16/05/2022

LEZIONE 29

Riepilogo: Lemma di Fermat e Teorema di Rolle.

TEOREMA DI LAGRANGE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ con:

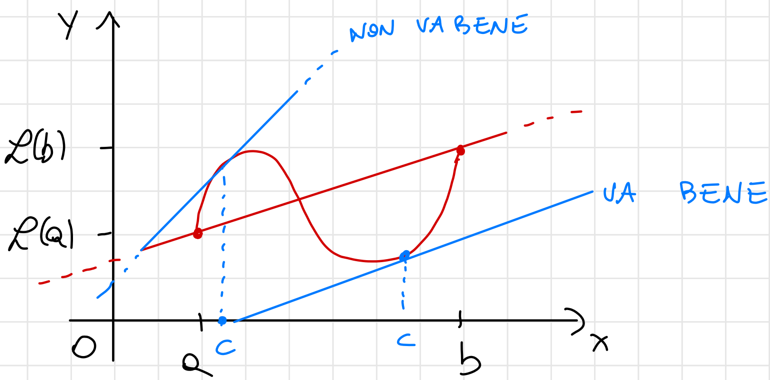
(i) f è continua in $[a,b]$;

(ii) f è derivabile in (a,b).

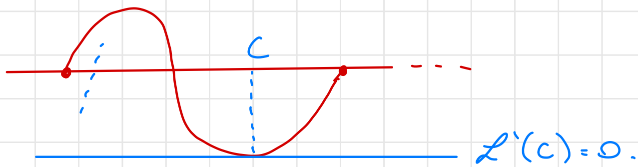
Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale per cui

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

OSS: graficamente si ha



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Poiché $f'(c)$ è il coefficiente angolare della retta tg al grafico di f nel punto $(c, f(c))$, il teorema ci dice che esiste un punto $c \in (a,b)$ tale per cui la retta tg al grafico di f in $(c, f(c))$ è PARALLELA alla retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



dim

Poniamo

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad x \in [a,b].$$

Verifichiamo che g soddisfa le hp di Rolle:

(i) g è continua in $[a,b]$;

(ii) g è derivabile in (a,b);

(iii) $g(a) = g(b)$: infatti

$g(a) = 0, \quad g(b) = 0.$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) : g'(c) = 0.$ Questo vuol dire che, poiché

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad \forall x \in (a,b),$$

in c abbiamo

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

La tesi segue portando la frazione a sinistra $\blacksquare$

COROLLARIO DI LAGRANGE - I

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b).

(i) Se $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, allora f è STRETTAMENTE CRESCENTE in (a,b).

(ii) Se $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$ allora f è STRETTAMENTE DECRESCENTE in (a,b).

(iii) Se $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ allora f è COSTANTE in (a,b).

OSS: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f'(x) < 0$ $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

NO!!

$\Rightarrow f$ è $\overset{\text{STR}}{\vee}$ DECRESCENTE in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Quello che si ha è che:

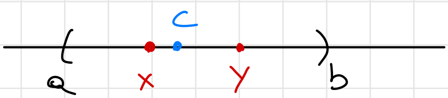
f è STR DECRESCENTE in $(-\infty, 0)$ e

STR DECRESCENTE in $(0, +\infty)$.

Infatti, se $x < 0$ e $y > 0$, abbiamo

$x < y$ e $f(x) < f(y)$.

dim



(i) Sia $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, vogliamo dire che

f è str crescente, cioè

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad \forall x, y \in (a,b).$$

Applichiamo Lagrange a f in $[x,y]$, infatti:

f è cont in $[x,y]$ e der in (x,y). Allora

$$\exists c \in (x,y): \frac{f(y) - f(x)}{\underbrace{y - x}_{>0}} = f'(c) > 0$$

$\Rightarrow f(y) - f(x) > 0$, cioè $f(y) > f(x)$.

(ii) O si dimostra come (i), oppure si ragiona

come segue: $g(x) = -f(x)$ $\forall x \in (a,b)$, poiché

$f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$ si ha $g'(x) = -f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$.

