29/04/2022

LEZIONE 22

Riepilogo: teoremi sui limiti di funzioni, limite destro e limite sinistro di funzioni, funzioni continue.

Perché la somma di fz continue in un pto è ancora continua in quel punto?

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a per A e $x_0 \in A$ e supponiamo che f e g siano continue in x_0, cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = \underset{\ell}{f(x_0)}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \underset{m}{g(x_0)}$.

Poiché $\ell + m$ non è F.I., allora (TEO DI ALG LIMITI FZ)

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{(f+g)}_{h}(x) = \ell + m = f(x_0) + g(x_0) = \underbrace{(f+g)}_{h}(x_0)$$

Esistono funzioni che non sono continue in qualche punto?

Sì, infatti

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

si ha $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow$ f non è CONTINUA in 0

$\Rightarrow$ f non è continua in $A \subseteq \mathbb{R}$ ogni volta che $0 \in A$.

ma

f è continua in ogni $B \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \notin B$.

Il problema per f non è $f(0)$, ma i valori del limite destro e limite sinistro: infatti

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$g(0) = 0 \neq f(0) = 1$, ma ancora g non è CONTINUA in 0 perché $\underbrace{\lim_{x \to 0^+} g(x)}_{=1} \neq \underbrace{\lim_{x \to 0^-} g(x)}_{=0}$

OSS: la continuità "non dipende dal valore della fz in x_0", ma dal comportamento della fz vicino a x_0.

CLASSIFICAZIONE DELLE DISCONTINUITÀ

1ª SPECIE:

$f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, $x_0 \in A$ ha una discontinuità di 1ª specie in x_0 se

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

DISCONTINUITÀ DI SALTO, esempio:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2ª SPECIE:

f, A, x_0 come sopra, f ha una discontinuità di 2ª specie in x_0 se:

$\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ o $\nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

o $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

esempio: $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty,$$

ma $\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0.$

3ª SPECIE: (ELIMINABILE)

f, x_0, A come prima, diciamo che f ha una discontinuità di 3ª specie in x_0 se

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$

esempio: Sia $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0. \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sappiamo che

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{f(x)} = 1 \neq 0 = f(0)$$

=> ABBIAMO UNA DISC DI 3ª SPECIE

Si dice che questa discontinuità è eliminabile perché se definiamo la ft:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus \{x_0\}, \\ \lim_{x \to x_0} f(x), & x = x_0. \end{cases}$$

Si ha

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) = \underbrace{\tilde{f}(x_0)}$$

$\Rightarrow \tilde{f}$ È CONTINUA IN x_0.

Nell' esempio, poniamo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

e vediamo che:

$$\tilde{f}(0) = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

OSS: questa costruzione permette di estendere CON CONTINUITÀ funzioni che non sono definite in un punto x_0.

esempio: $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $x > -1$ e $x \neq 0$.

DOMANDA: Cosa possiamo dire quando $x \to 0$ su g?

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \text{ quindi}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x > -1 \text{ e } x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

e si ha

$$\tilde{g}(0)=1, \quad \lim_{x\to 0}\tilde{g}(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=1.$$

$\Rightarrow$ $\tilde{g}$ è CONT in 0.

COMODITÀ: $\tilde{g}$ è CONTINUA in $(-1,+\infty)$

OSS: la scelta di $\tilde{f}$ (o $\tilde{g}$) è UNICA se vogliamo ottenere una fz continua: infatti

$$\hat{g}(x)=\begin{cases} g(x), & x>-1 \text{ e } x\neq 0, \\ -1, & x=0, \end{cases}$$

ma $\hat{g}$ non è continua in 0.

esercizio: data $f(x)=\dfrac{a^{3x}-1}{2x}$ $x\neq 0$, $a>1$,

trovare la funzione $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con

$\tilde{f}(x)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed $\tilde{f}$ CONTINUA in $\mathbb{R}$.

OSS: Se $A = [a,b]$ (o $A = (a,b)$), e $f: A \to \mathbb{R}$, diciamo che:

- f è CONTINUA in a se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- f è CONTINUA in b se $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

OSS: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, NON È VERO CHE f non è CONTINUA in 0.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{aligned}\right\} \text{ ma } 0 \notin A = D(f)$$

TEOREMA (PERMANENZA DEL SEGNO PER FZ CON)

Se $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A e $x_0 \in A$, f è continua in x_0, allora:

- $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(x) > 0 \;\forall x \in V \cap A$
- $f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(x) < 0 \;\forall x \in V \cap A$

TEOREMA (DI LOCALE LIMITATEZZA PER FZ CONT)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, $x_0 \in A$.

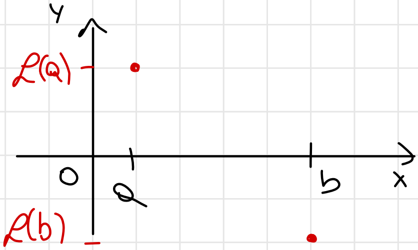
Se f è continua in x_0, allora $\exists\, V \in \mathcal{I}_{x_0}$, $\exists\, M > 0$ tali per cui $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in A \cap V$.

In questa parte del corso enunceremo (e dimostreremo una parte) di risultati molto importanti sulle funzioni continue.

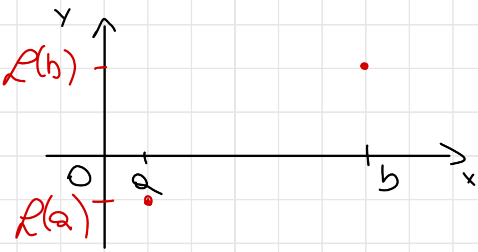
TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI (O DI BOLZANO)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in (a,b) : f(c) = 0$.

