06/05/2022

LEZIONE 25

Riepilogo: continuità di f monotone, inverse e composte, definizione di o PICCOLO e prime proprietà.

dim il teorema sugli o piccoli

(i) e (ii): come per $o(1)$, $x \to 0$.

(iii) $f = o(o(x^\alpha))$, $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{o(x^\alpha)} = 0$$

Vogliamo dim che $g = o(x^\alpha)$, cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} \overset{??}{=} 0$$

Si ha $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} \cdot \frac{o(x^\alpha)}{o(x^\alpha)}$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{f(x)}{o(x^\alpha)}}_{\to 0,\ x\to 0} \cdot \underbrace{\frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}}_{\to 0,\ x\to 0} = 0 \cdot 0 = 0.$$

(iv) Vogliamo dim che $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$, cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \cdot o(x^\beta)}{x^{\alpha+\beta}} \overset{??}{=} 0$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^\alpha} \cdot o(x^\beta)}{\underbrace{\cancel{x^{\alpha}}{}^{+\beta}}_{x^\alpha \cdot x^\beta}} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^\beta)}{x^\beta} = 0.$$

(v) $$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta)}{x^{\alpha+\beta}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}}_{\downarrow\, x\to 0 \atop 0} \cdot \underbrace{\frac{o(x^\beta)}{x^\beta}}_{\downarrow\, x\to 0 \atop 0} = 0,$$

cioè $\quad o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$.

(vi) Dim che $o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$.

Si ha

$$o(\underbrace{x^\alpha + o(x^\alpha)}_{\ell(x)}) = \ell(x) \cdot o(1) = (x^\alpha + o(x^\alpha)) \cdot o(1)$$

$$= x^\alpha \cdot o(1) + o(x^\alpha) \cdot o(1) = o(x^\alpha) + \overbrace{o(o(x^\alpha))}^{o(x^\alpha)}$$

$$= o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = \overset{\text{"}k}{2}\, o(x^\alpha) = o(x^\alpha).$$

(viii) Vogliamo dim che $o(x^\alpha)+o(x^\beta)=o(x^{\min\{\alpha,\beta\}})$.

Supponiamo che $\alpha<\beta$, questa prop ci dice che

$o(x^\alpha)+o(x^\beta)=o(x^\alpha)$,

OSS: $\alpha<\beta \Rightarrow x^\alpha > x^\beta$ per $x\to 0$, infatti

se $\alpha=2$, $\beta=3$, $x=\frac{1}{1000} \Rightarrow x^\alpha=10^{-6}$, $x^\beta=10^{-9}$

cioè bisogna tenere l'approssimazione "peggiore".

Si ha $(\alpha\leq\beta)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^\alpha)+o(x^\beta)}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}}_{\to 0,\ x\to 0}+\frac{o(x^\beta)}{x^\alpha}\Big)=0$$

Cons il secondo addendo:

$$\frac{o(x^\beta)}{x^\alpha}=\underbrace{\frac{o(x^\beta)}{x^\beta}}_{\substack{\downarrow\, x\to 0\\ 0}}\cdot\underbrace{\frac{x^\beta}{x^\alpha}}_{\substack{\downarrow\\ 0,\ \text{se } \alpha<\beta,\ \text{o a } 1,\ \text{se } \alpha=\beta}}\to 0$$

OSS: Cosa succede se abbiamo $x^\beta+o(x^\alpha)$?

Se $\beta\leq\alpha$, allora lasciamo $x^\beta+o(x^\alpha)$

Se $\beta>\alpha$, allora $x^\beta+o(x^\alpha)=o(x^\alpha)$

OSS: tutto quello che abbiamo scritto per $o(x^\alpha)$, $x \to 0$ con $\alpha > 0$, vale se consideriamo $o(|x-x_0|^\alpha)$, $x \to x_0$ e $\alpha > 0$.

esempi: Sappiamo che $\sin(x) = x + o(x)$, $x \to 0$.

Allora

$$(\sin(x))^2 = (x+o(x))^2 = x^2 + o(x) \cdot o(x) + 2x \cdot o(x)$$
$$= x^2 + o(x^2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

OSS: non è vero che se $f(x) = P(x) + o(x^n)$, $x \to 0$, allora $(f(x))^2 = (P(x))^2 + o(x^{2n})$, $x \to 0$.

