18/3/2022

# LEZIONE 11

Riepilogo: cardinalità, insiemi numerabili, $\#\mathbb{R} > \# \mathbb{N}$.

## TOPOLOGIA

"TOPOS": luogo. È un modo diverso di descrivere la relazione tra insiemi e punti.

Per noi, l'unico concetto che mette in relazione punti e insiemi è quello di appartenenza: dato $x$ punto, $A$ insieme, possiamo dire se $x \in A$ o $x \notin A$.

Tutta la teoria che vedremo si basa sul concetto di "limite", che è legato a un'approssimazione: studiare il limite di una funzione $f$ quando il suo argomento $x$ tende a un valore $x_0$ vuol dire "studiare il comportamento di $f$ quando il suo argomento $x$ è VICINO a $x_0$."

Il concetto di appartenenza non va bene: se $A = [0,1]$, $x_0 = 1{,}1$ è "vicino" ad $A$ mentre $y_0 = 100$ non lo è, ma $x_0 \notin A$, $y_0 \notin A$.

Questo è il motivo per cui introdurremo il concetto di INTORNO di un punto e di PUNTO di ACCUMULAZIONE per un insieme.

Ricordiamo che dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, possiamo definire gli intervalli

$$(a,b) = \,]a,b[\, = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$ INTERVALLO APERTO

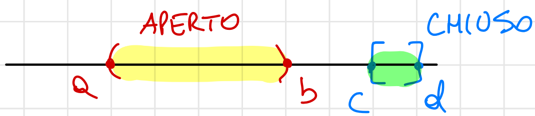
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$ INTERVALLO CHIUSO

$(a,b]$, $[a,b)$ "INTERVALLI SEMIAPERTI"

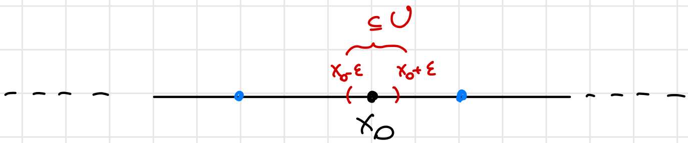
$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$ INTERVALLO APERTO

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$ INTERVALLO CHIUSO

$(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$.



DEF: • dato $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che $U \subseteq \mathbb{R}$ è un INTORNO per $x_0$ se $\exists\, \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$.




• Un'insieme $U \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di $+\infty$ se $\exists\, a \in \mathbb{R} : (a, +\infty) \subseteq U$.

• Un'insieme $U \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di $-\infty$ se $\exists\, b \in \mathbb{R} : (-\infty, b) \subseteq U$.

OSS: • Quando dico che $U$ è un intorno di $x_0$ sto solo osservando il "comportamento di $U$ vicino a $x_0$".

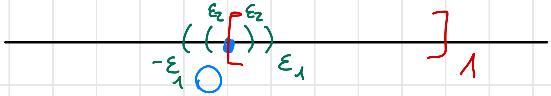
• La def di intorno data per $x_0 \in \mathbb{R}$ non va bene per $+\infty$ e $-\infty$: infatti, se chiedessimo che

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \underbrace{(+\infty - \varepsilon, +\infty + \varepsilon)}_{\text{NON È UN INTERVALLO, NON HA SENSO}} \subseteq U$$

OSS: quando diciamo che qualcosa succede in un intorno di $x_0$, stiamo dicendo che questo qualcosa succede "vicino a $x_0$".

esempio: Sia $0 \in \mathbb{R}$, allora:

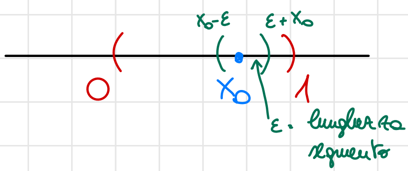
- $[0,1]$ è un intorno di $0$?




$[0,1]$ è un intorno di $0$ se $\exists\, \varepsilon > 0$ tale per cui $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq [0,1]$.

NO, $[0,1]$ non è un intorno di $0$ perché $(-\varepsilon, 0) \not\subseteq [0,1]$ qualunque $\varepsilon > 0$ si scelga.

- Sia $x_0 \in (0,1)$, $[0,1]$ è un intorno di $x_0$?




