

## Động lực học: lực – gia tốc

Bộ môn Cơ học ứng dụng

## ĐỘNG LỰC HỌC: LỰC – GIA TỐC

Bộ môn Cơ học ứng dụng

GV: .....

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM: Lực – gia tốc

## 1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

- Tọa độ đều các
- Tọa độ tự nhiên
- Tọa độ cực
- Tọa độ trụ

## 2. Các bài toán cơ bản của động lực học

## 3. Một số ví dụ

## 1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

Xuất phát từ định luật 2 Newton

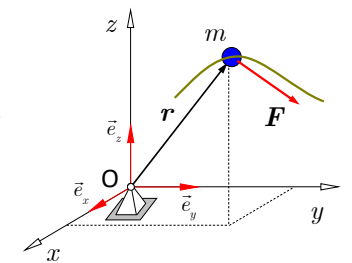
$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} = \sum \vec{F}_k, \quad m = \text{const} \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Trong hệ tọa độ đều các Oxyz cố định:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z, \quad \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$$

PTVP CĐ trong hệ tọa độ đều các

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Các điều kiện đầu về vị trí và vận tốc} \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0 \end{array}$$



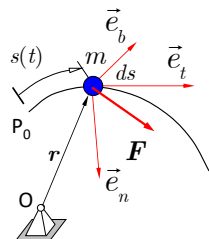


## 1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

PTVPCĐ của chất điểm trong dạng tọa độ tự nhiên

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n : \quad \vec{a}_t = \ddot{s} \vec{e}_t, \quad \vec{a}_n = (\dot{s}^2 / \rho) \vec{e}_n$$

$$a_t = \ddot{s} = \dot{v}, \quad a_n = \dot{s}^2 / \rho, \quad a_b = 0$$



$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_t, \\ mv^2 / \rho = F_n, \\ m \cdot 0 = F_b \end{cases} \quad \text{Các điều kiện đầu về vị trí và vận tốc}$$

$$s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = v_0$$



## 1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

PTVPCĐ của chất điểm trong dạng tọa độ trụ

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$$

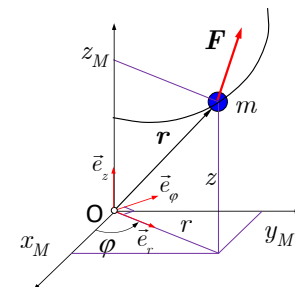
$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \text{Các điều kiện đầu về vị trí và vận tốc}$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0$$

$$m\ddot{z} = F_z, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$$

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0$$



## 1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

PTVPCĐ của chất điểm trong dạng tọa độ cực

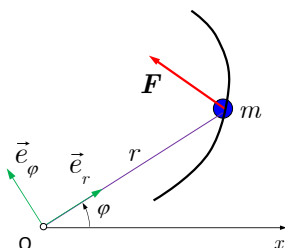
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \text{Các điều kiện đầu về vị trí và vận tốc}$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$$



## 2. Các bài toán cơ bản của động lực học chất điểm

Quan hệ lực và gia tốc (chuyển động) như sau

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Nếu chất điểm chịu tác dụng của nhiều lực

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_k$$

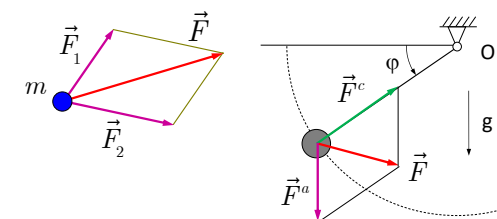
Đối với chất điểm chịu liên kết

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_k^a + \sum \vec{F}_j^c$$

**Bài toán 1.** [Bt thuận]. Cho biết các lực tác dụng lên chất điểm và các điều kiện đầu của chuyển động (vị trí và vận tốc ban đầu), xác định chuyển động của chất điểm ấy.

**Bài toán 2.** [Bt ngược]. Cho biết chuyển động của chất điểm, xác định lực tác dụng lên chất điểm.

**Bài toán 3.** [Bt hỗn hợp]. Cho biết một số lực tác dụng (lực hoạt động) và một số thông tin về chuyển động (như quỹ đạo, vị trí và vận tốc ban đầu), xác định chuyển động của chất điểm và các lực chưa biết (lực liên kết).



### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 1

**Ví dụ 1.** Mô hình thang máy như trên hình. Động cơ nối vào bánh răng 1 ( $r_1, z_1$ ), truyền động sang bánh răng 2 ( $r_2, z_2$ ). Tang cuốn bán kính  $r$  gắn liền bánh răng 2. Dây cuốn không dẫn. Trong giai đoạn mở máy, bánh răng 1 quay nhanh dần đều

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_0 t^2, \quad \alpha_0 = \text{const}$$

Xác định lực căng cáp treo cabin A, biết khối lượng cabin là  $m$ .

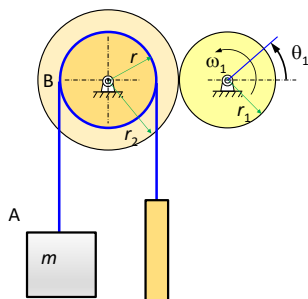
#### Lời giải

Phân tích chuyển động:

Tính gia tốc cabin

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 = \alpha_0 t, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow \omega_2 = \frac{z_1}{z_2} \omega_1 = \frac{z_1}{z_2} \alpha_0 t$$

$$v_A = r \omega_2 = r \frac{z_1}{z_2} \alpha_0 t \Rightarrow a_A = \dot{v}_A = r \dot{\omega}_2 = r \frac{z_1}{z_2} \alpha_0$$



### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 1

Tách cabin và viết quan hệ lực - gia tốc cho cabin

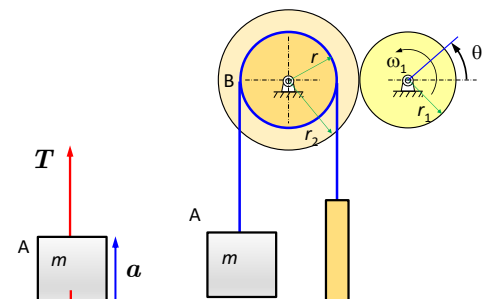
$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

$$ma = T - P \Rightarrow$$

$$T = P + ma = P(1 + a / g)$$

Nếu gia tốc  $a$  hướng xuống

$$T = P - ma = P(1 - a / g)$$



### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 2

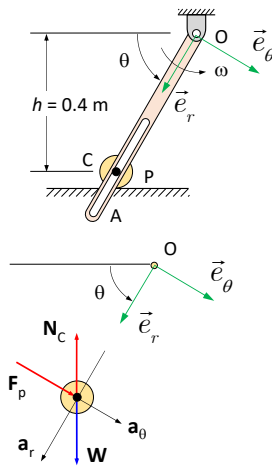
**Ví dụ 2.** Trụ nhỏ C khối lượng 2-kg có chốt P đi qua tâm chuyển động trong rãnh của tay quay OA. Biết rằng tay quay OA chuyển động trong mặt đứng với vận tốc góc  $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ , hãy xác định lực tác dụng lên trụ C (coi như chất điểm) tại thời điểm  $\theta = 60^\circ$ .

#### Lời giải

Vị trí của C được xác định bởi khoảng cách OC và góc  $\theta$ , do đó ta sử dụng tọa độ cực để giải bài toán này.

Sơ đồ giải phóng liên kết

Các lực tác dụng lên trụ bao gồm: trọng lực  $\mathbf{W}$ , phản lực của nền  $\mathbf{N}_C$ , và lực  $\mathbf{F}_P$  do rãnh của OA tác dụng vuông góc OA, chiều được giả sử trước. Chiều của các thành phần gia tốc  $\mathbf{a}_r$  và  $\mathbf{a}_\theta$  được chọn như trên hình. Ở đây có bốn ẩn cần tìm là  $\mathbf{a}_r$ ,  $\mathbf{a}_\theta$ ,  $\mathbf{F}_P$  và  $\mathbf{N}_C$ .



### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 2

Phương trình quan hệ lực – gia tốc

Từ hình vẽ ta viết được các phương trình  $W = mg = 2 \times 9.81 = 19.62 \text{ N}$

$$W \sin \theta - N_C \sin \theta = 2a_r \quad (1)$$

$$W \cos \theta + F_P - N_C \cos \theta = 2a_\theta \quad (2)$$

Động học

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

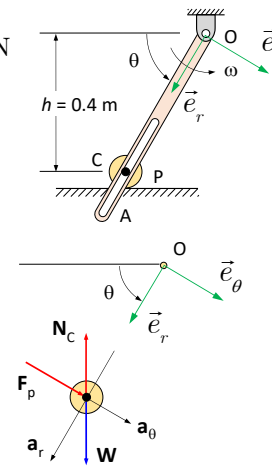
Từ hình vẽ ta xác định được liên hệ giữa  $r$  và  $\theta$

$$r \sin \theta - h = 0 \quad (3)$$

Đạo hàm hai lần phương trình liên kết ta nhận được

$$\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = 0, \quad (4)$$

$$\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 \quad (5)$$





### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 2

Giải hệ ba phương trình

$$r \sin \theta - h = 0 \quad (3)$$

$$\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = 0, \quad (4)$$

$$\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 \quad (5)$$

với  $\theta = 60^\circ$ ,  $\omega = \dot{\theta} = 0.5$ ,  $\alpha = \ddot{\theta} = 0$  ta nhận được:

$$r = 0.462, \quad \dot{r} = -0.133, \quad \ddot{r} = 0.192$$

Tính được:

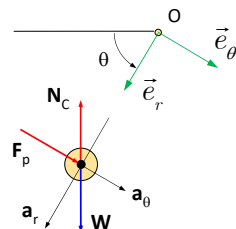
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.192 - 0.462(0.5)^2 = 0.0770$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0.133)(0.5) = -0.133$$

Từ hệ (1) và (2) với  $\theta = 60^\circ$  cho ta

$$N_c = 19.4 \text{ N}, \quad F_p = -0.356 \text{ N}.$$

Dấu trừ chứng tỏ rằng  $F_p$  tác động ngược chiều hình vẽ.



$$W \sin \theta - N_c \sin \theta = 2a_r \quad (1)$$

$$W \cos \theta + F_p - N_c \cos \theta = 2a_\theta \quad (2)$$

$$W = mg = 2 \times 9.81 = 19.62 \text{ N}$$

**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

13

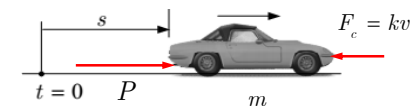


### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 3

**Lực cản tỷ lệ vận tốc**

**Ví dụ 3.** Xe ô tô chuyển động trên đường thẳng ngang từ trạng thái đứng yên do lực đẩy  $P = \text{const}$ , lực cản tỷ lệ vận tốc xe.

- Tìm biểu thức vận tốc của xe là hàm theo thời gian.
- Tìm khoảng thời gian  $T$  cần thiết để cho vận tốc đạt giá trị bằng 95% giá trị vận tốc giới hạn.



**Lời giải**

Phân tích chuyển động: Xe chuyển động ngang dưới tác dụng của hai lực  $P$  và  $F_c$ .

$$m\ddot{x} = F_x(x, v, t) \Rightarrow m\dot{v} = P - kv,$$

Cần đi giải phương trình vi phân bậc nhất với điều kiện đầu

$$m \frac{dv}{dt} = P - kv, \quad v(0) = 0$$

**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

14



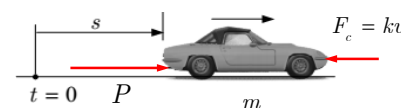
### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 3

- Tìm biểu thức vận tốc của xe là hàm theo thời gian

$$m \frac{dv}{dt} = P - kv, \quad v(0) = 0$$

$$\frac{mdv}{P - kv} = dt \Rightarrow \frac{d[P - kv]}{[P - kv]} = -\frac{k}{m} dt$$

$$v(t) = \frac{P}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$



- Tìm vận tốc tới hạn của xe

$$v_{gh} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = \frac{P}{k}$$

- Tìm khoảng thời gian  $T$  cần thiết để cho vận tốc đạt giá trị bằng 95% giá trị vận tốc giới hạn.

$$v(T) = \frac{P}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}T}) = 0.95 \frac{P}{k} \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}T} = 0.05 \Rightarrow T = \frac{m}{k} \ln 20$$

**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

15



### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 4

**Ví dụ 4.** Chất điểm chịu liên kết (sử dụng tọa độ tự nhiên)

Một quả cầu nhỏ khối lượng  $m$  được treo vào một dây mềm không dẫn luôn căng chiều dài  $L$  đầu kia cố định. Quả cầu được thả từ vị trí dây ngang không vận tốc ban đầu. Tìm vận tốc của quả cầu phụ thuộc vị trí của nó và lực căng dây (dây luôn căng).

**Lời giải**

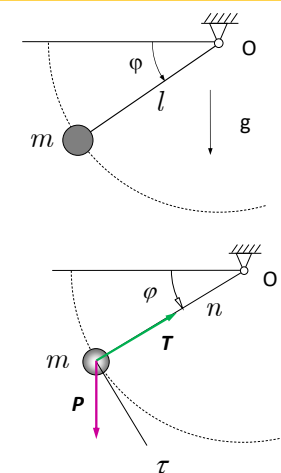
Phân tích chuyển động: điểm chuyển động trên đường tròn đã biết. Sử dụng phương pháp tọa độ tự nhiên. Các lực tác dụng  $\vec{P}, \vec{T}$

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow m(\vec{a}_n + \vec{a}_t) = \vec{P} + \vec{T}$$

$$a_t = l\ddot{\varphi}, \quad a_n = l\dot{\varphi}^2,$$

$$ma_t = ml\ddot{\varphi} = P \cos \varphi$$

$$ma_n = ml\dot{\varphi}^2 = T - P \sin \varphi$$



**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

16

### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 4

Sử dụng hệ thức

$$ma_t = m\ddot{\varphi} = P \cos \varphi, \quad ma_n = m\dot{\varphi}^2 = T - P \sin \varphi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\varphi}{d\varphi}$$

$$m\dot{\varphi} = P \cos \varphi \Rightarrow m\dot{\varphi}d\varphi = P \cos \varphi d\varphi$$

Dựa vào các điều kiện đầu của chuyển động, ta có:

$$\int_0^{\varphi} m\dot{\varphi}d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} P \cos \varphi d\varphi \Rightarrow \frac{1}{2} m\dot{\varphi}^2 = mg(\sin \varphi - \sin \varphi_0)$$

Vận tốc chất điểm:

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{2gl^{-1}(\sin \varphi - \sin \varphi_0)}$$

$$v = l\dot{\varphi} = \sqrt{2gl(\sin \varphi - \sin \varphi_0)}$$

Lực căng dây:

$$T = m\dot{\varphi}^2 + P \sin \varphi = mg(3 \sin \varphi - 2 \sin \varphi_0)$$

$$\text{If } \varphi(0)=0 \Rightarrow v = \sqrt{2gl \sin \varphi},$$

$$T = 3mg \sin \varphi$$

HUST

Department of Applied Mechanics

17

### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 5

Một số dạng phương trình vi phân chuyển động cần giải

$$(1) \quad m\dot{v} = P - kv, \quad v(0) = 0$$

$$(2) \quad m\dot{v} = P - kv^2, \quad v(0) = 0$$

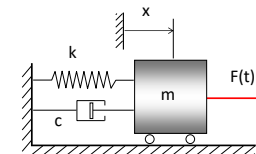
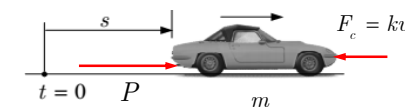
$$(3) \quad m\ddot{x} = P, \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$

$$(4) \quad m\ddot{x} = -kx, \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$

$$(5) \quad m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx, \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$

$$(6) \quad m\ddot{x} = -kx + F_0 \sin \Omega t, \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$

$$(7) \quad m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F_0 \sin \Omega t, \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$



HUST

Department of Applied Mechanics

18

### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 6

**Ví dụ 6.** Hệ chất điểm chịu liên kết (bỏ qua khối lượng puli).

Vật nặng A khối lượng 100 kg được thả từ trạng thái đứng yên. Nếu bỏ qua khối lượng các puli và dây, hãy xác định vận tốc của vật nặng B khối lượng 20 kg sau thời gian 2 giây.

**Lời giải**

Sơ đồ giải phóng liên kết

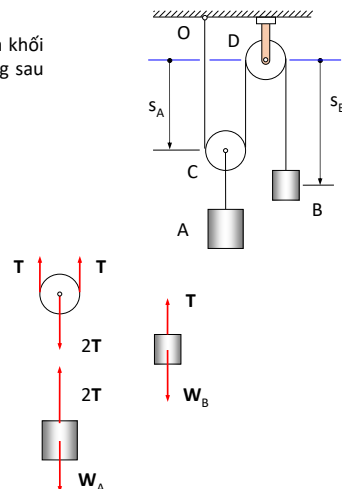
Do bỏ qua khối lượng các puli, nên lực căng là không đổi trong mỗi dây.

Gọi lực căng trong nhánh dây treo vật B là T, từ sơ đồ lực trên puli C ta suy ra lực treo vật A là 2T. Ba ẩn trong bài toán này là T,  $a_A$  và  $a_B$ .

Các phương trình lực-gia tốc

$$\text{Vật A: } \downarrow: \quad m_A a_A = 981 - 2T \quad (1)$$

$$\text{Vật B: } \downarrow: \quad m_B a_B = 20 \cdot 9.81 - T \quad (2)$$



HUST

Department of Applied Mechanics

19

### 3. Các ví dụ áp dụng / ví dụ 6

Động học

Từ điều kiện dây không giãn ta có được liên hệ (dây O-B dài l)

$$2s_A + s_B = l = \text{const} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\dots) \Rightarrow 2\ddot{s}_A + \ddot{s}_B = 0 \Rightarrow 2a_A + a_B = 0 \quad (3)$$

Các phương trình lực-gia tốc

$$m_A a_A = 981 - 2T \quad (1)$$

$$m_B a_B = 20 \cdot 9.81 - T \quad (2)$$

Giải hệ ba phương trình trên ta nhận được

$$T = 327.0 \text{ N}, \quad a_A = 3.27 \text{ m/s}^2, \quad a_B = -6.54 \text{ m/s}^2$$

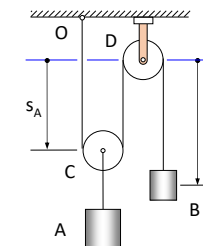
Như vậy vật A có gia tốc hướng xuống, vật B có gia tốc hướng lên.

