23/05/2022

LEZIONE 32

Riepilogo: Teorema di Cauchy, Teorema di Bernoulli-De L'Hôpital, Formula di Taylor con resto di Peano.

INTEGRALI

Si parla di:

- integrali indefiniti, quando andiamo a cercare la primitiva di una funzione (percorso inverso rispetto alla derivazione).
- integrali definiti, quando andiamo a studiare il problema delle aree.

INTEGRALI INDEFINITI

Pb: data una funzione $f: I \Rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, esiste una funzione $F: I \Rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in I, con $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$?

OSS: quando si deriva, data $f: I \Rightarrow \mathbb{R}$ si cerca la sua derivata f'

In questo caso il dato è la derivata f di F, e vogliamo trovare F.

DEF: Data $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Si dice che F È UNA PRIMITIVA di f se: $(F: I \to \mathbb{R})$

- F è derivabile in I;
- $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

DOMANDA: quante primitive ci sono? La primitiva F di f, se esiste, è unica o no?

esempio: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una primitiva di f: ad esempio, possiamo prendere $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Infatti

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

F non è unica, infatti $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow G'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x + 0 = x = f(x)$$

$\Rightarrow$ la primitiva di una funzione, se esiste, non è unica.

TEOREMA

Data $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Se esiste una primitiva $F: I \to \mathbb{R}$ di f, allora tutte e sole le primitive di f sono del tipo $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in I$, cioè:

- per ogni $c \in \mathbb{R}$, la funzione $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$, è una primitiva di f;
- se G è un'altra primitiva di f, allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale per cui $G(x) = F(x) + c$, $\forall x \in I$.

dim

È immediato verificare che, se $G(x) = F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ e $x \in I$, allora G è una primitiva di f: infatti se $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ $\forall x \in I$.

Supponiamo ora che G sia una primitiva di f, quindi G è derivabile in I e $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Supponiamo I aperto, cioè $I = (a, b)$

Definiamo $H(x) := G(x) - F(x)$, $\forall x \in I$.

H è derivabile in I perché somma di fz derivabili;

e $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

(iii), COR I DI LAGRANGE

$\Rightarrow$ H è una funzione costante su I, cioè

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad H(x) = c \quad \forall x \in I.$$

$\blacksquare$

OSS: per avere unicità della funzione primitiva F dobbiamo aggiungere "delle condizioni" su F. Ad esempio, data $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, sappiamo che una qualunque primitiva di f è data da

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vogliamo la primitiva F tale per cui $F(2) = 1$.

Si impone l'equazione (in c)

$$F(2) = 1 \iff \frac{2^2}{2} + c = 1 \iff 2 + c = 1$$

$$c = -1$$

$\Rightarrow$ la primitiva F che soddisfa la condizione

$F(2) = 1$ è $F(x) = \frac{x^2}{2} - 1$, $x \in \mathbb{R}$. È UNICA !!

DEF: Data $f: I \to \mathbb{R}$, definiamo (I intervallo)

INTEGRALE INDEFINITO di f l'insieme di tutte le primitive di f in I, e lo indichiamo con

$$\int f(x)\,dx$$

Quindi

$$\int f(x)\,dx = \{\text{primitive di } f \text{ su } I\}$$

$$= \{F + c, \ F \text{ è una primitiva di } f \text{ su } I, \ c \in \mathbb{R}\}$$

$$= F(x) + c, \quad x \in I, \quad c \in \mathbb{R}.$$

OSS: Scrivere $\int f(x)\,dx = F(x)$, $x \in I$, è SBAGLIATO

NO!! UGUAGLIANZA TRA INSIEME E FUNZIONE

OSS: La variabile nell'integrale è muta, cioè

$$\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt = \int f(y)\,dy = \dots$$

Per convenzione, si usa la stessa variabile sotto il segno di integrale e fuori, cioè

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad x \in I, \quad c \in \mathbb{R}$$

ma vale anche

$$\int f(x)\,dx = F(y)+c, \ y\in I, \ c\in\mathbb{R}$$
$$= F(t)+c, \ t\in I, \ c\in\mathbb{R}.$$

esempio: Sia $f(x)=\sin(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Sappiamo che se $F(x)=\cos(x)$, allora $F'(x)=-\sin(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Prendiamo allora $F(x)=-\cos(x)$, $x\in\mathbb{R}$, e otteniamo

$$F'(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \int \sin(x)\,dx = -\cos(x)+c, \ x\in I, \ c\in\mathbb{R}.$$

In questo caso:

$f \rightsquigarrow F$ che è quasi primitiva $\rightsquigarrow$ modifichiamo F per ottenere una primitiva di f.

