17/05/2022

# LEZIONE 30

Riepilogo: Teorema di Lagrange e corollari, punti stazionari.

Abbiamo visto la relazione tra punti stazionari e derivata prima di una funzione, studiamo la rel tra punti stazionari e derivata seconda di una funzione.

## COROLLARIO DEL COROLLARIO I DI LAGRANGE

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in $(a,b)$.

Allora valgono le seguenti proprietà.

(i) $f'' > 0$ in $(a,b) \Rightarrow f'$ è STRETTAMENTE CRESCENTE in $(a,b)$

(ii) $f'' < 0$ in $(a,b) \Rightarrow f'$ è STRETTAMENTE DECRESCENTE in $(a,b)$

(iii) $f'' = 0$ in $(a,b) \Rightarrow f'$ è COSTANTE in $(a,b)$

## COROLLARIO

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ continua in $(a,b)$, sia $x_0 \in (a,b)$ un punto stazionario per $f$, e supp che esista $\delta>0$ : $f$ è derivabile 2 volte in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

(i) se $f''>0$ in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, allora

$x_0$ è un punto di minimo locale interno.

(ii) se $f''<0$ in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, allora

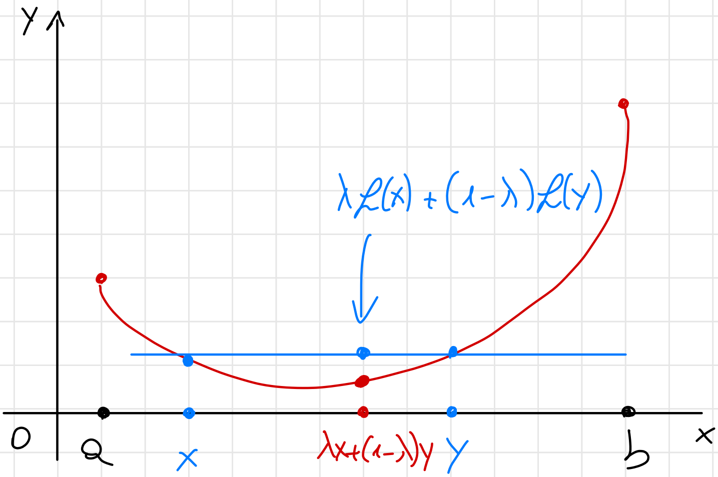
$x_0$ è un punto di massimo locale interno.

# CONVESSITÀ DI UNA FUNZIONE

DEF: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, diciamo che $f$ è CONVESSA in $A$ se $\forall x, y \in A$, con $x < y$ e $[x,y] \subseteq A$, e $\forall \lambda \in [0,1]$, si ha

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

$A = (a,b)$




Sia $\lambda \in [0,1]$, allora il punto

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in [x,y]$$

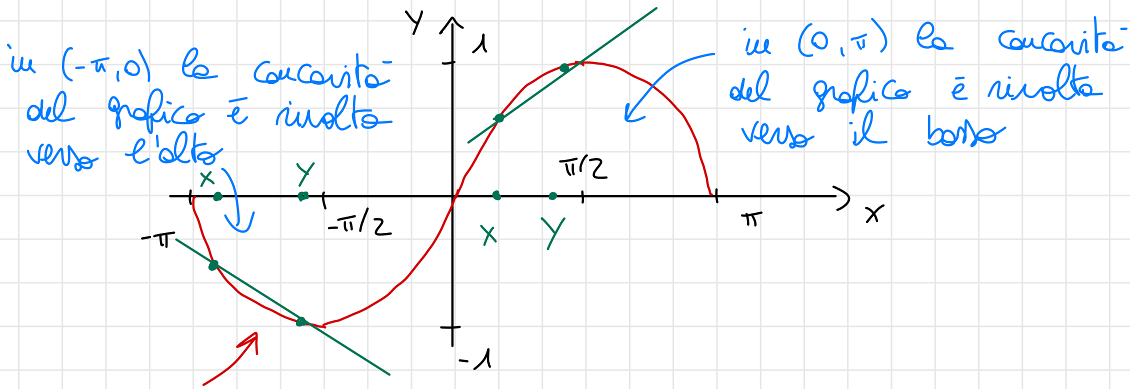
OSS: una funzione è convessa se, fissati due punti $x, y \in (a,b)$, il grafico di $f$ tra $x$ e $y$ sta sotto la retta che passa per $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

OSS: dove la fz è convessa, il grafico ha una concavità rivolta verso l'alto.

