

# 微分几何与经典力学初步

A First Step on Differential Geometry and Classical Mechanics

知乎: 埃格先生

2021 年 10 月 26 日



# 序言



# 目录

<b>第一部分 预备知识</b>	<b>1</b>
<b>第一章 分析力学知识回顾</b>	<b>3</b>
1.1 保守力场下的 Newton 运动定律 . . . . .	3
1.2 理想完整约束、d'Alembert 原理 . . . . .	4
1.3 变分原理与 Lagrange 方程 . . . . .	5
1.4 Hamilton 方程 . . . . .	7
1.5 Liouville 定理 . . . . .	8
1.6 Poisson 括号 . . . . .	10
1.7 正则变换 . . . . .	12
1.8 Hamilton-Jacobi 方程 . . . . .	13
<b>第二章 线性代数</b>	<b>15</b>
2.1 线性空间 . . . . .	16
2.2 线性映射 . . . . .	19
2.3 线性函数、对偶空间 . . . . .	23
2.4 双线性函数 . . . . .	25
2.5 多重线性函数、外代数 . . . . .	29
<b>第三章 点集拓扑</b>	<b>35</b>
3.1 度量空间 . . . . .	35
3.2 拓扑空间 . . . . .	37
3.3 连续映射与同胚 . . . . .	40

3.4	常用点集拓扑性质 . . . . .	41
3.5	流形 . . . . .	42
<b>第四章</b>	<b>微分流形</b>	<b>47</b>
4.1	微分流形 . . . . .	47
4.2	光滑函数、光滑映射 . . . . .	51
4.3	单位分解定理 . . . . .	53
4.4	切向量、余切向量 . . . . .	53
4.5	切丛与余切丛 . . . . .	61
<b>第五章</b>	<b>微分流形上的微积分</b>	<b>65</b>
5.1	切向量场、余切向量场、张量场 . . . . .	65
5.2	单参数微分同胚群、Lie 导数 . . . . .	69
5.3	光滑张量场 . . . . .	72
5.4	微分形式与外微分 . . . . .	74
5.5	最高阶形式的积分、Stokes 定理 . . . . .	79
5.6	流形上的常用微积分公式一览 . . . . .	85
<b>第二部分</b>	<b>微分流形与分析力学</b>	<b>89</b>
<b>第六章</b>	<b>作为流形的位形空间</b>	<b>91</b>
6.1	无约束条件的 $N$ 质点系统 . . . . .	91
6.2	有约束条件的 $N$ 质点系统 . . . . .	97
6.3	虚位移、理想完整约束 . . . . .	102
6.4	广义坐标与广义速度 . . . . .	108
6.5	刚体的位形空间 . . . . .	110
6.6	含时问题 . . . . .	115
<b>第七章</b>	<b>Lagrange 力学</b>	<b>121</b>
<b>第八章</b>	<b>辛流形</b>	<b>123</b>

目录	v
第九章 Hamilton 力学	125
附录 A 一些记号约定	127
A.1 Einstein 求和约定 . . . . .	127





# 第一部分

## 预备知识



# 第一章 分析力学知识回顾

## 1.1 保守力场下的 Newton 运动定律

物体所受的力的大小正比于其质量与加速度的乘积

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}$$

我们先假设质点系统间没有约束，并且不考虑摩擦力、空气阻力这样的耗散力，只有重力、电场力这样的保守力，从而  $\mathbf{F} = -\nabla V$ ，得到方程

$$-\nabla V = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}$$

由此能推出简单的能量守恒定律：

$$\frac{d}{dt} \left( V + \frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2 \right) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla V + m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \left( \nabla V + m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right) = 0,$$

从而

$$E = V + \frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2$$

沿运动轨迹不变。

假设一个系统可以等效为  $n$  个在  $d$  为空间中自由运动的质点的物理模型，这  $n$  个质点的质量分别为  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ，他们之间有一个势能函数

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$$

于是, 对于每一个质点而言, 其运动方程是

$$-\nabla_{\mathbf{x}_i} V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = m \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2}, \quad 1 \leq i \leq n$$

其中  $\nabla_{\mathbf{x}_i}$  表示对  $\mathbf{x}_i$  的  $d$  个分量求梯度, 这样, 我们仍然有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( V + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left| \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right|^2 \right) &= \frac{d}{dt} \left( V + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left| \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right|^2 \right) \\ &= \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left| \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} V + \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \cdot \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \cdot \left( \nabla_{\mathbf{x}_i} V + \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \cdot \mathbf{0} = 0 \end{aligned}$$

也就是说

$$E = V + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left| \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right|^2$$

沿运动轨迹不变。这样, 如果我们把一个星系 (比如太阳系) 中每个星球看作质点 (不考虑自转), 质点间以万有引力相互作用, 并且星系远离其它星系存在, 那么星系整体的引力势能 + 全体行星的动能总是一个常数。我们说这是找到了这个物理系统的一个**守恒量**。粗略来说, 对于一个  $s$  个自由度的系统, 我们如果能找到  $s$  个独立的守恒量, 那么我们可以宣布这个系统的性质是完全清晰的: 在一定的广义坐标选取下, 系统的运动可以拆解为在不同维度上的匀速直线运动或为匀速圆周运动的叠加——这是 Arnold-Liouville 定理所阐述的内容。当然, 守恒量的严格定义和 Arnold-Liouville 定理的严格描述需要用到我们即将学习的微分流形的语言。

## 1.2 理想完整约束、d'Alembert 原理

“理想完整约束力”可以简单概括为“以不做功的方式将运动限制在低维空间中的力”, 这里的“不做功”指的是些力在任何一个可能的运动轨迹的任意时刻的总功率为 0。这类力在经典力学的模型问题中通常表现为各种支持力, 包括硬铰链沿杆方向的推力或拉力、桌面与物块下表面间的支持力、滑

轨与在其上运动的小球的支持力等。这类力会强行把万有引力、电磁力、外加拉力等“主动力”在某一个方向的分量给抵消掉，使得系统可能的位置状态被限制在一个比  $\mathbb{R}^{Nd}$  更低维的超曲面上；但它们却不会像摩擦力、空气阻力一样具有反向于真实运动的分量。

为了刻画这些理想完整约束力“总不做功”的性质，物理学上引入了“虚位移”这一概念，指的是在一定的理想完整约束条件下，系统的所有可能的位移的微元，在微分流形的体系中，虚位移被描述为一个流形上一个点处的切空间。在我们目前的  $n$  质点系统中，我们记第  $i$  个质点的虚位移为  $\delta \mathbf{x}_i$ 。一个力与虚位移的内积称为“虚功”。

理想完整约束、约束力以及虚位移这些概念的描述也需要用微分流形的语言才能进行严格的定义。目前对于我们来说，只需要

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i \equiv 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.1)$$

这一结果，其中  $\mathbf{R}_i$  第  $i$  个质点所受的约束力， $\delta \mathbf{x}_i$  表示虚位移或者运动轨迹的变分。此外，设第  $i$  个质点所受的主动力为  $\mathbf{F}_i = \nabla_{\mathbf{x}_i} V$ ，由 Newton 第二定律，有

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.2)$$

由 (1.1) 和 (1.2) 容易推出

$$\sum_{i=1}^n \left( -m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} + \mathbf{F}_i \right) \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (1.3)$$

这就是 d'Alembert 原理。

### 1.3 变分原理与 Lagrange 方程

如果把  $\mathbf{F}_i = \nabla_{\mathbf{x}_i} V$  代入 (1.3)，则有

$$\sum_{i=1}^n \left( -m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} - \nabla_{\mathbf{x}_i} V \right) \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (1.4)$$

假设  $\delta \mathbf{x}_i(t_0) \equiv \delta \mathbf{x}_i(t_1) \equiv 0$ , 对 (1.4) 进行积分, 有

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( -m \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} - \nabla_{\mathbf{x}_i} V \right) \delta \mathbf{x}_i dt \\
 &= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} \delta \mathbf{x}_i \right) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=1}^n \nabla_{\mathbf{x}_i} V \delta \mathbf{x}_i \right) dt \\
 &= - \left[ \sum_{i=1}^n m_i \frac{d \mathbf{x}_i}{dt} \delta \mathbf{x}_i \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d \mathbf{x}_i}{dt} \frac{d(\delta \mathbf{x}_i)}{dt} dt - \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=1}^n \nabla_{\mathbf{x}_i} V \delta \mathbf{x}_i \right) dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \delta \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left| \frac{d \mathbf{x}_i}{dt} \right|^2 \right) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=1}^n \delta V \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt
 \end{aligned}$$

其中

$$L := T - V = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left| \frac{d \mathbf{x}_i}{dt} \right|^2 - V \quad (1.5)$$

这意味着对于固定了两个端点的运动而言, 会使 Hamilton 作用量

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt$$

取到极值, 这一性质是与坐标选取无关的。对于 (1.5) 而言, 如果我们切换一个坐标系,

$$q_i = q_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n), \quad 1 \leq i \leq s$$

其中  $s$  是自由度的个数。这时我们按照标准的变分原理推导, 都可以得到 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad 1 \leq i \leq s. \quad (1.6)$$

注意上述与坐标可以是任意的.

对于 Lagrange 方程 (1.6), 我们定义广义动量和 Hamilton 量分别为

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1 \leq i \leq s) \quad (1.7)$$

这称谓 Legendre 变换; 相应 Hamilton 量为

$$H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L \quad (1.8)$$

其中  $\dot{q}_i$  要利用 (1.7) 表示为  $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t$  的函数.

如果我们的物理设定是

$$L = T - V$$

其中

- $V$  是  $q_1, \dots, q_s$  的函数
- $T$  是  $q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$  的函数, 并且对于固定的  $q_1, \dots, q_s$  是  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$  的正定二次型

$$T = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s g_{jk}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (1.9)$$

则利用 (1.7) 和 (1.9) 不难得到

$$\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i = 2T \quad (1.10)$$

故

$$H = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V. \quad (1.11)$$

恰为系统的总能量。

## 1.4 Hamilton 方程

对 (1.8) 两端微分, 得到

$$dH = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^s p_i d\dot{q}_i - dL, \quad (1.12)$$

其中  $dH, dL$  可以进一步拆解为

$$\begin{cases} dH = \sum_{i=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ dL = \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{cases} \quad (1.13)$$

将 (1.13) 代入 (1.12) 并利用 (1.7) 有

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (1.14)$$

对比系数得到

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} & (1 \leq i \leq s) \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} & (1 \leq i \leq s) \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{cases} \quad (1.15)$$

有第二个式子的右手侧可以由 (1.6) 改写为

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = -\frac{dp_i}{dt} \quad (1.16)$$

这样, 从 (1.15) 的前两个式子可以得到

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (1.17)$$

即 Hamilton 方程。

Hamilton 力学中每一个状态由广义坐标  $q_1, \dots, q_s$  和广义动量  $p_1, \dots, p_s$  确定, 全体可能的状态构成的空间称为**相空间**, 相空间中的每一个点对应一个坐标  $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ . 在流形语言中, 相空间被定义为一个  $2s$  维辛流形, 其上有一个辛形式

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i.$$

## 1.5 Liouville 定理

本小节我们用“流体”的视角来研究 Hamilton 方程组. Hamilton 方程组 (1.17) 实际上刻画了相空间上的向量场

$$\mathbf{F} = \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_s}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_s} \right) \quad (1.18)$$



的积分曲线. 对于相空间中任意一点  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s, \xi_{s+1}, \dots, \xi_{2s})$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , 记

$$\Phi_\tau \xi = (q_1(\tau), \dots, q_s(\tau), p_1(\tau), \dots, p_s(\tau)) \quad (1.19)$$

其中  $q_1(t), \dots, q_s(t), p_1(t), \dots, p_s(t)$  由 Hamilton 方程初值问题

$$\begin{cases} q_i(0) = \xi_i, p_i(0) = \xi_{s+i} & 1 \leq i \leq s \\ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} & 1 \leq i \leq s \end{cases} \quad (1.20)$$

确定. 对于每一个给定的  $\tau$ ,  $\Phi_\tau$  给出了相空间到自身的一个坐标变换

$$\Phi_\tau : \mathbb{R}^{2s} \rightarrow \mathbb{R}^{2s}.$$

这个变换在一般问题中都有足够阶数的可微性, 从而可以定义其 Jacobi 矩阵  $(J_\tau)_{2s \times 2s}$

$$(J_\tau)_{ij} = \frac{\partial(\Phi_\tau \xi)_i}{\partial \xi_j}.$$

Liouville 定理主要刻画的是相空间中 Hamilton 相流的保体积性. 假设在  $t = 0$  时刻我们在相空间中取定一块区域  $V_0$ , 接下来时间向前推移, 令  $V_0$  里的点按 Hamilton 方程 (1.17) 演化, 到了  $\tau$  时刻,  $V_0$  中的点将会移动到

$$V_\tau = \{\Phi_\tau \xi | \xi \in V_0\}$$

当中. Liouville 定理断言:  $V_\tau$  的体积和  $V_0$  的体积相等, 即

$$\int_{V_\tau} dq_1 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s = \int_{V_0} dq_1 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s. \quad (1.21)$$

事实上, 按照多元积分的坐标变换公式, 我们有

$$\int_{V_\tau} dq_1 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s = \int_{V_0} \det J_\tau dq_1 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s,$$

$\tau = 0$  时  $\Phi_\tau$  是恒同变换, 其 Jacobi 矩阵为单位阵,  $\det J_0 = 1$ . 我们只需要证明 Jacobi 行列式  $\det J_\tau \equiv 1$ . 事实上, 对于由向量场积分曲线决定的坐标变换, 其 Jacobi 行列式的相对变化率有一般的计算公式<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 见 [1] 第 5 ~ 7 页

$$\frac{d(\det J_t)}{dt} = (\det J_t) \nabla \cdot \mathbf{F},$$

从而我们只要证明  $d(\det J)/dt \equiv 0$ , 也就是只需要证明  $\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv 0$  即可 (这实际上就是流体力学中“不可压缩流体”的速度场满足的限制条件). 事实上, 我们有

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \equiv 0,$$

这就证明了 (1.21).

Liouville 定理是 Hamilton 力学中最漂亮的结论之一, 这是在 Lagrange 描述下不易看到的. 值得注意的是 Liouville 定理与 Hamilton 量是否显含时间变量是无关的.

在微分流形的语言下, Liouville 定理会被叙述为辛流形上体积形式随相流运动的不变性.

## 1.6 Poisson 括号

Poisson 括号源自按 Hamilton 方程演化的系统中任一力学量随时间的变化. 这里力学量定义为相空间上定义的函数, 有时可能会多一个时间变量. 设系统按照 Hamilton 方程 (1.17) 进行演化, 则某力学量  $\varphi(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$  随时间的变化率是

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \end{aligned} \tag{1.22}$$

对任意两个力学量定义 **Poisson 括号**

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right)$$

这样, (1.22) 就可以写作

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \{\varphi, H\}, \quad (1.23)$$

甚至 Hamilton 方程 (1.17) 也可以想写成

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}.$$

Poisson 括号的部分性质如下

- $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$ ,  $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ , 这里  $\delta_{ij}$  在  $i = j$  时为 1,  $i \neq j$  时为 0,
- $\{\varphi, \psi\} = -\{\psi, \varphi\}$ ,
- $\{a\varphi_1 + b\varphi_2, \psi\} = a\{\varphi_1, \psi\} + b\{\varphi_2, \psi\}$ ,  $\{\varphi, a\psi_1 + b\psi_2\} = a\{\varphi, \psi_1\} + b\{\varphi, \psi_2\}$ , 这里的  $a, b$  都是常数,
- $\{\varphi, \psi_1\psi_2\} = \psi_1\{\varphi, \psi_2\} + \{\varphi, \psi_1\}\psi_2$ ,
- $\frac{\partial\{\varphi, \psi\}}{\partial t} = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \psi\right\} + \left\{\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}$ ,
- $\{q_i, \varphi\} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}$ ,  $\{p_i, \varphi\} = -\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}$ ,
- Jacobi 恒等式:  $\{\varphi_1, \{\varphi_2, \varphi_3\}\} + \{\varphi_2, \{\varphi_3, \varphi_1\}\} + \{\varphi_3, \{\varphi_1, \varphi_2\}\} = 0$ .

如果一个力学量  $\varphi$  满足

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \{\varphi, H\} = 0$$

则由 (1.23), 它在系统按 Hamilton 方程演化时保持不变, 从而是一个守恒量, 被称为**运动积分**。如果  $\varphi$  和  $\psi$  各自是运动积分, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{\varphi, \psi\}}{\partial t} + \{\{\varphi, \psi\}, H\} &= \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \psi\right\} + \left\{\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right\} + \{\{\varphi, \psi\}, H\} \\ &= \{\{\varphi, H\}, \psi\} + \{\varphi, \{\psi, H\}\} + \{\{\varphi, \psi\}, H\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

从而  $\{\varphi, \psi\}$  也是一个运动积分. 这个运动积分有时可能只常数 0, 这是平凡情况. 如果我们能找到  $s$  个守恒量

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$$

使得它们相互独立且两两 Poisson 括号为 0, 则称此系统为**可积系统**。

Poisson 括号在 Lagrange 的《分析力学》中只是作为一个方便使用的记号, 但后来人们发现其中蕴含着非常多的有用的性质, 它在量子力学中对应着非常重要的算符对易子  $[X, Y] = XY - YX$ . 在流形语言下, Poisson 括号被定义为辛形式作用在两个 Hamilton 向量场上所得的辛流形上的函数。

## 1.7 正则变换

物理学中, 正则变换被解释为“使得变分原理等价的相空间坐标变换”: 假设有一组坐标变换

$$\begin{cases} P_i = P_i(p, q, t) \\ Q_i = Q_i(p, q, t) \end{cases} \quad (1.24)$$

使得变分原理

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) \right) dt = 0 \text{ 和 } \delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - K(p, q, t) \right) dt = 0 \quad (1.25)$$

等价, 则称 (1.24) 为**正则变换**。(1.25) 中两个变分原理等价, 意味着那两个被积函数相差一个时间的全导数

$$\left( \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) \right) - \left( \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - K(p, q, t) \right) = \frac{dU}{dt},$$

写成微分形式即

$$\sum_{i=1}^s p_i dq_i - \sum_{i=1}^s P_i dQ_i + (K - H)dt = dU. \quad (1.26)$$

函数  $U$  称为**生成函数**，它唯一决定了正则变换。对  $U$  的宗量的取法与相对应的坐标变换有如下四种，都可以由 (1.26) 推导出来。

$\begin{cases} U_1 = U_1(q, Q, t) \\ p_\alpha = \frac{\partial U_1}{\partial q_\alpha}, P_\alpha = -\frac{\partial U_1}{\partial Q_\alpha} \\ K - H = \frac{\partial U_1}{\partial t} \end{cases}$	$\begin{cases} U_2 = U_2(p, Q, t) \\ q_\alpha = -\frac{\partial U_2}{\partial p_\alpha}, P_\alpha = -\frac{\partial U_2}{\partial Q_\alpha} \\ K - H = \frac{\partial U_2}{\partial t} \end{cases}$	(1.27)
$\begin{cases} U_3 = U_3(q, P, t) \\ p_\alpha = \frac{\partial U_3}{\partial q_\alpha}, Q_\alpha = \frac{\partial U_3}{\partial P_\alpha} \\ K - H = \frac{\partial U_3}{\partial t} \end{cases}$	$\begin{cases} U_4 = U_4(p, P, t) \\ q_\alpha = -\frac{\partial U_4}{\partial p_\alpha}, Q_\alpha = \frac{\partial U_4}{\partial P_\alpha} \\ K - H = \frac{\partial U_4}{\partial t} \end{cases}$	

四种生成函数形式之间相差 Legendre 变换，没有本质区别（同一个正则变换，若能用  $U_1 \sim U_4$  中的一个生成，也必然能用另外三个生成）。如上定义的正则变换的特点是 Poisson 括号不变：对于任意两个力学量  $\varphi, \psi$ ，有

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Q_i} \frac{\partial \psi}{\partial P_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial P_i} \frac{\partial \psi}{\partial Q_i} \right). \quad (1.28)$$

一个简单的证明思路是的：首先假设  $\varphi$  和  $\psi$  不显含时，假设一个系统的 Hamilton 函数恰为  $\psi$ ，则  $\{\varphi, \psi\}_{pq} = d\varphi/dt$ ，但是  $d\varphi/dt$  只能与假想系统的运动性质相关，不能与变量选择有关，从而从一组正则变量变到另一组正则变量时， $\{\varphi, \psi\}_{PQ} = d\varphi/dt$ ，因此  $\{\varphi, \psi\}_{pq} = \{\varphi, \psi\}_{PQ}$ ；由于正则变换 (1.27) 中，从  $p_\alpha, q_\alpha$  变到  $P_\alpha, Q_\alpha$  的方程中  $t$  只作为参数，所以即使  $\varphi, \psi$  含时，也不影响 Poisson 括号的不变性。

在微分流形语言框架下，正则变换是整个辛流形体系中最为基础的一个概念——辛同胚，即辛流形上保持辛形式不变的微分同胚。

## 1.8 Hamilton-Jacobi 方程

在 (1.27) 的  $U_3$  中，我们希望找到一个变换，使得  $K \equiv 0$ 。这便要求

$$H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) + \frac{\partial U_3}{\partial t} = 0,$$

而对于  $U_3$  型的正则变换有  $p_\alpha = \partial U_3 / \partial q_\alpha$ , 因此

$$H \left( q_1, \dots, q_s, \frac{\partial U_3}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial U_3}{\partial q_s}, t \right) + \frac{\partial U_3}{\partial t} = 0. \quad (1.29)$$

(1.29) 称为 Hamilton Jacobi 方程, 其解记为  $S$ . (1.29) 是  $s+1$  个变量  $q_1, \dots, q_s, t$  的一阶偏微分方程, 将  $S$  视为这  $s+1$  个变量的函数, 我们对其求全导数

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H = L$$

从而  $S = \int L dt$  恰好是 Hamilton 作用量.

## 第二章 线性代数

本章我们过一遍线性代数知识。这里的“线性代数”指的不是一般理工类专业学习的、以矩阵计算为核心的线性代数，而是大多数数学专业《高等代数》课程第二学期的内容：以“线性空间”这一概念为基础，探讨线性映射、线性函数、双线性函数、多线性函数这些数学对象。线性空间，简单来说就是一个定义了加法和数乘运算的空间。相比于初等线性代数讨论的  $\mathbb{R}^n$ ，抽象的线性空间突出了空间中坐标基底选取的灵活性：在  $\mathbb{R}^n$  中，我们会默认

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

为它的基底，但在抽象线性空间的定义下，任何基底都具有相同的地位，没有哪一个更特殊。这一部分知识主要是服务于我们未来在微分流形中对“切空间”的讨论：在微分流形中，我们总是会“任意选取坐标系”，而每一个坐标选取都会相应地诱导出切空间的一组基底，此时就需要我们对线性空间理论有足够的了解。出于我们的需要，我们只讨论实数域  $\mathbb{R}$  上的线性空间。

本章除最后一节外的内容可以参考丘维声老师的《高等代数》下册，或者任何一本《高等代数》教材里面讲解线性空间和线性映射的部分；最后一节内容可参考梅加强老师《流形与几何》中 2.5 节“微分形式”部分（微分形式的内容里有很大一部分是仅用到线性代数、不涉及任何微积分的，这一部分被囊括到了本章）。

## 2.1 线性空间

一个集合  $V$  上若定义了一个加法运算  $V \times V \rightarrow V$  和一个数乘运算  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , 使得如下八条运算定律被满足

$$\begin{array}{ll} \forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta = \beta + \alpha & \forall \alpha \in V, 1\alpha = \alpha \\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in V, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) & \forall \alpha \in V, k, l \in \mathbb{R}, (kl)\alpha = k(l\alpha) \\ \exists 0 \in V, \forall \alpha \in V, \alpha + 0 = \alpha & \forall \alpha \in V, k, l \in \mathbb{R}, (k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha \\ \forall \alpha \in V, \exists \beta \in V, \alpha + \beta = 0 & \forall \alpha, \beta \in V, k \in \mathbb{R}, k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta \end{array} \quad \text{则}$$

称  $V$  是一个**线性空间**。上述性质中, 左列第三条性质中的  $0 \in V$  称为  $V$  中的**零元**, 左列第四条性质中的  $\beta$  称为  $V$  中的**负元**, 一般记作  $-\alpha$ 。可以直接由定义验证, 在一个线性空间中, 零元是唯一的, 每一个元素的负元也是唯一的, 并且对于任意  $\alpha \in V$  及  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k\alpha = 0 \Leftrightarrow k = 0$  或  $\alpha = 0$ ; 此外, 对于每一个线性空间中的向量  $\alpha$ ,  $-\alpha = (-1)\alpha$ 。

设  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  是  $V$  中的一个向量组, 任给  $s$  个实数  $k^1, \dots, k^s$ , 向量  $\sum_{i=1}^s k^i \alpha_i$  称为  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  的一个**线性组合**,  $k^1, \dots, k^s$  称为此线性组合的**系数**; 对于  $\beta \in V$ , 若存在  $c^1, \dots, c^s \in \mathbb{R}$ , 使得  $\beta = \sum_{i=1}^s c^i \alpha_i$ , 则称  $\beta$  可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  **线性表出**; 如果有  $s$  个不全为 0 的实数  $k^1, \dots, k^s$ , 使得  $\sum_{i=1}^s k^i \alpha_i = 0$ , 则称  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  是**线性相关**的, 否则称  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  是**线性无关**的, 线性无关意味着  $\sum_{i=1}^s k^i \alpha_i \Rightarrow k^1 = \dots = k^s = 0$ 。

包含零元的向量组必然是线性相关的; 若单个向量  $\alpha$  组成的向量组是线性相关的, 则  $\alpha = 0$ 。

设  $n \in \mathbb{N}^*$ , 若一个线性空间  $V$  中有一个  $n$  元线性无关组  $e_1, \dots, e_n$  使得  $V$  中的所有向量都可以由  $e_1, \dots, e_n$  线性表出, 则称  $e_1, \dots, e_n$  是  $V$  的一组**基底** (亦简称**基**),  $n$  称为  $V$  的**维数**。

可以验证, 如果线性空间  $V$  以一个  $n$  元向量组  $e_1, \dots, e_n$  为基底, 则: 对于  $m > n$ ,  $V$  中任意一个  $m$  元向量组线性相关; 对于  $m < n$ ,  $V$  中任意一个  $m$  元向量组不可能把  $V$  中的所有向量线性表出, 这说明一个线性空间不可能有两个所含元素个数不同的基底, 从而上述定义中的维数是良定义的。当然, 并不是每一个空间都有一个有限元向量组作为基底, 如果一个线性空间中任何有限元向量组都不构成其基底, 则我们称这个线性空间是**无穷维**的。

不难验证, 对于一个线性空间  $V$ , 对于其任意一组基底  $e_1, \dots, e_n$ ,  $V$  中



的每一个向量  $\alpha$  可唯一地表示为  $e_1, \dots, e_n$  的线性组合. 一般我们把  $\alpha$  由  $e_1, \dots, e_n$  线性表出的系数组成的  $n$  元组  $(a^1, \dots, a^n)^\top$  称为  $\alpha$  在  $e_1, \dots, e_n$  下的坐标, 坐标通常写成列向量的形式.

设  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  与  $\beta_1, \dots, \beta_n$  是  $V$  中的两组基,  $V$  中的矢量  $\alpha$  在此两组基下的表示分别为

$$X = (x^1, \dots, x^n)^\top \quad Y = (y^1, \dots, y^n)^\top \quad (2.1)$$

为了求  $X, Y$  之间的关系, 首先把两组基底之间的关系研究清楚. 事实上, 由于  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  是  $V$  的基, 每一个  $\beta_i$  都可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  唯一地线性表出, 设

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n a^i_j \alpha_i \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

为推导简便, 引入形式写法

$$\sum_{i=1}^n x^i \alpha_i \triangleq (\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

这样 (2.2) 就可以写作

$$(\beta_1 \quad \dots \quad \beta_n) = (\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n) \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}$$

记上式右端的  $n \times n$  矩阵为  $A$ , 则上式可写为

$$(\beta_1 \quad \dots \quad \beta_n) = (\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n) A \quad (2.3)$$

$A$  称为由基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  到基  $\beta_1, \dots, \beta_n$  的**变换矩阵**或**过渡矩阵**.

不难验证如下几个事实

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  到  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  的过渡矩阵是单位矩阵  $I$
- 若基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  到基  $\beta_1, \dots, \beta_n$  的过渡矩阵是  $A$ , 基  $\beta_1, \dots, \beta_n$  到基  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  的过渡矩阵是  $B$ , 则基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  到基  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  的过渡矩阵是  $AB$

- 基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  到基  $\beta_1, \dots, \beta_n$  的过渡矩阵和基  $\beta_1, \dots, \beta_n$  到基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  的过渡矩阵互为逆矩阵, 从而过渡矩阵都是可逆矩阵.

接下来我们来求解 (2.1) 中两组系数之间的关系. 一方面, 我们有

$$\alpha = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

另一方面,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

由于  $\alpha$  在  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  下的表示方式唯一, 故

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

这就是系数变换的公式, 注意对比 (2.3) 和 (2.6) 之间的差异.

设  $V$  是线性空间,  $U \subseteq V$ , 并且  $U$  对于  $V$  中的加法和数乘运算封闭, 从而也形成一个线性空间, 则称  $U$  是  $V$  的一个**线性子空间**, 上下文没有歧义时也简称“**子空间**”.

设  $U$  是有限维线性空间  $V$  的线性子空间, 则必然有  $\dim U \leq \dim V$ , 并且若  $\dim U = \dim V$ , 则  $U = V$ .

设  $U$  是  $n$  维线性空间  $V$  的一个  $s$  维线性子空间, 则  $U$  的基底可以**扩充**为  $V$  的基底, 即: 若  $e_1, \dots, e_s$  是  $U$  的基底, 则存在  $n-s$  个向量  $e_{s+1}, \dots, e_n$ , 使得  $e_1, \dots, e_n$  是  $V$  的基底. 基底扩充是线性空间中各种命题和定理证明的常用手段.