Io però vorrei lavorare su f, non su F.

TEOREMA (ALGEBRA INTEGRALI INDEFINITI)

Date $f, g : I \to \mathbb{R}$, si ha

(i) $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$,

(ii) $\int (a \cdot f)(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Sono uguaglianze tra insiemi, nel senso che

(i): $H(x)+c$ è una primitiva di $f+g$ in I se e solo se $H(x)+c = F(x)+G(x)+\tilde{c}$, con F primitiva di f in I, G primitiva di g in I, $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$.

(ii) $H(x)+c$ è primitiva di αf in I se e solo se $H(x)+c = \alpha F(x)+\tilde{c}$, con F primitiva di f in I, $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

esempi: Determinare

$$\int \sin(x)\,dx = \int \underbrace{-}_{a=-1} \underbrace{(-\sin(x))}_{f(x)}\,dx$$

$$= -\int (-\sin(x))\,dx = -(\cos(x)+c)$$

$$= -\cos(x)+c, \quad x \in \mathbb{R}, \; c \in \mathbb{R}.$$

Sia ora $f(x) = x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Vogliamo calcolare

$$\int f(x)\,dx = \int (x^2 + 3x)\,dx$$

$$\overset{(i)}{=} \int \underbrace{x^2}_{f}\,dx + \int \underbrace{3x}_{g}\,dx$$

Calcoliamo separatamente gli integrali:

$\int x^2\,dx \rightsquigarrow$ trovare una primitiva di x^2

$F(x) = x^3 \rightsquigarrow F'(x) = 3x^2$

$$= \int \frac{1}{3} \cdot 3x^2\,dx \overset{(ii)}{=} \frac{1}{3} \int 3x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\int 3x\,dx \rightsquigarrow F(x) = x^2 \quad F'(x) = 2x$

$$= \int \underbrace{3 \cdot \frac{1}{2}} \cdot 2x\,dx = \frac{3}{2} \int 2x\,dx = \frac{3}{2}x^2 + C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Segue che

$$\int (x^2 + 3x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C, \quad x \in \mathbb{R}, \ C \in \mathbb{R}.$$

OSS: Se $f : I \to \mathbb{R}$, f derivabile in I, allora

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad x \in I, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Questo vuol dire che se cerchiamo una primitiva di $f' : I \to \mathbb{R}$, ci basta prendere $F(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

OSS: Dato $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, si ha

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \quad x \in I, \quad c \in \mathbb{R}$$

Infatti $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, x \in I$.

$f(x) = x^{\alpha+1} \rightsquigarrow f'(x) = (\alpha+1)x^\alpha$

$$\int x^\alpha\,dx = \int \frac{\alpha+1}{\alpha+1} x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1} \int (\alpha+1) x^\alpha\,dx$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \quad x \in I, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Il caso $\alpha = -1$ si ha a parte: $f(x) = \ln(x)$, allora
$f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$,

quindi

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C, \quad x \in (0, +\infty), \; C > 0.$$

Ma cosa succede se consideriamo $\frac{1}{x}$ definita su $(-\infty, 0)$?

Se $F(x) = \ln(-x)$, $x \in (-\infty, 0)$

$$F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + C, \quad x \in (-\infty, 0), \; C \in \mathbb{R}.$$

In generale, si ha

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C, \quad x \in I, \; C \in \mathbb{R}.$$

Pb: Vogliamo trovare una primitiva di $f(x) = x \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Quello che utilizzeremo sarà la formula di integrazione per parti.

