ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

Образовательная программа бакалавриата «Науки о данных»

Отчёт по практике
«Учебная практика (проектно-технологическая практика)»

Выполнил студент 2 курса бакалавриата
(группа 22.Б05-мкн)
Ратьков Андрей Игоревич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Охотин Александр Сергеевич

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Описание алгоритма Хопкрофта

1.1 Вступление

На входе подаётся детерминированный конечный автомат (DFA) $A(\Sigma,\ Q,\ q_0,\ \delta,\ F)$. Σ — входной алфавит — конечный набор символов, Q — конечное множество состояний, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ — правила переходов, $F \subset Q$ — множество принимающих состояний. Алгоритм минимизации преобразует автомат до нового минимального автомата A' (автомата с минимальным числом состояний), распознающего тот же язык.

Для начала удаляются состояния, в которые нельзя попасть из начального состояния q_0. Остальные состояния разбиваются на классы эквивалентности по следующему отношению:

Определение 1. *Состояния q_1 и q_2* ***эквивалентны*** *($q_1 \sim q_2$), если множество слов, принимаемых из состояния q_1 равно множеству слов, принимаемых из состояния q_2.*

По теореме Мура, получаемый при этом автомат минимальный. Алгоритм Мура минимизации конечных автоматов работает за время $O(n^2)$, где $n = |Q|$ — количество состояний в исходном автомате A. Ниже будет расмотрен алгоритм Хопкрофта [1], делающий то же самое, но с лучшей асимптотикой $O(n \log n)$.

1.2 Используемые объекты и подготовка к минимизации

Первым делом покажем, что удаление недостижимых из q_0 состояний можно сделать линейно. Будем красить состояния в три цвета: черный, серый, белый. Белый будет означать, что алгоритм не достиг ещё этого состояния, серый — достиг, но не прошёл из него в соседние состояния (т.е. в состояния, в которые можно попасть из текущего по какому-то символу), чёрный — что состояние посещено и достигнуты соседние с ним состояния. В начале алгоритм красит начальное состояние в серый, остальные — в белый, начальное состояние кладёт в очередь (очередь состоит из серых состояний). Далее, пока очередь непуста, из неё берется серое состояние, перекрашивается в чёрный. Перебираются его соседние состояния, и те из них, которые белые, перекрашиваются в серый и добавляются в очередь. Работает это за время $O(|\Sigma|n)$, так по каждому из рёбер графа, задаваемом A, алгоритм пройдёт не более 1 раза, сделает не более n добавлений и вытаскивний элемента из очереди (каждая из этих операций — $O(1)$).

В реализации алгоритма понадобится отображение $\delta^{-1} : Q \times \Sigma \longrightarrow 2^Q$: каждому состоянию $q \in Q$ и символу $a \in \Sigma$ сопоставляется множество состояний, из которых можно прийти в q по a ($\delta^{-1}(q, a) = \{s \in Q | \delta(s, a) = q\}$). Поскольку

$$\sum_{q \in Q} \sum_{a \in A} \delta^{-1}(q, a) = |\Sigma|n$$

(обе части — количество переходов в графе, задаваемом A), для δ^{-1} построение занимает $O(|\Sigma|n)$ времени и $O(|\Sigma|n)$ памяти.

Как и в алгоритме Мура, алгоритм Хопкрофта будет разбивать состояния автомата A на блоки (раскрашивать состояния в цвета), пока в конце не окажется, что разбиение на блоки (цвета) не удовлетворяет следующему условию: два состояния находятся в одном блоке (помечены одним цветом) тогда и только тогда, когда они эквивалентны. Тогда будет получено искомое разбиение на классы эквивалентности.

На каждой итерации алгоритма все состояния покрашены в k цветов (разбиты на k блоков). Блоки будем обозначать $B(0)$, $B(1)$, $\ldots$, $B(k-1)$. Чтобы быстро уметь итерироваться (перебирать все элементы) по какому-нибудь блоку $B(j)$, будем представлять, что состояния находятся в каком-то порядке и для каждого состояния мы храним номер следующего состояния такого же цвета и предыдущего состояния такого же цвета. Также для каждого цвета j удобно хранить первое состояние цвета j (обозначим его за $first(j)$). Тогда проитерироваться по всем состояниям $B(j)$ несложно: для начала обращаемся к состоянию $first(j)$, а затем из состояния идём в следующее состояние этого цвета (пока не достигнем последнего состояния в блоке). При такой конструкции итерирование по всякому блоку $B(j)$ (перебор всех состояний из $B(j)$) занимает $O(|B(j)|)$ времени.

Также для каждого цвета j и символа a будем помнить множество всех состояний цвета j, в которые можно попасть по символу a. Будем обозначать это множество как $\hat{B}(B(j), a)$. Нам понадобится итерироваться по таким множествам $\hat{B}(B(j), a)$. Можно считать, что состояния в каждом множестве $\hat{B}(B(j), a)$ — элементы двусвязного списка. А именно, для каждого состояния $q \in B(j)$, для каждого символа a, если в q можно попасть по a, будем хранить номер следующего состояния из $\hat{B}(B(j), a)$ и предыдущего (если таковые есть). Также для каждого множества $\hat{B}(B(j), a)$ будем хранить первого состояния из этого множества (обозначим его за $first(j, a)$). Тогда итерирование по множеству $\hat{B}(B(j), a)$ выглядит так: сначала обращаемся к $first(j, a)$, а затем из состояния переходим к следующему, которое лежит в $\hat{B}(B(j), a)$ (пока можем перейти, то есть пока следующее есть). При такой конструкции итерирование по состояниям из всякого множества $\hat{B}(B(j), a)$ занимает $O(|\hat{B}(B(j), a)|)$ времени.

На каждом этапе алгоритма мы будем поддерживать, что если у состояний разный цвет (они в разных блоках), то из них принимаются разные языки. То есть для всяких блоков $B(i), B(j)$, $(i \neq j)$, для любых двух состояний из них $q_1 \in B(i)$, $q_2 \in B(j)$ существует разделяющая строка $w \in \Sigma^*$ (то есть такая, w — принимаемая

из q_1, но не принимаемая из q_2, или наоборот — принимаемая из q_2, но не принимаемая из q_1). Например, в начале все принимающие состояние покрашены в цвет 0 (блок $B(0)$), отвергающие — в цвет 1 (блок $B(1)$). Разделяющая строка для этих блоков — ϵ.

