24/05/2022

LEZIONE 33

Riepilogo: definizione di f.t primitiva, def di integrale indefinito, teorema nell'algebra di int ind, formula di integrazione per parti.

Formula di INTEGRAZIONE per sostituzione.

Si "sostituisce" la variabile di integrazione nell'integrale. Sia $g: I \Rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, vogliamo calcolare $\int g(x)dx$.

Supponiamo che $G(x)$ sia una primitiva di g in I, allora

$$\int g(x)dx = G(x) + c, \quad x \in I, \; c \in \mathbb{R}.$$

Sia $f: J \Rightarrow I$, J intervallo, f derivabile in J e f biunivoca.

$\Rightarrow \; \forall x \in I \; \exists$ un solo $t \in J : f(t) = x$

$$\int g(x)dx = \underbrace{G(f(t))}_{=(G\circ f)(t)} + c, \quad t \in J, \; c \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ $G \circ f$ è derivabile in J e

$$(G \circ f)'(t) = G'(f(t)) \cdot f'(t), \quad \forall t \in J,$$

e

$$\int G'(f(t))\, f'(t)\, dt = (G \circ f)(t) + c, \quad t \in J, \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\int f(x)\, dx = \int G'(f(t))\, f'(t)\, dt$$

G primitiva di f
$\Rightarrow$ $G' = f$

$$= \int f(f(t))\, f'(t)\, dt$$

Abbiamo SOSTITUITO x con $f(t)$

dx con $f'(t)\,dt$

OSS: Per concludere l'esercizio, bisogna "tornare" alla variabile da cui si è partiti.

esempi: Calcolare

$$\int \sin(2x)\, dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = \sin(2x)$. Con la sostituzione $2x = t$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{t}{2} = f(t)$$

Si ha

$$\int \sin(2x)\,dx = \int f(x)dx = \int f(\ell(t)) \cdot \ell'(t)dt$$

$\ell(t) = \frac{t}{2}$

$\ell'(t) = \frac{1}{2}$

$$= \int \sin\left(\cancel{2} \cdot \frac{t}{\cancel{2}}\right) \cdot \frac{1}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(t)dt = -\frac{1}{2}\cos(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

si sostituisce alla t la variabile x $\rightarrow$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

OSS: è possibile verificare se la primitiva trovata è corretta derivandola, in questo caso dovremmo trovare la funzione sotto il segno di integrale.

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ $\qquad F'(x) = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{-}\sin(2x)) \cdot \cancel{2} = \sin(2x).$

$\Rightarrow$ F è una primitiva corretta.

- Determinare una primitiva della funzione

$f(x) = \sin(x)\cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

$$\int \sin(x)\underline{\cos(x)}\,dx$$

$t = \cos(x) \rightsquigarrow x = \arccos(t) = \ell(t)$

$$\ell'(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Si ragiona " scambiando il ruolo di t e x :

se $x = \ell(t)$ allora $dx = \ell'(t)\,dt$

se $t = h(x)$ allora $dt = h'(x)\,dx$

In questo caso : $t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)\,dx$,

quindi : $\cos(x) = t$, $\sin(x)\,dx = -\,dt$

$$\Rightarrow \int \sin(x)\cos(x)\,dx = -\int t\,dt = -\frac{t^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{(\cos(x))^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

oss: lo stesso risultato si ottiene prendendo

$t = \sin(x)$, oppure studiando con attenzione la funzione integranda (quella sotto il segno di integrale): infatti

$$\underset{\substack{\parallel \\ f(x)}}{\sin(x)} \cdot \underset{\substack{\parallel \\ f'(x)}}{\cos(x)} = f(x) \cdot f'(x),$$

e cosa succede se deriviamo $H(x) = (f(x))^2$?

$$H'(x) = h'(f(x)) \cdot f'(x) = 2 f(x) f'(x)$$

$H(x) = (h \circ f)(x)$ $\qquad$ $h(t) = t^2 \rightsquigarrow h'(t) = 2t$

Quindi

$$\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2} \left(2 f(x) f'(x)\right) = \frac{1}{2} H'(x)$$

