25/2/2022

LEZIONE 3

Riepilogo: def di fz iniettiva, suriettiva e biunivoca, introduzione di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

$\{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$

dim che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, cioè non esistono $m, n \in \mathbb{N}_0$, tali per cui $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Se provassimo con la dim diretta, dovremmo conside-rare ogni coppia di elementi $m, n \in \mathbb{N}_0$ e far vedere che $\frac{m}{n} \neq \sqrt{2}$.

Usiamo la dimostrazione per assurdo: supponiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ (NEGAZIONE DELLA TESI)

Allora $\exists\, m, n \in \mathbb{N}_0 : \sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Supponiamo che m ed n siano primi tra loro, cioè non hanno divisori in comune.

(ES: se $\sqrt{2} = \frac{4}{3}$, prendiamo $m = 4$ ed $n = 3$ e non $m = 8$ ed $n = 6$)

Poiché $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, allora $2 = \frac{m^2}{n^2}$

$\Rightarrow$ $2n^2 = m^2$ 2 è un divisore di m^2

Se $m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_t$ allora $m^2 = p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_t^2$

$\Rightarrow$ 2^2 è divisore di m^2

$\Rightarrow$ $m^2 = 4 \cdot s$ per qualche $s \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $\cancel{2} n^2 = \overset{2}{\cancel{4}} \cdot s$ $n^2 = 2 \cdot s$

$\Rightarrow$ 4 è un divisore di n^2

$\Rightarrow$ $n^2 = 4 \cdot r$, $r \in \mathbb{N}$

Si ha allora che

- 2 divide m
- 2 divide n

] CONTRADDIZIONE, perché 2 è un divisore comune tra m e n

$\Rightarrow$ La dim per assurdo (P.A.) ci dice che è vera la tesi, cioè $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

Cosa ci dice questo teorema? Se vogliamo un insieme numerico che sia "corrispondente" ai punti di una retta dobbiamo aggiungere dei punti a $\mathbb{Q}$.

DEF: indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri che sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta.

OSS: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e l'inclusione è stretta, cioè $\mathbb{Q}$ è un SOTTOINSIEME proprio di $\mathbb{R}$, cioè

$\exists\, x \in \mathbb{R}$ e $x \notin \mathbb{Q}$.

ASSIOMI DI $\mathbb{R}$

- Operazioni: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si ha:

•) $a+b=b+a$ •) $a \cdot b = b \cdot a$

•) $(a+b)+c = a+(b+c)$ •) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

•) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

•) 0 è EL NEUTRO della somma, 1 è el neutro del prodotto

•) 0 è EL ASSORBENTE del prodotto

•) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists\, b \in \mathbb{R} : \ a+b=0$ $(b=-a)$

•) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ a \cdot b = 1$ $\left(b = \frac{1}{a} = a^{-1}\right)$

- Ordinamento $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha:

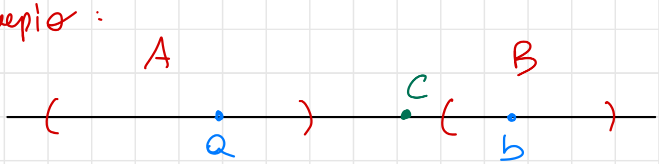
- $a \leq b$ oppure $b \leq a$.
- se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$.
- se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$.
- se $a \leq b$, $a, b, c \geq 0$, allora $a \cdot c \leq b \cdot c$.

OSS: tutti questi assiomi sono soddisfatti da $\mathbb{Q}$, è l'ultimo che distingue $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$

ASSIOMA DI DEDEKIND (COMPLETEZZA)

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$. Se $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ si ha $a \leq b$, allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale per cui $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$.

esempio:



$a \leq b$ $\forall a \in A, \forall b \in B$, allora $\exists c \in \mathbb{R}$ con $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$

Se $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^2 < 2\}$ "$x < \sqrt{2}$"

$B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^2 > 2\}$ "$x > \sqrt{2}$"

Poiché $\forall a \in A \quad \forall b \in B, \quad a \leq b$

$(a < \sqrt{2} < b)$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : \quad a \leq c \leq b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$

In questo caso c è unico ed è uguale a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Quindi non è vero che:

$\forall A, B \subseteq \mathbb{Q},\ A, B \neq \emptyset,\ \text{ e } \ a \leq b \ \ \forall a \in A, \forall b \in B$

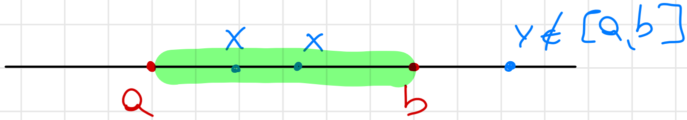
$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{Q} : \quad a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

2 MASSIMO, MINIMO, ESTREMO SUPERIORE ED ESTREMO INFERIORE DI UN INSIEME

A meno che non sia diversamente specificato, gli insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono diversi dal vuoto.

Consideriamo gli intervalli: siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ $\quad (a, b \in [a,b])$



- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$ $\quad (b \in (a,b],\ a \notin (a,b])$

  ↳ A VOLTE $]a,b]$

- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$ $\quad (a \in [a,b),\ b \notin [a,b))$

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ $\quad (a, b \notin (a,b))$

DEF: gli insiemi del tipo $[a,b]$ vengono detti CHIUSI, gli insiemi del tipo (a,b) vengono detti APERTI.

A volte gli insiemi del tipo $(a,b]$, $[a,b)$ vengono detti SEMI-APERTI o SEMI-CHIUSI.

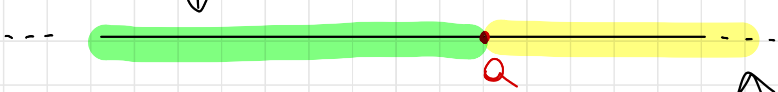
OSS. i punti a, b negli intervalli scritti prima sono significativi: sono i punti più grandi (b) o più piccoli (a) di tutti gli altri elementi dell'intervallo.

Adesso studieremo tali punti per sottoinsiemi generici $A \subseteq \mathbb{R}$.

altri intervalli: Sia $a \in \mathbb{R}$:

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

SEMIRETTA



$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

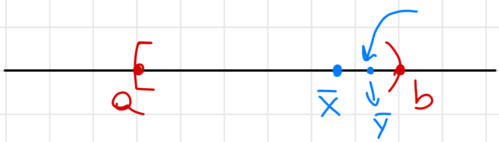
DEF: $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $\bar{a}$ è MASSIMO per A se soddisfa le seguenti condizioni:

•) $\bar{a} \geq a \quad \forall a \in A$.

•) $\bar{a} \in A$.

esempio: dato $[a,b]$, b è MASSIMO per $[a,b]$: infatti $b \in [a,b]$ e $\forall x \in [a,b]$ $x \leq b$

Domanda: ogni insieme ammette massimo? No, infatti se consideriamo $[a,b)$, $b \geq x \quad \forall x \in [a,b]$ ma $b \notin [a,b)$. Nessun altro elemento di $[a,b)$ può essere massimo: infatti se $\bar{x} \in [a,b)$, allora



esiste sempre un $\bar{y} \in [a,b)$ con $\bar{x} < \bar{y}$: ad esempio basta prendere

$$\bar{y} = \frac{\bar{x}+b}{2} = \bar{x} + \frac{b-\bar{x}}{2}$$

Vogliamo che: $\bar{y} > \bar{x}$ e $\bar{y} \in [a, b)$. Con la scelta fatta si ha:

$$\bar{y} = \frac{\bar{x}+b}{2} = \frac{\bar{x}}{2} + \frac{b}{2} \underset{\uparrow}{>} \frac{\bar{x}}{2} + \frac{\bar{x}}{2} = \bar{x} \qquad \bar{y} > \bar{x}$$

$$\frac{b}{2} > \frac{\bar{x}}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{x}}{2} + \frac{b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b \qquad \bar{y} < b$$

OSS: il concetto di massimo è "LIMITATO", perché vorremmo qualcosa che sia definito per ogni insieme A.