1.3 Несколько утверждений

Лемма 1. *Пусть все состояния разбиты на блоки: из состояний разных блоков принимаются разные языки. Зафиксируем блок $B(i)$ и символ $a \in \Sigma$. Рассмотрим произвольный блок $B(j)$. Определим*

$$B'(j) = \{t \in B(j) | \delta(t, a) \in B(i)\},$$

$$B''(j) = \{t \in B(j) | \delta(t, a) \notin B(i)\}.$$

Тогда $\forall q_1 \in B'(j)\ \forall\ q_2 \in B''(j)$ из состояний q_1 и q_2 принимаются разные языки, то есть $q_1 \not\sim q_2$.

Доказательство. Пусть $p_1 = \delta(q_1, a)$. $p_1 \in B(i)$, так как $q_1 \in B'(j)$. Пусть $p_2 = \delta(q_2, a)$. $p_2 \notin B(i)$, так как $q_2 \in B''(j)$.

Состояния p_1 и p_2 лежат в разных блоках, поэтому существует строка w, принимаемая ровно из одного из них. Тогда строка aw принимается ровно из одного из состояний q_1, q_2 (w принимается из $p_1 \iff aw$ принимается из q_1; w принимается из $p_2 \iff aw$ принимается из q_2). □

Отсюда понятно, что если блок $B(j)$ заменить на блоки $B'(j)$ и $B''(j)$ (если они оба непусты), то по-прежнему в новом разбиении на блоки выполнено, что состояния в разных блоках неэквивалентны.

Определение 2. *Пусть все состояния разбиты на k блоков $B(0), B(1), \ldots, B(k-1)$, зафиксирован блок $B(i)$ и символ $a \in \Sigma$. Для каждого блока $B(j)$ определим множества $B'(j)$ и $B''(j)$ как в теореме выше. Получим новое разбиение: для каждого $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, если оба множества $B'(j)$ и $B''(j)$ непусты, заменим блок $B(j)$ на блоки $B'(j)$ и $B''(j)$, тем самым получим новое разбиение на блоки — измельчение старого разбиения. Такую операцию измельчения разбиения состояний на блоки будем называть **измельчением с помощью блока $B(i)$ и символа a**. Измельчение будем называть **бесполезным**, если оно не увеличивает число блоков (для всякого блока $B(j)$ один из блоков $B'(j)$ и $B''(j)$ пуст), или **полезным** в противном случае.*

Суть алгоритма — сначала разбить состояние на два блока (принимающие и отвергающие состояния). А дальше много раз измельчать разбиение: выбирать какой-то блок $B(i)$ и какой-то символ a и измельчать с помощью них.

Утверждение 1. *Каждый блок состоит либо только из принимающих состояний, либо только из отвергающих.*

Доказательство. Индукция по количеству блоков. База: 2 блока: $B(0)$ — все принимающие состояния, $B(1)$ — все отвергающие. Переход: количество блоков увеличивается, когда какой-то блок разбивается на два других. Поскольку разбиваемый блок состоял только из принимаемых состояний или только из отвергающих, то и новые два блока тоже. □

Утверждение 2. *Если до какого-то измельчения любые два эквивалентных состояния находились в одном блоке, то и после измельчения тоже.*

Доказательство. Пусть эквивалентные состояния q_1 и q_2 находятся в блоке $B(j)$ и происходит измельчение по блоку $B(i)$ и символу a. Возможны два варианта: либо оба $\delta(q_1, a)$ и $\delta(q_2, a)$ лежат в $B(i)$, тогда q_1 и q_2 лежат в $B'(j)$, либо оба $\delta(q_1, a)$ и $\delta(q_2, a)$ не лежат в $B(i)$, тогда q_1 и q_2 лежат в $B''(j)$. Третий вариант, когда только одно из $\delta(q_1, a)$ и $\delta(q_2, a)$ лежит в $B(i)$, не достигается: тогда, по теореме 1, q_1 и q_2 неэквивалентны — противоречие. □

Лемма 2. *Пускай все состояния разбиты на непустые блоки, причём для всякого блока $B(i)$ и символа $a \in \Sigma$ верно, что измельчение по блоку $B(i)$ и символу a бесполезно. Тогда состояния внутри каждого блока эквивалентны.*

Доказательство. Предположим, что существуют пары состояний q_1 и q_2 лежащих в одном блоке, которые не эквивалентны. Каждой такой паре сопоставим кратчайшую разделяющую строку. Понятно, что каждая разделяющая строка не является пустой: тогда бы одно из состояний было бы принимающим, а другое нет, что противоречило бы лемме 1.

Рассмотрим пару неэквивалентных состояний q_1 и q_2 из какого-то блока, которым была сопоставлена самая короткая строка (назовём её w). Как мы уже выяснили, w непуста, а значит представима в виде $w = au, a \in \Sigma,\ u \in \Sigma^*$. Рассмотрим $p_1 = \delta(q_1, a)$ и $p_2 = \delta(q_2, a)$. Состояния p_1 и p_2 лежат в одном блоке (это следует из условия теоремы: если это не так, то измельчение по блоку, содержащему одно из них и по символу a будет полезным — после него q_1 и q_2 окажутся в разных блоках, противоречие).

Если u является разделяющей для состояний p_1 и p_2, то возникает противоречие с выбором пары q_1, q_2 и строки w — кратчайшей разделяющей строки ($|u| < |w|$). Иначе, оба p_1 и p_2 принимаются/отвергаются по строке u. Тогда оба состояния q_1 и q_2 принимаются/отвергаются по строке $w = au$, а значит она неразделяющая, противоречие. □

Алгоритм измельчает разбиение, пока может: пытается найти блок $B(i)$ и символ a, измельчение с помощью которых полезно. Понятно, что он завершается, так как количество блоков в конце станет не более n, а значит полезных измельчений случится не более чем $n - 2$. По лемме 2 если какие-то состояния эквивалентны, то они всегда будут оставаться в одном блоке и, следовательно, в конечном разбиении они тоже будут лежать в одном блоке. По теореме 2, если два состояния неэквивалентны, то после завершения алгоритма они будут лежать в разных блоках.

Лемма 3. *Пусть состояния разбиты на блоки и происходит измельчение с помощью блока $B(i)$ и символа $a \in \Sigma$. Далее происходит сколько-то каких-то других измельчений, и оказывается, что получилось новое измельчение, в котором блок $B(i)$ заменился на $m \geq 1$ блоков $B(i_1), \ldots, B(i_m)$ и произошли измельчения по блокам $B(i_1), \ldots, B(i_{m-1})$ и символу a. Тогда, после этого, измельчение по блоку $B(i_m)$ и символу a бесполезно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный блок $B(l)$, в котором есть состояние $s \in B(l)$, из которого по a можно попасть в блок $B(i_m)$ ($\delta(s, a) \in B(i_m)$). Покажем, что тогда из всех состояний блока $B(l)$ по a можно попасть в $B(i_m)$. Рассмотрим произвольное состояние: $t \in B(l)$.