Vediamo come costruire la FORMULA di INTEGRAZIONE PER PARTI: siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili in I, allora

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \forall x \in I.$$

Poiché queste funzioni sono uguali, avranno anche le stesse primitive, cioè

$$\int (f \cdot g)'(x)\,dx = \int \big(f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)\big)\,dx$$

$\shortparallel$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) + c,$ $x \in I,\ c \in \mathbb{R}$ da oss precedente

$$= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$ dal punto (i) del teorema

Mettendo insieme i pezzi, otteniamo che

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Vediamo come applicare il risultato in cui $f(x) \cdot g'(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$. Per prima cosa dobbiamo capire chi è f e chi è g'; questa scelta non è secondaria, infatti se prendiamo:

$f(x) = x$, $g'(x) = e^x \rightsquigarrow g(x) = e^x$ (va bene qualunque primitiva di g')

Allora la formula di integrazione per parti ci dà

$$\int \underset{f}{x}\, \underset{g'}{e^x}\, dx = \underset{f}{x}\, \underset{g}{e^x} - \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{e^x}\, dx = xe^x - e^x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \; c \in \mathbb{R}.$$

Invece, se scegliamo:

$f(x) = e^x$, $g'(x) = x \rightsquigarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$

e si ha

$$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

NON ABBIAMO SEMPLIFICATO, ANZI!!

In generale: se dobbiamo integrare una funzione del tipo $h(x) = x^n \cdot w(x)$, scegliamo $f(x) = x^n$ e $g'(x) = w(x)$, se però siamo in grado di trovare g.

Ad esempio, se abbiamo

$\int x \ln(x)\, dx$ non possiamo scegliere $g'(x) = \ln(x)$, perché non sappiamo come trovare $g(x)$. In questo caso prendiamo $g'(x) = x$, $f(x) = \ln(x)$ e otteniamo

$$\int \underset{g'}{x}\, \underset{f}{\ln(x)}\, dx = \underset{g}{\frac{x^2}{2}}\, \underset{f}{\ln(x)} - \int \underset{g}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{f'}{\frac{1}{x}}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C, \quad x > 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Verifichiamo di aver fatto bene i conti: poniamo

$F(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}$ e calcoliamo F':

$$F'(x) = x \ln(x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln(x),$$

quindi F è una primitiva della funzione sotto il segno di integrale.

ESERCIZI

1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1-\cos(x))^2}{\log(1+(\sin(x))^4)}$

3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e - (1+x)^{1/x}}{x}$

1) $\alpha = 0 \Rightarrow e^{0 \cdot \ln(1+x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \dots = 0$.

$\alpha \neq 0 \quad \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \dfrac{1-1}{0}$ F. I.

$$\frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1, \quad \text{se} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$$\frac{e^{\alpha \ln(x+1)} - 1}{x \cdot \frac{\alpha \ln(x+1)}{\alpha \ln(x+1)}} = \underbrace{\frac{e^{\alpha \ln(x+1)} - 1}{\alpha \ln(x+1)}}_{\downarrow\, x \to 0 \atop 1} \cdot \underbrace{\frac{\alpha \ln(x+1)}{x}}_{\downarrow\, x \to 0 \atop \alpha} \longrightarrow \alpha, \quad x \to 0.$$

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1-\cos(x))^2}{\log(1+(\sin(x))^4)} = \dfrac{0}{0}$ F. I.

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \to \frac{1}{2}, \quad x \to 0$$

$$\frac{\log(1+f(x))}{f(x)} \to 1, \quad x \to 0 \quad \text{se} \quad f(x) \to 0, \quad x \to 0$$

- $(1-\cos(x))^2 = \left(\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot x^2\right)^2 = \left(\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\right)^2 \cdot x^4$

- $\dfrac{\ln(1+(\sin(x))^4)}{(\sin(x))^4} \cdot (\sin(x))^4 = \dfrac{\ln(1+(\sin(x))^4)}{(\sin(x))^4} \cdot \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^4 \cdot x^4$

$\hookrightarrow \cdot \dfrac{x}{x}$

$$\frac{(1-\cos(x))^2}{\log(1+(\sin(x))^4)}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)^2}_{\substack{x\to 0 \\ \downarrow \\ \frac{1}{4}}} \cdot \cancel{x^4} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^4}_{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{(\sin(x))^4}{\ln(1+(\sin(x))^4)}}_{\substack{\downarrow x\to 0 \\ 1}} \cdot \frac{1}{\cancel{x^4}}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Con Taylor : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $x \to 0$,

