03/05/2022

LEZIONE 24

Riepilogo: teorema di Weierstrass e corollari, teorema dei valori intermedi, limite di fz composta.

CONTINUITÀ DI CERTE CLASSI FUNZIONI

- FUNZIONI MONOTONE

CRESCENTI: $f: A \to \mathbb{R}$ è crescente se $\forall x, y \in A$,

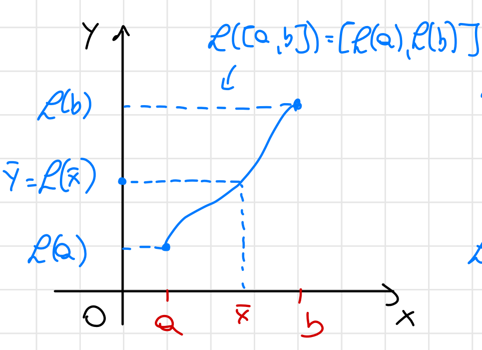
$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ [ST CRESCENTI: $f(x) < f(y)$]

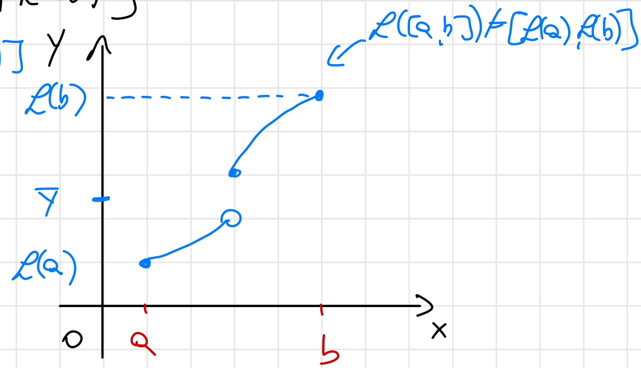
DECRESCENTI: $f: A \to \mathbb{R}$ è decrescente se $\forall x, y \in A$,

$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ [ST DECRESCENTI: $f(x) > f(y)$]

OSS: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. allora

$$f([a,b]) \subseteq [f(a), f(b)]$$





TEOREMA

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora

f è continua in $[a,b]$ se e solo se $f([a,b])$ è un intervallo. In particolare:

f CRESCENTE $\Rightarrow f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

f DECRESCENTE $\Rightarrow f([a,b]) = [f(b), f(a)]$

• FUNZIONE INVERSA

Sia $f: A \to B$, f ammette una funzione inversa se $\exists g: B \to A$: $(f \circ g)(x) = x \quad \forall x \in B$

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A$$

g è unica, e la indichiamo con f^{-1} e la chiamiamo FUNZIONE INVERSA di f.

• $f: A \to B$ è invertibile se e solo se è biettiva, cioè è iniettiva e suriettiva.

• $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ strettamente monotona, allora $f: [a,b] \to f([a,b])$ è invertibile.

TEOREMA

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e str. monotona.
Allora $f^{-1}: f([a,b]) \to [a,b]$ è continua.

f STR MONOTONA + CONT $\Rightarrow f([a,b]) = [f(a), f(b)]$
o $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

f STR MONOTONA $\Rightarrow f^{-1}$ è STR MONOTONA

$\Rightarrow f^{-1}$ è CONTINUA per il teorema sulla cont delle funzioni monotone.

esempio: $f: \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$, $f(x) = tg(x)$
$\forall x \in \ldots$ f non è invertibile perché è suriettiva ma non è iniettiva.

$f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ def da $f(x) = tg(x)$ $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
è INVERTIBILE

$f^{-1}: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è l'arcotangente, e poiché
f è continua in ogni $[a,b] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, segue che $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ è continua in $\mathbb{R}$.

esercizio: det gli intervalli di $\mathbb{R}$ su cui seno e coseno sono invertibili.

- FUNZIONI COMPOSTE

$f: A \to \mathbb{R}$, $g: C \to \mathbb{R}$, la funzione composta $g \circ f: A' \to \mathbb{R}$, dove $A' = \{x \in A : f(x) \in C\}$, e $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A'$.

A volte supponiamo che $f(A) \subseteq C$.

TEOREMA

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e sia $g: C \to \mathbb{R}$, e consideriamo $g \circ f: A' \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A'$ tale per cui f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$.
Allora la funzione $g \circ f$ è continua in x_0.

APPROSSIMAZIONE LOCALE DI FUNZIONI

Pb: Abbiamo una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ e vogliamo studiare le proprietà di f vicino a un punto $x_0 \in A$.

In che senso approssimare f? Scrivere

$$f = P + R,$$

dove P ed R sono due funzioni con "P facile da studiare vicino a x_0" e con "R trascurabile vicino a x_0".

Lo studio di f si sposta allo studio di P, che si suppone di una forma più semplice.

Quali sono le funzioni più semplici da studiare?

Sono i POLINOMI, l'obiettivo diventa trovare un polinomio P tale per cui

$$f = P + \underbrace{(f - P)}_{\text{sarà il nostro } R \text{ (= resto)}}$$

con $f - P$ piccolo, cioè P simile ad f vicino a x_0.

