02/05/2022

LEZIONE 23

Riepilogo: classificazione delle discontinuità, estensione per continuità di una funzione, teorema di esistenza degli zeri.

OSS: data $f: A \to \mathbb{R}$, i punti $c \in A$ tali per cui $f(c) = 0$ sono detti "ZERI DI f".

Torniamo al teorema di Weierstrass:

OSS: i punti x_m, x_M tali per cui si ha $(x_m, x_M \in [a,b])$

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a,b]$$

in generale NON SONO UNICI, cioè possono esistere $t_m, t_M \in [a,b]$, con $t_m \neq x_m$, $t_M \neq x_M$, tali per cui

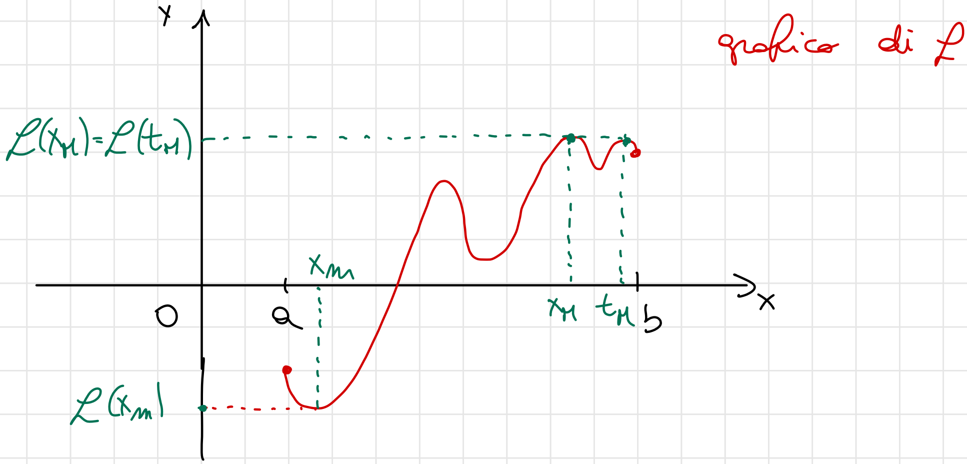
$$f(t_m) \leq f(x) \leq f(t_M) \quad \forall x \in [a,b].$$

Quello che è unico è il valore del MINIMO e del MASSIMO di f in $[a,b]$, cioè

$f(t_m) = f(x_m) \rightsquigarrow$ MINIMO UNICO

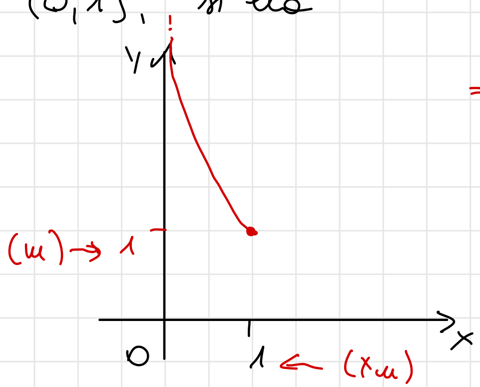
$f(t_M) = f(x_M) \rightsquigarrow$ MASSIMO UNICO

Graficamente:



In generale, si indica con M il massimo di f in $[a,b]$ e con m il minimo di f in $[a,b]$.

Controesempi: se $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora potrei non avere massimo e/o minimo di f: se per esempio consideriamo $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in (0,1]$, si ha



$\Rightarrow$ f ha minimo 1 e $x_m = 1$, ma non ha massimo in $(0,1]$.

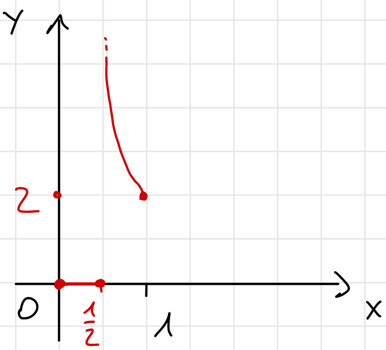
per casa: costruire un esempio in cui f non ha min e un esempio in cui f non ha né max né min.