Vận tốc vật B sau 2 giây được xác định như sau:

$$v = v_0 + a_B t$$

Dấu trừ chứng tỏ vật B có vận tốc hướng lên.

$$= 0 + (-6.54)(2) = -13.1 \text{ m/s}$$



HUST

Department of Applied Mechanics

20



## ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM: Lực – gia tốc

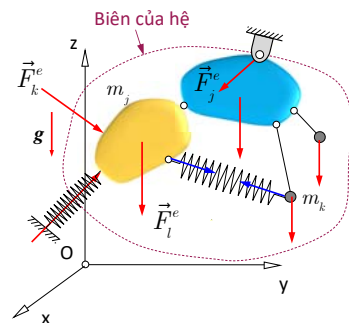
1. Cơ hệ, Nội lực và ngoại lực
2. Khối tâm cơ hệ
  - khối tâm hệ chất điểm
  - khối tâm vật rắn và khối tâm cơ hệ
3. Định lý chuyển động khối tâm
4. Ví dụ áp dụng



### 1. Cơ hệ - Nội lực và ngoại lực

**Cơ hệ** (mechanical system) gồm các chất điểm và các vật rắn mà giữa chúng có tương tác (có tương tác về lực và có ràng buộc về chuyển động).

Biên giới của hệ, trong hệ, ngoài hệ (môi trường)



**Ngoại lực** (external force): các lực từ bên ngoài tác dụng lên hệ, như trọng lực, lực do liên kết với môi trường,...

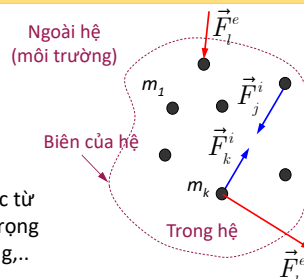
$$\vec{F}_k^e, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Nội lực** (internal force): các lực tác dụng qua lại giữa các điểm (vật) thuộc hệ với nhau.

$$\vec{F}_k^i, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Tính chất của hệ nội lực**

$$\sum_k \vec{F}_k^i = 0, \quad \sum_k \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) = 0, \quad \forall O$$



### 2. Khối tâm của cơ hệ: hệ chất điểm

Xét hệ gồm n chất điểm có khối lượng tương ứng là  $m_k$ . Khối tâm của hệ n chất điểm này là một điểm hình học C thỏa mãn hệ thức

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k = 0 \quad \vec{u}_k - \text{véc tơ từ C đến chất điểm } M_k$$

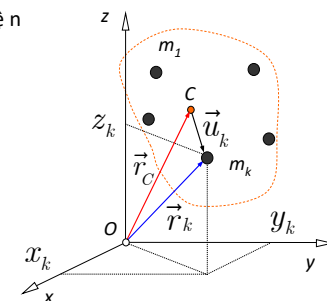
Trong hệ trục tọa độ Oxyz:

- Véc tơ định vị của các chất điểm  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$
- Véc tơ định vị của khối tâm C  $\vec{r}_C$

$$\Rightarrow \vec{u}_k = \vec{r}_k - \vec{r}_C \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_C) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k, \quad m = \sum_{k=1}^n m_k \Rightarrow \begin{cases} x_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k, & y_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k y_k \\ z_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k z_k \end{cases}$$

Khi  $g = \text{const}$ , khối tâm C trùng trọng tâm G.



## 2. Khối tâm của cơ hệ: vật rắn và hệ vật rắn

Khối tâm của vật rắn là điểm C thỏa mãn

$$\int_B \vec{u} dm = 0, \quad \vec{u} = \overrightarrow{CM}$$

Tính vị trí của C trong hệ Oxyz

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_C$$

$$\int_B (\vec{r} - \vec{r}_C) dm = 0 \Rightarrow \vec{r}_C = \frac{1}{m} \int_B \vec{r} dm, \quad m = \int_B dm$$

$$x_C = m^{-1} \int \tilde{x} dm, \quad y_C = m^{-1} \int \tilde{y} dm, \quad z_C = m^{-1} \int \tilde{z} dm$$

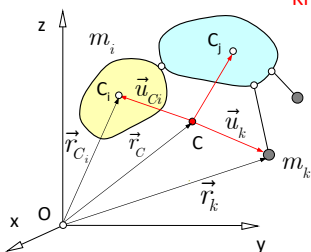
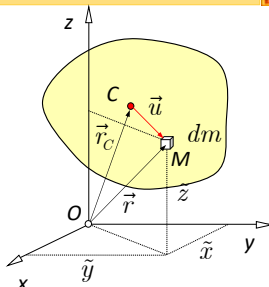
Khối tâm của hệ n chất điểm và p vật rắn

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k + \sum_{i=1}^p m_i \vec{u}_{Ci} = 0$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \left( \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k + \sum_{i=1}^p m_i \vec{r}_{Ci} \right), \quad m = \sum_{k=1}^n m_k + \sum_{i=1}^p m_i$$

$$x_C = \frac{1}{m} \left( \sum_{k=1}^n m_k x_k + \sum_{i=1}^p m_i x_{Ci} \right), \quad y_C = \frac{1}{m} \left( \sum_{k=1}^n m_k y_k + \sum_{i=1}^p m_i y_{Ci} \right),$$

$$z_C = \frac{1}{m} \left( \sum_{k=1}^n m_k z_k + \sum_{i=1}^p m_i z_{Ci} \right)$$



HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

25

## 2. Khối tâm của cơ hệ: vật rắn và hệ vật rắn

Từ các công thức trên có thể đưa ra các nhận xét sau:

- Nếu vật rắn đồng chất có tâm (trục, mặt phẳng) đối xứng thì khối tâm của nó nằm tại tâm (trục, mặt phẳng) đối xứng đó.
- Nếu vật rắn gồm các phần mà khối tâm của các phần đó nằm trên một đường thẳng (mặt phẳng) thì khối tâm của cả vật cũng nằm trên đường thẳng (mặt phẳng) đó.

Nếu cơ hệ ở trên hay gần mặt đất, với gia tốc trọng trường là hằng, thì khối tâm của cơ hệ trùng với trọng tâm của nó. Như thế các phương pháp sử dụng trong phần trọng tâm của vật rắn đều có thể áp dụng vào việc tính toán khối tâm cơ hệ.

Khối tâm của cơ hệ luôn tồn tại còn trọng tâm thì chỉ tồn tại khi cơ hệ ở trong trường trọng lực (của Trái Đất).

HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

26

## 3. Định lý chuyển động khối tâm

Áp dụng định luật 2 Newton đối với chất điểm  $m_k$  thuộc hệ:

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Lấy tổng hai vế với tất cả các chất điểm thuộc hệ, chú ý đến tính chất của hệ nội lực

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$$

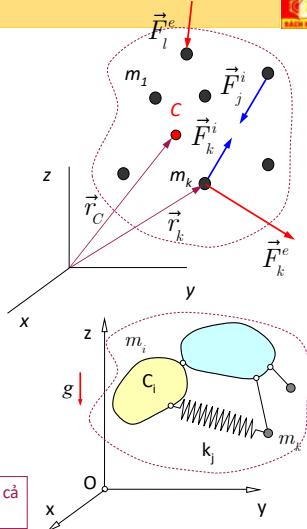
$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = m_\Sigma \vec{r}_C \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \ddot{\vec{r}}_k = m_\Sigma \ddot{\vec{r}}_C \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = m_\Sigma \vec{a}_C$$

Định lý chuyển động khối tâm

$$m_\Sigma \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e, \quad m_\Sigma = \sum_{k=1}^n m_k$$

Tổng tất cả các ngoại lực tác dụng lên hệ bằng tổng khối lượng của hệ nhân với gia tốc khối tâm của hệ.

Lưu ý: định lý ĐK khối tâm đúng cả với vật rắn và hệ vật rắn.



HUST

Hanoi University of Science and Technology

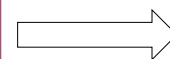
Department of Applied Mechanics

27

## 3. Định lý chuyển động khối tâm / trường hợp bảo toàn

Định lý chuyển động khối tâm

$$m_\Sigma \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$$



$$\begin{aligned} m_\Sigma \ddot{x}_C &= \sum F_{kx}^e, \\ m_\Sigma \ddot{y}_C &= \sum F_{ky}^e, \\ m_\Sigma \ddot{z}_C &= \sum F_{kz}^e \end{aligned}$$

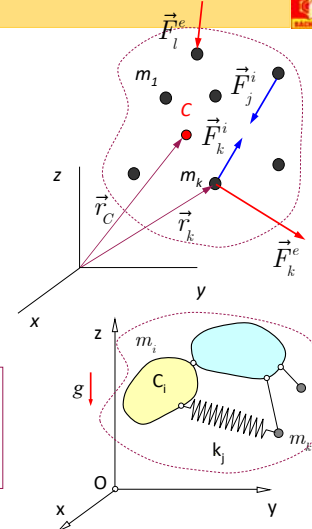
Các trường hợp bảo toàn

$$\text{Nếu } \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0 \Rightarrow m_\Sigma \vec{v}_C = \text{const} = m_\Sigma \vec{v}_C(0)$$

$$\text{Nếu } m_\Sigma \vec{v}_C(0) = 0 \Rightarrow m_\Sigma \vec{r}_C = \text{const} = m_\Sigma \vec{r}_C(0)$$

$$\text{Nếu } \sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0 \Rightarrow m_\Sigma \dot{x}_C = \text{const} = m_\Sigma \dot{x}_C(0)$$

$$\text{Nếu } m_\Sigma \dot{x}_C(0) = 0 \Rightarrow m_\Sigma x_C = \text{const} = m_\Sigma x_C(0)$$



HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

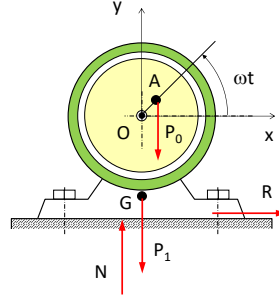
28



#### 4. Ví dụ áp dụng

**Ví dụ 1.** Động cơ điện được giữ cố định trên nền ngang như trên hình. Phần cố định của động cơ (stato) có khối lượng  $m_1$ , phần quay (rôto) có khối lượng  $m_0$  khối tâm tại A cách trục quay O một đoạn OA = e.

