14/3/2022

LEZIONE 9

Riepilogo: esempi di applicazione del principio di induzione.

BINOMIO DI NEWTON: dati $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, vogliamo trovare una formula per scrivere $(a+b)^n$.

$n=0$ $\quad (a+b)^0 = 1$

$n=1$ $\quad (a+b)^1 = a+b$

$n=2$ $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Noi vogliamo scrivere:

$$(a+b)^n = \dots \text{ qualcosa che dipende da } a, b, n.$$

Useremo: le sommatorie, i fattoriali e i coefficienti binomiali.

DEF: per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo $n!$ (si legge "n fattoriale") come:

$$n! := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ n \cdot (n-1)!, & n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

esempio: $0! = 1$, $1! = 1 \cdot 0! = 1$, $2! = 2 \cdot 1! = 2$,

$3! = 3 \cdot 2! = 6$, $4! = 4 \cdot 3! = 24$, ...

Si può dimostrare per induzione che $n!$ è il prodotto dei numeri naturali da 1 a n:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

$4! = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

DEF: dati $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, si definisca il

COEFFICIENTE BINOMIALE $\binom{n}{k}$ come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

proprietà: $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{\underset{1}{\underset{\parallel}{0!}}\,\underbrace{(n-0)!}_{n!}} = 1$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,\underbrace{(n-n)!}_{0!=1}} = 1$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,\underbrace{(n-(n-1))!}_{1!=1}} = \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n.$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

- $\forall K \leq n$ si ha $\displaystyle\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$

- $\forall n, K \in \mathbb{N}$, $n \geq K$, si ha

$$\binom{n}{K-1} + \binom{n}{K} = \binom{n+1}{K}$$

Infatti

$$\binom{n}{K-1} + \binom{n}{K} = \frac{n!}{(K-1)!\,(n-K+1)!} + \frac{n!}{K!\,(n-K)!}$$

ricordiamo che:

- $K! = K(K-1)!$, quindi $\displaystyle\frac{1}{K!} + \frac{1}{(K-1)!} = \frac{1+K}{K!}$

- $(n-K+1)! = (n-K+1)\cdot(n-K)!$.

Quindi

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\cdot k + n!\cdot(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(\cancel{k} + n - \cancel{k} + 1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{\overbrace{(n+1)\,n!}^{(n+1)!}}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

TEOREMA (BINOMIO DI NEWTON)

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, dato $n \in \mathbb{N}$, allora

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0} a^0\, b^{n-0}}_{k=0} + \underbrace{\binom{n}{1} a^1\, b^{n-1}}_{k=1} + \underbrace{\binom{n}{2} a^2\, b^{n-2}}_{k=2} \dots + \underbrace{\binom{n}{n} a^n\, b^{n-n}}_{k=n}$$

Stiamo sommando sull'insieme $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$= b^n + n\cdot a\cdot b^{n-1} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\, a^2\, b^{n-2} + \dots + a^n$$

$n=2$ $$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k}$$

$$= \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0$$

$$= b^2 + 2ab + a^2$$

$n=3$ $$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^0 b^3 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{2} a^2 b^1 + \binom{3}{3} a^3 b^0$$

$$= b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3$$

ANCORA SULLE SOMMATORIE

- l'indice della sommatoria è MUTO:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad m \geq n.$$

- si può cambiare gli estremi nella sommatoria:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+t}^{n+t} a_{k-t}, \qquad \forall n, m, t \in \mathbb{N}, \; n \geq m.$$

infatti: $k=m \Rightarrow a_k = a_m$

$k = m+t \Rightarrow a_{k-t} = a_{m+t-t} = a_m$

• Le sommatorie sono "lineari":

$$\sum_{k=m}^{n} c(a_k + b_k) = c \sum_{k=m}^{n} a_k + c \cdot \sum_{k=m}^{n} b_k,$$

con $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, $c \in \mathbb{R}$.

dim del teorema

Vogliamo usare l'induzione, quindi PASSO BASE + PASSO INDUTTIVO

1: PASSO BASE: dimostrare il risultato per $n = 0$.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

$k=0$

2: PASSO INDUTTIVO: dimostrare che, se la proprietà è vera per n, allora è vera per $n+1$, cioè

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

$\boxed{\text{IPOTESI INDUTTIVA}}$

$$\Downarrow$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Si ha

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^{n}(a+b)$$

HP IND

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)(a+b)$$

$$= a \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} b^{n-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}$$

$$+ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{(k-1)+1} b^{n-(k-1)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right]$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k \, b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k \, b^{n+1-k}$$

$$\overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \, b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k \, b^{n+1-k} + \underbrace{\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\binom{n+1}{0}} \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{a^0} \, b^{n+1}}_{k=0}$$

$$+ \underbrace{\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\binom{n+1}{n+1}} a^{n+1} \, b^{\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\cancel{n+1} - (\cancel{n+1})}}}_{k=n+1}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k \, b^{n+1-k} \qquad \checkmark$$

$\Rightarrow$ per induzione:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\blacksquare$

OSS: la presenza di "k" a destra non dà problemi perché è MUTO (INDICE della SOMMATORIA)

CARDINALITÀ

CARDINALITÀ : "numero di elementi di un insieme".