$\Rightarrow$ da (i) sappiamo che g è str crescente in (a,b), cioè $x<y \Rightarrow g(x)<g(y) \iff f(x)>f(y)$.

$$\underbrace{g(x)}_{-f(x)} < \underbrace{g(y)}_{-f(y)}$$

(iii) Supponiamo $f'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b)$, e siano $x,y\in(a,b)$, $x<y$. Applicando Lagrange a $f:[x,y]\to\mathbb{R}$ si ha che $\exists\, c\in(x,y)$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)=0, \quad \text{cioè } f(y)-f(x)=0,$$

da cui segue $f(x)=f(y)$. Da questo possiamo dedurre che f è costante in (a,b). $\blacksquare$

esempio: $f(x)=e^x+2x$, $x\in\mathbb{R}$. Si ha $f'(x)=e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$, imponendo $f'(x)>0$ troviamo gli intervalli in cui f è str crescente.

$$e^x+2>0 \qquad e^x>-2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

COROLLARIO DI LAGRANGE - II

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in (a,b)$, e sia f continua in (a,b) e derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$.

Se

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

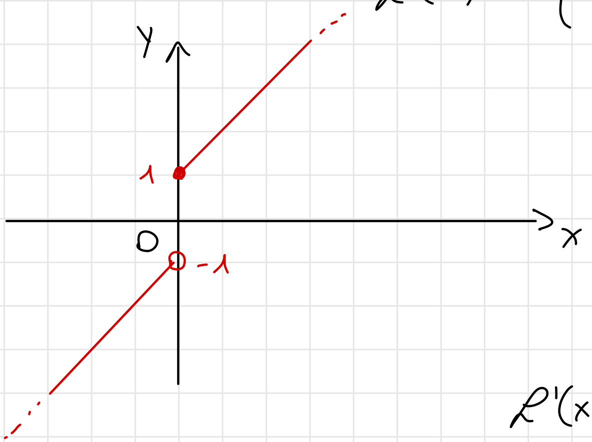
allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \ell$.

OSS: l'ipotesi che f sia continua in x_0 è fondamentale, cioè non basta che

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

per concludere che f è derivabile in x_0. Ad esempio, se consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ x-1, & x < 0. \end{cases}$$



f NON È CONTINUA IN 0, ma è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Esiste

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = l \in \mathbb{R},$$

ma f NON PUÒ ESSERE DERIVABILE in $x_0=0$.

dim

Dimostriamo che esistono $(f')^+(x_0)$, $(f')^-(x_0)$ e che sono uguali ad l.

$x<x_0$: Possiamo applicare Lagrange a $f:[x,x_0]\to\mathbb{R}$, poiché f è continua in $[x,x_0]$ e derivabile in (x,x_0).

$$\exists\, c_x \in (x,x_0) : \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = f'(c_x)$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c_x).$$

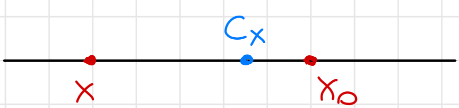
Sappiamo che:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f'(x)-l|<\varepsilon.$$

Quindi

$$0<x_0-c_x<\delta$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : 0<x_0-x<\delta \Rightarrow |f'(c_x)-l|<\varepsilon$$



Sostituendo a $f'(c_x)$ il valore

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

otteniamo

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \quad 0<x_0-x<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\ell\right|<\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell.$$

$x>x_0$: applichiamo Lagrange a $f:[x_0,x]\to\mathbb{R}$,

esiste $d_x\in(x_0,x)$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(d_x)$

Sappiamo che

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \quad 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f'(x)-\ell|<\varepsilon$$

Quindi

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \quad 0<x-x_0<\delta \; (\Rightarrow 0<d_x-x_0<\delta$$

$$\Rightarrow |f'(d_x)-\ell|<\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\ell\right|<\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell.$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in x_0 e $f'(x_0)=\ell$.

