30/05/2022

LEZIONE 34

Riepilogo: integrazione per sostituzione, integrazione di funzioni razionali, partizione di un intervallo, somme superiori ed inferiori.

Che relazione c'è tra $s(f)$ ed $S(f)$, dove $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è limitata?

LEMMA

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, e siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ due partizioni di $[a,b]$. Allora

$$s(f, \mathcal{A}) \leq S(f, \mathcal{B}).$$

dim

Se $\mathcal{C}$ è una partizione di $[a,b]$, allora

$$s(f, \mathcal{C}) \leq S(f, \mathcal{C})$$

Se $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sono partizioni di $[a,b]$, allora $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ è una partizione di $[a,b]$ e

$$s(f, \mathcal{C}_1) \leq s(f, \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$$

$$S(f, \mathcal{C}_1) \geq S(f, \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$$

Fissiamo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ partizioni di $[a,b]$, si ha

$$s(f,\mathcal{A}) \le s(f,\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) \le S(f,\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) \le S(f,\mathcal{B})$$

CONSEGUENZA

$A := \{ s(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ partizione di } [a,b] \}$

$B := \{ S(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ partizione di } [a,b] \}$

$\Rightarrow \forall a \in A,\ \forall b \in B$ si ha $a \le b$ ← LEMMA

$\Rightarrow \sup A \le \inf B$

$\Rightarrow s(f) \le S(f)$.

DEF: Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA, si dice che f È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN su $[a,b]$ se $s(f) = S(f)$, e in questo caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx := s(f) = S(f).$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ viene detto INTEGRALE DEFINITO DI f su $[a,b]$.

OSS: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile, allora

$$\underset{\substack{\parallel \\ s(f,\{a,b\})}}{(b-a) \inf f([a,b])} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underset{\substack{\parallel \\ S(f,\{a,b\})}}{(b-a) \sup f([a,b])}$$

OSS: l'integrale definito non è sempre un'area, ma lo è quando la funzione f assume valori positivi, cioè $f([a,b]) \subseteq [0,+\infty)$.

esempi: $f(x) = c$, $x \in [a,b]$, con $c \in \mathbb{R}$.

Sia P una partizione di $[a,b]$, $P = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

si ha

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \overbrace{\inf f([x_{i-1}, x_i])}^{=c}$$

$$= c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= c(\underbrace{\cancel{x_1} - \overset{\overset{a}{\parallel}}{x_0}}_{i=1} + \underbrace{\cancel{x_2} - \cancel{x_1}}_{i=2} + \underbrace{x_3 - \cancel{x_2}}_{i=3} + \ldots + \underbrace{\overset{\overset{b}{\parallel}}{x_n} - \cancel{x_{n-1}}}_{i=n})$$

$$= c(b-a)$$

$$S(f,P) = c(b-a)$$

$\Rightarrow s(f) = S(f) = c(b-a)$, per cui

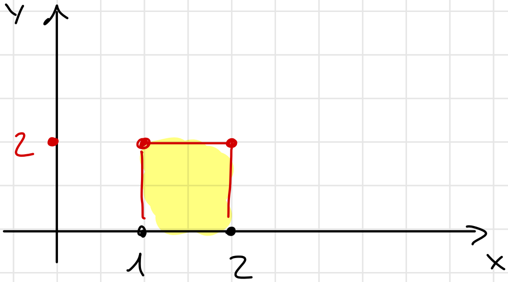
f è RIEMANN-INTEGRABILE su $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$$

graficamente, se $c=2$ e $[a,b]=[1,2]$, allora

$c\cdot(b-a) = 2(2-1) = 2$

= area evidenziata in giallo



Se $c=-1$ e $[a,b]=[0,1]$, allora

$$\int_0^1 c\,dx = c\cdot 1 = -1$$

NON PUÒ ESSERE UN'AREA!!!

- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

FUNZIONE DI DIRICHLET

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 1, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Si dimostra che (usando la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

$s(f,\mathcal{A}) = 0, \quad S(f,\mathcal{A}) = 1, \quad \forall \mathcal{A}$ partizione di $[a,b]$

per caso

$\Rightarrow$ $s(f)=0$, $S(f)=1$ e SONO DIVERSI

$\Rightarrow$ f NON È RIEMANN-INTEGRABILE

PER CASA: Calcolare $S(f, \mathcal{P})$ e $s(f, \mathcal{P})$ al variare di $\mathcal{P}$ partizione di $[a,b]$ con $f(x) = x$, $x \in [a,b]$.

TEOREMA

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora:

f è RIEMANN-INTEGRABILE su $[a,b]$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathcal{P}_\varepsilon$ partizione di $[a,b]$ tale per cui

$$(0 \leq) \; S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

dim

$\Rightarrow$) Sia f RIEMANN-INTEGRABILE su $[a,b]$, allora $s(f) = S(f) = \inf \{ S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione} \}$

$s(f) = \sup \{ s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione} \}$

CARATT DI inf e sup quando sono finiti:

$\ell = \inf A \in \mathbb{R}$ se (i) $\ell \leq a \quad \forall a \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a_\varepsilon \in A : \ell + \varepsilon > a_\varepsilon$

$s = \sup A \in \mathbb{R}$ se (i) $s \geq a \quad \forall a \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a_\varepsilon \in A : s - \varepsilon < a_\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0$ $\exists \mathcal{P}_1$ partizione di $[a,b]$ tale per cui

$$s(f)-\varepsilon < s(f,\mathcal{P}_1)$$

$\forall \varepsilon>0$ $\exists \mathcal{P}_2$ partizione di $[a,b]$ tale per cui

$$S(f)+\varepsilon > S(f,\mathcal{P}_2)$$

Prendiamo $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, si ha

$$s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) \geq s(f,\mathcal{P}_1)$$

$$S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) \leq S(f,\mathcal{P}_2)$$

Quindi

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) &\leq S(f,\mathcal{P}_2)-s(f,\mathcal{P}_1) \\ &\leq S(\cancel{f})+\varepsilon-(s(\cancel{f})-\varepsilon) \\ &= 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Sappiamo che

$\forall \varepsilon>0$ $\exists \mathcal{P}_\varepsilon$ partizione di $[a,b]$ tale per cui

$$S(f,\mathcal{P}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Sappiamo che

$$s(f) = \sup \overbrace{\{ s(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b] \}}^{A}.$$

Facciamo vedere che $S(f)$ è il sup dello stesso insieme, cioè che

(i) $S(f) \geq a \ \forall a \in A$ $\quad (S(f) \geq s(f, P) \ \forall P$ partizione di $[a,b])$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A$ tale per cui $S(f) - \varepsilon < a_\varepsilon$

$(\exists P_\varepsilon$ partizione di $[a,b]$ tale per cui

$$S(f) - \varepsilon < s(f, P_\varepsilon))$$

$$S(f) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

(i): $\quad S(f, P) \geq s(f, P) \quad \forall P$ partizione di $[a,b]$

$\Rightarrow \quad S(f) \geq s(f, P) \quad \forall P$ partizione di $[a,b]$.

(ii): Fissiamo $\varepsilon > 0$, esiste una partizione P_ε di $[a,b]$ per cui si ha

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \text{HYP}$$

Poiché $S(f) \leq S(f, P_\varepsilon)$, si ha

$$S(f) - s(f, P_\varepsilon) \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

$\Rightarrow S(f) = \sup A = s(f) \Rightarrow S(f) = s(f)$, cioè

f è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN $\quad \blacksquare$

CLASSI DI FZ INTEGRABILI

TEOREMA

Sia $f : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ monotona. Allora f è integrabile su $[a,b]$.

