(G_2 + G_3) \sin \beta + \mu G_3 \cos \beta]}{(R_2 + r_2)}$$



HUST

Department of Applied Mechanics

28





### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 2.

c) Khi có mô men cản tại ổ trục tỷ lệ với vận tốc góc.

Không thể tính được công hữu hạn. Sử dụng định lý động năng dạng đạo hàm

$$P = \left( M - \frac{r_1 r_2 [(G_2 + G_3) \sin \beta + \mu G_3 \cos \beta]}{(R_2 + r_2)} \right) \dot{\phi} - M_c \omega, \quad M_c = k \omega$$

$$P = (C - k \omega) \omega, \text{ với } C = \left( M - \frac{r_1 r_2 [(G_2 + G_3) \sin \beta + \mu G_3 \cos \beta]}{(R_2 + r_2)} \right)$$

$$dT / dt = P \Rightarrow I_{tg} \omega \dot{\omega} = (C - k \omega) \omega \Rightarrow$$

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I_{tg}} (C - k \omega), \quad \omega(0) = 0$$

$$\frac{d\omega}{(C - k \omega)} = \frac{1}{I_{tg}} dt \Rightarrow \frac{d(C - k \omega)}{(C - k \omega)} = -\frac{k}{I_{tg}} dt \Rightarrow \ln(C - k \omega) = -\frac{k}{I_{tg}} t + C^*$$

$$C - k \omega = e^{-\frac{k}{I_{tg}} t + C^*} \Rightarrow \omega = \frac{1}{k} (C - e^{-\frac{k}{I_{tg}} t + C^*})$$

$$\omega(0) = 0 \Rightarrow 0 = (C - e^{C^*}) \Rightarrow e^{C^*} = C$$

$$\omega(t) = \frac{C}{k} (1 - e^{-\frac{k}{I_{tg}} t}) \Rightarrow \omega_{gh} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \frac{C}{k}$$

HUST

Department of Applied Mechanics

29



### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 3

**Ví dụ 3.** Cơ cấu tay quay con trượt chuyển động trong mặt đứng như trên hình. Tay quay OA và thanh truyền AB là những thanh đồng chất có chiều dài và khối lượng là:  $r, m_1, L, m_2$ , con trượt B có khối lượng  $m_3$ . Một mô men hằng số  $M$  tác dụng lên tay quay OA. Bỏ qua ma sát.

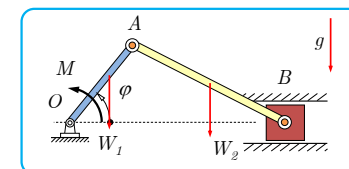
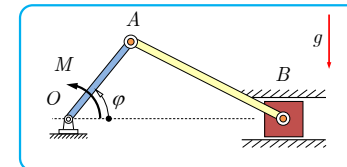
Xác định vận tốc góc của OA khi nó đạt đến vị trí cao nhất  $\varphi = \pi/2$  nếu trạng thái ban đầu là  $\varphi = 0$  và  $d\varphi/dt = \omega_0$ .

Lời giải

Khảo sát hệ gồm 3 vật: tay quay OA, thanh truyền AB và con trượt B.

Số bậc tự do,  $f = 1$  DOF.

Các lực sinh công:  $M, W_1, W_2$ .



HUST

Department of Applied Mechanics

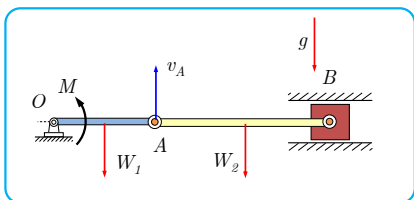
30



### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 3

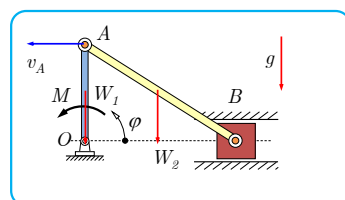
Áp dụng định lý động năng:

$$T - T_0 = A$$



Trạng thái đầu  $\varphi = 0, \dot{\varphi} = \omega_0$

$$\omega_{OA} = \omega_0, \quad v_A = r \omega_0, \\ v_B = 0, \quad \omega_{AB} = v_A / L = r \omega_0 / L$$



Trạng thái cuối  $\varphi = \pi / 2, \dot{\varphi} = \omega$

$$\omega_{OA} = \omega, \quad v_A = r \omega, \\ v_B = v_A, \quad \omega_{AB} = 0$$

