08/03/2022

LEZIONE 7

Riepilogo: esempi di grafici di funzioni, funzioni trigonometriche, max, min, inf, sup di funzioni, funzione somma e funzione prodotto.

DEF: definiamo la funzione $\frac{f_1}{f_2} : A' (\subseteq A_1 \cap A_2) \to \mathbb{R}$

come $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, per ogni $x \in A'$, dove

$$A' = \{x \in A_1 \cap A_2 : \underline{f_2(x) \neq 0}\} \subseteq A_1 \cap A_2$$

La funzione $\frac{f_1}{f_2}$ si dice FUNZIONE RAPPORTO tra f_1 e f_2.

esempio: $f_1(x) = x$, $x \in \underset{A_1}{\mathbb{R}}$, $f_2(x) = x-2$, $x \in \underset{A_2}{\mathbb{R}}$.

La funzione $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x}{x-2}$ è definita su

$$A' = \{x \in \mathbb{R} : f_2(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \neq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\} \neq A_1 \cap A_2 = \mathbb{R}.$$

OSS: le condizioni imposte sono quelle comunemente dette

CONDIZIONI DI ESISTENZA

DEF: definiamo la funzione $f_1 \circ f_2 : A' \to B_1$ (si legge "f_1 composto f_2") come

$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x))$, $\forall x \in A'$, dove

$A' = \{x \in A_2 : f_2(x) \in A_1\}$

La funzione $f_1 \circ f_2$ si dice FUNZIONE COMPOSTA di f_1 con f_2.

OSS: A' è quel sottoinsieme di A_2 la cui immagine tramite f_2 sta in A_1, cioè

$$f_2(A') = \{f_2(x) : x \in A'\} \subseteq A_1$$

Questa è la condizione per definire A'.

esempi: $f_1(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty) = A_1$,

$f_2(x) = x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R} = A_2$. La funzione composta

$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(x^2 - 4) = \sqrt{x^2 - 4}$,

per ogni $x \in A' = \{x \in \mathbb{R} : f_2(x) \in A_1\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \in [0, +\infty)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\}$$

$\rightsquigarrow$ CE di $\sqrt{x^2 - 4}$ è $x^2 - 4 \geq 0$.

OSS: $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$. Infatti, se consideriamo l'esempio precedente, si ha:

$(f_1 \circ f_2)(x) = \sqrt{x^2-4}$, $\{x : x^2-4 \geq 0\}$

$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 4$, $= x-4$

$x \in A'' = \{x \in A_1 : f_1(x) \in A_2\}$

$= \{x \in [0, +\infty) : \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Quindi $(f_2 \circ f_1)(x) = x-4$, $x \geq 0$. Questo è diverso di $g(x) = x-4$, $x \in \mathbb{R}$.

esempi di funzioni composte: data $g(x) = \sin(x^2)$, scrivere $g = f_1 \circ f_2$. Si ha: $f_1(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, da cui segue che

$(f_1 \circ f_2)(x) = \sin(x^2) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

x esercizio

- Data $g(x) = \cos(\ln(x^2+1))$, determinare f_1, f_2, f_3 tali per cui $g = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$(= (f_1 \circ f_2) \circ f_3$

$= f_1 \circ (f_2 \circ f_3))$

Parliamo adesso di funzioni inverse e invertibili.

DEF: Sia $f: A \to B$. Allora se esiste una funzione $g: B \to A$ tale per cui

$(f \circ g)(x) = x \quad \forall x \in B$

$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A$

f si dice INVERTIBILE e g viene detta FUNZIONE INVERSA di f e si indica con f^{-1}.

OSS: non tutte le funzioni sono invertibili, infatti $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora f non è invertibile. Infatti, mi aspetto che $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, ma

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$

$\hookrightarrow f^{-1}(x^2) = x$

$\sqrt{x}$ è definita su $[0, +\infty)$, ma $B = \mathbb{R}$ $(f: \overset{A}{\mathbb{R}} \to \overset{B}{\mathbb{R}})$

TEOREMA

$f: A \to B$ è INVERTIBILE se e solo se f è BIETTIVA, cioè f è INIETTIVA e SURIETTIVA, cioè se:

INIETTIVA: $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

SURIETTIVA: $f(A) = B$

torniamo indietro: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

non è iniettiva: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 \neq x_2$ ma
$$f(x_1) = 1 = f(x_2)$$

non è suriettiva: $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.

