STUDIO DI FUNZIONE

1) DOMINIO, ALTRE PROPRIETÀ (SIMMETRIE, INTERSEZIONI CON GLI ASSI)

- FRAZIONE: DEN. $\neq 0$
- LOGARITMI: SE LA BASE È UN NUMERO, ARGOMENTO > 0; SE LA BASE DIPENDE DALL'INCOGNITA, BASE > 0 MA $\neq 1$
- RADICI CON INDICE PARI: RADICANDO ≥ 0
- ARCSEN / ARCCOS: $-1 \leq$ ARGOMENTO ≤ 1

- SE IL DOMINIO È SIMMETRICO RISPETTO A $x=0$, PROVO A RISOLVERE $f(-x)$:
  - $f(-x) = f(x) \rightarrow$ FUNZIONE PARI
  - $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ FUNZIONE DISPARI
- SE $x=0$ APPARTIENE AL DOMINIO, RISOLVERE $f(0)$ PER TROVARE IL PUNTO DI INTERSEZ.

2) CONTINUITÀ

3) SEGNO: $f(x) \geq 0$ $\quad \{x \in D : f(x) \geq 0\}$ (GRAFICO PARZIALE)

4) LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO, EVENTUALI ASINTOTI VERT. E ORIZZ.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. x_0 È UN ASINTOTO VERTICALE
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, a È UN NUMERO FINITO. LA RETTA $y = a$ È UN ASINTOTO ORIZZONTALE

5) EVENTUALI ASINTOTI OBLIQUI E LORO POSIZIONE RISPETTO AL GRAFICO ($y = mx + q$)

5.1) $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}$; $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = L \in \mathbb{R}$

5.2) VERIFICA: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx+q)) = 0$ $\qquad$ 5.3) $f(x) \geq mx + q$ $\quad \{x \in D : f(x) \geq mx+q\}$

6) DERIVABILITÀ E CALCOLO DELLA DERIVATA PRIMA

7) DOMINIO DI f' E SEGNO DI f'. $D' = dom(f')$, $\{x \in D \cap D' : f'(x) \geq 0\}$

8) CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI STAZIONARI (MIN, MAX (REL/ASS), FLESSO)

9) DERIVATA SECONDA E SUO SEGNO (CONCAVITÀ, CONVESSITÀ, PUNTI DI FLESSO)

- $f''(x_0) = 0 \wedge f'(x_0) = 0 \rightarrow$ FLESSO A TG. ORIZZ. (ASC, DISC)
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'(x_0) > 0 \rightarrow$ FLESSO ASCENDENTE A TG. OBLIQUA
  $\quad$ " $\quad$ " < 0 $\quad$ " DISCENDENTE " $\quad$ "

10) IMMAGINE DI f: $\mathrm{Im}(f)$

ESEMPIO STUDIO DI FUNZIONE : $f(x)=\dfrac{3x^3}{9-x^2}$

1) $D=\operatorname{dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid 9-x^2\neq 0\}=$

$=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-9=0\}=\mathbb{R}-\{\pm 3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,+3)\cup(+3,+\infty)$

$f(-x)=\dfrac{3(-x)^3}{9-(-x)^2}=-\dfrac{3x^3}{9-x^2}=-f(x)\rightarrow$ LA FUNZIONE É DISPARI

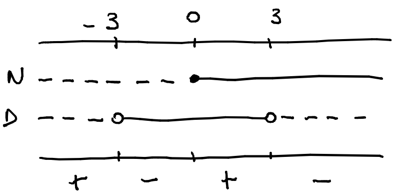
INT. $f(0)=0$ $\quad \{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^3=0\}=\{0\}$

