26/04/2022

LEZIONE 21

Riepilogo: definizione di limite di funzioni, unicità del limite, teorema di collegamento, teorema del confronto I e II, teorema dei due carabinieri.

DEF: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A. Diciamo che f È INFINITESIMA IN x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

DEF: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$ tale per cui $\exists \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$. Si dice che f È LIMITATA IN UN INTORNO DI x_0 se $\exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ tale per cui $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in U \cap A$, per qualche $M > 0$.

TEOREMA

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, $x_0 \in A$ ed $\exists\, \varepsilon > 0$ tale per cui $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$. Se:

- f È INFINITESIMA per $x \to x_0$;
- g È LIMITATA in un intorno di x_0;

allora $(f \cdot g)$ è infinitesima per $x \to x_0$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0.$$

TEOREMA (ALGEBRA DEI LIMITI PER FUNZIONI)

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, e sia x_0 p.d.a. per A.

Supponiamo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m$.

i) Se $\ell + m$ non è una F.I., allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell + m.$$

ii) Se $\ell \cdot m$ non è una F.I., allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell \cdot m.$$

iii) Se $\frac{\ell}{m}$ non è una F.I., ed $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ tale per cui

$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$, allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell}{m}.$$

LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO DI FUNZIONI

Ricordiamo che abbiamo già parlato di intorni destri e sinistri di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$:

$U \in \mathcal{I}^{+}_{x_0}$ INTORNI DESTRI se $\exists \varepsilon > 0 : [x_0, x_0+\varepsilon) \subseteq U$

$U \in \mathcal{I}^{-}_{x_0}$ INTORNI SINISTRI se $\exists \varepsilon > 0 : (x_0-\varepsilon, x_0] \subseteq U$

UTILITÀ: $[a,b] \notin \mathcal{I}_a$, ma $[a,b] \in \mathcal{I}^{+}_a$.

DEF: Sia $f : A \to \mathbb{R}$, e sia x_0 p.d.a. per A.

Diciamo che $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se:

$$\forall U \in \mathcal{I}_\ell \quad \exists V \in \mathcal{I}^{+}_{x_0} : f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$$

In questo caso diciamo che

"ℓ È LIMITE DESTRO DI f PER $x \to x_0$",

"f AMMETTE LIMITE DESTRO PER $x \to x_0$ UGUALE A ℓ"

DOMANDA: Se $V_1 \in \mathcal{I}_{x_0}$, $V_2 \in \mathcal{I}^+_{x_0}$, quale tra $A \cap V_1 \setminus \{x_0\}$ e $A \cap V_2 \setminus \{x_0\}$ è "PIÙ GRANDE"?

è "più grande" il pezzo con V_1 intorno di x_0.

Quindi quale richiesta è più forte tra:

a) $\exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$

b) $\exists V \in \mathcal{I}^+_{x_0} : f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$

?

La condizione b) è PIÙ DEBOLE, cioè se la condizione a) è VERIFICATA allora anche la b) lo è, e quindi

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ma non è vero il viceversa.

DEF: Sia $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, diciamo che $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ se

$$\forall U \in \mathcal{I}_\ell \quad \exists V \in \mathcal{I}^-_{x_0} : f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U.$$

In questo caso diciamo che

"f AMMETTE LIMITE SINISTRO PER $x \to x_0$ UGUALE AD ℓ".

Ragionando come prima si ha che

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, ma

non vale il viceversa

OSS: Limite destro e sinistro si considerano solo per

$x_0 \in \mathbb{R}$.

DEF: $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ se $\forall U \in \mathcal{U}_\ell \ \exists \delta > 0$:

$0 < x - x_0 < \delta$

$\Rightarrow f(x) \in U$

$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ se $\forall U \in \mathcal{U}_\ell \ \exists \delta > 0$:

$0 < x_0 - x < \delta$

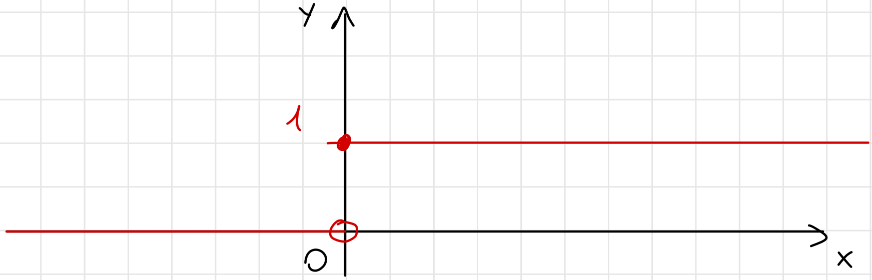
$\Rightarrow f(x) \in U$

esempio: sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def da:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Consideriamo $x_0 = 0$ e calcoliamo $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e

$\lim_{x \to 0^-} f(x)$.



