22/02/2022

LEZIONE 2

Riepilogo: Logica, insiemi, funzioni.

esempio di funzioni:

$\bar{A}$ = { lettere dell'alfabeto italiano minuscole }

$\bar{B}$ = { lettere " " maiuscole }

$f: \bar{A} \to \bar{B}$, f associa a una lettera minuscola la corrispondente lettera maiuscola.

$$a \in \bar{A} \Rightarrow f(a) = A \in \bar{B}$$

$$c \in \bar{A} \Rightarrow f(c) = C \in \bar{B}$$

Se avessimo detto che f associa a una lettera minuscola la lettera successiva nell'alfabeto, sempre minuscola ($z \to a$), f non è una funzione da $\bar{A}$ in $\bar{B}$ perché $f(x) \notin \bar{B}$, $x \in \bar{A}$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali

$f(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

f è una funzione ben definita, perché $x^2 \in \mathbb{R}$ ogni volta che $x \in \mathbb{R}$.

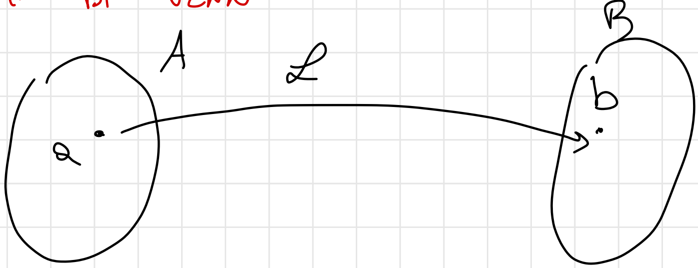
① una funzione $f: A \to B$ deve essere definita $\forall a \in A$.

② non è detto che $\forall b \in B$, esista un $a \in A$ tale per cui $f(a) = b$.

DEFINIZIONE: $f: A \to B$ funzione, l'insieme A viene detto DOMINIO di f e l'insieme B viene detto CODOMINIO di f.

Quando diciamo che un elemento di B "viene raggiunto da un elemento di A tramite f" intendiamo dire che per questo $b \in B$ $\exists a \in A$ tale per cui $f(a) = b$.

DIAGRAMMI DI VENN



DEFINIZIONE: Sia $f: A \Rightarrow B$ una funzione; l'insieme

$$\tilde{B} = \{ b \in B : \exists a \in A, f(a) = b \}$$

prende il nome di IMMAGINE DI f, e lo indichiamo che $\mathrm{Im}(f)$ o $f(A)$.

A volte il dominio di f si indica con $D(f)$.

DEFINIZIONE: Sia $f: A \Rightarrow B$ una funzione.

f SI DICE:

- INIETTIVA se $\forall a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$ $\Rightarrow$ $a_1 = a_2$.
- SURIETTIVA se $\mathrm{Im}(f) = B$.
- BIUNIVOCA (O BIETTIVA) se È INIETTIVA e SURIETTIVA.

OSS: una funzione è INIETTIVA se partendo da due elementi $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, e applicando f, otteniamo due diversi elementi di B, cioè $f(a_1) \neq f(a_2)$.

ESEMPIO: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- f NON È SURIETTIVA: $\mathrm{Im}(f) = \{\text{NUMERI} \geq 0\} \neq \mathbb{R}$
- f NON È INIETTIVA: infatti non è vero che

se $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Se $\underbrace{f(x)}_{x^2} = \underbrace{f(y)}_{y^2}$, allora $x^2 = y^2$

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad (x-y)(x+y) = 0 \begin{cases} x - y = 0 & x = y \\ x + y = 0 & x = -y \end{cases}$$

Se prendiamo $f(x) = f(y) = 1$, allora $x = 1$ e $y = -1$.

Domanda: cosa possiamo fare per rendere questa funzione iniettiva e/o suriettiva?

$f: \overset{{}^{\shortparallel}A}{\mathbb{R}} \to \overset{{}^{\shortparallel}B}{\mathbb{R}}$ non è suriettiva $\Rightarrow$ cambiamo B e ci mettiamo $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$.

