15/03/2022

LEZIONE 10

Riepilogo: teorema del binomio di Newton, cardinalità.

PROPOSIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Se A è finito allora A ammette massimo e minimo (in particolare, A è limitato).

dim

A è finito, e dunque esistono $n \in \mathbb{N}_0$, e una funzione $f: \{1, 2, \dots, n\} \to A$ biettiva.

Quindi $A = \mathrm{Im}(f) = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$

$$= \{f(i) : i = 1, \dots, n\}$$

$$= \{f(i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Abbiamo n numeri, li mettiamo in ordine crescente,

$f(1), f(2), \dots, f(n)$

e il più piccolo di questi numeri è il minimo di A, il più grande tra questi numeri è il massimo di A.

OSS: abbiamo notato una volta che:

- $\forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : n > M \qquad (\Leftrightarrow \quad \sup \mathbb{N} = +\infty)$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ è ILLIMITATO SUPERIORMENTE

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ non può essere finito, infatti se P.A. suppongo che $\mathbb{N}$ sia finito, questo vorrebbe dire che $\mathbb{N}$ è limitato superiormente CONTRADDIZIONE.

Ne segue che $\mathbb{N}$ NON È FINITO.

DEF: Dato un insieme A, diciamo che A è INFINITO se non è finito, cioè se non esistono $n \in \mathbb{N}$ e $f : \{1, 2, 3, \dots, n\} \to A$ biettiva.

OSS: $\mathbb{N}$ è INFINITO, infatti non è possibile trovare $n \in \mathbb{N}$ e una funzione biettiva $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbb{N}$.

DEF: Dati A, B insiemi, si dice che A e B sono in corrispondenza biunivoca (o BIETTIVA) se esiste una funzione $f : A \to B$ biettiva.

DOMANDA: posso trovare, data $f: A \to B$ biettiva, una funzione $g: B \to A$ biettiva?

Sì, infatti se prendiamo $g = f^{-1}$, abbiamo una funzione da $B \to A$.

PER CASA: dimostrare che, se $f: A \to B$ è biunivoca, allora lo è anche $f^{-1}: B \to A$.

OSS: il ruolo di A e B nella definizione di "CORRISPONDENZA BIUNIVOCA" è interscambiabile.

DOMANDA: Come confrontare 2 insiemi? Dati A, B, come posso vedere quale dei due ha "più elementi", cioè cardinalità maggiore? Come posso vedere se hanno la stessa cardinalità?

Nel caso A, B siano finiti, la risposta è semplice: $\#A = n_A \in \mathbb{N}$, $\#B = n_B \in \mathbb{N}$, per cui:

- $\#A < \#B$ se e solo se $n_A < n_B$, cioè A ha meno elementi di B.
- $\#A > \#B$ se e solo se $n_B < n_A$.

$\#A = \#B$ se e solo se $n_A = n_B$.

Come confrontiamo la cardinalità di insiemi infiniti?

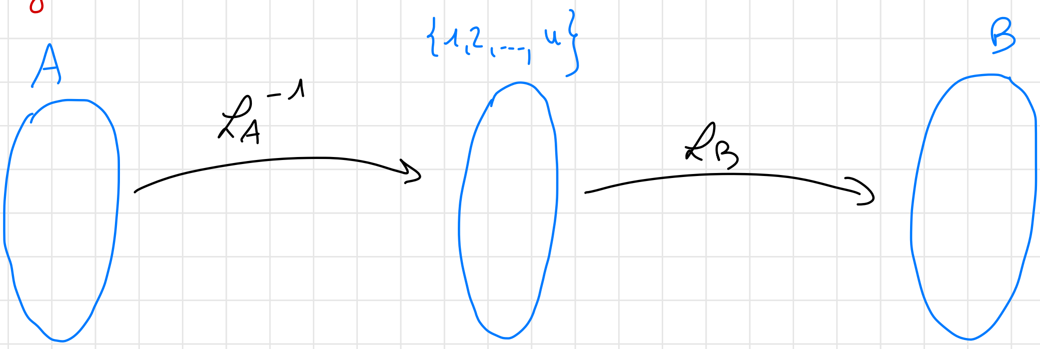
supponiamo A, B finiti, $\#A = \#B = n$

$\Rightarrow \exists f_A : \{1, 2, \dots, n\} \to A$ BIETTIVA

$\exists f_B : \{1, 2, \dots, n\} \to B$ BIETTIVA

$\Rightarrow$ la funzione $f_B \circ f_A^{-1} : A \to B$ BIETTIVA

PER CASA: dimostrare che se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ sono biettive e $f(A) \subseteq C$, allora $g \circ f$ è BIETTIVA



Tramite f_A e f_B abbiamo messo gli insiemi A e B in corrispondenza biunivoca. Questo è il

Concetto giusto per parlare di cardinalità anche per insiemi infiniti.

DEF: Siano A, B insiemi. Diciamo che A e B hanno la stessa cardinalità, e scriviamo $\# A = \# B$, se possono essere messi in corrispondenza biunivoca.

DEF: Se un insieme A è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, si dice che A è NUMERABILE.

$(\# A = \# \mathbb{N})$

DEF: Siano A, B insiemi. Diciamo che

- $\# A \leq \# B$ se esiste una funzione $f: A \to B$ INIETTIVA
- $\# A \geq \# B$ se esiste una funzione $f: A \to B$ SURIETTIVA
- $\# A = \# B$ se $\# A \leq \# B$ e $\# B \leq \# A$.

