1/4/2022

LEZIONE 17

Riepilogo: algebra dei limiti, forme indeterminate, criterio della radice e del rapporto, calcolo dei limiti e limiti notevoli.

dim (CRITERIO RADICE)

ipotesi: • $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}: a_n \geq 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$

• $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

CASO $\ell \in [0, 1)$: vogliamo dim che

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq \bar{n}_\varepsilon \quad |a_n| < \varepsilon$.

Noi sappiamo che:

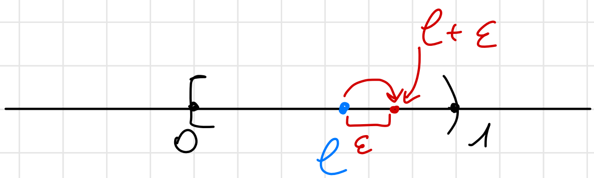
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq \bar{n} \quad |\sqrt[n]{a_n} - \ell| < \varepsilon$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - \ell < \varepsilon \iff \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon.$$

IDEA: "usare" la parte evidenziata in giallo, e scegliere ε in modo opportuno.

$$\underbrace{\sqrt[n]{a_n}}_{(a_n)^{\frac{1}{n}}} < \ell + \varepsilon \iff a_n < (\ell+\varepsilon)^n$$

$a_n \geq 0$ DEF per Hp.



Come posso scegliere ε in modo che $\ell+\varepsilon < 1$?

Posso scegliere $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$, in questo modo

$$\ell + \varepsilon = \ell + \frac{1}{2} - \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\ell}{2}}_{<\frac{1}{2}} < 1.$$

Fissiamo $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$, esiste $\tilde{n}$: $\forall n \geq \tilde{n}$ $\sqrt[n]{a_n} < \ell+\varepsilon$

$$\iff \underbrace{0 \leq}_{Hp} a_n < \underbrace{(\ell+\varepsilon)^n}_{q^n}, \quad q \in [0,1)$$

$\downarrow$ 0, $n \to +\infty$ $\quad$ $\downarrow$ 0, $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ il teorema dei 2 carabinieri ci garantisce che

$$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

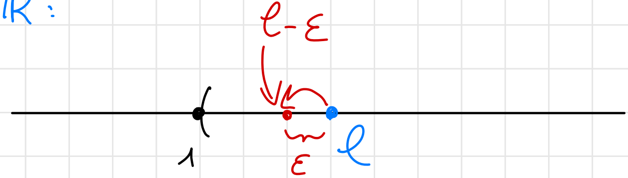
$\ell > 1$: Vogliamo dim che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

$\ell \in \mathbb{R}$ (CASO $\ell = +\infty$ PER CASA)

Sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq \bar{n} \qquad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$$

$\ell > 1$, $\ell \in \mathbb{R}$:



Cerchiamo $\varepsilon > 0$: $\ell - \varepsilon > 1$, una possibile scelta

$$\varepsilon = \frac{\ell - 1}{2}, \text{ si ha } \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} = \underbrace{\frac{\ell}{2}}_{> \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} > 1$$

Abbiamo allora che

$$\underbrace{(\ell - \varepsilon)^n}_{q^n,\ q > 1 \ \to\ +\infty} < a_n, \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

$\Rightarrow$ Teorema confronto I(ii) segue che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

∎

CALCOLO DEI LIMITI

① $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \forall a > 0.$

$a = 1$: $\sqrt[n]{1} = 1$, quindi $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$

$a > 1$: se $a > 1$ allora $\sqrt[n]{a} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$

Quindi $h_n := \sqrt[n]{a} - 1$, abbiamo che

$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \qquad h_n > 0$

$\Rightarrow \quad a = (1 + h_n)^n \underset{\text{BERNOULLI}}{\geq} 1 + n \cdot h_n \rightsquigarrow a \geq 1 + n \cdot h_n$

$a - 1 \geq n \cdot h_n$

$\frac{a-1}{n} \geq h_n$

$$0 < h_n \leq \frac{a-1}{n}$$

$0 \xleftarrow{n \to +\infty} h_n$; $\frac{a-1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{a-1}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow$ teorema dei 2 carabinieri : $\lim_{n \to +\infty} h_n = 0.$

Si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \to +\infty} (1 + h_n) = 1 + 0 = 1$$

CASO $a \in (0,1)$: se $a \in (0,1)$, allora

$b = \frac{1}{a} > 1$, e

$a = \frac{1}{b}$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

② $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. "$= n^{\frac{1}{n}} \to +\infty^0$ F.I."

