LEZIONE 12

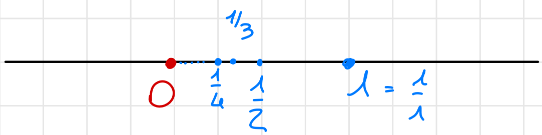
21/03/2022

Riepilogo: Definizione di intorno e sue proprietà, definizione di punto di accumulazione.

esempi: Sia $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$

$= \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}$.

Facciamo vedere che 0 è p.d.a. per A.



Vogliamo dimostrare $\forall U \in \mathcal{I}_0$ l'insieme

$A \cap U \setminus \{0\} \neq \emptyset$,

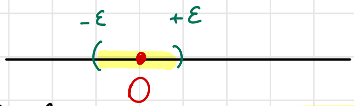
cioè riusciamo a trovare un punto $a \in A$, con $a \in U$ e $a \neq 0$.

$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$ per avere $U \in \mathcal{I}_{x_0}$

Poiché $U \in \mathcal{I}_0$ esiste $\varepsilon > 0$: $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon) \subseteq U$,

cioè $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$.

PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale per cui $n > x$.



Scegliamo $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $(\subseteq U)$,
in questo modo $\frac{1}{n} \in A$ (per definizione) e
$\frac{1}{n} \in U$ (per costruzione). Inoltre $\frac{1}{n} \neq 0$, e
quindi abbiamo trovato un elemento dell'insieme

$A \cap U \setminus \{0\}$.

Abbiamo $\varepsilon > 0$, se consideriamo $x = \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$, esiste
$n \in \mathbb{N}$: $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$ passando ai reciproci,

quindi ESISTE $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \varepsilon$, poiché $\frac{1}{n} > 0$
abbiamo che $\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$.

CONCLUSIONE:

$\forall U \in \mathcal{I}_0 \overset{\text{DEF DI INT}}{\rightsquigarrow} \exists \varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$

PROP DI ARC $\rightsquigarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\rightarrow \frac{1}{n} \in A \cap U \setminus \{0\}$ $(\neq \emptyset)$

OSS: 0 è p.d.a. per A; domanda: $0 \in A$?

No, $0 \notin A$, quindi UN P.D.A. PER A PUÒ NON ESSERE UN ELEMENTO DI A.

esempio: $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$.

Vogliamo dire che: $\forall U \in \mathcal{I}_{+\infty}$ l'insieme $\mathbb{N} \cap U \neq \emptyset$.

($\mathbb{N} \cap U \setminus \{+\infty\} \neq \emptyset$, ma $+\infty \notin$ né a $\mathbb{N}$ né a U)

$$U \in \mathcal{I}_{+\infty} \overset{\text{DEF DI INTORNO}}{\Longrightarrow} \exists M \in \mathbb{R} : \quad (M, +\infty) \subseteq U$$

$$M \in \mathbb{R} \overset{\text{ARCHIMEDE}}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \ n > M$$

Quindi: $n \in \mathbb{N}$, inoltre $n > M$ vuol dire che

$$n \in (M, +\infty) \subseteq U$$

Quindi $n \in \mathbb{N} \cap U$ che è $\neq \emptyset$. Ne segue che $+\infty$ è p.d.a. per $\mathbb{N}$, poiché $\forall U \in \mathcal{I}_{+\infty}$ si ha

$$\mathbb{N} \cap U \setminus \{+\infty\} \neq \emptyset.$$

Abbiamo dimostrato che $+\infty$ è P.D.A. per $\mathbb{N}$, come dimostrare che è UNICO? P.A., facendo i possibili casi.

Quindi x_0 NON È P.D.A. PER $\mathbb{N}$.

OSS: non vanno bene tutti gli intorni $U \in \mathcal{I}_{x_0}$: infatti se prendiamo $\varepsilon = -2x_0$ (>0), abbiamo che

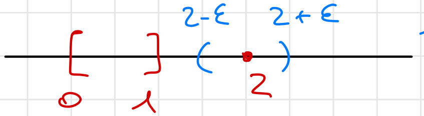
$$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) = (3x_0, -x_0) \quad e \quad 0 \in (3x_0, \underbrace{-x_0}_{>0})$$

PER CASA: ALTRI CASI: $x_0 = -\infty$, $x_0 \in [0, +\infty)$.

esempio: Sia $A = [0,1] \cup \{2\}$.