Пусть $B(k)$ — блок, в который из t можно попасть по a. Если $k \in \{i_1 \ldots, i_{m-1}\}$ (по блоку $B(k)$ и символу a было измельчение), то состояния s и t и до, и после измельчения по блоку $B(k)$ и символу a оставались внутри одного блока, хотя ровно из одного из них по a можно попасть в $B(k)$ — противоречие. Если $k \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$, то состояния s и t и до, и после измельчения по блоку $B(i)$ и символу a оставались в одном блоке, хотя ровно из одного из них по a можно было попасть в $B(i)$ по символу a — противоречие. □

Алгоритм будет хранить для каждого $a \in \Sigma$ множество $L(a)$ номеров блоков, из которых впоследствии будет выполняться измельчение по символу a.

Алгоритм такой. В начале для всякого $a \in \Sigma$ определяем $L(a) = \{\}$. Это множество номеров блоков, с помощью которых и символа a будут происходить измельчения. После разделения состояний на два блока — $B(0)$ (принимающие) и $B(1)$ (отвергающие), для каждого $a \in \Sigma$ в $L(a)$ добавляем 0, если $|\hat{B}(B(0), a)| \leq |\hat{B}(B(1), a)|$, иначе 1. Пока не все $L(a)$ пусты, алгоритм берёт и вытаскивает какой-то номер блока i из какого-то $L(a)$. Для всех $B(j)$ алгоритм, если оба множества $B'(j)$ и $B''(j)$ из теоремы 1 непусты, делит $B(j)$ на два новых блока $B(j_1) = B'(j)$ и $B(j_2) = B''(j)$. Для всякого символа $c \in \Sigma$ если в $L(c)$ был блок $B(j)$, теперь вместо него будут оба блока $B(j_1)$ и $B(j_2)$, иначе туда добавится ровно один из них: если $|\hat{B}(B(j_1), a)| \leq |\hat{B}(B(j_2), a)|$, то $B(j_1)$, иначе $B(j_2)$. Таким образом шаблон алгоритма выглядит так:

1.4 Псевдокод

```
1: while ∃a : L(a) ≠ ∅ do
2:     select a and i ∈ L(a), delete i from L(a)
3:     for all blocks B(j) do
4:         if ∃t ∈ B(j) : δ(t, a) ∈ B(i) then          ▷ We need to divide this block into 2 blocks
5:             divide B(j) into B'(j) = {t ∈ B(j)|δ(t, a) ∈ B̂(B(i), a)}
6:             and B''(j) = {t ∈ B(j)|δ(t, a) ∉ B̂(B(i), a)}
7:             let k be a number for a new block
8:             B(j) = B'(j), B(k) = B''(j)
9:             for c ∈ Σ do
10:                if j ∈ L(c) then
11:                    L(c).add(k)
12:                else if |B̂(B(j), c)| ≤ |B̂(B(k), c)| then
13:                    L(c).add(j)
14:                else
15:                    L(c).add(k)
16:                end if
17:            end for
18:        end if
19:    end for
20: end while
```

Написанный выше псевдокод несложно улучшить по асимптотике, используя уже построенные структуры. Во-первых, на каждой итерации алгоритма (при каждом измельчении), создадим множество R, состоящее из

номеров блоков, которые надо разделить. Для этого в начале нужно его инициализировать $R = \{\}$, а дальше для всякого $t : \delta(t, a) \in B(i)$ добавим в R номер блока, в котором лежит t. То есть, это делается за $O(|\{t|\delta(t, a) \in B(i)\}|)$.

Посмотрим на каждый блок, который разделяется на два непустых блока. Пусть у исходного блока был номер j, у новых будут номера j и $f(j)$. Посмотрим, каких состояний в исходном блоке меньше: тех, из которых можем попасть в $B(i)$ по a, или тех, по которым не можем. Меньшую из этих частей перенесём в блок $B(f(j))$. Перенос одного состояния занимает $O(|\Sigma|)$ времени, так как для каждого состояния мы храним указатели на следующее и предыдущее состояния из этого же блока, а также (для каждого $a \in \Sigma$, если в состояние можно попасть по a) указатели на следующее и предыдущее состояние этого же блока, в которые можно попасть по a, эту информацию нужно обновить. Такое размышление поможет в лемме 5.

Итого, одна итерация внешнего цикла while (строка 1 псевдокода) занимает $O(|\Sigma| \cdot |\{q|\delta(q, a) \in B(i)\}|)$ времени — все состояния из множества $\{q|\delta(q, a) \in B(i)\}$ вытаскиваются из своих блоков и кладутся в новые блоки.

1.5 Корректность алгоритма

Лемма 4. *Алгоритм, описанный выше, корректен.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых состояний $q_1, q_2 \in Q$, если $q_1 \sim q_2$, то q_1 и q_2 лежат в одном блоке, иначе в разных.

Первое следует из леммы 2: действительно, в начальном разбиении на $B(0)$ и $B(1)$, если пара состояний эквивалентны, то оба лежат в одном блоке, а далее, в ходе измельчений, они будут продолжать лежать в одном блоке.

Теперь покажем, что если состояния неэквивалентны, то они окажутся в разных блоках. Предположим, что существуют пары состояний q_1 и q_2 такие что $q_1 \not\sim q_2$ и при этом они лежат в одном блоке $B(i)$ в конце работы алгоритма. Каждой паре таких состояний сопоставим кратчайшую разделяющую их строку.

Среди всех таких пар состояний q_1 и q_2 выберем ту, для которой сопоставленная кратчайшая строка является самой короткой. Пусть теперь это пара p_1 и p_2, а кратчайшая разделяющая их строка — $w \in \Sigma^*$.

Поскольку p_1 и p_2 лежат в одном блоке $B(i)$, они либо оба принимающие, либо оба отвергающие, значит, всякая разделяющая их строка имеет положительную длину. Пусть a — первый символ строки w: $w = au$, где $u \in \Sigma^*$.

Пусть $r_1 = \delta(p_1, a), r_2 = \delta(p_2, a)$. Блок, в котором находится состояние r_1, назовём $B(j_1)$, а в котором находится состояние r_2 — $B(j_2)$.

Заметим, что $j_1 \neq j_2$: иначе, если $j_1 = j_2$, то получится, что r_1 и r_2 — состояния из одного блока, и при этом они неэквивалентны (u — разделяющая их строка). Тогда у этой пары состояний кратчайшая строка короче ($|u| < |w|$) — противоречие с выбором p_1 и p_2.