Partiamo dal limite destro: mi aspetto che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Proviamo a dim: dobbiamo verificare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

Se fissiamo $\varepsilon > 0$, $\forall x > 0$ abbiamo che

$$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$$

Possiamo scegliere un qualunque $\delta > 0$ e otteniamo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Ragionando in maniera analoga si ottiene che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

OSS: limite destro e sinistro possono esistere diversi.

esempio: $f(x) = \ln(x)$, $x > 0$, cioè $x \in (0, +\infty)$.

Non possiamo considerare $\lim_{x \to 0} f(x)$ poiché

in questo caso avremmo $\delta > 0$ e considereremmo

$0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow 0 < |x| < \delta$, cioè andremmo

a considerare $x < 0$.

Possiamo però parlare di $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ perché

in questo caso stiamo considerando i punti $x > 0$

su cui la funzione è definita.

PROPOSIZIONE: Se $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$, questo è

unico. Se $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = m$, questo è unico.

TEOREMA

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A.

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ e

$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

OSS: Il teorema ci dice che l'esistenza del limite è equivalente all'esistenza e all'uguaglianza di limite dx e limite sx.

Spesso si usa la contronominale di questo teorema per dimostrare che $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$: basta dire che

o $\nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, o $\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, oppure

$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ma sono diversi.

Dall'esempio precedente, la funzione $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$

non ammette limite per $x \to 0$.

dim

$\Rightarrow$) Ricordiamo che se $V \in \mathcal{I}_{x_0}$, allora $V \in \mathcal{I}_{x_0}^{+} \cap \mathcal{I}_{x_0}^{-}$.

Sappiamo che:

$$\forall U \in \mathcal{I}_{\ell} \quad \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$$

$$\Downarrow$$

$$\exists V \in \mathcal{I}_{x_0}^{+} : f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$$

$$\exists V \in \mathcal{I}_{x_0}^{-} : f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$$

$\Leftarrow$) Sappiamo che:

$$\forall U \in \mathcal{I}_{\ell} \quad \begin{array}{l} \exists V^{+} \in \mathcal{I}_{x_0}^{+} : f(A \cap V^{+} \setminus \{x_0\}) \subseteq U \\ \exists V^{-} \in \mathcal{I}_{x_0}^{-} : f(A \cap V^{-} \setminus \{x_0\}) \subseteq U \end{array}$$

Poniamo $V = V^{+} \cup V^{-}$, dimostriamo che $V \in \mathcal{I}_{x_0}$.

Sappiamo che: $\exists \varepsilon^{+} > 0 : \quad [x_0, x_0 + \varepsilon^{+}) \subseteq V^{+}$

$\exists \varepsilon^{-} > 0 : \quad (x_0 - \varepsilon^{-}, x_0] \subseteq V^{-}$

Fissiamo $\bar{\varepsilon} := \min\{\varepsilon^{+}, \varepsilon^{-}\}$, si ha

$$(x_0 - \bar{\varepsilon}, x_0 + \bar{\varepsilon}) \subseteq (x_0 - \varepsilon^{-}, x_0] \cup [x_0, x_0 + \varepsilon^{+})$$

$$\subseteq V^{+} \cup V^{-} = V.$$

Abbiamo dim che $V \in \mathcal{I}_{x_0}$, vogliamo che

$$f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$$

Si ha $\left[\text{in generale}, f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)\right.$

$$\begin{aligned} f(A \cap V \setminus \{x_0\}) &= f((A \cap V^+ \setminus \{x_0\}) \cup (A \cap V^- \setminus \{x_0\})) \\ &= f(A \cap V^+ \setminus \{x_0\}) \cup f(A \cap V^- \setminus \{x_0\}) \\ &\subseteq U. \end{aligned}$$

Quindi, abbiamo che

$$\forall U \in \mathcal{I}_e \quad \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U,$$

cioè $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = e$. ∎

CONTINUITÀ E FUNZIONI CONTINUE

Che relazione c'è tra $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ed $f(x_0)$?

Nel primo caso studiamo il comportamento di $f(x)$ quando x tende a x_0, nel secondo valutiamo la funzione f nel punto x_0.

DEF: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, e sia x_0 p.d.a di A e $x_0 \in A$.

Diciamo che "f È CONTINUA IN x_0" se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Diciamo che f è continua in $B \subseteq A$ se è continua in x, per ogni $x \in B$.

OSS: La condizione della continuità si può scrivere in termini di limite destro e sinistro: f è continua in x_0 se e solo se

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)}_{\exists \lim_{x \to x_0} f(x)} = f(x_0).$$

OSS: tutti i limiti visti finora assumono valori reali, perché $f(x_0) \in \mathbb{R}$.

esempi: Sono funzioni continue:

- le funzioni polinomiali
- le funzioni esponenziali
- le funzioni logaritmiche
- le funzioni trigonometriche
- la somma, il prodotto, il rapporto e la composizione di funzioni continue.