MODIFICHIAMO A e B: al posto di $B = \mathbb{R}$ prendiamo $B = [0, +\infty)$, e al posto di $A = \mathbb{R}$ prendiamo $A = [0, +\infty)$.

$f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ per ogni $x \in [0, +\infty)$,

è: INIETTIVA, infatti $x_1, x_2 \geq 0$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

SURIETTIVA, infatti $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$

$\Rightarrow$ f è invertibile, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $f^{-1}: \underbrace{[0, +\infty)}_{B} \to \underbrace{[0, +\infty)}_{A}$.

OSS: $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in [0, +\infty)$, cioè

$$\sqrt{x^2} = x \quad \forall x \geq 0.$$

PROPRIETÀ DI FUNZIONI

• FUNZIONI MONOTÒNE

DEF: Sia $f: A \to B$. f si dice:

- CRESCENTE se $\forall x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- DECRESCENTE se $\forall x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

f si dice MONOTONA se è CRESCENTE o DECRESCENTE.

DEF: Sia $f: A \to B$. f si dice:

- STRETTAMENTE CRESCENTE se

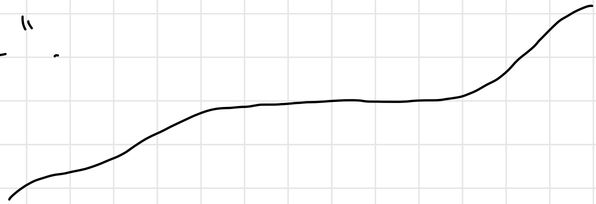
$\forall x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

- STRETTAMENTE DECRESCENTE se

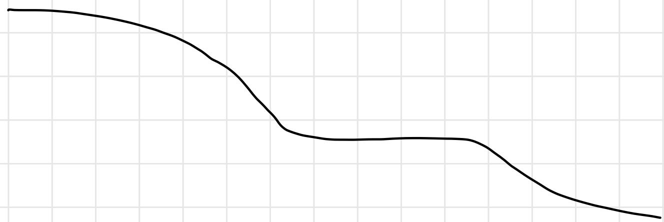
$\forall x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

f si dice STRETTAMENTE MONOTONA se è STRETTAMENTE CRESCENTE o STRETTAMENTE DECRESCENTE

OSS: f è crescente se e solo se il suo grafico è "crescente".



f è decrescente se e solo se il suo grafico è "decrescente".



OSS: una **funzione f** che è **crescente** e **decrescente** è una **funzione costante**: infatti

$$x<y \Rightarrow \underbrace{f(x) \le f(y)}_{\text{CRESCENTE}} \overbrace{\le f(x)}^{\text{DECRESCENTE}}$$

$$\Rightarrow f(x)=f(y) \qquad \forall x,y \in A.$$

OSS: una **funzione strettamente crescente non può essere decrescente**, e **viceversa**.

TEOREMA

$f: A \to B$ strettamente monotona. Allora **f è iniettiva**.

COROLLARIO: **$f: A \to B$ strettamente monotona**. Allora **$\bar{f}: A \to f(A)$**, **$\bar{f}(x)=f(x)$ $\forall x \in A$ è INVERTIBILE**.

