22/03/2022

LEZIONE 13

Riepilogo: esempi e proprietà dei f.d.o., insiemi densi in $\mathbb{R}$.

Finiamo la dim della densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Abbiamo $x_0 > 0$, e fissato $\varepsilon > 0$ abbiamo trovato $q \in \mathbb{Q}$: $q \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Fissiamo $U \in \mathcal{I}_{x_0} \overset{\text{DEF DI INTORNO}}{\rightsquigarrow} \exists \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$

$\overset{\text{DIM FATTA}}{\Rightarrow} \quad \exists q \in \mathbb{Q} : \quad q \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

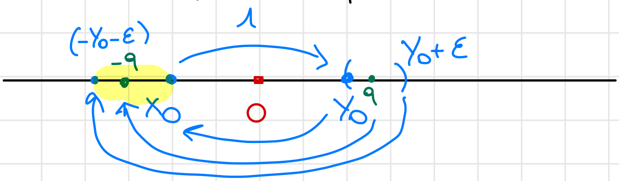
Mettendo insieme ROSSO e BLU otteniamo $q \in U$

CASO $x_0 = 0$: basta prendere $q = 0$.

CASO $x_0 < 0$: Vogliamo dim che $\forall U \in \mathcal{I}_{x_0} \ \exists q \in \mathbb{Q}$: $q \in U$.

$x_0 < 0 \Rightarrow \quad y_0 = -x_0 > 0$, per quanto dim prima

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{Q} : \quad q \in (y_0, y_0 + \varepsilon)$



$-y_0 - \varepsilon = -(-x_0) - \varepsilon = x_0 - \varepsilon$,

quindi è l'intervallo $(x_0 - \varepsilon, x_0)$.

$q \in \mathbb{Q} \Rightarrow -q \in \mathbb{Q}$ e $-q \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$.

Fissato $U \in \mathcal{I}_{x_0}$, $\exists\, \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$

$\Rightarrow \exists\, -q \in \mathbb{Q} \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$

$\Rightarrow -q \in U$, cioè abbiamo trovato un numero razionale in U.

Abbiamo allora dim. che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

∎

PROPOSIZIONE: Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste sempre un $q \in \mathbb{Q}$ tale per cui $q \in (a, b)$, cioè $a < q < b$.

<u>dim</u> PER CASA, bisogna considerare 3 casi:

1. $a, b > 0$
2. $a < 0,\ b > 0$
3. $a, b < 0$.

DEF: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

$x_0 \in A$ si dice **PUNTO ISOLATO** per A se

$\exists U \in \mathcal{I}_{x_0} : \quad A \cap U = \{x_0\}$.

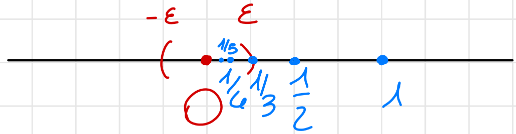
DEF: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

$x_0 \in A$ si dice **PUNTO INTERNO** per A se

$\exists \varepsilon > 0 : \quad (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$

esempi: $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$

0 è p.d.a. per A, ma 0 non è PUNTO INTERNO per A.



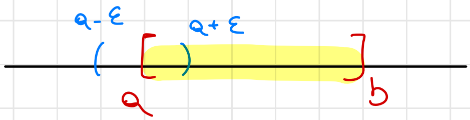
PROPOSIZIONE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) Se x_0 è PUNTO INTERNO di A, allora x_0 è P.D.A. per A.

(ii) Se x_0 è PUNTO ISOLATO per A, allora x_0 non è P.D.A. per A.

OSS: se consideriamo gli intervalli $[a,b]$, questi non sono intorni né di a né di b.



DEF: Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che U è INTORNO DESTRO di x_0 se $\exists\, \varepsilon > 0$ tale per cui

$$[x_0, x_0+\varepsilon) \subseteq U.$$

Diciamo che U è INTORNO SINISTRO di x_0 se

$$\exists\, \varepsilon > 0 : (x_0-\varepsilon, x_0] \subseteq U.$$

Chiamiamo $\mathcal{J}^+_{x_0} = \{$insieme degli intorni destri di $x_0\}$

$\mathcal{J}^-_{x_0} = \{$insieme degli intorni sinistri di $x_0\}$

PROPOSIZIONE

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora

$$\mathcal{I}_{x_0} \subseteq \mathcal{I}^+_{x_0} \quad , \quad \mathcal{I}_{x_0} \subseteq \mathcal{I}^-_{x_0},$$

e le inclusioni sono strette.

esempio: $[a,b] \in \mathcal{I}^+_a$, $[a,b] \in \mathcal{I}^-_b$, ma $[a,b] \notin \mathcal{I}_a$, $[a,b] \notin \mathcal{I}_b$.