$f : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ non continua, allora possono non esistere max e min di f in $[a,b]$, infatti se prendiamo $f : [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1/2}, & x \in (1/2, 1], \\ 0, & x \in [0, 1/2], \end{cases}$$

f è continua in $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$

abbiamo che



dim (WEIERSTRASS)

Dimostriamo che f ammette massimo in $[a,b]$.

Non è detto che il massimo di f esista, ma sicuramente esiste l'estremo superiore di f in $[a,b]$.

Poniamo $B := f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$.

$M := \sup B$, o $M \in \mathbb{R}$ oppure $M = +\infty$.

Studiamo i due casi e dimostriamo che:

1 : $M \in \mathbb{R} \Rightarrow M = \max B$

2 : $M = +\infty \Rightarrow$ OTTENIAMO UNA CONTRADDIZIONE

2) non si può verificare, cioè $M \in \mathbb{R}$ e quindi da 1) segue che esiste $\max B$, cioè $\exists b \in B$ tale per cui $b = M$.

$b \in B$
$b \geq t \quad \forall t \in B$

$B = \{f(x) : x \in [a,b]\}$, quindi trovare $b \in B$ tale per cui $b \geq t \quad \forall t \in B$ vuol dire:

$$\underbrace{\exists x_M \in [a,b]}_{\exists b \in B} : \underbrace{\forall x \in [a,b]}_{\forall t \in B} \quad \underbrace{f(x_M)}_{b} \geq \underbrace{f(x)}_{t}$$

1: $M \in \mathbb{R}$, $M = \sup B$

$\rightsquigarrow$ (CARATT SUP) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t \in B$ tale per cui $\quad t + \varepsilon > M$

$$\Downarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in [a,b]$ tale per cui $f(x_\varepsilon) + \varepsilon > M$

Scegliamo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, abbiamo $x_n \in [a,b]$ tale per cui $f(x_n) + \frac{1}{n} > M$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, cioè

$$M - \frac{1}{n} < \underbrace{f(x_n)}_{\in B} \leq M$$

$\in B$ e $M \geq t \quad \forall t \in B$

Consideriamo la successione $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, si ha

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad n \to +\infty$$

$$M \qquad\qquad M$$

$\Rightarrow$ dal teo dei due carabinieri segue che

$$\exists \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M$$

Consideriamo la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, è LIMITATA

$\Rightarrow$ il teorema di BOLZ-WEIERSTRASS ci dice che

$\exists \{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ CONVERGENTE, cioè

$\exists \lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = c \in \mathbb{R}$

(se $\exists \lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = c$, allora $a \le x_{k_n} \le b$)
$\Rightarrow c \in \mathbb{R}$.

$f(x_n) \to M$, $n\to+\infty$

$x_{k_n} \to c$, $n\to+\infty$

$f(x_{k_n}) \to ?$, $n\to+\infty$?

Poiché $\{f(x_{k_n})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ è una sottosuccessione di $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, allora converge allo stesso limite, cioè

$\exists \lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = M$.

Poiché f è continua in $[a,b]$ e $c\in[a,b]$, allora

$x_{k_n} \to c$ per $n\to+\infty$ $\Rightarrow$ $f(x_{k_n}) \to f(c)$ per $n\to+\infty$

$\Rightarrow$ PER L'UNICITÀ DEL LIMITE segue che

$M = f(c)$, cioè abbiamo trovato $c\in[a,b]$
tale per cui $\underbrace{f(c)}_{\in B} = M \ge \underbrace{f(x)}_{\in B}$ $\forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow$ posto $x_M = c$, abbiamo il punto di massimo.

2 : $M = +\infty$

Ripetendo la costruzione del punto 1 troviamo che esistono $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ tali per cui:

$$f(x_n) \to M \quad (=+\infty) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$x_{k_n} \to c \in [a,b] \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$f(x_{k_n}) \to f(c) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ il primo e l'ultimo limite implicano che $\underset{+\infty}{\overset{\shortparallel}{M}} = f(c)$, assurdo perché $f(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in [a,b]$.