DEF: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ si dice CONCAVA in $(a,b)$ se $-f$ è CONVESSA in $(a,b)$.

OSS: dove la funzione $f$ è CONCAVA, il suo grafico ha la concavità rivolta verso il basso.

esempio: $f(x)=\sin(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$.




$f$ è CONVESSA in $[-\pi,0]$ e CONCAVA in $[0,\pi]$.

$f$ NON È NÉ CONCAVA NÉ CONVESSA in $(-\pi,\pi)$.

OSS: usare la definizione per verificare convessità e concavità è molto complicato.

TEOREMA

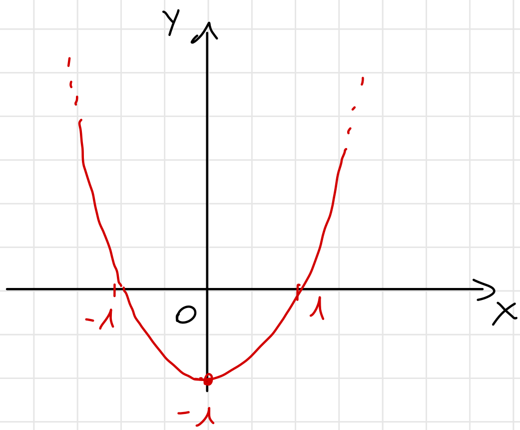
Sia $f:(a,b)\Rightarrow\mathbb{R}$ derivabile in $(a,b)$.

(i) $f$ è CONVESSA se e solo se $f'$ è crescente in $(a,b)$

(ii) $f$ è CONCAVA se e solo se $f'$ è decrescente in $(a,b)$

esempio: $f(x)=x^2-1$, $f'(x)=2x$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f'$ è CRESCENTE in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f$ è CONVESSA in $\mathbb{R}$.




OSS: è più conveniente studiare la der seconda per la convessità piuttosto che la derivata prima perché in generale è più semplice derivare e studiare un segno piuttosto che studiare crescenza o decrescenza di una funzione.

TEOREMA

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile 2 volte in $(a,b)$.

(i) $f$ è CONVESSA se e solo se $f''>0$ in $(a,b)$

(ii) $f$ è CONCAVA se e solo se $f''<0$ in $(a,b)$

OSS: le funzioni convesse sono fondamentali nei problemi di ottimizzazione (RICERCA OPERATIVA).

esempio: $f(x)=\sin(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$, derivando 2 volte si ha:

$f'(x)=\cos(x)$, $f''(x)=-\sin(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$.

$\sin(x)<0$ in $(-\pi,0)\Rightarrow f$ è CONVESSA in $(-\pi,0)$.

$\sin(x)>0$ in $(0,\pi)\Rightarrow f$ è CONCAVA in $(0,\pi)$.

DEF: Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. $x_0$ viene detto PUNTO DI FLESSO se esiste $\delta > 0$ tale per cui $f$ è CONCAVA in $(x_0-\delta, x_0)$ e CONVESSA in $(x_0, x_0+\delta)$, o viceversa.

TEOREMA

Se $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ è un punto di flesso e $f$ è derivabile 2 volte in $(a,b)$, allora $f''(x_0) = 0$.

OSS: non è vero che se $f''(x_0) = 0$ allora $x_0$ è un punto di flesso per $f$: infatti $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ ma $x_0 = 0$ è un punto di MINIMO.

TEOREMA

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ con $f$ derivabile 2 volte in un intorno di $x_0$ e $f''(x_0) = 0$.

(i) se $f''(x) < 0$ $x \in (x_0-\delta, x_0)$ e $f''(x) > 0$ $x \in (x_0, x_0+\delta)$ (o VICEVERSA) allora $x_0$ è un punto di flesso.

DEF: Se $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ punto di flesso ed $f$ derivabile 2 volte in $x_0$, allora:

(i) $x_0$ è PUNTO DI FLESSO ORIZZONTALE se $f'(x_0) = 0$.

