Лабораторна робота №2

Дослідження математичної моделі зміни чисельності популяції

Мета роботи

Побудова математичної моделі Вольтерри, дослідження моделі із використанням комп'ютерного моделювання

2.1 Інформаційний матеріал

Аналітично (тобто у формульному вигляді) розв'язати систему нелінійних диференціальних рівнянь загального вигляду досить важко (практично неможливо). Навіть отриманий в аналітичному вигляді розв'язок системи рідко відображає поведінку системи в цілому. Розв'язок у числовому вигляді взагалі не дає уявлення про динаміку системи. Для досліджень часто інтерес становить не аналітичний вигляд окремого розв'язку, а поведінка системи в цілому, а саме: скільки точок спокою має система, якого вони вигляду (стійкі чи нестійкі), чи існують періодичні траєкторії, як вони розташовані, як поводяться розв'язки, що містяться між особливими точками тощо. Завдяки цьому виникло поняття якісного дослідження систем диференціальних рівнянь.

Найбільш цікаві результати щодо якісного моделювання властивостей біологічних систем отримані на моделях із двох диференціальних рівнянь, які допускають якісне дослідження за допомогою методу фазової площини.

2.1.1 Математична модель зміни чисельності популяції

Для математичного моделювання зміни чисельності хижаків та жертв у найпростішій екологічній системі Вольтерра запропонував використати таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = \varepsilon_1 x - \gamma_{12} xy - \gamma_{11} x^2 \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = \gamma_{21} xy - \varepsilon_2 y - \gamma_{22} y^2 \end{cases} \tag{1}$$

У цій системі рівнянь x є чисельністю жертв, а y – чисельністю хижаків. Похідні за часом, що стоять у лівих частинах рівнянь, описують швидкість зростання популяцій.

Перший доданок у правій частині першого рівняння системи визначає розмноження жертв. Швидкість розмноження пропорційна чисельності жертв із коефіцієнтом пропорційності ε_1. Наступний доданок першого рівняння описує процес поїдання жертв хижаками. Швидкість цього процесу пропорційна добутку чисельності хижаків та жертв. Це є наслідком припущення про те, що ймовірність перебування жертви і хижака в певному місці не залежать один від одного. Ймовірність "з'їдання" жертви під час зустрічі враховується коефіцієнтом γ_{12}. Остання складова першого рівняння системи обмежує зростання популяції жертв. Якщо чисельність жертв мала, їм можна знехтувати у порівнянні з першим доданком, оскільки границя відносини лінійної і квадратичної функції при прямуванні до нуля їх аргументів дорівнює нулю.

У другому рівнянні системи доданки мають той самий сенс, крім знаків перших двох. Це пояснюється тим, що без хижаків жертви можуть розмножуватися, але не навпаки. Тому за малої кількості жертв чисельність хижаків зменшуватиметься.

Для знаходження стаціонарних точок необхідно прирівняти до нуля перші похідні за часом у рівняннях, що входять до системи (1). У нашому випадку ми отримаємо:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 x - \gamma_{12} xy - \gamma_{11} x^2 = 0 \\ \gamma_{21} xy - \varepsilon_2 y - \gamma_{22} y^2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Рішенням цієї системи будуть такі стаціонарні точки:

а) $$x_0 = 0,\ y_0 = 0; \tag{3}$$

б) $$x_0 = 0,\ y_0 = -\frac{\varepsilon_2}{\gamma_{22}}; \tag{4}$$

в) $$x_0 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_{11}},\ y_0 = 0; \tag{5}$$

г) $$x_0 = \frac{\varepsilon_1 \gamma_{22} + \varepsilon_2 \gamma_{12}}{\gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{12}\gamma_{21}} \qquad y_0 = \frac{\varepsilon_1 \gamma_{21} - \varepsilon_2 \gamma_{11}}{\gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{12}\gamma_{21}}; \tag{6}$$

Рішення а) відповідає відсутності жертв і хижаків, і тому нецікаве.

Рішення б) фізично неможливе, оскільки число хижаків може бути від'ємним.

Рішення в) відповідає динамічній рівновазі чисельності жертв без хижаків.

Рішення г) найцікавіше для подальшого аналізу.

2.1.2 Вихідні дані до роботи

Задано:

★ модель Вольтерри (1);

★ значення параметрів моделі (1);

★ початкові точки для моделювання x_0, y_0.

Варіант	ε_1	γ_{12}	γ_{11}	γ_{21}	ε_2	γ_{22}	x_0, y_0
1	2.0	0.5	0.1	0.7	3.0	0.11	2, 2.7
2	1.9	0.52	0.12	0.71	3.1	0.1	1.2, 1.8
3	2.1	0.51	0.1	0.67	3.0	0.13	1.9, 1.6
4	2.1	0.502	0.1	0.71	3.2	0.12	1.02, 1.8

2.2 Програма виконання роботи

1. Знайти стаціонарні точки системи диференціальних рівнянь для заданих значень параметрів.
2. Розв'язати систему, використовуючи чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь (наприклад, метод Рунге-Кутти), за допомогою вбудованих функцій пакетів прикладних програм та отримати залежності кількості жертв та хижаків від часу для заданих параметрів моделі.
3. Вивести графіки розв'язків у часі та у фазовому просторі для початкових значень x_0, y_0.
4. Виконати моделювання й оцінити поведінку системи за різних значень параметрів, а також за різних початкових умов. При цьому необхідно врахувати певні обмеження для можливих значень параметрів, спираючись на змістовне наповнення моделі. Надати рекомендації щодо співвідношень параметрів моделі.
5. Порівняти результати моделювання з результатами, отриманими в попередній лабораторній роботі.
6. Усі результати, отримані в ході виконання роботи, занести до звіту. Зробити висновки.