La dim dell'esistenza del minimo è analoga. ∎

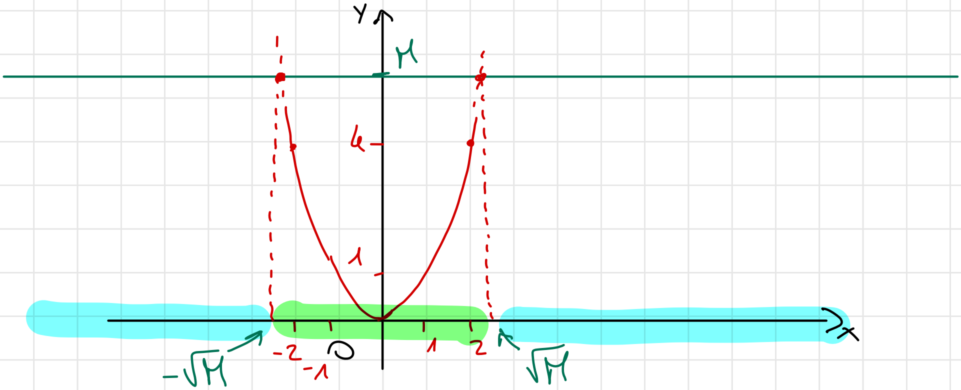
DOMANDA: se f è una fz continua che non soddisfa le Hp del teorema di Weierstrass, cosa possiamo dire sull'esistenza di max e/o min di f?

Supponiamo di avere $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ (a può essere $-\infty$ e b può essere $+\infty$), f continua. Cerchiamo delle cond su f che garantiscono esistenza di max e/o min.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. f è continua in $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$,

sappiamo che $Im(f) = f(\mathbb{R}) = f((-\infty, +\infty)) = [0, +\infty)$,

allora $\exists \min f(\mathbb{R}) = 0$, e $\nexists \max f(\mathbb{R})$.



Fissiamo $M > 0$, intersecando la retta $y = M$ col grafico di f dividiamo il dominio $\mathbb{R}$ di f in due parti:

: $x \in \mathbb{R} : f(x) \le M$.

: $x \in \mathbb{R} : f(x) > M$.

: $[-\sqrt{M}, \sqrt{M}]$ è chiuso e limitato, quindi applicando T di W. alla funzione $f: [-\sqrt{M}, \sqrt{M}] \to \mathbb{R}$

segue che $f(x)=x^2$ ammette MASSIMO e MINIMO in $[-\sqrt{M},\sqrt{M}]$.

$\max(f([-\sqrt{M},\sqrt{M}]))$ NON LO CONSIDERO, ma il $\min(f([-\sqrt{M},\sqrt{M}]))$ È IMPORTANTE:

$m \leq f(x), \quad \forall x \in [-\sqrt{M},\sqrt{M}]$

$f(x) \leq M, \quad \forall x \in [-\sqrt{M},\sqrt{M}],$

$M < f(x), \quad \forall x \in (-\infty, -\sqrt{M}) \cup (\sqrt{M}, +\infty).$

$\Rightarrow \quad m \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f(x)=x^2$ AMMETTE MINIMO su $\mathbb{R}$.

La condizione che permette di dire l'esistenza del minimo è che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

COROLLARIO (DI WEIERSTRASS)

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ continua su (a,b).

1) Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$, allora

f ha minimo in (a,b), cioè $\exists x_m \in (a,b)$ tale

per cui $f(x_m) \leq f(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

2) Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$, allora

f ha massimo in (a,b), cioè $\exists x_M \in (a,b)$ tale

per cui $f(x_M) \geq f(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

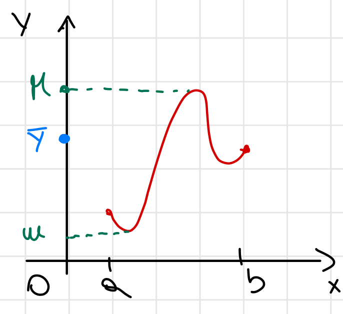
OSS: Una f può avere max e/o min indipendentemente da queste condizioni.

DOMANDA: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora

$\exists x_m, x_M \in [a,b]$: $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ $\forall x \in [a,b]$.

$f(x_m) = m = \min f([a,b])$

$f(x_M) = M = \max f([a,b])$



Preso $\bar{y} \in [m, M]$, esiste $\bar{x} \in [a, b]$ tale per cui $f(\bar{x}) = \bar{y}$? Sì, è il contenuto del prossimo teorema.

