Algebra Lineal
FMA-121
Prof Luz Florez

Trabajo Colaborativo

Miembro 1: Esteban Almiron **SIS:** STU-1185.ARG.C6 **Correo:** Esteban.Almiron0725@jala.university
Miembro 2: Valery Granada Contreras **SIS:** STU-1152.COL.C6 **Correo:** Valery.Granada0725@jala.university
Miembro 3: *Paola Cossio Gutierrez* **SIS:** STU-1213.BOL.C6 **Correo:** Paola.Cossio0725@jala.university
Miembro 4: Federico Eduardo Garay **SIS:** STU-1025.ARG.C5 **Correo:** Federico.Garay0125@jala.university

Descripción de la aplicación:

Introducción

Nuestro aplicativo se basa en una plataforma web diseñada para poder demostrar y ejemplificar los conceptos del curso a través de los juegos de mesa, centrándonos como modelo principal el ajedrez. Además, este proyecto combina conceptos tanto de las Matemáticas como de la Física clásica, modelando un tablero en un sistemas de coordenadas, donde cada pieza y cada regla están sujetas y pueden modelarse mediante vectores, matrices y leyes de movimiento respectivamente.

Objetivo

El objetivo principal de "Rank And File" es desarrollar una página o aplicativo web interactivo que modele el ajedrez como un sistema dinámico e intuitivo, aplicando de manera práctica y analizando temas del álgebra lineal y de la física clásica. Por ello, se busca transformar el tablero en un espacio vectorial funcional, donde el estudiante pueda practicar y entender con las transformaciones lineales que aparecen y al mismo tiempo poder visualizar las piezas y sus movimientos como operaciones vectoriales, integrando simultáneamente las leyes de Newton para poder cuantificar la influencia estratégica de las piezas, creando así una estrecha conexión entre el aprendizaje matemático y la estrategia del juego.

Justificación

El aprendizaje de los temas del Álgebra Lineal representan un reto significativo para los estudiantes, debido a una teoría compleja que conlleva el manejo de espacios vectoriales y transformaciones de matrices. La idea de "Rank And File" empieza de una observación y recopilación de información de clases, especialmente con matrices dinámicas. Al poder entenderlas y analizarlas correctamente, se identificó que existen distintos juegos de mesa desde el ajedrez hasta el Monopoly, que comparten ciertas mecánicas y reglas de movimiento que pueden demostrarse y formalizar matemáticamente. Por ello, decidimos llevar esta idea y este concepto más allá, integrando no solo principios de la matemática, sino también de la física para modelar la fuerza de cada jugada o movimiento.

Lo que hace distinto a la idea de nuestro proyecto es la aplicación de los conceptos de física, especialmente de las Leyes de Newton, transformando una teoría estática en una dinámica, explicando que cada movimiento del jugador es una acción que requiere una reacción del otro jugador mediante vectores de intercepción. Esta es una de las muchas analogías que pueden mostrarse en el proyecto para facilitar la comprensión de conceptos como es la traslación de vectores y las transformaciones lineales en un sistema de coordenadas práctico.

Además, nuestro proyecto está conectado con nuestra formación como Ingenieros de Software, ya que nos permite aplicar un diseño UI, la lógica de programación que se requiere para modelar los ejemplos. Por esto, "Rank and File" no solo expone los conceptos del curso de manera práctica, sino que funciona como una conexión interactiva entre la lógica matemática, conceptos de la física de Newton y la programación web.

Funcionalidad
La página web cumple con los siguientes campos principales diseñados para la interacción y el aprendizaje simultáneo:

- Funcionalidad
- Interfaz estimada\
- Lenguaje y Herramientas

Originalidad y Creatividad
La originalidad se basa en unir conceptos de Álgebra Lineal y la Física, modelando con herramientas relacionadas con la Ingeniería de Software.
Nuestro aplicativo va más allá de lo convencional, introduciendo conceptos como ser masa estratégica y vectores de fuerza, demostrado mediante la asignación de pesos específicos a cada pieza y calculando el impacto que tiene según la velocidad que ejerce, demostrando la Tercera Ley de Newton. Esta creatividad permite que el usuario o el estudiante no solo experimente mover una pieza, sino que también pueda interactuar por separado la fuerza con la que se cambia una posición, permitiendo que el proyecto "Rank And File" sea una propuesta creativa y dinámica que rompa las barreras entre un aprendizaje complejo y uno dinámico.

A diferencia de otros aplicativos donde los resultados de las operaciones se limitan a ser numéricos , "Rank And File" lleva el aprendizaje de lo teórico a lo visual, ya que traduce estas operaciones a ejemplos gráficos, observando como una matriz de estado no es solo un cambio de número, sino es una pieza que se desplaza vectorialmente en el tablero. De igual manera, para la validación de espacios vectoriales, nuestro aplicativo marca la diferencia utilizando este concepto como un motor de reglas. Por ejemplo, para que un movimiento sea válido, cumpla con la propiedad o de los movimientos permitidos para una pieza dentro de un subespacio.