2) CONTINUITÀ : $f:D\to\mathbb{R}$ É CONTINUA PERCHÉ RAPPORTO DI FZ. CONTINUE E IL DENOM. NON É NULLO

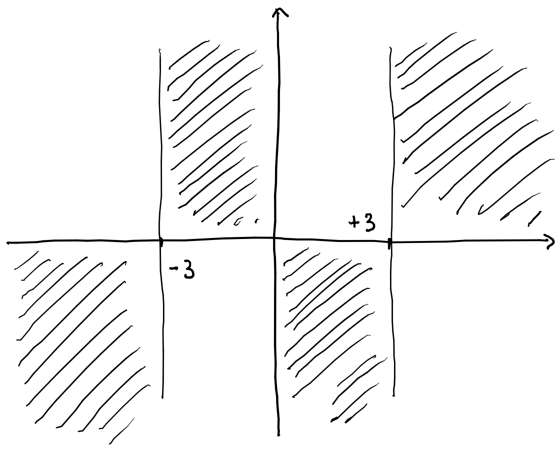
3) SEGNO $\{x\in D\mid f(x)\geq 0\}$ STUDIAMO SEPARATAMENTE NUM. E DEN.

N: $3x^3\geq 0 \iff x\geq 0$

D: $9-x^2>0 \iff x^2<9 \iff x\in(-3,3)$



$\{x\in D: f(x)\geq 0\}=(-\infty,-3)\cup[0,3)$



4) LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO. EVENTUALI ASINTOTI VERTICALI E ORIZZONTALI

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\quad \lim_{x\to-3^-} f(x)=+\infty$ $\quad \lim_{x\to-3^+} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\quad \lim_{x\to+3^-} f(x)=+\infty$ $\quad \lim_{x\to+3^+} f(x)=-\infty$

ASINTOTI VERTICALI DESTRO E SINISTRO

5) EVENTUALI ASINTOTI OBLIQUI

$y=mx+q$ É ASINT. OBL. DX PER f SE f É DEFINITA SU UNA SEMIRETTA E $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+q))=0$

$m=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3}{x(9-x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{9-x^2}=-3$

$q=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+3x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^3}{9-x^2}+3x\right)=\ldots=0$

IL LIMITE PER TROVARE q CONSISTE ESSO STESSO NELLA VERIFICA. AS. OBL.: $y=-3x$

$f(x)\geq mx+q$ $\begin{cases} f(x)\geq -3x \\ x\in D\end{cases} \iff \dfrac{3x^3}{9-x^2}\geq -3x \iff \ldots \iff x\in(-\infty;3)\cup[0;3)$

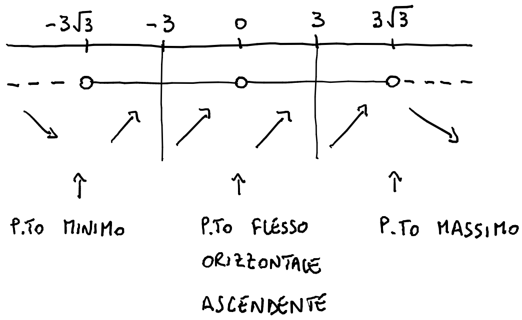
6) DERIVABILITÀ : f È DERIVABILE IN D IN QUANTO RAPPORTO DI FUNZIONI DERIVABILI

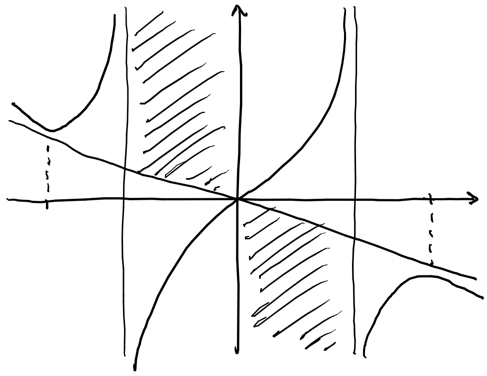
$$f'(x) = \frac{9x^2(9-x^2) - 3x^2(-2x)}{(9-x^2)^2} = \dots = \frac{81x^2 - 3x^4}{(9-x^2)^2} \qquad D' = \mathrm{dom}(f') = D$$

