11/3/2022

# LEZIONE 8

Riepilogo: def di funzione rapporto, funzione composta e funzione inversa, monotonia e legame con iniettività, funzioni pari e funzioni dispari, simbolo di sommatoria $\Sigma$.

**PRINCIPIO DI INDUZIONE**: V assioma di $\mathbb{N}$, dice che:

se $U \subseteq \mathbb{N}$ soddisfa le seguenti condizioni:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 0 \in U \\ (2) & \text{se } n \in U \Rightarrow n+1 \in U \end{array}\right\} \Rightarrow U = \mathbb{N}$$

IDEA: $0 \in U$ mi dice che posso "partire da 0" per usare la seconda proprietà:

$$\underset{\substack{0\in U\\(1)}}{0} \xrightarrow{0+1\in U\ (2)} \underset{\substack{1\\1\in U}}{\bullet} \xrightarrow{1+1\in U\ (2)} \underset{\substack{2\\2\in U}}{\bullet} \longrightarrow \quad \longrightarrow$$

Ripetendo il ragionamento all'infinito si dimostra che

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \in U \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbb{N} \subseteq U \\ U \subseteq \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow U = \mathbb{N}$$

VARIANTE: "PRINCIPIO DI INDUZIONE DEBOLE"

Sia $U \subseteq \mathbb{N}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

(1D) $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \in U$

(2) se $n \in U$ allora $n+1 \in U$

$$\left.\begin{array}{l} (1D) \\ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow U = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\} = \{n_0 + m : m \in \mathbb{N}\}$$

Cioè $U$ è quel sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che contiene tutti i numeri naturali maggiori o uguali a $n_0$.

OSS: Se $n_0 = 0$ allora recuperiamo il principio di induzione.

Il principio di induzione si usa per dimostrare che una certa proprietà è verificata per ogni $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si considera una proprietà $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, e si definisce l'insieme

$$U = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ verifica la proprietà } P(n)\}$$

Se dimostriamo che: $n_0 \in U$; $n \in U \Rightarrow n+1 \in U$, allora abbiamo che per il principio di induzione debole

$$U = \{n_0 + m : m \in \mathbb{N}\}$$

↳ insieme dei numeri naturali $n$ tali per cui $P(n)$ è soddisfatta

$\Rightarrow$ $P(n)$ è soddisfatta $\forall n \geq n_0$

esempi: per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$P(n): \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vogliamo dimostrare che $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Usiamo il principio di induzione: dobbiamo dimostrare che l'insieme $U$ definito come

$$U = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è soddisfatta}\}$$

verifica:

- $0 \in U$ "PASSO BASE"
- $n \in U \Rightarrow n+1 \in U$ "PASSO INDUTTIVO"

Cosa vuol dire $P(n)$?

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

se $n = 0$, allora $\sum_{k=0}^{0} k = 0$

Prendiamo i numeri naturali tra 0 e 0

Inoltre, se prendiamo $n=0$ otteniamo $0$.

Quindi $P(n)$ è verificata per $n=0$.

Se $n = 5$, allora

$$\sum_{k=0}^{5} k = \underset{k=0}{0} + \underset{k=1}{1} + \underset{k=2}{2} + \underset{k=3}{3} + \underset{k=4}{4} + \underset{k=5}{5},$$

Cioè $\sum_{k=0}^{n} k$ è la SOMMA DEI NUMERI NATURALI da 0 a $n$. $P(n)$ ci dice che questa somma deve essere uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$

verifica per $n=5$: $\sum_{k=0}^{5} k = 15$, e $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

Somma dei numeri da 1 a 100:

$$\sum_{K=0}^{100} K = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050.$$

PASSO BASE: $P(n)$ è verificata per $n=0$ FATTO

PASSO INDUTTIVO: vogliamo dimostrare che

$$n \in U \Rightarrow n+1 \in U, \quad \text{cioè}$$

se $n$ verifica $P(n)$, allora $n+1$ verifica $P(n+1)$

Sappiamo che $P(n)$ è vera, dobbiamo dire che

$P(n+1)$ è vera:

$$\sum_{K=0}^{n+1} K \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

↓ SI PARTE DALLA SOMMA

$$\sum_{K=0}^{n+1} K = \underbrace{\sum_{K=0}^{n} K}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

$$= (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Quindi: $P(n+1)$ È VERA se $P(n)$ È VERA, cioè

$P(n)$ VERA $\Rightarrow$ $P(n+1)$ VERA, cioè

$n \in U \Rightarrow n+1 \in U$

Abbiamo verificato che $U$ soddisfa (1) e (2) dell'induzione, e dunque $U = \mathbb{N}$, cioè

$P(n)$ è VERA $\forall n \in U = \mathbb{N}$.