Idea para la elaboración
La construcción de nuestro aplicativo "Rank And File" inició con la idea de poder ejemplificar una matriz dentro de algún modelo que se entienda fácil y sea dinámico al mismo tiempo. Posteriormente, definimos el tablero de ajedrez como un buen ejemplo de una matriz de estado y las reglas del juego como transformaciones lineales. Posteriormente se pasaron a programar los movimientos, aplicando la suma de vectores, asegurando que cada pieza solo se mueva en las posiciones permitidas. Finalmente pensamos que nuestro aplicativo no solo debía demostrar las posiciones, sino también las fuerzas, asignando a cada pieza una propiedad de masa y cierta velocidad.
Para esto, se comenzó a diseñar una interfaz que pueda mostrar al estudiante la demostración de los movimientos del juego de ajedrez, justificando el movimiento de cada jugada, permitiendo que esta integración sea un aplicativo completo e interactivo.

<u>Relación con el curso:</u>

1. El Espacio Vectorial del Tablero

El tablero es como un espacio vectorial acotado. El sistema se rige por los ejes canónicos □ (horizontal/filas) y □ (vertical/columnas). Y la configuración total del juego en un tiempo □ se representa como una matriz $□_{8□8}$ donde cada entrada $□_{□□}$ representa el valor o identidad de una pieza.

A) Espacio: Definimos el conjunto V como el espacio vectorial de las matrices de orden 8x8 con entradas en los números reales. Cada tablero es una matriz □ ∈ □ y está denotado por V = $□^{8□8}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{07} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{17} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{70} & a_{71} & \cdots & a_{77} \end{bmatrix}$$

Hablando de la estructura del tablero, cada estado del juego es técnicamente un vector dentro del espacio de 664 dimensiones.

B) Componentes y Coordenadas: Como se mencionó, el sistema se rige por ejes de filas y columnas. La dimensión de este espacio es 64 para definir el estado total del sistema. Como se observa en el ejemplo cada entrada se representa como una entrada $□_{□□}$, donde estas entradas sirven como coordenadas que indican que pieza se encuentra en cierta posición.

C) Vector Nulo 0 ∈ □ : Esto significa un tablero vacío. En realidad, todo espacio vectorial debe contener un vector nulo. En nuestro caso representa el estado de un tablero sin piezas niada, el cual es la matriz $0_{8□8}$.

D) Espacio vectorial acotado: Si bien el espacio $□^{8□8}$ es infinito, el ajedrez se procesa dentro de un subconjunto acotado, es decir, el sistema se limita a índices enteros mayores o igual a 0 y menores o igual a 7. De ser que algún movimiento o pieza quiera salir de los límites de la matriz resulta en una jugada invalida.

2. Base Canónica

Una base es el conjunto mínimo con el que podemos construir otro elemento del espacio.

La base canónica de V es:

$$B = \{E_{ij} \mid 0 \leq i, j \leq 7\}$$

donde $\square_{\square\square}$ es la matriz con 1 en posición (i, j) y 0 en las demás. Si el espacio vectorial es el todo, el modelado será el lenguaje que usamos para describir que hay dentro de este todo.

3. **Vectores de Desplazamiento**

El movimiento se define como un cambio de posición hecho por la suma de un vector. En nuestro aplicativo, cada movimiento o “jugada” cuenta como un vector traslacional dentro del tablero.

Las piezas se mueven aplicando vectores de transformación a sus coordenadas. Un movimiento se define como un vector v que conecta el estado inicial con el final.

A) Definición: Cuando una pieza esta ubicada en una posición inicial $\square_{\square} = (\square_{\square}\square_{\square})$. Entonces, el desplazamiento sería definido por el vector:

$$\square = \square_{\square} - \square_{\square} = (\square_{\square} - \square_{\square}, \square_{\square} - \square_{\square})$$

B) Caso del Caballo: A diferencia de las piezas que recorren una trayectoria lineal continua, el caballo opera mediante un vector compuesto resultante que ignora colisiones intermedias:

$$\vec{v}_{caballo} = \pm 2\hat{i} \pm 1\hat{j}$$

o

$$\vec{v}_{caballo} = \pm 1\hat{i} \pm 2\hat{j}$$

C) Restricciones de reglas: Tal como en el juego, cada pieza tiene reglas de movimiento, por lo que cada pieza tiene una longitud máxima de vector permitida. Como ser el rey (su vector cumple que solo puede moverse máximo una casilla en cualquier dirección), la torre y el alfil (donde tienen restricciones de dirección con ejes específicos).

4. **Transformaciones Lineales y Simetría en el Tablero**

Mientras que los vectores modelan el movimiento individual de las piezas, las transformaciones lineales modelan cambios en el espacio del juego completo o relaciones de simetría entre los bandos.