2 NON è P.D.A. per A. Infatti se prendiamo

$$U = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \quad \text{con} \quad \varepsilon = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$



$\rightsquigarrow$ $U = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ e dunque

$$A \cap \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \setminus \{2\} = \emptyset$$

OSS: $x_0 \in A \not\Rightarrow x_0$ p.d.a. per A.

PROPOSIZIONE

Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$U \in \mathcal{I}_{x_0} \Rightarrow x_0$ è p.d.a. per U.

OSS: il viceversa non vale: $\mathbb{N}$ non è intorno di $+\infty$, ma $+\infty$ è p.d.a. per $\mathbb{N}$.

COROLLARIO: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ogni punto $x_0 \in (a,b)$ è di ACCUMULAZIONE per (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$.

dim (proposizione precedente)

Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, e sia $U \in \mathcal{I}_{x_0}$. Vogliamo dimostrare che $\forall V \in \mathcal{I}_{x_0} \quad V \cap U \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Ricordiamo che: Se $U, V \in \mathcal{I}_{x_0}$, allora $U \cap V \in \mathcal{I}_{x_0}$.

$x_0 \in \mathbb{R}$: $U \cap V \in \mathcal{I}_{x_0} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U \cap V$.

$$U \cap V \setminus \{x_0\} \supseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} = \left.\begin{matrix} (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ \cup \\ (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{matrix}\right\} \neq \emptyset$$

$\Rightarrow \quad U \cap V \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

$x_0 = +\infty$: $\quad U \cap V \in \mathcal{I}_{+\infty} \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : (M, +\infty) \subseteq U \cap V$

Quindi

$$U \cap V \supseteq (M, +\infty) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad U \cap V = U \cap V \setminus \{+\infty\} \neq \emptyset$$

$x_0 = -\infty$: PER CASA.

$\blacksquare$

esempio: trovare tutti i punti di accumulazione di

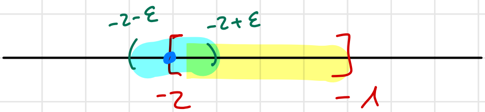
$A = [-2, -1]$.

Il corollario ci dice che se $x_0 \in (-2, -1)$, allora

x_0 è p.d.a. per A.

DIM CHE $-2, -1$ sono di accumulazione per A.

$x_0 = -2$



Vogliamo dire che $\forall U \in \mathcal{I}_{-2}$, $A \cap U \setminus \{-2\} \neq \emptyset$;

Sia $U \in \mathcal{I}_{-2}$, allora $\exists \varepsilon > 0 : (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon) \subseteq U$.

Allora

- $(-2, -2+\varepsilon) \subseteq U$
- $(-2, -2+\varepsilon) \subseteq A$ (se ε è abbastanza piccolo)

$\Rightarrow \quad (-2, -2+\varepsilon) \subseteq U \cap A \setminus \{-2\}$

$\Rightarrow \quad A \cap U \setminus \{-2\} \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{U}_{-2}$

$\Rightarrow \quad -2$ è p.d.a. per A.

PER CASA: FAR VEDERE CHE -1 È P.D.A. PER A.

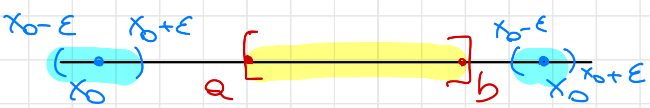
COROLLARIO: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Allora $\forall x_0 \in [a,b]$, x_0 è P.D.A. per (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$.

dim

$x_0 \in (a,b)$: segue dal corollario precedente.

$x_0 = a$ o $x_0 = b$: si dimostra come nell'esempio. $\blacksquare$

OSS: $x_0 \notin [a,b]$, allora x_0 non è P.D.A. per (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$.



PROPOSIZIONE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

x_0 è P.D.A. per A se e solo se:

(i) $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad A \cap \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

(ii) $x_0 = +\infty$ $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad A \cap (n, +\infty) \neq \emptyset$

(iii) $x_0 = -\infty$ $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad A \cap (-\infty, M) \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad A \cap (-\infty, -n) \neq \emptyset$

PROPRIETÀ DI $\mathbb{Q}$

DEF: diciamo che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è DENSO se $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall U \in \mathcal{I}_x$, $\exists a \in A$ con $a \in U$.