dim

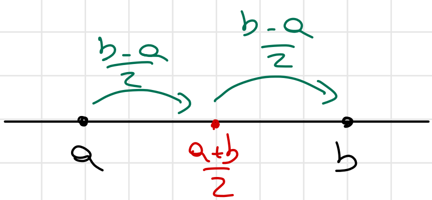
Supponiamo che f sia crescente, allora

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b], \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2).$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, e consideriamo la partizione

$$A_n = \left\{ x_k = a + k\frac{b-a}{n} : k = 0, \dots, n \right\}$$

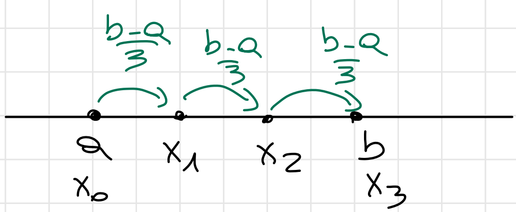
$n = 2$



$K = 0, 1, 2,$ $\quad x_0 = a \quad x_1 = a + 1\frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$

$$x_2 = a + 2\frac{b-a}{2} = b$$

$n = 3$



$\frac{b-a}{3}$

Si ha

$$s(f, A_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf f([x_{i-1}, x_i])$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{\frac{b-a}{n}} f(x_{i-1})$$

$$S(f, A_n) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{\frac{b-a}{n}} f(x_i)$$

Inoltre:

$$x_i - x_{i-1} = \cancel{a} + \cancel{i\frac{b-a}{n}} - \left(\cancel{a} + (\cancel{i}-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}$$

Quindi

$$S(f, A_n) - s(f, A_n) = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \Big(f(x_n) + \cancel{f(x_{n-1})} + \cancel{\ldots} + \cancel{f(x_1)}$$

$$- \cancel{f(x_{n-1})} - \cancel{\ldots} - \cancel{f(x_1)} - f(x_0) \Big)$$

$$= \frac{b-a}{n} \big(f(b) - f(a) \big).$$

Vogliamo usare il teorema precedente, osserviamo che:

- f è LIMITATA in $[a,b]$, poiché

$$\underbrace{f(a) \leq f(x) \leq f(b)}_{f \text{ CRESCENTE}} \qquad \forall x \in [a,b]$$

- Fissiamo $\varepsilon > 0$, e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale per cui $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$

Se prendiamo $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}_{\bar{n}}$ si ha

$$S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{P}_\varepsilon)$$

$$= S(f, \mathcal{P}_{\bar{n}}) - s(f, \mathcal{P}_{\bar{n}})$$

$$= \frac{1}{\bar{n}} (b-a)(f(b)-f(a))$$

$$< \varepsilon \, (b-a)(f(b)-f(a))$$

$\Rightarrow$ f è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN in $[a,b]$.

$\blacksquare$

TEOREMA

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile.

TEOREMA (ALGEBRA DEGLI INT DEFINITI)

Siano $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a,b]$.
Allora $f+g$ e $c \cdot f$ sono integrabili in $[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$,
e

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b (c \cdot f)(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx.$$

OSS: le uguaglianze sono tra numeri.

TEOREMA (CONFRONTO TRA INTEGRALI DEFINITI)

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a,b]$.

Supponiamo che $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

esercizi

- $\int \ln(x)dx$

$$\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx$$

INT PER PARTI: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$

$f'(x) = 1, \leadsto f(x) = x \quad (x+c,\ c \in \mathbb{R},\ c=0)$

$g(x) = \ln(x) \rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int 1 \cdot \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,dx = x \cdot \ln(x) - x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

VERIFICA: $F(x) = x \cdot \ln(x) - x$

$$F'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + \cancel{1} - \cancel{1}$$

- $\int \arctan(x)dx = \int 1 \cdot \arctan(x)dx$

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$

$g(x) = \arctan(x) \qquad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + c$

$$= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(|1+x^2|) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

- $\int (\cos(x))^2 dx = \int 1 \cdot (\cos(x))^2 dx$ NO

$f(x) = (\cos(x))^2 \qquad f'(x) = 2\cos(x)(-\sin(x))$

$= x \cdot (\cos(x))^2 + 2\int x \cos(x) \sin(x)\, dx$

NO!!