OSS: $f(a) \cdot f(b) < 0$ vuol dire che $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno diverso, cioè graficamente



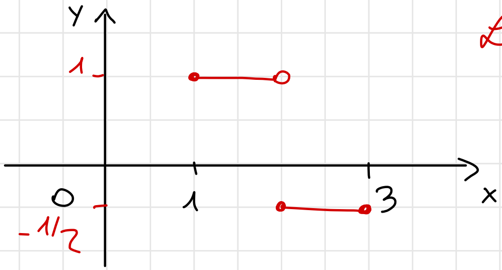
o



OSS: • $c \in (a,b)$, cioè $c \neq a$ e $c \neq b$, poiché se $c = a$ (o $c = b$) allora $f(a) \cdot f(b) = 0$.

• Il teorema non ci dice quanti sono i punti in cui f si annulla né come trovarli.

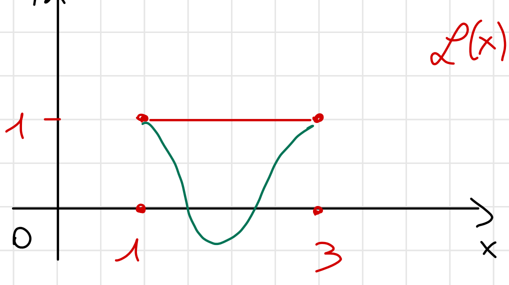
Controesempi: • se f non è continua, possiamo trovare $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ e per cui $\nexists\, c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,2), \\ -\frac{1}{2}, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

$\nexists\, c \in (1,3) : f(c) = 0.$

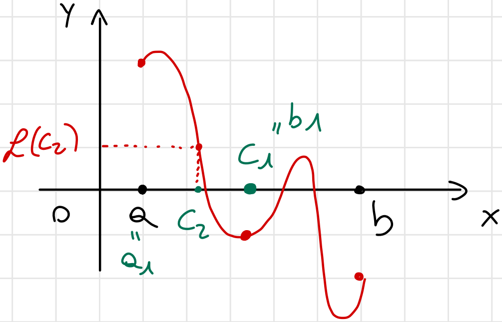
• Se $f(a) \cdot f(b) > 0$, allora esiste $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua per cui $\nexists\, c \in (a,b) : f(c) = 0$.



$f(x) = 1$, $x \in [1,3]$.

dim

Costruttiva: fornisce un algoritmo per calcolare c.



$f(a) > 0$

$f(b) < 0$

STEP 1: Consideriamo $\frac{a+b}{2} =: c_1$

- $f(c_1) = 0 \rightsquigarrow$ $c = c_1$ e ABBIAMO FINITO
- $f(c_1) > 0 \rightsquigarrow$ $a_1 := c_1$, $b_1 := b$
- $f(c_1) < 0 \rightsquigarrow$ $a_1 := a$, $b_1 := c_1$.

STEP 2: Siamo in $[a_1, b_1]$, con

$f(a_1) > 0$, $f(b_1) < 0$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

Ripetiamo il ragionamento fatto nello step 1 su $[a_1, b_1]$: $c_2 = \frac{b_1 + a_1}{2}$.

- $f(c_2) = 0 \rightsquigarrow$ $c = c_2$
- $f(c_2) > 0 \rightsquigarrow$ $a_2 := c_2$ e $b_2 = b_1$
- $f(c_2) < 0 \rightsquigarrow$ $a_2 := a_1$ e $b_2 := c_2$

Ripetendo questo ragionamento n volte troviamo i punti a_n, b_n che soddisfano le seguenti condizioni: $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$,

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad a_n \geq a_{n-1}, \quad b_n \leq b_{n-1}$$

$\rightsquigarrow$ Abbiamo due successioni

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ che sono monotone

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell_1 , \quad \exists \lim_{n \to +\infty} b_n = \ell_2 .$$

- Poiché $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, segue che $\ell_1 \leq \ell_2$

- Inoltre, $b_n = a_n + \dfrac{b-a}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} b_n = \ell_2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(a_n + \frac{b-a}{2^n} \right) = \ell_1 + \overbrace{\frac{b-a}{+\infty}}^{=0} = \ell_1$$

$$\Rightarrow \ell_1 = \ell_2 .$$

Infine, poiché $f(a_n)>0$ e $f(b_n)<0$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$,

si ha

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\ell_1)$$

$$0 \ge \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\ell_2)$$

TEO CONFRONTO

$a_n \to \ell_1$
$b_n \to \ell_2$
$\ell_1 = \ell_2$

PERCHÉ f È CONTINUA in $[a,b]$, per il TEOREMA DI COLLEGAMENTO

Quindi, se poniamo $\ell = \ell_1 = \ell_2$, si ha

$$0 \le f(\ell) \le 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\ell) = 0.$$

Prendendo $c = \ell$ abbiamo trovato un elemento $c \in (a,b)$ tale per cui $f(c)=0$. ∎

TEOREMA DI WEIERSTRASS

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, allora

f ammette massimo e minimo in $[a,b]$, cioè:

$$\exists\, x_M, x_m \in \mathbb{R} : \quad f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \quad \forall x \in [a,b]$$

o

$\exists \min f([a,b])$, $\exists \max f([a,b])$, dove

$$f([a,b]) := \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in [a,b] \text{ e } y = f(x) \}$$

x_m VIENE DETTO: PUNTO DI MINIMO DI f IN $[a,b]$.

x_M VIENE DETTO: PUNTO DI MASSIMO DI f IN $[a,b]$.

$f(x_m)$ È IL MINIMO DI f IN $[a,b]$.

$f(x_M)$ È IL MASSIMO DI f IN $[a,b]$.