容易验证, 对于一个线性空间  $V$  的任意两个线性子空间  $U$  和  $W$ ,  $U \cap W$  和

$$U + W := \{x + y : x \in U, y \in W\} \quad (2.7)$$

都是  $V$  的线性子空间, 并且可以通过基底扩充的手法, 得到

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W). \quad (2.8)$$

一般地, 如果  $U \cap W = \{0\}$ , 则称  $U + W$  是**直和**, 记作  $U \oplus W$ . 当然, 我们可以直接由 (2.8) 得到

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W, \quad (2.9)$$

而若线性空间  $V$  中有两个子空间  $W, W'$  满足

$$W \oplus W' = V, \quad (2.10)$$

则称  $W$  和  $W'$  互为对方的**补空间**. 利用基底扩充的手法, 可以证明补空间是一定存在的 (但一般不是唯一的)。

设线性空间  $V$  中有向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , 则全体可由这个向量组线性表出的向量

$$\left\{ \sum_{i=1}^s k^i \alpha_i : k^1, \dots, k^s \in \mathbb{R} \right\}$$

是  $V$  的线性子空间, 称为由  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  **生成** (或**张成**) 的**线性子空间**, 记作  $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ , 并称  $\dim \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$  为向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  的秩, 记作  $\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ .

## 2.2 线性映射

设  $A: V \rightarrow V'$  是线性空间之间的映射, 如果  $f$  满足: 对任意  $\alpha, \beta \in V$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , 有

$$A(k\alpha + \beta) = kA(\alpha) + A(\beta), \quad (2.11)$$

则称  $f$  是  $V \rightarrow W$  的**线性映射**.  $V$  到自身的线性映射称为**线性变换**,  $V$  到  $\mathbb{R}$  的线性映射称为**线性函数**. 若  $A$  是  $V \rightarrow V'$  的线性映射, 则

- $A(0) = 0'$  其中  $0'$  是  $V'$  的零元
- $A(-\alpha) = -A(\alpha), \forall \alpha \in V$

- $A(\sum_{i=1}^s k^i \alpha_i) = \sum_{i=1}^s k^i A(\alpha_i)$
- 如果  $V$  是有限维的,  $e_1, \dots, e_n$  是  $V$  的一组基, 则对于  $V$  中的任一矢量  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha^i e_i$ , 有

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha^i A(e_i) \quad (2.12)$$

最后一条性质表明, 只要知道了  $V$  的一个基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , 在  $A$  下的象, 则  $V$  中任一向量在  $A$  下的像就都确定了. 即  $n$  维线性空间  $V$  到  $V'$  的线性映射可以完全有其在  $V$  上的一个基的作用决定.

设  $A, B$  分别是  $U \rightarrow V, V \rightarrow W$  的线性映射, 则  $A \circ B$  也是  $U \rightarrow W$  的线性映射.

设  $A$  是  $U \rightarrow V$  的线性映射, 且是双射, 则  $A^{-1} : V \rightarrow U$  也是线性映射, 此时称  $A$  是  $U \rightarrow V$  的**线性同构**. 若两个线性空间  $U, V$  有线性同构映射, 则称这两个线性空间是**线性同构的**, 记作  $U \cong V$ . 容易证明, 对于两个有限维线性空间  $U$  和  $V$ ,  $U \cong V$  当且仅当  $\dim U = \dim V$ .

对于线性映射, 我们可以定义它们的加法和数乘为他们作为映射的**逐点加法、数乘运算**, 即对于任意两线性空间个  $V$  到  $V'$  的线性映射  $A, B$  和  $c \in R$ , 我们定义

$$\begin{aligned} A + B : V &\rightarrow V' & cA : V &\rightarrow V' \\ \alpha &\mapsto A(\alpha) + B(\alpha), & \alpha &\mapsto cA(\alpha), \end{aligned} \quad (2.13)$$

这样, 全体  $V \rightarrow V'$  的线性映射按逐点加法、数乘构成一个线性空间, 我们记之为  $\text{Hom}(V, V')$ ; 特别地, 还记空间到自身的全体线性变换  $\text{Hom}(V, V)$  为  $\text{End}(V)$ .

线性映射中最重要的概念是其“核”和“像”. 设  $A$  是线性空间  $V$  到线性空间  $V'$  的线性映射, 我们称

$$\text{Ker} A = \{\alpha \in V : A(\alpha) = 0\} \quad (2.14)$$

为映射  $A$  的**核**, 称

$$\text{Im} A = \{A(\alpha) : \alpha \in V\} \quad (2.15)$$

为映射  $A$  的像. 对于一个线性映射  $A: V \rightarrow V'$  而言,  $f$  是单射当且仅当  $\text{Ker}A = \{0\}$ ,  $f$  是满射当且仅当  $\text{Im}A = V'$ , 并且一般地有

$$\dim \text{Ker}A + \dim \text{Im}A = \dim V. \quad (2.16)$$

一般我们称  $\dim \text{Im}A$  为线性映射  $A$  的秩.

接下来我们分别讨论线性映射的矩阵表示. 设  $V$  和  $W$  分别是  $n$  维、 $m$  维线性空间,  $A$  是  $V \rightarrow W$  的线性映射, 在  $V$  中取一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , 在  $W$  中取一组基  $\beta_1, \dots, \beta_m$ , 因为  $A(\alpha_i) \in W$ , 所以  $A(\alpha_i)$  可以由  $W$  的基  $\beta_1, \dots, \beta_m$  唯一地线性表出

$$A(\alpha_j) = \sum_{i=1}^m a^i_j \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.17)$$

或者形式地表示为

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

将 (2.18) 右端的  $m \times n$  矩阵记作  $A_{\alpha;\beta}$ , 称  $M_A$  是线性映射  $A$  在  $V$  的基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  和  $W$  的基  $\beta_1, \dots, \beta_m$  的矩阵.  $A_{\alpha;\beta}$  的第  $j$  列是  $A(\alpha_j)$  在基  $\beta_1, \dots, \beta_m$  下的坐标 ( $j = 1, \dots, n$ ). 因此,  $A_{\alpha;\beta}$  被线性映射  $A$  唯一决定. 事实上, 在这两组即给定的情况下, 每一个  $m \times n$  矩阵  $(a^i_j)_{m \times n}$  也按 (2.18) 的方式唯一决定了一个  $V \rightarrow W$  的线性映射  $A$ , 这样我们就建立了一个  $M_{m \times n}$  (全体  $m \times n$  实矩阵组成的集合) 到  $\text{Hom}(V, W)$  的线性同构, 从而我们有

$$\text{Hom}(V, W) \cong M_{m \times n} \quad (2.19)$$

从而

$$\dim \text{Hom}(V, W) = mn \quad (2.20)$$

事实上, 上述同构不仅保持了线性结构, 还保持了矩阵乘法: 设  $U, V, W$  分别是  $r, s, t$  维线性空间,  $A, B$  分别是  $U \rightarrow V, V \rightarrow W$  的线性映射, 在  $U, V, W$  上分别选择  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$  和  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$  为基底, 则

$$(A \circ B)_{\alpha;\gamma} = A_{\alpha;\beta} B_{\beta;\gamma}. \quad (2.21)$$

接下来我们推导一个线性映射在不同基底下的矩阵之间的关系. 设  $U, V$  分别是  $m, n$  维线性空间,  $A: M \rightarrow N$  是线性映射,  $A$  在  $U$  取基底  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $V$  取基底  $\beta_1, \dots, \beta_n$  时的矩阵是  $A_{\alpha; \beta}$ , 在  $U$  取基底  $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_m$ ,  $V$  取基底  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n$  时的矩阵是  $A_{\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}}$ , 并且  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  到  $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_m$  的转移矩阵是  $S$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_n$  到  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n$  的转移矩阵是  $T$ , 那么我们有

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} A_{\alpha; \beta} \quad (2.22)$$

$$A \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \cdots & \tilde{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 & \cdots & \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} A_{\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}} \quad (2.23)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \cdots & \tilde{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} S \quad (2.24)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 & \cdots & \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} T \quad (2.25)$$

将 (2.24), (2.25) 代入 (2.23) 并令两端同时右乘  $S^{-1}$ , 得到

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} T A_{\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}} S^{-1}, \quad (2.26)$$

对比 (2.26) 和 (2.23), 得到

$$T A_{\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}} S^{-1} = A_{\alpha; \beta}, \quad (2.27)$$

再两边同时左乘  $T^{-1}$ , 右乘  $S$  即可得到

$$A_{\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}} = T^{-1} A_{\alpha; \beta} S. \quad (2.28)$$

(2.27) 和 (2.28) 给出了两组基底下线性映射  $A$  的矩阵之间的转化关系. 由 (2.27) 或 (2.28) 可以看出, 矩阵  $A_{\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}}$  和  $A_{\alpha; \beta}$  是相抵的, 从而具有相同的秩. 由  $A_{\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}}$  和  $A_{\alpha; \beta}$  的任意性知,  $A$  在任意一个基底下的矩阵的秩都是相等的, 事实上, 这个秩就是线性映射  $A$  的秩, 即  $\dim \operatorname{Im} A$ .

一个线性空间  $V$  上的线性变换是它到自身的映射, 所以一个线性变换的矩阵表示只要确定  $V$  上的基底即可.  $A$  在  $V$  的一组基底  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  下的矩阵是  $A_\alpha$ , 在  $V$  的另一组基底  $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$  下的矩阵是  $A_{\tilde{\alpha}}$ , 并且  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  到  $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$  的过渡矩阵是  $S$ , 则用和前面完全类似的推导方式, 容易得到

$$A_{\tilde{\alpha}} = S^{-1} A_\alpha S,$$

即线性变换在  $V$  不同基底选取下的矩阵两两相似, 这意味着它们具有相同的 Jordan 标准型. 出于我们的需要, 这里我们不做展开.

## 2.3 线性函数、对偶空间

设  $V$  是  $n$  维线性空间, 若一个  $V \rightarrow \mathbb{R}$  的映射满足:

$$\begin{cases} f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) & \forall \alpha, \beta \in V \\ f(k\alpha) = kf(\alpha) & \forall \alpha \in V, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

则称  $f$  为  $V$  上的**线性函数**. 由上一节中的讨论, 全体线性函数组成的集合  $\text{Hom}(V, \mathbb{R})$  按照逐点加法和数乘运算构成线性空间, 它称为  $V$  的**对偶空间**, 通常记作  $V^*$ . 由 (2.20), 我们有

$$\dim V^* = \dim \text{Hom}(V, \mathbb{R}) = \dim V \cdot \dim \mathbb{R} = \dim V \cdot 1 = \dim V. \quad (2.29)$$

所以  $V^* \cong V$ . 设  $e_1, \dots, e_n$  是  $V$  的一组基底, 则在  $\text{Hom}(V, \mathbb{R})$  中我们可以取这样一组基底  $e^1, \dots, e^n$ , 使得

$$e^i(e_j) = \delta_j^i := \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (2.30)$$

容易验证,  $e^1, \dots, e^n$  是  $\text{Hom}(V, \mathbb{R})$  中一组线性无关的向量, 称为  $e_1, \dots, e_n$  的**对偶基底**.

接下来我们讨论对偶空间的坐标变换. 假设  $n$  维线性空间  $V$  中有一组基底  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 对应于  $V^*$  上的对偶基底  $e^1, e^2, \dots, e^n$ ; 接下来我们又取了  $V$  上的另一组基底  $f_1, \dots, f_n$ , 对应于  $V^*$  上的对偶基底  $f^1, f^2, \dots, f^n$ , 如果我们已经知道了  $e_1, \dots, e_n$  到  $f_1, \dots, f_n$  的变换

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.31)$$

或者写成矩阵形式

$$(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

那么  $e^1, e^2, \dots, e^n$  到  $f^1, f^2, \dots, f^n$  的变换矩阵是什么呢? 事实上, 我们把 (2.31) 两边同时用  $e^k$  作用, 得到

$$e^k(f_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^j e^k(e_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^j \delta_j^k = a_{ik}^k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.33)$$

从而

$$e^k = \sum_{i=1}^n e^k(f_i) f^i = \sum_{i=1}^n a_{ik}^k f^i, \quad (2.34)$$

其中第一个等号是  $e^k$  在基底  $f^1, \dots, f^n$  下的坐标表达式; (2.34) 写成矩阵形式是

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^n & \cdots & a_{nn}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

或者

$$(f^1, \dots, f^n) = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^n & \cdots & a_{nn}^n \end{pmatrix}^{-\top} (e^1, \dots, e^n) \quad (2.36)$$

其中  $A^{-\top} = (A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{-1}$  代表矩阵  $A$  的逆转置运算 (求逆和转置可交换这一点, 读者可自去验证), 也就是说**对偶基的坐标变换矩阵是原基底坐标变换矩阵的差一个求逆转置运算**.

最后, 我们讨论线性空间之间的线性映射对偶映射. 设  $X, Y$  是两个线性空间,  $f: X \rightarrow Y$  是他们之间的线性映射,  $X^*, Y^*$  分别是  $X, Y$  的对偶空间, 则我们定义  $f$  的**对偶映射**  $f^*$  为:

$$\begin{aligned} f^* : Y^* &\rightarrow X^* \\ \omega &\mapsto \omega(f(\cdot)) \end{aligned} \quad (2.37)$$

也就是说, 对于每一个  $\omega \in Y^*$ ,  $f^*\omega$  是  $X^*$  中的元素, 对于每一个  $x \in X$ , 有<sup>1</sup>

$$f^*(\omega)(x) = \omega(f(x)). \quad (2.38)$$

<sup>1</sup>今后遇到  $f(a)(b)$  这种表达式, 我们默认它等于  $(f(a))(b)$ , 即  $f$  作用到  $a$  上得到一个函数, 这个函数再作用到  $b$  上得到一个值



我们可以看到, 一个线性映射的对偶映射相比于其本身, 定义域和值域“交换”了, 变成把值域的对偶空间里的元素拉回到了定义域的对偶空间里, 所以这个映射也称为  $f$  的**拉回映射**。

对偶映射的矩阵表示也非常简单: 设  $X, Y$  是分别是  $m, n$  维线性空间, 并且在  $X$  取定的基底  $e_1, \dots, e_m$ ,  $Y$  取定基底  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ,  $f: X \rightarrow Y$  是它们之间的线性映射, 并且在上述基底下的矩阵是  $F = \{f_i^j\}_{m \times n}$ , 即

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n f_i^j \varepsilon_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.39)$$

则  $f^*$  在  $X, Y$  分别取相应对偶基底  $e^1, \dots, e^m$  和  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  时的矩阵恰好是  $F^\top$ , 即

$$f^*(\varepsilon^j) = \sum_{i=1}^m f_i^j e^i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.40)$$

## 2.4 双线性函数

设  $V$  是一个线性空间,  $V \times V$  到  $\mathbb{R}$  的映射  $f$  若满足: 对于任意  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha, \beta \in V, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ , 有

- $f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1f(\alpha_1, \beta) + k_2f(\alpha_2, \beta)$
- $f(\alpha, k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = k_1f(\alpha, \beta_1) + k_2f(\alpha, \beta_2)$

则称  $f$  是  $V$  上的一个**双线性函数**. 上述两条表明

$$\begin{cases} \text{固定 } \alpha, \text{ 函数 } \beta \mapsto f(\alpha, \beta) \text{ 是 } V \text{ 上的一个线性函数} \\ \text{固定 } \beta, \text{ 函数 } \alpha \mapsto f(\alpha, \beta) \text{ 是 } V \text{ 上的一个线性函数} \end{cases}$$

我们把线性函数  $\beta \mapsto f(\alpha, \beta)$  记作  $f^\flat(\alpha)$  (“ $\flat$ ” 是五线谱里的降记号, 读作“降”, 英文读作 “flat”, 相比于字母 “b”, “ $\flat$ ” 的底部是尖的), 即

$$f^\flat(\alpha)(\beta) = f(\alpha, \beta), \quad (2.41)$$

这样,  $f^\flat$  就是一个  $V$  到  $V^*$  的线性映射 (回顾:  $V^*$  是  $V$  上全体线性函数组成的线性空间)。

在  $V$  中取一组基  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 任取两个  $V$  中的矢量  $x, y$ , 设

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^n y^i e_i$$

则

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(\sum_{i=1}^n x^i e_i, \sum_{i=1}^n y^i e_i\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x^i y^j f(e_i, e_j) \end{aligned} \quad (2.42)$$

把 (2.42) 中的系数  $f(e_i, e_j)$  作为矩阵  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列元素, 即令

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix},$$

我们称上述  $A$  为双线性函数  $f$  在基  $e_1, \dots, e_n$  下的**度量矩阵**, 它由  $f$  和基  $e_1, \dots, e_n$  唯一决定. 由 (2.42), 我们有

$$f(x, y) = X^\top A Y \quad (2.43)$$

其中  $X = (x^1, \dots, x^n)^\top$ ,  $Y = (y^1, \dots, y^n)^\top$  分别是  $x, y$  在  $e_1, \dots, e_n$  下的坐标. 可以证明, 对于两个  $n \times n$  矩阵, 如果对于任意两个  $n$  维列向量  $X, Y$ , 都有  $X^\top A Y = X^\top B Y$ , 则  $A = B$ , 因此, 在基  $e_1, \dots, e_n$  下, 任何一个  $n \times n$  矩阵也按照 (2.42) 的方式唯一决定了一个线性映射  $f$ .

在  $V$  上任取两组基底  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  和  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , 若  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  到  $\beta_1, \dots, \beta_n$  的过渡矩阵是  $P$ ,  $f$  在  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  下和  $\beta_1, \dots, \beta_n$  下的矩阵分别为  $A, B$ , 则由 (2.43) 不难导出

$$B = P^\top A P.$$

从而同一个双线性函数在不同的基底下的度量矩阵是合同的 (回顾: 合同变换即  $A \mapsto X^\top A X$  这样的变换, 其中  $X$  是可逆的; 若两个对称矩阵合同, 则他们有相同的正负惯性指数, 即有相同的正、负特征值个数). 由于任意两个合同矩阵有相同的秩, 一个双线性函数  $f$  的所有可能度量矩阵都有一个固定

的秩, 将其定义为  $f$  的秩, 记作  $\text{rank} f$ . 事实上, 双线性函数  $f$  的秩与  $f^b$  作为线性映射的秩相等.

如果  $f$  在  $V$  的某一组基下的度量矩阵是满秩的, 那么它在  $V$  的其它任何基底下也是满秩的, 此时我们说  $f$  是**非退化的**. 容易验证,  $f$  是非退化的当且仅当  $f^b$  是  $V \rightarrow V^*$  的同构.

如果  $f$  对于任意  $\alpha, \beta \in V$  满足

$$f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha), \quad (2.44)$$

则称  $f$  是对称的; 而如果  $f$  对于任意  $\alpha, \beta \in V$  满足

$$f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha), \quad (2.45)$$

则称  $f$  是反对称的. 容易验证, 对称双线性函数的度量矩阵全都是对称的, 反对称双线性函数的度量矩阵也全都是反对称的.

如果一个对称的双线性函数  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  满足

$$\text{正定性: } \forall \alpha \in V, \langle \alpha, \alpha \rangle > 0, \quad (2.46)$$

则称  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是  $V$  上的一个内积函数. 从 (2.46) 容易验证, 一个内积函数必然是非退化的双线性函数. 一个定义了内积函数的线性空间被称为内积空间. 在内积空间上, 我们可以定义向量的长度、夹角等概念. 一个向量  $\alpha \in V$  的**长度**定义为

$$|\alpha| := \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}, \quad (2.47)$$

并且我们可以证明著名的 Cauchy-Schwartz 不等式

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq |\alpha| |\beta|. \quad (2.48)$$

有限维的内积空间被称为**欧氏空间**. 可以证明, 若  $V$  是欧氏空间, 则  $V$  中存在一组基  $e_1, \dots, e_n$  使得内积函数在此基下是单位矩阵, 即对任意  $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i, y = \sum_{i=1}^n y^i e_i \in V$ , 有

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i. \quad (2.49)$$

在内积空间  $V$  的任意子集  $W$  上, 我们定义

$$W^\perp = \{x \in V : \forall y \in W, \langle x, y \rangle = 0\} \quad (2.50)$$

为  $W$  的**正交补**. 可以验证,  $W^\perp$  总是  $V$  的线性子空间, 并且如果  $W$  本身也是  $V$  的线性子空间, 那么

$$W = W \oplus W^\perp. \quad (2.51)$$

注意对比: 对于一般的有限维线性空间, 一个线性子空间的补空间一般有无穷多个; 但是在欧氏空间中, 一个线性子空间的正交补空间是唯一的.

如果线性空间  $V$  上的一个反对称双线性函数  $\Omega$  是非退化的, 那么我们可以证明,  $V$  一定是偶数维的, 并且它有一组基底  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ , 使得  $\Omega$  在这组基底下的度量矩阵是

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

即

$$\Omega(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & j - i = n \\ -1 & i - j = n \\ 0 & \text{其它,} \end{cases} \quad (2.53)$$

其证明并不非常简单, 可参见丘维声老师《高等代数(第二版)下册》第166~169页. 此时, 我们称  $\Omega$  是  $V$  上的一个**辛内积**, 定义了辛内积的线性空间称为**辛内积空间**, 而 (2.52) 中的矩阵  $J$  称为**辛矩阵**.

在微分流形中, 如果流形上每点处的切空间上定义了一个内积, 则称之为一个 Riemann 流形; 而如果每一个点处的切空间上定义了一个辛内积, 则称之为一个辛流形. 前者几乎支撑了整个现代几何学的发展, 而后者对于我们来说有特殊的重要意义: 整个 Hamilton 力学的严格数学描述都是以辛流形为背景建立的.

## 2.5 多重线性函数、外代数

设  $V$  是一个线性空间, 如果一个  $k$  元函数  $f: \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}$  对于它的每一个分量都是线性的, 即对于任意  $v_1, \dots, v_k, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$ , 有

$$f(v_1, \dots, v_i + \lambda v, \dots, v_k) = f(v_1, \dots, v_k) + \lambda f(v_1, \dots, \underbrace{v}_{\text{第 } i \text{ 个分量}}, \dots, v_k), \quad (2.54)$$

则称  $v$  是一个  $k$  重线性函数或  $k$  阶协变张量.

在上述定义下, 内积和辛内积都是二阶协变张量.

接下来介绍一种通过一元线性函数构造多重线性函数的方法: 张量积. 设  $f_1, \dots, f_n$  是  $n$  个  $V$  上的线性函数, 那么我们定义它们的张量积为

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n: V \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.55)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_n \mapsto f_1(v_1) f_2(v_2) \cdots f_n(v_n).$$

容易验证,  $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$  满足多重线性函数的定义. 此外, 如果  $f_1, \dots, f_n$  中有一些本身就是多重线性函数, 那么张量积也可以类似地定义, 比方说  $f$  是双线性函数,  $g$  是线性函数, 那么  $f \oplus g$  就是一个三重线性函数

$$f \oplus g: V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.56)$$

$$v_1, v_2, v_3 \mapsto f(v_1, v_2) g(v_3).$$

和线性函数一样, 一个  $n$  维线性空间  $V$  上的  $k$  重线性函数全体 (记作  $V_k^0$ ) 按照逐点加法和数乘构成线性空间, 我们选定  $V$  上的一组基  $e_1, \dots, e_n$ , 由于  $f$  对其每一个分量都是线性的, 实际上函数  $f$  可以由其在这组基底的全体  $k$  元组上的作用唯一确定: 假如对于每一组  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ , 我们都知道  $f$  作用在基底的  $k$  元组  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  上的取值

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = f_{i_1 i_2 \cdots i_k}, \quad (2.57)$$

则对于任意  $k$  个向量  $v_1, \dots, v_k$ , 设它们在这组基下的分量表达式是

$$v_\alpha = \sum_{i=1}^n v_\alpha^i e_i, \quad \alpha = 1, \dots, k$$

其中  $v_\alpha^i \in \mathbb{R} (\alpha = 1, \dots, k; i = 1, \dots, n)$ , 则

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_k) &= f\left(\sum_{i_1=1}^n v_1^{i_1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n v_2^{i_2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_k=1}^n v_k^{i_k} e_{i_k}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) v_1^{i_1} v_2^{i_2} \cdots v_k^{i_k} \quad (2.58) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n f_{i_1 i_2 \dots i_k} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \cdots v_k^{i_k}. \end{aligned}$$

(2.58) 中的最后一行有一点令我们很不爽: 求和号太多了! 为了 make life easier, 我们采用 **Einstein 求和约定**, 即当一个乘积表达式 (单项式) 中一个指标分别以上、下角标的形式各出现一次时, 我们要对这个角标的所有取值进行求和, 这样中的最后一行可以直接写作

$$f_{i_1 i_2 \dots i_k} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \cdots v_k^{i_k}$$

因为  $i_1, \dots, i_k$  这几个指标都在这个表达式中分别以上下角标的形式各出现一次, 所以上式实际上是一个对  $i_1, \dots, i_k$  的所有可能取值求和的多项式, 这看上去就简洁了许多. 我们称由 (2.57) 确定的  $f_{i_1 i_2 \dots i_k}$  为  $f$  在基底  $e_1, \dots, e_k$  下的 **系数**.

容易验证, 在选定线性空间  $V$  的一组基  $e_1, \dots, e_n$  后,  $V$  中的每一个  $k$  重线性函数都可以写成

$$f = f_{i_1 i_2 \dots i_k} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \quad (2.59)$$

的形式 (注意上式也用到了 Einstein 求和约定). (2.59) 意味着意味着每一个  $f \in V_k^0$  可以由  $V_k^0$  中的向量组

$$\{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} : i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}\} \quad (2.60)$$

线性表出, 并且可以很容易地验证  $e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}$  (2.60) 中的元素所组成的向量组是线性无关的, 因此 (2.60) 中的全体  $k$  阶协变张量构成了  $V_k^0$  的一组基底, 从而有

$$\dim V_k^0 = n^k. \quad (2.61)$$

如果一个  $k$  阶协变张量交换任意两个变量后符号改变, 即

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k).$$

对于任意  $x_1, \dots, x_k \in V$  及  $i, j = 1, \dots, k$  成立, 则称  $f$  是**反对称的**. 反对称的  $k$  阶协变张量也称为  **$k$  阶形式**或  **$k$ -形式**. 在此定义下, 辛内积就是一个 2-形式.

很容易验证, 两个  $k$ -形式 (按逐点加法) 相加或 (按逐点数乘) 乘以一个常数后仍然是一个  $k$  形式, 故全体  $k$  形式构成一个线性空间, 记作  $\Lambda^k(V)$ , 它是  $V_k^0$  的一个线性子空间.

构造反对称张量的一类重要手段是所谓反对称化算子. 对于一个  $k$  重线性函数  $f$ , 我们记

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f : V \times \dots \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v_1, \dots, v_k &\mapsto \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{|\pi|} f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}), \end{aligned}$$

这里  $S_n$  指的是  $1, \dots, n$  的全排列集, 即全体  $\{1, \dots, n\}$  到自身的双射组成的集合; 对于每一个  $\pi \in S_n$ ,  $|\pi|$  指的是全排列  $\pi$  中逆序对的个数, 即满足  $i < j$  且  $\pi(i) > \pi(j)$  的数对  $(i, j)$  的个数. 这个概念在行列式的定义中出现过. 容易证明,  $f$  被反对称化算子作用后得到的  $k$  重函数  $\mathcal{A}f$  一定是一个反对称  $k$  重线性函数, 并且有

- $\mathcal{A}(\mathcal{A}f) = \mathcal{A}f$
- $f$  是反对称算子当且仅当  $\mathcal{A}f = f$ .

设  $\alpha, \beta$  分别是线性空间  $V$  上的  $r$ -形式和  $s$ -形式, 我们定义

$$\alpha \wedge \beta := \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}(\alpha \oplus \beta)$$

为  $\alpha$  和  $\beta$  的**外积**或**楔积**. 按定义, 对任意  $v_1, \dots, v_{r+s} \in V$ , 有

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{r+s}) &= \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta)(v_1, \dots, v_{r+s}) \\ &= \frac{r!}{s!} \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \alpha \otimes \beta(v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(r+s)}) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \alpha(v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(r)}) \beta(v_{\pi(r+1)}, \dots, v_{\pi(r+s)}) \end{aligned}$$

特别地, 当  $r = s = 1$  时,

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1), \forall v_1, v_2 \in V.$$

楔积运算  $\wedge$  有如下这些性质

1.  $\alpha \wedge (\gamma + \delta) = \alpha \wedge \gamma + \alpha \wedge \delta, (\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$
2.  $\alpha \wedge (\lambda\gamma) = (\lambda\alpha) \wedge \gamma = \lambda(\alpha \wedge \gamma), \lambda \in \mathbb{R}$
3. 若  $\alpha, \beta$  分别为  $r, s$  阶反对称协变张量, 则  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$
4. 若  $\alpha, \beta, \gamma$  分别为  $r, s, t$  阶反对称协变张量, 则

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)$$

其中第 4 条性质的证明不是很平凡, 值得特别关注一下. 它实际上是证明了这样一个等式:

$$\mathcal{A}((\mathcal{A}f) \otimes g) = \mathcal{A}(f \otimes \mathcal{A}g) = \mathcal{A}(f \otimes g), \quad (2.62)$$

即“局部反对称化后再整体反对称化”和“直接整体反对称化”的结果是相同的.