TEOREMA

$\mathbb{Q}$ è DENSO in $\mathbb{R}$, cioè $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall U \in \mathcal{I}_x$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale per cui $q \in U$.

dim

La dimostrazione si basa su:

- PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE
- ogni $S \subseteq \mathbb{N}$ ha MINIMO

CASO 1: $x_0 > 0$, facciamo vedere che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ con $(x_0, x_0+\varepsilon)$.

Abbiamo $x_0 > 0$, $\varepsilon > 0$.

ARCHIMEDE $\rightsquigarrow$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \bar{m} > \frac{1}{\varepsilon}$.

Consideriamo

$$S = \{ m \in \mathbb{N} : m > \bar{n} \cdot x_0 \}$$

PROP 2 SOPRA $\Rightarrow$ $\exists \min S =: \bar{m}$.

Consideriamo $q = \dfrac{\bar{m}}{\bar{n}}$, abbiamo che:

- $\bar{m} \in S \Rightarrow \bar{m} > \bar{n} \cdot x_0 \Rightarrow \dfrac{\bar{m}}{\bar{n}} > x_0$, cioè

  $q > x_0$

- $\bar{m} = \min S$, e $\bar{m} > \underbrace{\bar{m} - 1}_{\notin S}$, quindi

  $\bar{m} - 1 \leq \bar{n} \cdot x_0$, cioè

  $$\frac{\bar{m} - 1}{\bar{n}} \leq x_0$$

  $$\hookrightarrow \quad \frac{\bar{m}}{\bar{n}} - \frac{1}{\bar{n}} \leq x_0 \text{, cioè}$$

  $$q = \frac{\bar{m}}{\bar{n}} \leq x_0 + \frac{1}{\bar{n}} < x_0 + \varepsilon .$$

$\Rightarrow \quad q \in (x_0, x_0 + \varepsilon).$

ESERCIZI:

(i) dim che se f è invertibile, allora f^{-1} è invertibile e $(f^{-1})^{-1} = f$.

(ii) dim che se $f: A \to C$ e $g: C \to D$ sono biettive, con $f(A) \subseteq C$, allora $g \circ f$ è biettiva.

(iii) dim che, dati $f: A \to \mathcal{P}(A)$ iniettiva e l'insieme $S = \{a \in A : a \notin A\}$, se $s \in A$ è tale che $f(s) = S$, allora

- $s \in S \Rightarrow s \notin S$
- $s \notin S \Rightarrow s \in S$

(i) $f: A \to B$ è inv, cioè $\exists f^{-1}: B \to A$:

$$\begin{cases} (f \circ f^{-1})(x) = x, & \forall x \in B. \\ (f^{-1} \circ f)(x) = x, & \forall x \in A. \end{cases}$$

DIM che $f^{-1}: B \to A$ è INV vuol dire trovare $g: A \to B$:

$$\begin{cases} (f^{-1} \circ g)(x) = x, & \forall x \in A \\ (g \circ f^{-1})(x) = x, & \forall x \in B. \end{cases}$$

Le formule sopra mi dicono che $g = f$ soddisfa le condizioni, quindi f^{-1} é INVERTIBILE e $(f^{-1})^{-1} = g = f$.

OSS: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

(ii) $f: A \to C$ e $g: C \to D$ biettive, allora $g \circ f$ é biettiva.

$g \circ f: A \to D$

SURIETTIVA: $\forall d \in D \quad \exists a \in A : (g \circ f)(a) = d$

SUR DI g: $\forall d \in D \quad \exists c \in C : g(c) = d$

SUR DI f: $\forall c \in C \quad \exists a \in A : f(a) = c$

Sia $d \in D \overset{\text{SUR DI } g}{\rightsquigarrow} \exists c \in C : g(c) = d$

$\rightsquigarrow \exists a \in A : f(a) = c$

Quindi $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(c) = d$

INIETTIVITÀ: $\forall a_1, a_2 \in A$, se $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$

allora $a_1 = a_2$

$a_1, a_2 \in A$, $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$

INIETTIVITÀ DI g

$g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$

$\Rightarrow a_1 = a_2$ per l'INIETTIVITÀ DI f.