1/3/2022

LEZIONE 5

Riepilogo: definizione e proprietà di estremo inferiore e superiore, insiemi limitati, caratterizzazione di sup e inf.

dim Dobbiamo dim che:

$$\ell = \sup A \ (< +\infty) \overset{1}{\Longrightarrow} \begin{cases} \cdot\ \ell \geq a \quad \forall a \in A \\ \cdot\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a > \ell - \varepsilon \end{cases}$$

---

e che $(\ell \in \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \ell \geq a \quad \forall a \in A \\ \cdot\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a > \ell - \varepsilon \end{array}\right\} \overset{2}{\Longrightarrow} \ell = \sup A$$

1: $\ell = \sup A$ $(< +\infty) = \min M_A$, quindi $\ell \in M_A$ e dunque $\ell \geq a \quad \forall a \in A$.

Dobbiamo dim che: "$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a > \ell - \varepsilon$".

Dimostriamo la tesi per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa, allora

" $\exists \varepsilon > 0 : \forall a \in A$ si ha $a \leq \ell - \varepsilon$ "

$\Rightarrow$ il numero $\ell - \varepsilon \in M_A$ e $\ell - \varepsilon < \ell$

$\Rightarrow$ questo è assurdo, perché $\ell = \min M_A$

e cioè $\ell \le b \quad \forall b \in M_A$.

$+ \quad =$ CONTRADDIZIONE

Negando la tesi abbiamo una contraddizione, allora la tesi è vera, ed è proprio ciò che volevamo dimostrare.

(2) Sia $\ell \in \mathbb{R}$ tale per cui $\ell \ge a \quad \forall a \in A$ e $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a > \ell - \varepsilon$.

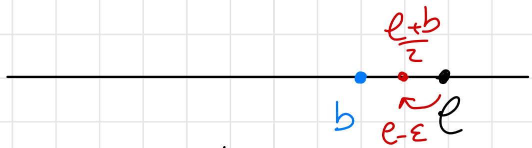
Vogliamo dire che $\ell = \sup A = \min M_A$.

La prima condizione su ℓ ci dice che $\ell \in M_A$.

La seconda condizione ci servirà per dire che ℓ è il minimo di M_A.

P.A.: supponiamo che ℓ non sia il minimo di M_A, ciò vuol dire che (non è vero che $\ell \le b \quad \forall b \in M_A$)

$\exists b \in M_A : b < \ell$.



Scegliamo $\varepsilon = \frac{\ell-b}{2}$, si ha

$$\ell-\varepsilon = \ell - \left(\frac{\ell-b}{2}\right) = \ell - \left(\frac{\ell}{2}-\frac{b}{2}\right) = \ell - \frac{\ell}{2}+\frac{b}{2}$$

$$= \frac{\ell}{2}+\frac{b}{2} = \frac{\ell+b}{2}$$

Quindi

$$\ell-\varepsilon = \frac{\ell+b}{2} \overset{\ell>b}{>} b \underset{b\in M_A}{\geq} a \quad \forall a\in A$$

Noi abbiamo ottenuto che:

$$\exists\, \varepsilon>0 \quad \left(\varepsilon = \frac{\ell-b}{2}\right) : \ \ell-\varepsilon > a \quad \forall a\in A$$

IN CONTRADDIZIONE CON LA CONDIZIONE su ℓ

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists a\in A : \ a > \ell-\varepsilon$$

Siamo partiti da una proposizione falsa, cioè

È FALSO CHE $\exists b\in M_A : b<\ell$, e cioè è

VERO che $\underbrace{\forall b\in M_A : \ b\geq \ell}_{\Rightarrow\ \ell = \min M_A}$

PUNTO 2: PER CASA

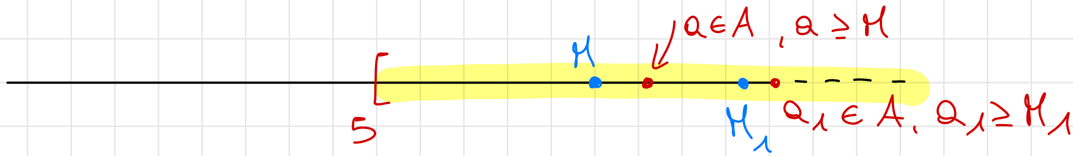
TEOREMA

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

- $\sup A = +\infty$ se e solo se $\forall M > 0 \ \exists a \in A$ tale per cui $a \geq M$
- $\inf A = -\infty$ se e solo se $\forall M > 0 \ \exists a \in A$ tale per cui $a \leq -M$

dim PER CASA.

