20/05/2022

LEZIONE 31

Riepilogo: funzioni convesse, asintoti.

OSS: Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$, allora la retta

$y = c$ è asintoto a $+\infty$ per f. (la stessa cosa vale a $-\infty$)

Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{c}{+\infty} = 0 \Rightarrow a = 0$$ "coeff angolare del candidato asintoto"

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \underbrace{ax}_{\substack{=0 \text{ poiché} \\ a=0}}) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = c$$

$\Rightarrow$ $y = 0 \cdot x + c = c$ è ASINTOTO a $+\infty$ per f.

dim

Come per Lagrange, costruiamo una ft ausiliaria che soddisfi le hp di Rolle:

$h(x) := (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$, $x \in [a,b]$.

h soddisfa le hp del teorema di Rolle

$\Rightarrow$ $\exists\, c \in (a,b)$ tale per cui $h'(c) = 0$.

Calcolando $h'(x)$, imponendo $h'(c)=0$ e facendo i conti otteniamo $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

$\blacksquare$

DOMANDA: Cosa mi assicura che $g(b)-g(a) \neq 0$?

Supponiamo $g(a)=g(b)$, allora g soddisfa le hp del teorema di Rolle

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) : g'(c)=0$, ma questo non è possibile perché $g'(x)\neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Cioè: l'ipotesi $g'(x)\neq 0$ in (a,b) mi garantisce che entrambi i denominatori siano $\neq 0$.

TEOREMA DI BERNOULLI - DE L'HÔPITAL

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, derivabili in (a,b), e supponiamo che:

(i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$.

(ii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

(iii) $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora esiste $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

OSS: Dal punto (i), il limite $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ è una F.I.

Nel punto (iii), $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ È il RAPPORTO delle DERIVATE, NON È LA DERIVATA DEL RAPPORTO.

esempio: calcolare $\lim_{x \to 0^+} x e^{1/x} = 0 \cdot (+\infty)$ F.I.

$$\lim_{x \to 0^+} x e^{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^{-1/x}} = \frac{0}{0}$$

La derivata del numeratore è 1, la derivata del denominatore è $e^{-1/x} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Allora $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left[\frac{0}{0}\right]} \to \text{F. I.}$$

Non possiamo applicare De L'Hopital, perché
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{NON ESISTE}$$

esempio: Calcoliamo $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0 \cdot (-\infty)$
F. I.

Trasformiamo il prodotto in un rapporto:
$$x \ln(x) = \frac{\ln(x) = f(x)}{\underset{g(x)}{1/x}} = \frac{x = h(x)}{\frac{1}{\ln(x)}} \; t(x)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0^+} \overbrace{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}^{= -x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h'(x)}{t'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-(\ln(x))^{-2}\cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -x(\ln(x))^2 = -0\cdot(-\infty)^2 \quad \text{F.I.}$$

dim

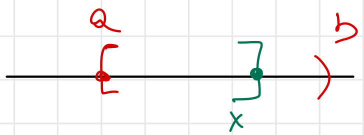
Supp che $a \in \mathbb{R}$.

Poiché $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, le funzioni

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x), & x\in(a,b), \\ 0, & x=a, \end{cases} \qquad \tilde g(x) = \begin{cases} g(x), & x\in(a,b), \\ 0, & x=a, \end{cases}$$

sono continue in $[a,b)$, e derivabili in (a,b).

Sia $x\in(a,b)$, allora $\tilde f$ e $\tilde g$ soddisfano le hp del teorema di Cauchy in $[a,x]$.



$\Rightarrow$ $\exists\, c_x \in (a,x)$ tale per cui

$$\frac{\tilde f(x)-\tilde f(a)}{\tilde g(x)-\tilde g(a)} = \frac{\tilde f'(c_x)}{\tilde g'(c_x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Osserviamo che: $\forall x \in (a,b)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Si ha

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\blacksquare$

OSS: Il teorema di De-L'Hôpital è valido anche se si prendono i limiti per $x \to b^-$, e

$$\lim_{\substack{x\to a^+ \\ (\text{o } x\to b^-)}} |f(x)| = \lim_{\substack{x\to a^+ \\ (\text{o } x\to b^-)}} |g(x)| = +\infty.$$

esempio : Vogliamo calcolare $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$

F.I.

Derivata di e^x

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

derivata di x

$\Rightarrow$ De - L'Hôpital ci dice

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty .$$

OSS: il teorema si può reiterare: infatti

se vogliamo calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{4x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{12x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{24x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{24} = +\infty$$

POLINOMIO DI TAYLOR

Data $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, abbiamo visto che a volte si può scrivere

$$f(x)=P_n(x-x_0)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,$$

dove $P_n=P_{f,x_0,n}$ è il polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n. Ad esempio, se $f(x)=\ln(x+1)$ e $x_0=0$ si ha

$$f(x)=\underbrace{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}}_{P_{f,0,4}}+o(x^4),\quad x\to 0$$

Avevamo dimostrato anche che, se esiste, $P_{f,x_0,n}$ è unico. Ma come si costruisce?