- (a) Tìm lực cắt cực đại tác dụng lên các bu lông nếu động cơ quay đều với vận tốc góc  $\omega$ .  
(b) Giả sử rằng động cơ được đặt tự do trên nền nhẵn (không bu lông, không ma sát), tìm tốc độ quay cho phép để vỏ máy không bị bật lên khỏi nền.



Lời giải:

a) Ta khảo sát toàn bộ động cơ.

Ngoại lực tác dụng lên hệ (hình vẽ)

Gọi C là khối tâm của hệ, áp dụng định lý chuyển động khối tâm ta có:

$$m_{\Sigma} \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow (m_0 + m_1) \vec{a}_C = \vec{P}_0 + \vec{P}_1 + \vec{N} + \vec{R}$$

$$\begin{aligned} m_{\Sigma} \ddot{x}_C &= R, \\ m_{\Sigma} \ddot{y}_C &= N - P_0 - P_1 \end{aligned}$$

**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

29

#### 4. Ví dụ áp dụng

Xác định gia tốc khối tâm theo phương x

$$x_C = \frac{m_0 x_A + m_1 x_G}{m_0 + m_1} = \frac{m_0 x_A}{m_0 + m_1} \Rightarrow \ddot{x}_C = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \ddot{x}_A$$

$$x_A = e \cos \omega t \Rightarrow \ddot{x}_A = -e \omega^2 \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_C = -\frac{m_0 e \omega^2 \cos \omega t}{m_1 + m_0}$$

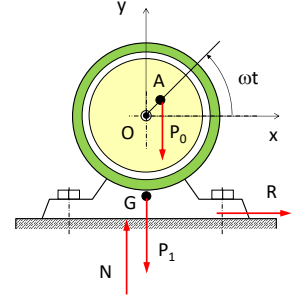
$$R = (m_1 + m_0) \ddot{x}_C \Rightarrow R = -m_0 e \omega^2 \cos \omega t$$

Từ đây suy ra giá trị cực đại của lực cắt bulông

$$R_{\max} = m_0 e \omega^2$$

Nhận xét. Nếu rô to quay với tốc độ cao ( $\omega$  lớn) lực  $R_{\max}$  sẽ lớn dù độ lệch tâm e nhỏ.

Trong kỹ thuật người ta thường tìm cách để giảm độ lệch tâm càng nhỏ càng tốt, lý tưởng là e = 0.



**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

30

#### 4. Ví dụ áp dụng

- b) Trường hợp động cơ được đặt tự do trên nền không ma sát khi đó không có lực ngang R.

$$m_{\Sigma} \ddot{y}_C = N - P_0 - P_1 \Rightarrow N = m_{\Sigma} \ddot{y}_C + P_0 + P_1$$

Tính  $y_C$

$$y_C = \frac{m_0 y_A + m_1 y_G}{m_0 + m_1} = \frac{m_0 y_A}{m_0 + m_1} \Rightarrow \ddot{y}_C = \frac{m_0 \ddot{y}_A}{m_0 + m_1}$$

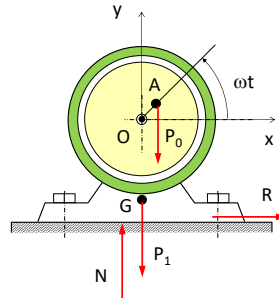
$$y_A = e \sin \omega t \Rightarrow \ddot{y}_A = -e \omega^2 \sin \omega t$$

$$\ddot{y}_C = -(m_1 + m_0)^{-1} m_0 e \omega^2 \sin \omega t$$

$$N = P_0 + P_1 + (m_1 + m_0) \ddot{y}_C = (m_1 + m_0) g - m_0 e \omega^2 \sin \omega t$$

Vậy để vỏ máy không bật khỏi nền thì tốc độ quay cho phép lớn nhất cần thỏa mãn hệ thức:

$$N_{\min} = (m_0 + m_1) g - m_0 e \omega^2 > 0 \Rightarrow \omega \leq \omega_{\max} = \sqrt{\frac{m_0 + m_1}{m_0 e}} g$$



**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

31

#### 4. Ví dụ áp dụng / bảo toàn chuyển động khối tâm

**Ví dụ 2.** Xác định di chuyển ngang của con tàu mang cần cẩu khi cần AB được đưa lên thẳng đứng từ vị trí ban đầu nghiêng góc  $\alpha = 30^\circ$  như hình. Cho biết khối lượng của tàu và cần cẩu  $M = 20$  tấn, khối lượng vật nặng  $m = 2$  tấn, và chiều dài của cần AB là  $L = 8$  m. Bỏ qua sức cản của nước và khối lượng của cần AB.

Lời giải

Bỏ qua lực cản theo phương ngang, các ngoại lực tác dụng đều song song với phương đứng.

$$(M + m) \ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = \text{const} = \dot{x}_C(0) = 0 \Rightarrow x_C = \text{const}$$

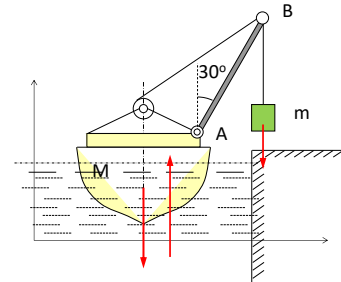
Tính tọa độ khối tâm hệ tại hai thời điểm: khi  $\alpha = 30^\circ$  và  $\alpha = 0^\circ$

$$\alpha = 30^\circ \quad M x_C(0) = M x_1 + m x_2, \quad x_2 = x_1 + d + L \sin \alpha$$

Thời điểm cuối ( $\alpha = 0^\circ$ ): giả sử thân tàu di chuyển một đoạn  $\Delta$  theo phương ngang sang bên phải:

$$M x_C(t_1) = M(\Delta + x_1) + m(x_2 + \Delta + d - L \sin \alpha)$$

$$M x_C(t_0) = M x_C(t_1) \Rightarrow \Delta = \frac{m L \sin \alpha}{M + m} = 0,36 \text{ m}$$



**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

32





## ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN PHẪNG: Lực – gia tốc

1. Mô men quán tính khối của vật rắn
  - Khái niệm mô men quán tính khối của vật rắn đối với một trục / một điểm
  - Mô men quán tính khối của một số vật rắn đồng chất đơn giản
  - Liên hệ mô men quán tính khối của vật rắn đối với các trục song song
2. Thiết lập quan hệ lực – gia tốc cho vật rắn CĐ phẳng
  - PTVP CĐ vật chuyển động tịnh tiến
  - PTVP CĐ vật chuyển động quay quanh trục cố định
  - PTVP CĐ vật chuyển động song phẳng (phẳng tổng quát)
3. Các ví dụ áp dụng

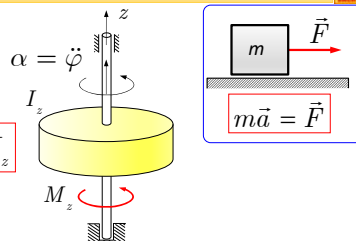


### 1.a Mô men quán tính khối của vật rắn (Moment of Inertia)

#### Mô men quán tính khối của vật rắn đối với một trục

Mô men quán tính khối của vật đối với một trục đặc trưng cho mức độ quán tính (hay sức ì) của vật chống lại sự thay đổi gia tốc góc quay quanh trục đó.

$$I_z \alpha = M_z$$



Định nghĩa: Mô men quán tính khối của vật rắn đối với trục  $Oz$ , ký hiệu là  $I_z$ , là đại lượng vô hướng được tính theo công thức

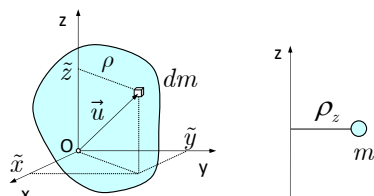
$$I_z = \int \rho^2 dm = \int (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) dm$$

Tương tự, có  $I_x$ , và  $I_y$

$$I_x = \int (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) dm, \quad I_y = \int (\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2) dm$$

Bán kính quán tính của vật đối với một trục  $z$  được định nghĩa là

$$\rho_z = \sqrt{I_z / m} \Rightarrow I_z = m \rho_z^2$$



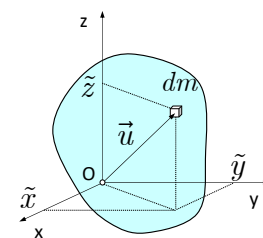
### 1.a Mô men quán tính khối của vật rắn

#### Mô men quán tính khối của vật rắn đối với một điểm

Định nghĩa: Mô men quán tính khối của vật rắn đối với tâm  $O$ , ký hiệu  $I_O$ , được tính theo công thức:

$$I_O = \int u^2 dm = \int (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) dm$$

$$I_O = \frac{1}{2} \left[ \int (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) dm + \int (\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2) dm + \int (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) dm \right]$$



$$I_O = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$$



## 1.b Mô men quán tính khối của một số vật rắn đồng chất

a) Thanh mảnh AB đồng chất có khối lượng  $m$  và chiều dài  $L$ .