Se ragioniamo come prima: $\sqrt[n]{n} > 1$ $\forall n \geq 2$,

$\sqrt[n]{n} - 1 = b_n > 0$.

Si ha $\sqrt[n]{n} = 1 + b_n$, $n \geq 2$.

IDEA: dim che $b_n \to 0$, $n \to +\infty$. Si ha

$$n = (1+b_n)^n \underset{\text{BERNOULLI}}{\geq} 1 + n \cdot b_n \rightsquigarrow b_n \leq \frac{n-1}{n}$$

Segue che

$$0 < b_n \leq \frac{n-1}{n}$$

$0 < b_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$, $\frac{n-1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$

NON SI POSSONO USARE I CARABINIERI

PASSAGGIO INTERMEDIO: dim che $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1$

$\sqrt[n]{\sqrt{n}} > 1$ $\forall n \geq 2$, quindi $c_n := \sqrt[n]{\sqrt{n}} - 1$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + c_n, \quad \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = (1+c_n)^n \underset{\text{BERNOULLI}}{\geq} 1 + n \cdot c_n \rightsquigarrow c_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}$$

Stimiamo c_n:

$$0 < c_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}$$

$$\downarrow n \to +\infty \qquad \downarrow n \to +\infty$$

$$0 \qquad ?$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F. I.}$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{n}}\left(1 - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}{\cancel{n}\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{+\infty} = 0$$

Dal teorema dei due carabinieri segue che

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1.$$

Per passare a $\sqrt[n]{n}$, basta osservare che

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \sqrt[n]{\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n]{\sqrt{n}} \longrightarrow 1, \quad n \to +\infty.$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \quad n \to +\infty$$

$$1 \qquad 1$$

③ Siano $\{a_n\}_{n\in S}$, $\{b_n\}_{n\in S}$ due successioni con $a_n \geq 0$ definitivamente. Allora, se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = b,$$

$a_n \neq 0, 1$ DEF, e non abbiamo

$a^b = 0^{+\infty}, +\infty^0, 1^{+\infty}$, allora ← STIAMO ESCLUDENDO F.I.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

Se $a_n = 0$, e $b_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, allora

$a^b = 0^{+\infty}$ F.I.

Ma $a_n^{b_n} = 0^{b_n} = 0$ DEF, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 0.$$

CONSEGUENZA: se $b_n \to b$ per $n \to +\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} e^{b_n} = e^b$$

SUCCESSIONI MONOTONE

Ricordiamo che: una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice CRESCENTE (STR CRESCENTE) se:

$\forall x, y \in A, \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (f(x) < f(y))$

f è DECRESCENTE se:

$\forall x, y \in A, \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

f è MONOTONA se è CRESCENTE o DECRESCENTE.

Nel linguaggio delle successioni, le condizioni sopra si scrivono nel seguente modo:

DEF: Sia $\{a_n\}_{n \in S}$ successione, diciamo che

$\{a_n\}_{n \in S}$ è CRESCENTE se

$\forall m, n \in S, \quad m < n \Rightarrow a_m \leq a_n$

(STRETTAMENTE CRESCENTE: $m < n \Rightarrow a_m < a_n$)

$\{a_n\}_{n \in S}$ è DECRESCENTE se

$\forall m, n \in S, \quad m < n \Rightarrow a_m \geq a_n$

(STR DECRESCENTE: $m < n \Rightarrow a_m > a_n$)

La successione è MONOTONA (STR MONOTONA) se è CRESCENTE o DECRESCENTE (ST CR o ST DEC).