SUCCESSIONI

Sono una particolare classe di funzioni.

DEF: $S \subseteq \mathbb{N}$ si dice SEMIRETTA di $\mathbb{N}$ se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $S = \{n_0 + n : n \in \mathbb{N}\}$.

Questo mi dice che S contiene tutti i numeri naturali da n_0 in poi.

OSS: Ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che non sono semirette di $\mathbb{N}$: $\{0, 1, 2, 3\}$ non è una semiretta di $\mathbb{N}$, $\mathbb{P} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ insieme dei numeri pari non è una semiretta di $\mathbb{N}$, ...

OSS: Vedremo che è sempre possibile creare una corrispondenza biunivoca tra un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ e una sua semiretta.

DEF: Una successione è una funzione $f: S \Rightarrow \mathbb{R}$, dove S è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.

Invece di scrivere $f(n)$, $n \in S$, scriviamo $f(n) = a_n$, $n \in S$, e l'immagine della successione si indica con

$$\{a_n\}_{n \in S} = \{a_n : n \in S\}$$
$$= \{a_n\}_{n \geq n_0}, \text{ se } S = \{n_0 + n : n \in S\}.$$

L'insieme S (dominio della successione $\{a_n\}_{n \in S}$) viene detto INSIEME DEGLI INDICI della successione.

esempi: • Sia $S = \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $a_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è detta SUCCESSIONE COSTANTE, quindi

$$\{c\}_{n \in \mathbb{N}} = \{c\}.$$

• $S = \mathbb{N}$, $a_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$. L'immagine della successione è $\mathbb{N}$.

- Sia $S = \mathbb{N}_0$, $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

L'immagine della successione è l'insieme $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

OSS: l'unico punto di accumulazione di una semiretta di $\mathbb{N}$ è $+\infty$.

LIMITI DI SUCCESSIONI

È un concetto legato "all'approssimazione" di funzioni in un punto: fare il limite di una funzione f in un punto x_0 vuol dire "studiare il comportamento di f mentre il suo argomento si avvicina a x_0".

$\rightsquigarrow$ x_0 deve essere un p.d.a. per il dominio di f.

Se ci limitiamo a considerare successioni, quali sono i p.d.a. per il dominio di una successione?

L'unico p.d.a. di una semiretta di $\mathbb{N}$ è $+\infty$, quindi in questo caso possiamo solo parlare di

Limiti all'infinito, o per n che tende a $+\infty$.

DEF: Sia $\{a_n\}_{n\in S}$ una successione. Si dice che IL LIMITE PER n CHE TENDE A $+\infty$ DI $\{a_n\}_{n\in S}$ È $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se

$\forall U \in \mathcal{I}_\ell \quad \exists V \in \mathcal{I}_{+\infty}$ tale per cui $a_n \in U \quad \forall n \in V \cap S$.

In questo caso diciamo che la successione ammette limite ℓ per n che tende a $+\infty$, e scriviamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \quad \text{oppure} \quad a_n \to \ell,\ n \to +\infty.$$

OSS: possiamo fare il limite quando n tende a $+\infty$ perché se considerassimo altri punti, non di accumulazione per S, nulla garantirebbe che $V \cap S$ fosse diverso dall'insieme vuoto.

OSS: in modo impreciso, dire che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ vuol dire che "al crescere di n i valori a_n si avvicinano ad ℓ"

DEF: Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

- Se $\ell \in \mathbb{R}$ diciamo che la successione $\{a_n\}_{n\in S}$ CONVERGE ad ℓ, ed è UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE.
- Se $\ell = \pm\infty$, diciamo che la successione $\{a_n\}_{n\in S}$ DIVERGE a $\pm\infty$, ed è UNA SUCCESSIONE DIVERGENTE.