一般地, 如果  $\alpha_i (1 \leq i \leq k)$  为  $r_i$  阶反对称协变张量, 则用上面的方法可以证明

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \cdots \wedge \alpha_k = \frac{(r_1 + \cdots + r_k)!}{(r_1)! \cdots (r_k)!} \mathcal{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k)$$

特别地, 如果  $r_i = 1$ , 我们有

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(v_1, \cdots, v_k) &= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \alpha_1(v_{\pi(0)}) \cdots \alpha_k(v_{\pi(s)}) \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_1(v_2) & \cdots & \alpha_1(v_k) \\ \alpha_2(v_1) & \alpha_2(v_2) & \cdots & \alpha_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \alpha_k(v_2) & \cdots & \alpha_k(v_k) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$



它可以用于实际计算（第二个等号使用的是行列式的定义）。此外，可以证明

$$\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_s} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n\}$$

构成了  $\Lambda^k(V)$  的一组基，从而  $\Lambda^k(V)$  是一个  $C_n^k$ （组合数）维的线性空间。

虽然一般来讲我们是不会把两个阶数不同的反对称协变张量相加，但是我们还是可以形式上定义线性空间

$$\Lambda(V) := \Lambda^0(V) \oplus \Lambda^1(V) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(V),$$

它被称为  $n$  维线性空间  $V$  上的**外代数**，它以

$$\{1, e^i, e^i \wedge e^j, \cdots, e^1 \wedge \cdots \wedge e^n\}$$

为基底，维数为  $\dim \Lambda(V) = \sum_{i=0}^n \dim \Lambda^i(V) = \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$ ，其上定义有楔积运算  $\wedge$ ，它是外代数特有的运算。



## 第三章 点集拓扑

本章我们过一遍我们会用到的点集拓扑知识。拓扑学是一门以仅定义了开集的拓扑结构为基础，研究映射连续性以及拓扑结构在连续变换下不变的性质的学科。在拓扑学中，人们把具有相同开集结构（同胚）的空间等同起来，从而架空“距离”、“长度”、“面积”这些传统几何学中的概念，把注意力集中到诸如“连通性”、“曲面是否可定向”、“曲面上是否有洞”、“绳子上打了几个结”这类问题上的。点集拓扑研究的是最一般的集合上的拓扑，讨论开集、闭集、连续映射、同胚这些基本的拓扑学概念，是所有拓扑学分支的基础。

点集拓扑对我们而言主要用途是定义流形，而流形则可以说是我们整个故事的起点：我们会用流形来定义力学问题中的各种空间（如位形空间，相空间等）。当然，在拓扑学框架中，我们还只能定义所谓“拓扑流形”，即每一个点附近有一个邻域同胚于  $\mathbb{R}^n$  上开集的拓扑空间，而不能定义我们最终要用到的微分流形——那是更进一步的工作。

事实上，我们讨论力学问题时一般不会特别深入地探讨所研究空间的拓扑结构，所以仅就我们的需要而言，最基本的点集拓扑学知识已经足够。微分流形中还有 deRham 上同调等更深层次的知识会用到代数拓扑、同调论等，但我们所介绍的内容不会涉及到这些。

### 3.1 度量空间

设  $V$  是一个集合，如果  $V$  上定义了一个二元函数  $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ，满足

1. 正定性: 对于任意  $x, y \in V$ , 有  $d(x, y) \geq 0$ , 且  $d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ ;
2. 对称性: 对于任意  $x, y \in V$ , 有  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
3. 三角不等式: 对于任意  $x, y, z \in V$ , 有  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ ,

则称  $V$  是一个**度量空间**,  $d$  是  $V$  上的**度量函数**或**距离函数**.

欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  就是一个度量空间, 其上任意两点  $x = (x^1, \dots, x^n)^\top$  和  $y = (y^1, \dots, y^n)^\top$  之间的距离  $d$  定义为

$$d(x, y) := |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}. \quad (3.1)$$

这是一个由内积诱导的距离. 更一般地, 任何内积空间  $V$  上都可以用

$$d(x, y) := |x - y| = \langle x - y, x - y \rangle, \quad \forall x, y \in V \quad (3.2)$$

来定义度量函数, 这称为由**内积诱导的度量**.

在度量空间  $V$  中, 我们把全体到某个定点  $x$  的距离小于某个固定正数  $\varepsilon$  的点组成的集合称为一个**开球**, 记作  $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ , 即

$$\mathcal{B}(x, \varepsilon) = \{y \in V, d(x, y) < \varepsilon\} \quad (3.3)$$

其中  $x$  称为这个开球的**球心**,  $\varepsilon$  称为这个开球的**半径**. 设  $X \subseteq V$ ,  $x \in X$ , 如果存在一个正数  $\varepsilon$ , 使得  $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subseteq X$ , 则称  $x$  是  $X$  的**内点**,  $X$  是  $x$  的**邻域**; 如果  $X$  中的每一个点都是  $X$  的内点, 则称  $X$  是一个**开集**. 设  $Y \subseteq V$ ,  $y \in V$ , 如果对于任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{B}(y, \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$ , 则称  $y$  是  $Y$  的**聚点**; 如果  $Y$  包含其所有的聚点, 则称  $Y$  是一个**闭集**. 可以验证,  $X \subseteq V$  是  $V$  的开集当且仅当  $X$  在  $V$  中的补集  $X^c := V \setminus X$  是  $X$  的闭集.

记  $\tau$  为  $X$  上全体开集组成的集族, 则我们可以证明:

1. 空集和全集是开集:  $X, \emptyset \in \tau$
2. 任意多个开集的并集是开集 (“任意并”):  $\forall \sigma \subseteq \tau, \bigcup_{U \in \sigma} U \in \tau$

3. 有限多个开集的交集是开集 (“有限交”):  $\forall U_1, \dots, U_n \in \tau, U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$ .

上述三条性质不显含任何有关  $X$  上度量函数  $d$  的信息.

在度量空间中, 我们可以用  $\varepsilon - \delta$  语言来定义映射的连续性. 假设  $X, Y$  是两个度量空间, 度量函数分别是  $d_X, d_Y$ , 那么一个映射  $f: X \rightarrow Y$  在  $x \in X$  处连续定义为: 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在一个  $\delta_\varepsilon > 0$ , 使得对于满足  $d_X(x, y) < \delta_\varepsilon$  的  $y \in Y$  总有  $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . 如果  $f$  在  $X$  上任意一点处是连续的, 则称  $f$  是一个连续映射. 事实上,  $f$  在  $x \in X$  处的连续性可改写为: 于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在一个  $\delta_\varepsilon > 0$ , 使得

$$\mathcal{B}(x, \delta_\varepsilon) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B}(f(x), \varepsilon)) \quad (3.4)$$

成立, 即  $f^{-1}(\mathcal{B}(f(x), \varepsilon))$  是  $x$  点邻域. 这样改写之后, 我们容易发现, 如果  $f$  是连续函数, 那么对于任意  $x \in X, \varepsilon > 0$ ,  $f^{-1}(\mathcal{B}(f(x), \varepsilon))$  是  $U$  上的开集, 再结合开集的 “任意并” 性质和原像的保并运算性质, 容易得到:

$f: X \rightarrow Y$  是连续函数当且仅当对于任意  $Y$  中的开集  $U$ ,  $f^{-1}(U)$  是  $X$  中的开集.

上述命题可以简单表述为 “开集的原像是开集”, 它也不显含任何关于两个度量空间中度量函数的信息.

拓扑空间可以看作脱胎于度量空间的一种更广义的空间. 把度量空间中所有仅涉及到开集的定义和命题给抽提出来, 就得到了拓扑学中相应的定义和命题: 开集族定义成包含空集和全集、并且满足 “任意并”、“有限交” 性质的集族; 闭集定义为开集的补集; 连续映射定义为满足 “开集的原像是开集” 的映射……所以可见, 其实拓扑学也没啥玄乎的.

## 3.2 拓扑空间

设  $X$  是一个集合, 如果  $\tau$  是  $X$  的一个子集族, 满足

1.  $X, \emptyset \in \tau$

2. “任意并”:  $\forall \sigma \subseteq \tau, \bigcup_{U \in \sigma} U \in \tau$

3. “有限交”:  $\forall U_1, \dots, U_n \in \tau, U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$ .

这三条性质, 则称  $(X, \tau)$  是一个**拓扑空间**, 或者称  $X$  是一个拓扑空间,  $\tau$  是  $X$  上的**拓扑**,  $\tau$  中的每一个成员称为  $X$  中的一个**开集**. 如果  $V \subseteq X$  且  $X \setminus V$  是开集, 则称  $V$  是  $X$  上的**闭集**.

设  $X$  是拓扑空间,  $Y \subseteq X, y \in Y$ , 如果存在  $X$  上的一个开集  $U$ , 使得  $y \in U$  且  $U \subseteq Y$ , 则称  $y$  是  $Y$  的**内点**,  $Y$  是  $y$  的**邻域**, 进一步地, 如果  $Y$  本身就是开集, 则称  $Y$  是  $y$  的**开邻域**. 可以验证,  $Y$  是开集当且仅当  $Y$  中所有的点都是它的内点, 所以说 “一个  $y$  的开邻域” 就等价于说 “一个包含  $y$  的开集”.

如果  $X$  是度量空间, 度量函数为  $d$ , 则  $X$  上的全体开集 (度量空间中的开集) 构成  $X$  上的拓扑, 称为由度量函数  $d$  诱导的  $X$  上的**拓扑**. 对于度量空间, 我们默认其上的拓扑就是由度量函数诱导的拓扑. 特别地, 对于欧氏空间, 我们也默认其上拓扑是由我们在 (3.1) 中定义的度量所诱导的拓扑, 称为**欧氏拓扑**. 可以验证, 度量空间中邻域、内点等概念与其诱导的拓扑中相应的同名概念是一致的.

对于一般的拓扑空间, 其开集结构往往会比较复杂, 这时我们会用所谓 “拓扑基” 方式来描述一个拓扑结构. 对于一个集合  $X$ , 所谓拓扑基, 是指  $X$  的一个满足 “有限交” 性质并且能够覆盖整个  $X$  的子集族, 这个子集族通过做 “任意并” 操作能够生成  $X$  的一个拓扑结构. 具体来讲, 如果  $X$  的子集族  $\sigma$  满足

1.  $\bigcup_{U \in \sigma} U = X$

2. 对任意  $U_1, \dots, U_n \in \sigma$ , 存在  $\rho \subseteq \sigma$ , 使得  $\bigcup_{U \in \rho} U = U_1 \cap \dots \cap U_n$ ,

则称  $\sigma$  是  $X$  的一个**拓扑基**. 如果  $\sigma$  是  $X$  的一个拓扑基, 那么  $\sigma$  中成员的所有可能并集

$$\tau = \left\{ \bigcup_{U \in \rho} U : \rho \subseteq \sigma \right\}$$

构成了  $X$  上的一个拓扑, 称为由**拓扑基**  $\sigma$  生成的**拓扑**. 这里我们默认  $\cup \emptyset = \emptyset$ .

可以验证, 对于任意度量空间  $V$ , 全体开球组成的集族  $\{\mathcal{B}(x, \varepsilon) : x \in V, \varepsilon > 0\}$  构成了  $V$  上的一个拓扑基, 它所生成的拓扑就是  $V$  上的度量函数所诱导的拓扑。

此外, 不同的拓扑基可以生成相同的拓扑。比如说欧氏空间  $\mathbb{R}^n$ , 其上拓扑既可以由  $\mathbb{R}^n$  上全体开球生成, 又可以由  $\mathbb{R}^n$  上全体开立方体所组成的拓扑基

$$\{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) : a_1 < b_1, \cdots, a_n < b_n\}$$

生成。

对于一个拓扑空间  $(X, \tau)$ , 设  $Y \subseteq X$ , 那么可以验证

$$\tau|_Y := \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

是  $Y$  上的拓扑, 称为  $\tau$  在  $Y$  上诱导的**子拓扑**,  $(Y, \tau|_Y)$  称为  $X$  的一个**子拓扑空间**. 这就是说, 子拓扑空间中的开集都具有“子集  $\cap$  原空间中开集”的形式. 今后我们默认欧氏空间中的各种曲线、曲面、超曲面或奇奇怪怪的图形上的拓扑结构都是欧式空间在这些图形上诱导的子拓扑, 这样我们便不会再对“什么是球面上的拓扑”这样的基本问题产生疑惑。

容易验证, 如果  $\sigma$  是  $X$  上的拓扑基, 并且  $\sigma$  生成的拓扑是  $\tau$ , 那么对于  $X$  的任意子集  $Y$ ,

$$\sigma|_Y := \{U \cap Y : U \in \sigma\}$$

是  $Y$  上的一组拓扑基, 并且它生成的  $Y$  上的拓扑恰好是  $\tau|_Y$ .

对于子拓扑, 我们需要注意的一点是: 子拓扑空间中的开集可能不是原空间中的开集。比如说在一维欧氏空间  $\mathbb{R}^1$  上, 非开的区间不可能是开集, 但是在  $\mathbb{R}^1$  的子拓扑空间  $[0, +\infty)$  上, 全体形如  $[0, a) (a > 0)$  的集合都是开集, 因为它们都可以写成  $[0, +\infty)$  与  $\mathbb{R}^1$  上开区间  $(-1, a)$  的交。

对于两个拓扑空间  $(X, \tau_X)$  和  $(Y, \tau_Y)$ , 可以验证: 集族

$$\sigma_{X \times Y} = \{U_X \times U_Y : U_X \in \tau_X, U_Y \in \tau_Y\} \quad (3.5)$$

是  $X \times Y$  上的一个拓扑基, 由  $\sigma_{X \times Y}$  生成的  $X \times Y$  上的拓扑  $\tau_{X \times Y}$  称为由  $\tau_X, \tau_Y$  在  $X \times Y$  上诱导的**积拓扑**. 这里需要注意的是, (3.5) 中定义的  $\sigma_{X \times Y}$  只是拓扑基, 而不是拓扑。上述积拓扑的定义当然还可以拓展到任意有限多

个拓扑空间的乘积中去。比如说欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  上的拓扑其实就可以看作  $n$  个一维欧氏空间  $\mathbb{R}^1$  的积拓扑.

### 3.3 连续映射与同胚

有了前面的铺垫, 我们可以直接地给出拓扑空间上连续映射的定义: 设  $X, Y$  是两个拓扑空间, 如果映射  $f: X \rightarrow Y$  满足

对于任意  $Y$  中的开集  $U$ ,  $f^{-1}(U)$  是  $X$  中的开集,

则称  $f$  是  $X \rightarrow Y$  的**连续映射**.

性质最好的连续映射是同胚映射。如果  $f: X \rightarrow Y$  是拓扑空间之间的双射, 且  $f: X \rightarrow Y$  和  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  都是连续映射, 那么我们称  $f$  是  $X \rightarrow Y$  的一个**同胚映射** (简称“**同胚**”), 如果两个拓扑空间之间存在同胚映射, 则称这两个拓扑空间是**同胚的**。注意, “ $f$  是双射”、“ $f$  连续”、“ $f^{-1}$  连续”是同胚定义的三要素, 三者缺一不可。容易验证,  $f$  是  $X \rightarrow Y$  的同胚映射意味着对于任意  $U \subseteq X$ ,  $U$  是  $X$  的开集  $\iff f(U)$  是  $Y$  的开集. 这就是说,  $f$  不仅给出了  $X, Y$  之间的一一对应, 还给出了  $X, Y$  中开集之间的一一对应. 这意味着同胚的拓扑空间有这相同的开集结构, 从而它们在拓扑学上是不可区分的.

除了同胚映射之外, 还有一类很重要的连续映射, 称为“**嵌入映射**”。设  $(X, \tau_X)$  和  $(Y, \tau_Y)$  是两个拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  是拓扑空间之间的连续映射, 如果  $f$  是单射, 并且  $f$  作为  $X \rightarrow f(X)$  的映射是拓扑空间  $X$  到 ( $Y$  诱导的) 子拓扑空间  $f(X)$  的同胚映射, 那么我们称  $f$  是一个  $X \rightarrow Y$  的**嵌入映射**.

对于任意一个拓扑空间  $X$ ,  $\mathbb{R}^1$  上开区间  $(a, b)$  或闭区间  $[a, b]$  到  $X$  的嵌入映射  $\gamma$  称为  $X$  上的一条**曲线**. 注意这里我们把曲线定义成了映射  $\gamma$ , 而不是像集  $\gamma((a, b))$  或  $\gamma([a, b])$ , 这意味着我们所定义的曲线是包含“运动信息”的.



### 3.4 常用点集拓扑性质

之前讨论的拓扑空间都是最抽象的拓扑空间, 具体的拓扑空间往往会具有更多的性质, 拓扑空间中添入这些性质后, 我们可以得到更多有意义的结论。

数学家 Hausdorff 最初用公理话的方式定义拓扑空间时, 还囊括了度量空间中开集的一个重要的性质: 分离性。设  $X$  是一个拓扑空间, 如果对于  $X$  中任意两个不同的点  $a, b$ , 都存在  $X$  上的两个开集  $A, B$ , 使得  $a \in A, b \in B$  且  $A \cap B = \emptyset$ , 则称  $X$  满足 **T2 分离公理**的。一个满足 T2 分离公理的拓扑空间被称为 **Hausdorff 空间**。我们后面要讨论的几乎所有拓扑空间都是 Hausdorff 空间。

所有度量空间都是 Hausdorff 空间。事实上, 对于度量空间中两个不同的点  $a, b$ , 取

$$A = \mathcal{B}\left(a, \frac{d(a, b)}{2}\right), B = \mathcal{B}\left(b, \frac{d(a, b)}{2}\right)$$

即可。

一个拓扑空间上的拓扑结构可能由各种各样不同的拓扑基生成, 这些拓扑基中成员个数必有多寡之分, 生成某一个拓扑结构的拓扑基中成员个数也必然是有下限的, 比方说不可能用有限个开集组成的集族生成欧氏拓扑。如果一个拓扑结构能够由一个包含至多可数多个成员的拓扑基生成, 那么我们称这个拓扑空间是**第二可数的**, 或满足**第二可数公理**。有限维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  就是一个满足第二可数公理的空间。事实上,  $\mathbb{R}^n$  上的欧氏拓扑可以由拓扑基

$$\{\mathcal{B}(x, \varepsilon) : x \in \mathbb{Q}^n, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$$

生成, 其中  $\mathbb{Q}$  是有理数集。这样,  $\mathbb{R}^n$  的任意一个子拓扑空间都满足第二可数公理: 设  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ , 则拓扑基

$$\{\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap Y : x \in \mathbb{Q}^n, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$$

也仅包含至多可数多个成员, 并且生成了  $\mathbb{R}^n$  在  $Y$  上诱导的子拓扑。

各种拓扑性质中, 最为直观的一种是“连通性”。连通性有两种不大一样

的刻画方式。对于一个拓扑空间  $X$  及其上一个子集  $Y$ , 如果  $Y$  不能写成

$$Y = (Y \cap U) \cup (Y \cap V), \quad U, V \text{ 是 } X \text{ 中开集}$$

的形式, 则称  $Y$  在  $X$  中是**连通**的; 如果对于  $Y$  中任意两点  $a, b$ , 存在曲线  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ , 使得  $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$  且  $\gamma([0, 1]) \subseteq Y$ , 则称  $Y$  在  $X$  中是**道路连通**的. 如果  $Y$  自身在  $Y$  中是连通/道路连通的, 那么我们称  $Y$  是连通/道路连通的. 容易证明, 一维欧氏空间  $\mathbb{R}^1$  上的开、闭区间等都是连通的, 从而可以证明: 如果  $Y$  在  $X$  中是道路连通的, 也必然是连通的. 反过来不一定成立, 在拓扑学中这是有反例的.

容易验证, 一个拓扑空间  $M$  是连通的  $\iff M$  上即是开集又是闭集的集合只有  $M$  本身和  $\emptyset$ .

在一个拓扑空间  $X$  中, 我们把“存在曲线  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ , 使得  $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ ”称为“ $a$  和  $b$  道路互通”, 容易验证, “道路互通”是一个等价关系 (满足自反性、对称性、传递性), 从而可以由此定义等价类. 对于  $X$ , 我们把每一个道路互通等价类称为  $X$  上的一个**道路连通分支**, 对于任意  $x \in X$ , 包含  $x$  的那个道路连通分支是集合

$$\{y \in X : y \text{ 和 } x \text{ 道路互通}\},$$

它按照  $X$  诱导的子拓扑构成了一个道路连通的拓扑空间.

### 3.5 流形

流形最早来自欧氏空间中的曲面. 高维欧氏空间中的直线、平面、甚至超平面等等, 我们都可以用简单的线性方程来定义它们, 无非就是  $n$  维线性空间的  $m$  维线性子空间, 至多外加一步平移操作. 但是如果说是曲线、曲面、超曲面, 那么问题就复杂很多了! 因为曲面的类型千奇百怪, 仅二维曲面就有可能是抛物面、球面、环面, 你身上某一段毛细血管网的表面……而高维的超曲面则更会是种类繁多的, 如何在数学上给他们进行统一定义呢? 在拓扑学的框架下, 数学家们给出了“流形”的定义, 准确地抓住了“曲面”这种数学对象的共同特征.

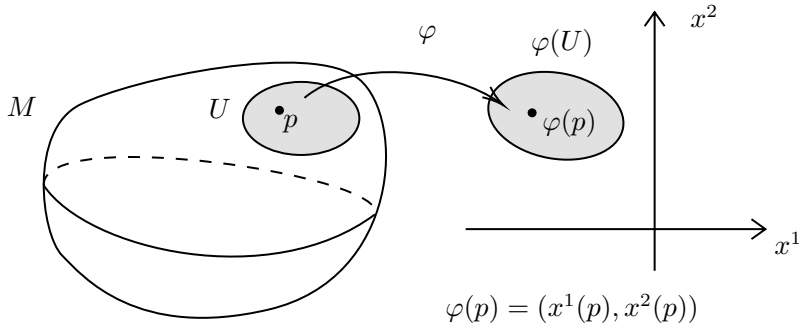


图 3.1: 拓扑流形及其上图、局部坐标系

设  $M$  是一个第二可数的 Hausdorff 空间,  $n$  是一个固定的正整数, 如果对于每一个  $p \in M$ , 都存在  $p$  的一个开邻域  $U$ , 使得  $U$  与  $\mathbb{R}^n$  的某个开集同胚, 则称  $M$  是一个  $n$  维的**拓扑流形**.

假设  $U$  是拓扑流形  $M$  上的一个开集,  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  是  $U$  到  $\mathbb{R}^n$  上开集的同胚映射, 则我们称有序对  $(U, \varphi)$  是  $M$  上的一个**区图**, 对于每一个  $p \in M$ , 记  $x^i(p)$  为  $\varphi(p)$  的第  $i$  个分量, 则  $x^1, \dots, x^n$  是  $n$  个  $U \rightarrow \mathbb{R}$  的连续函数, 称为区图  $(U, \varphi)$  上的**局部坐标函数**. 我们称有序组  $(U, \varphi; x^1, \dots, x^n)$  为  $M$  上的**局部坐标系**, 通常简写为  $(U, \varphi; x^i)$  或  $(U; x^i)$ .

拓扑流形的定义, 相当于在说这个空间的在每一个点的局部上都类似于  $\mathbb{R}^n$ . 由这一定义不难看出, 平面、球面以及抛物面等曲面, 都属于二维流形. 至于为什么要假设  $M$  满足 T2 分离公理和第二可数公理, 这主要是因为欧氏空间及其子空间满足这两条性质, 把它们引进来可以排除一些不符合我们对曲面或超曲面这些图形的认知的诡异情形. 事实上, 有了这两条性质的加持, 我们可以证明: 任何  $n$  维拓扑流形都可以嵌入到欧氏空间  $\mathbb{R}^{2n+1}$  当中去.

如果  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  ( $I$  是指标集) 是拓扑流形  $M$  上的全体区图组成的集合, 那么由拓扑流形的定义中 “每一点  $p$  都有开邻域与  $\mathbb{R}^n$  中开集同胚” 这一条件, 必然有

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M, \quad (3.6)$$

并且一个函数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  是连续函数当且仅当对于任意  $\alpha \in I$ ,  $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ :

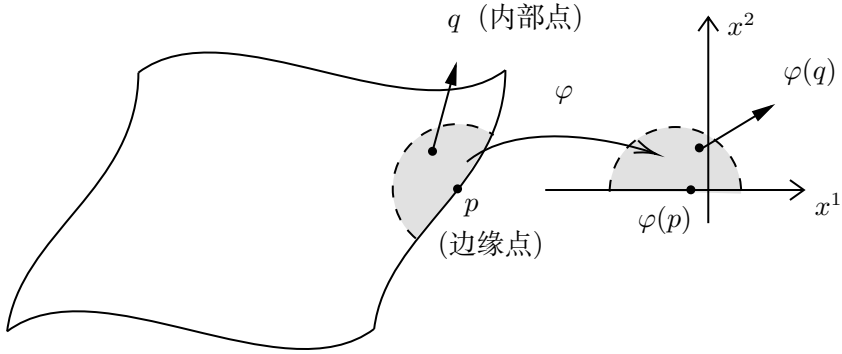


图 3.2: 带边流形及其上内部点、边缘点

$\varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  是  $\mathbb{R}^n$  上的开集  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  到  $\mathbb{R}$  的连续函数.

在拓扑流形上, 连通性与道路连通性是等价的. 我们可以证明: 如果  $M$  是拓扑流形, 那么  $M$  上所有道路连通分支都是  $M$  上既开又闭的集合, 进一步即可证明  $M$  上的一个子集  $V$  是连通的当且仅当它是道路连通的.

最后介绍“带边流形”. 注意之前我们介绍的拓扑流形是不能包含边缘的, 换句话说, 半平面  $\{(x, y) : x \geq 0\}$ 、闭球  $\bar{B}(x, r)$  或者闭的正方体  $[0, 1]^3$  这种图形都不能算是流形, 因为在它们的边缘处, 任何一个开集都不可能的同胚到欧氏空间的开邻域中. 但很多时候我们是会关注流形的边缘的, 比如说讨论 Stokes 定理, 或者偏微分方程的边界条件等等. 为了弥补流形的定义中这一缺憾, 我们将流形的定义进行拓展, 得到如下“带边流形”的定义.

设  $M$  是一个第二可数的 Hausdorff 空间, 对于某个固定的正整数  $n$ , 如果对  $M$  上的每一个点  $p$ , 都存在一个  $p$  的开邻域  $U$  及一个映射  $\varphi : U \rightarrow H^n = \mathbb{R}^{n-1} \times [0, +\infty)$ , 使得  $\varphi$  作为  $U$  到  $\varphi(U)$  的映射是同胚映射, 其中  $H^n$  上的拓扑取欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  在其上诱导的子拓扑, 则称  $X$  是一个  **$n$  维带边拓扑流形**. 对于  $M$  上的任意一点  $p$  及包含  $p$  点的区图  $(U, \varphi)$ , 如果  $\varphi(p)$  的第  $n$  的分量是 0, 则称  $p$  是  $M$  的**边缘点**, 否则成  $p$  是  $M$  的**内部点**. 边缘点组成的图形称为  $M$  的**边缘**, 通常记作  $\partial M$ .

可以验证,  $p$  如果是带边流形  $M$  的边缘点, 那么  $p$  在  $M$  的任何区图下

第  $n$  个分量都必然是 0, 所以上述定义是恰当的. 此外, 可以验证, 对于一个  $n(\geq 2)$  维的带边流形  $M$ , 其边缘  $\partial M$  作为  $M$  的子拓扑空间, 构成了一个  $n-1$  维 (不带边) 拓扑流形.

仔细琢磨带边拓扑流形的定义就可以发现, 带边拓扑流形的定义是允许边界为空集的. 也就是说, 在我们的定义下, “拓扑流形” 的定义完全被包含在了 “带边拓扑流形” 的定义当中. 但是在不研究流形边界性质时, 我们只用 “拓扑流形” 的定义就足够了, 不会去使用 “带边拓扑流形” 这个更为复杂的定义.



## 第四章 微分流形

### 4.1 微分流形

在拓扑流形上, 我们可以很自然地把连续函数定义为流形到欧氏空间  $\mathbb{R}^1$  的连续映射, 并且可以证明, 定义在流形  $M$  上的实函数  $f$  是连续函数当且仅当  $f$  在  $M$  的任意一个区图上是连续的, 即对于任意一个  $M$  上的区图  $(U, \varphi)$ ,  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  是  $\mathbb{R}^n$  上的开集  $\varphi(U)$  到  $\mathbb{R}$  的连续函数. 但是如果我们希望在流形上定义可导函数、可微函数、光滑函数等微积分中更为常见的函数时, 问题就出现了: 首先, 流形本身只是一个定义了开集结构的拓扑空间, 我们可以把映射的连续性用开集的语言叙述, 但是函数的可微性则在一般的拓扑空间中没有任何对应。

我们唯一的希望是把  $f$  的可微性定义为  $f$  在各个区图上的可微性, 这就是说, 我们希望一个函数  $f$  是可微的  $\iff$  对于任意一个  $M$  上的区图  $(U, \varphi)$ ,  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  是  $\mathbb{R}^n$  上的开集  $\varphi(U)$  到  $\mathbb{R}$  的可微函数. 然而, 这一点我们仍然不能直接做到: 假设流形  $M$  上有两个区图  $(U, \varphi), (V, \psi)$ , 并且  $U \cap V \neq \emptyset$ , 那么在  $U \cap V$  上有  $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ , 如果我们想保证对于任何  $f$ ,  $f \circ \psi^{-1}$  在  $U \cap V$  上的可微性和  $f \circ \varphi^{-1}$  在  $U \cap V$  上的可微性是等价的, 那么我们至少需要  $\varphi \circ \psi^{-1}$  这个  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的映射是可微的, 而如果我们允许区图是任意选取的, 那么我们只能保证  $\varphi \circ \psi^{-1}$  是连续映射, 而不能保证它是可微映射——要知道, 数学分析中有数不胜数的连续但不可微的函数和映射的例子!

事实上, 我们只要在选择区图时能够先定一个“范围”, 使得这个“范围”内任意两个区图  $(U, \varphi)$  和  $(V, \psi)$ , 只要  $U \cap V \neq \emptyset$ , 那么  $\varphi \circ \psi^{-1}$  和  $\psi \circ \varphi^{-1}$

作为  $\mathbb{R}^n$  上的开集  $\varphi(U \cap V)$  和  $\psi(U \cap V)$  之间的映射就一定是光滑映射, 那么在这个流形上我们就不仅可以定义函数的连续性, 还可以定义函数连续性、可导性、光滑性等一系列微积分中的概念. 而这个“范围”, 就是我们要定义的光滑结构.