7) SEGNO DI f' $\quad \{x \in D' : f'(x) \geq 0\} = \{x \in D' : 81x^2 - 3x^4 \geq 0\}$

$$\begin{cases} 81x^2 - 3x^4 \geq 0 \\ x \in D' \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2(27 - x^2) \geq 0 \\ x \in D' \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \ \vee \ x \in (-3\sqrt{3}\,;\, +3\sqrt{3}) \\ x \in D' \end{cases}$$

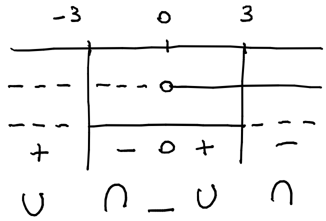
8)





9) DERIVATA SECONDA : f È DERIVABILE DUE VOLTE IN D

$$f''(x) = \dots = \frac{1458x + 54x^2}{(9-x^2)^3}$$



10) $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Limiti

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{arcsin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{arctg(x)}{x} = 1$$

Tecniche per eliminare F.I.

- $$\lim_{x\to x_0} \big(\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{f(x)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{g(x)}\big) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\left(\frac{g(x)}{1/f(x)}\right)}_{\infty/\infty} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x)}{1/g(x)}\right)}_{0/0}$$

- SE $f(x), g(x) > 0$, $\lim_{x\to +\infty} \left(f(x)^{g(x)}\right) = \exp\left(\lim_{x\to +\infty} g(x) \cdot \log(f(x))\right)$

Teorema di De L'Hôpital

SIANO $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ FUNZIONI CONTINUE T.C. $f(a) = g(a) = 0$

SIANO f, g DERIVABILI IN (a, b), CON $g(x), g'(x) \neq 0 \ \forall (a, b)$

SE ESISTE $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ALLORA ANCHE $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

N.B. DA USARE SOLO IN CASO DI F.I. DEL TIPO "$\frac{0}{0}$" OPPURE "$\frac{\infty}{\infty}$"

ESEMPIO CALCOLO LIMITI

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = ?$ $\quad f(x) = e^x - 1 - x \quad f'(x) = e^x - 1$

$g(x) = x^2 \quad g'(x) = 2x$

SOSPENDIAMO QUESTO CALCOLO. CALCOLIAMO

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{QUINDI} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = ?$ $\quad f(x) = \log(1+x) - x \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$

$g(x) = x^2 \quad g'(x) = 2x$

CALCOLIAMO $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}$

QUINDI $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

LIMITI CON INTEGRALI

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \log(e^t + 7)\, dt = \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x \log(e^t + 7)\, dt}{x} = ?$

PONIAMO $f(x) = \int_0^x \log(e^t + 7) \qquad f'(x) \overset{*}{=} \log(e^t + 7)$

$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

$*$ TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

TdH: CALCOLIAMO $\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\log(e^x + 7)}{1} = \log(8) = 3\log(2)$

IN DEFINITIVA, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \log(e^t + 7)\, dx = \log(8)$

- $\lim_{x \to +\infty} x^6 \cdot \int_0^x t^5 \cdot \sqrt{t^2 + 4}\, dt$ $\qquad f(x) = \int_0^x t^5 \cdot \sqrt{t^2 + 4}\, dt \qquad f'(x) = t^5 \cdot \sqrt{t^2 + 4}$

$g(x) = x^6 \qquad g'(x) = 6x^5$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 \sqrt{x^2 + 4}}{6x^5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{6} = +\infty$$

DERIVATE

DERIVATE FONDAMENTALI

$f(x)$	x^α	a^x	e^x	$\ln(x)$	$\sin(x)$	$tg(x)$	$\arcsin(x)$	$\operatorname{arctg}(x)$
$f'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x \ln(a)$	e^x	$1/x$	$\cos(x)$	$1+tg^2(x)$; $\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

REGOLE DI DERIVAZIONE

- $D(f+g) = Df + Dg$
- $D(\alpha f) = \alpha Df$
- $D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f(Dg)$
- $D\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{Dg}{g^2}$
- $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df)g - f(Dg)}{g^2}$
- $D(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(g(x_0))$

es.