Il punto medio tra $x_0$ e $1$ è $\frac{x_0+1}{2}$. Si ha

$$\frac{x_0+1}{2} = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{2} \begin{cases} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ > \frac{x_0}{2} + \frac{x_0}{2} = x_0 \end{cases}$$

$x_0 < 1$

A questo punto imponiamo

$$x_0 + \varepsilon = \frac{x_0+1}{2} \rightsquigarrow \varepsilon = \frac{1-x_0}{2}.$$

Bisogna poi controllare che $x_0 - \varepsilon > 0$, perché

$$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq [0,1].$$

Quello che abbiamo fatto non vale sempre:

se $x_0 = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = \frac{1-1/4}{2} = \frac{3}{8}$, allora

$$x_0 - \varepsilon = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8} < 0$$

Questo $\varepsilon$ non va bene perché il ragionamento di prima andava bene se $x_0$ era più vicino a 1 rispetto che allo 0.

In generale, dato $x_0 \in (0,1)$, un epsilon che va bene è:

$$\varepsilon = \frac{\min\{|1-x_0|, |x_0-0|\}}{2}$$

Domanda: "quanti $\varepsilon$ vanno bene?"

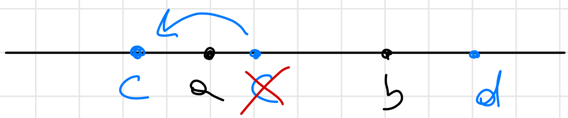
Se ne troviamo uno, allora ne troviamo infiniti:

infatti $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ si ha

$$\frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{n}, x_0 + \frac{\varepsilon}{n}\right) \subseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$$

$(a,b) \subseteq (c,d)$ vuol dire che $c < a$ e $b < d$




DEF: Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, o $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$.

Si dice che una PROPRIETÀ vale LOCALMENTE se esiste un INTORNO DI $x_0$ tale per cui questa proprietà è verificata.

DEF: $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, definiamo

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{U \subseteq \mathbb{R} : U \text{ è intorno di } x_0\}$$

PROPOSIZIONE: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Allora:

- $(a,b)$ è intorno di ogni suo punto, cioè

$\forall x \in (a,b)$ $\quad (a,b) \in \mathcal{I}_x$

- $[a,b]$ è intorno di ogni punto di $(a,b)$, cioè

$\forall x \in (a,b)$ $\quad [a,b] \in \mathcal{I}_x$, ma

$[a,b] \notin \mathcal{I}_a$ e $[a,b] \notin \mathcal{I}_b$

- $[a,b)$ e $(a,b]$ sono intorni di ogni punto di $(a,b)$, cioè $\forall x \in (a,b)$ $\quad [a,b), (a,b] \in \mathcal{I}_x$, ma

$[a,b) \notin \mathcal{I}_a$, $\quad (a,b] \notin \mathcal{I}_b$.

dim

PER CASA, usate l'esempio precedente, con $x_0 \in [0,1]$.

OSS: non è detto che se $x \in A$, allora $A \in \mathcal{I}_x$.

Infatti $a \in [a,b]$ ma $[a,b] \notin \mathcal{I}_a$.

## PROPOSIZIONE

(i) Se $U$ è un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, allora $x_0 \in U$.

(ii) Se $U, V \in \mathcal{I}_{x_0}$, allora $U \cap V \in \mathcal{I}_{x_0}$.

(iii) Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $x_0 \neq y_0$. Allora

$\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ e $V \in \mathcal{I}_{y_0}$ : $U \cap V = \emptyset$.

dim

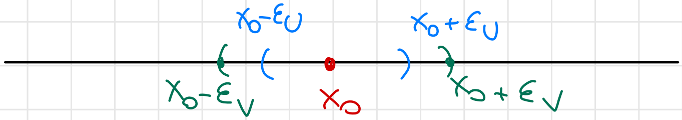
(i) $U \in \mathcal{I}_{x_0}$, $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ :

$$x_0 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U \Rightarrow x_0 \in U$$

(ii) $x_0 \in \mathbb{R}$, e siano $U, V \in \mathcal{I}_{x_0}$.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_U > 0$ : $(x_0 - \varepsilon_U, x_0 + \varepsilon_U) \subseteq U$

$\exists\, \varepsilon_V > 0$ : $(x_0 - \varepsilon_V, x_0 + \varepsilon_V) \subseteq V$




Per dire che $U \cap V \in \mathcal{I}_{x_0}$, dobbiamo trovare

$\varepsilon > 0$ : $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U \cap V$

Definiamo $\bar{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}$, allora

abbiamo che

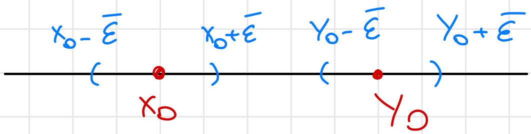
$\bar{\varepsilon} > 0$ perché $\varepsilon_U, \varepsilon_V > 0$, e

$$(x_0 - \bar{\varepsilon}, x_0 + \bar{\varepsilon}) \subseteq \begin{cases} (x_0 - \varepsilon_U, x_0 + \varepsilon_U) \subseteq U \\ (x_0 - \varepsilon_V, x_0 + \varepsilon_V) \subseteq V \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_0 - \bar{\varepsilon}, x_0 + \bar{\varepsilon}) \subseteq U \cap V.$$

PER CASA: $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$.