Trục  $Cz \perp AB$ ,  $CA=CB$

$$I_z = \int x^2 dm$$

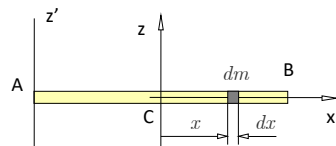
Do thanh đồng chất, thiết diện không đổi nên  $dm = (m/l)dx$

$$I_z = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 (m/l) dx = \frac{m}{3l} x^3 \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} ml^2$$

Trục  $Az' \perp AB$

$$I_{Az'} = \int_0^l x^2 (m/l) dx = \frac{m}{3l} x^3 \Big|_0^l = \frac{1}{3} ml^2$$

$$I_{Cz} = \frac{1}{12} ml^2 \quad \& \quad I_{Az'} = \frac{1}{3} ml^2$$



**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

37



## 1.b Mô men quán tính khối của một số vật rắn đồng chất

b) Vành tròn mảnh đồng chất ( $m, r$ )

$$I_{Cz} = \int \rho^2 dm = \int r^2 dm = mr^2 = I_O$$

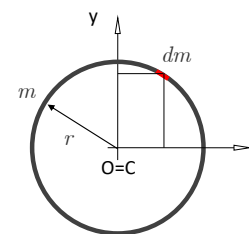
Để tính  $I_x$  và  $I_y$ , chú ý đến  $I_O$  và  $I_x = I_y$

$$I_O = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z) = I_z \quad \boxed{I_x = I_y}$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} mr^2, \quad I_O = I_{Cz} = mr^2$$

Tương tự, đối với tròn rỗng đồng chất ( $m, r$ )

$$I_{Cz} = mr^2$$



**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

38



## 1.b Mô men quán tính khối của một số vật rắn đồng chất

c) Đối với đĩa tròn đặc đồng chất ( $m, r$ )

Chọn phân tố dạng vành ( $dm, \rho, d\rho$ ). Mô men quán tính khối của phân tố này đối với trục  $Cz$  như đã tính trên là:

$$dI_{Cz} = \rho^2 dm = dI_O \quad dm = (m/\pi r^2) 2\pi \rho d\rho$$

$$\rho : 0 \rightarrow r$$

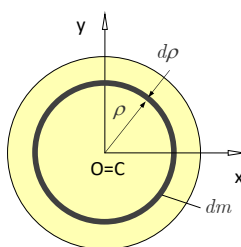
$$I_{Cz} = \frac{m}{\pi r^2} 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{2m}{4r^2} \rho^4 \Big|_0^r = \frac{1}{2} mr^2 = I_O$$

Để tính  $I_x$  và  $I_y$ , chú ý đến  $I_O$  và  $I_x = I_y$

$$I_O = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z) = I_z \quad \boxed{I_x = I_y = \frac{1}{4} mr^2, \quad I_{Cz} = \frac{1}{2} mr^2}$$

Tương tự, đối với khối trụ tròn đặc đồng chất ( $m, r$ )

$$I_{Cz} = \frac{1}{2} mr^2$$



**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

39



## 1.b Mô men quán tính khối của một số vật rắn đồng chất

Đối với vật dạng vành khăn tròn đồng chất ( $m, r, R$ )

Chọn phân tố khối lượng ( $dm, \rho, d\rho, \varphi, d\varphi$ ). Mô men quán tính khối của phân tố này đối với trục  $Cz$ :

$$dI_{Cz} = \rho^2 dm = dI_O$$

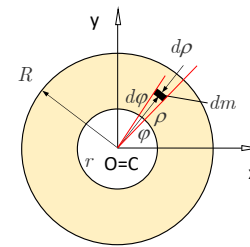
$$dm = \frac{m dA}{\pi(R^2 - r^2)}, \quad dA = \rho d\varphi d\rho$$

$$\rho : r \rightarrow R, \quad \varphi : 0 \rightarrow 2\pi$$

$$I_{Cz} = \frac{m}{\pi(R^2 - r^2)} \int_0^{2\pi} \int_r^R \rho^3 d\rho d\varphi = \frac{2\pi m}{\pi(R^2 - r^2)} \frac{\rho^4}{4} \Big|_r^R = \frac{m(R^4 - r^4)}{2(R^2 - r^2)} = \frac{m(R^2 + r^2)}{2}$$

Tương tự, đối với khối trụ tròn rỗng đồng chất ( $m, r, R$ )

$$I_{Cz} = \frac{m(R^2 + r^2)}{2}$$



**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

40

## 1.c Liên hệ mô men quán tính khối đối với các trục song song

### Định lý Huyghens-Steiner

$$I_z = I_{Cz'} + md^2 \quad C\text{-là khối tâm vật}$$

Chứng minh

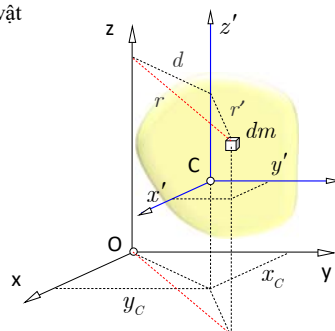
$$I_z = \int r^2 dm, \quad I_{Cz'} = \int r'^2 dm$$

Từ hình vẽ ta có

$$\begin{aligned} x &= x_C + x', & y &= y_C + y', & r'^2 &= x'^2 + y'^2 \\ r^2 &= x^2 + y^2 = x_C^2 + y_C^2 + x'^2 + y'^2 + 2(x_C x' + y_C y') \\ &= r'^2 + d^2 + 2(x_C x' + y_C y') \end{aligned}$$

$$\text{Do } C\text{-là khối tâm vật} \quad \int x' dm = 0, \quad \int y' dm = 0$$

$$I_z = \int r^2 dm = \int [r'^2 + d^2 + 2(x_C x' + y_C y')] dm = I_{z'} + md^2.$$



HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

41

## 2. Thiết lập quan hệ lực – gia tốc cho vật rắn chuyển động phẳng

Xét tấm phẳng có khối lượng m, khối tâm C, mô men quán tính khối đối với trục qua C  $\perp$  tấm,  $I_C$  chuyển động phẳng dưới tác dụng của các lực  $\vec{F}_k$  và các ngẫu lực  $M_j$ .

Gia tốc khối tâm, vận tốc góc và gia tốc góc của tấm:

$$\vec{a}_C, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$$

Tách xét phân tố khối lượng dm, có gia tốc  $\vec{a}$  chịu tác dụng của các ngoại lực  $d\vec{F}^e$  và nội lực  $d\vec{F}^i$ .

Áp dụng định luật 2 Newton đối với phân tố này, ta có:

$$\vec{a} dm = d\vec{F}^e + d\vec{F}^i \quad (1)$$

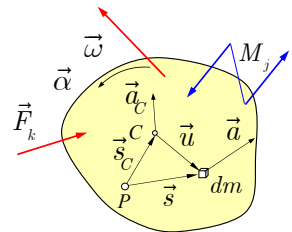
$$\int \vec{a} dm = \int d\vec{F}^e + \int d\vec{F}^i \Rightarrow m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k \quad (2)$$

$$\Rightarrow \vec{s} \times \vec{a} dm = \vec{s} \times (d\vec{F}^e + d\vec{F}^i) \quad (3)$$

$$\text{Động học} \quad \vec{a} = \vec{a}_p + \vec{\alpha} \times \vec{s} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{s}), \quad \vec{\alpha} = \alpha \vec{k}, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{k} \quad \vec{k}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{\alpha} \times \vec{s} - \omega^2 \vec{s}$$

$$\vec{s} \times [\vec{a}_p + \vec{\alpha} \times \vec{s} - \omega^2 \vec{s}] dm = \vec{s} \times d\vec{F}^e + \vec{s} \times d\vec{F}^i \quad (4)$$



HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

42

## 2. Thiết lập quan hệ lực – gia tốc cho vật rắn chuyển động phẳng

$$\vec{s} \times [\vec{a}_p + \vec{\alpha} \times \vec{s} - \omega^2 \vec{s}] dm = \vec{s} \times d\vec{F}^e + \vec{s} \times d\vec{F}^i \quad (4)$$

Thực hiện tích phân hai vế trên toàn bộ vật, ta nhận được

$$\int \vec{s} \times [\vec{a}_p + \vec{\alpha} \times \vec{s} - \omega^2 \vec{s}] dm = \int \vec{s} \times d\vec{F}^e + \int \vec{s} \times d\vec{F}^i$$

Lưu ý đến các kết quả

$$\int \vec{s} \times d\vec{F}^i = 0$$

$$\int \vec{s} \times d\vec{F}^e = \left( \sum \bar{m}_p(\vec{F}_k) + \sum M_j \right) \vec{k} =: M_p \vec{k}$$

$$\int \vec{s} \times \vec{a}_p dm = \int \vec{s} dm \times \vec{a}_p = m \vec{s}_C \times \vec{a}_p$$

$$\int \vec{s} \times [\alpha \vec{k} \times \vec{s}] dm = \left( \int s^2 dm \right) \alpha \vec{k} = I_p \alpha \vec{k}$$