$$D(\sin(5x^2)) = \cos(5x^2) \cdot 10x$$

INTEGRALI

PROPRIETÀ

- LINEARITÀ : $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$; $\int_a^b (f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO $c \in (a,b)$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

TFCI $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$

$$\frac{x}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

- SE $F'(x) = f(x)$ $\int f(x)\,dx = F(x) + k$ INTEGRALE INDEFINITO
- $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

INTEGRALI IMMEDIATI

$f(x)$	x^α	$\frac{1}{x}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{1+x^2}$	a^x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\log(x)$
$F(x)+k$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\log(\lvert x\rvert)$	e^x	$\sin(x)$	$tg(x)$	$arctg(x)$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$arcsin(x)$	$x\log(x)-x$

RICERCA DELLE PRIMITIVE

1) PER PARTI : $\int F'(x)\cdot G(x)\,dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot G'(x)$

$F'(x)$ SO INTEGRARLA
$G(x)$ SO DERIVARLA

2) PER SOSTITUZIONE : $\int f'(x)\, g'(f(x))\,dx = g(f(x)) + k$

SCELTA UNA SOSTITUZIONE $\Rightarrow$ $y = f(x) \rightarrow \frac{d}{dx} y = f'(x) \rightarrow dy = f'(x)\,dx$

3) FUNZIONI RAZIONALI

3 CASI BASE : $\int \frac{dx}{x} = \log(\lvert x\rvert) + k$; $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + k$; $\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \log(1+x^2) + k$

DATA $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, DIVIDIAMO I POLINOMI IN MODO TALE DA AVERE $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$

1° CASO (DEN. GRADO 1) $\int \frac{c}{ax+b}dx = \frac{c}{a}\log(\lvert ax+b\rvert) + k$

2° CASO (DEN. GRADO 2) : CALCOLO Δ

• $\Delta > 0$ $\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2} \rightarrow \int \frac{R(x)}{B(x)}dx = \int\left(\frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2}\right)dx = \int \frac{\alpha}{x-x_1}dx + \int \frac{\beta}{x-x_2}dx$

$= \alpha\cdot\log(\lvert x-x_1\rvert) + \beta\cdot\log(\lvert x-x_2\rvert) + k$

• $\Delta = 0$ $B(x) = a(x-x_1)^2$

$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{(x-x_1)^2}$

$\int \frac{R(x)}{B(x)}dx = \int\left(\frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{(x-x_1)^2}\right)dx =$

$= \alpha\cdot\log(\lvert x-x_1\rvert) - \frac{\beta}{x-x_1} + k$

• $\Delta < 0$ RICONDURSI A $\int \frac{dy}{1+y^2}$, $\int \frac{2y}{1+y^2}dy$ $\qquad B(x) = ax^2+bx+c$

CERCARE UNA SOSTITUZIONE $x = \alpha y + \beta$: $a(\alpha y+\beta)^2 + b(\alpha y+\beta) + c =$

$= a\alpha^2y^2 + (2a\beta+b)\alpha y + (a\beta^2+\beta b+c)$ t.c. $2a\beta + b = 0$

INOLTRE, TROVATO β, SOSTITUIRE. $\Rightarrow J\alpha^2y^2 + w \Leftrightarrow w\left(\frac{J}{w}\alpha^2y^2 + 1\right)$.

TROVARE α T.C. $\frac{J}{w}\alpha^2 = 1$. SOSTITUIRE CON α E β TROVATI TRAMITE LA REL. INIZIALE $x = \alpha y + \beta$

4) FUNZIONI RAZIONALI IN SENO E COSENO

POSTO $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ SI HA $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ E $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

*) SOSTITUZIONE INTERESSANTE

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh(t) \qquad dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh(t) \qquad \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

ESEMPIO INTEGRALI

$$\int x\sqrt{1-x}\,dx = \qquad y = \sqrt{1-x} \qquad y^2 = 1-x \qquad x = 1-y^2 \qquad dx = -2y\,dy$$

$$= \left[\int (1-y^2)\,y\cdot(-2y)\,dy\right] = 2\left[\int (y^4 - y^2)\,dy\right] = 2\left[\left(\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{3}y^3 + k\right)\right] = \frac{2}{5}(1-x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt\right]_{x=\sin(t)} = \left[\int \cos^2(t)\,dt\right]_{x=\sin(t)} \qquad x = \sin(t),\; dx = \cos(t)\,dt$$