Рассмотрим итерацию алгоритма, после которой состояния r_1 и r_2 оказались в разных блоках, пусть это блоки $B(l_1)$ и $B(l_2)$. После этого не менее, чем одно из чисел l_1, l_2 было помещено в $L(a)$. Не умаляя общности, будем считать, что это l_1. Начиная с этого момента, состояние r_1 находилось в одном из блоков, упомянутых в списке $L(a)$. Поскольку алгоритм завершился после того, как список $L(a)$ опустел, был хотя бы один момент, когда из $L(a)$ вытащили номер m блока, содержащего состояние r_1 ($r_1 \in B(m)$). Рассмотрим такой момент.

Происходит измельчение по блоку $B(m)$ и символу a. Отметим, что $r_1 \in B(m)$; $r_2 \notin B(m)$, так как $B(m) \subset B(l_1)$ и $r_2 \notin B(l_1)$. Тогда получается, что

$$\delta(p_1, a) = r_1 \in B(m)$$

$$\delta(p_2, a) = r_2 \notin B(m)$$

Состояния p_1 и p_2 находятся в одном блоке. Значит, после измельчения, они должны оказаться в разных блоках. Тогда и по завершении алгоритма они будут в разных блоках. Противоречие. □

1.6 Асимптотика алгоритма

Утверждение 3. *Пусть $a \in \Sigma$, $q \in Q$. За всю работу алгоритма, из $L(a)$ извлекался номер блока, содержащего состояние q, не более* $\log(n)$ *раз.*

Доказательство. Пусть k — количество раз, когда из $L(a)$ извлекался номер блока, содержащего q.

Пусть x_1 — размер этого блока при первом извлечении, x_2 — при втором, и так далее, x_k — размер при последнем извлечении из $L(a)$. Покажем, что $\forall j < k : \; x_j \geq 2 \cdot x_{j+1}$.

Рассмотрим j-ое извлечение. При нём состояние q перестало находиться в каком-либо блоке, упомянутом в $L(a)$. После этого, в какой-то момент, в $L(a)$ был добавлен блок, содержащий q. Рассмотрим ближайший такой момент.

Он соответствует 10 – 16 строкам псевдокода (происходит $L(a)$.add(m), где m — номер блока, в котором находится состояние q при этом добавлении). Это происходит после разделения блока (строки 5 – 8), в котором

лежало состояние q (пусть размер разделившегося блока y_{j+1}). При этом номер этого блока не находился в $L(a)$. Значит, добавлению соответствуют строки 12 – 15 псевдокода (то есть из двух образовавшихся блоков добавили только наименьший). Таким образом, справедливо:

$$x_j \geq y_{j+1} \geq 2 \cdot x_{j+1} \Rightarrow x_j \geq 2 \cdot x_{j+1}$$

Аналогично можно отметить, что $x_1 \leq n/2$, так как $2 \cdot x_1 \leq y_1 \leq n$.

Отсюда следует, что

$$n/2 \geq x_1 \geq 2^{k-1} \cdot x_k$$

Откуда, поскольку $x_k \geq 1$, $n \geq 2^k \Leftrightarrow k \leq \log(n)$. □

Утверждение 4. *Рассмотрим $t \in Q$. За всю работу алгоритма, состояние t меняло блок (то есть извлекалось из старого блока в новый) не более $|\Sigma| \cdot \log(n)$ раз.*

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_{|\Sigma|}\}$; $q_i = \delta(t, a_i)$ для всех $i \in \{1, \ldots, |\Sigma|\}$. t меняет блок на какой-то итерации алгоритма, если на этой итерации алгоритма из $L(a_i)$ было извлечён блок, содержаший q_i (для некоторого $i \in \{1, \ldots, |\Sigma|\}$). Таких итераций, по лемме 3, не более $|\Sigma| \cdot \log(n)$. □

Лемма 5. *Алгоритм, описанный выше, имеет временную асимптотику $O(|\Sigma|^2 n \log(n))$.*

Доказательство. Удаление недостижимых из q_0 состояний, а также разбиение состояний на блоки $B(0)$ и $B(1)$, работают за линейное время, как было показано выше.

Всего состояний n, значит, по лемме 4, перемещений состояний из одного блока в новый, было всего не более $|\Sigma| n \log(n)$. Одно перемещение занимает $O(|\Sigma|)$ времени (так как нужно поменять номер блока, в котором находится состояние, и, следовательно, информацию о том, какое следующее и предыдущее состояние в том же новом блоке, а также следующее и предыдущее состояния, в которые можно попасть по символу c (для всех $c \in \Sigma$) — это нужно для того, чтобы двусвязные списки оставались корректными).

Итого, все перемещения состояний требуют $O(|\Sigma|^2 n \log(n))$ времени.

Осталось показать, сколько было добавлений и извлечений номеров блоков из $L(c)$ ($c \in \Sigma$). Зафиксируем какое-то $c \in \Sigma$.

Отметим, что можно в $L(c)$ добавлять номера только непустых блоков (действительно, после этого извлекать номера пустых блоков бессмысленно — измельчение с помощью них будет бесполезным). Итак, в $L(c)$ добавляются только блоки положительного размера. Это значит, что в строках 5-6 псевдокода перед этим произошло разбиение $B(j)$ на непустые $B'(j)$ и $B''(j)$. Поскольку блоков положительного размера не более чем n в конце работы алгоритма, то разбиений блока на два непустых, случалось не более $n-1$ раза за всю работу алгоритма. То есть в $L(c)$ добавляли (и, следовательно, извлекали) номера не более n раз (для фиксированного $c \in \Sigma$). Значит, всего добавлений и извлечений номеров из L было $O(|\Sigma| n)$ раз. Каждое добавление — $O(1)$ по времени (добавление в конец списка: 11, 13, 15 строки псевдокода), каждое извлечение — $O(|\Sigma|)$ времени (строка 2 псевдокода), так как в ней нужно найти первый непустой список $L(a)$ и из него извлечь элемент.

Итого, каждый вид действий, предпринимаемых алгоритмом, занимает не более чем $O(|\Sigma|^2 n \log(n))$ времени. Значит, и алгоритм работает с асимптотикой $O(|\Sigma|^2 n \log(n))$.

□

Если считать, что $|\Sigma|$ — некоторая константа, то асимптотика алгоритма Хопкрофта равна $O(n \log(n))$.