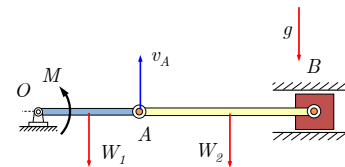
HUST

Department of Applied Mechanics

31



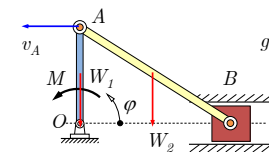
### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 3



Trạng thái đầu  $\varphi = 0, \dot{\varphi} = \omega_0$

$$\omega_{OA} = \omega_0, \quad v_A = r \omega_0, \\ v_B = 0, \quad \omega_{AB} = v_A / L = r \omega_0 / L$$

$$T_0 = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 + \frac{1}{2} I_P \omega_{AB}^2 \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m_1 r^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} m_2 L^2 \omega_{AB}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} (m_1 + m_2) r^2 \omega_0^2$$



Trạng thái cuối  $\varphi = \pi / 2, \dot{\varphi} = \omega$

$$\omega_{OA} = \omega, \quad v_A = r \omega, \\ v_B = v_A, \quad \omega_{AB} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) v_A^2 \\ = \frac{1}{2} (m_1 / 3 + m_2 + m_3) r^2 \omega^2$$

HUST

Department of Applied Mechanics

32

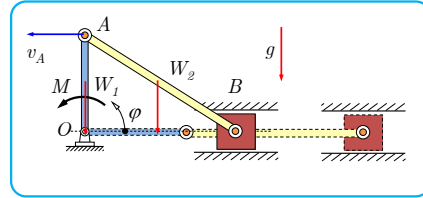


### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 3

Tổng công của các lực:

$$A = M(\varphi - \varphi_0) - W_1(h_1 - h_{10}) - W_2(h_2 - h_{20})$$

$$= M \frac{\pi}{2} - W_1 \frac{r}{2} - W_2 \frac{r}{2} = M \frac{\pi}{2} - m_1 g \frac{r}{2} - m_2 g \frac{r}{2}$$



$$T - T_0 = A \quad \frac{1}{2}(m_1 / 3 + m_2 + m_3)r^2\omega^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}(m_1 + m_2)r^2\omega_0^2 = A$$

Chú ý: điều kiện để tay quay OA đạt được đến vị trí cao nhất.

$$\Rightarrow (m_1 / 3 + m_2 + m_3)r^2\omega^2 = 2A + \frac{1}{3}(m_1 + m_2)r^2\omega_0^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \dots$$

HUST

Department of Applied Mechanics

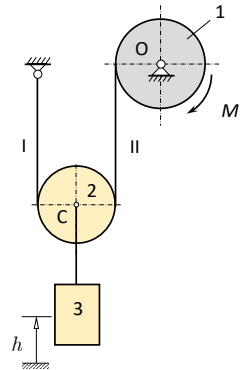
33

### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 4

**Ví dụ 4.** Hệ puli như trên hình vẽ. Tang cuốn 1 là trụ tròn đồng chất có khối lượng  $m_1=3m$ , bán kính  $r_1$ , chịu tác dụng của mô men động cơ  $M = const$ . Ròng rọc 2 là đĩa tròn có khối lượng  $m_2=2m$  và bán kính  $r_2$ . Vật 3 khối lượng  $m_3=m$  được treo vào tâm C ròng rọc 2. Các dây không dẫn, không khối lượng. Hệ chuyển động từ trạng thái tĩnh.

Hãy xác định:

- biểu thức động năng phụ thuộc vận tốc vật 3 -  $v_3$ .
- tổng công các lực / mô men khi vật 3 được nâng lên đoạn  $h$ .
- công suất động cơ nếu vật 3 có vận tốc  $v_3$  và gia tốc  $a_3$  hướng lên.