**定义 4.1.1** 在一个拓扑流形  $M$  上, 如果两个区图  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  满足: 在  $U \cap V$  上, 映射

$$\varphi|_{U \cap V} \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

$$\psi|_{U \cap V} \circ (\varphi|_{U \cap V})^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

作为  $\mathbb{R}^n$  上开集  $\varphi(U \cap V)$  和  $\psi(U \cap V)$  之间的映射是光滑映射, 那么我们称区图  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  是  $C^\infty$  相容的. 如果  $U \cap V = \emptyset$ , 则我们也认为  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  是  $C^\infty$  相容的. 如果  $M$  上的一族区图  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  ( $I$  是指标集) 中任意两个区图是  $C^\infty$  相容的, 并且  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$  (称为  $\mathcal{A}$  对  $M$  的“覆盖性”), 则称  $\mathcal{A}$  是一个  $M$  上的  $C^\infty$  图册或光滑图册. 如果  $\mathcal{A}$  还进一步满足“任取  $M$  上的区图  $(V, \varphi)$ , 如果  $(V, \varphi)$  与  $\mathcal{A}$  中的所有区图都是  $C^\infty$  相容的, 则  $(V, \varphi) \in \mathcal{A}$ ”那么我们称  $\mathcal{A}$  是  $M$  上的一个  $C^\infty$  结构或光滑结构. 一个定义了光滑结构的拓扑流形  $M$  被称为一个光滑流形. 一般微分流形指光滑流形.

对于拓扑流形  $M$  上任意一个  $C^\infty$  图册  $\mathcal{A}_0$ , 可以验证

$$\mathcal{A} = \{(V, \varphi) : (V, \varphi) \text{ 与 } \mathcal{A}_0 \text{ 中的所有区图 } C^\infty \text{ 相容}\} \quad (4.1)$$

是  $M$  上的一个光滑结构. (4.1) 中定义的  $\mathcal{A}$  称为  $C^\infty$  图册  $\mathcal{A}_0$  的极大化扩充. 一般来讲, 把一个微分流形上的光滑结构中的全体图册表述出来是很难的, 所以通常来说, 当我们要定义一个微分流形时, 会先指定  $M$  上的一个  $C^\infty$  图册  $\mathcal{A}_0$ , 然后把  $M$  上的光滑结构定义为  $\mathcal{A}_0$  的极大化扩充. 对于特别具体的流形, 我们构造的  $\mathcal{A}_0$  中的区图个数都会特别少.

**例 4.1.1** 球面  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , 我们定义  $S^2$  上的光滑结构  $\mathcal{A}$  为

$$\mathcal{A}_0 = \{(U, \varphi), (V, \psi)\} \quad (4.2)$$



的极大化扩充, 其中

$$\begin{cases} U = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ \varphi(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} V = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \\ \psi(x, y, z) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \end{cases}, \quad (4.3)$$

即  $\varphi$  和  $\psi$  分别是  $S^2$  在其南、北极的球极投影映射.

请读者自行验证, (4.2), (4.3) 中定义的  $S^2$  上的区图集确实是  $C^\infty$  图册, 并尝试将这种光滑结构的构造方式拓展到任意有限维球面  $S^n$  上.

**例 4.1.2** 对于  $\mathbb{R}^n$  的任意一个开集  $U$  上,  $\mathcal{A}_0 = \{(U, \text{id})\}$  就构成了一个  $U$  上的光滑图册, 其中  $\text{id}$  是恒同映射. 今后我们总是默认  $U$  是以上述  $\mathcal{A}_0$  的极大化扩充为光滑结构的光滑流形.

应为光滑结构对流形有覆盖性, 所以在一个光滑流形  $M$  上的任意一点  $p$  处, 我们都可以找到  $M$  上光滑结构  $\mathcal{A}$  中的一个区图  $(U, \varphi)$ , 使得  $p \in U$  (事实上, 满足这个条件的区图  $(U, \varphi)$  多得离谱). 从今往后, 对于一个光滑流形  $M$ , 我们说“取  $M$  上的一个区图  $(U, \varphi)$ ”或“取  $M$  上的一个局部坐标系  $(U; x^i)$ ”, 指的都是从  $M$  的光滑结构中选取, 而“在  $M$  上取  $p$  点处的一个局部坐标系  $(U; x^i)$ ”则意味着取一个  $M$  上光滑结构中的区图  $(U, \varphi)$  对应的局部坐标系  $(U; x^i)$ , 使得  $p \in U$ .

设  $M$  是一个光滑流形,  $(U, \varphi; x^i)$  和  $(V, \psi; y^i)$  是  $M$  上两个局部坐标系, 并且  $U \cap V \neq \emptyset$ , 那么我们称

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

为局部坐标系  $(U, \varphi; x^i)$  到  $(V, \psi; y^i)$  的**局部坐标变换**. 它可以表示为

$$y^i = (\psi \circ \varphi^{-1})^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

由此得到的  $n \times n$  矩阵<sup>1</sup>

$$J_{x;y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{简记为}} \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$$

<sup>1</sup> Jacobi 矩阵简记的规则: 分母上的指标为列号指标, 分子上的指标是行号指标

称为局部坐标变换  $\psi \circ \varphi^{-1}$  的 **Jacobi 矩阵**, 其行列式称为  $\psi \circ \varphi^{-1}$  的 **Jacobi 行列式**, 并且记

$$\frac{\partial (y^1, \dots, y^n)}{\partial (x^1, \dots, x^n)} := \det J_{x;y}.$$

设  $(U, \varphi; x^i)$  到  $(V, \psi; y^i)$  的局部坐标变换和  $(V, \psi; y^i)$  到  $(U, \varphi; x^i)$  的局部坐标变换的 Jacobi 矩阵分别是  $J_{x;y}$  和  $J_{y;x}$ , 则由于这两个局部坐标变换是互逆的, 容易得到

$$J_{x;y} J_{y;x} = I (\text{单位矩阵})$$

从而所有局部坐标变换的 Jacobi 矩阵都是非退化的, 即局部坐标变换的 Jacobi 行列式总是非 0 的.

设  $M$  是光滑流形,  $V$  是  $M$  上的开集, 那么我们可以在  $V$  上定义光滑结构为

$$\mathcal{A}_V = \{(U \cap V, \varphi|_{U \cap V}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\},$$

其中  $\mathcal{A}$  是  $M$  上的光滑结构, 使得  $V$  成为一个光滑流形, 称为  $M$  的一个 **开子流形**.

设  $M_1, M_2$  分别是  $n_1, n_2$  维光滑流形, 对应的微分结构分别是  $\mathcal{A}_1$  和  $\mathcal{A}_2$ , 令

$$M = M_1 \times M_2, \quad n = n_1 + n_2,$$

假设

$$\mathcal{A}_0 = \{(U \times V, \varphi \times \psi) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}_1, (V, \psi) \in \mathcal{A}_2\},$$

其中  $\varphi \times \psi$  的定义为

$$\begin{aligned} \varphi \times \psi : U \times V &\rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \\ p_1, p_2 &\mapsto (\varphi(p_1), \psi(p_2)) \end{aligned}$$

则容易验证  $\mathcal{A}_0$  是  $M$  上的一个  $C^\infty$  图册, 可极大化扩充为  $M$  上的一个光滑结构  $\mathcal{A}$ , 使得  $(M, \mathcal{A})$  为光滑流形. 称为  $M_1$  和  $M_2$  的 **积流形**.

## 4.2 光滑函数、光滑映射

在定义了光滑流形之后, 我们可以自然地引入光滑函数的定义. 更进一步地, 我们还可以引入光滑流形之间“光滑映射”的定义.

**定义 4.2.1** 设  $M$  是一个  $n$  维光滑流形,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  是定义在  $M$  上的实值函数. 如果  $f$  满足: 对于  $M$  上的任何区图  $(U, \varphi)$ ,  $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  都是  $\mathbb{R}^n$  中开集  $\varphi(U)$  上的光滑函数, 则称  $f$  是  $M$  上的一个**光滑函数**.

**定义 4.2.2** 设  $M, N$  分别是  $m, n$  维光滑流形,  $f$  是  $M \rightarrow N$  的映射,  $p \in M$ , 如果存在  $M$  在点  $p$  处的区图  $(U, \varphi)$  和  $N$  在点  $f(p)$  处的区图  $(V, \psi)$ , 使得  $f(U) \subseteq V$ , 且复合映射

$$f_{\varphi; \psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V) \quad (4.4)$$

(称作  $f$  的**局部坐标表示**) 是光滑映射, 则称映射  $f$  在点  $p$  处是光滑的或  $C^\infty$  的. 如果  $f$  在  $M$  上每一点  $p$  处都是光滑的, 则称  $f$  是  $M \rightarrow N$  的一个**光滑映射**. 如果  $f: M \rightarrow N$  是同胚映射, 且  $f: M \rightarrow N$  和  $f^{-1}: N \rightarrow M$  都是光滑映射, 则称  $f$  是  $M \rightarrow N$  的**光滑同胚映射** (简称**光滑同胚**). 如果两个光滑流形  $M, N$  之间存在同胚映射, 则称它们是**光滑同胚**的.

在上述定义中, 设  $M, N$  的维数分别是  $m, n$ , 区图  $(U, \varphi)$  和  $(V, \psi)$  分别对应于局部坐标系  $(U; x^1, \dots, x^m)$  和  $(V; y^1, \dots, y^n)$ , 那么 (4.4) 中定义的局部坐标表示可以写成坐标分量形式

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^m), \quad 1 \leq \alpha \leq n.$$

我们令

$$J_{x; y}[f] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{简记为}} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \right) \quad (4.5)$$

则  $J_{x; y}[f]$  是定义在  $U$  内的一个  $n \times m$  阶矩阵函数, 它与局部坐标系  $(U; x^i)$  和  $(V, y^\alpha)$  的选取有关. 通常把  $J_{x; y}[f]$  称为  $f$  关于局部坐标系  $(U; x^i)$  和  $(V, y^\alpha)$  的**Jacobi 矩阵**.

假定  $(\tilde{U}; \tilde{x}^i)$  和  $(\tilde{V}; \tilde{y}^\alpha)$  分别是  $p, f(p)$  在  $M, N$  中的另外一个局部坐标系, 使得  $f(\tilde{U}) \subseteq \tilde{V}$ . 如果  $f$  关于  $(\tilde{U}; \tilde{x}^i)$  和  $(\tilde{V}; \tilde{y}^\alpha)$  的局部坐标表达式为

$$\tilde{y}^\alpha = \tilde{f}^\alpha(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m), \quad 1 \leq \alpha \leq n.$$

则由链式法则, 在  $p$  点的一个开邻域  $U_0 \subseteq U \cap \tilde{U}$  内成立如下变换公式

$$\begin{aligned} J_{\tilde{x}; \tilde{y}}[f] &= \left( \frac{\partial \tilde{f}^\alpha}{\partial \tilde{x}^i} \right) = \left( \frac{\partial \tilde{y}^\alpha}{\partial y^\beta} \right) \left( \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} \right) \left( \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \right) \\ &= \left( \frac{\partial \tilde{y}^\alpha}{\partial y^\beta} \right) J_{x, y}[f] \left( \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \right) \end{aligned}$$

由于  $\left( \frac{\partial \tilde{y}^\alpha}{\partial y^\beta} \right)$  和  $\left( \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \right)$  分别是  $M, N$  上局部坐标变换的 Jacobi 矩阵, 从而是可逆的, 故  $J_{\tilde{x}; \tilde{y}}[f]$  和  $J_{x, y}[f]$  具有相同的秩. 由  $p, (U, x^i), (V, y^i), (\tilde{U}, \tilde{x}^i), (\tilde{V}, \tilde{y}^i)$  的任意性, 知光滑映射  $f$  在  $M$  的任意点  $p$  处局部坐标表示的 Jacobi 矩阵的秩与局部坐标的选取无关, 只与  $p$  有关, 称为  $f$  在  $p$  点的**秩**, 记作  $\text{rank}_p f$ . 后面我们将看到,  $\text{rank}_p f$  等于  $f$  在  $p$  点处诱导的切映射  $f_{*p}$  作为切空间之间的线性映射的秩.

设  $M$  和  $N$  分别是  $m, n$  维光滑流形,  $f: M \rightarrow N$  是光滑映射,

- 如果  $m \leq n$ ,  $f$  是单射, 且  $f$  在  $M$  上任意一点处的秩等于  $m$ , 则称  $f$  是  $M \rightarrow N$  的**光滑浸入**; 进一步地, 如果  $f$  还是 (作为拓扑空间)  $M$  到  $N$  的嵌入映射, 则称  $f$  是一个  $M \rightarrow N$  的**光滑嵌入**.
- 如果  $m \geq n$ ,  $f$  是满射, 且  $f$  在  $M$  上任意一点处的秩等于  $n$ , 则称  $f$  是  $M \rightarrow N$  的**光滑淹没**.

一般地, 如果  $m = n$  且  $f$  既是浸入又是淹没, 则  $f$  是光滑同胚.

此外,  $\mathbb{R}$  上的则称  $\gamma$  是  $M$  上的一条**光滑曲线**.

Whitney 在 1935 年证明了: 所有  $n$  维光滑流形都可以光滑嵌入到  $\mathbb{R}^{2n+1}$  中.

### 4.3 单位分解定理

设  $M$  是一个微分流形, 如果  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$  ( $I$  是指标集) 是  $M$  上的一族开集, 使得  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ , 则称  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  是  $M$  的一族开覆盖. 对于  $M$  上的一族开覆盖  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ , 如果存在一族  $M$  上的光滑函数  $\{g_i : i = 1, 2, \dots\}$ , 使得

1. 对于任意  $p \in M$  及正整数  $i$ , 有  $0 \leq g_i(p) \leq 1$ ,
2. 对于每一个  $g_i$ , 均存在一个  $\alpha(i) \in I$ , 使得  $g_i|_{M \setminus U_{\alpha(i)}} \equiv 0$ ,
3. 对于任意  $p \in M$ , 仅存在有限多个正整数  $i$ , 使得  $g_i(p) \neq 0$ ,
4. 对于任意  $p \in M$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(p) = 1$ ,

则称  $\{g_i : i = 1, 2, \dots\}$  是从属于开覆盖  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$  的一个单位分解. 注意: 由于第 3 个条件的存在, 第 4 个条件中的求和在每一点处实际上都是有限求和.

**定理 4.3.1 (单位分解定理)** 对于微分流形  $M$  的任何开覆盖  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ , 均存在从属于它的单位分解.

单位分解定理的证明需要用到流形的第二可数性. 单位分解定理可以用来证明 Whitney 嵌入定理、定义光滑流形上的积分等, 是一个在严格分析中非常有力的工具.

### 4.4 切向量、余切向量

一个曲面在某点处的切向量, 直观来讲就是某个动点在这个曲面上运动时经过这一点时可能的运动速度向量. 为了在数学上严格化这一表述, 我们假设一个光滑流形  $M$  上有一条光滑曲线  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , 使得  $\gamma(0) = p$ , 我们期待的  $p$  处的一个切向量应该是类似于 “ $\gamma$  在  $t = 0$  处的导数” 这样一个东西. 如果  $M$  是  $\mathbb{R}^n$  的嵌入子流形, 那么  $\gamma$  也是  $\mathbb{R}^n$  中的曲线,  $p$  也是  $\mathbb{R}^n$  中的一个点, 那么

$$v = \gamma'(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\gamma(\tau) - \gamma(0)}{\tau} \quad (4.6)$$

自然也是  $\mathbb{R}^n$  中的一个向量。令  $\gamma$  取遍所有可能的满足  $\gamma(0) = p$  的曲线，我们就得到了  $M$  在  $p$  处的所有可能切向量。

但是一般的流形不是欧氏空间的嵌入子流形<sup>2</sup>，我们需要找到另外一种方式来重新定义“切向量”。我们还是想定义一个类似于  $\gamma'(0)$  的东西，但是在流形失去其所嵌入的欧氏空间之后， $\gamma$  不再是某个特定欧氏空间中的曲线，从而 (4.6) 这种定义方式失去了意义。这时该怎么办呢？

第一种解决方法是直接把  $\gamma$  本身定义成切向量。但这样做有一个问题：两条不同的曲线  $\gamma_1, \gamma_2$  经过  $p$  点的“速度”完全有可能是相同的，此时它们就应该对应于同一个切向量。为此，我们可以把切向量定义成“经过  $p$  点时速度相同的曲线的等价类”。至于“速度相同”，它可以通过任选局部坐标的方式定义。这种定义方式是直截了当的，直观性会比较强，并且在一定定义下，我们可以很方便地定义诸如向量场的积分曲线这些跟曲线相关的概念。Arnold 和 Marsden 等人的数学物理著作中均采用了这种定义方式。

第二种解决方法是把切向量定义成“方向导数”，这种方法略微迂回一些。其思路是这样的：虽然我们没法直接去定义  $\gamma'(0)$ ，但是对于  $M$  上任意一个光滑函数  $f$ ，我们可以定义

$$(f \circ \gamma)'(0) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(\tau)) - f(\gamma(0))}{\tau}, \quad (4.7)$$

我们把 (4.7) 中定义的  $(f \circ \gamma)'(0)$  记作  $v(f)$ ，这样我们就定义了一个  $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  的映射  $v$ ，并且容易验证，对于任意实数  $c$  及任何  $M$  上的光滑函数  $f, g$ ，有

$$v(f + cg) = v(f) + cv(g), \quad (4.8)$$

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f), \quad (4.9)$$

其中  $fg$  指的是  $f$  和  $g$  逐点相乘， $p = \gamma(0)$ 。这样，我们想要定义的切向量就是  $v$  这样一个满足 (4.8), (4.9) 两条性质的  $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  的映射。

**定义 4.4.1** 设  $M$  是光滑流形， $p \in M$ ， $v$  是一个  $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  的映射<sup>3</sup>，如果对于任意实数  $c$  及任何  $M$  上的光滑函数  $f$  和  $g$  都有 (4.8), (4.9) 两式成

<sup>2</sup>虽然 Whitney 定理保证流形都能嵌入到欧氏空间，但是我们不希望“切向量”这个几何学对象的定义必须依赖于流形上定义的坐标系或流形所嵌入的更大的空间，这便是近现代几何学的“内蕴”思想。

<sup>3</sup>只要  $f$  在  $p$  附近一个邻域上有定义且光滑， $v(f)$  就是有意义的。事实上，我们可以证明，若  $f$  在  $p$  的

立【(4.9)一般称为 **Leibniz 法则**】，则称  $v$  是光滑流形  $M$  在  $p$  点处的一个切向量.  $M$  在  $p$  点处的全体切向量组成的集合称为  $M$  在  $p$  点处的切空间，记作  $T_p M$ .

对于任意  $v, w \in T_p M$ , 及  $c \in \mathbb{R}$ , 容易验证

$$\begin{aligned} v + cw : C^\infty(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto v(f) + cw(f) \end{aligned}$$

亦满足 (4.8), (4.9), 从而  $v + cw \in T_p M$ , 这就是说  $T_p M$  对其中元素作为  $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  的函数的逐点加法、数乘运算是封闭的, 从而  $T_p M$  构成一个线性空间. 可以证明, 对于任意  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  及包含  $p$  点的局部坐标系  $(U, \varphi; x^i)$ , 都存在唯一一组实数  $v^1, \dots, v^n$ , 使得

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \quad (4.10)$$

这里  $n = \dim M$ ,  $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \in T_p M$  的定义是: 对于每一个  $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) &= \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} (\varphi(p)) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\varphi^{-1}(x^1(p), \dots, x^i(p) + \Delta x, \dots, x^n(p))) - f(p)}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

其中  $x^j(p)$  是  $\varphi(p)$  的第  $j$  个坐标分量,  $j = 1, \dots, n$ . 该命题的证明可以在任何一本微分流形课本中都看到, 并且是大同小异的, 在此不多赘述.

(4.10) 被称为  $v$  在局部坐标系  $(U, \varphi; x^i)$  下的局部坐标表示, 它告诉我们,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

构成了  $T_p M$  的一组基底, 从而

$$\dim T_p M = n = \dim M. \quad (4.12)$$

---

一个开邻域  $U$  上有定义且光滑, 则我们可以找到一个在整个  $M$  上光滑的函数  $\tilde{f}$  及  $p$  的一个开邻域  $V$ , 使得  $V \subseteq U$  且  $\tilde{f}|_V = f|_V$ , 此时我们把  $v(f)$  定义成  $v(\tilde{f})$  即可, 并且可以进一步证明, 这样定义的  $v(f)$  与  $\tilde{f}$  的选取无关.

这是符合直观的. 并且对于  $M$  中任意两个包含  $p$  的坐标系  $(U, \varphi; x^i)$  和  $(V, \psi; y^i)$ , 我们可以推导出基底变换公式

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p, \quad (4.13)$$

这里

$$\left. \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (y^j) \in \mathbb{R} \quad (y^j \text{ 被看作 } U \text{ 上定义的光滑函数}).$$

这就是说, 基底  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right\}$  和基底  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p \right\}$  之间的过渡矩阵是 Jacobi 矩阵  $J_{x;y}|_p = \left( \left. \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right|_p \right)$ . 按照线性代数的理论, 如果一个切向量  $v \in T_p M$  在  $(U, \varphi; x^i)$  和  $(V, \psi; y^i)$  下的局部坐标表示分别是

$$v = \sum_{i=1}^n v_\varphi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = \sum_{i=1}^n v_\psi^i \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_p,$$

那么我们有

$$v_\psi^j = \sum_{i=1}^n v_\varphi^i \left. \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right|_p, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.14)$$

$T_p M$  的对偶空间称为  $M$  在  $p$  处的**余切空间**, 记作  $T_p^* M$ .  $T_p^* M$  中的向量称为  $M$  在  $p$  处的余切向量.

**例 4.4.1** 设  $f$  是  $M$  上的光滑函数, 那么我们称映射

$$\begin{aligned} T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(f) \end{aligned}$$

为  $f$  在  $p$  处的**微分**, 记作  $df|_p$  或  $df(p)$ . 可以验证,  $df|_p \in T_p^* M$ .

$T_p^* M$  既然是  $T_p M$  的对偶空间, 那么其维数也与  $T_p M$  相同, 即等于流形  $M$  的维数. 事实上对于  $M$  上任意一个包含  $p$  的局部坐标系  $(U; x^i)$ ,  $T_p M$  的基底  $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$  的对偶基底是  $dx^1|_p, dx^2|_p, \dots, dx^n|_p$ , 其中  $dx^i|_p$



是函数  $x^i$  作为  $U \subseteq M$  上定义的光滑函数在  $p$  点处的微分, 而对于任何一个在  $U \subseteq M$  上定义的光滑函数  $f$ , 我们有

$$df|_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p dx^i|_p,$$

这里  $\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) \in \mathbb{R}$ , 这样, 对于包含  $p$  的另一组局部坐标系  $(V; y^i)$ , 我们可以给出  $T_p^*M$  上基底之间的坐标变换公式

$$dy^j|_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_p dx^i|_p, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.15)$$

注意对比 (4.13) 和 (4.15), 它们分别两个基底和它们相应的对偶基底之间的坐标变换公式, 符合一般对偶基坐标变换公式的规律.

流形之间的光滑映射也会诱导相应流形上的切向量和余切向量上的映射. 假设  $F$  是光滑流形  $M \rightarrow N$  的光滑映射, 那么对于  $M$  上任意一点  $p$ , 及  $p$  点处任意一个切向量  $v \in T_pM$ , 我们定义

$$\begin{aligned} F_*(v) : C^\infty(N) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto v(f \circ F), \end{aligned} \quad (4.16)$$

则容易验证  $F_*(v) \in T_{f(p)}N$ . 这样给出的  $F_*$  对于  $M$  上任意一个给定的点  $p$  是一个  $T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  的映射, 并且容易验证这个映射是线性映射, 即对于任意  $v, w \in T_pM$  及  $c \in \mathbb{R}$ , 有

$$F_*(v + cw) = F_*(v) + cF_*(w).$$

通常  $F_*(v)$  也写作  $F_*v$ .

仍假设  $F$  是光滑流形  $M \rightarrow N$  的光滑映射, 那么对于  $M$  上任意一点  $p$ , 及  $f(p) \in N$  处的任意一个切向量  $\alpha \in T_{f(p)}N$ , 我们定义

$$\begin{aligned} F^*(\alpha) : T_p^*(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \alpha(F_*(v)). \end{aligned}$$

则容易验证  $F^*(\alpha) \in T_{f(p)}^*N$ ,  $F^*$  对于  $M$  上任意一个给定的点  $p$  是一个  $T_{f(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$  的映射, 并且容易验证这个映射是线性映射, 它实际上就是  $F_*$  作为  $T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  的线性映射的对偶映射.

未来  $F_*$  和  $F^*$  也会用在向量场之间的映射上, 因此当我们强调  $F^* F_*$  是点  $p$  处切/余切空间与点  $f(p)$  处切/余切空间的映射时, 通常会把它们记作  $F_{*p}$  和  $F_p^*$ .

设  $M, N$  的维数分别是  $m, n$ ,  $(U; x^i), (V; y^j)$  分别是  $M$  和  $N$  上的局部坐标系, 使得  $p \subseteq U, f(p) \subseteq V$ , 并且  $f$  在这两个局部坐标系下的坐标表示为

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^m), \quad 1 \leq \alpha \leq n,$$

那么容易验证,  $F_{*p}$  作为  $T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  的线性映射, 其在基底

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^m} \right|_p \text{ 和 } \left. \frac{\partial}{\partial y^1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial y^2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial y^n} \right|_p$$

下的矩阵表示不是别的, 恰好是 (4.5) 中定义的 Jacobi 矩阵  $J_{x;y}[F]$  在  $p$  点处的取值, 而  $J_{x;y}[F]$  在  $p$  点处的秩也便是线性映射  $F_{*p}$  的秩, 从而我们可以把  $F$  在  $p$  处的秩定义为线性映射  $F_{*p}$  的秩.  $F_{*p}$  作为不依赖于坐标定义的线性映射, 其秩当然与  $T_p M$  和  $T_{f(p)} N$  的基底选取无关, 从这一角度也能看出,  $F$  在  $p$  点处的秩与  $(U; x^i), (V; y^j)$  的选取无关.

有了切映射, 我们可以重新审视曲线本节开头提到的  $\gamma'(0)$ . 设流形  $M$  上有一条光滑曲线  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ , 我们把  $\gamma$  看作是光滑映射, 则可以定义

$$\gamma'(\tau) = \gamma_* \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} \right), \quad \tau \in (a, b) \quad (4.17)$$

为曲线  $\gamma$  在  $\gamma(\tau) \in M$  处的切向量, 其中  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau}$  指的是映射

$$C^\infty(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.18)$$

$$f \mapsto f'(\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{f(\tau + \Delta\tau) - f(\tau)}{\Delta\tau}.$$

接下来的命题说明切映射和余切映射会继承光滑映射的复合运算.

**命题 4.4.1** 设  $M, N, P$  是三个流形,  $F, G$  分别是  $M \rightarrow N, N \rightarrow P$  的光滑映射, 则  $G \circ F$  作为  $M \rightarrow P$  的光滑映射, 其切映射和余切映射分别满足

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*, \quad (4.19)$$

及

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*. \quad (4.20)$$

**证明:** 任取  $M$  上一点  $p$ , 及一个  $p$  处的切向量  $v$ , 我们有

$$\begin{aligned} (G \circ F)_*(v)(f) &= v(f \circ (G \circ F)) = v((f \circ G) \circ F) \\ &= F_*(v)(f \circ G) = G_*(F_*(v))(f) \\ &= (G_* \circ F_*)(v)(f) \end{aligned}$$

从而 (4.19) 得证; 而对于  $p$  处的任何余切向量  $\omega$  和, 有

$$\begin{aligned} (G \circ F)^*(\omega)(v) &= \omega((G \circ F)_*(v)) = \omega(G_*(F_*(v))) \\ &= G^*(\omega)(F_*(v)) = F^*(G^*(\omega))(v) \\ &= (F^* \circ G^*)(\omega)(v) \end{aligned}$$

从而 (4.20) 得证. ■

最后简单探讨一下本节中我们介绍的切映射和余切映射的直观意义。

我们把切映射定义成了“方向导数”，即定义在流形的光滑函数上的算子，但实际上切映射更加直观的几何意义是流形上某一点处运动的速度方向，即由 (4.17) 式定义的曲线的切向量。假设光滑流形  $M$  上有一条光滑曲线  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , 使得  $\gamma(0) = p$  而  $\gamma'(0) = v$ , 即  $v$  是  $\gamma$  在  $t = 0$  处的切向量. 那么对于任何一个光滑流形  $N$  及一个光滑映射  $F: M \rightarrow N$ , 那么  $F \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$  是  $N$  上的一条光滑曲线, 并且我们有

$$\begin{aligned} (F \circ \gamma)'(0) &= (F \circ \gamma)_* \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\ &= F_* \left( \gamma_* \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \right) \quad \text{这里用到了 (4.19)} \\ &= F_* v \end{aligned}$$

这就是说,  $F_* v$  可以看作曲线  $F \circ \gamma$  在  $t = 0$  处的切向量. 这就是说, **切映射会把曲线的切向量映射到曲线的切向量。**

余切映射的几何意义会略微复杂一些。假设  $p$  是光滑流形  $N$  上的一点  $\alpha$  是  $p$  点处的一个余切向量,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  是光滑映射, 使得  $df|_p = \alpha$ . 那么

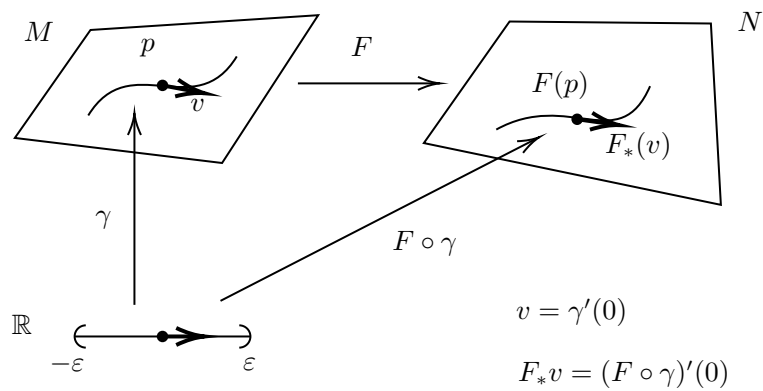


图 4.1: 切映射把曲线的切向量映射到曲线的切向量

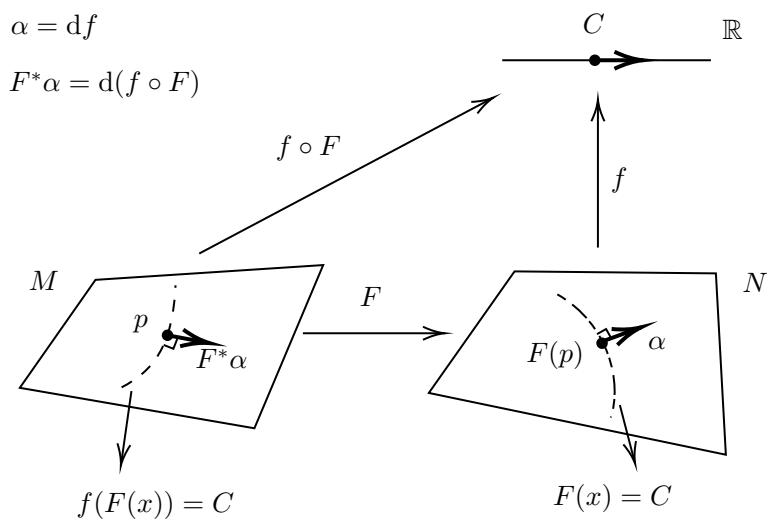


图 4.2: 余切映射会把函数的微分映射成函数的微分, 把曲面的法向量映射成曲面的法向量

对于任何一个光滑流形  $M$  及一个光滑映射  $F: M \rightarrow N$ ,  $f \circ F$  也是  $M$  上的一个光滑函数, 此时, 对于任何一个且切向量  $v$

$$\begin{aligned} d(f \circ F)(v) &= v(f \circ F) = F_*(v)(f) \\ &= df(F_*(v)) = F^*(df)(v) \end{aligned}$$

也就是说如果  $\alpha = df$ , 那么  $F^*\alpha = d(f \circ F)$ , 这就是说, **余切映射会把函数的微分映射成函数的微分**. 为了进一步给出余切映射的几何直观, 我们不妨假设  $M$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个开集,  $f(p) = C$ , 并且  $f$  的水平集  $M_C = \{x \in M : f(x) = C\}$  是  $M$  的一个  $n-1$  维光滑嵌入子流形, 那么

$$df(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p dx^i \Big|_p$$

对应于梯度向量

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial f}{\partial x^2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \Big|_p \right)^\top,$$

而后者可以看作是  $M_C$  在  $p$  点处的法向量. 从而我们还可以说, **余切映射把曲面的法向量映射成曲面的法向量**.