DEF: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, sia $x_0\in(a,b)$, e supponiamo che f sia derivabile n volte in x_0, cioè che esistono $f'(x_0), f''(x_0),\dots,f^{(n)}(x_0)$. Allora definiamo il polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n come:

$$P_{f,x_0,n}(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\rightsquigarrow f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$

esempio: $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$$

$$f^{IV}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4} \qquad f^{IV}(0) = -6$$

Quindi

$$P_{f,0,4}(x) = 0 + \overset{1}{\cancel{\frac{1}{1}}} \cdot x + \overset{-\frac{1}{2}}{\cancel{\frac{-1}{2}}} \cdot x^2 + \overset{\frac{1}{3}}{\cancel{\frac{2}{6}}}\, x^3 + \overset{-\frac{1}{4}}{\cancel{\frac{-6}{24}}}\, x^4$$

OSS: così è fatto il polinomio di Taylor di f'?

f der n volte in x_0 $\Rightarrow$ f' der $(n-1)$-volte in x_0,

che relazione c'è tra $P_{f,x_0,n}$ e $P_{f',x_0,n-1}$?

$n=3$:

$$P_{f,x_0,3}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3,$$

$$P_{f',x_0,2}(x)=f'(x_0)+(f')'(x_0)(x-x_0)+\frac{(f')''(x_0)}{2}(x-x_0)^2.$$

$$(P_{f,x_0,3})'(x)=0+f'(x_0)+2\cdot\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)+3\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^2$$

$$=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\frac{f'''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

$$=P_{f',x_0,2}(x).$$

LEMMA: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, e sia f derivabile $n+1$ volte in x_0, con $n\in\mathbb{N}$. Allora

$$(P_{f,x_0,n+1})'=P_{f',x_0,n}$$

dim PER INDUZIONE

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ tale per cui:

(i) f è derivabile $n-1$ volte in (a,b).

(ii) f è derivabile n volte in x_0.

Allora

$$f(x)=P_{f,x_0,n}(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0.$$

dim

Per induzione su $n\in\mathbb{N}_0=\{1,2,3,\dots\}$.

PASSO BASE: $n=1$, si ha

$$P_{f,x_0,1}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

e sappiamo che

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{P_{f,x_0,1}(x)}+o(x-x_0),\quad x\to x_0$$

PASSO INDUTTIVO: supponiamo che la tesi sia vera per $n\in\mathbb{N}_0$, cioè ogni funzione g derivabile $n-1$ volte in (a,b) e n volte in x_0 soddisfa

$$g(x)=P_{g,x_0,n}(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0.$$

Vogliamo dire che:

per ogni funzione f der n volte in (a,b) e derivabile $n+1$ volte in x_0, si ha

$$f(x) = P_{f,x_0,n+1}(x) + o((x-x_0)^{n+1}), \quad x \to x_0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - P_{f,x_0,n+1}(x) = o((x-x_0)^{n+1}), \quad x \to x_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{f,x_0,n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0.$$

Proviamo a usare De-L'Hôpital con

$$\phi(x) = f(x) - P_{f,x_0,n+1}(x) \qquad \text{in } (x_0, b)$$

$$\psi(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

- ϕ e ψ sono derivabili in $\overbrace{(x_0, b)}^{(a,b)}$

- $\lim_{x \to x_0^+} \phi(x) = f(x_0) - \underbrace{P_{f,x_0,n+1}(x_0)}_{f(x_0)} = 0$

  $\lim_{x \to x_0^+} \psi(x) = 0$

- $\psi'(x) = (n+1)(x-x_0)^n \neq 0$ in (x_0, b)

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{\phi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - P_{f', x_0, n}(x)}{(n+1)(x-x_0)^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - P_{f', x_0, n}(x)}{(x-x_0)^n}$$

f' soddisfa l'Hp induttiva, cioè

$$f'(x) = P_{f', x_0, n}(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0$$

$$f'(x) - P_{f', x_0, n}(x) = o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - P_{f', x_0, n}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

D-H

$\Rightarrow$ esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 0$.

Se ripetiamo il ragionamento in (a, x_0), abbiamo che $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 0$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 0$, cioè

$$f(x) = P_{f, x_0, n+1}(x) + o((x-x_0)^{n+1}), \quad x \to x_0$$

$\blacksquare$