La funzione $f: \mathbb{R} \to \operatorname{Im}(f)$ $(= [0,+\infty))$

È SURIETTIVA, ma non è ancora iniettiva:

se prendiamo $1 \in \operatorname{Im}(f)$ abbiamo che

$f(x_1) = f(x_2) = 1$ con $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$.

Mettiamo al posto di A $(= \mathbb{R})$ l'insieme

$[0,+\infty)$, e consideriamo la funzione

$f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $f(x) = x^2$ $\forall x \in [0,+\infty)$.

- È INIETTIVA: se $f(x_1) = f(x_2)$, allora

  $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ o $\cancel{x_1 = -x_2}$

- È SURIETTIVA: infatti se $b \in [0,+\infty)$, allora

  $\sqrt{b}$ è ben definito e $f(\sqrt{b}) = b$, con $\sqrt{b} \geq 0$.

$\Rightarrow f$ è BIUNIVOCA

1 INSIEMI NUMERICI ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)

ASSIOMI DEI NUMERI NATURALI (PEANO, 1800)

Indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei NUMERI NATURALI, cioè il più piccolo insieme che soddisfa le seguenti proprietà:

1 _ $0 \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} \neq \emptyset$)

2 _ esiste una funzione $S: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ che chiamiamo una FUNZIONE SUCCESSORE. Dato $n \in \mathbb{N}$, l'elemento $S(n)$ viene detto SUCCESSORE di n.

3 _ $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m \Rightarrow S(n) \neq S(m)$
(S è INIETTIVA)

4 _ $0 \notin \operatorname{Im}(S)$.

5 _ PRINCIPIO DI INDUZIONE: Se $U \subseteq \mathbb{N}$ tale per cui:

- $0 \in U$
- se $n \in U$ allora $S(n) \in U$

$\Rightarrow U = \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE: $S(0)=1$, $S(1)=2$, $S(2)=3$, ...

- L'insieme $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}_0$

Possiamo definire una relazione d'ordine tra gli elementi di $\mathbb{N}$: vuol dire che, dati $n, m \in \mathbb{N}$, allora o $n \leq m$ o $m \leq n$.

La relazione "$\leq$" si definisce come segue:

1 - $n \leq S(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2 - $n \leq m$ se m si ottiene partendo da n e applicando più volte la funzione S.

esempio: $1 \in \mathbb{N}$, $3 = S(2) = S(S(1))$

$\Rightarrow$ $1 \leq 3$.

OSS: "$\leq$" è TRANSITIVA:

$n \leq m$ e $m \leq t$ $\Rightarrow$ $n \leq t$

DEF: gli elementi di $\mathbb{N}$ vengono detti NUMERI NATURALI.

DEFINIAMO LE OPERAZIONI SU $\mathbb{N}$:

La **somma** si definisce su $\mathbb{N}$ a partire dalla funzione S. Sia $n \in \mathbb{N}$, allora:

- $n + 0 = n$.
- $n + 1 = S(n)$.
- $n + (m+1) = S(n+m)$, $\forall m \in \mathbb{N}$

Se prendiamo $m = 1$, abbiamo che

$$\left.\begin{array}{l} n + (m+1) = n + (1+1) = n+2 \\ S(n+1) = S(S(n)) \end{array}\right\} n+2 = S(S(n))$$

Se fate la stessa cosa con $m = 2$, viene che

$$n+3 = S(S(S(n))).$$

- il **prodotto** si definisce su $\mathbb{N}$ a partire dalla somma: dato $n \in \mathbb{N}$ si ha
  - $n \cdot 0 = 0$.
  - $n \cdot 1 = n$.
  - $n \cdot m = \overbrace{n + n + \ldots + n}^{m \text{ volte}}$

PROPRIETÀ: Somma e prodotto su $\mathbb{N}$ godono delle seguenti proprietà:

- $a+b=b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$ $\forall a, b \in \mathbb{N}$ COMMUTATIVA
- $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ ASSOCIATIVA
- $(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ DISTRIBUTIVA

DEF: 0 viene detto ELEMENTO NEUTRO della SOMMA, 1 viene detto ELEMENTO NEUTRO del PRODOTTO.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad n+0 = 0+n = n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$

0 viene detto ELEMENTO ASSORBENTE del PRODOTTO.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$.

