29/03/2022

LEZIONE 16

Riepilogo: dim del teo dei due carabinieri, successione limitata e infinitesima, algebra dei limiti, operazioni su $\overline{\mathbb{R}}$.

ALGEBRA DEI LIMITI:

$a_n \to \ell$ per $n \to +\infty$

$b_n \to m$ per $n \to +\infty$

- se $\ell + m$ NON è una F. I. allora

$(a_n + b_n) \to \ell + m$, $n \to +\infty$.

- se $\ell \cdot m$ NON è una F. I, allora

$(a_n \cdot b_n) \to \ell \cdot m$, $n \to +\infty$.

- se $\frac{\ell}{m}$ NON è una F. I., $b_n \neq 0$ DEF, allora

$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell}{m}$, $n \to +\infty$.

dim

(i) Vogliamo dim che $c_n := a_n + b_n$, $n \in S'$, ha limite per $n \to +\infty$, e questo limite vale $\ell + m$.

CASO 1: $\ell, m \in \mathbb{R}$, dobbiamo dim che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq \bar{n} \quad |c_n - (\ell + m)| < \varepsilon$

Fissiamo $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \quad \exists \bar{n}_a \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq \bar{n}_a \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad (\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell)$

$\exists \bar{n}_b \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}_b \quad |b_n - m| < \varepsilon \quad (\lim_{n \to +\infty} b_n = m)$

Prendiamo

$$\bar{n} = \max\{\bar{n}_a, \bar{n}_b\},$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
|c_n - (\ell + m)| &= |(a_n + b_n) - (\ell + m)| \\
&= |(a_n - \ell) + (b_n - m)| \qquad \text{DIS TRIANGOLARE} \\
&\leq |a_n - \ell| + |b_n - m| \qquad n \geq \bar{n} = \max\{\bar{n}_a, \bar{n}_b\} \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

Abbiamo la condizione con "2ε" al posto di "ε", ma le due condizioni sono equivalenti.

CASI: $\ell \in \mathbb{R}$, $m = +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$, $m = -\infty$ per CASA

PER esercizio. (ci sono anche i casi $m = +\infty$, $\ell = +\infty$

e $m = -\infty$, $\ell = -\infty$).

il caso $\ell = +\infty$, $m = -\infty$ ($\ell = -\infty$, $m = +\infty$) non è

considerato perché la somma è una F. I.

$a_n \cdot b_n$, $\frac{a_n}{b_n}$: PER CASA.

$\blacksquare$

Cosa sono le FORME INDETERMINATE? Sono operazioni

che si ottengono dopo passaggi al limite e il

cui risultato non è ben definito.

ES: $\frac{+\infty}{+\infty}$, cosa vale?

Consideriamo: $a_n = n+1$, $b_n = n^2+1$, $n \in \mathbb{N}$.

Abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{+\infty+1}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F. I.}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{(+\infty)^2+1}{+\infty+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F. I.}$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n^2+1}{n+1} = \frac{n^{\cancel{2}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = n \cdot \left[\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\right]$$

$\frac{1}{n^2} \to 0$

$1+\frac{1}{n^2} \to 1, \; n\to+\infty$

$1+\frac{1}{n} \to 1, \; n\to+\infty$

$\to 1, \; n\to+\infty$

ALG LIMITI

$$= n \cdot \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{ALG LIMITI}} (+\infty)\cdot 1 = +\infty.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{+\infty}{+\infty}$$ F. I., si dimostra che questo limite tende a 0.

OSS: per risolvere limiti del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$ (vale anche col $-\infty$) si raccoglie a numeratore e denominatore il termine che "comanda", cioè quello che "va all'infinito più velocemente", e confrontarli.

CALCOLO DI LIMITI

Sia $q \geq 0$. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 1, & q = 1, \\ 0, & q \in [0,1), \\ +\infty, & q > 1. \end{cases}$$

dim questo risultato usando la dis di Bernoulli.

$q = 1 \Rightarrow q^n = 1^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} q^n = 1 \quad$ se $\quad q = 1.$

$q = 0 \Rightarrow q^n = 0^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} q^n = 0, \quad$ se $\quad q = 0.$

$q > 1$: esiste $a > 0$: $q = 1 + a$; si ha

$$q^n = (1+a)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{BERNOULLI}}}{\geq} 1 + n \cdot a, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Inoltre: $\lim_{n \to +\infty} (1 + n \cdot a) = 1 + (+\infty) \cdot a = +\infty$

$\Rightarrow$ TEO CONF I ci garantisce che

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty.$$

$q \in (0,1)$: ci riconduciamo a un caso precedente:

sia $\quad r = \frac{1}{q} > 1$, e

$$\lim_{n \to +\infty} r^n = +\infty$$

Quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{q^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$$\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n = r^n$$

TEOREMA (CRITERIO DELLA RADICE)

Sia $\{a_n\}_{n \in S}$ con $a_n \geq 0$ def, e supponiamo che esista $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

- $\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
- $\ell \in [0,1) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

OSS: il caso $\ell = 1$ è una F.I.

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $\{a_n\}_{n \in S}$ con $a_n > 0$ DEF. Supponiamo che esista $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$.