1. $\int \cos^2(t)\,dt = \int (1-\sin^2(t))\,dt = \int dt - \int \sin^2(t)\,dt = t - \left(-\sin(t)\cos(t) + \int \cos^2(t)\,dt\right) =$

$= t + \sin(t)\cos(t) - \int \cos^2(t)\,dt$ QUINDI $\int \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \sin(t)\cos(t)\right) + k$

2. $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ QUINDI $\int \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + k$

INFINE $\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + k\right]_{x=\sin(t)} = \frac{1}{2}\arcsin(t) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k$

$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-5x+8}\,dx$ DIVISIONE

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 & x^2 - 5x + 8 \\ -x^3 + 5x^2 - 8x & \hline \\ \hline 6x^2 - 8x & \underbrace{x+6}_{Q} \\ -6x^2 + 30x - 48 & \\ \hline \underbrace{22x - 48}_{R} & \end{array}$$

QUINDI $\frac{x^3+x^2}{x^2-5x+8} = x + 6 + \frac{22x-48}{x^2-5x+8}$

CI CONCENTRIAMO SU $\int \frac{22x-48}{x^2-5x+8}\,dx$

x^2-5x+8 HA $\Delta < 0$, CERCHIAMO UNA SOSTITUZIONE DEL TIPO $x = \alpha y + \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} \\ \beta = \frac{5}{2} \end{cases}$

$$x = \frac{\sqrt{7}}{2}y + \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{x - \frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \qquad dx = \frac{\sqrt{7}}{2}\,dy$$

$$\int \frac{22x-48}{x^2-5x+8}\,dx = \dots = 2\,\frac{\sqrt{7}}{7}\int \frac{11\sqrt{7}\,y + 7}{y^2+1}\,dy = \frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\frac{11\sqrt{7}}{2}\log(y^2+1) + 7\,\mathrm{arctg}(y)\right) + k$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \qquad x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \left(= \sinh(t)\right) \qquad dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \left(= \cosh(t)\right)$$

$$= \left[\int \sqrt{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,dt\right]_{x=\dots} = \left[\int \sqrt{\frac{e^{2t}+2-e^{-2t}}{4}} \cdot \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt\right]_{x=\dots} = \dots =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\int \left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right)dt\right]_{x=\dots} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2t} + 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right) + K$$

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t}-1}{2e^t} \qquad y = e^t \quad y > 0$$

$$x = \frac{y^2-1}{2y} \Rightarrow y = x + \sqrt{x^2+1} = e^t$$

$$\int \frac{\sin(x)+2}{\cos(x)+1}\,dx = \qquad t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad x = 2\cdot arctg(t)$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}+2\right)}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \dots = 2\int \frac{t^2+t+1}{t^2+1}\,dt = 2\int\left(1+\frac{t}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right) + K = 2t + \log(1+t^2) + K = 2tg\left(\frac{x}{2}\right) + \log\left(1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + K$$

$$= 2\cdot tg\left(\frac{x}{2}\right) + \log\left(\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + K$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1° TIPO) $y' = f(y)\,g(x)$ -> VARIABILI SEPARABILI

$$\frac{y'}{f(y)} = g(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{f(y(x))} = g(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{f(y(x))}\,dx = \int g(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = G(x) + K$$

$$\Rightarrow \log(|f(y)|) = G(x) + K \Rightarrow |f(x)| = e^{G(x)+K} \Rightarrow f(y) = A\cdot e^{G(x)} \qquad A = \pm e^K$$