Definimos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ donde A es

una matriz de transformación. Entonces, estas se usan para manipular la perspectiva del usuario.

A) Matriz de Rotación: Para analizar el tablero desde la perspectiva del oponente (girar el tablero).

La matriz de rotación estándar para un ángulo $\theta = \pi(180^\circ)$ es:

$$R_{180^\circ} = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicar R_{180° a un vector de posición p invierte ambos signos, transportando la posición al cuadrante opuesto.

Esto invierte ambos signos y transportando el cuadrante opuesto del tablero, viéndolo desde la propia orientación del jugador oponente.

B) La Matriz de Simetría (Reflexión): El estado inicial del tablero de ajedrez presenta una simetría especular casi perfecta. Si definimos el eje como la línea que divide los territorios (entre las filas 4 y 5), podemos modelar la posición de las piezas negras como una reflexión de las blancas.

Sea la matriz de reflexión respecto al eje horizontal central:

$$M_{reflexion} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta transformación invierte la coordenada de las filas, y esto permite evaluar las piezas negras como si fueran blancas con su posición hacia el lado opuesto.

Esto simplemente permite usar una única función de evaluación para ambos bandos, simplemente transformando las coordenadas de las piezas negras para evaluarlas “como si fueran blancas” desde su propia perspectiva.

C) Isomorfismos e Inversibilidad: Para que una transformación de perspectiva sea válida, debe ser un isomorfismo, y esto se cumple si es biyectiva o si su determinante es distinto de 0.
Como las matrices de rotación y reflexión tienen un determinante +1 o -1, llegan a ser invertibles. Esto es importante para que en el ajedrez, todo pueda regresar a la vista original del tablero sin perder nada de la partida ni mover las posiciones correspondientes.

5. Dinámica del juego: Interpretación de las Leyes de Newton

Para modelar la transición de un sistema estático a uno dinámico, adaptamos los principios de la mecánica clásica a la teoría de los juegos.

A) Primera ley: Inercia Estratégica: La primera ley establece que el cuerpo permanece en reposo a menos que una fuerza externa actúe sobre este.

El “vector de estado” del juego posee una resistencia al cambio. En la apertura, el sistema posee una simetría y equilibrio que requiere una “jugada” para romperse.

“Un tablero en equilibrio permanece en su estado S_t a menos que se aplique un operador de movimiento O.”

B) Segunda ley: “Masa” Estratégica y Fuerza: Esta ley es donde conectamos directamente los escalares de la matriz con la física.

- *Masa estratégica (m^*):* Asignamos un escalar a cada pieza que presenta su valor relativo o potencial de control de campo, es decir, una reina por ejemplo vale más que un peón. Por ejemplo:

$$m^*_{Reina} \gg m^*_{Peon}$$

- *Fuerza de Impacto:* La aplicación de un vector de movimiento por una pieza de gran masa (m^*_{high}) genera una alteración mayor en el campo de control del oponente que la misma jugada realizada por una pieza de baja masa.

- *Aceleración del Juego:* Se define no como cambio de velocidad física, sino como la tasa de cambio hacia un estado terminal (**Jaque Mate**). Movimientos de “alta masa” aceleran el colapso de la incertidumbre del sistema.

- *Cálculo:* El aplicativo utiliza el vector de desplazamiento v como indicador de velocidad/aceleración para determinar que tan fuerte es un movimiento dentro del espacio vectorial.

C) Tercera ley: Acción, Reacción y Aniquilación: En un sistema cerrado de suma cero, toda acción busca inducir una respuesta. Esta ley es fundamental para modelar las capturas.

- *Principio de Contraviolación:* El desplazamiento de un vector por el Jugador 1 suele invocar un vector de respuesta del Jugador 2 destinado a neutralizar el control espacial ganado.

- *Colisión Terminal (Captura de pieza):* Cuando dos vectores intentan ocupar la misma coordenada (i, j), ocurre una aniquilación. La energía del vector atacante desplaza al vector estacionario, eliminándolo del espacio vectorial activo.

D) Momento lineal del juego (□ = □ . □): El aplicativo mide el momento entre cada bando. Por ejemplo, si un jugador tiene piezas con mucha masa hacia el lado contrario, hay un momento lineal resultante +. Esto sirve para predecir quién tiene el control del sistema dinámico en cierto momento de la partida.

En conclusión, al integrar estas Leyes de Newton, el proyecto se transforma en una combinación de álgebra lineal en modelo de física aplicada.

6. Conclusión

Esta formalización permite dejar de ver las piezas como objetos simples y empezar a tratarlas como entidades matemáticas con propiedades de magnitud, dirección y "peso" estratégico.

LINK : https://projecto-algebra.vercel.app

Evidencias de reuniones:

(incluir 3 imágenes con fechas distintas)