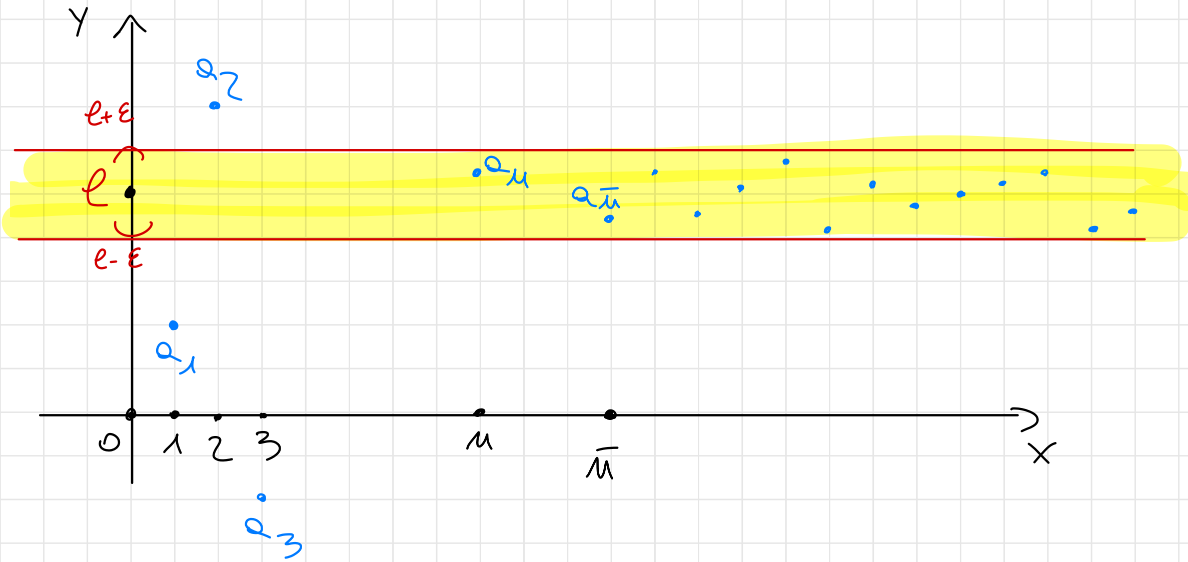
DEF ALTERNATIVE DI LIMITE: Si ha

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ se e solo se:

- $\ell\in\mathbb{R}$: $\forall \varepsilon>0$ $\exists \bar{n}\in\mathbb{N}$: $a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ $\forall n \geq \bar{n}$ $\Leftrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$
- $\ell = +\infty$: $\forall M>0$ $\exists \bar{n}\in\mathbb{N}$: $a_n \in (M, +\infty)$ $\forall n\geq \bar{n}$ $\Rightarrow a_n > M$
- $\ell = -\infty$: $\forall M>0$ $\exists \bar{n}\in\mathbb{N}$: a_n $(-\infty, -M)$ $\forall n \geq \bar{n}$ $\Rightarrow a_n < -M$

Disegno per $\ell \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$, prendiamo

$\varepsilon > 0$, si ha



OSS: $\bar{n}$ dipende da ε, e solitamente se ε diminuisce $\bar{n}$ cresce.

TEOREMA

Se esiste $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$, allora questo è unico,

cioè se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \bar{\ell}$, allora $\ell = \bar{\ell}$.

dim

P.A. supponiamo che $\exists\, \ell_1, \ell_2$, $\ell_1 \neq \ell_2$, tali per cui $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell_1$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell_2$.

$\exists\, U_1 \in \mathcal{I}_{\ell_1},\ \exists\, U_2 \in \mathcal{I}_{\ell_2} : \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$

Poiché $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell_1$, esiste $\bar{n}_1 \in \mathbb{N} : a_n \in U_1 \quad \forall n \geq \bar{n}_1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell_2$, esiste $\bar{n}_2 \in \mathbb{N} : a_n \in U_2 \quad \forall n \geq \bar{n}_2$

def di limite

Fissiamo $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$, allora

$\forall n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \in U_1 \cap U_2$

CONTRADDIZIONE, perché $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

$\blacksquare$