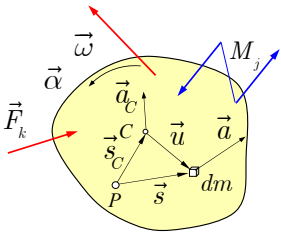
$$\int \vec{s} \times [\omega^2 \vec{s}] dm = 0$$

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k \quad (2)$$

$$I_p \alpha \vec{k} + m \vec{s}_C \times \vec{a}_p = M_p \vec{k} \quad (5)$$

Nếu lấy P = C thì  $\vec{s}_C = 0$

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k, \quad I_C \alpha \vec{k} = M_C \vec{k}$$



HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

43

## 2.1 Phương trình chuyển động vật rắn tịnh tiến

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k, \quad I_C \alpha \vec{k} = M_C \vec{k}$$

Phương trình chuyển động vật rắn tịnh tiến

$$\vec{\omega} = 0, \quad \vec{\alpha} = 0$$

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k, \quad M_C = \sum M_j + \sum \bar{m}(\vec{F}_k) = 0$$

Các PTVP CĐ cho vật tịnh tiến có thể được viết ở dạng tọa độ Đề-các Oxy hoặc ở dạng tọa độ tự nhiên  $C_{tnb}$  như sau

$$ma_{C_x} = m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}$$

$$ma_{C_y} = m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}$$

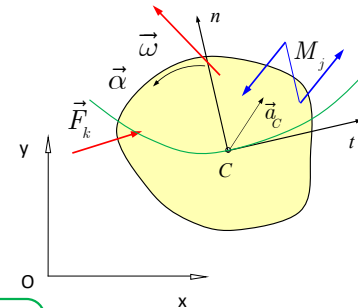
$$0 = \sum M_j + \sum \bar{m}_C(\vec{F}_k)$$

$$ma_{C_t} = m\ddot{s} = \sum F_{kt}$$

$$ma_{C_n} = m\dot{s}^2 / \rho = \sum F_{kn}$$

$$0 = \sum M_j + \sum \bar{m}_C(\vec{F}_k)$$

$\rho$  - là bán kính cong quỹ đạo



HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

44

## 2.2 Phương trình chuyển động vật rắn quay quanh trục cố định

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k \quad (2)$$

$$I_P \alpha \vec{k} + m\vec{s}_C \times \vec{a}_P = M_P \vec{k} \quad (5)$$

Chọn điểm P = O là giao của trục quay và tấm  $\vec{a}_P = \vec{0}$

$$(2) \Rightarrow m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k + \vec{R}_O,$$

$$(5) \Rightarrow I_P \alpha \vec{k} = M_P \vec{k} = [\sum M_j + \sum \bar{m}_p(\vec{F}_k)] \vec{k},$$

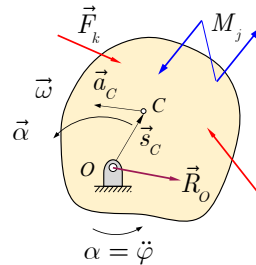
Phương trình thứ nhất sử dụng để xác định phản lực tại ổ trục O.

Phương trình thứ hai cho ta PTVP CĐ quay quanh trục cố định Oz:

$$I_{Oz} \ddot{\varphi} = M_{Oz} = \sum M_j + \sum m_{Oz}(\vec{F}_k)$$

$$I_{Oz} \ddot{\varphi} = M_{Oz}(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0,$$



## 2.3 Phương trình chuyển động vật rắn chuyển động song phẳng

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k,$$

$$I_C \alpha = M_C$$

$$\vec{a}_C = \ddot{x}_C \vec{e}_x + \ddot{y}_C \vec{e}_y$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C^t + \vec{a}_C^n = \ddot{s} \vec{e}_t + (\dot{s}^2 / \rho) \vec{e}_n$$

$$\alpha = \ddot{\varphi}$$

Các PTVP CĐ cho vật (tấm) CĐSP có thể được viết ở dạng tọa độ Đề-các Oxy hoặc ở dạng tọa độ tự nhiên  $C_{tnb}$  như sau

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{k,x},$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{k,y},$$

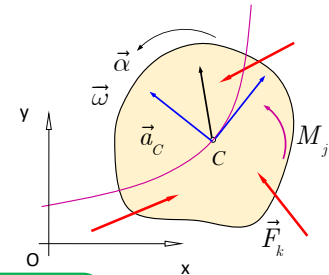
$$I_C \ddot{\varphi} = \sum M_j + \sum \bar{m}_C(\vec{F}_k)$$

$$m\ddot{s} = \sum F_k^t,$$

$$m\dot{s}^2 / \rho = \sum F_k^n,$$

$$I_C \ddot{\varphi} = \sum M_j + \sum \bar{m}_C(\vec{F}_k),$$

$\rho$  - là bán kính cong quỹ đạo



## 3. Các ví dụ áp dụng

**Ví dụ 1.** Thanh đồng chất BD khối lượng 100 kg chiều dài 0.8 m được treo bằng hai thanh không khối lượng cùng chiều dài,  $r = AB = CD = 0.5$  m. Xác định lực trong các thanh treo nếu tại thời điểm khảo sát  $\theta = 30^\circ$  và các thanh treo có vận tốc góc  $\omega = 6$  rad/s. HD giải

Do trọng tâm G chuyển động trên đường tròn có tâm là điểm giữa AC, nên gia tốc có hai thành

$$\vec{a}_G = \vec{a}_G^t + \vec{a}_G^n$$

$$a_G^n = \omega^2 r = 18 \text{ m/s}^2$$

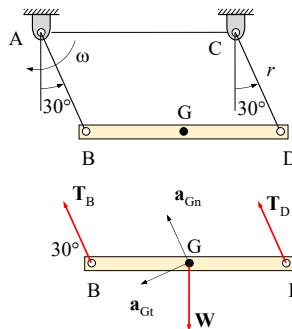
Vẽ sơ đồ giải phóng liên kết.

Viết các phương trình quan hệ lực – gia tốc

$$ma_G^n = \sum F_{k,n} \Rightarrow 100 \text{ kg} (18 \text{ m/s}^2) = T_B + T_D - 981 \cos 30^\circ \text{ N} \quad (1)$$

$$ma_G^t = \sum F_{k,t} \Rightarrow 100 \text{ kg} a_G^t = 981 \sin 30^\circ \quad (2)$$

$$0 = \sum m_G(\vec{F}_k) \Rightarrow 0 = -T_B \cos 30^\circ (0.4 \text{ m}) + T_D \cos 30^\circ (0.4 \text{ m}) = 0 \quad (3)$$



Giải hệ được

$$T_B = T_D = 1.32 \text{ kN}$$

$$(a_G)_t = 4.90 \text{ m/s}^2$$

## 3. Các ví dụ áp dụng

**Ví dụ 2.** Đĩa đồng chất khối lượng  $m = 30$  kg, bán kính  $r = 0.2$  m quay quanh trục ngang qua tâm đĩa từ trạng thái đứng yên. Xác định số vòng quay được đến khi tốc độ quay đạt được  $\omega = 20$  rad/s. Phản lực liên kết tại ổ trục là bao nhiêu?. Biết rằng đĩa chịu tác dụng của mô men  $M = 5$  Nm và lực kéo dây  $F = 10$  N. Bỏ qua khối lượng dây và ma sát ổ trục.

**Lời giải**

Sơ đồ giải phóng liên kết

Đĩa chịu tác dụng của các lực :

trọng lực  $W = mg = 294.3$  N,

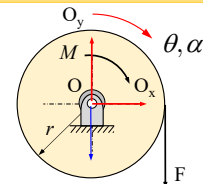
lực kéo dây  $F = 10$  N,

mô men  $M = 5$  Nm và các phản lực ổ trục chưa biết  $O_x$  và  $O_y$ .

Đĩa quay thuận chiều đồng hồ với gia tốc góc  $\alpha$ .

Mô men quán tính khối của đĩa đối với trục quay O:

$$I_{Oz} = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} (30 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2 = 0.6 \text{ kgm}^2$$



Đĩa quay quanh trục cố định

Phương trình quan hệ lực - gia tốc

$$ma_{Ox} = O_x$$

$$ma_{Oy} = O_y - W - F$$

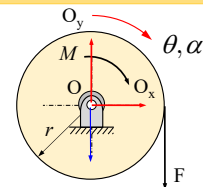
$$I_{Oz} \alpha = M + rF$$

Ba ẩn cần tìm:  $\alpha$ ,  $O_x$  và  $O_y$ .