2 Реализация алгоритма

Проект реализован в нескольких файлах:

- Директория `src/` — содержит файлы реализаций функций и методов классов:
  - `dfa_methods.cpp` — реализация методов класса DFA.
  - `nfa_methods.cpp` — реализация методов класса NFA.
  - `dfa_build.cpp` — реализация функций обработки команд пользователя и инициализации DFA, исходя из этих команд.
  - `main.cpp` — работа с пользователем: получение DFA, его минимизация, вывод DFA.
- Директория `include/` – содержит заголовочные файлы.
  - `dfa_class.h` — объявление класса DFA.
  - `nfa_class.h` — объявление класса NFA.

- Директория `obj/` — содержит объектные файлы (скомпилированные `.cpp` файлы)
- Файл `minimizer` — скомпилированный проект.
- `Makefile` — файл для сборки.

Как собрать проект: зайти в главную директорию, запустить команду `make`. Как запустить проект: запустить исполняемый файл `minimizer` с несколькими аргументами (подробнее — см. раздел 2.3).

2.1 Класс DFA

Сущность детерминированного конечного автомата как объекта реализована в классе `class DFA`, который объявлен в файле `include/dfa_class.h`. Все состояния хранятся как числа в формате `uint32_t` и могут принимать значения от 0 до $2^{32} - 2 = 4294967294$ (число UINT32_MAX = 4294967295 зарезервировано как особое "пустое" состояние (`EMPTY_STATE`), которое нужно для упрощения работы некоторых методов).

Основные поля класса `class DFA` (заполняются при инициализации объекта):

- `uint32_t alphabet_length` — длина рабочего алфавита.
- `uint32_t size` — размер автомата.
- `std::vector<std::vector<uint32_t> > delta` — правила переходов автомата. Элемент `[a][q]` — состояние $\delta(q, a)$.
- `uint32_t starting_node` — начальное состояние.
- `std::vector<StateInfo> states_info` — блоки информации для каждого состояния. Один блок информации (объект структуры `struct StateInfo`) содержит следующую информацию о состоянии автомата:
  - ❖ `bool acc` — `true`, если состояние принимающее, `false`, если отвергающее.

  Следующие поля нужны только при минимизации автомата (в них храним информацию о разбиении всех состояний на блоки):
  - ❖ `uint32_t color` — номер блока, в котором находится состояние (его "цвет").
  - ❖ `uint32_t next_state_of_same_color` — номер следующего состояния из того же блока.
  - ❖ `uint32_t prev_state_of_same_color` — номер предыдущего состояния из того же блока.

Дополнительные поля класса `class DFA` (используются при минимизации автомата):

- `std::vector<uint32_t> block2first_state_of_this_block` — по номеру блока(цвета) сопоставляет первое состояние этого блока(цвета). То есть i-ый элемент показывает первое состояние в блоке $B(i)$.
- `std::vector<std::vector<uint32_t> > block_and_char2first_node_of_this_color_and_char` — здесь элемент `[a][i]` показывает первое состояние в множестве $\hat{B}(B(i), a)$.
- `std::vector<std::vector<uint32_t> > L` — здесь a-ый элемент — вектор, в котором написаны состояния множества $L(a)$.
- `std::vector<std::vector<bool> > info_L` — здесь элемент `[a][i]` принимает значение `true`, если $i \in L(a)$, иначе принимает значение `false`.

Следующие поля нужны для того, чтобы уметь быстро итерироваться и работать с множествами $\hat{B}(B(i), a)$:

- `std::vector<std::vector<uint32_t> > next_B_cap` — здесь элемент `[a][i]` показывает, какое следующее состояние в том же блоке, что и i-ое состояние, тоже достижимо по символу a (если i-ое состояние не достижимо по символу a ни из какого другого состояния, то нам не важно, что там написано). Если i-ое состояние — последнее в своём блоке, которое достижимо по символу a, то следующим считается "пустое" состояние (`EMPTY_STATE`).
- `std::vector<std::vector<uint32_t> > prev_B_cap` — по аналогии, здесь элемент `[a][i]` показывает, какое предыдущее состояние в том же блоке, что и i-ое состояние, тоже достижимо по символу a.
- `std::vector<std::vector<uint32_t> > B_cap_lengths` — здесь элемент `[a][i]` — это длина $|\hat{B}(B(i), a)|$.

Следующие поля нужны для того, чтобы построить δ^{-1} с небольшой константой по памяти и при этом чтобы итерирование по множеству состояний $\delta^{-1}(q, a)$ было быстрым ($O(|\delta^{-1}(q, a)|)$ времени):

- `std::vector<std::vector<uint32_t> > reversed_delta_lengths` — элемент `[a][i]` показывает $|\delta^{-1}(i, a)|$ — из скольки состояний можно попасть по символу a в состояние i.

- `std::vector<std::vector<uint32_t> > addresses_for_reversed_delta` — элемент `[a][i]` показывает, с какого места в `reversed_delta` начинается последовательность состояний, лежащих в множестве $\delta^{-1}(i, a)$.
- `std::vector<uint32_t> reversed_delta` — вектор состояний длины $n \cdot |\Sigma|$. Он устроен так, что список состояний из $\delta^{-1}(i, a)$ начинается с `addresses_for_reversed_delta[a][i]`-го элемента и занимает длину `reversed_delta_lengths[a][i]` ($i \in Q, a \in \Sigma$).

Следующие поля понадобятся для реализации одной итерации разбиения по блоку $B(i)$ и символу a:

- `std::vector<bool> blocks_need_to_be_separated` — i-ый элемент равен `true`, если блок $B(i)$ существовал и его нужно разделить по символу a, иначе `false`.
- `std::vector<uint32_t> block2index_of_new_block` — если `i`-ый блок ($B(i)$) разделяется на два блока, то их номера — `i` и `block2index_of_new_block[i]`.
- `std::vector<uint32_t> sep_blocks` — список разделяемых блоков.
- `std::vector<uint32_t> sep_states` — список состояний, которые окажутся в новых блоках (то есть множество $\delta^{-1}(B(i), a)$), если происходит измельчение с помощью блока $B(i)$ и символа a.
- `std::queue<uint32_t> empty_colors` — неиспользованные цвета (неиспользованный номера для блоков).
- `std::vector<uint32_t> block2index_special` — каждому разбивающемуся блоку сопоставляется номер от 0 до количества разбиваемых блоков минус 1 (нужно для упрощения работы в одной итерации минимизации).