## 4.5 切丛与余切丛

设  $M$  是一个  $n$  维光滑流形, 则在每一点  $p \in M$  有切空间  $T_p M$ . 令

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

在本节, 要在集合  $TM$  上给出拓扑结构和光滑结构, 使它成为一个  $2n$  维光滑流形. 这样, 从光滑流形  $M$  出发构造一个新的光滑流形  $TM$ . 对这个新的光滑流形的结构进行解析, 便可抽象出  $M$  上的向量丛的概念. 向量丛是许多数学分支的研究对象和工具.

首先定义映射  $\pi: TM \rightarrow M$  如下:  $\forall p \in M, \forall v \in T_p M$ , 令

$$\pi(v) = p, \quad (4.21)$$

换言之, 映射  $\pi$  会把每一个切向量  $v \in TM$  映到它的起点  $p$ . 于是,

$$\pi^{-1}(p) = T_p M, \pi(T_p M) = \{p\}.$$

假定  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in I\}$  是  $m$  为光滑流形  $M$  上的光滑结构, 令

$$u_\alpha^i(p) = (\varphi_\alpha(p))^i, \forall p \in U_\alpha,$$

则  $(U_\alpha; u_\alpha^i)$  是  $M$  的局部坐标系. 很明显,

$$\bigcup_{\alpha \in I} \pi^{-1}(U_\alpha) = TM.$$

对于每一个  $\alpha \in I$ , 定义映射  $\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$  如下: 设

$$p \in U_\alpha, y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\psi_\alpha(p, y) = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i} \Big|_p. \quad (4.22)$$

由于  $\left\{ \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i} \Big|_p \right\}$  是  $U_\alpha$  上的自然标架场, 每一个且想来那个  $v \in T_p M (p \in U_\alpha)$  有唯一的线性表示

$$v = y^i \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i} \Big|_p,$$

所以映射  $\psi_\alpha$  是一一对应. 这样, 借于映射  $\psi_\alpha$  可以把  $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  的拓扑移植到  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  上来. 如果在  $\pi^{-1}(U_\alpha) (\alpha \in I)$  上如此获得的拓扑是彼此相容的, 则在  $TM$  上定义了一个拓扑结构.

为了使叙述简单, 先来考察  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  上的局部坐标系和坐标变换公式, 借此在  $TM$  上便同时建立起拓扑结构和光滑结构. 对于每一个  $\alpha \in I$ , 定义映射  $\Phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  如下:

$$\Phi_\alpha \left( \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i} \Big|_p \right) = (u_\alpha^1(p), \dots, u_\alpha^n(p), y^1, \dots, y^n). \quad (4.23)$$

很明显,  $\Phi_\alpha$  把  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  一对一地映为  $\mathbb{R}^{2n}$  中开集  $(\psi_\alpha, U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ . 因此,  $\Phi_\alpha$  可以看作集合  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  上的坐标映射, 因而  $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$  是  $TM$  的一个坐标卡.

当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , 且  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  时, 设切向量  $v \in T_p M$  有两个表达式

$$v = \sum_{i=1}^n \tilde{y}^i \frac{\partial}{\partial u_\beta^i} \Big|_p = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i} \Big|_p, \quad (4.24)$$

因此  $v$  的分量  $\tilde{y}^i$  和  $y^j$  满足关系式

$$\tilde{y}^i = \sum_{j=1}^n y^j \frac{\partial u_\beta^i}{\partial u_\alpha^j}. \quad (4.25)$$

由于  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  和  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  是  $C^\infty$  相关的,

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是  $C^\infty$  映射, 即

$$u_\beta^i = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^i(u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n) \quad (4.26)$$

是  $u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n$  的  $C^\infty$  函数. (4.25) 说明  $\tilde{y}^i$  是  $u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n, y^1, \dots, y^n$  的  $C^\infty$  函数, 即坐标变换

$$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n, y^1, \dots, y^n) = (u_\beta^1, \dots, u_\beta^n, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)$$

是从  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$  到  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$  的光滑映射.

特别地, 映射

$$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

是连续的. 这意味着映射

$$\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha(p, y^1, \dots, y^n) = (p, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)$$

是从  $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$  到它自身的连续映射, 因而是同胚 (因为他的逆映射  $(\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha)^{-1} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta$  也是连续的). 所以, 对于每一个  $\alpha \in I$ , 当  $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  的拓扑通过映射  $\psi_\alpha$  移植到  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  上是, 所得到的的拓扑是彼此相容的. 事实上, 当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时,

$$\psi_\alpha = \psi_\beta \circ (\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha) : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta).$$

由于  $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$  是同胚, 在  $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) = \pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)$  上通过映射  $\psi_\alpha$  移植的拓扑与通过  $\psi_\beta$  移植的拓扑是一致的, 因而在  $TM$  上确定了一个拓扑结构. 显然, 在  $TM$  的这个拓扑下, 映射

$$\Phi_\alpha = (\varphi_\alpha \times \text{id}) \circ \psi_\alpha^{-1} : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

是同胚. 所以  $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha) : \alpha \in I\}$  给出了  $TM$  的一个  $C^\infty$ -相关的坐标覆盖, 即一个  $C^\infty$  图册, 它在  $TM$  上确定了一个光滑结构, 使得  $TM$  成为  $2n$  维光滑流形.

另一方面, 在  $TM$  的上述光滑结构下, 映射  $\pi : TM \rightarrow M$  在局部坐标邻域  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  上的表达式是

$$\pi = \varphi_\alpha \circ \Phi_\alpha^{-1} : (u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n, y^1, \dots, y^n) \mapsto (u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n).$$

由此可知,  $\pi$  是光滑的开映射. 此外,

$$\Phi_\alpha \circ \psi_\alpha(p, y) = \Phi_\alpha \left( \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i} \Big|_p \right) = (u_\alpha^1(p), \dots, u_\alpha^n(p), y^1, \dots, y^n),$$

故映射  $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$  是光滑同胚. 总之, 我们有

**定义 4.5.1** 按上述方式定义的光滑流形  $TM$  被称为  $M$  的**切丛**. 即: 作为集合,  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ ; 作为拓扑空间,  $TM$  的一个子集  $S$  为开集当且仅当对每一个基本坐标系  $(U_\alpha; u_\alpha^i)$ ,  $\Phi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap S)$  是  $\mathbb{R}^{2n}$  中的开集, 其中  $\pi$  是由 (4.21) 定义的丛投影映射,  $\Phi_\alpha$  是由 (4.23) 定义的  $\pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  的映射; 作为光滑流形,  $TM$  上的光滑结构由  $C^\infty$  图册  $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha) : \alpha \in I\}$  极大化扩充而来.

用完全类似的方式, 我们也可以定义**余切丛**

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

上的拓扑结构和光滑结构, 使之成为一个光滑流形.



## 第五章 微分流形上的微积分

### 5.1 切向量场、余切向量场、张量场

设  $M$  是一个  $n$  维光滑流形, 通俗地讲,  $M$  上的一个切向量场  $X$  指的是  $M$  的每一个点  $p$  处指定一个  $T_p M$  处的切向量  $X(p)$ . 换言之,  $M$  上的切向量场是一个映射  $X: M \rightarrow TM$ , 使得对于任意一点  $p \in M$ ,  $X(p) \in T_p M$ , 有时  $X(p)$  也记作  $X_p$ .

比如, 在  $M$  的任意一个局部坐标系  $(U; x^i)$  下,  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  是  $U$  上的切向量场. 特别是, 这样一组切向量场在  $U$  中每一个点  $p$  处的值构成该空间  $T_p M$  的一个基底, 通常称这样一组切向量场为  $U$  上的一个**标架场**. 为了叙述方便, 以后成  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : i = 1, \dots, n \right\}$  为  $M$  在局部坐标系  $(U; x^i)$  下的**自然标架场**.

**定义 5.1.1** 设  $X: M \rightarrow TM$  是  $n$  维光滑流形  $M$  上的切向量场, 如果对于每一个点  $p \in M$ , 存在  $p$  点的局部坐标系  $(U; x^i)$ , 使得  $X$  限制在  $U$  上的局部坐标表达式

$$X|_U = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5.1)$$

中, 分量  $X^i$  都是  $U$  上的光滑函数 ( $i = 1, \dots, n$ ), 则称  $X$  是  $M$  上的**光滑切向量场**.

由定义和局部坐标系的  $C^\infty$  相关性立即可得,  $M$  上的一个切向量场  $X$  为光滑切向量场  $\iff X$  关于每一个自然标架场的分量是光滑函数  $\iff X$  在每一个坐标系  $(U, x^i)$  上的限制  $X|_U$  是  $U$  上的光滑切向量场.

**例 5.1.1** 设  $(U; x^i)$  是  $m$  维光滑流形  $M$  的局部坐标系, 则相应的坐标切向量场  $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$  是定义在  $U$  上的光滑切向量场.

$M$  上光滑切向量场的集合记为  $\mathfrak{X}(M)$ . 显然,  $\mathfrak{X}(M)$  关于加法和数乘是封闭的, 因而它是一个向量空间. 还可以进一步定义光滑函数与光滑切向量场的乘法如下: 对于任意的  $f \in C^\infty(M), X \in \mathfrak{X}(M), M$

上的切向量场  $fX$  定义为

$$(fX)(p) = f(p) \cdot X(p), \quad \forall p \in M$$

在任意的局部坐标  $(U; x^i)$  下, 如果

$$X|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

则有

$$(fX)|_U = \sum_{i=1}^m (f|_U \cdot X^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

由此得知,  $fX \in \mathfrak{X}(M)$ .

**命题 5.1.1** 设  $X$  是  $m$  维光滑流形  $M$  上的一个光滑切向量场, 则  $X$  可以视为映射

$$X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

其定义如下: 对于任意的  $f \in C^\infty(M)$ ,

$$(X(f))(p) = (X(p))(f), \quad \forall p \in M \quad (5.2)$$

并且映射  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  满足下面的两个条件: 对于任意的  $f, g \in C^\infty(M)$  以及  $\lambda \in \mathbb{R}$

- $X(f + \lambda g) = X(f) + \lambda X(g)$
- $X(fg) = gX(f) + fX(g)$ .

反之, 任意一个满足上述两个条件的映射

$$X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

都是由  $M$  上的一个光滑切向量场通过式 (5.2) 确定的.

上述命题的证明只需要验证光滑性即可，这是分析细节，此处从略。

**命题 5.1.2** 设  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . 将  $X, Y$  视为前述从  $C^\infty(M)$  到它自身的映射. 则由

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \quad (5.3)$$

定义的映射  $[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  仍然满足命题 (5.1.1) 的条件 1 和 2. 从而  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ .

**证明:** 对于任意的  $f, g \in C^\infty(M)$  以及  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 有

$$\begin{aligned} (f + \lambda g) &= (X \circ Y - Y \circ X)(f + \lambda g) \\ &= X(Y(f + \lambda g)) - Y(X(f + \lambda g)) \\ &= X(Y(f) + \lambda Y(g)) - Y(X(f) + \lambda X(g)) \\ &= X(Y(f)) + \lambda X(Y(g)) - Y(X(f)) - \lambda Y(X(g)) \\ &= (X \circ Y - Y \circ X)(f) + \lambda(X \circ Y - Y \circ X)(g) \\ &= [X, Y](f) - \lambda[X, Y](g) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} (fg) &= (X \circ Y - Y \circ X)(fg) \\ &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\ &= X(Y(f)g + Y(g)f) - Y(X(f)g + X(g)f) \\ &= X(Y(f))g + X(g)Y(f) + X(Y(g))f + Y(g)X(f) \\ &\quad - Y(X(f))g - Y(g)X(f) - Y(X(g))f - X(g)Y(f) \\ &= X(Y(f))g - Y(X(f))g + X(Y(g))f - Y(X(g))f \\ &= (X \circ Y - Y \circ X)(f)g + (X \circ Y - Y \circ X)(g)f \\ &= [X, Y](f)g + [X, Y](g)f \end{aligned}$$

这就验证了条件 1 和 2. ■

由  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  通过 (5.3) 确定的光滑切向量场  $[X, Y]$  称为  $X, Y$  的 **Lie 括号**. 可以验证, Lie 括号  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  满足

1. 分配律:  $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$ ;
2.  $[\lambda X, Y] = \lambda[X, Y]$
3. 反交换律:  $[X, Y] = -[Y, X]$ ;
4. Jacobi 恒等式:  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$
5.  $[fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X, Y]$

**例 5.1.2** 是  $(U; x^i)$  是  $n$  维光滑流形  $M$  上的一个局部坐标系, 则对于任意  $i, j = 1, \dots, n$ , 有

$$\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(U), \text{ 且 } \left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$$

这里的 0 表示在  $U$  上处处为零向量的向量场.

**证明:** 对于任意  $f \in C^\infty(U)$ , 我们有

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] f = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = 0,$$

即偏导数可交换性条件. 故  $\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$ . ■

[设  $(U; x^i)$  是  $n$  为光滑流形  $M$  上的一个局部坐标系,  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , 并且  $X, Y$  在  $(U; x^i)$  下的局部坐标表示分别为

$$X|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y|_U = \sum_{i=1}^m Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

则我们可以计算出  $[X, Y]$  在  $(U; x^i)$  下的局部坐标表示

$$[X, Y]|_U = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

设  $M$  和  $N$  分别是  $m, n$  维光滑流形,  $f: M \rightarrow N$  是光滑映射, 如果  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , 则对于每一点  $p \in M$ ,  $f_*(X(p)) \in T_{f(p)}N$ . 但是一般来说,  $f_*X$  不构成  $N$  上的切向量场. 一来,  $f$  可能不是单射, 使得  $f_*X$  在  $N$  的某一个点处有多个不同的取值; 二来,  $f$  可能不是满射, 使得  $f_*X$  在  $N$  的某些点

处没有被指派任何取值：两种情形都不符合切向量场的定义。但是如果  $f$  是  $M \rightarrow N$  的光滑同胚，则对于  $M$  上的任何一个向量场  $X$ ,  $f_*X$  便一定构成  $M$  上的切向量场，而且是一个光滑的切向量场，并且可以证明

$$1. f_*(X + cY) = f_*X + cf_*Y$$

$$2. f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$$

对任意  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  及  $c \in \mathbb{R}$  成立。事实上， $f_*$  还建立了切丛  $TM$  和切丛  $TN$  之间的光滑同胚。

余切向量场也可以类似地定义： $M$  上的余切向量场是一个映射  $\alpha: M \rightarrow T^*M$ , 使得对于任意一点  $p \in M$ ,  $\alpha(p) \in T_p^*M$ . 比如，在  $M$  的任意一个局部坐标系  $(U; x^i)$  下， $dx^i$  是  $U$  上的切向量场。如果对于每一个点  $p \in M$ , 存在  $p$  点的局部坐标系  $(U; x^i)$ , 使得  $\alpha$  限制在  $U$  上的局部坐标表达式

$$\alpha|_U = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i \quad (5.4)$$

中，分量  $\alpha^i$  都是  $U$  上的光滑函数 ( $i = 1, \dots, n$ ), 则称  $X$  是  $M$  上的**光滑余切向量场**。全体光滑余切向量场的集合记为  $A^1(M)$ 。

有趣的是，对于光滑流形之间的光滑映射，我们可以定义相应流形上向量场之间的余切映射，并且这种定义并不对  $f$  有任何限制。

**定义 5.1.2 (余切映射)** 设  $f: M \rightarrow N$  是光滑流形间的光滑映射，则对于  $N$  上的任意一个余切向量场  $\alpha$ , 我们定义  $f^*\alpha$  为  $M$  上的一个余切向量场，使得对于  $M$  上的任意一个切向量（或切向量场） $X$ , 有

$$f^*\alpha(X) = \alpha(f_*X)$$

这样定义的  $f^*$  是  $A^1(N) \rightarrow A^1(M)$  的映射，称为由  $f$  诱导的**余切映射**或**拉回映射**。

## 5.2 单参数微分同胚群、Lie 导数

本节我们讨论当流形上的点沿其上某向量场“运动”的规律，并由此引入很重要的“Lie 导数”的概念。

**定义 5.2.1** 设  $M$  是  $n$  维光滑流形,  $\varphi$  是  $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$  的光滑映射, 并且对于任意  $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$ , 记

$$\varphi_t(p) = \varphi(t, p),$$

如果  $\varphi$  满足

1.  $\varphi_0 = \text{id}$
2.  $\forall s, t \in \mathbb{R}, \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$

则称  $\varphi$  是作用在  $M$  上的**单参数微分同胚群**.

对于任意  $t \in \mathbb{R}$ , 由于  $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{t-t} = \text{id}$ , 从而  $\varphi_t$  是可逆的, 从而  $\varphi_t$  是光滑同胚. 此外, 还容易推知, 对于任意  $p \in M$ ,

$$\gamma_p = \varphi(\cdot, p) : \mathbb{R} \rightarrow M$$

是  $M$  上经过  $p$  点的一条光滑曲线, 称为单参数微分同胚群  $\varphi$  经过  $p$  点的**轨线**.

用  $X_p$  表示  $\gamma_p$  在  $p$  处的切向量, 记为  $X_p = \gamma'_p(0)$ , 则对于任意  $f \in C^\infty(M)$ , 有

$$X_p(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \gamma_p(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t, p)) - f(p)}{t} \quad (5.5)$$

这样我们就得到了定义在  $M$  上的切向量场  $X$ , 称为单参数微分同胚群  $\varphi$  在  $M$  上**诱导的切向量场**. 可以验证, 向量场  $X$  是光滑的, 并且  $\varphi$  的任意一条轨线是它诱导的切向量场  $X$  的积分曲线, 即

$$\gamma'_p(s) = X_{\gamma_p(s)}$$

对任意  $p \in M, s \in \mathbb{R}$  成立.

当然, 并不是所有流形上的切向量场都是某个单参数微分同胚群诱导的切向量场. 比如说在开区间  $(-1, 1)$  上, 匀直向量场

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} : C^\infty((-1, 1)) &\rightarrow C^\infty((-1, 1)) \\ f &\rightarrow \frac{df}{dt} \end{aligned}$$

就不可能是任何单参数微分同胚群诱导的切向量场（直观地来讲，你不可能让一条线段上每一个点都以相同的非零速度匀速直线运动而保持这条线段的整体位置不变）。这种情况下，我们可以引入局部单参数微分同胚群的概念，使得更多的切向量场能够由微分同胚群诱导得来。

**定义 5.2.2** 设  $U$  是光滑流形  $M$  的一个开子集， $\varepsilon > 0$ ，对于任意  $p \in U$ ， $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ，记  $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$  如果光滑映射  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$  满足以下几个条件：

$$(5.1). \varphi_0 = \text{id} : U \rightarrow U$$

$$(5.2). \text{ 若 } |s|, |t|, |s+t| \text{ 均小于 } \varepsilon \text{ 且 } p \in U, \varphi_t(p) \in U, \text{ 则 } \varphi_{s+t}(p) = \varphi_s \circ \varphi_t(p)$$

则称  $\varphi_t$  是作用在  $U$  上的**局部单参数微分同胚群**。

局部单参数微分同胚群可以诱导出任意光滑切向量场。具体而言，对于光滑流形  $M$  及其上任意一个光滑切向量场  $X$ ，任取一点  $p \in M$ ，可以找到一个包含  $p$  的开集  $U$ ，使得  $X|_U$  是  $U$  上的某个局部单参数微分同胚群  $\varphi_t(|t| < \varepsilon)$  诱导的切向量场。这里“诱导”仍然沿用 (5.5) 式中的定义。此时称  $\varphi_t$  是有切向量场  $X$  生成的局部单参数变换群。

利用（局部）单参数微分同胚群，可以给出 Lie 括号的另外一种解释方式。设  $X, Y$  是  $M$  上的光滑切向量场， $X$  生成的局部单参数群为  $\varphi_t$ 。对于  $p \in M$ ，定义切向量场  $\mathcal{L}_X Y$ ，使得其在  $p$  点处的取值

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-s})_* Y_{\varphi(s)} - Y_p}{s} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\varphi_{-s})_* Y_{\varphi(s)}, \quad (5.6)$$

其中极限是在切空间  $T_p M$  中求得，所以是良定义的。我们称  $(\mathcal{L}_X Y)$  是  $Y$  关于  $X$  的**Lie 导数**。如果  $X$  生成的单参数微分同胚群实际上是一个全局的单参数微分同胚群，那么 Lie 导数的定义还可以写成更加简明的形式

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-s})_* Y - Y}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Y - (\varphi_s)_* Y}{s}. \quad (5.7)$$

关于 Lie 导数，最为重要的一个结论就是

**定理 5.2.1** 对于任意  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ，有

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad (5.8)$$

由此, 我们可以得到这样一些推论: 设  $X$  是由单参数微分同胚群  $\varphi$  诱导的切向量场, 则

1. 对于任意微分同胚  $h: M \rightarrow M$ ,  $h_*X = X$  当且仅当对于任意  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_s \circ h = h \circ \varphi_s$ .
2.  $[X, Y] = 0$  当且仅当则对于任意  $s$ ,  $(\varphi_s)_*Y = Y$
3.  $[X, Y] = 0$  当且仅当对于任意的  $s, t$ , 有  $\varphi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_s$ , 其中  $Y$  是由单参数微分同胚群  $\psi$  诱导的切向量场

### 5.3 光滑张量场

假设我们在  $n$  维光滑流形  $M$  的每一点  $p$  处的切空间  $T_pM$  上定义了一个  $k$  重线性函数  $\tau_p$ , 则我们称  $\tau$  为  $M$  上的一个  $k$  阶协变张量场. 线性空间中的  $k$  阶协变张量上的加法、标量乘法、张量积等都可以按照逐点的方式定义在流形上的张量场上.

对于  $M$  上任意一个局部坐标系  $(U; x^i)$ ,  $\tau$  都有一个局部坐标表达式

$$\tau = \tau_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^1 \otimes dx^2 \otimes \dots \otimes dx^k$$

(这里我们用到了 Einstein 求和约定), 其中每一个  $\tau_{i_1 i_2 \dots i_k}$  是  $U$  上的实值函数, 称为这个局部坐标系下  $\tau$  的系数. 如果对于每一个  $\tau_{i_1 i_2 \dots i_k}$  作为  $U$  上的函数是光滑函数, 则称  $\tau$  在局部坐标系  $(U; x^i)$  上光滑; 如果  $\tau$  在  $M$  的每一个局部坐标系中都光滑, 则称  $\tau$  是一个  **$k$  阶光滑协变张量场**.  $M$  上全体  $k$  阶光滑协变张量场组成的集合记作  $T_k^0(M)$ , 特别地,  $T_1^0(M)$  就是全体余切向量场所组成的集合, 也就是先前提到的  $A^1(M)$ .

光滑协变张量场可以看作是  $k$  个切向量场到光滑函数的映射, 即对于  $M$  上的任意  $k$  个向量场  $X_1, \dots, X_k$ , 我们定义

$$\tau(X_1, \dots, X_k)(p) = \tau_p(X_{1p}, \dots, X_{kp}),$$

其中  $X_{jp} \in T_pM$  是向量场  $X_j$  在  $p$  点处的取值 ( $j = 1, \dots, k$ ). 可以验证, 这样定义的  $\tau(X_1, \dots, X_k)$  是  $M$  上的一个光滑函数. 这样, 每一个  $T_k^0(M)$  中



的元素  $\tau$  可以看作一个

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ 个 } \mathfrak{X}(M)} \rightarrow C^\infty(M) \quad (5.9)$$

的映射.

但是反过来, 形如 (5.9) 的映射却并不一定都能定义光滑张量场. 事实上, 由于光滑张量场的逐点性质, 对于任何  $X, X_1, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $i \in \{1, \cdots, k\}$  及  $f \in C^\infty(M)$ , 我们应该有

$$\begin{aligned} \tau(X_1, \cdots, X_i + fX, \cdots, X_k) &= \tau(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_k) \\ &\quad + f\tau(X_1, \cdots, X, \cdots, X_k) \end{aligned} \quad (5.10)$$

这里的乘法都是指的逐点相乘. 事实上可以证明, 如果 (5.10) 被满足, 那么  $\tau$  就具有局部性, 从而可以用来定义光滑张量场.

在上述定义下, 余切向量场  $\alpha$  可以定义为  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  的满足

$$\alpha(fX) = f\alpha(X)$$

的映射.

对于流形上的光滑协变张量, 我们也可以定义其“拉回映射”.

**定义 5.3.1** 设  $M, N$  分别是光滑流形,  $f: M \rightarrow N$  是它们之间的光滑映射,  $N$  上有一个  $k$  阶协变张量场  $\tau$ , 则我们定义  $f^*\tau$  是  $M$  上的一个协变张量场, 使得对于任意  $p \in M$  及  $X_1, \cdots, X_k \in T_p M$ , 有

$$f^*\tau(X_1, X_2, \cdots, X_k) = \tau(f_*X_1, f_*X_2, \cdots, f_*X_k). \quad (5.11)$$

如果  $f$  是光滑同胚, (5.11) 还对任意切向量场  $X_1, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$  成立.

从而我们也可以定义  $\tau$  对于一个光滑切向量场  $Y$  的 Lie 导数为

$$\mathcal{L}_Y \tau = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t})_* \tau - \tau}{t}, \quad (5.12)$$

其中  $\varphi_t$  是  $Y$  生成的单参数微分同胚群. 可以证明,

$$\mathcal{L}_Y \tau(X_1, X_2, \dots, X_k) = Y(\tau(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \tau(X_1, \dots, [Y, X_i], \dots, X_k). \quad (5.13)$$

(5.13) 可以作为矢量场对更一般的切向量场的 Lie 导数的定义.

最后, 我们特别地介绍一类二阶协变张量场: Riemann 度量. 首先回顾: 对一个线性空间中的双线性函数, 如果其满足正定性和对称性, 那么我们就称它为一个内积函数.

**定义 5.3.2** 设  $M$  是光滑流形, 如果其上有一个二阶协变张量场  $g$  在每一个点  $p$  处切空间  $T_p M$  上定义的二元线性函数都是内积函数, 则称  $\tau$  是  $M$  上的一个 **Riemann 度量**, 定义了 Riemann 度量的流形称为 **Riemann 流形**.

显然, 由上述定义,  $g$  在任何一个  $M$  的局部坐标系  $(U; x^i)$  下的局部坐标表达式是

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

其中对每一个  $i$  和  $j$ ,  $g_{ij}$  都是  $U$  上的光滑函数, 并且矩阵

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

在  $U$  上任意一点处都是对称正定的, 也就是定义了  $T_p M$  上的内积函数, 进而赋予了  $T_p M$  中切向量长度、夹角、正交等概念. Riemann 流形是现代微分几何学的基础. 在 Riemann 度量的基础之上可以建立流形上曲线长度、曲率、曲面曲率等概念.

## 5.4 微分形式与外微分

**定义 5.4.1** 如果一个光滑流形  $M$  上的一个光滑  $k$  阶协变切向量场  $\varphi$  在每一个点  $p \in M$  的切空间  $T_p M$  上定义的  $k$  重线性函数是反对称的, 则称  $M$  是反对称的. 反对称的  $k$  阶协变张量场称为  **$k$  阶微分形式** 或  **$k$ -形式**.  $M$  上全体  $k$ -形式组成的集合记作  $A^k(M)$ , 特别地,  $A^1(M)$  就是全体光滑余切向量场组成的集合.