"senso": $\sup A = +\infty$, ad esempio $A = [5, +\infty)$.



prendiamo $M > 0$, prendiamo $M_1 > M$, ...

3 - FUNZIONI

$f: A \to B$ è una funzione, noi consideriamo sempre $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

$\forall a \in A, \ \exists!\, b \in B : f(a) = b.$

A è DETTO DOMINIO di f

B è detto CODOMINIO di f

$f(A) = \mathrm{Im}(f) = \{ f(a) : a \in A \} = \{ b \in B : \exists a \in A, f(a) = b \}$

è detto IMMAGINE di f (immagine di A tramite f)

OSS: • $f(a)$ è un elemento di B.

• $f(A)$ è un sottoinsieme di B.

esempi: FUNZIONI POLINOMIALI: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $n \in \mathbb{N}$ e siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ($n+1$ numeri reali), con $a_n \neq 0$. La funzione

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

è detto POLINOMIO di grado n.

esempi: $f(x) = x^3 - 2$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$, $f(x) = 3$

$f(x) = 3$ è DETTA FUNZIONE COSTANTE, e in generale $f: A \to B$ è costante se $Im(f) = \{c\}$, $c \in \mathbb{R}$.

OSS: se $f(x) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $Im(f) = \{c\}$ e non è corretto scrivere $\underline{Im(f) = c}$

OSS: le funzioni costanti sono i polinomi di grado 0.

OSS: il termine a_j viene detto COEFFICIENTE di x^j, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, n = grado del polinomio.

$n = 1$: $f(x) = a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, sono dette FUNZIONI AFFINI e il loro grafico (da definire) È UNA RETTA.

$n = 2$: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_2 \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, sono funzioni il cui grafico è una PARABOLA

FUNZIONI ESPONENZIALI: sia $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, la funzione esponenziale di base a è la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$a \neq 0$, $a \neq 1$ perché $0^x = 0$, $1^x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{Im}(f) = (0,+\infty)$

"$f(x) = a^x$"

FUNZIONI LOGARITMICHE: sia $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, la funzione logaritmo in base a è la funzione $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = \log_a(x)$, $\forall x \in (0,+\infty)$

dove $\log_a(x)$ è quell'unico numero reale per cui si ha $a^{\log_a(x)} = x$

OSS: il dominio di $f(x) = \log_a(x)$ è $(0,+\infty)$ perché $x \in D(f)$ se e solo se $x \in \mathrm{Im}(g)$, $g(x) = a^x$, e $\mathrm{Im}(g) = (0,+\infty)$.

RADICE QUADRATA: la funzione $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $x \in [0,+\infty)$, è detta

Funzione radice quadrata, e per ogni $x \geq 0$,
$\sqrt{x}$ è quel numero reale non negativo (≥ 0) tale
per cui $(\sqrt{x})^2 = x$ ($x \geq 0$ perché è il quadrato di un numero reale)

OSS: $\sqrt{4}$ non è -2 ma è 2.

OSS: se $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$, allora
$Im(f) = [0, +\infty)$.

OSS: da quanto detto sopra $\sqrt{x^2} \neq x$ ($x \in \mathbb{R}$), poiché
$\sqrt{(-2)^2} = 2 \neq -2$

FUNZIONE MODULO

Dati due numeri $x, y \in \mathbb{R}$, indichiamo con
$|x-y|$ la distanza tra x e y, cioè la lunghezza del segmento che ha per estremi x e y.