DEF: Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, e sia x_0 p.d.a. per A.

Diciamo che "f e g SONO ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI" se (per $x \to x_0$)

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0

OPPURE

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

E

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In questo caso scriviamo $f \sim g, x \to x_0$.

esempio: $f(x) = x$, $g(x) = \sin(x)$, allora $f \sim g, x \to 0$,

infatti $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$, e

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (= \ell \neq 0)$$

OSS che $x \not\sim \sin(x)$, $x \to \pi$.

DEF: Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A. Diciamo che "g È UN o PICCOLO DI f per $x \to x_0$" se:

- $f \to 0$ per $x \to x_0$; $\quad f$ è INFINITESIMA per $x \to x_0$.
- $f \neq 0$ in un intorno di x_0;
- $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$

In questo caso scriviamo $g = o(f)$.

OSS: $g = o(f)$ per $x \to x_0$ allora $g \to 0$ per $x \to x_0$.

Infatti:

$$g(x) = f(x) \cdot \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Inoltre "g va a zero" più velocemente di f":
infatti il rapporto $\frac{g}{f}$ segue l'andamento dello 0 a numeratore e non di quello a denominatore.

Per essere precisi, data f infinitesima per $x \to x_0$,
con $o(f) = \{ g : g$ è un o piccolo di f per $x \to x_0 \}$.
La notazione corretta sarebbe quindi $g \in o(f)$ e
non $g = o(f)$. Si sceglie di usare questa perché

è più comodo a livello di conti.

DEF: Date $f, g: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, $f \neq 0$ in un intorno di x_0, diciamo che:

g È UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE AD f PER $x \to x_0$ SE:

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)}_{g \text{ ed } f \text{ INFINITESIMI}} = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}}_{g \text{ è "SUPERIORE AD } f\text{"}} = 0.$$

Cosa succede se come funzione f prendiamo la funzione costante uguale a 1?

DEF: $o(1)$, $x \to x_0$, indichiamo l'insieme delle funzioni che sono infinitesime per $x \to x_0$, cioè

$g = o(1)$, $x \to x_0$, se $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

OSS: $f = o(1)$, $x \to x_0$. Cosa possiamo dire se

$g = o(f)$, $x \to x_0$?

$$g(x) = \underbrace{f(x)}\cdot \underbrace{\frac{g(x)}{f(x)}}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} = f(x) \cdot o(1), \quad x \to x_0.$$

Abbiamo iniziato a fare "OPERAZIONI" con gli o piccoli.

esempio: sappiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \iff \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} - 1 \right) = 0.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\sin(x) - x}^{= g(x)}}{\underbrace{x}_{= f(x)}} = 0$$

$\Rightarrow$ $g = o(f)$, $x \to 0$

$$\sin(x) - x = o(x), \quad x \to 0$$

$$\sin(x) = x + o(x), \quad x \to 0.$$

$\to$ è il problema dell'approssimazione con $x_0 = 0$,

$f(x) = \sin(x)$, $P(x) = x$ e $R(x) = o(x)$.

Per casa: usare il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

per dimostrare che $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} o(x^2), \; x \to 0$.

OPERAZIONI TRA o PICCOLI , $o(1), x \to x_0$

(i) $K \cdot o(1) = o(1), \quad x \to x_0 \qquad \forall K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(ii) $o(1) \cdot o(1) = o(1), \; x \to x_0$.

dim

(i) Sia $f = o(1), x \to x_0$, sia $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\lim_{x \to x_0} (\underbrace{K \cdot f(x)}_{K \cdot o(1)}) = 0 \quad , x \to x_0$$

$\Rightarrow K \cdot f = o(1), x \to x_0 \Rightarrow K \cdot o(1) = o(1), \; x \to x_0$.

(ii) $f = o(1), x \to x_0, \quad g = o(1), x \to x_0$, si ha

$$\lim_{x \to x_0} (\underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{o(1) \cdot o(1)}) = 0 \Rightarrow f \cdot g = o(1), \; x \to x_0.$$

$\Rightarrow o(1) \cdot o(1) = o(1), \quad x \to x_0$.

ANCORA su $o(1)$:

(i) $o(1)+o(1)=o(1), \quad x\to x_0$;

(ii) $o(1)\cdot o(1)=o(1), \quad x\to x_0$;

(iii) $o(o(1))=o(1), \quad x\to x_0$.

dim PER CASA.

TEOREMA: Sia $\alpha>0$, e consideriamo $o(x^\alpha)$, $x\to 0$.

(i) $o(x^\alpha)=x^\alpha\cdot o(1)$

(ii) $k\cdot o(x^\alpha)=o(x^\alpha) \qquad \forall k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(iii) $o(o(x^\alpha))=o(x^\alpha)$

(iv) $x^\beta\cdot o(x^\alpha)=o(x^{\alpha+\beta}), \quad \forall\beta>0$.

(v) $o(x^\alpha)\cdot o(x^\beta)=o(x^{\alpha+\beta}), \quad \forall\beta>0$.

(vi) $o(x^\alpha+o(x^\alpha))=o(x^\alpha)$.

(vii) $o(x^\alpha)+o(x^\beta)=o(x^{\min\{\alpha,\beta\}})$.