HUST

Department of Applied Mechanics

34

### 3. Ví dụ áp dụng / ví dụ 4

Lời giải

Phân tích chuyển động:

Các lực sinh công:  $M, P_2, P_3$

Động năng hệ khi vật 3 có vận tốc  $v_3$ :  $T = \frac{1}{2}I_O\omega_1^2 + \frac{1}{2}(m_2v_C^2 + I_C\omega_2^2) + \frac{1}{2}m_3v_3^2$  (1)

Các liên hệ động học:  $v_C = v_3, \omega_2 = v_C / r_2, \omega_1 = 2v_C / r_1$  (2)

$I_O = \frac{1}{2}m_1r_1^2, I_C = \frac{1}{2}m_2r_2^2$   $T = \frac{1}{2}\left(\frac{4I_O}{r_1^2} + m_2 + \frac{I_C}{r_2^2} + m_3\right)v_3^2 = \frac{1}{2}m_{\text{tđ}}v_3^2$  (3)

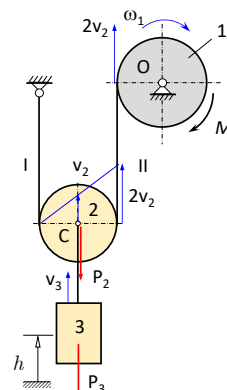
Tổng công các lực khi vật 3 đi lên đoạn  $h$ :

$A = M\varphi_1 - P_2s_C - P_3h$   $A = \left(\frac{2M}{r_1} - m_2g - m_3g\right)h$  (4)

(2)  $\Rightarrow s_C = h, \varphi_1 = 2h / r_1$

Tổng công suất:  $W = M\omega_1 - P_2v_3 - P_3v_3$   $W = \frac{dT}{dt} = m_{\text{tđ}}v_3\dot{v}_3 = m_{\text{tđ}}v_3a_3$

Công suất động cơ:  $W_{dc} = M\omega_1$   $W_{dc} = M\omega_1 = \frac{dT}{dt} + P_2v_3 + P_3v_3 = (m_{\text{tđ}}a_3 + P_2 + P_3)v_3$



HUST

Department of Applied Mechanics

35

## LỰC BẢO TOÀN, THỂ NĂNG. ĐỊNH LÝ BẢO TOÀN CƠ NĂNG

1. Lực bảo toàn - Thế năng
2. Định lý bảo toàn cơ năng
3. Ví dụ áp dụng

HUST

Department of Applied Mechanics

36

## 1. Lực bảo toàn – Thế năng

Khi công thực hiện bởi một lực di chuyển chất điểm từ vị trí này sang vị trí khác **không phụ thuộc vào đường đi chuyển** của điểm, thì lực này được gọi là **lực bảo toàn hay lực có thế**.

$$A = \int_{(0)}^{(1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0)}^{(1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (1)$$

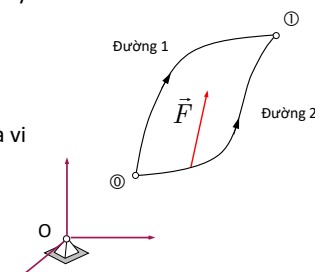
Tích phân trên không phụ thuộc đường đi, nếu biểu thức tích phân là vi phân toàn phần của một hàm nào đó, ký hiệu.

$$-d\Pi = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (2)$$

Hàm  $\Pi(x,y,z)$  đưa vào ở đây được gọi là hàm thế năng của lực  $\vec{F}$  hay hàm năng lượng thế năng.

So sánh vi phân toàn phần của hàm  $\Pi$  và (2)

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \Rightarrow F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$



HUST

Department of Applied Mechanics

37

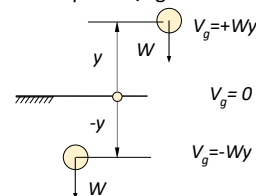
## 1. Lực bảo toàn – Thế năng

Nếu lực  $\vec{F}$  là lực bảo toàn hay lực có thế, công của nó được tính thông qua hàm thế năng như sau:

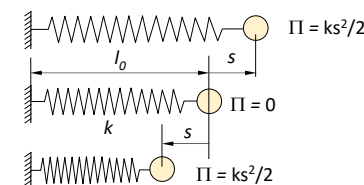
$$dA = -d\Pi \Rightarrow A = \int_{(0)}^{(1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{(0)}^{(1)} d\Pi = -(\Pi_{(1)} - \Pi_{(0)})$$

Lưu ý: Thế năng phụ thuộc vào hệ quy chiếu, nhưng độ lệch giữa hai vị trí (0) và (1) thì không phụ thuộc vào hệ quy chiếu.