$\sin(x) = x + o(x^2)$, $x \to 0$

$(\sin(x))^4 = (x + o(x^2))^4 = \left[(x + o(x^2))^2\right]^2$

$= \left[x^2 + \cancel{o(x^4)} + o(x^3)\right]^2$

$= \left[x^4 + \cancel{o(x^6)} + o(x^5)\right] = x^4 + o(x^5)$

$\ln(1+t) = t + o(t)$, $t \to 0$

$\Rightarrow \ln(1 + (\sin(x))^4) = (\sin(x))^4 + o((\sin(x))^4)$ $\quad x \to 0$

$t = (\sin(x))^4$ $\quad = (x^4 + o(x^5)) + \underbrace{o(x^4 + o(x^5))}_{o(x^4) + o(x^5)}$ $\quad x \to 0$

$= x^4 + o(x^4)$ $\quad x \to 0$

$$\frac{(1 - \cos(x))^2}{\ln(1 + (\sin(x))^4)} = \frac{(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2}{x^4 + o(x^4)}$$

$$= \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} \cdot \frac{1/4 + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}$$

3) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x} = \frac{0}{0} \qquad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{y\to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

$$\frac{1}{x} = y$$

$$(1+x)^{1/x} = e^{\ln\left[(1+x)^{1/x}\right]} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

$$e-(1+x)^{1/x} = e - e^{1/x \ln(1+x)} = e\left(1-e^{1/x\cdot\ln(1+x)-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x} = e\, \overset{\to -1}{\boxed{\frac{1-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}}{x\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}}} \cdot \frac{1}{x}\ln(1+x)-1$$

$\boxed{-e}$

$$= \frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} \xrightarrow{DH} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\ln(1+x)+\frac{1}{x(x+1)}}{1}$$

TAYLOR: $\ln(1+x) = x+o(x)$ $\qquad \ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\left(x+o(x)\right)-1 = 1+o(1)-\cancel{1} = o(1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1 = \cancel{1}-\frac{x}{2}+o(x)-\cancel{1} = -\frac{x}{2}+o(x)$$

$$\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} = \cancel{\frac{0}{x}=0} \qquad \text{NO!}$$

$$= \frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\ \frac{-\frac{1}{2}+\cancel{o(1)}}{1} \to -\frac{1}{2},\ x\to 0$$

4) Sviluppare $f(x) = \frac{1}{\cos(x)} - e^x + x$ in $x_0 = 0$ fino all'ordine 4.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad x \to 0,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 + \underbrace{\cos(x) - 1}} = \frac{1}{1 - \underbrace{(1 - \cos(x))}_{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = x}}$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) + o(x^4) + \frac{x^4}{4}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4) \cancel{-1} \cancel{-x} \cancel{-\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$-\cancel{x} = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6} x^4 + o(x^4)$$

PER CASA: sviluppare $\dfrac{1}{\cos(x)}$ imponendo

$$\frac{1}{\cos(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)$$

$$1 = \underbrace{\cos(x)}_{(\qquad)} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4) \right)$$

Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathcal{L}(x) + \alpha x^3}{x^3 + x^4}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathcal{L}(x) + \alpha x^3}{x^3 + x^4} = \frac{-\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \alpha x^3 + o(x^4)}{x^3 (1 + x)}$$

$$= \frac{(\alpha - 1/6) x^3 + 1/6\, x^4 + o(x^4)}{x^3 (1 + x)}$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{6}\right) \begin{matrix} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{6} \rightsquigarrow \frac{\overset{x}{\cancel{x^4}} \left(1/6 + o(1) \right)}{\underset{1}{\cancel{x^3}} (1 + x)} \to 0, \quad x \to 0^+$$

$$\alpha > 1/6 \rightsquigarrow \frac{\cancel{x^3} \left(\alpha - 1/6 + 1/6\, x + o(x) \right)}{\cancel{x^3} (1 + x)} \longrightarrow \alpha - 1/6 \quad x \to 0^+$$

$$\alpha < \frac{1}{6} \rightsquigarrow \lim = \alpha - 1/6$$