Также в классе `class DFA` доступны следующие методы (реализованы в файле `src/dfa_methods.cpp`):

- `void init(uint32_t _alphabet_length, uint32_t _size, uint32_t _starting_node, std::vector<std::vector<uint32_t> > & table, std::vector<bool> &v_acc)` — инициализация автомата новыми значениями длины алфавита, размера, начального состояния, функции δ (`table`) и информацией о принимающих/отвергающих состояниях (`v_acc`).
- `bool check_string(std::vector<uint32_t> &str)` — проверяет, принимается ли строка `str` или нет.
- `void delete_unreachable_states()` — удаление недостижимых состояний (делается в начале минимизации).
- `void construct_reversed_delta()` — строит `reversed_delta_lengths`, `addresses_for_reversed_delta`, `reversed_delta`, используя функцию δ.
- `void color_acc_and_rej_in_2_colors()` — выполняет первую итерацию алгоритма: красит все принимающие состояния в 0 цвет (0 блок), отвергающие — в 1.
- `bool minimize_iteration()` — реализация одной итерации алгоритма Хопкрофта. Это самый важный метод в классе. Работает он так:

  1. Поиск $a \in \Sigma$ такого, что $L(a)$ непусто, и выбор какого-нибудь блока $B(i)$ из $L(a)$.
  2. Проходимся по всем состояниям `state_i` из i-го блока ($B(i)$), которые достижимы по символу a (то есть, просто перебираем `state_i` $\in \hat{B}(B(i), a)$).

     Перебираем `sep_state` $\in \delta^{-1}$(`state_i`, a). Если состояние одно-единственное в своём блоке, то и разделять нечего.

     Иначе добавляем `sep_state` в `sep_states`. Блок (B(`sep_state_color`)), в котором лежит состояние `sep_state`, будет разбит на два новых — B(`sep_state_color`) (состояние, из которого рёбра по a ведут не в $B(i)$) и B(`block2index_of_new_block[sep_state_color]`), из которого рёбра по a ведут в $B(i)$. Номер нового блока `block2index_of_new_block[sep_state_color]` берётся из очереди `empty_colors`.

     `sep_state_color` добавляется в `sep_blocks`.
     Подсчитывается количество добавляемых блоков `added_blocks`, заполняется `blocks_need_to_be_separated`.
  3. Далее будем извлекать состояния из `sep_states` в новые `added_blocks` блоков. Для начала создаются структуры

     `std::vector<uint32_t> last_states_of_new_blocks` — тут хранятся последние обработанные состояния для каждого из `added_blocks` новых блоков

     и `std::vector<std::vector<uint32_t> > last_states_with_new_color_and_char` — тут для каждого нового блока и символа $a \in \Sigma$ хранится последнее обработанное состояние из этого блока, достижимое по a.

     Затем пробегаемся по всем состояниям из `sep_states`, аккуратно отделяем их из старых блоков в новые (чтобы не поломались двусвязные списки, в которых хранятся блоки $B(j)$ и их подмножества $\hat{B}(B(j), c)$ (где, как всегда, $j \in Q, c \in \Sigma$)).

4. Для каждого блока $B(j)$ из `sep_blocks`, разбившегося на блоки $B(j)$ и $B($`block2index_of_new_block[j]`$)$ и для каждого $c \in \Sigma$, нужно также в $L(c)$ добавить j или `block2index_of_new_block[j]` в зависимости от того, в какой блок входит меньше ребёр с c и лежит ли j в $L(c)$.
5. В конце нужно очистить `sep_blocks` и `sep_states`, и вернуть в исходное состояние `block2index_of_new_block` (все значение равны `EMPTY_STATE`) и `blocks_need_to_be_separated` (все значения равны `false`).

Функция возвращает значение `true`, если итерация была последней и `false`, если нет.

- `void minimization(bool no_debug)` — в ней происходит минимизация, и затем перестройка автомата: каждый блок становится одним состоянием. Аргумент `bool no_debug` показывает, нужен ли вывод промежуточных резальтатов минимизации в stdout (`false`, если да; `true`, если нет). Схематично, функция работает так:

```
    void DFA::minimization(bool no_debug) {
      delete_unreachable_states();
      construct_reversed_delta();
      color_acc_and_rej_in_2_colors();

      bool finish = false;
      while (!finish) {
          finish = minimize_iteration();
      }

      /*dfa rebuilding*/
    }

```

В частности, часть методов, нужная практически только для дебага:

- `void print_table()` — вывод таблицы δ в стандартный поток вывода stdout (если в DFA не более 50 состояний).
- `void print_current_classes_of_equality(bool finished, bool debug)` — печатает текущее разбиение состояний на блоки в stdout.
- `void print_L()` — печатает L в stdout.
- `void print_B_caps()` — печатает $\hat{B}(B(j), c)$ для всех $i \in Q, a \in \Sigma$ в stdout.
- `uint32_t get_size()` — возвращает размер DFA.

Также есть метод:

- `int save_to_file(char* filename)` — сохранение DFA в бинарный файл, находящемуся по относительному пути, записанному в `filename`. Сначала записываются три параметра `size, alphabet_length, starting_node` — количество состояний, размер алфавита и номер начального состояния, за тем $|\Sigma| \cdot n$ переходов. Далее записывается информация для каждого состояния, принимающее или отвергающаее оно (1 бит) — это информация умещается в $[n/8] + 1$ байт.

И несколько методов для инициализации (подробнее — в разделе 2.3):

- `DFA(uint32_t _alphabet_length, uint32_t _size, uint32_t _starting_node, std::vector<std::vector<uint32_t>> &_delta, std::vector<bool> &_v_acc)` — инициализация по всем заранее заданным полям.
- `explicit DFA(char* command, char* dfa_str)` — инициализация по двум строкам — командам пользователя — подробнее в разделе 2.3. Функция реализована в файле `src/dfa_build.cpp`. Она по двум аргументам от пользователя генерирует DFA (предварительно проверяя в функции `request_check correctness_of_dfa_input(char* command, char* dfa_str)`) корректность вводимых данных (возвращаемое значение `request_check` — пара булевого значения, показывающего, успешна ли проверка или нет и строки, в которой написана, какая ошибка, если она есть).

2.2 Класс NFA

Класс, симулирующий недетерминированный конечный автомат, реализован в `class NFA`, который объявлен в файле `include/nfa_class.h`. Объект этого класса имеет следующие поля:

- `uint32_t alphabet_length` — длина рабочего алфавита.
- `uint32_t size` — размер NFA.

- `std::vector<std::vector<std::vector<uint32_t> > > delta` — функция недетерминированных переходов $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$.
- `std::vector<uint32_t> starting_nodes` — начальные состояния NFA.
- `std::vector<bool> v_acc` — информация о принимающих/отвергающих состояниях: элемент `[i]` равен `true` тогда и только тогда когда i-ое состояние принимается.