Questo concetto è ben definito quando parliamo di insiemi finiti, ma vedremo che non andrà bene nel caso di insiemi infiniti.

Pb: Come dare un concetto di cardinalità, cioè di "numero di elementi", nel caso di insiemi infiniti.

Cosa vuol dire che in un insieme ci sono 5 elementi? Ad esempio:

$A = \{a, b, c, d, e\}$ ha 5 elementi, vuol dire che associamo i numeri 1, 2, 3, 4, 5 agli elementi di A. L'oggetto matematico che crea relazioni tra 2 insiemi è la funzione, quindi "CONTARE" vuol dire trovare il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ e la funzione "giusta".

DEF: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che A ha n elementi, con $n \in \mathbb{N}$, se esiste una funzione biettiva tra l'insieme $\{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ e l'insieme A.

In questo caso diciamo che la cardinalità di A è uguale a n, e scriviamo $\# A = n$.

OSS: questa funzione non è unica, infatti se consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\},$$ possiamo definire:

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to A, \quad f(n) = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

f è suriettiva e iniettiva:

- suriettiva perché se consideriamo $a \in A$, allora l'elemento $f\left(\frac{1}{a}\right) = a$.
- iniettiva: infatti se $f(n) = f(m)$, allora $\frac{1}{n} = \frac{1}{m}$, cioè $n = m$.

f è biettiva, e quindi $\# A = 4$. Dire che f non è unica vuol dire che possiamo trovare una funzione $g: \{1,2,3,4\} \to A$ biettiva e diversa da f. Ad esempio:

$$g(n) = \frac{1}{5-n}, \quad n = 1,2,3,4.$$

• g è biettiva, ed è diversa da f:

$f(1) = 1$ $\qquad$ $g(1) = \frac{1}{4}$

$f(2) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $g(2) = \frac{1}{3}$

$f(3) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $g(3) = \frac{1}{2}$

$f(4) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $g(4) = 1$

DEF: se $A \subseteq \mathbb{R}$, ed esiste $n \in \mathbb{N}$: $\# A = n$, allora A si dice FINITO.

OSS: l'unico insieme con $\#$ uguale a 0 è l'insieme vuoto.

ESERCIZI:

1. Dimostrare che $f: A \to B$ è invertibile se e solo se è biettiva
2. Dimostrare che se $A \subseteq B$, allora $\inf B \leq \inf A$

suggerimento per 1: la parte "facile" è dimostrare che se f è invertibile allora f è biettiva

suggerimento per 2: guardare la dim dell'altro punto nella proposizione, cioè che $A \subseteq B$ implica $\sup A \leq \sup B$.

dim 1

$f: A \to B$ è invertibile $\Rightarrow$ f è BIETTIVA

- SURIETTIVA: $f(A) = B$, cioè

$\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$.

Sia $b \in B$, e bisogna usare f^{-1} per costruire $a \in A$ tale per $f(a) = b$.

Ricordiamo che $(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in B$, infatti $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x))$, cioè $x \in B$ che

è il dominio di f^{-1} $(f^{-1}: B \to A)$.

Sia $b \in B$, allora $\underbrace{f(f^{-1}(b))}_{(f \circ f^{-1})(b)} = b$, quindi se

consideriamo $f^{-1}(b)$, abbiamo che:

$f^{-1}(b) \in A$ e $f(f^{-1}(b)) = b$,

cioè $a = f^{-1}(b)$

- INIETTIVITÀ: $\forall a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$ allora $a_1 = a_2$.

Sappiamo che: $\forall x \in A \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Siano $a_1, a_2 \in A$ con $f(a_1) = f(a_2)$, allora

$$\underbrace{(f^{-1} \circ f)(a_1)}_{a_1} = f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$$

$$= \underbrace{(f^{-1} \circ f)(a_2)}_{a_2}$$

Per dimostrare che

$f: A \to B$ BIETTIVA $\Rightarrow$ $f: A \to B$ invertibile,

bisogna "costruire" a mano la funzione $f^{-1}: B \to A$, cioè $\forall b \in B$ il valore $f^{-1}(b) = \ldots$

La proprietà di BIETTIVITÀ di f si usa come segue: se $b \in B$, allora la definizione individua un solo elemento.

$x \geq 0$

$\sqrt{x}$ = quel numero il cui quadrato è x NO

$\sqrt{x}$ = quel numero ≥ 0 il cui quadrato è x SÌ