### 3. Các ví dụ áp dụng

Phương trình quan hệ lực - gia tốc

$$\begin{aligned} ma_{O_x} &= O_x \Rightarrow O_x = ma_{O_x} = 0 \\ ma_{O_y} &= O_y - W - F \Rightarrow O_y = ma_{O_y} + W + F = 304.3 \text{ N} \\ I_{O_z} \alpha &= M + rF \Rightarrow \alpha = I_O^{-1}(M + rF) = 11.7 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$



Đĩa quay quanh trục cố định

#### Động học

Do  $\alpha$  là hằng số và thuận chiều đồng hồ, số radian đĩa quay được đến khi đạt vận tốc góc 20 rad/s được tính theo

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \alpha d\theta = \omega d\omega, \quad \alpha = \text{const} \\ \Rightarrow \alpha(\theta - \theta_0) &= \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) \Rightarrow \theta = \theta_0 + \frac{1}{2\alpha}(\omega^2 - \omega_0^2), \quad \theta_0 = 0, \omega_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2\alpha}(\omega^2 - \omega_0^2) = 0 + \frac{1}{2 \times 11.7}(20^2 - 0) = 17.1 \text{ rad} \quad (= 2.72 \text{ vòng})$$

### 3. Các ví dụ áp dụng - Đĩa lăn trên đường ngang

Xét đĩa đồng chất khối lượng  $m$  bán kính  $r$  lăn trên đường ngang dưới tác dụng của lực ngang  $P$ . Các lực tác dụng lên đĩa bao gồm: lực  $P$ , trọng lượng  $W$  và phản lực liên kết. Lực tại chỗ tiếp xúc mặt đường gồm hai thành phần pháp tuyến  $N$  và tiếp tuyến  $F$ .

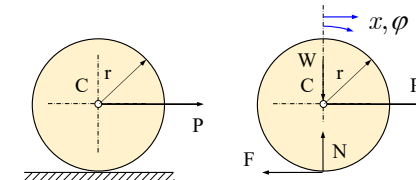
Các phương trình vi phân chuyển động được viết:

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad ma_C &= P - F & (1) \\ \uparrow \quad m \cdot 0 &= N - W & (2) \\ \oplus \quad I_C \alpha &= rF & (3) \end{aligned}$$

Trong hệ ba phương trình trên có bốn ẩn  $a_C, \alpha, N, F$   
Do đó ta cần một phương trình thứ tư.

Nếu ma sát đủ lớn làm đĩa lăn không trượt:

$$v_C = r\omega \Rightarrow a_C = r\alpha \quad (4)$$



Ma sát nhỏ đĩa lăn có trượt  $a_C$  và  $\alpha$  là độc lập, phương trình thứ tư sẽ là

$$F = \mu_k N \quad (4)$$

$\mu_k$  - hệ số ma sát trượt động

## ĐỘNG LỰC HỌC HỆ VẬT RẮN PHẪNG: Lực – gia tốc

1. Phương pháp tách vật. Hướng dẫn áp dụng
2. Các ví dụ áp dụng
  - Hệ 01 bậc tự do
  - Hệ 02 bậc tự do – Con lắc elliptic
  - Hệ 02 bậc tự do – Tay máy phẳng 2 khâu



## 1. Phương pháp tách vật. Hướng dẫn áp dụng

Từ các phương trình vi phân chuyển động của **vật rắn tịnh tiến**, quay quanh trục cố định và **song phẳng**, ta có thể thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho **hệ vật rắn phẳng** bằng **phương pháp tách vật**. Các bước thực hiện theo phương pháp này như sau:

1. Xác định số bậc tự do  $f$  của hệ.
2. Định nghĩa  $n$  tọa độ suy rộng mô tả chuyển động của hệ. Số các tọa độ sử dụng có thể nhiều hơn số bậc tự do  $f$ , ( $f \leq n$ ).
3. Trong trường hợp số tọa độ suy rộng nhiều hơn số bậc tự do, cần xác định  $c = n - f$  phương trình ràng buộc hay các phương trình liên kết.
4. Sử dụng nguyên lý cắt tách các vật thể trong hệ, đặt các lực tác dụng và các phản lực liên kết lên các vật, lưu ý rằng các lực ma sát (nếu có) sẽ ngược chiều chuyển động hoặc xu hướng chuyển động của điểm đặt lực.
5. Viết phương trình quan hệ lực – gia tốc (pt vi phân chuyển động) cho các vật.
6. Xử lý các điều kiện liên kết, khử các lực liên kết, đưa phương trình về dạng tối thiểu với số phương trình bằng số bậc tự do.
7. Giải phương trình vi phân chuyển động xác định gia tốc.
8. Tích phân phương trình vi phân chuyển động nếu cần.

HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

53



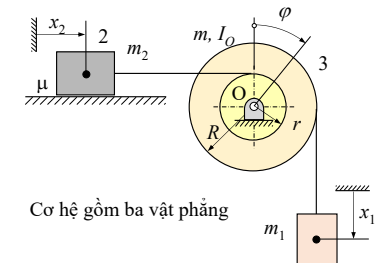
## 2. Các ví dụ áp dụng

**Ví dụ 1.** Hệ một bậc tự do

Cho hệ gồm ba vật nối với nhau và chuyển động trong mặt phẳng đứng. Biết các thông số hệ

$$m_1, m_2, m, I_O, r, R, \mu$$

Các dây không dẫn và luôn căng. Xác định gia tốc của vật 1 và 2.



Cơ hệ gồm ba vật phẳng

**Lời giải**

Hệ gồm ba vật chuyển động phẳng: vật 1 và 2 tịnh tiến, trụ hai tầng quay quanh trục cố định.

1. Chọn các tọa độ suy rộng mô tả chuyển động của ba vật là

$$x_1, x_2, \varphi \Rightarrow n = 3$$

2. Tuy nhiên, hệ chỉ có một bậc tự do,  $f = 1$ .

3. Số phương trình liên kết,

$$z = n - f = 3 - 1 = 2$$

Các liên kết được suy ra từ điều kiện dây không dẫn:

$$x_1 = R\varphi, \quad x_2 = r\varphi \Rightarrow x_2 = x_1 r / R$$

Từ đây ta suy ra được các ràng buộc về gia tốc

$$\ddot{x}_1 = R\ddot{\varphi}, \quad \ddot{x}_2 = r\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 r / R \quad (1)$$

HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

54



## 2. Các ví dụ áp dụng

4. Sử dụng phương pháp tách vật ta nhận được sơ đồ lực đặt lên các vật như trên hình vẽ.

5. Viết quan hệ lực – gia tốc cho các vật ta nhận được:

Vật khối lượng  $m_1$ :  $\downarrow: m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T_1 \quad (2)$

Trụ hai tầng:  $I_O \ddot{\varphi} = T_1 R - T_2 r \quad (3)$

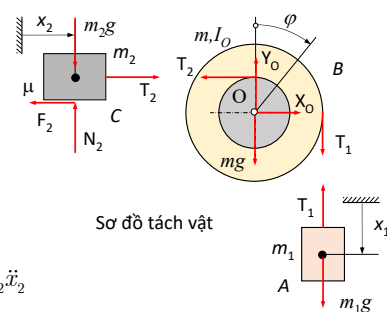
Vật khối lượng  $m_2$ :  $\uparrow: N - m_2 g = 0 \Rightarrow N = m_2 g$   
 $\rightarrow: m_2 \ddot{x}_2 = T_2 - F \Rightarrow T_2 = F + m_2 \ddot{x}_2$

Theo định luật Coulomb về ma sát trượt động, ta có được

$$F = \mu N = \mu m_2 g$$

Và ta nhận được

$$T_2 = \mu m_2 g + m_2 \ddot{x}_2 \quad (4)$$



Sơ đồ tách vật

HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

55



## 2. Các ví dụ áp dụng

$$\ddot{x}_1 = R\ddot{\varphi}, \quad \ddot{x}_2 = r\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 r / R \quad (1)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T_1 \quad (2)$$

$$I_O \ddot{\varphi} = T_1 R - T_2 r \quad (3)$$

$$T_2 = \mu m_2 g + m_2 \ddot{x}_2 \quad (4)$$

6. Giải hệ (2,3,4) với chú ý đến (1), ta nhận

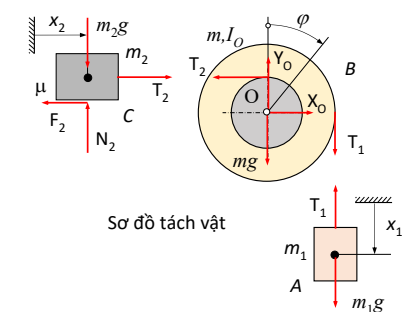
$$(m_1 + m_2 r^2 / R^2 + I_O / R^2) \ddot{x}_1 = m_1 g - \mu m_2 g r / R$$

7. Từ đây ta tính được gia tốc của vật A và C

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 g - \mu m_2 g r / R}{m_1 + m_2 r^2 / R^2 + I_O / R^2},$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 \frac{r}{R} = \frac{m_1 g - \mu m_2 g r / R}{m_1 + m_2 r^2 / R^2 + I_O / R^2} \cdot \frac{r}{R}$$

Biết gia tốc suy ra lực căng dây và phản lực ổ đỡ:  
 $T_1, T_2, X_O, Y_O.$



Sơ đồ tách vật

HUST

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

56

## 2. Các ví dụ áp dụng

**Ví dụ 2.** Vật A có khối lượng  $m_1$  được nối với giá cố định nhờ lò xo có độ cứng  $k$ , có thể trượt không ma sát dọc sàn ngang. Quả cầu nhỏ B khối lượng  $m_2$  được treo vào thanh mảnh và không khối lượng (hoặc dây nhẹ không dẫn), nối bản lề trụ với A. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

### Lời giải

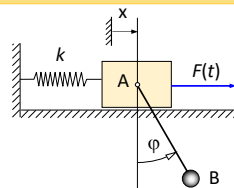
Cơ hệ gồm hai vật: Vật A chuyển động tịnh tiến và tải trọng coi như chất điểm.