И методы (реализованы в `src/nfa_methods.cpp`):

- ➤ `void init(uint32_t _alphabet_length, uint32_t _size, std::vector<std::vector<std::vector<uint32_t> > > &_delta, std::vector<uint32_t> &_starting_nodes, std::vector<bool> &_v_acc)` — инициализация объекта заданными значениями всех полей.
- ➤ `void print()` — печатает NFA в stdout.
- ➤ `DFA convert2dfa()` — переводит NFA в DFA.
- ➤ `uint32_t get_size()` — возвращает размер NFA (количество состояний).
- ➤ `bool line_complicated_initial_states()` — `true`, если начальные состояния заданы нетривиально, `false`, если тривиально (то есть начальное состояние одно и оно — 0-ое).
- ➤ `std::string longline()` — строковое представление длинных NFA (то есть размера более 61).
- ➤ `std::string line()` — строковое представление NFA.
- ➤ `state_to_printable_character(int x)` — переводит число от 0 до 61 в цифру или букву (нужно для метода `line()`).

2.3 Взаимодействие с пользователем

Команды пользователя — аргументы функции `main()`. Если проект скомпилирован в файл `minimizer`, то запуск минимизации пользователем в командной строке может выглядить так:

```
./minimizer from_bin_file binary_files/dfa0.bin -t -np
```

Первые два аргумента (в данном случае — `from_bin_file binary_files/dfa0.bin`) будем называть `char* command` и `char* dfa_str`. Через них однозначно задаётся автомат, который предстоит минимизировать. Первый аргумент — `command` — задаёт тип инициализации DFA. Он может принимать следующие строковые значения:

- ✲ `"from_dfa_string"` — автомат инициализируется из строкового представления DFA, записанного в `dfa_str`. Строковое представление DFA здесь имеет вид `"010110...1_1a6Uy98..."`: сначала идёт n нулей и единиц: i-ая из них означает, принимается ли i-ое состояние или отвергается. Затем идет разделитель `"_"` и $|\Sigma| \cdot n$ состояний (состояние на $(j \cdot a + c)$-ом месте $(0 \le c < |\Sigma|)$ — состояние в которое идёт ребро из состояния q_j по c-ому символу алфавита Σ). Все состояния кодируются либо цифрой, либо строчной или заглавной латинской буквой (таким образом, в этом случае их не более чем 62). Цифры кодируют первые 10 состояний, строчные буквы — с 11-го по 36-ое, заглавные — последние 26 состояний.
- ✲ `"bamboo"` — в таком случае в `dfa_str` через запятую написан размер и количество символов в алфавите автомата. Сам автомат устроен так: для каждого символа $c \in \Sigma$ из i-го состояния по символу c переход в $(i+1)$-ое состояние (если i-ое состояние не последнее), иначе, если состояние последнее, то из него все переходы ведут в себя же. Принимается только последнее состояние. Несложно показать, что такой автомат при минимизации не уменьшается, однако алгоритм Мура на нём работает с асимптотикой $O(n^2)$ по времени, а алгоритм Хопкрофта — за $O(n)$. Этот пример указан в статье Джона Хопкрофта [1].
- ✲ `"circle"` — от автоматов предыдущего типа отличаются лишь тем, что из последнего состояния все переходы ведит не в себя, а в самое первое состояние. Для них верны те же утверждения про алгоритм Мура и Хопкрофта.
- ✲ `"repeated_cycle"` — односимвольный автомат, для которого параметры размер `size` и длина цикла `cycle_size` указываются через запятую в аргументе `dfa_str` (при этом длина цикла — делитель числа состояний!). Переходы тут такие же, как в DFA типа `"circle"` — из i-го состояния переход в состояние $(i+1) \mod n$. Но принимающие состояния — все, чьи номера равны $(n-1)$ по модулю числа `"cycle_size"`. Такой автомат минимизируется до цикла длины `cycle_size`, в котором ровно одно принимающее состояние (последнее), а начальное состояние — первое (то есть до автомата типа `"circle"` размера `cycle_size`).
- ✲ `"from_bin_file"` — чтение DFA из бинарного файла, путь к которому указан во втором аргументе `dfa_str`. Кодировка такая же, как в методе `int save_to_file(char* filename)` класса DFA.

- ✻ `"from_nfa_string"` — сначала с помощью строки `dfa_str` инициализируется NFA, который потом переводится в DFA. В строке `dfa_str` NFA закодирован следующим образом. Для начала для каждого состояния пишутся множества состояний, в которые из него можно попасть по каждому из символов Σ. Если множество востоит не из 1 элемента, оно обособляется фигурными скобками. Если состояние начальное, перед тем, как писать его переходы, печатается символ `">"`. Если символов `">"` нет, то начальное состояние по умолчанию только одно — первое. В конце идёт n плюсов и минусов, i-ый плюс означает, что i-ое состояние принимающее, минус — наоборот, отвергающее. Например, у NFA могут быть следующие кодировки: `"{03}1{12}{}0{02}2{12}--+-"`, `"{01}3>{12}{}0{02}>2{12}+++-"`.

Также пользователь может (но это необязательно) сохранить минимизированный DFA в какой-нибудь бинарный файл. Для этого третьим аргументов необходимо указать слово `"save_to_bin_file"`, а четвёртым — относительный путь к этому файлу.

Также пользователь может указать в конце некоторые из следующих флагов:

- ❄ `-t` — если надо засекать время работы по минимизации автомата (потраченное время будет напечатано в stdout).
- ❄ `-nd, --no-debug` — если не надо выводить в stdout информацию о успешном начале/конце минимизации и подобных действиях, а также количество состояний в минимизированном автомате.
- ❄ `-np, --no-print` — если не надо в конце выводить в stdout новый минимизированный DFA.

Примеры работы программы:

Минимизация автомата, данного в формате NFA, и сохранение его в бинарный файл:

```
./minimizer from_nfa_string {03}1{12}{}0{02}2{12}--+- save_to_bin_file binary_files/dfa0.bin -t
DELETING UNREACHABLE STATES...
MINIMIZATION STARTED...
MINIMIZATION FINISHED SUCCESSFULLY
10 iterations happened
DFA UPDATED
It has 7 states now
Execution time: 0.000243977 seconds.
SIZE: 7  LEN_ALPHABET: 2 STARTING_NODE: 2
    |  0 |  1 | TYPE
=====================
  0 |  0 |  0 | ACC
=====================
  1 |  0 |  5 | REJ
=====================
  2 |  1 |  6 | REJ
=====================
  3 |  1 |  0 | ACC
=====================
  4 |  4 |  4 | REJ
=====================
  5 |  0 |  3 | ACC
=====================
  6 |  5 |  4 | REJ
=====================
Saved successfully to binary file
```

Минимизация автомата из файла и сохранение в другой файл:

```
./minimizer from_bin_file binary_files/dfa1.bin save_to_bin_file binary_files/dfa2.bin -t -np -nd
Execution time: 8.0964e-05 seconds.
```