$k$ -形式作为  $k$  阶协变张量场的特例, 自然满足  $k$  阶协变张量场的所有性质, 从而也能写成形满足 (5.10) 的  $k$  个切向量场到光滑函数的映射. 此外, 对于一个  $k$ -形式  $\omega$  和一个切向量场  $Y$ , Lie 导数  $\mathcal{L}_Y \omega$  的定义与  $k$  阶协变张量场的 Lie 导数的定义完全一致, 即

$$\mathcal{L}_Y \omega(X_1, X_2, \dots, X_k) = Y(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \tau(X_1, \dots, [Y, X_i], \dots, X_k). \quad (5.14)$$

所有线性代数中  $k$  形式的运算: 加法、数乘、楔积等, 都可以按逐点的方式定义在流形上的  $k$  阶微分形式上. 具体而言,  $A^k(M)$  上加法、数乘定义为

$$(\varphi + c\psi)(p) = \varphi(p) + c\psi(p),$$

楔积定义为

$$(\varphi \wedge \psi)(p) = \varphi(p) \wedge \psi(p) = \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}_{r+s}(\varphi(p) \otimes \psi(p)) = \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}_{r+s}(\varphi \otimes \psi)(p),$$

其中  $r, s$  分别是  $\varphi, \psi$  的阶数, 并且楔积具有性质

1.  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$ , 其中  $r, s$  分别是  $\alpha, \beta$  的阶数
2.  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
3.  $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$ ,  $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$
4.  $f(\alpha \wedge \beta) = (f\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (f\beta)$ , 这里  $f$  是光滑函数,  $f\alpha, f\beta$  是逐点乘法运算.

可以证明, 如果  $\omega$  是  $n$  维光滑流形  $M$  上的一个  $k$ -形式, 则  $\omega$  在  $M$  的一个局部坐标系  $(U; x^i)$  下必有形如

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (5.15)$$

的局部表达式, 并且这一表达式的形式是唯一的. 当然, 上式中如果我们不写  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  这个条件, 直接使用 Einstein 求和约定, 那么这个表达式就不一定是唯一的了, 比如说  $dx \wedge dy$ , 我们就可以给它写成

$$-dy \wedge dx, \quad \frac{1}{2}(dx \wedge dy - dy \wedge dx)$$

等多种形式.

流形上的微分形式除了这些逐点运算之外, 还有一种独特的运算——外微分. 外微分的定义有多种等价版本, 下面我们列举三个最常见的. 首先我们令

$$A(M) = \bigoplus_{k=0}^n A^k(M), \quad n = \dim M. \quad (5.16)$$

**定义 5.4.2** 外微分  $d$  是一个  $A(M) \rightarrow A(M)$  的映射, 使得对于任意非负整数  $k$ , 若  $\omega \in A^k(M)$ , 则  $d\omega \in A^{k+1}(M)$ , 并且:

(版本一) 对于  $M$  上的每一个容许坐标系  $(U; x^i)$ , 若  $(U; x^i)$  上的局部表达式是

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

则  $d\omega$  在  $U$  上的局部表达式是

$$d\omega|_U = \sum_{j=1}^n \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \cdots i_k}}{\partial x^j} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k};$$

(版本二) 对于任意  $k+1$  个光滑切向量场  $X_1, \cdots, X_{k+1}$ , 有

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, X_2, \cdots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{k+1}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

这里的  $\hat{X}$  表示删去  $X$ .

(版本三) 满足如下四个条件:

1.  $d$  是线性的, 即对于任意  $\varphi, \psi \in A(M)$  和  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 有

$$d(\varphi + \lambda\psi) = d\varphi + \lambda d\psi$$

2. 对于任意  $\varphi \in A^k(M)$ ,  $\psi \in A(M)$  有

$$d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge d\psi$$

3. 对于任意  $f \in C^\infty(M) = A^0(M)$ ,  $df$  是  $f$  的微分
4.  $d^2 = d \circ d \equiv 0$ , 即对于任意  $\omega \in A(M)$ , 有  $d(d\omega) = 0$ .

可以验证, 满足上述四个条件的  $d$  是唯一的.

上述定义中的版本一二三是两两可以互推的, 在此不多赘述. 特别地, 对于定义中的版本二, 我们取  $k = 1$ , 则对于任意  $\omega \in A^1(M)$  及  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , 我们有

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \quad (5.18)$$

一个  $k$  阶微分形式  $\omega$  如果满足  $d\omega = 0$ , 则称它是**闭的**; 而如果存在一个  $k-1$  阶微分形式  $\alpha$ , 使得  $d\alpha = \omega$ , 则称  $\omega$  是**恰当的**. 由外微分定义版本三中的第 (5.4) 条形式, 恰当的微分形式也必然是闭的 (因为  $d\omega = d(d\alpha) = 0$ ), 反过来问题是: 若  $d\omega = 0$ , 是否存在  $\alpha$ , 使得  $\omega = d\alpha$ ? 这一般来讲是不成立的, 但是我们有

**定理 5.4.1 (Poincaré 引理)** 设  $\omega$  是光滑流形  $M$  上的  $k$ -形式, 并且  $d\omega = 0$ , 则对任意  $p \in M$ , 存在  $p$  的一个邻域  $U$  及  $U$  上定义的光滑  $k-1$  形式  $\alpha$ , 使得在  $U$  上  $\omega = d\alpha$ .

上述定理告诉我们, 闭的微分形式在每一个局部上是恰当的. 如果读者去看 Poincaré 引理的证明, 就会发现上述  $U$  通常被构造为一个与  $\mathbb{R}^n$  上开球同胚的开集, 事实上, 闭形式与恰当形式这两个集合之间的关系很大程度上取决于流形  $M$  的拓扑结构. 这是所谓 deRham 上同调的内容, 在此不多赘述.

一个微分形式  $\omega$  对一个向量场  $X$  的 Lie 导数可以用外微分式来表示. 具体而言, 我们有

**定理 5.4.2 (Cartan 魔术公式)** 设  $\omega$  是光滑流形  $M$  上的微分形式,  $X$  是光滑流形  $M$  上的光滑切向量场, 则

$$\mathcal{L}_X \omega = d(\iota_X \omega) + \iota_X(d\omega), \quad (5.19)$$

其中  $\iota_X$  是一个  $A(M) \rightarrow A(M)$  的映射, 使得对于任意非负整数  $k$ , 若  $\omega \in A^k(M)$ , 则  $\iota_X \omega \in A^{k-1}(M)$ , 并且对于任意  $k+1$  个光滑切向量场

$Y_1, \dots, Y_{k-1}$ , 有

$$\iota_X \omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}), \quad (5.20)$$

称为  $A(M)$  上的**内乘**运算. 对于光滑函数  $f$ , 规定  $\iota_X f$  总是等于 0.

上述定理可以利用 (5.14), (5.17) 和 (5.20) 直接证明, 但是细节比较繁琐, 此处从略. 本章最后我们会列举一些与内乘、外微分、Lie 导数有关的公式, 它们也都可以由定义式直接证明.

最后, 我们讨论一类特殊的微分形式, 它们的阶数等于流形的维数. 这样类微分形式称为最高阶微分形式. 在线性代数部分我们探讨过, 阶数超过空间本身维数的反对称协变张量都是零张量.

设  $M$  是  $n$  维微分流形, 则  $M$  上的任意最高阶微分形式 (即  $n$ -形式)  $\omega$  在  $M$  的任意局部坐标系  $(U, x^i)$  下都必然具有

$$\omega|_U = \tilde{\omega} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

的形式, 其中  $\tilde{\omega}$  是  $U$  上的光滑函数. 如果对于  $M$  的任意局部坐标系  $(U, x^i)$ , 上述  $\tilde{\omega}$  都是处处非零的, 则称  $\omega$  是**非退化的**. 容易证明, 对于  $M$  上任意两个非退化的最高阶形式  $\omega_1, \omega_2$ , 都存在一个处处非零的函数  $f \in C^\infty(M)$ , 使得  $\omega_1 = f\omega_2$ . 我们记  $f = \omega_1/\omega_2$ .

现在假设  $M$  是连通的, 并且  $M$  上有一个非退化的最高阶形式  $\omega$ , 那么对于  $M$  上的任意一个非退化的最高阶形式  $\omega'$ , 我们可以断言:  $f = \omega'/\omega$  要么处处为正, 要么处处为负. 这是因为, 如果  $f$  在  $M$  的某点  $p$  处为正,  $q$  处为负, 则在  $p, q$  的任意一条路径上, 都会存在一个点, 使得  $f$  在此处取值为 0, 与  $f$  处处非零矛盾. 由此我们可以给出流形**可定向性及定向**的概念.

**定义 5.4.3** 设一个光滑流形  $M$  连通, 如果其上存在一个非退化的最高阶形式  $\omega$ , 则称  $M$  是**可定向的**. 对于  $M$  上的任意两个非退化的最高阶形式  $\omega_1, \omega_2$ , 如果  $\omega_1/\omega_2$  是恒正函数, 则称  $\omega_1$  与  $\omega_2$  **定向相同**; 如果  $\omega_1/\omega_2$  是恒负函数, 则称  $\omega_1$  与  $\omega_2$  **定向相反**.  $M$  上全体非退化的最高阶形式组成的集合按照定向相同这一关系可以划分成两个等价类, 每一个等价类称为  $M$  上的一个**定向**. 某一个体非退化的最高阶形式  $\omega$  所在的等价类称为由  $M$  上由  $\omega$  决定的**定向**.

很多时候, 我们会对可定向流形取定一个定向为**正定向**. 当我们说一个局部坐标系  $(U; x^i)$  是正定向的时, 我们的意思是说  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$  这个最高阶形式是正定向的.

对于欧氏空间  $\mathbb{R}^n$ , 我们通常取  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$  所决定的定向为正定向, 特别地, 对于  $\mathbb{R}^2$  和  $\mathbb{R}^3$ , 我们分别取  $dx \wedge dy$  和  $dx \wedge dy \wedge dz$  所决定的定向为为**正定向**; 对于二维球面

$$S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

我们称  $\mathbb{R}^3$  上的 2-形式

$$\omega = xdy \wedge dx + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

在  $S^2$  上的限制  $\omega|_{S^2}$  所决定的定向作为这个球面的正定向, 称为“外法线方向”.

设  $M$  是可定向 Riemann 流形, 其上 Riemann 度量为  $g$ , 并且已经取定了一个定向为正定向, 那么我们可以在  $M$  上取定这样一个最高阶形式  $\Omega$ , 使得在  $M$  的任意局部坐标系  $(U; x^i)$  下, 如果  $g$  的局部表达式为

$$g|_U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}^* dx^i \otimes dx^j,$$

则  $\Omega$  在  $(U; x^i)$  下的表达式是

$$\Omega|_U = \pm \sqrt{\det g_{ij}^*} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

其中待定的正负号的选取规则是: 若  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$  是正定向的, 则为“+”, 否则为“-”. 可以验证, 上述定义的  $\Omega$  与坐标选取无关, 它被称为有向 Riemann 流形  $M$  上的**体积形式**. 特别地, 对于欧氏空间  $\mathbb{R}^n$ , 其上体积形式就是  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ .

## 5.5 最高阶形式的积分、Stokes 定理

在流形上可以定义最高阶形式的积分——在经典微积分理论中, 我们通常只说“对函数进行积分”, 但实际上我们积分的对象是一个函数与一个默认

体积形式的乘积. 比如说这样一个重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

看上去积分的对象是  $f(x, y, z)$ , 但实际上积分的对象是

$$f(x, y, z) \, dx \wedge dy \wedge dz$$

这个  $\Omega$  上的微分形式. 如果我们换成在球坐标下积分, 那么这个积分应该写成

$$\iiint_{\Omega} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi,$$

被积函数的形式完全变了, 但是被积分的体积形式

$$f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = f(x, y, z) \, dx \wedge dy \wedge dz$$

在每一个点处是没有变化的. 因此, 经典积分理论中对函数的重积分到流形上的自然拓展实际上是对流形上最高阶形式的积分, 而不是对函数的积分.

首先给出最高阶微分形式在不同局部坐标系下的坐标变换公式. 设  $M$  是  $n$  维光滑流形,  $\omega$  是  $M$  上的一个  $n$ -形式,  $\omega$  在局部坐标系  $(U; x^i)$  和  $(V; y^i)$  下的表达式分别为

$$\omega|_U = \omega_x dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \text{ 和 } \omega|_V = \omega_y dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n,$$

那么在  $U \cap V$  上, 必然有

$$\omega_x dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = \omega_y dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n. \quad (5.21)$$

将坐标变换公式

$$dy^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

代入 (5.21), 我们就能得到

$$\omega_x = \det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \omega_y = J_{x;y} \omega_y. \quad (5.22)$$



接下来我们来定义流形上最高阶形式的积分. 首先我们先去定义所谓“紧支撑”的最高阶形式的积分. 类似于对光滑函数支撑集的定义, 我们定义

$$\text{supp}\omega = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}},$$

这里  $\bar{A}$  表示  $A$  的闭包. 此外, 为了防止技术性细节的干扰, 我们假设被积分的流形总是连通的、可定向的, 并且我们已经规定了其上一个定向为正定向.

首先定义支撑集可以被一个局部坐标系覆盖的最高阶形式的积分. 设  $\omega$  是  $n$  维定向流形  $M$  上的正定向的局部坐标系, 如果存在一个  $M$  上的正定向局部坐标系  $(U, \varphi; x^i)$ , 使得,  $\text{supp}\omega \subseteq U$ , 并且  $\omega$  在  $U$  上的局部坐标表达式是

$$\omega|_U = a dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

那么我们定义

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (a \circ \varphi^{-1}) dx^1 dx^2 \cdots dx^n. \quad (5.23)$$

上式右端与  $(U, \varphi)$  的选取无关. 事实上, 另选一个的局部坐标系  $(V, \psi; y^i)$ , 如果  $\text{supp}\omega \subseteq V$ , 并且  $\omega$  在  $V$  上的局部坐标表达式是

$$\omega|_V = b dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

那么我们有

$$\begin{aligned} & \int_{\psi(V)} (b \circ \psi^{-1}) dy^1 dy^2 \cdots dy^n = \int_{\psi(U \cap V)} (b \circ \psi^{-1}) dy^1 dy^2 \cdots dy^n \\ &= \int_{\psi(U \cap V)} (b \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial(y^1, \cdots, y^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} dx^1 dx^2 \cdots dx^n \\ &= \int_{\varphi(U \cap V)} (a \circ \varphi^{-1}) dx^1 dx^2 \cdots dx^n = \int_{\varphi(U)} (a \circ \varphi^{-1}) dx^1 dx^2 \cdots dx^n, \end{aligned}$$

其中我们用到了

$$\begin{aligned} a dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n &= b dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n \\ &= b \frac{\partial(y^1, \cdots, y^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

为了定义更一般的  $M$  上的最高阶形式的积分, 我们可以取任意一个  $M$  上正定向的局部坐标覆盖  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  并且假设  $\{h_\alpha : \alpha \in I\}$  是从属于  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  的单位分解, 那么对于任意  $M$  上的最高阶形式  $\omega$ , 我们可以定义

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha \in I} \int_M h_\alpha \omega = \sum_{\alpha \in I} \int_M ((h_\alpha \omega) \circ \varphi_\alpha^{-1}) dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n, \quad (5.24)$$

其中  $x_\alpha^i$  是  $\varphi_\alpha$  的第  $i$  个分量. 可以证明, 这种定义方式的与局部坐标覆盖的选取无关.

**定义 5.5.1** 由 (5.24) 定义的数值  $\int_M \omega$  称为  $\omega$  在  $M$  上的**积分**.

当然, 不是所有微分形式在流形  $M$  上的积分都是有意义的, 这取决于 (5.24) 这个表达式是否有意义. 事实上, (5.24) 这种定义方式更多还只是理论价值. 没有人实际计算时去直接使用这个公式. 通常来讲, 我们如果要计算  $\int_M \omega$ , 我们会在  $M$  上选择至多可数多个区图  $\{(U_i, \varphi_i) : i = 1, 2, \cdots\}$ , 使得  $U_i$  两两之交为空, 并且  $\bigcup_{i=1}^\infty U_i = M \setminus$  一个  $M$  上的零测集<sup>1</sup>, 然后计算

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^\infty \int_{U_i} \omega,$$

其中  $\int_{U_i} \omega$  可以用 (5.23) 获得, 这和我们初等微积分中处理第二类曲线、曲面积分的方式是一致的, 并且可以证明, 用这种方式获得的积分与 (5.24) 所定义的积分是完全一致的.

有了积分, 我们可以把经典微积分中的 Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式统一成 Stokes 定理. Stokes 定理描述的是一个带边流形边缘与内部的积分之间的转化关系。

**定义 5.5.2** 设  $M$  是一个  $n$  为光滑流形, 如果  $M$  的一个子集  $D$  中的点可以分为两类:

---

<sup>1</sup>对于不知道何为零测集的读者: 把它理解成流形上更低维的超曲面即可. 比方说在一个球面上, 其上任何大圆都是零测集; 对于知道何为零测集的读者:  $M$  上的零测集即在任何区图下被映射为  $\mathbb{R}^n$  中零测集的集合, 虽然我们不能用局部坐标映射自然地定义流形  $M$  上的测度, 但却可以用它来定义  $M$  上的零测集.

1. 内点.  $p \in D$  如果满足: 存在一个  $p$  的邻域  $U$ , 使得  $U \subseteq D$ , 则称  $p$  为内点.
2. 边界点.  $p \in D$  如果满足: 在  $M$  中有一个包含  $p$  点的局部坐标系  $(U, \varphi; x^i)$ , 使得  $\varphi(p)$  是坐标原点, 并且  $U \cap D = \{q \in U : x^n(q) \geq 0\}$ .

则称  $D$  是  $M$  上的一个**带边区域**. 带边区域的边界点的集合记作  $\partial D$ .

可以证明,  $\partial D$  是  $M$  的一个  $m-1$  维的闭嵌入子流形, 并且当  $M$  是可定向流形时,  $\partial D$  也是可定向的. 设  $p \in \partial D$  的一个局部坐标系  $(U; x^i)$  是  $M$  上正定向的局部坐标系, 那么

$$(U \cap \partial D; x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$$

也是  $\partial D$  的局部坐标系, 并且  $M$  在  $\partial D$  上诱导的定向是由

$$(-1)^n dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

给出的, 使得  $\partial D$  称为有诱导定向的光滑流形. 上述规定与微积分中  $\mathbb{R}^2$  或  $\mathbb{R}^3$  在带边区域的边界上诱导的定向是一致的.

**定理 5.5.1 (Stokes 定理)** 设  $M$  是  $n$  维光滑流形,  $D$  是  $M$  的一个带边区域, 则对于任意  $\omega \in A^{m-1}(M)$ , 有

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega. \quad (5.25)$$

该定理的证明细节比较繁多, 此处从略. 但是如果大家去学习微分流形的专著的话, 则会发现, 其实证明 Stokes 定理的最核心步骤仍然是大家最为熟知的 Newton-Lebniz 公式

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

其余步骤只是对流形上技术性细节的处理. 接下来我们来介绍作为 Stokes 定理的特例的 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式.

**Green 公式**

设  $D$  是  $\mathbb{R}^2$  上的有界闭区域,  $\omega$  是  $D$  上的 1-形式

$$\omega = Pdx + Qdy,$$

那么

$$d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

由 Stokes 定理有

$$\int_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy,$$

这就是多元微积分中的 Green 公式.

**Gauss 公式**

设  $D$  是  $\mathbb{R}^3$  上的有界闭区域,  $\omega$  是  $D$  上的 2-形式

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

那么

$$d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

由 Stokes 定理有

$$\int_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{\partial D} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy,$$

这就是多元微积分中的 Gauss 公式.

**Stokes 公式**

设  $S$  是  $\mathbb{R}^3$  中一块有向曲面, 其边界  $\partial S$  是一条简单闭曲线,  $\omega$  是  $\mathbb{R}^3$  上的一个 1-形式

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

那么

$$d\omega = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

由 Stokes 定理, 有

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

这就是多元微积分中的 Stokes 公式.

## 5.6 流形上的常用微积分公式一览

以下公式摘录自 [MarsdenSymmetry], 它们在我们讨论力学, 尤其是 Hamilton 力学时经常用到. 它们大都可以直接从定义式来证明, 但这里我们只是把这些公式列举出来供读者需要时回来翻看.

1. 流形  $M$  上的 Lie 导数的定义是: 对于  $M$  上任意两个切向量场  $X, Y$ , 有

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X, \quad (5.26)$$

其在局部坐标系  $(U; x^i)$  下的局部坐标表达式为

$$[X, Y]|_U = \sum_{i,j=1}^{\dim M} \left( X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5.27)$$

其中  $X^j, Y^j$  是  $X, Y$  在  $(U; x^i)$  下的局部表达式, 即

$$X|_U = \sum_{i=1}^{\dim M} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y|_U = \sum_{i=1}^{\dim M} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5.28)$$

2. 对于微分同胚  $\varphi, \psi$ , 有

$$\varphi_*[X, Y] = [\varphi_*X, \varphi_*Y] \text{ 和 } (\varphi \circ \psi)_*X = \varphi_*\psi_*X \quad (5.29)$$

3. 对于两个微分形式  $\alpha$  和  $\beta$ , 有

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha, \quad (5.30)$$

其中  $k, l$  分别是  $\alpha$  和  $\beta$  的阶数.

4. 对于流形间的光滑映射  $\varphi$  和  $\psi$ , 我们有

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta \quad \text{和} \quad (\varphi \circ \psi)^*\alpha = \psi^*\varphi^*\alpha \quad (5.31)$$

5.  $d$  是线性映射,  $dd\alpha = 0$ , 并且

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta, \quad (5.32)$$

其中  $k$  是  $\alpha$  的阶数.

6. 对于任意  $k+1$  个光滑切向量场  $X_1, \dots, X_{k+1}$ , 有

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

7. 对于一个光滑映射  $\varphi$ , 我们有

$$\varphi^*d\alpha = d\varphi^*\alpha \quad (5.34)$$

8. (Poincaré 引理) 设  $\omega$  是光滑流形  $M$  上的  $k$ -形式, 并且  $d\omega = 0$ , 则对任意  $p \in M$ , 存在  $p$  的一个邻域  $U$  及  $U$  上定义的光滑  $k-1$  形式  $\alpha$ , 使得在  $U$  上  $\omega = d\alpha$ .

9.  $\iota_X \alpha$  对  $X, \alpha$  是双线性的, 并且对于光滑函数  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iota_{hX} \alpha = h \iota_X \alpha = \iota_X h \alpha. \quad (5.35)$$

此外,  $\iota_X \iota_X \alpha = 0$  并且

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = \iota_X \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X \beta \quad (5.36)$$

其中  $k$  是  $\alpha$  的阶数.

10. 对于一个光滑同胚  $\varphi$ , 有

$$\varphi^*(\iota_X \alpha) = \iota_{\varphi^*X}(\varphi^*\alpha) \quad (5.37)$$

11.  $\mathcal{L}_X \alpha$  对  $X, \alpha$  是双线性的, 并且有

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta \quad (5.38)$$

12. Cartan 魔术公式:

$$\mathcal{L}_X \alpha = d\iota_X \alpha + \iota_X d\alpha \quad (5.39)$$

13. 对于一个光滑同胚  $\varphi$ , 有

$$\varphi^* \mathcal{L}_X \alpha = \mathcal{L}_{\varphi^* X} \varphi^* \alpha \quad (5.40)$$

14.  $\mathcal{L}_X \alpha$  的定义为

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) &= X[\alpha(X_1, \dots, X_k)] \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \alpha(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k) \end{aligned} \quad (5.41)$$

15. 下列恒等式成立:

- $\mathcal{L}_f X \alpha = f \mathcal{L}_X \alpha + df \wedge \iota_X \alpha$
- $\mathcal{L}_{[X, Y]} \alpha = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \alpha - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \alpha$
- $\iota_{[X, Y]} \alpha = \mathcal{L}_X \iota_Y \alpha - \iota_Y \mathcal{L}_X \alpha$
- $\mathcal{L}_X d\alpha = d\mathcal{L}_X \alpha$
- $\mathcal{L}_X \iota_X \alpha = \iota_X \mathcal{L}_X \alpha$
- $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta$

16. 如果一个向量场  $X$  和微分形式  $\alpha$  分别有局部坐标表达式

$$X = X^l \frac{\partial}{\partial x^l} \quad \text{和} \quad \alpha = \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (5.42)$$

其中  $i_1 < \cdots < i_k$ , 那么如下恒等式成立:

$$\begin{aligned}
 d\alpha &= \left( \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^l} \right) dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\
 \iota_X \alpha &= X^l \alpha_{li_2 \dots i_k} dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\
 \mathcal{L}_X \alpha &= X^l \left( \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^l} \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\
 &\quad + \alpha_{li_2 \dots i_k} \left( \frac{\partial X^l}{\partial x^{i_1}} \right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \dots
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

这里我们用到了 Einstein 求和约定.



## 第二部分

# 微分流形与分析力学



## 第六章 作为流形的位形空间

本章开始,我们就要正式进入经典力学部分了。此刻我们假设读者已经对前面章节中介绍的微分流形知识有一个初步的了解——至少对微分流形、切向量、切丛、向量场、微分形式这些重要概念不陌生。从本章起,我们会大量的例子用以解释流形理论是如何应用在力学问题中的,对于只是初步接触微分流形概念的读者,您也会随着我们后面对这些实例的探讨而逐步对微分流形及其相关概念有更加深刻的认识。

在本章,我们要讨论一个基本的问题——如何描述一个力学问题中系统所处的状态。我们将会把力学系统所能处于的所有位置状态定义为一个微分流形  $M$ ,用它来表示所谓“位形空间”, $M$  的维数即为这个力学问题的自由度个数;而力学系统随时间演化的可能速度则被定义为  $M$  上的一个切向量,从而一个力学系统在的状态(包括位置、速度信息)可以被抽象为切丛  $TM$  中的一个点。此外,我们会在  $M$  上定义一个 Riemann 度量,使得“动能”这一概念能够被自然地引入。

### 6.1 无约束条件的 $N$ 质点系统

本章中我们要讨论一类描述起来比较简单的力学系统——无约束条件的  $N$  质点系统。这类问题主要包括经典力学框架下的天体运动、自由粒子运动等,其特点是每一个质点都可能出现在空间中的任何一点,互相之间的作用力为各种形式的吸引或排斥。当然,我们只是说这类问题描述起来比较简单,并不是说它们容易求解。事实上,在  $N$  很大的时候,求解这类问题是不可能的,这就是为什么我们需要统计物理。

首先必须要声明的一点是,为了数学上的便利,我们会忽略所有被讨论的物理量的量纲,认为我们定义的物理量都可以只用数学中的实数或实数的有序组来表示。但即便如此,笔者还是非常鼓励读者从量纲的角度来思考和理解问题的。

假设一个  $d$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^d$  中有  $N$  个质点,它们的质量分别为  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , 第  $k$  个质点的第  $j$  个坐标分量是  $x_{kj}$ , 那么这个力学系统的位置状态就是由这  $N$  个质点的坐标

$$(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kd})^\top \quad k = 1, \dots, N \quad (6.1)$$

唯一确定<sup>1</sup>, 从而我们需要用  $Nd$  个实数, 或者说  $\mathbb{R}^{Nd}$  中的一个点来确定这个空间中每一个质点所处的位置, 因此, 我们说  $\mathbb{R}^{Nd}$  就是上述  $N$  质点问题所定义的**位形空间**. 一般来讲, 我们会把 (6.1) 中  $N$  个坐标按  $k = 1, \dots, N$  的顺序从上到下拼接起来组成一个  $Nd$  维坐标

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1d}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2d}, \dots, x_{N1}, x_{N2}, \dots, x_{Nd})^\top, \quad (6.2)$$

它被称为位形空间  $\mathbb{R}^{Nd}$  中的一个**点**. 要想确定一个物理系统所处的状态, 除了确定每个质点的坐标之外, 我们还要确定每个质点的速度, 第  $k$  个质点的速度在第  $j$  个坐标分量上的投影是  $v_{kj}$ , 那么我们可以和前面一样拼接出一个  $Nd$  维向量

$$v = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1d}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2d}, \dots, v_{N1}, v_{N2}, \dots, v_{Nd})^\top, \quad (6.3)$$

这样我们的系统的状态就可以由 (6.2), (6.3) 中的两个  $Nd$  维向量唯一决定.

可以看到, 在上述描述方式下, 我们事实上是把一个低维空间中的多体问题转化成了一个高维空间中的单体问题。

当我们确定了系统中每一个质点的每一个坐标分量  $x_{kj}$  和速度分量  $v_{kj}$  时, 我们系统的**状态**定义为  $\mathbb{R}^{Nd}$  的一个切向量

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^d v_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{kj}} \Big|_x. \quad (6.4)$$

<sup>1</sup> 这里我们遵循数学上的惯例, 把向量写成列向量, 所以会有一个转置符号 “ $^\top$ ”。

其中  $x = (x_{11}, \dots, x_{Nd})^\top \in \mathbb{R}^{Nd}$ . 在  $\mathbb{R}^{Nd}$  中, 像 (6.4) 这样的切向量可以表示成  $2Nd$  维数组

$$(x, v) = (x_{11}, \dots, x_{Nd}, v_{11}, \dots, v_{Nd})^\top. \quad (6.5)$$

在无约束的  $N$  质点自由系统中,  $x_{kj}$  和  $v_{kj}$  可以取到任何实数值, 从而整个切丛  $T\mathbb{R}^{Nd}$  中的任何一个切向量都是容许的状态,  $T\mathbb{R}^{Nd}$  是被称为无约束的  $N$  质点自由系统的**位速空间**.