Gli altri insiemi numerici ($\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$) si costruiscono aumentando $\mathbb{N}$ e aggiungendo degli elementi in modo da poter invertire le operazioni.

$\mathbb{Z}$: INSIEME DEI NUMERI INTERI

Dato $n \in \mathbb{N}$, vogliamo costruire un elemento a tale per cui $n+a=0$.

$\forall n \in \mathbb{N}_0$, definiamo il numero $(-n)$ come quell'unico numero tale per cui

$$n+(-n)=0=(-n)+n.$$

$$\mathbb{Z} = \{0, n, -n : n \in \mathbb{N}_0\}$$

OSS: c'è un ordinamento su $\mathbb{Z}$:

- $n, m \in \mathbb{N}$, allora $n \leq m$ o $m \leq n$
- $n \in \mathbb{N}$, $-m$ con $m \in \mathbb{N}$, allora $-m \leq n$
- $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, allora $-m \leq -n$

DEF: Dato $n \in \mathbb{N}$, l'elemento $-n$ è detto OPPOSTO di n.

$\mathbb{Q}$: INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI

Dato $n \in \mathbb{N}_0$, cerchiamo un numero a tale per cui $n \cdot a = 1$.

Dato $n \in \mathbb{N}_0$, chiamiamo $\frac{1}{n}$ quell'unico numero tale per cui $n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

Dati $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, chiamiamo $\frac{m}{n}$ quell'unico numero che soddisfa $n \cdot \frac{m}{n} = m$.

Inoltre, $-\frac{m}{n}$ è quell'unico numero che sommato a $\frac{m}{n}$ ci dà 0, cioè $\frac{m}{n} + \left(-\frac{m}{n}\right) = 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ 0, \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

La relazione "$\leq$" si estende a $\mathbb{Q}$:

dati $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, abbiamo che

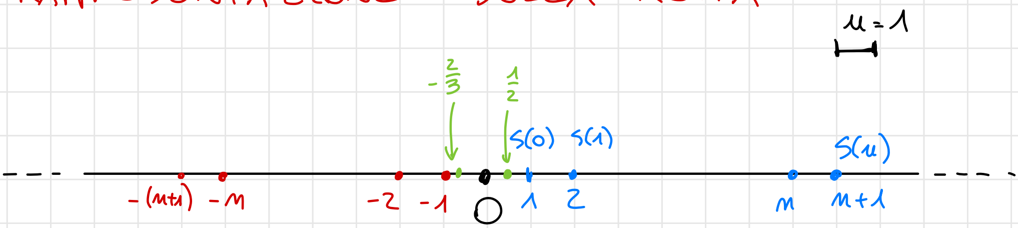
$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq cb$$

$$-\frac{a}{b} \leq -\frac{c}{d} \iff \frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$$

OSS: $\frac{n}{1} = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

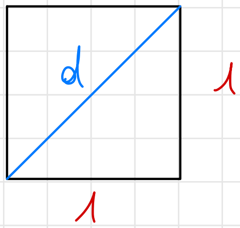
DEFINIZIONE: dato $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \neq 0$, il numero $\frac{n}{m}$ viene detto RECIPROCO di $\frac{m}{n}$.

RAPPRESENTAZIONE SULLA RETTA



domanda: ad ogni punto sulla retta corrisponde un numero razionale? NO, ci sono punti sulla retta che non corrispondono ad alcun numero razionale.

TEOREMA: $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.



TEOREMA DI PITAGORA

$\Rightarrow d^2 = 2$