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx = \int \frac{1}{2} H'(x)\, dx = \frac{1}{2} \int H'(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} H(x) + c = \frac{1}{2} (\sin(x))^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ricordiamo che $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$, cioè

$(\sin(x))^2 = 1 - (\cos(x))^2$, quindi

$$\frac{1}{2} (\sin(x))^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - (\cos(x))^2\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{1}{2} (\cos(x))^2 + \cancel{\frac{1}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R} = -\frac{1}{2} (\cos(x))^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

Una funzione $f: D(f) \to \mathbb{R}$ si dice RAZIONALE se esistono due polinomi $P(x)$, $Q(x)$ tali per cui

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in D(f) \quad (x : Q(x) \neq 0)$$

In particolare, f è una funzione RAZIONALE se è rapporto di due polinomi.

Vediamo la procedura per integrare funzioni razionali.

① Noi lavoriamo con funzioni in cui il grado del numeratore è minore del grado del denominatore.

La funzione

$$\frac{x^4}{x^3+3x-2}$$

non soddisfa questa condizione, in tal caso si divide il numeratore per il denominatore e si lavora separatamente sui due pezzi che si ottengono.

② Scomponiamo il denominatore in fattori primi.

Ad esempio:

$$Q(x) = x^2+4x+4 = (x+2)^2$$

$$Q(x) = x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$$

In generale $Q(x) = (Q_1(x))^{m_1} (Q_2(x))^{m_2} \cdots (Q_n(x))^{m_n}$

n fattori irriducibili, ognuno con la sua molteplicità.

Ad esempio

$$Q(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$$

$\Rightarrow$ $Q_1(x) = x$, $m_1 = 2$

$Q_2(x) = (x-1)$, $m_2 = 1$

$Q_3(x) = (x+1)$, $m_3 = 1$

Ricordiamo che possiamo avere fattori di grado > 1, infatti x^2+1 è irriducibile.

③ Vogliamo scrivere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ come somma di frazioni più semplici usando la scomposizione di $Q(x)$.

Ad esempio $Q(x) = (x+2)^2$, poniamo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2},$$ con A, B parametri da determinare

$$= \frac{A(x+2) + B}{(x+2)^2} = \frac{x(A) + (2A+B)}{(x+2)^2}$$

Imponendo la condizione $P(x) = Ax + (2A+B)$, determiniamo A e B.

Se $Q(x) = x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$, allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$ A, B, C, D da determinare

$$= \frac{Ax(x-1)(x+1) + B(x-1)(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1)}{\underbrace{x^2(x-1)(x+1)}_{Q(x)}}$$

Imponendo l'uguaglianza dei numeratori determiniamo A, B, C, D.

④ Noi cerchiamo $Q(x) = (x+2)^2$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{A}{x+2}\,dx + \int \frac{B}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= A \underbrace{\int \frac{1}{x+2}\,dx}_{\ln(|x+2|)} + B \underbrace{\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx}_{(x+2)^{-2}}$$

$(x+2)^{-2} \rightsquigarrow \frac{1}{-1}(x+2)^{-1}$

$$= A \cdot \ln(|x+2|) + \underbrace{B\left(-(x+2)^{-1}\right)}_{-\frac{B}{x+2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

esempio: Trovare tutte le primitive di

$f(x) = \frac{x^5 - 2}{x^4 - x^2}$, $\quad x \neq 0,\ x \neq -1,\ x \neq 1$

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

grado num $\geq$ grado den, facciamo la divisione tra polinomi.