OSS: Sia $f(x) = |x|$, poiché

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

non esiste $\lim_{x \to 0} f'(x) \iff$ f non è derivabile in 0.

esempio: Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha \sin(x), & x \geq 0, \\ x + x\cos(x), & x < 0, \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di α tali per cui f è derivabile in $\mathbb{R}$.

Bisogna studiare sia la CONTINUITÀ in 0 che la DERIVABILITÀ.

Osserviamo che, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, f è continua e derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Bisogna lavorare in $x_0 = 0$.

CONTINUITÀ:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + x\cos(x)) = 0 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^3 + \alpha \sin(x)) = 0 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

f è CONTINUA in $x_0 = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

DERIVABILITÀ: Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + \alpha\cos(x), & x > 0, \\ 1 + \cos(x) - x\sin(x), & x < 0. \end{cases}$$

① f è continua in $(-\infty, +\infty)$

② f è derivabile in $(-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$

③ ? $\exists \lim_{x \to 0} f'(x)$?

- $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 + \cos(x) - x\sin(x)) = 2$
- $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x^2 + \alpha\cos(x)) = \alpha$

Allora

$$\exists \lim_{x \to 0} f'(x) = 2 \iff \alpha = 2$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in 0 e $f'(0) = 2$.

DOMANDA: Che condizioni dobbiamo avere su f' per avere punti di max/min locale interno?

DEF: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, sia x_0 pto int di A, diciamo che x_0 è un PUNTO STAZIONARIO per f se $f'(x_0)=0$.

TEOREMA

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, f continua in (a,b), e sia $x_0 \in (a,b)$ punto stazionario per f. Supponiamo inoltre che $\exists \delta > 0$ tale per cui f è derivabile in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

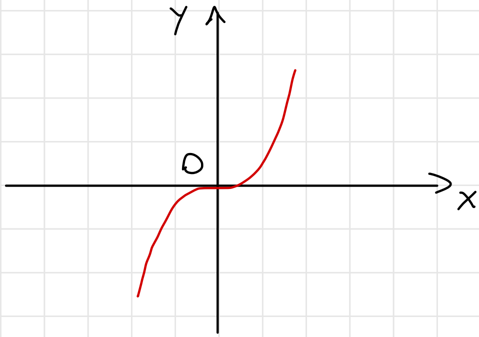
(i) Se $f'(x)>0$ in $(x_0-\delta, x_0)$,
$f'(x)<0$ in $(x_0, x_0+\delta)$,
allora x_0 è un punto di massimo locale interno.

(ii) Se $f'(x)<0$ in $(x_0-\delta, x_0)$,
$f'(x)>0$ in $(x_0, x_0+\delta)$,
allora x_0 è un punto di minimo locale interno.

(iii) Se $f'(x)>0$ in $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$,
oppure $f'(x)<0$ in $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$,
allora x_0 non è né pto di max né di min locale interno.

OSS: Se $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ è l'unico pto stazionario di f, $f'(x) = 3x^2$, e $f'(x) > 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ 0 non è né pto di max né di min per f, infatti graficamente si ha

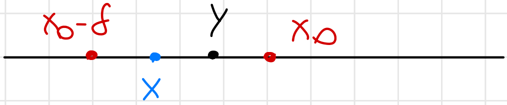


dim

(i) $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x) > 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$

$\Rightarrow$ Sappiamo che f è str crescente in $(x_0 - \delta, x_0)$ e decrescente in $(x_0, x_0 + \delta)$, quindi:

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, se $y \in (x, x_0)$ allora $f(x) < f(y)$



Poiché f è continua, allora

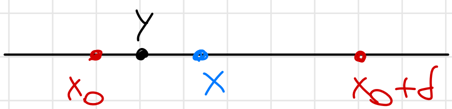
$$\lim_{y\to x_0^-} f(y) = f(x_0),$$

e dunque $\quad f(x) < f(y) \quad \forall y \in (x, x_0)$

$$\Rightarrow f(x) \le \lim_{y\to x_0^-} f(y) = f(x_0).$$

Allora $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ si ha $f(x) \le f(x_0)$.