(ii) $x_0$ è PUNTO DI FLESSO OBLIQUO se $f'(x_0) \neq 0$.

# ASINTOTI

ovvero, limiti agli estremi del dominio.

Stiamo cercando delle rette che approssimano il comportamento del grafico della funzione considerata.

DEF: Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, diciamo che $x = a$ (o $x = b$) è un ASINTOTO VERTICALE per $f$ se:

(i) $a \in \mathbb{R}$ (o $b \in \mathbb{R}$);

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ $\left(\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty\right)$.

esempio: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$(a,b) = (-\infty, 0)$: $a = -\infty$ NON SODDISFA (i)

$b = 0$ soddisfa (i), e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\Rightarrow$ $x=0$ è un ASINTOTO VERTICALE per $f$.

$(a,b)=(0,+\infty)$ : $b=+\infty$ non soddisfa (i), mentre $a=0$ sì.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$\Rightarrow$ $x=0$ è un ASINTOTO VERTICALE per $f$

OSS: Una volta calcolato $\lim_{x\to 0^-}$ so che $x=0$ è un A.V. Calcolare $\lim_{x\to 0^+}$ serve per studiare il comportamento di $f$ quando $x$ tende a $0$ da destra.

OSS: non è detto che, se $f$ è def su $(a,x_0)\cup(x_0,b)$, allora $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$,

infatti $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{+\infty} = +\infty.$$

DEF: • Sia $f: (-\infty, m) \to \mathbb{R}$, diciamo che la retta $y = ax+b$ è ASINTOTO a $-\infty$ per $f$ se

$$\lim_{x \to -\infty} \left( f(x) - (ax+b) \right) = 0.$$

• Sia $f: (M, +\infty) \to \mathbb{R}$, diciamo che la retta $y = ax+b$ è ASINTOTO a $+\infty$ per $f$ se

$$\lim_{x \to +\infty} \left( f(x) - (ax+b) \right) = 0.$$

• La retta $y = ax+b$ è ASINTOTO ALL' INFINITO per $f$ se è ASINTOTO A $+\infty$ o A $-\infty$.

DOMANDA: Come troviamo gli asintoti all' infinito?

Non si può verificare la def per tutti gli $a, b \in \mathbb{R}$ ma bisogna selezionare quelli plausibili.

OSS: Gli asintoti all' infinito, se esistono, sono unici.

Vogliamo che

$$\lim_{x \to -\infty} \left( f(x) - (ax+b) \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \overset{\nearrow -\infty}{x} \underbrace{\left( \frac{f(x)}{x} - a - b/x \right)}_{\to \text{ deve andare a } 0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - a - \underbrace{b/x}_{\to 0 \text{ per } x \to -\infty} \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - a \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} (a) = a$$

Se esiste $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$, ho trovato il candidato per "$a$".

Vogliamo adesso trovare $b$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left( f(x) - (ax+b) \right) = 0 \qquad a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \left( (f(x) - ax) - b \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \left( f(x) - ax \right) = b$$

Se $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) \in \mathbb{R}$, allora la retta

$$y = \underbrace{\left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}\right)}_{a} \cdot x + \underbrace{\left(\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax)\right)}_{b}$$

è ASINTOTO a $-\infty$ per $f$.

Un analogo ragionamento vale per $x \to +\infty$.

Introduciamo ora l'ultimo risultato su fz derivabili.

TEOREMA DI CAUCHY

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ con:

(i) $f, g$ sono continue in $[a,b]$;

(ii) $f, g$ sono derivabili in $(a,b)$;

(iii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale per cui:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

OSS: Se prendiamo $g(x) = x$, allora $g'(x) = 1 \neq 0$

e
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

CAUCHY $\Rightarrow$ LAGRANGE

Il viceversa non è vero: $f$ e $g$ sodd le hp di Lagrange, quindi $\exists\, c_f \in (a,b)$, $\exists\, c_g \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_f), \qquad \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c_g),$$

e
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_f)}{g'(c_g)}$$

$c_f$ e $c_g$ sono a priori diversi

LAGRANGE $\not\Rightarrow$ CAUCHY