$P(x) = x^5 - 2$, $\quad Q(x) = x^4 - x^2$, calcoliamo

$P(x) : Q(x)$

$$
\begin{array}{cccccc|l}
1\cdot x^5 & 0\cdot x^4 & 0\cdot x^3 & 0\cdot x^2 & 0\cdot x & -2\cdot 1 & x^4-x^2 \\
\cline{7-7}
x^5 & & -x^3 & & & & x \\
\cline{1-6}
= & = & +x^3 & = & = & -2 &
\end{array}
$$

x ↑ QUOZIENTE

-2 ↑ RESTO, CON GRADO MINORE DI $Q(x)$

$$\Rightarrow \quad P(x) = Q(x)\cdot x + (x^3-2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)\cdot x + (x^3-2)}{Q(x)} = x + \frac{x^3-2}{Q(x)}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \underbrace{\int x\,dx}_{=\frac{x^2}{2}} + \int \frac{x^3-2}{Q(x)}\,dx$$

② Scomponiamo $\quad Q(x) = x^2(x-1)(x+1)$

③ $$\frac{x^3-2}{x^4-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

$$= \frac{Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^3(A+C+D) + x^2(B+C-D) + x(-A) + 1(-B)}{x^2(x-1)(x+1)}$$

Eguagliando i numeratori si ha

$$x^3-2 = (A+C+D)x^3 + (B+C-D)x^2 - Ax - B$$

$$\begin{array}{c} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} A+C+D=1 & \quad C+D=1 \\ B+C-D=0 & \quad C-D=-2 \\ -A=0 & \quad A=0 \\ -B=-2 & \quad B=2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} A=0 \\ B=2 \\ C=-\frac{1}{2} \\ D=\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{x^3-2}{x^4-x^2} = \frac{2}{x^2} - \frac{1/2}{x-1} + \frac{3/2}{x+1}$$

$$\int \frac{x^3-2}{x^4-x^2}\,dx = \int \frac{2}{x^2}\,dx - \int \frac{1/2}{x-1}\,dx + \int \frac{3/2}{x+1}\,dx$$

$$= 2\left(-x^{-1}\right) - \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{3}{2}\ln(|x+1|) + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^5-2}{x^4-x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{3}{2}\ln(|x+1|) + c,$$

$c \in \mathbb{R}$.

esempio: $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$

OSS: Se $Q(x) = x(x^2+1)$, allora si impone

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}$$

esempi di int di fz composte :

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int (f(x))^{\alpha} \cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{\alpha+1} (f(x))^{\alpha+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(|f(x)|) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

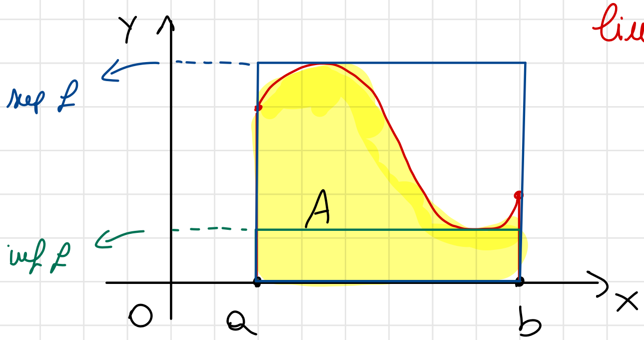
$$\int \sin(x)\, dx = \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = \cos(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\vdots$$

INTEGRALI DEFINITI

Pb: data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, positiva, con grafico limitato



Sia A = area figura evidenziata, quanto vale A?

Usiamo figure più semplici per approssimare A per eccesso e per difetto.

USIAMO I RETTANGOLI!!

Prendiamo il rettangolo con base $\overline{ab}$ e altezza $\inf f([a,b])$

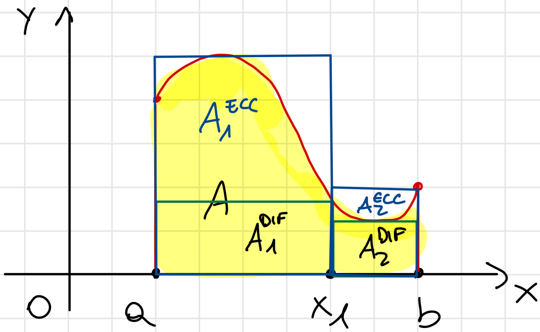
$\Rightarrow A^{DIF} = (b-a) \cdot \inf f([a,b]) \leq A$

"area per difetto"

Prendendo il rettangolo con base $\overline{ab}$ e altezza $\sup f([a,b])$

$\Rightarrow A^{ECC} = (b-a) \cdot \sup f([a,b]) \geq A$ "area per eccesso"