PROPOSIZIONE: Siano A, B insiemi, con $A \subseteq B$.

Allora $\# A \leq \# B$.

dim

Costruiamo $f: A \to B$ iniettiva. Basta prendere

$$f(x) = x, \qquad \forall x \in A.$$

- f è iniettiva, poiché $\left(\forall a_1, a_2 \in A,\ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \right)$

$$a_1, a_2 \in A, \quad \underset{\overset{\|}{a_1}}{f(a_1)} = \underset{\overset{\|}{a_2}}{f(a_2)}.$$

DEF: Dato A insieme, definiamo INSIEME DELLE PARTI DI A l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A, e lo indichiamo con $\mathcal{P}(A)$.

esempi:
- $A = \emptyset$, allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$.
- $A = \{1,2\}$, i sottoinsiemi di A sono:

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

domanda: dato un insieme A, che relazione c'è tra $\# A$ e $\# \mathcal{P}(A)$?

Negli esempi di prima:

- $\# \emptyset = 0$ e $\# \mathcal{P}(\emptyset) = 1$
- $\# A = 2$ e $\# \mathcal{P}(A) = 4$

Si dimostra che: se $\# A = n \in \mathbb{N}$, allora $\# \mathcal{P}(A) = 2^n$.

OSS: se A è un insieme, allora

$$\# \mathcal{P}(A \cup \{x\}) = 2 \, \# \mathcal{P}(A).$$

Nell'esempio $A = \{1, 2\}$, abbiamo che i suoi sottoinsiemi sono:

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$.

Se prendiamo $B = \{1, 2, x\}$, i suoi sottoinsiemi sono:

$$\left.\begin{array}{l} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \\ \{x\}, \{1,x\}, \{2,x\}, \{1,2,x\}. \end{array}\right\} \quad \# \mathcal{P}(B) = 8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot \# \mathcal{P}(A)$$

PROPOSIZIONE

$\forall n \in \mathbb{N}$, se $\# A = n$ allora $\# \mathcal{P}(A) = 2^n$.

dim

Dimostriamo il risultato per induzione.

PASSO BASE: dim che la tesi vale per $n = 0$.

$\# A = 0 \Rightarrow A = \emptyset$ e $\# \mathcal{P}(\emptyset) = 1$ ✓

PASSO INDUTTIVO: dim che:

se la tesi è vera per n, allora è vera per $n+1$.

Cioè, se è vero che ogni A con $\# A = n$ soddisfa $\# \mathcal{P}(A) = 2^n$, allora ogni B con $\# B = n+1$ soddisfa $\# \mathcal{P}(B) = 2^{n+1}$.

Sia B un insieme con $n+1$ elementi:

$$B = \{ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, b_{n+1} \},$$

e prendiamo $A = \{ b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n \}$. Quindi:

$$\# \mathcal{P}(B) = \# \mathcal{P}(A \cup \{ b_{n+1} \}) \overset{\text{OSS}}{=} 2 \# \mathcal{P}(A)$$

$$\overset{\text{HP INDUTTIVA}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \Rightarrow$$ la tesi è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

OSS: $\#A < \#\mathcal{P}(A)$ poiché $n < 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(SI DIMOSTRA PER INDUZIONE)

TEOREMA

Sia A un insieme. Allora $\#A < \#\mathcal{P}(A)$

dim

A FINITO: segue dall'osservazione.

A INFINITO: supponiamo P.A. che $\#A \geq \#\mathcal{P}(A)$, cioè esiste una funzione $f: A \to \mathcal{P}(A)$ SURIETTIVA, cioè che ogni per ogni sottoinsieme di A esiste $a \in A$: $f(a)$ è proprio quel sottoinsieme.

Os che $f(a) \in \mathcal{P}(A)$, cioè $f(a)$ è un sottoinsieme di A.

Introduciamo l'insieme

$$S = \{a \in A : a \notin f(a)\} \subseteq A$$

S è un sottoinsieme di A, e quindi esiste $s \in A$ tale per cui $f(s) = S$.

DOMANDA: $s \in S$? Si dimostra che:

$s \in S \Rightarrow s \notin S$ CONTR

$s \notin S \Rightarrow s \in S$ CONTR

$\Rightarrow$ ABBIAMO SEMPRE UNA CONTRADDIZIONE

PER CASA

$\Rightarrow$ È VERO CHE $\#A < \#\mathcal{P}(A)$.

OSS: questo ragionamento è legato al PARADOSSO DEL BARBIERE, RUSSELL.

TEOREMA

Dato A insieme, allora:

A è INFINITO $\Leftrightarrow$ esiste $B \subseteq A$, sottoinsieme proprio, e $f: A \to B$ biunivoca

$(\#B = \#A)$

OSS: se A è finito e $B \subseteq A$ è un sottoinsieme proprio, allora $\#B < \#A$.

TEOREMA

(i) $\mathbb{N}$ è INFINITO.

(ii) $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q}$

(iii) $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) > \mathbb{N}$ ← TEOREMA PRECEDENTE

dim

(i) Vogliamo trovare un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$, A, tale per cui $\#A = \#\mathbb{N}$.

$A = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{$insieme dei numeri pari$\}$

A è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$, infatti $A \subseteq \mathbb{N}$
$1 \notin A$.

Sia $f : \mathbb{N} \to A$ definita come:

$f(n) = 2n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

- f è SURIETTIVA e INIETTIVA $\Rightarrow \#A = \#\mathbb{N}$.

(ii) DIM PER CASA CHE

$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$,

cioè trovate una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ biettiva.