经典力学中最基础的定律当属 Newton 的三大运动定律了, 其中在数学上最为重要的是第二定律, 它表述了物体加速度和力之间的关系, 而对于绝大多数物理情形而言, 力的大小方向决定于系统状态, 从而最一般的 Newton 运动的表述是 (位形空间中的)  $Nd$  个二阶方程

$$m_k \frac{d^2 x_{kj}}{dt^2} = F_{kj} \left( x_{11}, \dots, x_{Nd}, \frac{dx_{11}}{dt}, \dots, \frac{dx_{Nd}}{dt}, t \right) \quad (6.6)$$

或者 (位速空间中的)  $2Nd$  个一阶微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx_{kj}}{dt} = v_{kj} \\ m_k \frac{dv_{kj}}{dt} = F_{kj}(x_{11}, \dots, x_{Nd}, v_{11}, \dots, v_{Nd}, t), \end{cases} \quad (6.7)$$

其中  $F_{kj}$  第  $k$  质点所受的力 (合力) 在第  $j$  个分量上的投影. 我们会把  $F_{kj}$  组成一个  $Nd$  维向量

$$F = (F_{11}, F_{12}, \dots, F_{1d}, F_{21}, F_{22}, \dots, F_{2d}, \dots, F_{N1}, F_{N2}, \dots, F_{Nd})^\top,$$

从而对于每一个  $x \in \mathbb{R}^{Nd}$ ,

$$(x, F) = (x_{11}, \dots, x_{Nd}, F_{11}, \dots, F_{Nd})^\top \in T\mathbb{R}^{Nd}.$$

这样, 每一个**力**  $F$  可以看作是  $T\mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{R}^{Nd}$  的映射 (定义域中的第二个  $\mathbb{R}$  指的是时间), 使得对于每一个  $x \in \mathbb{R}^{Nd}$ ,  $x$  处的切向量被映到  $T_x\mathbb{R}^{Nd}$ , 即

$$F(T_x\mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}) \subseteq T_x\mathbb{R}^{Nd},$$

从而一般的 Newton 运动定律可以写作

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right), \quad \text{或} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ m \frac{dv}{dt} = F(x, v, t), \end{cases} \quad (6.8)$$

其中  $m$  是一个对角矩阵

$$m = \text{diag}(m_1, \dots, m_1, m_2, \dots, m_2, \dots, m_N, \dots, m_N),$$

被称为**质量度量矩阵**.

我们把  $N$  个  $d$  维向量拼接成一个  $Nd$  维向量并不单纯是为了表述形式上的紧凑. 事实上, 我们要在上述位形空间  $\mathbb{R}^{Nd}$  中定义一些具有物理意义的几何结构. 在物理学中, 我们会格外关注一个系统的能量, 而对于上述最为一般的  $N$  质点系统, 我们已知系统的物理状态后, 唯一可以确定的是这个系统的动能

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left( \sum_{j=1}^d v_{kj}^2 \right), \quad (6.9)$$

因此, 对于任意一点  $x \in \mathbb{R}^{Nd}$  及状态

$$\begin{aligned} (x, v) &= (x_{11}, \dots, x_{Nd}, v_{11}, \dots, v_{Nd})^\top \in T_x \mathbb{R}^{Nd}, \\ (x, w) &= (x_{11}, \dots, x_{Nd}, w_{11}, \dots, w_{Nd})^\top \in T_x \mathbb{R}^{Nd}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

我们定义

$$m((x, v), (x, w)) = \sum_{k=1}^N m_k \left( \sum_{j=1}^d v_{kj} w_{kj} \right), \quad (6.11)$$

这样,  $m$  在  $\mathbb{R}^{Nd}$  上的每一个点处的切空间上定义了一个内积函数, 从而在  $\mathbb{R}^{Nd}$  上定义了一个 Riemann 度量, 使得  $(\mathbb{R}^{Nd}, m)$  成为了一个 Riemann 流形, 并且对于每一个  $v \in T\mathbb{R}^{Nd}$ ,  $\frac{1}{2}m(v, v)$  恰好就是当前状态下系统的动能  $T(v)$ . 上述 Riemann 度量  $m$  被称为**质量度量**. 注意上述定义的 Riemann 度量  $m$  与 (6.8) 中定义的质量度量矩阵  $m$  并不冲突, 因为度量  $m$  在  $\mathbb{R}^{Nd}$  的自然坐标表示下的矩阵就是对角矩阵  $m$ , 而在  $\mathbb{R}^{Nd}$  中, 我们不区分二者.

注意这样一个度量结构与我们朴素定义的  $\mathbb{R}^{Nd}$  上的度量结构是不同的, 其中包含的系数  $m_k$  是依赖于我们所讨论的问题的物理背景的. 之后我们会看到, 这个度量结构会对帮助我们理解力学问题中各种所谓“约束”——特别是我们重点要探讨的“理想完整约束”的数学含义.

**模型设定 1 (无约束  $N$  质点系统)** 假设一个  $d$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^d$  中有  $N$  个质点, 它们的质量分别为  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , 第  $k$  个质点的第  $j$  个坐标分量是  $x_{kj}$ , 那么我们定义这个系统的**位形空间**为  $\mathbb{R}^{Nd}$ , 位速空间为  $T\mathbb{R}^{Nd}$ , 并且我们在  $\mathbb{R}^{Nd}$  上定义 *Riemann* 度量  $m$ , 使得对于任意  $x \in \mathbb{R}^{Nd}$  及  $(x, v), (x, w) \in T_x\mathbb{R}^{Nd}$ ,  $m((x, v), (x, w))$  由 (6.11) 表示 (其中  $v, w$  的坐标表示由 (6.10) 确定), 从而  $T(v) := \frac{1}{2}m(v, v)$  为系统在状态  $v$  下的**动能**. 一个力  $F$  可以看作是  $T\mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{R}^{Nd}$  的映射 (定义域中的第二个  $\mathbb{R}$  指的是时间), 使得对于每一个  $x \in \mathbb{R}^{Nd}$ ,

$$F(T_x\mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}) \subseteq T_x\mathbb{R}^{Nd},$$

对于给定的力  $F$ , **Newton 第二定律**表述为微分方程组 (6.8).

**例 6.1.1 [阻尼介质中的弹簧振子]** 考虑这样一个双质点系统, 它们被根原长为  $L$ , 劲度系数为  $\kappa$  的弹簧连接, 并且介质对二者有一个正比反向于速度的阻力, 第一个质点的质量为  $m_1$ , 坐标为  $(x_{11}, x_{12}, x_{13})$ , 速度为  $(v_{21}, v_{22}, v_{23})$ , 第二个质点的质量为  $m_2$ , 坐标为  $(x_{21}, x_{22}, x_{23})$ , 速度为  $(v_{11}, v_{12}, v_{13})$ , 介质的阻尼系数是  $\beta$ , 则该力学系统的位形空间是

$$\mathbb{R}^6 = \{x = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})^\top : x_{kj} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3\},$$

位形空间中每个点坐标的前三个分量表示第一个质点的坐标, 后三个分量表示第二个质点的坐标; 而这个系统的位速空间是

$$T\mathbb{R}^6 = \{(x, v) = (x_{11}, \dots, x_{23}, v_{11}, \dots, v_{23})^\top : x_{kj}, v_{kj} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3\},$$

质量度量  $m : T\mathbb{R}^6 \times T\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$  定义为

$$m((x, v), (x, w)) = m_1 \sum_{j=1}^3 v_{1j} w_{1j} + m_2 \sum_{j=1}^3 v_{2j} w_{2j},$$

从而对于每一个状态  $(x, v)$ , 系统的动能是

$$T(v) = \frac{1}{2}m((x, v), (x, v)) = \frac{1}{2}m_1 \sum_{j=1}^3 v_{1j}^2 + \frac{1}{2}m_2 \sum_{j=1}^3 v_{2j}^2.$$

而系统所受的力则是

$$F = (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}),$$

其中

$$\begin{cases} F_{1j} = k \left( \frac{L}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{1i} - x_{2i})^2}} - 1 \right) (x_{1j} - x_{2j}) - \beta v_{1j} \\ F_{2j} = k \left( \frac{L}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{1i} - x_{2i})^2}} - 1 \right) (x_{2j} - x_{1j}) - \beta v_{2j} \end{cases}, j = 1, 2, 3. \quad (6.12)$$

都是  $x_{11}, \dots, x_{23}, v_{11}, \dots, v_{23}$  的函数. 本例中  $F$  不显含时间  $t$ .

**例 6.1.2** [胁迫振动的阻尼振子] 假设一个弹簧振子被限制在一维直线上运动, 弹簧固定点在原点, 振子的质量是  $m$ , 坐标是  $x$ , 速度是  $v$ , 运动时受到正比反向于运动速度的阻力, 阻尼系数为  $\beta$ , 但同时又受到一个外部的周期力  $F_{\text{外}} = A \sin(\omega t)$ , 此时系统的位形空间就是一维直线  $\mathbb{R}$ , 位速空间是  $\mathbb{R}^2$ , 质量度量是  $m((x, v), (x, w)) = mvw$ . 此时物理所受的力是

$$F = k(L - x) - \beta v + A \sin(\omega t), \quad (6.13)$$

是  $x, v, t$  的函数.

**例 6.1.3** [保守力场] 我们采用最一般的无约束  $N$  质点系统设定 (即  $\mathbb{R}^d$  中的  $N$  个质点), 但此时假定函数  $F$  具有

$$F = -\nabla V(x_{11}, \dots, x_{Nd})$$

的形式, 即

$$F_{kj} = \frac{\partial V}{\partial x_{kj}}(x_{11}, \dots, x_{Nd}),$$



其中  $V$  是一个  $\mathbb{R}^{Nd} \rightarrow \mathbb{R}$  的可微函数. 此时我们称  $F$  是**保守力场**, 函数  $V$  为这个系统的**势能函数**. 这一设定下,  $F$  既不显含  $v$  又不显含  $t$ , 等价于一个位形空间上的映射. 比如说取

$$V = - \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{Gm_k m_l}{\sqrt{\sum_{j=1}^d (x_{kj} - x_{lj})^2}},$$

这时  $N$  个质点之间的相互作用就是万有引力, 其中  $G$  是引力常数而如果改成

$$V = \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k q_l}{\sqrt{\sum_{j=1}^d (x_{kj} - x_{lj})^2}},$$

那么这时  $N$  个质点之间的相互作用就是库伦力, 其中  $q_k$  是第  $k$  个电荷的电荷量 (带符号),  $\epsilon_0$  是真空介电常数,  $\pi$  是圆周率.

## 6.2 有约束条件的 $N$ 质点系统

为了探讨方便, 我们从本节起到最后一节之前, 都只讨论力不显含时间的问题, 即力可以写作

$$F = F(x_{11}, \dots, x_{Nd}, v_{11}, \dots, v_{Nd})$$

的形式.

在经典力学中, 很多问题的构型空间并不是完整的  $\mathbb{R}^{Nd}$ , 比如说单摆、双摆系统. 这一类系统中的质点之间有几何关系约束, 从而不是随便  $Nd$  个实数都可以作为位形空间中一个点的坐标. 这种几何关系的实现通常是通过各种支持力来实现的, 这些提供支持力的物体可以看作是劲度系数极大的“硬弹簧”, 由于劲度系数过大, 任何妄图使这些物体产生形变的运动趋势都会被抵消掉, 从而那些使得这些“硬弹簧”产生明显形变的状态在我们关心的实际运动中是不可能出现的.

一个比较好的例子是双摆系统, 我们可以把它看作弹簧摆在弹簧的劲度系数趋于无穷大时的极限.

**模型设定 2** 对于  $N$  质点问题, 所谓约束, 即系统的在位速空间中的运动轨迹被限制在完整位速空间  $T\mathbb{R}^{Nd}$  的一个子集  $A$  上. 此时我们称  $A$  为这个带

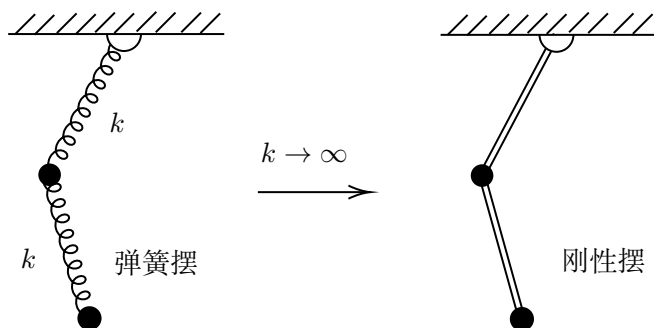


图 6.1: 弹簧摆在劲度系数趋于无穷时趋于刚性摆

约束系统的**位速空间**,  $\pi(A)$  称为这个带约束系统的**位形空间** (这里  $\pi$  是从投影映射, 即对于  $v \in T_x \mathbb{R}^{Nd}$ ,  $\pi(v) = x$ )。

系统在位速空间中运动轨迹是由系统的初始状态和依赖于系统中的力的 Newton 第二定律运动方程 (6.8) 决定的, 因此 “运动轨迹被限制在位速空间  $T\mathbb{R}^{Nd}$  的一个子集  $A$  上” 实际上包含了这样两重意思:

1. 系统的在位速空间中的初值状态只能从  $A$  中选取,
2. 对于任意从  $A$  中选取的初值状态, 系统按照运动方程 (6.8) 运动的轨迹中不会出现  $A$  之外的点.

第 1 条是对初值条件提出的要求, 第 2 条则是对系统中的力  $F$  提出的一个要求. 满足这一要求的力称为与系统约束条件**相容**的力.

当一个力学系统中存在约束条件时, 我们所研究的位形空间会是  $\mathbb{R}^{Nd}$  的一个子集. 我们格外关注的是所谓 “完整约束”, 这样的约束条件可以写成若干个形如

$$f(x_{11}, \dots, x_{Nd}) = 0$$

的约束方程 (而不是像  $f(x_{11}, \dots, x_{Nd}) \geq 0$  这种不等式), 从而使得系统的位形空间是  $\mathbb{R}^{Nd}$  的光滑闭嵌入子流形 (这里的 “闭” 指的是这个流形是作为  $\mathbb{R}^{Nd}$  的子集是一个闭集), 并且位速空间是位形空间的整个切空间 (而不是切空间的一个子集)。

**模型设定 3** 对于一个受约束的  $N$  质点系统, 如果系统的位形空间是  $\mathbb{R}^{Nd}$  的一个光滑闭子流形  $M$ , 位速空间是  $M$  的整个切空间  $TM$ , 则称这个  $N$  质点系统是一个具有**完整约束**的  $N$  质点系统, 而  $M$  上的 *Riemann* 度量则是  $\mathbb{R}^{Nd}$  上的质量度量在  $M$  上的限制, 仍然称为**质量度量**.

**注 6.2.1** 对于完整约束系统, 一个技术上的问题是有一些力只能在位速空间  $TM$  上定义, 不能在  $T\mathbb{R}^{Nd}$  上定义 (比如各种支持力), 使得我们无法判断一个力是否与约束条件相容. 对于这一问题, 我们可以认为  $TM$  上有定义的力可以光滑延拓到  $T\mathbb{R}^{Nd}$  上 ( $M$  是闭嵌入这一假设可以保证这一点成立), 这个延拓方式可以是任意的, 因为最终我们关心的也只是它在  $M$  上的取值.

**例 6.2.1** 一个小球在一个碗内贴壁运动, 设碗的内壁是一个半径为  $R$  的圆弧, 小球的质量是  $m$ , 碗壁有摩擦系数  $\mu \geq 0$ , 设小球的位置是  $(x, y, z)$ , 那么我们就有约束条件

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (6.14)$$

这一约束由小球的重力和支持力共同作用达成, 它是一个完整约束. 当然, 在“碗”的设定下, 我们本来还应该要求  $z \leq 0$  从而使得体系被约束在一个半球面上, 而  $z \leq 0$  不是一个完整约束条件, 但是如果我们所关注的过程中小球不会跳到碗外或离开碗壁, 则可以忽略掉这个限制条件. 这样, 系统的位形空间就是球面

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

而位速空间则是  $M$  的切空间

$$TM = \{(x, y, z, v_x, v_y, v_z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, xv_x + yv_y + zv_z = 0\}. \quad (6.15)$$

这是一个典型的完整约束系统, 这个系统中的力是

$$F = G + N + D,$$

其中

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad N = \left( \frac{mgz}{R^2} - \frac{|v|^2}{R} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \begin{cases} 0 & v = 0 \\ -\gamma |N| \frac{v}{|v|} & v \neq 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

其中  $v = (v_x, v_y, v_z)^\top$  是速度向量,  $G, N, D$  分别是小球所受的重力、支持力、摩擦力.

**例 6.2.2** [刚性双原子分子] 我们假设一个分子由两个不同的原子组成的, 第一、二个原子的质量分别是  $m_1, m_2$ , 它们之间由一根长度为  $l$  的轻质刚性杆连接. 设两个原子的坐标分别是  $(x_1, y_1, z_1)$  和  $(x_2, y_2, z_2)$ , 速度分别为  $(v_{x1}, v_{y1}, v_{z1})$  和  $(v_{x2}, v_{y2}, v_{z2})$ , 那么该系统的位形空间是

$$M = \{(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)^\top : (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2\} \cong \mathbb{R}^3 \times S^2, \quad (6.17)$$

位速空间为

$$TM = \{(x_1, \dots, z_2, v_{x1}, \dots, v_{z2})^\top : (x_1 - x_2)(v_{x1} - v_{x2}) + (y_1 - y_2)(v_{y1} - v_{y2}) + (z_1 - z_2)(v_{z1} - v_{z2}) = 0\}.$$

假设系统中不存在其它力场, 两个原子所受的力只有沿杆方向的推力或拉力, 那么该系统所受的力为

$$F = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{pmatrix} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{|v_2 - v_1|^2}{l^2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

接下来我们给出两个非完整约束的例子.

**例 6.2.3** [容器中的粒子] 假设有一个粒子在一个容器里运动, 从而其坐标  $(x, y, z)$  满足

$$0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z. \quad (6.19)$$

由约束条件 (6.19) 所定义的区域是一个闭的长方体区域, 它不构成光滑流形<sup>2</sup>, 因此 (6.19) 不是完整约束. (6.19) 是典型的“单侧约束”, 这类约束通常被表述为不等式的形式, 使得原本的位形空间中出现一堵“墙”, 这堵墙的某一侧的位置状态是被允许的, 另一侧是则是不被允许的。

**注 6.2.2** 当我们建立物理模型时使用了 (6.19) 这样的约束条件, 则意味着我们会关注粒子在箱子边界时的行为, 比如与箱子壁之间的碰撞, 如果我们所关心的粒子运动过程中不包含与箱子边界的相互作用, 那么我们在建模时大可不必多地引入 (6.19) 这样的约束条件, 只要认为箱子是无限大的, 把位形空间看成整个  $\mathbb{R}^3$  即可。

**例 6.2.4 [冰刀]** 这是一个非常有趣的例子。描述的是一个滑冰鞋的冰刀在冰面上的运动。我们所研究的冰刀被简化为一个双质点系统, 这两个质点分别位于冰刀两端, 距离为  $l$  (即冰刀的长度), 设它们在冰面上的坐标分别是  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 速度分别为  $(v_{x1}, v_{y1})$ ,  $(v_{x2}, v_{y2})$ . 对于这个冰刀, 我们有以下两个约束条件:

1. 冰刀两端的距离固定为  $l$ :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2; \quad (6.20)$$

2. 冰刀中点的速度向量必须要与冰刀当前朝向 (即向量  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)^\top$ ) 共线:

$$\frac{v_{x1} + v_{x2}}{2}(y_2 - y_1) - \frac{v_{y1} + v_{y2}}{2}(x_2 - x_1) = 0. \quad (6.21)$$

在 (6.20) 这个条件下, 冰刀的位形空间构成一个光滑流形

$$M = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) : (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2\} \cong \mathbb{R}^2 \times S^1.$$

然而, (6.21) 却告诉我们, 冰刀两端的运动除了受 (6.20) 诱导的限制条件

$$(x_1 - x_2)(v_{x1} - v_{x2}) + (y_1 - y_2)(v_{y1} - v_{y2}) = 0 \quad (6.22)$$

<sup>2</sup>我们诚然可以把  $0 \leq x \leq L_x$  等换成  $0 < x < L_x$  等, 使得这个区域构成一个开的长方体区域, 从而成为  $\mathbb{R}^3$  的一个开子流形, 但是粒子与器壁碰撞的瞬间, 粒子的位置应该恰好在区域边界上, 所以区域的边界自然应该属于所研究的位形空间, 强行抠掉它们是不符合物理意义的, 这就是我们为什么要要求  $M$  是闭嵌入

之外, 还有额外的限制条件。冰刀的位速空间不是完整的  $TM$ , 而是  $TM$  的一个真子集

$$\begin{aligned} U = \{ & (x_1, y_1, x_2, y_2, v_{x1}, v_{x2}, v_{y1}, v_{y2}) : (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2, \\ & (x_1 - x_2)(v_{x1} - v_{x2}) + (y_1 - y_2)(v_{y1} - v_{y2}) = 0, \\ & (y_2 - y_1)(v_{x1} + v_{x2}) - (x_2 - x_1)(v_{y1} + v_{y2}) = 0 \} \subsetneq TM, \end{aligned} \quad (6.23)$$

因此 (6.21) 是一个非完整的约束条件.

**注 6.2.3** (6.23) 中定义的集合  $U$  不是  $M$  的切丛, 但是我们可以看到, 对于位形空间  $M$  中任意给定的一点  $r = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ , (6.21) 和 (6.22) 都是对速度  $v_{x1}, v_{x2}, v_{y1}, v_{y2}$  的线性约束条件, 从而  $U_r = T_r M \cap U$  是一个线性空间, 因此  $U$  仍然是  $M$  的一个向量丛; 而如果我们对速度提出的约束条件不限于线性约束条件, 那么我们构造出的位速空间一般来讲只是  $M$  上纤维丛. 一般来讲, 我们有“切丛  $\subset$  向量丛  $\subset$  纤维丛”.

### 6.3 虚位移、理想完整约束

在本节, 我们要完成两个任务: 给出“虚位移”这一概念的严格数学定义、并依此建立“理想完整约束”的概念. 在这里我们将看到当初我们为位形空间定义的质量度量的作用.

我们着重强调理想完整约束, 是因为在经典力学的范畴内, 只有对于具有理想完整约束的力学体系, Lagrange 力学和 Hamilton 力学才能真正地发挥其威力. 对于非理想约束的经典力学系统, 利用 Lagrange 力学和 Hamilton 力学求解问题不会给我们带来任何便利, 还不如老老实实在地画受力分析图.

在物理学中, 我们会把系统在约束条件下的“所有可能的无穷小位移”称为“虚位移”, 这一概念实际上对应的就是微分流形中“切空间”的概念. 这是因为对于完整约束体系, 系统可能的运动被限制在一个流形  $M$  上, 从而任意一条“约束条件所允许的”运动轨迹都会是  $M$  上的一条曲线. 我们要研究的是  $M$  上的过某一个点  $p$  的所有可能的“无穷小”运动, 翻译成几何的语言就是要研究全体  $M$  上经过点  $p$  的曲线在点  $p$  处的局部行为, 这当然可

以用曲线在  $p$  点处的切向量来刻画, 而  $M$  上全体经过  $p$  点的曲线在  $p$  点处的切向量所构成的集合当然就是切空间  $T_p M$ 。

**定义 6.3.1** 假设一个具有完整的约束的  $N$  质点力学系统, 其位形空间是  $M$ , 位速空间是  $TM$ , 则对于  $M$  上任意一点  $p$ ,  $p$  处的一个**虚位移**指的是  $M$  在  $p$  点处的一个**切向量**, 或者说切空间  $T_p M$  中的一个点, 而  $p$  处的**全体虚位移**指的是  $M$  在  $p$  点处的**切空间**  $T_p M$ 。

**注 6.3.1** 我们把速度向量和虚位移都定义成了切向量, 但是二者的量纲是不一致的, 那么我们这样定义是否合理呢? 事实上, 在研究真实运动时, 我们会认为这个曲线的参数  $t$  是具有自然的时间量纲的; 而在定义虚位移时, 我们使用的曲线参数是无量纲的, 所以造成这一量纲差异的只是一个参数选取的差异, 我们完全可以任意地设定曲线参数的量纲使得由此定义出的切向量具有各式各样的物理含义, 但这些与切向量本身的几何结构无关, 所以量纲的差异在这里不成问题。

对于一条运动轨迹, 如果我们在其上每一个点处指定一个虚位移, 那么我们就给了这个曲线上的一个“变分”。关于变分的数学描述我们将在 Lagrange 力学部分进行探讨。

接下来我们对“理想完整约束”这一概念进行探讨。所谓“理想约束”, 简单来讲就是“约束力总体不做功”。在物理上, 这一定义被描述为“作用在一力学体系上诸约束反力在任意虚位移  $\delta r$  中所作的虚功之和为零”, 即

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0. \quad (6.24)$$

对于单体问题, 这可以解释为“约束力与虚位移垂直”, 从而约束力总是不做功的。比方说例 [6.2.1] 中作为约束力的支持力  $N$ , 它便总是与碗壁的切平面 (即小球所在位置处的所有虚位移) 垂直的。但是对于多体问题, 比方说例 [6.2.2], 如果我们单看刚性杆作用在某一个原子上的支持力, 那么它其实不一定是做功的, 只有把两个原子上的总支持力相加, 才能得到为零的总虚功, 符合 (6.24) 中的定义。

幸好, 在我们的几何学框架下, 我们把运动和力的所有维度垛垛成了一个高维向量  $\mathbb{R}^{Nd}$ , 从而整个体系的运动可以看作是高维空间  $\mathbb{R}^{Nd}$  中的单体运

动问题, 我们可以在这个高维空间中讨论约束力与位移的内积, 这个内积便恰好是多体问题中各个单体的虚位移与作用在其上的约束力的内积 (即虚功) 之和, 如果这个和为 0, 这就意味着相应的  $\mathbb{R}^{Nd}$  中的单体运动问题中的力与虚位移的内积为 0, 或者说是力与虚位移垂直. 按照前面的探讨, 所谓虚位移即切向量或切空间, 由此我们可以给出理想完整约束的数学定义

**定义 6.3.2** 对于一个有完整约束的  $N$  质点系统, 设其位形空间是  $M \subseteq \mathbb{R}^{Nd}$ , 位速空间是  $TM$ ,  $m$  是  $M$  上的质量度量, 如果该系统有一个力  $R = R(x, v)$  满足: 对于任意  $x \in M$  及任意  $v \in T_x M$ , 有

$$m(m^{-1}R(x, v), v) = 0, \quad (6.25)$$

则称  $R$  是该系统的一个理想约束力. 这里的  $m^{-1}R(x, v)$  指的是质量度量矩阵的逆矩阵作用在向量  $R(x, v) \in T_x M \cong \mathbb{R}^{Nd}$  上的结果, 而最外层的  $m(\cdot, \cdot)$  指的则是质量度量.

(6.25) 和 (6.24) 是等价的. 其实读者可以发现, 如果我们在  $\mathbb{R}^{Nd}$  上定义的量度结构是朴素的欧氏度量而不是质量度量, 那么其实定义 (6.25) 可以直接写成

$$\langle R(x, v), v \rangle = 0,$$

这样应该是更省事一些, 事实上也确实如此, 但是在数学表述上, Newton 第二定律 (6.8) 可以写为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = m^{-1}F(x, v),$$

的形式, 从而我们可以看到, 对于一个力  $F$ ,  $m^{-1}F$  是这个力造成的系统运动的加速度分量, 这是一个有物理意义的量, 也是我们在数学上处理起来更方便的量.