- $\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
- $\ell \in [0,1) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

OSS: il caso $\ell = 1$ è una F. I.

APPLICAZIONI: Calcoliamo il limite della successione $a_n = \frac{q^n}{n}$, $q > 1$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F. I.}$$

Proviamo ad applicare il criterio del rapporto:

$$a_n = \frac{q^n}{n}, \qquad a_{n+1} = \frac{q^{n+1}}{n+1}$$

Allora:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left[\frac{q^{n+1}}{n+1}\right]}{\left[\frac{q^n}{n}\right]} = \frac{\cancel{q^{n+1}}\,q}{\cancel{q^n}} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\downarrow \atop 1,\ n \to +\infty} \longrightarrow 1 \cdot q = q$$

quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \text{ , e dunque}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n} = +\infty .$$

- Sia $a_n = \dfrac{q^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, $q > 1$.

Osserviamo che $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \geq n$

CONF I $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F. I.}$$

Usiamo il cr del rapporto:

$a_{n+1} = \dfrac{q^{n+1}}{(n+1)!}$, si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left[\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}\right]}{\left[\frac{q^n}{n!}\right]} = \frac{\cancel{q^{n+1}}\,q}{\cancel{q^n}\,1} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\underbrace{(n+1)!}_{``(n+1)\cdot\cancel{n!}}} = \frac{q}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{q}{n+1} = \frac{q}{+\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0.$$

DEF: Date due successioni $\{a_n\}_{n\in S}$, $\{b_n\}_{n\in S'}$ con $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, diciamo che:

- "a_n È UN INFINITO DI ORDINE MAGGIORE RISPETTO A b_n" se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$
- "a_n HA LO STESSO ORDINE DI INFINITO DI b_n" se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty)$
- "a_n È UN INFINITO DI ORDINE INFERIORE RISPETTO A b_n" se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$

OSS: se "a_n è di ordine superiore risp a b_n", allora "b_n è di ordine inferiore risp a a_n", infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

GERARCHIA DEGLI INFINITI:

$$\log_a(n) < n^\beta < a^n < n! < n^n$$

$a>1$ $\quad$ $\beta>0$ $\quad$ $a>1$

PER CASA: dim che $a_n = n!$ è di ordine inferiore rispetto a $b_n = n^n$.

OSS: se modifichiamo le espressioni delle successioni sopra, non è detto che la gerarchia si mantenga:

$(n^2)! > n^n$

LIMITI NOTEVOLI

Sia $\{a_n\}_{n\in S}$ una successione infinitesima con $a_n \neq 0$ DEF. Allora

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$ $\qquad$ - $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} = 1.\ (=e^0)$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(a_n+1)}{a_n} = 1$ $\qquad$ - $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n+1) = 0.$

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$
- $\lim_{n \to +\infty} \sin(a_n) = 0 = \sin(0)$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{n \to +\infty} \cos(a_n) = 1 = \cos(0)$

Da questo abbiamo che: se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$, allora

$$\lim_{n \to +\infty} e^{a_n} = e^{\ell}.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sin(a_n) = \sin(\ell)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \cos(a_n) = \cos(\ell)$$

PER CASA, usare $a_n \to \ell$ allora $a_n - \ell \to 0$

Abbiamo che $a_n \to \ell \Rightarrow a_n - \ell \to 0$, per $n \to +\infty$.

Quindi:

$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} e^{\overbrace{(a_n - \ell)}^{\text{INFINITESIMA}}}}_{} = 1$$

$$= \lim_{n \to +\infty} e^{a_n} \cdot e^{-\ell} = e^{-\ell} \cdot \lim_{n \to +\infty} e^{a_n}$$

$\lim_{n \to +\infty} e^{a_n} = e^{\ell}$

OSS: Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora per ogni $m \in \mathbb{N}$, la successione $b_n := a_{m+n}$ ha limite ℓ per $n \to +\infty$.

Se $a_n \to \ell$ per $n \to +\infty$, la successione $a_{n+1} \to \ell$ per $n \to +\infty$.

PROPOSIZIONE

Sia $\{a_n\}_{n\in S}$, allora se esiste il $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ con $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora ℓ è l'UNICO P.D.A. per l'insieme $\{a_n : n \in S\}$, e $a_n \neq \ell$ def.

dim

ℓ è P.D.A. per $A = \{a_n : n \in S\}$ se

$\forall U \in \mathcal{I}_\ell \quad A \cap U \setminus \{\ell\} \neq \emptyset$

Dim che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, allora ℓ è P.D.A. per A.

Fissiamo $U \in \mathcal{I}_\ell$, allora $\exists V \in \mathcal{I}_{+\infty}$:

$a_n \in U$, per ogni $n \in V \cap S$

Abbiamo che $a_n \in A$, per ogni $n \in V \cap S$.

Cioè $a_n \in U \cap A$, e $a_n \in U \cap A \setminus \{\ell\}$

DEFINITIVAMENTE.

esempio: Dato $A = \left\{ \overbrace{\frac{n+1}{n}}^{a_n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$,

poiché

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1 \quad e \quad a_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

segue che L'UNICO P.D.A. per A è 1.