Минимизация автомата типа `"bamboo"`, состоящего из 1000000 состояний:

```
./minimizer bamboo 1000000,1 -t -np
DELETING UNREACHABLE STATES...
MINIMIZATION STARTED...
MINIMIZATION FINISHED SUCCESSFULLY
999999 iterations happened
DFA UPDATED
It has 1000000 states now
Execution time: 3.6638 seconds.
```

3 Анализ работы программы

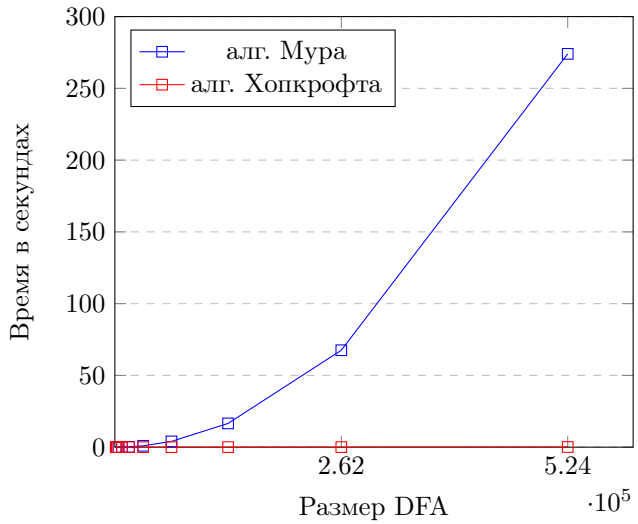
3.1 Сравнение времени работы алгоритмов Хопкрофта и Мура

Как уже было отмечено, алгоритм Хопкрофта работает на автоматах типа “бамбук“ линейно от размеров автомата, а алгоритм Мура — квадратично. Это было проверено на автоматах размеров 2^n, $n \in \{10, \dots, 24\}$.

Результаты измерений времени работы отражены в следующей таблице:

Размер DFA типа bamboo	Алгоритм Хопкрофта (сек.)	Алгоритм Мура (сек.)
1024	0.000269	0.0010017
2048	0.00087	0.0040186
4096	0.001407	0.0155907
8192	0.00277	0.0565663
16384	0.004176	0.237831
32768	0.008006	0.951994
65536	0.014809	4.01016
131072	0.029341	16.5476
262144	0.058262	67.5289
524288	0.120135	274.041
1048576	0.235781	–
2097152	0.469479	–
4194304	0.953751	–
8388607	1.97026	–

Соотношение времени работы алгоритмов Мура и Хопкрофта на автоматах типа “бамбук“.



Также была исследована работа этих алгоритмов для минимизации DFA для языка, задающего все слова над алфавитом $\{a, b\}$, у которых $(n-1)$-ый символ с конца равен a. Строился NFA, задающий этот язык, переводился в DFA, который затем минимизировался (как известно, в минимизированном DFA в таком случае будет не менее чем 2^{n-1} состояний).

n	Алгоритм Хопкрофта (сек.)	Алгоритм Мура (сек.)
12	0.000747	0.0010522
13	0.001364	0.0017582
14	0.002397	0.0029991
15	0.00477	0.0049912
16	0.010971	0.0135385
17	0.023378	0.0270009
18	0.047164	0.0590049
19	0.115261	0.127855
20	0.302292	0.296526
21	0.672999	0.65721
22	1.43655	1.5208
23	3.25043	3.84943
24	6.82125	8.92102
25	13.5632	18.8834
26	27.5825	40.6004
27	59.4406	–

Сравнение работы алгоритмов минимизации автоматов, имеющих 2^{n-1} состояний.

При больших n реализация алгоритма Хопкрофта опережает алгоритм Мура. Однако при этом алгоритм расходует намного больше памяти, нежели необходимо алгоритму Мура.

3.2 Расходуемая память

Для каждого состояния хранятся номер блока, в котором оно находится (4 байта), номер следующего и предыдущего состояний их того же самого блока (8 байт). Также для каждого символа $a \in \Sigma$ хранятся номер следующего и предыдущего состояний из этого же блока, которые достижимы по этому символу a (если само состояние достижимо по символу a) — то есть ещё $|\Sigma| \cdot 8$ байт. Для содержания состояния в $L(a)$ нужно $4 + 1 = 5$ байт (4 на само состояние, если оно там лежит, и 1 байт показывающий, лежит ли оно в $L(a)$ или нет). Итого, ещё $|\Sigma| \cdot 5$ байт.

Для каждого блока $B(j)$ (которых может быть от 1 до n) хранится количество состояний в нём, а также количество состояний в нём, достижимых по символу a (для каждого $a \in \Sigma$) — это $(|\Sigma| + 1) \cdot 4$ байт. И ещё хранятся $first(j)$ и $first(j, a)$ (для каждого $a \in \Sigma$) — это ещё $(|\Sigma| + 1) \cdot 4$ байт.

Также каждое из полей класса `class DFA`, отвечающих за одну итерацию минимизации, может достигать размера n (поля `blocks_need_to_be_separated`, `block2index_of_new_block`, `sep_blocks`, `sep_states`, `empty_colors`, `block2index_special`). Они суммарно занимают не более $21 \cdot n$ байт.

Также, для содержания функции δ^{-1} нужно $3 \cdot |\Sigma| \cdot n$ байт. Итого, суммарно используется не более чем

$$(4 + 8 + |\Sigma| \cdot 8 + |\Sigma| \cdot 5 + (|\Sigma| + 1) \cdot 4 \cdot 2 + 21 + 3 \cdot |\Sigma|) \cdot n = (41 + |\Sigma| \cdot 24) \cdot n \text{ байт},$$

где n — число состояний в исходном DFA.

4 Заключение

Исследована статья Джона Хопкрофта [1], в которой описан этот алгоритм.

Разобрана работа алгоритма Хопкрофта, доказаны утверждения о его корректности и асимптотике, написана программа, минимизирующая входной DFA, пользуясь этим алгоритмом. Поставленная задача выполнена.

Также планируется добавить дополнительную операцию инициализации DFA — `shift` (циклический сдвиг) — получение нового автомата из какого-то путём циклического сдвига. Это преобразование описано в статье [2], с которой я на данный момент разбираюсь.

Список литературы

[1] John Hopcroft. An n log n algorithm for minimizing states in a finite automaton. In *Theory of machines and computations*, pages 189–196. Elsevier, 1971.

[2] Galina Jirásková and Alexander Okhotin. State complexity of cyclic shift. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, 42(2):335–360, 2008.