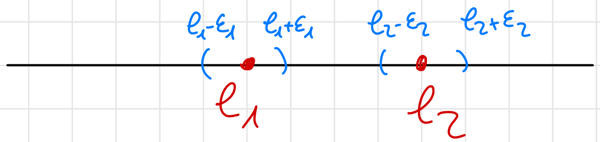
25/03/2022

LEZIONE 14

Riepilogo: intorni destri e sinistri, punti interni e isolati, def di semiretta di $\mathbb{N}$, def di successione, def di limite di successione, unicità del limite.

graficamente: nella dim di unicità del limite, quando prendiamo $l_1 \neq l_2$ abbiamo



POSS SCELTA: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{l_2 - l_1}{4}$

CALCOLO di LIMITI CON LA DEFINIZIONE:

- Sia $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, dim che $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$,

cioè $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Vogliamo dim che:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \overbrace{\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)}^{a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)} \quad \forall n \geq \bar{n}$

Per dimostrare questo si procede come segue:

1: si fissa $\varepsilon > 0$; $(\forall \varepsilon > 0)$

2: si fanno i conti nella condizione che vogliamo; ottenere $(a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, oppure $|a_n| < \varepsilon)$

3: si spera di avere una condizione su n.

(trovare $\bar{n}$)

Fissiamo $\varepsilon > 0$, allora se soddisfa

$$|a_n| < \varepsilon \iff \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

PROP MODULO

$$\iff -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon \overset{\frac{1}{n} > 0}{\iff} 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Sia $T := \left\{ n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\varepsilon} \right\}$, e sia $\bar{n} = \min T$.

Quindi, se $n \geq \bar{n}$, poiché $\bar{n} \in T$ si ha

$$n \geq \bar{n} \underset{\bar{n} \in T}{>} \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ la def di limite è soddisfatta.

OSS: Cosa succede a $\bar{n}$ se ε decresce?

- se $\varepsilon = \frac{1}{100}$, $\bar{n} = \min\{n \in \mathbb{N} : n > 100\}$

$\Rightarrow \bar{n} = 101$

- se $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, $\bar{n} = \min\{n \in \mathbb{N} : n > 1000\}$

$\Rightarrow \bar{n} = 1001$

PER CASA: • dim. USANDO LA DEFINIZIONE che $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

- dim che non è vero che $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 0$

Negare la def di limite e far vedere che la scelta $a_n = \frac{n+1}{n}$ ed $\ell = 0$ soddisfa QUESTA NEGAZIONE

OSS: la def di limite è "MOLTO SCOMODA" e poco utile per calcolare limiti. Quindi avremo bisogno di 2 tipi di risultati:

- TEOREMI che ci dicono quanto valgono i limiti di alcune successioni;
- TEOREMI che ci dicono come ottenere limiti di oggetti più complessi, partendo da successioni con

cui abbiamo già lavorato.

DEF: Si dice che una proprietà $P\ (= P(n))$ è vera DEFINITIVAMENTE se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale per cui $P = P(n)$ è vera $\forall n \geq \bar{n}$.

esempio: nella def di limite, si ha $\forall \varepsilon > 0$ la proprietà $P(n) =$ "$|a_n - \ell| < \varepsilon$" vale definitivamente.

TEOREMA DEL CONFRONTO (I)

Siano $\{a_n\}_{n\in S}$, $\{b_n\}_{n \in S'}$, e sia $a_n \leq b_n$ definitivamente.

(i) Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = m \in \mathbb{R}$, allora $\ell \leq m$.

(ii) Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, allora $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

(iii) Se $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

OSS: l'esistenza del limite per a_n e b_n è un'ipotesi nel punto (i).

Nei punti (ii) e (iii) assumiamo l'esistenza di uno solo dei due limiti, ma deve essere il "limite giusto": $+\infty$ per a_n e $-\infty$ per b_n.

OSS: se $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, non abbiamo informazioni sul comportamento di b_n.

<u>dim</u>

(i) sappiamo che:

- $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad a_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n}$.
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_a \in \mathbb{N} : \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}_a$.
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_b \in \mathbb{N} : \quad |b_n - m| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}_b$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$\hat{n} := \max \{ \bar{n}, \bar{n}_A, \bar{n}_B \}$$

Quindi, $\forall n \geq \hat{n}$ abbiamo che:

$$a_n \leq b_n \qquad (1)$$

$$\ell-\varepsilon \leq a_n \leq \ell+\varepsilon \qquad (2)$$

$$m-\varepsilon \leq b_n \leq m+\varepsilon \qquad (3)$$

Quindi:

$$\ell-\varepsilon \overset{(2)}{\leq} a_n \overset{(1)}{\leq} b_n \leq m+\varepsilon, \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

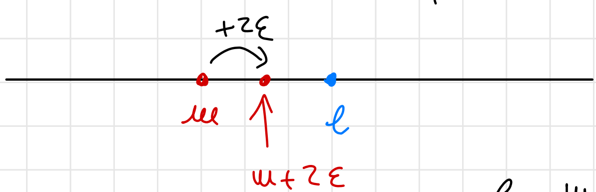
Segue che

$$\ell-\varepsilon \leq m+\varepsilon, \qquad \forall \varepsilon>0.$$

$$\Rightarrow \quad \ell \leq m+2\varepsilon, \qquad \forall \varepsilon>0$$

$\Rightarrow \quad \ell \leq m$. Perché?

se P.A $\ell > m$, allora



se prendiamo $2\varepsilon = \dfrac{\ell-m}{2} \rightsquigarrow \varepsilon = \dfrac{\ell-m}{4}$,

allora

$$m+2\varepsilon = m+\frac{\ell-m}{2} = \frac{m}{2}+\frac{\ell}{2} \overset{\ell>m}{<} \frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2} = \ell$$

CONTRADDICE il fatto che $m+2\varepsilon \geq \ell \quad \forall \varepsilon>0$.