$\Rightarrow$ RISOLVO PER y

2° TIPO) $y'(x) = A(x)y(x) = B(x)$

1° PASSO: $y' + A'(x)y = 0$ CIOÈ $y' = -A(x)y$ CHE È A VARIABILI SEPARABILI

2° PASSO: METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI

DAL 1° PASSO OTTENIAMO $y = A \cdot e^{G(x)} \Rightarrow y = A(x)\, e^{G(x)}$

CALCOLIAMO LA DERIVATA DI $y = A(x)\, e^{G(x)}$ $\quad y' = A'(x)\, e^{G(x)} + A(x) \cdot \left(G(x) \cdot e^{G(x)}\right)$

SOSTITUIAMO y E y' ALL'EQUAZIONE INIZIALE

SE ABBIAMO SVOLTO I CALCOLI CORRETTAMENTE, I DUE "PEZZI" CENTRALI DOVREBBERO ANNULLARSI A VICENDA. ABBIAMO ORA UN'EQ. DIFF. IN $A(x)$ DEL TIPO

$A'(x) = V(x) \rightarrow A(x) = \int V(x)\, dx$, QUINDI $y = A(x)\, e^{G(x)}$ È LA SOLUZIONE

ESEMPI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$$y' = xy^2 \qquad \frac{y'}{y^2} = x \qquad \int \frac{y'(x)\,dx}{y^2(x)} = \int x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}x^2 + k$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + k \qquad \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 \qquad y = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + k} \qquad y = \frac{-2}{x^2 + 2k}$$

$$y' + \frac{y}{x + x^2} = x - 2 \qquad x \in (-1, 0) \qquad \text{1° PASSO: } y' + \frac{y}{x^2 + x} = 0 \qquad y' = -\frac{y}{x^2 + x}$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x(x+1)} \qquad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int -\frac{1}{x(x+1)}\,dx \qquad \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

$$\int -\frac{1}{x(x+1)}\,dx = \log\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) + k$$

SOSTITUENDO $\log(|y|) = \log\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) + k \qquad |y| = \left|\frac{x+1}{x}\right| \cdot e^k$

$$y = A \cdot \frac{x+1}{x} \qquad A = \pm e^k$$

2° PASSO: VAR. COST.

CERCHIAMO UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE COMPLETA DELLA FORMA $y(x) = A(x)\,\frac{x+1}{x}$

SOSTITUIAMO IN $y' + \frac{y}{x(x+1)} = x - 2$ $\qquad y'(x) = A'(x)\,\frac{x+1}{x} + A(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$\left(A'(x)\,\frac{x+1}{x} + A(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{1}{x\cancel{(x+1)}} \cdot A(x) \cdot \frac{\cancel{x+1}}{x} = x - 2$$

$$A'(x)\,\frac{x+1}{x} - \cancel{\frac{A(x)}{x^2}} + \cancel{\frac{A(x)}{x^2}} = x - 2 \qquad A'(x) = \frac{x(x-2)}{x+1} \qquad A(x) = \int \frac{x^2 - 2x}{x+1}\,dx \longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3\log(|x+1|) + k$$

DUNQUE $\quad y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 3\log(|x+1|) + k\right) \cdot \frac{x+1}{x}$

$$y' + y\,tg(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

1° PASSO: $\quad y' = -y \cdot tg(x) \qquad \frac{y'}{y} = -tg(x) \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

$$\log(|y|) = \log(|\cos(x)|) + k \qquad y = A \cdot \cos(x) \qquad A = \pm e^k$$

VERIFICA $\quad y' = -A \cdot \sin(x) \qquad -A \cdot \sin(x) = -A \cdot \cos(x)\,tg(x) \quad \checkmark$

2° PASSO: $\quad y(x) = A(x) \cdot \cos(x) \qquad y'(x) = A'(x)\cos(x) - A(x)\sin(x)$

SOSTITUIAMO

$$A'(x)\cos(x) - \cancel{A(x)\sin(x)} + \cancel{A(x)\cos(x)\,tg(x)} = \frac{1}{\sin(x)} \qquad A'(x) = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$$

$$y = \left(\log(|tg(x)|) + k\right) \cdot \cos(x) \qquad A(x) = \log(|tg(x)|) + k$$