10/05/2022

LEZIONE 27

Riepilogo: rapporto incrementale e derivata di una funzione in un punto, retta tangente, relazione tra continuità e derivabilità, relazione tra o piccoli e derivate, algebra delle derivate.

Abbiamo dim che, se f e g sono derivabili in x_0, allora:

(i) $f+g$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(ii) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Dobbiamo dim che, se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

dim che $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f}{g}(x_0) + c\,(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Segue che $\frac{f}{g}$ è der in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = c.$$

Sappiamo che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), \quad x \to x_0,$$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), \quad x \to x_0.$$

Vogliamo trovare c che soddisfa l'uguaglianza per $\frac{f}{g}(x)$, ma $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è definito in un intorno di x_0? Questo ha senso se esiste un intorno di x_0 tale per cui $g(x) \neq 0$ ogni volta che x appartiene a tale intorno.

$g(x_0) \neq 0$, g è continua in x_0

$\Rightarrow$ il teo permanenza segno per cont ci assicura che esiste $U \in \mathcal{I}_{x_0}$: $\forall x \in U$, $g(x) \neq 0$.

Vogliamo trovare $c \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} + c\,(x-x_0) + o(x-x_0), \quad x \to x_0, \quad \cdot g(x)$$

$$f(x) = g(x)\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)} + c\,(x-x_0) + o(x-x_0)\right), \quad x \to x_0$$

Sostituendo gli sviluppi si ha

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)=$$

$$\left(g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\right)\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}+c(x-x_0)+o(x-x_0)\right)$$

Facendo i conti nella seconda riga otteniamo:

$$f(x_0)+c\,g(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$$+\frac{g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)}(x-x_0)+c\,g'\cancel{(x_0)(x-x_0)^2}+o\left(\cancel{(x-x_0)^2}\right)$$

$$=f(x_0)+\left(c\,g(x_0)+\frac{g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)}\right)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

Eguagliando i termini si ottiene la condizione

$$f'(x_0)=c\,g(x_0)+\frac{g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$c=\frac{1}{g(x_0)}\left(f'(x_0)-\frac{g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)}\right)$$

$$=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

$\blacksquare$

esempi: dim per induzione che se $f(x) = x^n$, allora

$f'(x) = n x^{n-1}$, con $n \in \mathbb{N}$ $(=\{0,1,2,...\})$

PASSO BASE: $n = 0 \Rightarrow f(x) = x^0 = 1$, $f'(x) = 0$

$= n \cdot x^{n-1}$

PASSO INDUTTIVO: Se la tesi è vera per n, allora

è vera per $n+1$, cioè:

$(f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1})$ TESI VERA PER n

$\Rightarrow (f(x) = x^{n+1} \Rightarrow f'(x) = (n+1) x^n)$ TESI VERA PER $n+1$

Vogliamo calcolare la derivata di x^{n+1}:

$x^{n+1} = x \cdot x^n = g(x)$

$\Rightarrow g'(x) = 1 \cdot x^n + n x^{n-1} \cdot x = x^n + n x^n = (n+1) x^n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

IN GENERALE, se $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$, ogni volta che tutto questo ha senso.

Infatti se prendiamo $\alpha = \frac{1}{2}$, allora $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

- Sia $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = tg(x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

allora

$$f'(x) = \frac{(\cos(x))^2 - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{(\cos(x))^2}$$

⌈ $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$,

$$\frac{\cos(x_0+h) - \cos(x_0)}{h} = \frac{\cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h) - \cos(x_0)}{h}$$

$$\xrightarrow{h \to 0} -\sin(x_0)$$

⌊

$$= \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (tg(x))^2$$

- $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$= a^{x_0} \frac{e^{h \ln(a)} - 1}{h} \longrightarrow a^{x_0} \cdot \ln(a)$$

$$\Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ si ha $f'(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, dim per casa che $f'(x) = \dfrac{\log_a(e)}{x}$, $x > 0$.

Studiamo la derivabilità di alcune classi di funzioni.

TEOREMA DI DERIVABILITÀ DELLA FZ COMPOSTA

Siano $f: A \to \mathbb{R}$, $g: C \to \mathbb{R}$, x_0 pto interno di A e $f(x_0)$ punto interno di C. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f: A' \to \mathbb{R}$, $A' = \{x \in A : f(x) \in C\}$ e $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in A'$, è derivabile in x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

dim

Dim che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + c(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

$$f(y) = f(\underbrace{\ell(x_0)}_{y_0}) + f'(\underbrace{\ell(x_0)}_{y_0})(y - \underbrace{\ell(x_0)}_{y_0}) + o(y - \underbrace{\ell(x_0)}_{y_0}), \quad y \to \underbrace{\ell(x_0)}_{y_0}$$