(iii) $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq y_0$.




IDEA: scelgo $\bar{\varepsilon} > 0$ abbastanza piccolo in modo che

$$U(= (x_0 - \bar{\varepsilon}, x_0 + \bar{\varepsilon})) \cap V(= (y_0 - \bar{\varepsilon}, y_0 + \bar{\varepsilon})) = \emptyset.$$

Se prendo $\bar{\varepsilon} = \dfrac{|x_0 - y_0|}{4}$, allora

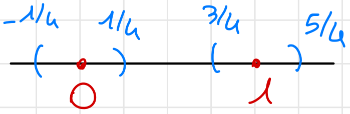
$$(x_0 - \bar{\varepsilon}, x_0 + \bar{\varepsilon}) \cap (y_0 - \bar{\varepsilon}, y_0 + \bar{\varepsilon}) = \emptyset$$

dimo a casa, nel caso in cui $x_0 < y_0$. In questo caso $\bar{\varepsilon} = \dfrac{y_0 - x_0}{4}$.

PER CASA: dimostrare gli altri casi.

OSS: il punto (iii) ci dice che ESISTONO $U$ e $V$ che soddisfano $U \cap V = \emptyset$, non che questa condizione è verificata $\forall U \in \mathcal{I}_{x_0}$ e $\forall V \in \mathcal{I}_{y_0}$.

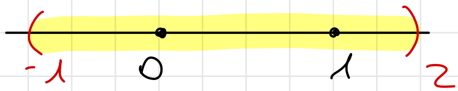
Infatti, se prendiamo $x_0 = 0$, $y_0 = 1$,




se prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{4}$, allora

$$\underbrace{\left(0 - \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4}\right)}_{\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} \cap \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}\right)}_{\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)} = \emptyset.$$

Ma se noi prendiamo $U = (-1, 2)$ e $V = (-1, 2)$, allora




$U \cap V = (-1, 2)$.

Se prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$, allora

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \emptyset$$

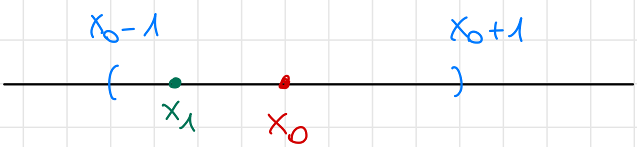
ma i due intervalli si toccano.

**DEF:** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per $A$ se

$\forall U \in \mathcal{I}_{x_0}$ $\quad A \cap U \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Scriveremo p.d.a. per indicare i punti di accumulazione.

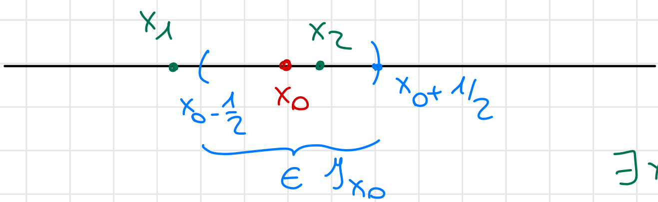
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, e supponiamo che $x_0$ sia un p.d.a. per $A$, cioè $\forall U \in \mathcal{I}_{x_0}$ $\quad A \cap U \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.




$(x_0-1, x_0+1) \in \mathcal{I}_{x_0}$, quindi

$$\underbrace{(x_0-1, x_0+1) \cap A \setminus \{x_0\}}_{\text{sia } x_1 \text{ un elemento di questo insieme}} \neq \emptyset$$

$x_1 \in A$




$\Rightarrow (x_0-\frac{1}{2}, x_0+\frac{1}{2}) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \Rightarrow$ $\exists x_2$ elemento di questo insieme

Andando avanti, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ si trova un punto $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, che dista da $x_0$ meno di $\frac{1}{n}$.

quindi:

questi punti $x_n \in A$ si ACCUMULANO vicino a $x_0$. La definizione di punto di acc ci dice proprio questo:

$\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$ (per quanto sia vicino a $x_0$)

$A \cap U \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ (trovo un punto di $A$, diverso da $x_0$, che è vicino a $x_0$)