(ii) e (iii) PER CASA.

OSS: $\left[\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \\ \lim_{n\to+\infty} b_n = m \in \mathbb{R} \end{array}\right.$ ⊕ $\left. a_n \leq b_n \text{ def} \right]$

$$\Downarrow$$

$$\ell \leq m$$

Ma se avessimo $a_n < b_n$ definitivamente, potremmo concludere che $\ell < m$? NO, cioè possiamo trovare successioni $\{a_n\}_{n\in S}$, $\{b_n\}_{n\in S'}$, con $a_n < b_n$ definitivamente, $a_n \to \ell$, $b_n \to m$ e $\ell = m$. ad esempio:

$a_n = \frac{n-1}{n}$, $b_n = \frac{n+1}{n}$, allora

$a_n < b_n$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

COROLLARIO: Sia $\{a_n\}_{n\in S}$, e sia $a_n \geq 0$ definitivamente. Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, si ha $\ell \geq 0$.

dim

Basta applicare il teo precedente, punto (i).

OSS: ogni successione costante (definitivamente costante) ha limite e questo limite è proprio la costante che la definisce, cioè:

$a_n = c \in \mathbb{R}$ $\forall n \in S$, allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = c.$$

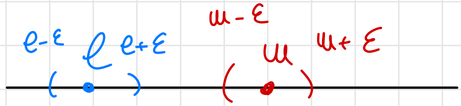
TEOREMA DEL CONFRONTO (II)

Siano $\{a_n\}_{n \in S}$, $\{b_n\}_{n \in S'}$, e supp che

$\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$, $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = m$.

- Se $\ell < m$, allora $a_n < b_n$ DEFINITIVAMENTE
- Se $\ell < m$, ed $\ell, m \in \mathbb{R}$, allora $b_n - a_n > \dfrac{m - \ell}{2}$ DEFINITIVAMENTE.

dim



Consideriamo il caso in cui $\ell, m \in \mathbb{R}$.

Sia $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \dfrac{m-\ell}{4}$, esistono $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ tali per cui

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_a \qquad (a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon))$$

$$|b_n - m| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_b \qquad (b_n \in (m-\varepsilon, m+\varepsilon))$$

Sia $\bar{n} = \max\{n_a, n_b\}$, $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$b_n \in (m-\varepsilon, m+\varepsilon)$, $a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$, cioè

$$a_n < \ell+\varepsilon < m-\varepsilon < b_n, \quad \forall n \geq \bar{n}$$

DA DIM

$$\ell+\varepsilon = \ell + \frac{m-\ell}{4} = \frac{1}{4}m + \frac{3}{4}\ell$$

$$m-\varepsilon = m - \frac{m-\ell}{4} = \frac{3}{4}m + \frac{1}{4}\ell$$

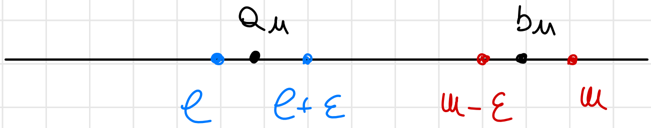
$\overset{?}{\Rightarrow} \ell+\varepsilon < m-\varepsilon$

$$(m-\varepsilon) - (\ell+\varepsilon) = \frac{3}{4}m + \frac{1}{4}\ell - \frac{1}{4}m - \frac{3}{4}\ell$$

$$= \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\ell = \frac{1}{2}(m-\ell) > 0.$$

Inoltre questo ci dice che

$$b_n - a_n > \frac{1}{2}(m-\ell), \text{ infatti}$$



$$b_n - a_n \underset{\substack{\uparrow \\ b_n > m-\varepsilon}}{>} (m-\varepsilon) - a_n \underset{\substack{\uparrow \\ a_n < \ell+\varepsilon}}{>} (m-\varepsilon) - (\ell+\varepsilon) = \frac{1}{2}(m-\ell).$$

Questo vale $\forall n \geq \bar{n}$, cioè $b_n - a_n > \frac{1}{2}(m-\ell)$.

DEFINITIVAMENTE

Gli altri casi si dimostrano in modo simile

($\ell = -\infty$, $m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $m = +\infty$).

$\blacksquare$

OSS: Se $\ell \leq m$, possiamo ancora dire che

$a_n \leq b_n$ DEFINITIVAMENTE? NO, infatti

se prendiamo:

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n}$, allora

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 = \ell$, $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0 = m$ ma non possiamo

concludere che $a_n \leq b_n$.

TEOREMA (DEI DUE CARABINIERI)

Siano $\{a_n\}_{n\in S}$, $\{b_n\}_{n\in S'}$ e $\{c_n\}_{n\in S''}$, e supponiamo che:

(i) $a_n \le b_n \le c_n$ DEFINITIVAMENTE

(ii) $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, $\exists \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$.

Allora $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.