$y \rightsquigarrow \ell(x)$, con $x \to x_0$

ℓ continua, allora $x \to x_0 \Rightarrow \ell(x) \to \ell(x_0)$

$$\Rightarrow \underbrace{f(\ell(x))}_{(f\circ\ell)(x)} = f(\ell(x_0)) + f'(\ell(x_0))(\ell(x) - \ell(x_0)) + o(\ell(x) - \ell(x_0)), \quad x \to x_0$$

$$= f(\ell(x_0)) + f'(\ell(x_0))\ell'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) + \underbrace{o(\ell'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))}_{o(x - x_0)}, \quad x \to x_0$$

$$= \underbrace{f(\ell(x_0))}_{(f\circ\ell)(x_0)} + f'(\ell(x_0))\ell'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

$\Rightarrow$ $f\circ\ell$ è der in x_0 e $(f\circ\ell)'(x_0) = f'(\ell(x_0)) \cdot \ell'(x_0)$.

■

esempi: $\ell(x) = \sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Se prendiamo

$f(x) = \sin(x)$, $h(x) = x^2$, allora

$(f\circ h)(x) = f(h(x)) = \sin(x^2) = \ell(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ ℓ è derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$\ell'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x = 2\cos(x^2) \cdot x,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. A volte si dimentica di derivare la ft interna, cioè si scrive

$$\boxed{\ell'(x) = \cos(x^2), \ x \in \mathbb{R}}$$ NO!!!

- $\ell(x) = e^{(\sin(x))^2 + x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

$\ell(x) = (g \circ h)(x)$, $\quad g(x) = e^x$, $h(x) = (\sin(x))^2 + x$,

ℓ è derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$\ell'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{(\sin(x))^2 + x} (2\sin(x) \cdot \cos(x) + 1),$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FZ INVERSA

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ strettamente monotona e continua in (a,b). [f è invertibile scegliendo opportunamente il codominio e $f^{-1}: f(a,b) \to (a,b)$ è continua]

Se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$x_0 \in (a,b)$, esiste $y_0 \in f(a,b)$: $x_0 = f^{-1}(y_0)$, quindi f^{-1} è derivabile in y_0 e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

OSS: Come ricordare la formula? Sappiamo che

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in (a,b)$$

Se deriviamo a sinistra e a destra l'uguaglianza otteniamo che

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = 1, \quad \forall x \in (a,b)$$

Usando la der della funz composta si ha

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$x = x_0$ e portiamo $f'(x_0)$ a destra otteniamo

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

esempi : $f(x) = a^x$, $a>0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$. f è invertibile

$f^{-1}(x) = \log_a(x)$, $x>0$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot \underbrace{a^{\log_a x}}_{=x}}$$

$f(x) = a^x \to f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$ $\quad f^{-1}(x) = \log_a(x)$

$$= \frac{\log_a(e)}{x}$$

$$\ln(a) = \frac{\log_a(a)}{\log_a(e)}$$

per casa: calcolare la derivata di a^x vedendola come funzione inversa di $\log_a(x)$.

- $f(x) = tg(x)$, $\quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$. f è biettiva con

$f(-\pi/2, \pi/2) = \mathbb{R}$, e $\quad f^{-1}(x) = \arctg(x)$

$= \arctan(x)$,

e $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$.

Ricordiamo che

$$f'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\mathrm{tg}(x))^2, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

La derivata dell'arcotangente è

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$f^{-1}(x) = \arctan(x)$

DERIVATA DESTRA E SINISTRA

La derivata è def tramite limite che può essere diviso in limite destro e sinistro.

DEF: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto interno di A, diciamo che:

- ESISTE LA DERIVATA DESTRA DI f in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \quad \left(\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)$$

In questo caso poniamo

$$(f')^+(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

• ESISTE LA DERIVATA SINISTRA DI f in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \qquad \left(\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \right)$$

In questo caso poniamo

$$(f')^-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

OSS: dalle prop di lim dx e sinistro segue che se $\exists\, (f')^+(x_0)$, $(f')^-(x_0)$ e ~~sono~~ uguali, allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = (f')^+(x_0) = (f')^-(x_0)$.

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f: D(f) \to \mathbb{R}$, se definiamo

$$D(f') := \left\{ x \in D(f) : \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R} \right\},$$

allora possiamo definire la funzione

$$f' : D(f') \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \ \forall x \in D(f').$$

f' viene DETTA DERIVATA PRIMA di f.

Se il ruolo di f viene preso da f', definiamo

$$D(f''):=\left\{x\in D(f') : \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\in\mathbb{R}\right\}$$

$$f'': D(f'')\to\mathbb{R}, \quad f''(x):=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}, \quad \forall x\in D(f'').$$

f'' È LA DERIVATA PRIMA di f' e viene DETTA DERIVATA SECONDA di f.