$\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$, poiché f è decrescente in $(x_0, x_0+\delta)$, per ogni $y \in (x_0, x)$ si ha $f(y) > f(x)$.



f contin. $x_0 \Rightarrow \lim_{y\to x_0^+} f(y) = f(x_0)$

$$f(x) < f(y) \quad \forall y \in (x_0, x) \Rightarrow f(x) \le \lim_{y\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Quindi $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ si ha $f(x) \le f(x_0)$

$\Rightarrow \quad f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\Rightarrow \quad x_0$ è pto di max locale interno.

(ii): PER CASA

ESERCIZI

1) Data la funzione $f(x) = e^{3x} - 5x$, determinare se è invertibile in un intorno di $x_0 = 0$ e, in caso affermativo, determinare l'equazione della retta tg a f^{-1} nel punto $f(0)$.

Poiché $f'(x) = 3e^{3x} - 5$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 3-5 = -2$.

Poiché f' è continua, esiste un intorno di 0 tale per cui $f'(x) < 0$ in questo intorno.

$\Rightarrow$ f è strettamente decrescente in un intorno 0, e dunque invertibile.

L'eq della retta tg al grafico di f^{-1} in $f(0)$ è

$$y - f^{-1}(\underbrace{f(0)}_{y_0}) = (f^{-1})'(\underbrace{f(0)}_{y_0})\,(x - \underbrace{f(0)}_{y_0}).$$

$f(0) = 1$, $f^{-1}(f(0)) = 0$, dobbiamo calcolare

$$(f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2},$$

quindi l'equazione cercata è $y - 0 = -\frac{1}{2}(x-1)$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

2) Data $f(x) = \begin{cases} \alpha \log_{10}(x^2+1) + 2x, & x \geq 3, \\ \beta e^{3x-x^2}, & x < 3, \end{cases}$

determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui f risulti derivabile in $\mathbb{R}$.

Oss che la funzione f è derivabile in $(-\infty, 3)$ e $(3, +\infty)$.

CONTINUITÀ IN $x_0 = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (\beta e^{3x-x^2}) = \beta.$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (\alpha \log_{10}(x^2+1) + 2x) = \alpha + 6$$

$$f(3) = \alpha + 6$$

f è CONTINUA in 3 se e solo se $\beta = \alpha + 6$.

DERIVABILITÀ in $x_0 = 3$:

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \log_{10}(e) \cdot \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x + 2, & x > 3, \\ \beta e^{3x-x^2}(3-2x), & x < 3. \end{cases}$$

Vogliamo dire che $\exists \lim_{x \to 3} f'(x) \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(\beta e^{3x-x^2}(3-2x) \right) = \beta \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$= -3\beta$$

$$\lim_{x \to 3^+} f'(x) = \lim_{x \to 3^+} \left(\frac{\alpha \log_{10}(e) 2x}{x^2+1} + 2 \right) = \frac{\alpha \log_{10}(e) 6}{10} + 2$$

Il limite esiste se e solo se limite dx e sx coincidono, cioè $-3\beta = \frac{3}{5} \alpha \log_{10}(e) + 2$.

La funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$ se α e β soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} \beta = \alpha + 6 \\ -3\beta = \frac{3}{5} \alpha \log_{10}(e) + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \alpha + 6 \\ -3\alpha - 18 = \frac{3}{5} \log_{10}(e) \alpha + 2 \end{cases}$$

$$-3\alpha - \frac{3}{5} \log_{10}(e) \alpha = 20$$

$$\alpha = \frac{20}{-3 - \frac{3}{5}\log_{10}(e)}, \quad \beta = 6 + \frac{20}{-3 - \frac{3}{5}\log_{10}(e)}$$

3) Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

è costante in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, e determinarne il valore.

Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow f$ è costante in $(-\infty, 0)$ e in questo tratto $f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

$x = 1$ $\quad \arctan(1) =$ angolo θ tale per cui $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $\tan(\theta) = 1$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\arctan(1) = \pi/4$

$\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \pi/4$

$x = -1$

$\Rightarrow \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

ℓ è costante in $(0,+\infty)$ e

$$\ell(x) = \ell(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in (0,+\infty).$$