假设定义 6.3.2 中的力学系统仅有  $R$  这一个理想约束力的作用, 那么由 Newton 第二定律 (6.8), 我们有

$$\frac{dv}{dt} = m^{-1}R(x, v),$$



从而由 (6.25) 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m(v, v) \right) &= \frac{1}{2} m \left( \frac{dv}{dt}, v \right) + \frac{1}{2} m \left( v, \frac{dv}{dt} \right) \\ &= m \left( v, \frac{dv}{dt} \right) = m (m^{-1} R(x, v), v) \\ &= 0\end{aligned}$$

这就是动能守恒的表达式。诚然，在大多数我们感兴趣的系统中，起作用的力都不会只有一个约束力，还会有重力、电场力等，这些力一般仅与物体的位置有关，而与速度无关，可以写成  $P(x)$  的形式，称为“主动力”。所谓理想完整约束系统，即所受的力仅包含这两部分的力学系统。

**模型设定 4** 对于一个具有完整约束的  $N$  质点力学系统，其位形空间是  $M \subseteq \mathbb{R}^{Nd}$ ，位速空间是  $TM$ ， $m$  是  $M$  上的质量度量，如果系统中的力  $F$  可以被拆解为形如

$$F(x, v, t) = P(x) + R(x, v) \quad (6.26)$$

的形式，其中  $R$  是一个理想约束力，那么我们称该系统是一个具有**理想完整约束**的  $N$  质点力学系统，这里  $P(x)$  称为系统的**主动力**， $R(x, v)$  称为系统的**约束力**。

**例 6.3.1** 例 6.2.1 中的力学系统在  $\gamma = 0$  时是具有理想完整约束的力学系统。

**证明：**

事实上，我们可以把  $G$  看作主动力， $N$  看作约束力。接下来我们来证明的  $N$  是理想约束力。事实上，对于任意  $(x, y, z)^\top \in M$  及  $(v_x, v_y, v_z)^\top \in T_{(x, y, z)^\top} M$ ，我们有

$$xv_x + yv_y + zv_z = 0,$$

从而

$$\begin{aligned}m(m^{-1}N, v) &= m \cdot \frac{1}{m} \left( \frac{mgz}{R^2} - \frac{|v|^2}{R} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{mgz}{R^2} - \frac{|v|^2}{R} \right) (xv_x + yv_y + zv_z) = \left( \frac{mgz}{R^2} - \frac{|v|^2}{R} \right) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

■

**例 6.3.2** 例 6.2.2 中的力学系统是具有理想完整约束的力学系统.

**证明:**

我们可以把  $F$  看作约束力, 而主动力为 0. 接下来我们来证明  $F$  是理想约束力. 事实上, 对于任意  $(x_1, \dots, z_2)^\top \in M$  及  $v = (v_{x1}, \dots, v_{z2}) \in T_{(x_1, \dots, z_2)^\top} M$ , 我们有

$$\begin{aligned}
 m(m^{-1}F, v) &= m \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{|v_2 - v_1|^2}{l^2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1/m_1 \\ y_2 - y_1/m_1 \\ z_2 - z_1/m_1 \\ x_1 - x_2/m_2 \\ y_1 - y_2/m_2 \\ z_1 - z_2/m_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \end{pmatrix} \right) \\
 &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{|v_2 - v_1|^2}{l^2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1/m_1 \\ y_2 - y_1/m_1 \\ z_2 - z_1/m_1 \\ x_1 - x_2/m_2 \\ y_1 - y_2/m_2 \\ z_1 - z_2/m_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & m_1 & & & \\ & & & m_2 & & \\ & & & & m_2 & \\ & & & & & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{|v_2 - v_1|^2}{l^2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{|v_2 - v_1|^2}{l^2} ((x_2 - x_1)(v_{x1} - v_{x2}) + (y_2 - y_1)(v_{y1} - v_{y2}) \\
 &\quad + (z_2 - z_1)(v_{z1} - v_{z2})) \\
 &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{|v_2 - v_1|^2}{l^2} \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

因此  $F$  是理想约束力. ■

上述证明我们特意写得稍微长了一些, 主要是为了展示多体问题中  $m$  和  $m^{-1}$  的含义, 可以看到,  $m$  和  $m^{-1}$  的系数实际上是相互抵消掉了。

对于不含时问题, 理想约束意味着系统没有耗散行为, 比如摩擦力、空气阻力的做功等。从物理意义上来讲, 耗散意味着系统中的机械能在不断地转化为内能, 从而不再守恒。所谓内能, 即组成物体的分子等子系统所具有的动能和势能, 它们不会外显为物体整体的运动, 而我们在经典力学框架下总是把物体看成没有内部结构的质点, 所以只能认为转化到物体内部的那部分能量是“流失”掉了的。朗道在他的十卷之首《力学》中阐述了这样一种观点: 如果一个系统具有摩擦耗散行为, 那么它不应该被看作是一个纯粹的力学问题。从动力系统的角度来看, 耗散的存在通常意味着系统的动能在不断地减小, 所以系统最终运动的速度会指数衰减到 0, 达到某一稳定状态。如果我们把带耗散的系统用 Hamilton 力学来描述的话, 我们会发现相流的体积随时间演化而缩小, 而相应地, 对于没有耗散的系统, 相流体积则是不变的 (Liouville 定理)。

虽然一个系统的约束是否是理想完整约束是由系统中的力来决定的, 但我们判断一个力学系统是否是具有理想完整约束, 通常只需要判断这个系统中是否有耗散行为或扩张行为。并且, 我们很多时候是系统中一些力的分量 (比如说支持力) 是没有给出的, 我们会先判断系统是否具有理想约束, 然后再根据这一判断来反推出这些力的分量。

对于一个一般的力学系统, 我们的已知条件只有主动力和约束条件 (即位形空间), 对于理想完整约束系统而言, 约束力可以由主动力和约束条件唯一确定: 约束力可以分解为两部分的和, 第一部分要抵消掉主动力的垂直于切空间的分量, 第二部分的则要为系统提供正确的“向心加速度”。

**例 6.3.3** 在例 6.2.1 中, 约束力  $N$  的表达式

$$N = -\frac{|v|^2}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{mgz}{R^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

中, 第一项提供向心加速度, 第二部分抵消主动力  $G$  垂直于  $T_{(x,y,z)}M$  的分量。

在 Lagrange 力学中, 我们一般只会关注系统的能量和运动, 而淡化“力”的概念, 所以我们一般不求解约束力  $R$ , 但在真实的经典力学系统中,  $R$  往

往是很重要的量, 比如说刚性杆件连接的机械系统中,  $R$  就是这些机械所承受的应力, 直接决定了机械的哪些部件容易磨损破裂等等, 其重要性不言而喻。而使用 Lagrange 力学并不便于我们求解约束力 (虽然也有办法求), 这是 Lagrange 力学体系的局限, Hamilton 力学在这一方面的表现只会更加糟糕, 所以对于约束力, 最好还是画受力分析图求解, 我们也不会过多地探讨这一部分内容。

## 6.4 广义坐标与广义速度

本章到这里为止, 我们其实一直把位形空间  $M$  看作是  $\mathbb{R}^{Nd}$  的  $n$  维嵌入子流形 ( $n < Nd$ )。但是其实我们要清楚一个事实: **位形空间  $M$  的几何性质与其在  $\mathbb{R}^{Nd}$  中的嵌入方式是无关的**。比如说在例6.2.1中, 如果我们的坐标系不是以原点为坐标系, 那么  $M$  在  $\mathbb{R}^3$  中的方程表示将不是  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , 而是另外一个球面方程, 但这并不影响  $M$  是一个半径为  $R$  的球面, 类似地, 例6.2.2中刚性双原子分子的位形空间在  $\mathbb{R}^6$  中的方程表示取决于我们如何在空间中建立坐标系, 并非一定是 (6.17) 中等号右侧大括号里的那个表达式, 但这个位形空间却一定具有  $\mathbb{R}^3 \times S^2$  这个积流形结构, 此外, 平面双摆的位形空间具有圆环  $T^2$  的流形结构、例6.2.4中的冰刀的位形空间具有  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  的流形结构……这些都是在我们选取物理空间中的坐标系之前就已经能够确定的, 或者说, 这些是位形空间或流形的**内蕴 (intrinsic)** 性质。

如果一个  $N$  质点系统中存在  $n' = Nd - n$  个完整约束条件, 那么系统的自由度就只剩下了  $n$  个, 位形空间中的每一个位置状态来可以用  $n$  个参量  $q_1, \dots, q_n$  来表示, 物理学上我们把  $q_1, \dots, q_n$  这组数称为“广义坐标”。

用更加数学的语言来讲, 上述过程实际上是建立了一个位形空间  $M$  到  $\mathbb{R}^n$  (或  $\mathbb{R}^n$  的一个子集) 的映射。事实上,  $n$  个自由度的位形空间就是一个  $n$  维的流形, 一个  $n$  维流形到  $\mathbb{R}^n$  的映射恰好对应了流形上坐标映射的概念。因此, 广义坐标对应的恰好是微分流形中局部坐标的概念。

**定义 6.4.1** 对于位形空间为  $M$  的完整约束力学系统,  $M$  上的局部坐标系  $(U, \varphi; q_i)$  称为**广义坐标系**, 对于  $x \in M$ ,  $\varphi(x)$  称为  $p$  的**广义坐标**,  $M$  作为流形的维数称为这个力学系统的**自由度**。

**注 6.4.1** 数学家定义流形时使用的局部坐标的定义中, 要求坐标映射是流形上开集与  $\mathbb{R}^n$  上开集的同胚, 从而极坐标、球坐标等都不能是全空间中有定义的坐标系 (因为圆周和球面与欧氏空间不同胚); 而物理学中使用的广义坐标其实是更宽泛的, 允许一个点有多个坐标 (比如说在单位圆周上, 对于任意整数  $k$ ,  $\theta + 2k\pi$  都表示  $(\cos \theta, \sin \theta)$  这个点), 也允许坐标映射的定义域或像集不是开集, 所以严格来讲, 广义坐标系是一个比局部坐标系更宽泛的定义。但是大多数情况下, 尤其是当我们只考虑系统的局部行为时, 广义坐标与严格的局部坐标之间的这种差异是不会显现出来的, 因此它们仍然可以看作是等同的。

**定义 6.4.2** 对于位形空间为  $M$  的完整约束力学系统,  $M$  上的有局部 (广义) 坐标系  $(U, \varphi)$ , 则其所诱导切坐标系的后一半分量称为**广义速度**.  $U$  上的一个切向量可以由广义坐标和广义速度唯一确定.

在上述定义下, 假设有一个流形  $M$  上有一个广义坐标系  $(U, \varphi; q^i)$ , 则对于任意  $x \in U$  和  $v \in T_x M$ ,  $v$  表示系统的一个状态. 设

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n),$$

$$v = v^1 \frac{\partial}{\partial q^1} \Big|_x + v^2 \frac{\partial}{\partial q^2} \Big|_x + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial q^n} \Big|_x$$

则在广义坐标系  $(U, \varphi; q^i)$  的表示下, 系统在状态  $v$  下的广义坐标和广义速度分别

$$(q^1, q^2, \dots, q^n) \text{ 和 } (v^1, v^2, \dots, v^n).$$

当然, 同一个状态在不同的广义坐标系下会有不同的广义坐标和广义速度. 假设上述  $v \in T_x M$  在广义坐标系  $(U, \varphi; q_U^i)$  和  $(V, \psi; q_V^i)$  下的坐标表示分别为

$$\begin{cases} \varphi(x) = (x_U^1, \dots, x_U^n), v = v_U^1 \frac{\partial}{\partial q_U^1} \Big|_x + \dots + v_U^n \frac{\partial}{\partial q_U^n} \Big|_x \\ \psi(x) = (x_V^1, \dots, x_V^n), v = v_V^1 \frac{\partial}{\partial q_V^1} \Big|_x + \dots + v_V^n \frac{\partial}{\partial q_V^n} \Big|_x \end{cases}$$

那么按照微分流形中局部坐标系转换关系的相关知识, 我们有

$$(x_U^1, \dots, x_U^n) = (\varphi \circ \psi^{-1})(x_V^1, \dots, x_V^n), \quad \frac{\partial}{\partial q_U^i} \Big|_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_V^j}{\partial q_U^i} \Big|_x \frac{\partial}{\partial q_V^j}$$

$$(x_V^1, \dots, x_V^n) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x_U^1, \dots, x_U^n), \quad \frac{\partial}{\partial q_V^i} \Big|_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_U^j}{\partial q_V^i} \Big|_x \frac{\partial}{\partial q_U^j}$$

其中  $\frac{\partial q_V^j}{\partial q_U^i}$  和  $\frac{\partial q_U^j}{\partial q_V^i}$  分别是  $\psi \circ \varphi^{-1}$  和  $\varphi \circ \psi^{-1}$  的 Jacobi 矩阵的矩阵元在  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  处的取值, 并且有

$$v_U^i = \sum_{j=1}^n v_V^j \frac{\partial q_U^i}{\partial q_V^j} \Big|_x, \quad v_V^i = \sum_{j=1}^n v_U^j \frac{\partial q_V^i}{\partial q_U^j} \Big|_x, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.27)$$

(6.27) 表明, 对于固定的  $x$ ,  $T_x M$  中的状态的在任意两个局部 (广义) 坐标系  $(U, \varphi)$  和  $(V, \psi)$  的坐标表示下的广义速度之间满足线性转化关系. 我们还可以将 (6.27) 中的两式的两端分别对  $v_V^j$  和  $v_U^j$  求导, 得到

$$\frac{\partial v_U^i}{\partial v_V^j} = \frac{\partial q_U^i}{\partial q_V^j}, \quad \frac{\partial v_V^i}{\partial v_U^j} = \frac{\partial q_V^i}{\partial q_U^j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6.28)$$

(6.28) 称为 Lagrange 关系, 物理学中写作

$$\frac{\partial \dot{q}_U^i}{\partial \dot{q}_V^j} = \frac{\partial q_U^i}{\partial q_V^j},$$

它是 Lagrange 最初推导 Lagrange 方程时使用到的一个关系式, 它给出了速度分量在不同坐标系下的转化关系。

从实际计算的角度来讲, 广义坐标的引入使得我们可以用最少的变量来描述系统, 在适当的问题中可以大大节省我们需要的计算量; 从理论的角度来讲, 广义坐标和流形论中的局部坐标等价, 它提供了一种对于位形空间的内蕴的描述方式, 使得我们把力学问题限定在它真正有定义的空间上, 从而不必再花心思研究流形在高维欧氏空间中的嵌入方式, 从而有利于我们用数学语言精准地描述力学问题。

## 6.5 刚体的位形空间

本节我们探讨一类比较特殊的系统——刚体。当我们把一个物体看作“刚体”时, 我们认为它不再是一个质点, 而是一个占据了一定空间区域的实体, 并且这个实体在运动过程中, 其内的任意两点之间的距离保持不变。我们可

以把刚体分割成  $N$  个小体元, 它们两两之间由于直接或间接的刚性支持力作用而保持距离不变, 每一个小体元可以看作一个质点, 从而构成一个  $N$  质点系统, 这样, 在  $N \rightarrow \infty$  时的我们就得到了想要研究的刚体. 不过其实对于刚体问题而言, 有限个质点与无限个质点的结论并没有什么本质上的差别, 因为只要这个刚性体系中的质点数  $N \geq 4$ , 那么其位形空间就一定是一个连通的六维流形, 更多质点 (甚至无穷个质点) 的引入不会带来新的自由度.

接下来我们用比较数学化的语言来表述刚体问题. 假设  $t = 0$  时, 刚体在  $\mathbb{R}^3$  占据了一个空间  $V$ , 并且我们要求  $V$  中存在不共面的四个点, 令

$$x = x(a, t) : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (6.29)$$

表示刚体中在  $t = 0$  时处于位置  $a \in \mathbb{R}^3$  的点在  $t$  时刻的位置. 对于刚体, 我们要求运动过程中刚体内任意两点之间的距离保持不变, 即

$$|x(a_1, t) - x(a_2, t)| = |a_1 - a_2| \quad \forall a_1, a_2 \in V, t \in \mathbb{R}. \quad (6.30)$$

刚体运动的核心性质是保距性, 因此我们首先来探讨在  $\mathbb{R}^n$  上那些保距变换所具有的性质.

**定义 6.5.1 (等距变换)** 设  $\sigma$  是一个  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的映射, 如果其满足: 对于任意  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$|\sigma(a) - \sigma(b)| = |a - b|, \quad (6.31)$$

则称  $\sigma$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一个**等距变换**.  $\mathbb{R}^n$  上的全体等距变换按映射复合构成的群称为  **$n$  维欧氏群 (Euclidean group)**, 记作  $E(n)$ .

下述定理说明欧氏空间上的等距变换具有非常良好的性质:

**定理 6.5.1** 任何一个  $\mathbb{R}^n$  上的等距变换  $\sigma$  都可以表示为

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Ax + b \end{aligned} \quad (6.32)$$

的形式, 其中  $b \in \mathbb{R}^3$ ,  $A$  是一个  $n \times n$  的实正交矩阵.

**证明:** 其实从 (6.32) 的形式中我们就可以看出,  $b = \sigma(0)$ . 我们取映射  $\sigma' : x \mapsto \sigma(x) - \sigma(0)$ , 则  $\sigma'$  也是一个保距映射, 并且  $\sigma'(0) = 0$ , 接下来证明它是线性映射.

事实上, 对于任意  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , 由  $|\sigma'(a) - \sigma'(b)| = |a - b|$ ,  $|\sigma'(a)| = |a|$ ,  $|\sigma'(b)| = |b|$  可知

$$\begin{aligned}\sigma'(a) \cdot \sigma'(b) &= (|\sigma'(a)|^2 + |\sigma'(b)|^2 - |\sigma'(a - b)|^2)/2 \\ &= (|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2)/2 = a \cdot b,\end{aligned}$$

因此对于任意  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , 我们有

$$\begin{aligned}& |\sigma'(a + b) - \sigma'(a) - \sigma'(b)|^2 \\ &= |\sigma'(a)|^2 + |\sigma'(b)|^2 + |\sigma'(a + b)|^2 - 2\sigma'(a + b) \cdot (\sigma'(a) + \sigma'(b)) + 2\sigma'(a) \cdot \sigma'(b) \\ &= |a|^2 + |b|^2 + |a + b|^2 - 2(a + b) \cdot (a + b) + 2a \cdot b = |(a + b) - a - b|^2 = 0\end{aligned}$$

从而我们总有

$$\sigma'(a + b) = \sigma'(a) + \sigma'(b) \quad (6.33)$$

对 (6.33) 使用所谓“柯西爬坡法”, 我们还可以证明

$$\sigma'(\lambda a) = \lambda \sigma'(a) \quad (6.34)$$

对于任意  $\lambda \in \mathbb{Q}$  (有理数集) 成立, 而  $\sigma'$  是保距变换, 容易证明其连续性, 从而可以证明 (6.34) 对任意  $\lambda \in \mathbb{R}$  是成立的, 这就证明了  $\sigma'$  是一个线性映射. 我们假设在  $\mathbb{R}^n$  的自然基底下  $\sigma'(x) = Ax$ , 其中,  $A$  是  $n \times n$  的矩阵, 那么

$$|x|^2 = |\sigma'(x)|^2 = |Ax|^2 = x^\top A^\top A x \quad (6.35)$$

对任意  $x \in \mathbb{R}^n$  成立, 这说明必然有  $A^\top A = I$ , 从而  $\sigma' = \sigma(\cdot) - b$  是一个线性正交变换, 定理6.5.1得证. ■

正交矩阵所代表的变换被称为“刚性变换”, 在线性代数中, 有一个结论是说刚性变换一定可以写成若干个旋转、 $n-1$  维镜面反射变换 (Householder 变换) 的复合. 从而定理6.5.1说明任何一个刚性变换都可以表示为一系列平移、旋转、镜面对称变换的复合. 此外, (6.32) 还告诉我们, 欧氏群  $E(n)$  上还有一个光滑流形结构, 这个流形的维数是  $n(n+1)/2$ , 其中有  $n$  个自由度由



$b$  提供, 剩下的  $n(n-1)/2$  个自由度由正交矩阵  $A$  提供. 特别地, 取  $n=3$ , 我们就得到  $E(3)$  的流形维数是  $3 \times (3+1)/2 = 6$ .

$E(n)$  作为流形有两个连通分支

$$E(n)^+ = \{x \mapsto Ax + b : \det A = 1\},$$

$$E(n)^- = \{x \mapsto Ax + b : \det A = -1\}$$

其中  $E^+(n)$  中的元素仍然对映射复合运算封闭, 从而具有群结构, 称为  $n$  维定向欧氏群.

利用欧氏群, 我们可以这样描述刚体的运动。

**定理 6.5.2** 设  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ , 并且  $V$  中存在不共面的四个点, 映射  $x(a, t) : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , 使得

- 对于任意  $a \in A$ ,  $x(a, t)$  对  $t$  是连续的,
- 对于任意  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x(a, t)$  是等距变换, 即其满足 (6.30)

那么对于每一个  $t \in \mathbb{R}$ , 存在唯一一个  $\sigma_t \in E(3)$ , 使得

$$\sigma_t(a) = x(a, t) \tag{6.36}$$

对每一个  $a \in \mathbb{R}$  成立, 并且这个  $\sigma_t$  一定包含于  $E^+(3)$  内.

上述定理的证明会比较繁琐, 在这里不展开讨论. 但是我们有必要对这个命题的一些关键要素进行说明:

1. 我们对  $V$  的“存在四点不共面”的限制条件保证了  $\sigma_t$  的唯一性. 事实上, 如果  $V$  整个地包含于某一个平面上, 那么满足 (6.36) 的  $\sigma(t)$  将会有至少两个, 分别存在于  $E^+(3)$  和  $E^-(3)$  中: 比方说对  $t=0$ , 满足条件的  $\sigma_0$  少包括恒同映射和“沿  $V$  所在平面反射”这两个变换; 在实际物理问题中, 我们建模为“刚体”的物体都是会占据一定三维空间的, 无论其质量是集中分布在有限个离散的点上, 还是均匀分布在一个空间区域内, 所以, 这一限定条件是有一般性物理意义的;

2. 我们之所以最后能够断言  $\sigma_t$  一定包含于  $E^+(3)$  内, 是因为之前我们假设了  $x(a, t)$  对  $t$  是连续的 (这当然也符合物理意义), 这使得  $\sigma_t$  对  $t$  也是连续的, 也就是说  $t \mapsto \sigma_t$  是流形  $E(3)$  上的一条连续的曲线, 它当然不可能跨越连通分支; 而  $\sigma_0$  又是恒同映射, 包含于连通分支  $E^+(3)$ , 所以整条曲线上的点都是  $E^+(3)$  上的点.

定理 (6.5.2) 说明, 在我们选定了刚体的某一个初始位置状态之后, 刚体之后的时间内无论运动到什么样的位置状态, 我们都可以在  $E^+(3)$  中唯一确定一个元素  $\sigma$  来表示初始状态到这个新的状态的变换, 因此, 我们断言

**无约束刚体的位形空间是  $E^+(3)$ .**

这里的“无约束”指的是刚体可以在三维空间中自由自在地运动. 但很多时候我们更关注的还是刚体“转动”的那一部分运动, 这种时候我们通常会通过选择适当的参考系, 使得被研究的刚体中有至少一个点是不动的, 经典的例子如转动的陀螺, 我们认为其底部是不动的. 在这种时候, 这个刚体的位形空间中就不再包含平移的成分, 如果我们的坐标原点是这个动的点, 那么状态之间的转化将都可以用刚性线性变换  $x \mapsto Ax, A \in \text{SO}(3)$  来表示, 这里  $\text{SO}(3)$  是指特殊正交群:

$$\text{SO}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : AA^T = 1 \text{ 且 } \det A = 1\}.$$

从而这种固定单点位置的刚体的位形空间是  $\text{SO}(3)$ , 而不再是  $E^+(3)$ . 对于无约束和单点位置固定的刚体问题, 位速空间都是位形空间的切空间, 这是因为“任意两点之间距离固定”这种条件都是完整约束条件.

我们还要在刚体的位形空间上建立“质量度量”. 其实在刚体的位形空间上定义质量度量和对  $N$  质点系统建立质量度量一样, 都只需要使得“切向量的长度表示动能”. 对于质量分布在离散个点上的刚体, 刚体的动能各个质点的动能相加; 而对于质量连续分布在区域  $V$  上的刚体, 刚体的动能就是各个体元的动能的积分

$$T \iiint_V \rho(a) \left| \frac{\partial x(a, t)}{\partial t} \right|^2 d^3 a \quad (6.37)$$

表达式 (6.37) 虽然是一个积分表达式, 看上去由  $x$  在无穷多个点处的取值决定, 但是当我们在位形空间  $E^+(3)$  或  $\text{SO}(3)$  上选好局部坐标系  $(U; q^1, \dots, q^6)$

后, 动能仍然可以表示为广义坐标、广义速度的函数, 并且还是广义速度的正定二次型.

总而言之, 刚体问题是一类相对特殊的经典力学问题, 它不属于  $N$  质点问题 (当质量连续分布在刚体内时), 或者说属于  $N$  质点问题但  $N$  太过于庞大; 但由于刚体的“任意两点之间距离固定”这一属性, 使得无论这个体系中包含多少个质点 (甚至是无穷多个), 它最终的位形空间也只有六维, 并且我们可以在这个六维流形上定义完全符合物理意义的质量度量, 动能函数等, 从而我们把这个问题处理得和  $N$  质点问题非常相像.

刚体问题相较于  $N$  质点系统问题, 其最大的特点在于: 它的位形空间并不是用 “ $\mathbb{R}^{Nd} +$  约束方程” 这种方式确定的, 或者说, 它的位形空间并不一定存在一个很自然的到高维欧氏空间的嵌入, 这使得我们只能使用广义坐标来描述这样的系统. 恰恰是这样的系统, 最能体现出 Lagrange 建立的分析力学体系的优越性.

## 6.6 含时问题

最后我们来简单探讨一下含时问题. 所谓含时, 指的是系统中的力与时间显式相关, 即

$$F = F(x, v, t), \quad \frac{\partial F}{\partial t} \neq 0.$$

比如说例6.1.2中由 (6.13) 定义的力就是含时的.

事实上, 对于一般的含时问题, 物理学中定义的“完整约束”是形如

$$f(x_{11}, \dots, x_{Nd}, t) = 0 \quad (6.38)$$

的约束条件, 这就是说, 对于每一个时刻, 系统所处的位置会由于约束力的存在而被限制在某一个给定的流形上, 而且这个流形有可能随时间的推移而出现连续变化.

对于含时问题, 我们有一种统一的处理方式, 那就是把 (不带约束的) 时间 + 空间整体看作一个  $Nd + 1$  维的欧氏空间  $\mathbb{R}^{Nd+1}$ , 称为**含时位形空间**, 其切空间  $T\mathbb{R}^{Nd+1}$  称为**含时位速空间**, 然后另选一个参数  $s$  当成时间. 这样,

我们就把求解  $Nd$  元二阶微分方程组的问题变成了求解一个  $Nd + 1$  元二阶微分方程组的问题

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t) \longrightarrow \frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} = \tilde{f}(\tilde{x}),$$

其中

$$\tilde{x} = \tilde{x}(s) = \begin{pmatrix} x(t(s)) \\ t(s) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} f(x, t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

这样, 时间  $t$  就被算作了一个空间维度, 但此时我们对系统的初值选取会额外地要求

$$t(s=0) = 0, \quad \frac{dt}{ds}(s=0) = 1, \quad (6.39)$$

这使得最终求出的解中,  $t$  作为  $s$  的函数, 与  $s$  总是相等的, 从而  $t$  仍然能够代表时间.

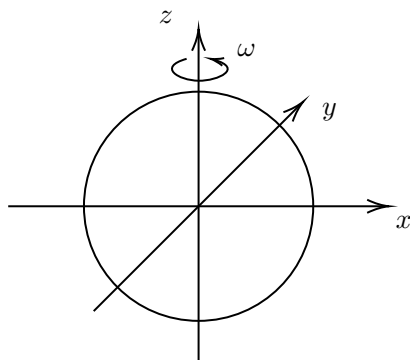
在这样一种处理方式下, 满足形如 (6.38) 这样的约束条件的点所组成的集合构成  $\mathbb{R}^{Nd+1}$  的一个嵌入子流形. 此外, 这个流形在每一个时间截面上又是一个比自己低一维的嵌入子流形. 由此我们可以这样定义:

**模型设定 5** 对于一般的 (含时)  $N$  质点系统, 考虑含时位形空间  $\mathbb{R}^{Nd+1}$ , 如果系统中的约束条件使得系统的位形时空构成  $\mathbb{R}^{Nd+1}$  的嵌入子流形  $M$ , 位速空间是  $TM$ , 并且对于每一个  $t \in \mathbb{R}$ ,  $M \cap \{(0, \dots, 0, t)\}$  构成  $\mathbb{R}^{Nd} \times \{(0, \dots, 0, t)\}$  的维数比  $M$  小 1 的嵌入子流形, 则称这个系统具有完整约束.

**例 6.6.1** 设有一个半径为  $R$  的圆环, 上面套着一个小珠, 这个圆环还绕着一个固定的轴以角速度  $\omega$  进行旋转. 我们以圆环的圆心为原点, 旋转轴为  $z$  轴、 $t=0$  时刻圆环所在的平面的法方向为  $x$  轴建立坐标系  $Oxyz$ , 则可知对于任意一个  $t \in \mathbb{R}$ , 小球的坐标  $(x, y, z)$  必然满足

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x \cos \omega t + y \sin \omega t = 0 \end{cases} \quad (6.40)$$

满足 (6.40) 的全体实数组  $(x, y, z, t)$  构成  $\mathbb{R}^4$  的一个二维嵌入子流形, 并且对于每一个固定的  $t$ , 满足 (6.40) 的全体实数组  $(x, y, z)$  构成了  $\mathbb{R}^3$  的一个一维嵌入子流形 (事实上是  $\mathbb{R}^3$  中的一个圆), 从而我们可以说该问题是一个具有完整约束的含时问题.

图 6.2: 绕  $z$  轴旋转的圆环

诚然，我们并不总是需要照本宣科地把含时问题强行转化成高一维的不含时问题来求解，因为这种处理方式只是在理论论述时比较方便，实际计算是，我们往往有更聪明的方法来处理这类问题。比如说例6.6.1中的这个问题，我们大可以使用非惯性参考系，使得我我们研究的圆环在此坐标系下是不随时间变化的，但是同时还引入一个等效的离心力（这个离心力甚至还是一个可以定义势能保守力），这样，我们的问题就变成了一个不含时的问题。

在常微分方程理论中，我们把形如  $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$  的常微分方程组定义的系统称为**非自治系统**，而把形如  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  的常微分方程组定义的系统称为**自治系统**。前者对应于我们所讨论的一般含时力学系统，而后者对应于不含时的力学系统。自治系统可以等价表述为固定向量场中求积分曲线的问题。当然，非自治系统中如果把时间当成一个新的空间变量，另取参数  $s$  当作时间变量，也可以转化成高一维的自治系统。

非自治系统相比于自治系统而言，最大的区别是前者失去了时间上的平移不变性：对于自治系统，如果我们解得了初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \xrightarrow{\text{求解}} x = x(t),$$

那么对于任意  $t^* \in \mathbb{R}$ , 一定有

$$x = x(t + t^*) \text{ 是初值问题 } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t^*) = x_0, \end{cases} \text{ 的解.}$$

注意在两个问题中, 方程是没有变的, 一直都是  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ; 而如果我们解的是非自治系统的初值问题,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \xrightarrow{\text{求解}} x = x(t),$$

那么对于  $t^* \in \mathbb{R}$ ,

$$x = x(t + t^*) \text{ 却不一定是初值问题 } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(t^*) = x_0, \end{cases} \text{ 的解.}$$

事实上,  $x = x(t + t^*)$  应该是方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t + t^*)$$

的解, 由于系统非自治,  $f(x, t + t^*)$  一般不等于  $f(x, t)$ , 从而  $x = x(t + t^*)$  和  $x(t)$  满足的不是同一个方程. 在力学中有著名的 Noether 定理, 讲的是每一个对称性对应一个守恒量 (这个我们会在后面展开来讲), 非自治系统中平移不变性的缺失, 会直接导致系统失去了一个守恒量, 后面我们将会看到, 这个量就是 Hamilton 量, 或者说能量。

从上面的讨论可以看出, 含时 (非自治) 问题, 相比于不含时 (自治) 的问题有其特殊之处, 但也有些时候它不会对我们关心的结论产生本质性的影响。比如说在推导 Lagrange 方程和 Hamilton 方程时, Lagrange 函数或 Hamilton 函数是否显含时间并不会影响最终 Lagrange 方程或 Hamilton 方程的形式, 并且含时 Hamilton 系统也仍然遵循 Liouville 定理, 也仍然有等价的 Hamilton-Jacobi 方程。

然而, 在数学上, 我们更习惯于处理固定的向量场的积分曲线, 并且人们关注的物理系统大多数也还是自治的或者可以转化成自治问题的, 所以我

们在接下来的章节里介绍 Lagrange 力学和 Hamilton 力学时，都将重点介绍不含时问题，然后再单抽出一节来讨论含时问题，这一节会关注含时问题相比于不含时问题，有哪些性质是不同的、哪些性质是相同的。





## 第七章 Lagrange 力学



## 第八章 辛流形



## 第九章 Hamilton 力学



# 附录 A 一些记号约定

## A.1 Einstein 求和约定





## 参考文献

- [1] OCKENDON H, OCKENDON J. Waves and compressible flow: volume 57[M/OL]. 2004: 33-. DOI: 10.1115/1.1849177.