Per definizione, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{x, -x\}$ ($x \in \mathbb{R}$) è
la funzione modulo di x, e la indichiamo
con $f(x) = |x|$ $(= \max\{x, -x\})$.

$x = 1 \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow \max\{x, -x\} = 1 = |1|$

$x = -1 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow \max\{x, -x\} = 1 = |-1|$

OSS: si ha $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$

Inoltre $|0| = 0$.

TEOREMA

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $|x| = |-x|$
2) $|x| \geq 0$, $|x| < 0$ MAI!
3) $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$
4) $-|x| \leq x \leq |x|$
5) se $y > 0$, allora $|x| \overset{\leq}{<} y$ se e solo se
$$-y \overset{\leq}{<} x \overset{\leq}{<} y$$
(TUTTO VALE SOSTITUENDO "≤" a "<")
6) se $y > 0$, $|x| \overset{\geq}{>} y$ se e solo se
$x \overset{\geq}{>} y \vee x \overset{\leq}{<} -y$
o (vale l'una o l'altra)

7) $|x+y| \leq |x|+|y|$ 1ª DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

8) $||x|-|y|| \leq |x-y|$ 2ª DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

OSS: quando si parla di funzione modulo non si può parlare di "numero senza segno".

OSS: Se $f: A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, f funzione, allora

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

esempio: $f(x) = x^2-1$, $x \in \mathbb{R}$, $(A=B=\mathbb{R})$,

allora

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & x^2-1 \geq 0, \\ -(x^2-1), & x^2-1 < 0. \end{cases}$$

$x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

$$= \begin{cases} x^2-1, & x \leq -1 \vee x \geq 1, \\ -x^2+1, & x \in (-1,1) \end{cases}$$

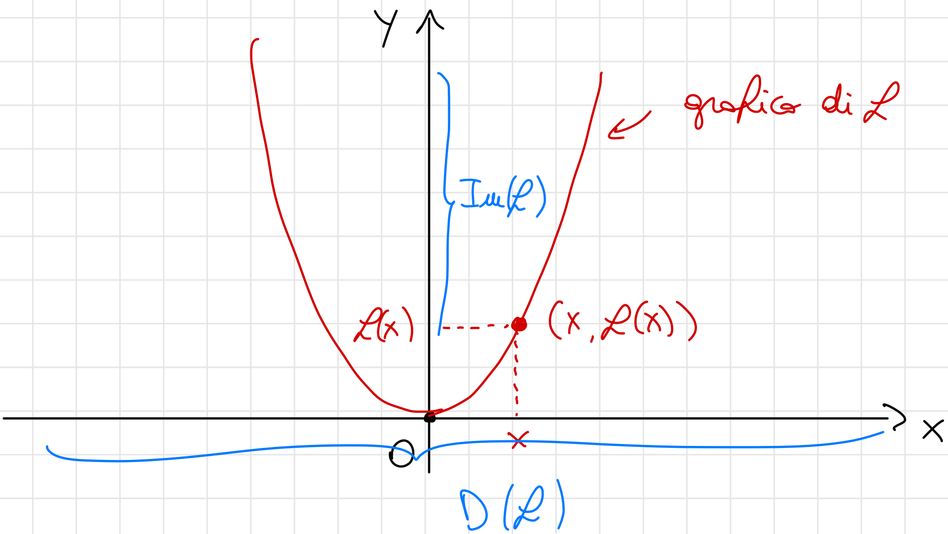
$-1 < x < 1.$

GRAFICO DI UNA FUNZIONE: è un sottoinsieme del piano, cioè dato $f: A \to B$, il suo grafico è dato dall'insieme di punti

$$G(f) := \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}$$

$$= \{(x, y) \in A \times B : y = f(x),\ x \in A\}$$

esempio: Sia $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, si ha



Nel punto (x, y), x e y vengono dette COORDINATE, e in particolare x viene detta ASCISSA del punto (x, y) e y viene detta ORDINATA del punto (x, y).