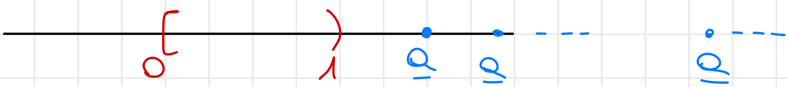
DEF: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che $\underline{a}$ è MINIMO per A se soddisfa le seguenti proprietà:

- •) $\underline{a} \leq a$, $\forall a \in A$.
- •) $\underline{a} \in A$.

esempio: l'intervallo $[a, b]$ ha come punto di MINIMO il punto a. L'intervallo $(a, b]$ non ha MINIMO.

OSS: poiché è l'appartenenza ad A a dare problemi per esistenza di massimo e minimo, perché non la togliamo?

Se chiedessimo solo che $\bar{a} \geq a \ \forall a \in A$, allora avremmo infiniti $\bar{a}$: infatti, se consideriamo $[0,1)$, quali sono gli elementi di $\mathbb{R}$ che sono $\geq$ di ogni elemento di $[0,1)$?



Ce ne sono infiniti, ma uno è più "significativo" degli altri: infatti il punto $\bar{a} = 1$ è il "più vicino" a $[0,1)$ tra tutti i punti $\bar{a} \in \mathbb{R}$ che soddisfano la condizione: $\bar{a} \geq x \ \forall x \in [0,1)$.

OSS: 1 è il più piccolo elemento di $\mathbb{R}$ che soddisfa $\bar{a} \geq x \ \forall x \in [0,1)$.

TEOREMA

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se esiste il massimo di A, allora questo è unico.

Se esiste il minimo di A, allora questo è unico.

dim

Dimostriamo che il massimo è unico, se esiste.

Facciamo vedere che, se $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ sono due massimi per A, allora $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$.

$\bar{a}_1$ è MASSIMO per A: quindi

$\bar{a}_1 \overset{①}{\geq} a \quad \forall a \in A$, e $\bar{a}_1 \in A$

$\bar{a}_2$ è MASSIMO per A, quindi

$\bar{a}_2 \overset{②}{\geq} a \quad \forall a \in A$, e $\bar{a}_2 \in A$

$\Rightarrow \bar{a}_1 \geq \bar{a}_2$ da ①, e $\bar{a}_2 \geq \bar{a}_1$ da ②

$\Rightarrow \bar{a}_1 = \bar{a}_2$

PER CASA: dimostrare unicità del minimo. $\blacksquare$

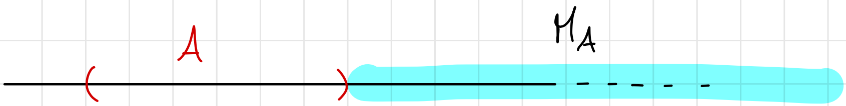
DEF: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Se esiste il MASSIMO di A, lo denotiamo con $\max A \in \mathbb{R}$.
- Se esiste il MINIMO di A, lo denotiamo con $\min A \in \mathbb{R}$.

DEF: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Chiamiamo insieme dei MAGGIORANTI di A, e lo indichiamo con M_A, l'insieme

$$M_A = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq a, \ \forall a \in A \}$$



- Chiamiamo insieme dei MINORANTI di A, e lo indichiamo con m_A, l'insieme

$$m_A = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq a, \ \forall a \in A \}$$

OSS: M_A o m_A possono essere vuoti, ad esempio $[2, +\infty) = A$ ha $M_A = \emptyset$ e $m_A = (-\infty, 2]$

TEOREMA

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Se $M_A \neq \emptyset$, allora esiste $\min M_A$.
- Se $m_A \neq \emptyset$, allora esiste $\max m_A$.

dim

Sia $m_A \neq \emptyset$. Allora gli insiemi m_A ed A soddisfano le condizioni di Dedekind: infatti

$$\forall x \in m_A \quad x \leq a \quad \forall a \in A$$

$\Rightarrow \quad \exists\, c \in \mathbb{R}: \quad x \leq c \leq a \quad \forall x \in m_A, \ \forall a \in A.$

Dimostriamo che c è il $\max m_A$: infatti:

- $c \in m_A$ perché $c \leq a \ \forall a \in A$
- $c \geq x \quad \forall x \in m_A$

$\Rightarrow \quad c = \max m_A$

Per CASA: dim che, se $M_A \neq \emptyset$, allora esiste $\min M_A$

$\blacksquare$