$\int (\cos(x))^2 dx = \int \cos(x) \cdot \cos(x) dx$

$f'(x) = \cos(x) \qquad f(x) = \sin(x)$

$g(x) = \cos(x) \qquad g'(x) - \sin(x)$

$= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int (\sin(x))^2 dx$

Se integrassimo per parti $\int (\sin(x))^2 dx$ otterremmo

$\int (\sin(x))^2 dx = -\sin(x)\cos(x) + \int (\cos(x))^2 dx$ VERA MA INUTILE

Si usa il fatto che $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$,

da cui segue che

$\int (\sin(x))^2 dx = \int (1 - (\cos(x))^2 dx$

$= \int 1\, dx - \int (\cos(x))^2 dx$

Quindi

$$\underbrace{\int (\cos(x))^2 dx}_{A} = x + \cos(x)\sin(x) - \underbrace{\int (\cos(x))^2 dx}_{A}$$

$$2\int (\cos(x))^2 dx = x + \cos(x)\sin(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int (\cos(x))^2 dx = \frac{x + \cos(x)\sin(x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

VERIFICA: $F(x) = \dfrac{x + \cos(x)\sin(x)}{2}$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{1 - (\sin(x))^2}_{(\cos(x))^2} + (\cos(x))^2\right) = (\cos(x))^2$$

- $$\int (\sin(x))^2 dx = \int (1 - (\cos(x))^2)\,dx$$
$$= x - \int (\cos(x))^2 dx$$
$$= \frac{x - \cos(x)\sin(x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- $$\int e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^x$

$g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad g'(x) = \frac{1}{2}\cos(x/2)$

$$= e^x \sin(x/2) - \int e^x \cdot \frac{1}{2}\cos(x/2)\,dx$$

$$= e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\int e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$f'(x) = \cos(x/2) \qquad f(x) = 2\sin(x/2)$

$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$

$$= e^x \cancel{\sin(x/2)} - \frac{1}{2}\left(2e^x \cancel{\sin}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\int e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx\right)$$

$$= \int e^x \sin(x/2)\,dx$$

No!!

$f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^x$

$g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad g'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx\right)$$

$\int e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$$= e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\int e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$\Rightarrow \overbrace{\left(1 + \frac{1}{4}\right)}^{5/4} \int e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{4}{5}e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{5}e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C, \; C \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$ $\qquad e^x = t \qquad e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t}$

$\text{"}f(x)\text{"} \qquad x = \ell(t) \qquad x = \ln(t) = \ell(t)$

$\ell'(t) = \frac{1}{t}$

$$= \int \underbrace{\frac{e^{\ln(t)} - e^{-\ln(t)}}{e^{\ln(t)} + e^{-\ln(t)}}}_{f(\ell(t))} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\ell'(t)}\,dt$$

OPPURE : $\quad e^x = t \qquad t = h(x) \qquad dt = h'(x)\,dx$

$= e^x\,dx$

$\Downarrow$

"$dx = \frac{1}{t}\,dt$" PERCHÉ $e^x = t$

$$\Rightarrow \int \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1}}\,\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \int \frac{\frac{t^2-1}{\cancel{t}}}{\frac{t^2+1}{\cancel{t}}}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2-1}{t(t^2+1)}\,dt$$

$$\frac{t^2-1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

$$= \frac{At^2 + A + Bt^2 + Ct}{t(t^2+1)} = \frac{t^2(A+B) + Ct + A}{t(t^2+1)}$$

$$\begin{array}{l} t^2 \\ t \\ 1 \end{array}\begin{cases} A+B=1 \\ C=0 \\ A=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{t^2-1}{t(t^2+1)}\,dt = -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt$$

$$= -\ln(|t|) + \ln(|t^2+1|) + C \,,\quad C \in \mathbb{R} \qquad e^x = t$$

$$= -\underbrace{\ln(|e^x|)}_{\ln(e^x) = x} + \ln(e^{2x}+1) + C \,,\quad C \in \mathbb{R}$$