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $[m, M] = f([a, b])$, cioè $\forall y \in [m, M]$ $\exists x \in [a, b]$ tale per cui $f(x) = y$.

dim

$y = m$ o $y = M$ sappiamo (da Weierstrass) che $\exists x_m, x_M \in [a, b] : f(x_m) = m, f(x_M) = M$.

$y \in (m, M)$: consideriamo $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ def da $g(x) = f(x) - y$.

CASO 1: $x_m < x_M$, allora se consideriamo $g : [x_m, x_M] \to \mathbb{R}$ abbiamo che

- g è CONTINUA
- $$\left.\begin{aligned} g(x_m) &= f(x_m) - y = m - y < 0 \\ g(x_M) &= f(x_M) - y = M - y > 0 \end{aligned}\right\} g(x_m) \cdot g(x_M) < 0$$

$\Rightarrow \exists c \in (x_m, x_M) : g(c) = 0.$

$0 = g(c) = f(c) - y \Rightarrow f(c) = y$

$\Rightarrow$ Abbiamo trovato $c \in [a,b]$ tale per cui $f(c) = y$.

$\blacksquare$

TEOREMA LIMITE FZ COMPOSTA

Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subseteq B$.

- Sia x_0 p.d.a per A e sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Sia ℓ p.d.a per B e sia $\lim_{y \to \ell} g(y) = m \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se vale una delle seguenti condizioni:

- $\exists V \in \mathcal{I}_{x_0}$ tale per cui $f(x) \neq \ell \ \forall x \in V \cap A$
- $\ell \in B$ e $g(\ell) = m$ (g è CONTINUA IN ℓ)

Allora $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = m$.

ESERCIZI

1) Determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$ tale per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{x-2}-1}{\pi(x-2)}, & x > 2, \\ ax + \ln(5-2x), & x \leq 2, \end{cases}$$

risulti continua in $\mathbb{R}$.

2) Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(\pi x) + e^x, & x \in [0,1], \\ b\,\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} + \sin(2\pi x), & x < 0 \vee x > 1, \end{cases}$$

risulti continua in $\mathbb{R}$.

1) oss che f è def a tratti ed è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2^{x-2}-1}{\pi(x-2)} = \frac{1-1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{ F.I.}$$

$t = x-2$

$$\lim_{x-2\to 0^+} \frac{2^{x-2}-1}{\pi(x-2)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2^t-1}{\pi \cdot t}$$

$$\underset{y\to 0}{g(y)} = \frac{2^y-1}{\pi y}, \quad \underset{x\to 2}{f(x) = x-2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{\ln 2^t}-1}{\pi t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t\cdot\ln(2)}-1}{\pi t\cdot\ln(2)}\cdot\ln(2)$$

$$= \frac{\ln(2)}{\pi}$$

$$f(2) = 2a + \ln(5-4) = 2a$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(ax + \ln(5-2x)\right) = 2a$$

Per avere continuità di f in 2 impongo che:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\frac{\ln(2)}{\pi} = 2a = \cancel{2a}$$

$$a = \frac{\ln(2)}{2\pi}$$

OSS: 1 PARAMETRO $\longleftrightarrow$ 1 COND DI CONTINUITÀ in 2

2 PARAMETRI $\longleftrightarrow$ 2 COND DI CONTINUITÀ: in 0 e 1.

2) continuità in 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(a\cos(\pi x) + e^x\right) = a + 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(b \frac{\ln(1+x^2)\cdot x}{\underbrace{x \cdot x}_{x^2}} + \sin(2\pi x)\right) = b \cdot 0 = 0$$

$$f(0) = a\cos(\pi \cdot 0) + e^0 = a + 1$$

$$\Rightarrow \quad a + 1 = 0.$$

CONTINUITÀ in 1:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(b \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \sin(2\pi x)\right)$$

$$= \ln(2) \cdot b + 0 = \ln(2) \cdot b$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ f(1)}}{\lim_{x \to 1^-} f(x)} = \lim_{x \to 1^-} \left(a\cos(\pi x) + e^x\right) = a(-1) + e$$

$$= -a + e$$

$$\Rightarrow \quad \ln(2) \cdot b = -a + e$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ a + \ln(2) \cdot b - e = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ -1 + \ln(2) \cdot b - e = 0 \end{cases}$$