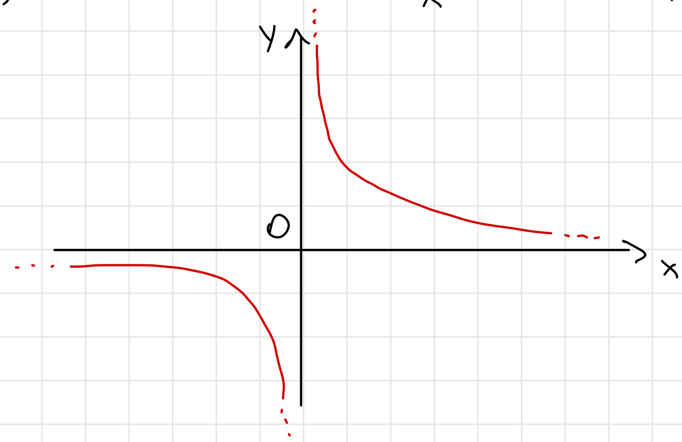
esempi: • $f(x) = x$ è strettamente monotona, e $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Quindi è INVERTIBILE

• $f(x) = a^x$, $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, è strettamente monotona, $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ ma non è invertibile perché $f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$. Diventa invertibile se la consideriamo a valori in $(0,+\infty)$, cioè

$$f: \underbrace{\mathbb{R}}_{A} \Rightarrow \underbrace{(0,+\infty)}_{B}, \quad f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La sua funzione inversa $f^{-1}: (0,+\infty) \Rightarrow \mathbb{R}$ è il logaritmo in base a: $f^{-1}(x) = \log_a(x)$, $x > 0$.

OSS: non è vero che ogni funzione iniettiva è strettamente monotona: ad esempio la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$, ha grafico



- f è decrescente in $(-\infty, 0)$
- f è decrescente in $(0, +\infty)$
- f non è decrescente in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$: infatti

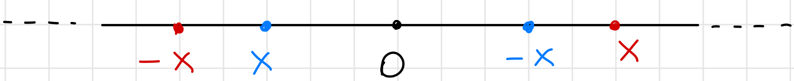
se prendiamo $x = -1,\ y = 1$, $x < y$ e $f(x) = -1 < 1 = f(y)$

• FUNZIONI PARI E DISPARI (SIMMETRIA)

La comodità è che il comportamento "globale" di funzioni "simmetriche" si deduce studiando solo una "parte" della funzione.

DEF: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. A si dice simmetrico rispetto allo 0 se $x \in A \iff -x \in A$.

Graficamente:



A è SIMMETRICO rispetto a 0 se "si costruisce riflettendo i punti tramite 0".

DEF: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, A simmetrico rispetto a 0.

Allora:

- f si dice PARI se $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A$.
- f si dice DISPARI se $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A$.

esempio: $[-1, 1]$ è SIMMETRICO;

$(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ è SIMMETRICO;

$(0, +\infty)$ NON è SIMMETRICO;

$\mathbb{R}$ è SIMMETRICO.

- $f(x)$ funzione polinomiale, allora f è pari se e solo se contiene solo potenze pari della x, mentre f è dispari se e solo se contiene solo potenze dispari della x.

Quindi:

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, è PARI

$f(x) = 2x^5 + 10x^3$, $x \in \mathbb{R}$, è DISPARI

$f(x) = x^3 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$, non è NÉ PARI NÉ DISPARI

OSS: Ci sono funzioni che non sono né pari né dispari.

- $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, è una funzione DISPARI
- $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, è una funzione PARI
- $f(x) = tg(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ è una funzione DISPARI.

Σ : SIMBOLO DI SOMMATORIA

Sia $I \subseteq \mathbb{N}$, I finito, e consideriamo una funzione $f: I \to \mathbb{R}$. Indichiamo con $a_i = f(i)$, $i \in I$, allora

$$\sum_{i \in I} a_i = \text{somma degli elementi } f(i) \text{ al variare di } i \in I.$$

esempi: sia $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(i) = i^2$, $i \in I$, allora

$$\sum_{i \in I} a_i = \underbrace{1^2}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{3^2}_{i=3} + \underbrace{4^2}_{i=4} + \underbrace{5^2}_{i=5}$$

- I viene detto INSIEME DEGLI INDICI
- $I = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots, n_0+m\}$, allora scriviamo

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=n_0}^{n_0+m} a_i .$$

Nell'esempio precedente si ha

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=1}^{5} i^2$$