LEMMA: Sia $\{a_n\}_{n\in S}$ una successione. Allora:

(i) $\{a_n\}_{n\in S}$ è CRESCENTE se e solo se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in S$.

(ii) $\{a_n\}_{n\in S}$ è DECRESCENTE se e solo se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in S$

dim

PER CASA

OSS: la condizione richiede di controllare la monotonia solo tra elementi della successione associati a indici consecutivi.

Questa condizione non si può generalizzare a tutte le funzioni, perché dipende dalle proprietà di $\mathbb{N}$.

esempio: Sia $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

$n = 1 \rightsquigarrow a_1 = 2$, $n = 2$ $a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$n = 3 \rightsquigarrow a_3 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

"Sembra" una successione decrescente (str decrescente),

per verificarlo usiamo il lemma: dim che

$\forall n \geq 1, \quad a_n \geq a_{n+1}.$

Si può considerare $\underbrace{a_n - a_{n+1}}_{\geq 0}$ o $\underbrace{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}_{\geq 1}$

Sia $n \geq 1$, allora $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$,

si ha

$$a_n - a_{n+1} = \cancel{1} + \frac{1}{n} - \left(\cancel{1} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

$\Rightarrow a_n > a_{n+1} \Rightarrow \{a_n\}_{n\geq 1}$ è str DECRESCENTE

Se scegliamo il rapporto abbiamo

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$\downarrow$

SCELTA MENO CONVENIENTE

TEOREMA (LIMITE DI SUCCESSIONI MONOTONE)

Sia $\{a_n\}_{n\in S}$ successione monotona. Allora esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. In particolare:

(i) se $\{a_n\}_{n\in S}$ è CRESCENTE, allora

$$\ell = \sup\{a_n : n \in S\}$$

(ii) se $\{a_n\}_{n\in S}$ è DECRESCENTE, allora

$$\ell = \inf\{a_n : n \in S\}$$

dim

$\{a_n\}_{n\in S}$ CRESCENTE, consideriamo 2 casi:

$\underbrace{\sup\{a_n : n \in S\}}_{\Lambda} < +\infty$.

Ricordiamo che $\sup A = \Lambda < +\infty$ se e solo se

$\Lambda \geq a \ \forall a \in A$ e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a + \varepsilon > \Lambda$.

Nel nostro caso $A = \{a_n : n \in S\}$, poiché

$\Lambda = \sup A$, si ha $\Lambda \geq a_n \ \forall n \in S$ e

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in S : a_n + \varepsilon > \Lambda$

LA TESI È CHE $\lim_{n \to +\infty} a_n = \Lambda$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} \quad \underbrace{|a_n - \Lambda| < \varepsilon}_{\Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda + \varepsilon}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, dalla caratt di $\sup A$ esiste

$\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale per cui $a_{\bar{n}} + \varepsilon > \Lambda$

$\hookrightarrow a_{\bar{n}} > \Lambda - \varepsilon$

$\{a_n\}_{n \in S}$ è crescente, e quindi $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$a_n \geq a_{\bar{n}}$. Si ha: $\forall n \geq \bar{n}$

$$\Lambda - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n \leq \Lambda < \Lambda + \varepsilon$$

cioè

$$\Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

CASO $\Lambda = +\infty$. Sappiamo che

$\forall M > 0 \quad \exists \bar{n} \in S: \; a_{\bar{n}} > M$

Vogliamo dire che: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, cioè

$\forall M > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad a_n > M \quad \forall n \geq \bar{n}$

Fissiamo $M > 0 \rightsquigarrow \exists \bar{n} \in S: \; a_{\bar{n}} > M$

$\{a_n\}_{n \in S}$ è CRESCENTE, e quindi $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$a_n \geq a_{\bar{n}}$

$\Rightarrow \quad a_n \geq a_{\bar{n}} > M \quad \forall n \geq \bar{n}$.

CASO $\{a_n\}_{n \in S}$ PER CASA

$\blacksquare$