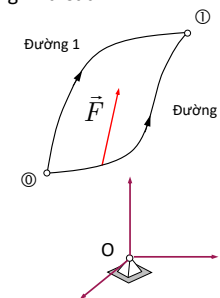
Ví dụ lực thế. Trong cơ học, thế năng do trọng lực (trọng lượng) hoặc lò xo đàn hồi là rất quan trọng.



$$\Pi_g = \int_y^0 -W dy = Wy = mgy$$



$$\Pi_e = \int_s^0 -ks ds = \frac{1}{2} ks^2$$



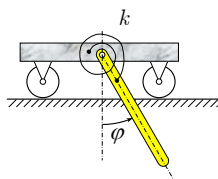
HUST

Department of Applied Mechanics

38

## 1. Lực bảo toàn – Thế năng

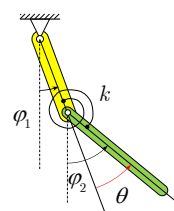
Thế năng của lò xo xoắn



$\varphi = 0$   
lò xo không bị xoắn

$$M_{tx} = -k\varphi$$

$$\Pi = A_{\varphi-0} = \int_{\varphi}^0 -k\varphi d\varphi = \frac{1}{2} k\varphi^2$$



$\varphi_2 = \varphi_1 \Rightarrow \theta = 0$   
lò xo không bị xoắn

$$M_{tx} = -k\theta$$

$$\Pi = A_{\theta-0} = \int_{\theta}^0 -k\theta d\theta = \frac{1}{2} k\theta^2 = \frac{1}{2} k(\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

HUST

Department of Applied Mechanics

39

## 1. Lực bảo toàn – Thế năng

Trong trường hợp tổng quát, nếu hệ chịu tác dụng của cả hai loại lực bảo toàn (trọng lực và lực đàn hồi lò xo) thế năng của hệ là tổng thế năng của các lực bảo toàn.

$$\Pi = \Pi_g + \Pi_e$$

Thế năng của cơ hệ

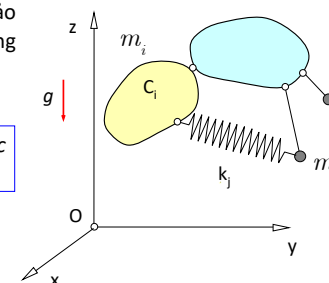
Thế năng của hệ tại vị trí (1) là số đo tổng công thực hiện bởi các lực bảo toàn khi nó di chuyển từ vị trí '1' về vị trí mốc '0':

$$\Pi = A_{1-0} = \sum_k \int_{(1)}^{(0)} \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = -\sum_k \int_{(0)}^{(1)} \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k$$

Trường lực

Trường lực là khoảng không gian vật lý mà khi chất điểm chuyển động trong trường lực chịu tác dụng lực chỉ phụ thuộc vào vị trí của nó. Trường trọng lực, trường các lực đàn hồi là những ví dụ về trường lực.

Trường lực thế là trường lực mà công của lực tác dụng lên chất điểm không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo điểm đặt của lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối của nó. Lực do trường lực thế tác dụng lên chất điểm đặt trong nó được gọi là lực thế. Trường trọng lực, trường lực đàn hồi tuyến tính là trường lực thế; còn trọng lực, lực đàn hồi tuyến tính là những lực thế.



HUST

Department of Applied Mechanics

40

## 2. Định lý bảo toàn cơ năng

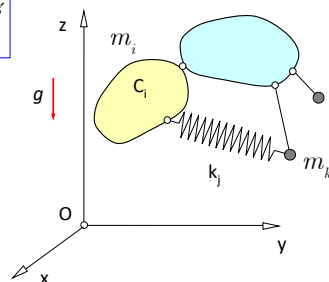
**Định lý bảo toàn cơ năng:** Khi cơ hệ chuyển động trong trường lực thế thì cơ năng của cơ hệ được bảo toàn.

Giả sử cơ hệ chuyển động trong trường lực thế từ vị trí đầu (0) đến vị trí (1) nào đó. Theo định lý động năng ta có

$$T_{(1)} - T_{(0)} = \sum_k A(\vec{F}_k^a) + \sum_k A(\vec{F}_k^i) = A_{0-1} \quad (1)$$

$$A_{0-1} = \Pi_{(0)} - \Pi_{(1)} \quad (2)$$

$$T_0 + \Pi_{(0)} = T_1 + \Pi_{(1)} = E = \text{const} \quad (3)$$



Hệ cơ học nghiệm đúng định luật bảo toàn cơ năng được gọi là hệ bảo toàn, còn lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ được gọi là lực bảo toàn. Như vậy, lực thế còn được gọi là lực bảo toàn.

