LEZIONE 1

CAPITOLO 0: (CENNI SU) LOGICA, INSIEMI, FUNZIONI

Ogni teoria matematica si costruisce usando:

ASSIOMI: affermazioni che noi assumiamo essere vere.

TEOREMI: Proposizioni che sono vere a partire dagli assiomi considerati e dimostrate usando passaggi logici consentiti.

Cos'è fatto un teorema? Un teorema è una proposizione logica del tipo

$$P \to Q,$$

dove P e Q sono proposizioni. Questa scrittura significa che la verità della proposizione P implica la verità della proposizione Q.

Il teorema $P \to Q$ si legge

"Se P allora Q".

e la proposizione P viene detta IPOTESI del teorema, mentre la proposizione Q viene detta TESI del teorema.

ESEMPIO: "TEOREMA DI WEIERSTRASS"

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora f ammette massimo e minimo in $[a,b]$,

cioè $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ tali per cui

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M), \quad \forall x \in [a,b].$$

In questo caso:

P = " $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua "

Q = " f ammette massimo e minimo in $[a,b]$ "

e il teorema di W è $P \Rightarrow Q$.

DOMANDE: Se $P \Rightarrow Q$, allora $Q \Rightarrow P$?

In generale NO

Quando succede che $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ allora si scrive $P \Leftrightarrow Q$, e si legge:

" P se e solo se Q "

Negazione: Data una proposizione P, indichiamo che $\bar{P}$ la sua negazione, cioè NON P.

Nel caso del teorema di Weierstrass:

$\bar{P}$ = "non la funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua"
= "f non è definita su $[a,b]$ oppure f non è continua"

$\bar{Q}$ = "f non ha massimo o f non ha minimo in $[a,b]$"

Come si dimostrano i teoremi?

VIA DIRETTA: partendo dall'ipotesi P, tramite passaggi logici e matematici si dimostra che vale Q.

VIA INDIRETTA: Sono di due tipi:

- la dimostrazione per assurdo: assumiamo vera $\bar{Q}$ e tramite passaggi logici e matematici si ottiene una contraddizione con P.
- Si dimostra $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ (CONTRONOMINALE DI $P \Rightarrow Q$)

ESEMPIO: $\sqrt{2}$ NON È RAZIONALE.

dim Supponiamo P.A. (Per Assurdo) che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè $\exists\ m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, tali per cui $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Allora ...

Q = " $\sqrt{2}$ NON È RAZIONALE "

$\bar{Q}$ = " NON $\sqrt{2}$ NON È RAZIONALE "

= " $\sqrt{2}$ È RAZIONALE "

OSS: $\bar{\bar{P}} = P$.

I quantificatori: sono due:

$\exists$: esiste almeno un ... (ESISTENZIALE)

$\forall$: per ogni ... (UNIVERSALE)

($\exists!$: esiste uno e un solo ...)

DA WEIERSTRASS:

$\exists\ x_m, x_M \in [a, b]$ tali per cui

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \quad \forall x \in [a, b].$$

Q = " esistono almeno due punti x_m, x_M in $[a,b]$ tali per cui $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$ per ogni $x \in [a,b]$ ".

Ordine: se scriviamo:

$\forall x \in [a,b] \quad \exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ tali per cui

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M).$$

significa che, fissato $x \in [a,b]$, troviamo 2 punti x_m, x_M per cui vale $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$.

⇝ "possibile dipendenza" di x_m, x_M da x

ESEMPIO: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell, x_0 \in \mathbb{R}$, f funzione

vuol dire

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| \underset{(\le)}{<} \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \underset{(\le)}{<} \varepsilon$$

$\forall \dots \ \exists \dots$ vuol dire che l'oggetto dell'"esiste" dipende da quello del "per ogni"

Fisso ε, il δ si indica $\delta(\varepsilon)$

Quindi se scegliamo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 \ne \varepsilon_2$

$\Rightarrow$ $\delta(\varepsilon_1) = \delta_1$ e $\delta(\varepsilon_2) = \delta_2$ possono essere diversi.

Se scriviamo:

$\exists \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

In questo caso c'è un δ che va bene per tutti gli ε.

Negazione e quantificatori: Sia

$Q =$ " $\exists x_m, x_M \in [a,b]$ tali per cui

$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \ \forall x \in [a,b]$ "

$\bar{Q} =$ " $\forall x_m, x_M \in [a,b]$ (tali per cui)

$\exists x \in [a,b]$ per cui $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ "

NON È VERA

$P =$ " $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right)$ "

allora

$\bar{P} =$ " $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0$ NON È VERO CHE

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ "

Cosa vuol dire:

NON È VERO CHE $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Cioè:

$\underbrace{\forall x \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta}_{\text{PARTE DEL } \forall}$, si ha $\underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{\text{PROPRIETÀ}}$.

La sua negazione è:

$\exists x$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$

FORMULA GENERALE:

$\forall x \ \exists y : P$ (P PROPRIETÀ)

ha come negazione:

$\exists x : \forall y \ \overline{P}$

La stessa cosa vale con $\forall$ ed $\exists$ scambiati.

Di cosa "parleremo" durante il corso?

DEFINIZIONI: oggetti matematici importanti a cui diamo un nome.

LEMMI e PROPOSIZIONI: teoremi "meno significativi".

COROLLARI: conseguenze dei teoremi.

OSSERVAZIONI: commenti su risultati visti.

ESEMPI e CONTROESEMPI: situazioni concrete in cui applicare il teorema (ESEMPIO) oppure uso se non consideriamo qualche ipotesi (CONTROESEMPIO).

esempio di dimostrazione sbagliata: dimostriamo che $1=2$.

$$x(x-x) = x^2 - x^2 = (x-x)(x+x) \quad : (x-x)$$

$$x = x+x$$

$$x = 2x$$

$$1 = 2 \qquad \text{NO!}$$

INSIEMI e FUNZIONI

DEFINIZIONE: un insieme è una collezione di oggetti, di solito si indica con una lettera maiuscola.

Ad esempio: $A = \{$ lettere dell'alfabeto italiano $\}$

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, z\}$.

Un oggetto dell'insieme viene detto ELEMENTO dell'insieme.

Se x è un elemento di A, scriviamo $x \in A$ (si legge "x appartiene ad A")

Se A e B sono due insiemi, la scrittura $A \subseteq B$ ("A contenuto in B") vuol dire che ogni elemento di A è anche un elemento di B, cioè $\forall x \in A,\ x \in B$.

In questo caso A è detto SOTTOINSIEME di B.

A viene detto SOTTOINSIEME PROPRIO di B se $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

esempi: $A = \{$lettere alfabeto italiano$\}$

- $a \in A$, $\{a, b\} \subseteq A$ SONO CORRETTE
- $c \subseteq A$, $\{z\} \in A$ SONO ERRATE

Se un oggetto non appartiene ad un insieme si utilizza il simbolo $\notin$, e se un insieme non è sottoinsieme di un altro si scrive $\not\subseteq$

esempi : $y \notin A$, $\{a, y\} \notin A$

domanda : $A \subseteq B$ vuol dire : $\forall x \in A, x \in B$.

$A \not\subseteq B$ è la negazione di $A \subseteq B$, quindi vuol dire : $\exists x \in A : x \notin B$.

DEFINIZIONE : dati due insiemi A, B, una funzione $f: A \to B$ è una "legge" che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B.

$\forall a \in A, f(a) \in B$.

22/02/2022

LEZIONE 2

Riepilogo :