L'idea non è male ma vogliamo migliorarla: prendiamo $x_1 \in (a,b)$ e ripetiamo il ragionamento su $[a,x_1]$ e $[x_1,b]$



Sembra che l'approssimazione sia migliore considerando separatamente $[a,x_1]$ e $[x_1,b]$: infatti se prendiamo il rettangolo con base $\overline{ax_1}$ e altezza $\inf f([a,x_1])$ e il rettangolo con base $\overline{x_1 b}$ e altezza $\inf f([x_1,b])$, otteniamo

$$A_1^{DIF} + A_2^{DIF} = (x_1 - a) \cdot \inf f([a,x_1]) + (b - x_1) \inf f([x_1,b])$$

$$\underbrace{\inf f([a,x_1])}_{B_1}, \ \underbrace{\inf f([x_1,b])}_{B_2} \geq \underbrace{\inf f([a,b])}_{B_3}$$

$B_1 \subseteq B_3$, $B_2 \subseteq B_3$

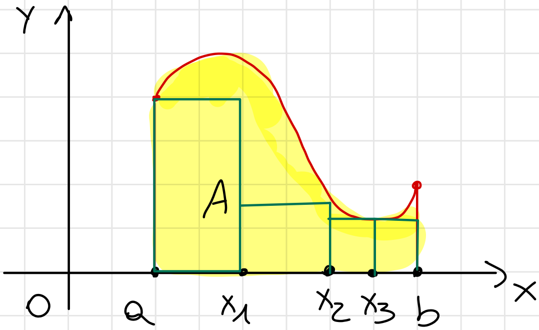
$$\geq (x_1 - a) \inf f([a,b]) + (b - x_1) \inf f([a,b]) \geq A^{DIF}$$

Con analoghi conti, si dimostra

$$A_1^{ECC} + A_2^{ECC} \leq A^{ECC}$$

$$A^{DIF} \leq A_1^{DIF} + A_2^{DIF} \leq A \leq A_1^{ECC} + A_2^{ECC} \leq A^{ECC}$$

Ripetiamo il ragionamento aggiungendo dei punti:



L'approssimazione per eccesso e per difetto migliora ancora.

STEP FINALE: prendiamo infiniti punti e vediamo che condizione mettere per ottenere A.

Questo metodo viene detto METODO DI ESAUSTIONE (Archimede).

Formalizziamo il discorso:

DEF: dato un intervallo $[a,b]$, definiamo

PARTIZIONE di $[a,b]$ ogni insieme di punti

$\mathcal{A} := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ che soddisfano le seguenti

condizioni:

(i) $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

(ii) $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (CRESCENTI RISPETTO ALL'INDICE)

(iii) $x_0 = a$, $x_n = b$.

In generale, scriviamo

$$\mathcal{A} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

esempio: se $[a,b] = [0,1]$, allora

$\mathcal{A} = \{0,1\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1/2, 1\}$, $\mathcal{A} = \{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$

sono partizioni di $[0,1]$, mentre

$B = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, $B = \{-1, \frac{1}{3}, 1\}$,

↳ manca $b=1$ ↳ manca $a=0$ e c'è $-1 \notin [0,1]$.

non sono partizioni di $[0,1]$

DEF: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, e sia $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ una partizione di $[a,b]$.

Definiamo la SOMMA per eccesso di f su $\mathcal{P}$ come

$$S(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup f([x_{i-1}, x_i])$$

somma area rettangoli per eccesso

Definiamo la SOMMA per difetto di f su $\mathcal{P}$ come

$$s(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f([x_{i-1}, x_i])$$

somma area rettangoli per difetto

$S(f, \mathcal{P})$ vengono anche chiamate SOMME SUPERIORI

$s(f, \mathcal{P})$ vengono anche dette SOMME INFERIORI

DEF: Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, definiamo

$$s(f) := \sup \{ s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b] \}$$

$$S(f) := \inf \{ S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b] \}$$

OSS: $s(f)$ ed $S(f)$ NON SONO SOMME.