Nếu ngoài các lực bảo toàn còn có những lực không bảo toàn, chẳng hạn như lực ma sát, lực cản tác dụng lên cơ hệ thì cơ năng của cơ hệ sẽ biến đổi. Khi đó trong hệ sẽ có sự chuyển hóa cơ năng của cơ hệ khảo sát sang các dạng năng lượng khác như nhiệt năng,... Cơ hệ như vậy được gọi là hệ không bảo toàn.

**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

41

## 3. Ví dụ áp dụng

**Ví dụ 1.** Một vật quay quanh trục nằm ngang O từ vị trí đầu được xác định bởi góc  $\varphi_0$  và vận tốc góc đầu  $\omega_0$ . Tìm vận tốc góc của vật quay theo góc quay  $\varphi$  của nó. Bỏ qua sức cản của không khí và ma sát tại ổ trục quay.

**Lời giải**

Khảo sát cơ hệ là con lắc vật lý.

Các lực tác dụng gồm: phản lực  $X_O, Y_O$  tại ổ trục quay O không sinh công và trọng lực  $mg$  là lực hoạt động có thế. Do đó cơ hệ khảo sát là cơ hệ bảo toàn.

Áp dụng định lý bảo toàn cơ năng

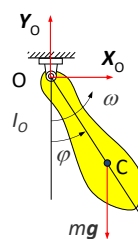
$$T + \Pi = \text{const} = \Pi_0 + T_0 \quad (1)$$

Cơ năng của hệ tại thời điểm đầu:

$$\Pi_0 + T_0 = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 - mgl \cos \varphi_0 = \text{const} \quad (2)$$

Cơ năng của hệ tại thời điểm bất kỳ:

$$T + \Pi = \frac{1}{2} I_O \omega^2 - mgl \cos \varphi \quad (3)$$



Thay (2, 3) vào (1), ta giải được:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2mgl}{I_O} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

42

## 3. Ví dụ áp dụng

**Ví dụ 2.** Để thử và đập cho mô hình máy bay có khối lượng  $m = 8000$  kg, người ta treo mô hình và nâng nó lên đến vị trí  $\theta = 60^\circ$ , sau đó thả để nó chuyển động từ trạng thái đứng yên. Xác định vận tốc máy bay khi nó chạm đất ứng với góc  $\theta = 15^\circ$ . Đồng thời xác định lực căng lớn nhất của cáp treo. Bỏ qua lực cản không khí và kích thước máy bay.

**Lời giải**

Bỏ qua kích thước máy bay, nên nó được coi như chất điểm. Các lực tác dụng sau khi thả (cắt dây AC) chỉ còn lại trọng lực  $W$  và lực căng cáp treo  $T$ . **Chỉ có trọng lực sinh công, đó là lực bảo toàn.**

Chọn gốc thế năng của trọng lực là mặt ngang qua O.

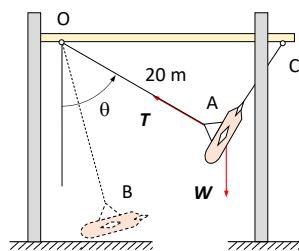
Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng

$$T_A + \Pi_A = T_B + \Pi_B \Rightarrow 0 - mgl \cos 60^\circ = \frac{1}{2} mv_B^2 - mgl \cos 15^\circ$$

$$0 - 8000 \cdot 9.81 \cdot 20 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} 8000 \cdot v_B^2 - 8000 \cdot 9.81 \cdot 20 \cos 15^\circ$$

Từ đây tính được vận tốc máy bay khi chạm đất

$$v_B = 13.5 \text{ m/s}$$



**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

43

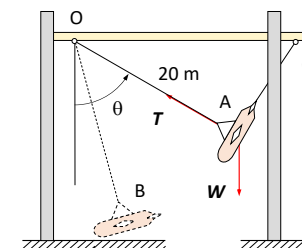
## 3. Ví dụ áp dụng

Để xác định lực căng cáp treo, ta viết phương trình chuyển động cho máy bay (coi như điểm).

Do máy bay chuyển động theo quỹ đạo tròn, áp dụng phương pháp tọa độ tự nhiên, ta có

$$\begin{aligned} ma_n &= \sum F_{k,n}, & a_n &= \frac{v^2}{l} \\ m \frac{v_B^2}{l} &= T - mg \cos 15^\circ \Rightarrow & T &= m \frac{v_B^2}{l} + mg \cos 15^\circ \end{aligned}$$

Từ đây tính được:  $T = 149 \text{ kN}$ .



**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

44