Ricordiamo che

$$\cos(x) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{\text{Polinomio}} + o(x^2), \quad x \to 0$$

Allora

$$(\cos(x))^2 = 1 + \frac{x^4}{4} + \overset{o(x^4)}{\overset{\shortparallel}{(o(x^2))^2}} - x^2 + \overset{o(x^2)}{\overset{\shortparallel}{2o(x^2)}} - \overset{o(x^4)}{\overset{\shortparallel}{x^2 o(x^2)}}$$
$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} + \underbrace{o(x^2) + o(x^4)}_{= o(x^2)}$$
$$= 1 - x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

OSS: per avere un'appr di $(\cos(x))^2$ di ordine 4 per $x \to 0$ non basta avere un'app di $\cos(x)$ di ordine 2 per $x \to 0$.

SVILUPPO DI FUNZIONI NELL'INTORNO DI UN PUNTO

DEF: $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto interno di A ($\exists \delta > 0$ tale per cui $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$). Diciamo che esiste "LO SVILUPPO DI f IN UN INTORNO DI x_0 DI ORDINE n" se esiste un polinomio

$P(x)$ DI GRADO n

tale per cui

$$f(x) = P(x) + o\left((x - x_0)^n\right), \quad x \to x_0.$$

OSS: f si può scrivere come "polinomio di grado n" + "o piccolo di ordine n" per $x \to x_0$.

OSS: l'approssimazione con un polinomio di grado n è la migliore possibile se si lega un o piccolo di ordine n.

DOMANDA: $P(x)$ è unico?

RISPOSTA: sì, cioè data f, x_0 e n come sopra, se esiste $P(x)$ polinomio di grado n tale per cui $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n), x \to x_0$, allora $P(x)$ è unico, cioè se esiste $Q(x)$ polinomio di grado n con $f(x) = Q(x) + o((x-x_0)^n), x \to x_0$, allora $P = Q$.

Dimostriamo ora che P è unico nel caso $n = 2$, cioè dim che se esistono due polinomi di ordine 2, P e Q, con

$$f(x) = P(x) + o((x-x_0)^2), \; x \to x_0,$$

$$f(x) = Q(x) + o((x-x_0)^2), \; x \to x_0,$$

allora $P = Q$. Scriviamoli in forma astratta:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2,$$
con $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

2 polinomi sono uguali se e solo se sono uguali tutti i coefficienti.

Possiamo sostituire x con $x - x_0$ nella scrittura di P e Q se modifichiamo i coefficienti delle potenze di x:

$$P(x) = a_0' + a_1'(x - x_0) + a_2'(x - x_0)^2,$$
$$Q(x) = b_0' + b_1'(x - x_0) + b_2'(x - x_0)^2,$$
$a_i', b_i' \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$.

$P(x) = 1 - x + 2x^2$, $x_0 = 1$, abbiamo che

$$P(x) = a_0' + a_1'(x-1) + a_2'(x-1)^2$$
$$= a_0' + a_1' x - a_1' + a_2'(x^2 - 2x + 1)$$
$$= (a_0' - a_1' + a_2') + x(a_1' - 2a_2') + x^2 a_2'$$

Imponiamo le condizioni:

$$\begin{cases} 1 = a_0' - a_1' + a_2' \\ -1 = a_1' - 2a_2' \\ 2 = a_2' \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0' = 2 \\ a_1' = 3 \\ a_2' = 2 \end{cases}$$

$$P(x)-Q(x)=\cancel{\mathcal{L}(x)}-o((x-x_0)^2)-(\cancel{\mathcal{L}(x)}-o((x-x_0)^2))$$

$$=o((x-x_0)^2) \qquad \left[\, o(\mathcal{L})-o(\mathcal{L})=o(\mathcal{L}) \right.$$