OSS: quando si dimostra il passo induttivo, l'ipotesi "$P(n)$ è VERA" viene detta IPOTESI INDUTTIVA.

esempio: dimostrare che, fissato $x \geq -1$, si ha

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad ("\forall n \geq 0")$$

USIAMO L'INDUZIONE: "$U = \{n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx\}$"

PASSO BASE: dim che la formula sopra è vera per $n=0$.

$$(1+x)^0 = 1, \quad 1+0\cdot x = 1, \text{ e quindi}$$

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1+0\cdot x \qquad \text{FATTO}$$

PASSO INDUTTIVO: dobbiamo dire che

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x,$$

sapendo che $(1+x)^n \geq 1+nx.$

$$\underbrace{(1+x)^{n+1}}_{\text{PARTO DA } P(n+1)} = \underbrace{(1+x)^n}_{\text{LO RISCRIVO IN TERMINI DI } P(n)} \underbrace{(1+x)}_{>0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{IPOTESI INDUTTIVA}}}{\geq} (1+nx)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{FACCIO I CONTI}}}{(1+x)}$$

$$= 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

Abbiamo dimostrato il passo induttivo, e dunque $U = \mathbb{N}$, cioè $(1+x)^n \geq 1+nx, \; \forall n \in \mathbb{N}.$ $(x > -1)$

↙ DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

ESERCIZIO IN AULA:

① "DIMOSTRARE la caratterizzazione di sup A quando questo è $+\infty$", cioè dire che:

dato $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, allora:

$\sup A = +\infty$ se e solo se $\forall M > 0 \ \exists a \in A : a > M$.

$\hookrightarrow M_A = \emptyset$

② Sapendo che $\forall M > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : n > M$,

dimostrare che $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = 0$.

È anche minimo?

HINT: usate la caratterizzazione di inf

① Vogliamo dire che:

- $\underset{\text{IPOTESI}}{\sup A = +\infty} \Rightarrow \underset{\text{TESI}}{\forall M > 0 \ \exists a \in A : a > M}$
- $\forall M > 0 \ \exists a \in A : a > M \Rightarrow \sup A = +\infty$ $(M_A = \emptyset)$

1ª IMPLICAZIONE: P.A., cioè neghiamo la tesi e otteniamo una contraddizione (dell'ipotesi).

Si ha

$\exists M > 0 : \forall a \in A$ si ha $a \leq M$

$\Rightarrow M \in M_A$, ma questo contraddice $M_A = \emptyset$.

Abbiamo dim la prima implicazione.

Consideriamo la seconda, ragioniamo p.A.:

negare $M_A = \emptyset$, vuol dire assumere che esiste $\bar{a} \in M_A$, e quindi $\forall a \in A$, $\bar{a} \geq a$

(possiamo prendere $M = \max\{\bar{a}, 1\}$)

Questa è la negazione dell'ipotesi, e quindi abbiamo dimostrato la seconda implicazione.

2) Sia $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$

CARATT DI INF:

$$m = \inf(A) \iff \boxed{\begin{array}{l} m \leq a \quad \forall a \in A \ \textcircled{1}, \text{ e} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \ m + \varepsilon > a \ \textcircled{2} \end{array}}$$

Facciamo vedere che vale con $m = 0$ e $A$ scritto sopra.

1) $0 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ ? sì perché $1 > 0$, $n > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{n} > 0$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}_0 : \ 0 + \varepsilon > \frac{1}{n}$ ?

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e prendiamo $M = \frac{1}{\varepsilon}$, allora esiste $n \in \mathbb{N}_0$ : $\frac{1}{\varepsilon} = M < n \Rightarrow \varepsilon > n$.

Abbiamo quindi:

$\forall \varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}_0$ : $\varepsilon > n$ $(0 + \varepsilon > n)$

$\Rightarrow$ per la caratterizzazione di inf, si ha

$0 = \inf(A)$.

0 è MINIMO? se $0 \in A$, allora esiste

$n \in \mathbb{N}_0$ : $\frac{1}{n} = 0$, cioè $1 = 0$. ASSURDO

Allora il minimo di A non esiste, cioè $0 = \inf(A)$

ma 0 non è $\min(A)$.