Hệ hai bậc tự do, chọn các tọa độ suy rộng:  $x$  là vị trí của vật A,  $\varphi$  là góc lệch của dây AB so với phương thẳng đứng.

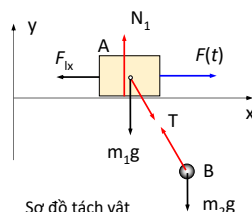
Thực hiện tách vật và đặt các lực hoạt động và lực liên kết như hình vẽ.

Phản lực  $N$  của nền tác dụng lên vật A.

Lực  $T$  tác dụng giữa vật A và chất điểm B (lực căng dây hoặc liên kết thanh).



Con lắc Elliptic 2 bậc tự do



Sơ đồ tách vật

HUST

Department of Applied Mechanics

57

## 2. Các ví dụ áp dụng

Động học: xác định gia tốc vật A và gia tốc chất điểm B theo tọa độ suy rộng

$$\begin{aligned} x_A &= x + \text{const}, & \dot{x}_A &= \dot{x}, & \ddot{x}_A &= \ddot{x} \\ x_B &= x + l \sin \varphi, & \dot{x}_B &= \dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi, & \ddot{x}_B &= \ddot{x} + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ y_B &= -l \cos \varphi, & \dot{y}_B &= l\dot{\varphi} \sin \varphi, & \ddot{y}_B &= l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \end{aligned}$$

Viết phương trình vi phân chuyển động cho từng vật:

$$m_1 \ddot{x}_A = F(t) - F_{kx} + T \sin \varphi, \quad (1)$$

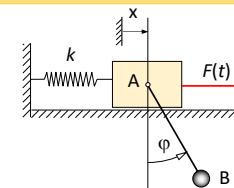
$$m_2 \ddot{x}_B = -T \sin \varphi \quad (2)$$

$$m_2 \ddot{y}_B = T \cos \varphi - m_2 g \quad (3)$$

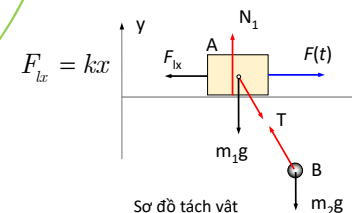
Thực hiện khử các lực liên kết:

Cộng hai phương trình (1) và (2) ta được

$$m_1 \ddot{x}_A + m_2 \ddot{x}_B = F(t) - kx \quad (4)$$



Con lắc Elliptic 2 bậc tự do



Sơ đồ tách vật

HUST

Department of Applied Mechanics

58

## 2. Các ví dụ áp dụng

$$m_2 \ddot{x}_B = -T \sin \varphi \quad (2)$$

$$m_2 \ddot{y}_B = T \cos \varphi - m_2 g \quad (3)$$

Khử  $T$ : [phương trình (2)  $\times \cos \varphi$ ] cộng [phương trình (3)  $\times \sin \varphi$ ] ta nhận được

$$m_2 \ddot{x}_B \cos \varphi + m_2 \ddot{y}_B \sin \varphi = -m_2 g \sin \varphi \quad (5)$$

Thay các quan hệ động học vào ta nhận được PTVP CĐ của hệ

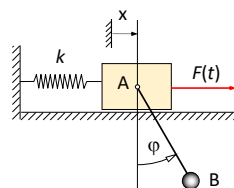
$$m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = F(t) - kx$$

$$m_2 (\ddot{x} \cos \varphi + l\ddot{\varphi}) = -m_2 g \sin \varphi$$

Hay

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \cos \varphi \ddot{\varphi} - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + kx = F(t)$$

$$m_2 l \cos \varphi \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \sin \varphi = 0.$$



Con lắc Elliptic 2 bậc tự do

HUST

Department of Applied Mechanics

59

## 2. Các ví dụ áp dụng

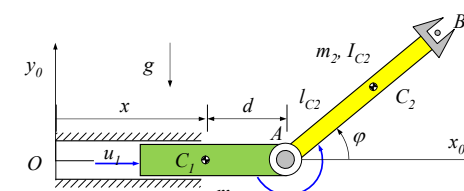
**Ví dụ 3.** Mô hình cơ học của tay máy phẳng hai bậc tự do gồm khâu 1 tịnh tiến theo phương ngang, khâu hai nối với khâu 1 bằng khớp quay A – trục khớp nằm ngang, khoảng cách  $C_1A = d$ . Khâu 1 có khối lượng  $m_1$  trượt không ma sát trên nền ngang dưới tác dụng của lực ngang  $u_1$ . Khâu 2 có khối lượng  $m_2$ , khối tâm  $C_2$ , khoảng cách  $AC_2 = l_{C2}$ , mômen quán tính khối đối với trục ngang qua  $C_2$  là  $I_{C2}$ . Tại khớp quay A có mômen (nội lực)  $u_2$  tác dụng. Chọn tọa độ suy rộng cho tay máy là  $x$  và  $\varphi$ . Sử dụng phương pháp tách vật để thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho tay máy.

### Lời giải

Cơ hệ gồm hai vật: vật 1 (khâu 1) chuyển động tịnh tiến theo phương ngang, vật 2 (khâu 2) chuyển động song phẳng.

Hệ hai bậc tự do,  $f = 2$

Chọn các tọa độ suy rộng:  $x$  là vị trí của vật 1,  $\varphi$  là góc lệch của vật 2 so với phương ngang.



Tay máy 2 bậc tự do

HUST

Department of Applied Mechanics

60





## 2. Các ví dụ áp dụng

Thực hiện tách vật và đặt các lực hoạt động và lực liên kết như hình vẽ.

Viết PT VPCĐ cho từng vật:

Vật 1 tịnh tiến

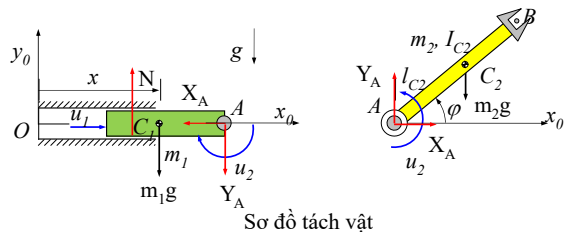
$$\rightarrow m_1 \ddot{x}_{C1} = u_1 - X_A \quad (1)$$

Vật 2 chuyển động song phẳng

$$\rightarrow m_2 \ddot{x}_{C2} = X_A \quad (2)$$

$$\uparrow m_2 \ddot{y}_{C2} = Y_A - m_2 g \quad (3)$$

$$\odot I_{C2} \ddot{\varphi} = u_2 + X_A l_{C2} \sin \varphi - Y_A l_{C2} \cos \varphi \quad (4)$$



Sơ đồ tách vật

Cộng hai phương trình (1) và (2) ta được

$$m_1 \ddot{x}_{C1} + m_2 \ddot{x}_{C2} = u_1 \quad (5)$$

[PT (2) x -l<sub>C2</sub>sinφ] + [PT (3) x l<sub>C2</sub>cosφ],  
sau đó cộng với (4) ta được:

$$I_{C2} \ddot{\varphi} - m_2 \ddot{x}_{C2} l_{C2} \sin \varphi + m_2 \ddot{y}_{C2} l_{C2} \cos \varphi = u_2 - m_2 g l_{C2} \cos \varphi \quad (6)$$

**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

61



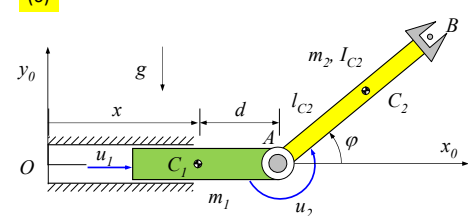
## 2. Các ví dụ áp dụng

$$m_1 \ddot{x}_{C1} + m_2 \ddot{x}_{C2} = u_1 \quad (5)$$

$$I_{C2} \ddot{\varphi} - m_2 \ddot{x}_{C2} l_{C2} \sin \varphi + m_2 \ddot{y}_{C2} l_{C2} \cos \varphi = u_2 - m_2 g l_{C2} \cos \varphi \quad (6)$$

Động học

$$\begin{aligned} x_{C1} &= x, & \dot{x}_{C1} &= \dot{x}, & \ddot{x}_{C1} &= \ddot{x} \\ x_{C2} &= x + d + l_{C2} \cos \varphi, & \dot{x}_{C2} &= \dot{x} - l_{C2} \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \ddot{x}_{C2} &= \ddot{x} - l_{C2} \ddot{\varphi} \sin \varphi - l_{C2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ y_{C2} &= l_{C2} \sin \varphi, & \dot{y}_{C2} &= l_{C2} \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \ddot{y}_{C2} &= l_{C2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - l_{C2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{aligned}$$



Thay các quan hệ động học vào (5) và (6) ta nhận được PTVPCĐ của hệ

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - l_{C2} \ddot{\varphi} \sin \varphi - l_{C2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) &= u_1 \\ (I_{C2} + m_2 l_{C2}^2) \ddot{\varphi} - m_2 l_{C2} \sin \varphi \ddot{x} &= u_2 - m_2 g l_{C2} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 l_{C2} \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_2 l_{C2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= u_1 \\ -m_2 l_{C2} \sin \varphi \ddot{x} + (I_{C2} + m_2 l_{C2}^2) \ddot{\varphi} + m_2 g l_{C2} \cos \varphi &= u_2 \end{aligned}$$

**HUST**

Hanoi University of Science and Technology

Department of Applied Mechanics

62