$x \to x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}(P(x)-Q(x))=\lim_{x\to x_0} o((x-x_0)^2)=0$$

e

$$\lim_{x\to x_0}(P(x)-Q(x))=P(x_0)-Q(x_0)=a'_0-b'_0$$

UNICITÀ DEL LIMITE

$$\Rightarrow \quad 0=a'_0-b'_0 \Rightarrow a'_0=b'_0$$

Quindi

$$P(x)-Q(x)=\cancel{a'_0}+a'_1(x-x_0)+a'_2(x-x_0)^2$$
$$-\cancel{b'_0}-b'_1(x-x_0)-b'_2(x-x_0)^2$$
$$=(a'_1-b'_1)(x-x_0)+(a'_2-b'_2)(x-x_0)^2$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)-Q(x)}{x-x_0}=(a'_1-b'_1)+(a'_2-b'_2)(x-x_0).$$

Inoltre

$$\frac{P(x)-Q(x)}{x-x_0}=\frac{o((x-x_0)^2)}{x-x_0}=o((x-x_0)^1),\ x\to x_0.$$

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)-Q(x)}{x-x_0} = a'_1 - b'_1$$

e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)-Q(x)}{x-x_0} = 0$$

$\Rightarrow a'_1 - b'_1 = 0$

cioè $a'_1 = b'_1$

Consideriamo

$$\frac{P(x)-Q(x)}{(x-x_0)^2} = \begin{cases} a'_2 - b'_2 \\ o(1),\ x \to x_0 \end{cases}$$

Per $x \to x_0$ si ha

$$\frac{P(x)-Q(x)}{x-x_0} \begin{cases} \xrightarrow{x \to x_0} a'_2 - b'_2 \\ \to 0 \end{cases} \Rightarrow a'_2 = b'_2.$$

$\Rightarrow P = Q.$

DEF: Se f ammette uno sviluppo di ordine n in x_0, allora il polinomio P (UNICO) di grado n che soddisfa

$$f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n),\ x \to x_0,$$

si dice POLINOMIO DI TAYLOR DI f CENTRATO in x_0 di ORDINE n, e lo indichiamo con

P_{f,n,x_0}

esempio: il polinomio di Taylor del $\sin(x)$ in 0 di ordine 1 è $P_{\sin,1,0}(x) = x$.

DEF: $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto interno di A, $f = o(1)$, $x \to x_0$.

Se esiste $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\beta \in \mathbb{N}_0$ $(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ tale per cui

$$f(x) = \alpha (x - x_0)^\beta + o\left((x - x_0)^\beta\right), \quad x \to x_0,$$

allora

- β viene detto ORDINE DI INFINITESIMO di f per $x \to x_0$.

- $\alpha (x - x_0)^\beta$ viene detta PARTE PRINCIPALE di INFINITESIMO di f per $x \to x_0$.

OSS: La parte principale di infinitesimo di f per $x \to x_0$ non è altro che il termine di grado più basso del polinomio di Taylor di f centrato in x_0.

esempio : $\sin(x) = x + o(x)$, $x \to 0$ ($\alpha = 1$, $\beta = 1$)

$\Rightarrow$ l'ordine di inf del sin per $x \to 0$ è 1,

e la parte principale è x.

$$\cos(x) - 1 = \underbrace{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\Downarrow} = \underbrace{o(x)}_{\Downarrow} , \quad x \to 0$$

SI HANNO INFORMAZIONI DALL'ORDINE 2 IN AVANTI.

NON SI HANNO INFORMAZIONI ALL'ORDINE 1

SVILUPPI DI FUNZIONI NOTE

① $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Si ha

$$f(x) = 1 + x + o(x) \qquad \text{ORDINE } 1$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{ORDINE } 2$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \vdots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad \text{ORDINE } n \in \mathbb{N}$$

② $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$. Si ha

$$\sin(x) = x + o(x) \qquad \text{ORDINE } 1$$

$$= x + o(x^2) \qquad \text{ORDINE } 2$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

③ $f(x) = \cos(x)$, $\quad x_0 = 0$. Si ha

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$= \sum_{K=0}^{n} (-1)^K \frac{x^{2K}}{(2K)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

④ $f(x) = \arctan(x)$, $\quad x_0 = 0$. Si ha

$$\arctan(x) = x + o(x^2)$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$
$$= \sum_{K=0}^{n} (-1)^K \frac{x^{2K+1}}{2K+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

5. $f(x) = \ln(x+1)$, $x_0 = 0$. Si ha

$$\ln(x) = x + o(x)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

6. $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$. Si ha

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$$
$$= 1 + x + x^2 + o(x^2)$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$