9/5/2022

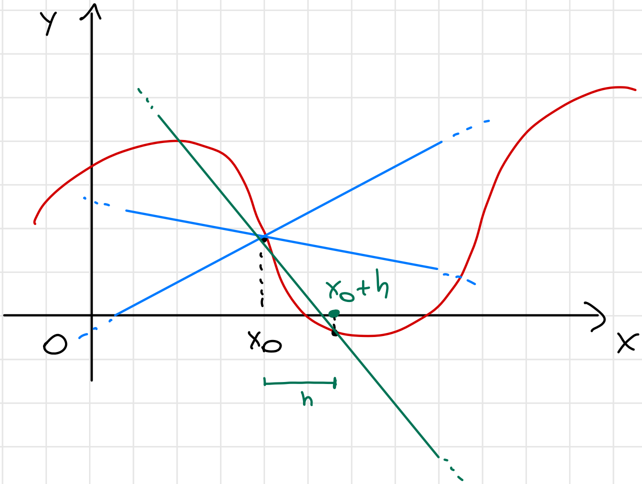
LEZIONE 26

Riepilogo: proprietà o piccoli, polinomio di Taylor, ordine di infinitesimo e parte principale.

Pb: come costruire il polinomio di Taylor?

IDEA: Vogliamo approssimare il grafico di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ in un punto $x_0$ interno ad $A$. Lo vogliamo approssimare con "una curva" che sia semplice e che sia "vicina" al grafico di $f$.

La curva più semplice che conosciamo è la retta, per cui cerchiamo una retta che "approssimi" il grafico $f$ in $x_0$.

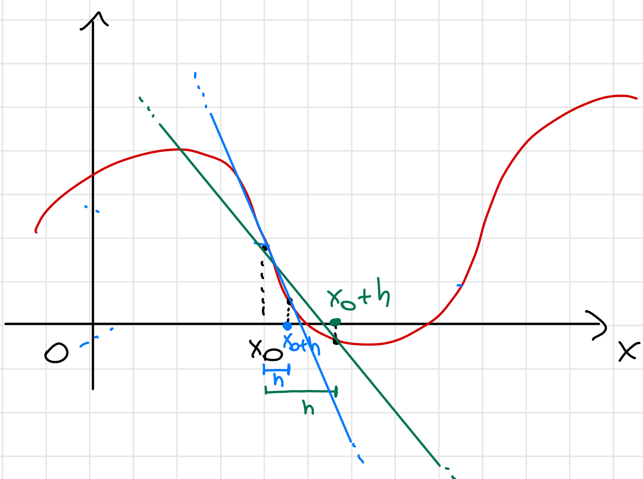



le rette blu non vanno bene.

La retta verde è la retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$. L'equazione di questa retta è

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \rightsquigarrow = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad y = \underbrace{\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)}_{\text{COEFF ANG DELLA RETTA}}(x-x_0)+f(x_0)$$



Scegliendo $h$ più piccolo, sembra di aver ottenuto un'approssimazione migliore del grafico di $f$ in $x_0$.

L'equazione di questa retta è

$$y = \frac{f(x_0+h)+x_0}{h}(x-x_0)+f(x_0)$$

Possiamo scegliere $h>0$ o $h<0$, ma non $h=0$.

Abbiamo visto che:

- $|h|$ piccolo $\Rightarrow$ l'approssimazione è buona
- $h=0$ non la possiamo prendere

$\Rightarrow$ Consideriamo il limite per $h \to 0$ della funzione

$$g(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

DEF: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0$ punto interno di $A$.

Definiamo RAPPORTO INCREMENTALE di $f$ in $x_0$ la funzione $f(h) := \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale per cui $x_0+h \in A$.

OSS: $x_0$ è punto interno per $A$

$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$, quindi se prendiamo $|h| < \delta$ abbiamo $x_0 + h \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$

DEF: Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0$ punto interno di $A$.

Diciamo che $f$ È DERIVABILE IN $x_0$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

il limite esiste ed è FINITO

Il valore $f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ viene detto DERIVATA DI $f$ IN $x_0$.

DEF: Sia $f : A \to \mathbb{R}$, diciamo che $f$ È DERIVABILE IN $B \subseteq A$ se $f$ è DERIVABILE in $x_0$, $\forall x_0 \in B$.

esempi: $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f$ è derivabile in $\mathbb{R}$ ed $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0, \quad \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0, \ b \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(a(x_0+h)+b) - (ax_0+b)}{h}$$

$$= \frac{\cancel{ax_0} + a\cancel{h} + \cancel{b} - \cancel{ax_0} - \cancel{b}}{\cancel{h}} = a, \quad \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = a \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x_0) = a \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h}$$

$$= \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h}$$

$$= \sin(x_0)\Big(\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 0}}\Big) + \cos(x_0)\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 1}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = 0 + \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0) \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(x) = \sin(x)$ è DERIVABILE in $\mathbb{R}$

e $f'(x_0) = \cos(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$

OSS: il limite del rapporto incrementale coincide con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

infatti con la sostituzione $h = x - x_0$, otteniamo

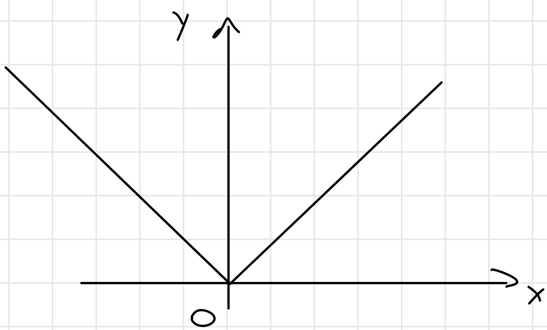
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \hookrightarrow\, x \to x_0}} \frac{f(\overbrace{x_0 + h}^{x}) - f(x_0)}{\underbrace{h}_{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

DEF: Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0$ punto interno di $A$.

Se $f$ è DERIVABILE in $x_0$, definiamo RETTA TANGENTE A $f$ IN $x_0$ la retta di equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

esempio di fz non derivabile: $f(x) = |x|$, facciamo vedere che $f$ non è derivabile in $x_0 = 0$.




$x < 0 \Rightarrow f(x) = -x$

$x > 0 \Rightarrow f(x) = x$

$h > 0 \Rightarrow \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{f(h)}{h} = 1$

$h < 0 \Rightarrow \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{f(h)}{h} = -1$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \\ &\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -1 \end{aligned}\right\} \nexists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$\Downarrow$

$f$ non è DERIVABILE in $0$.

OSS: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, e sia $B \subseteq A$ tale per cui $f$ è DERIVABILE in $B$. Possiamo definire

$f': B \to \mathbb{R}$ con $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\forall x \in B$.

La funzione $f': B \to \mathbb{R}$ viene detta DERIVATA PRIMA di $f$.

esempi: • $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$(A = B = \mathbb{R})$

• $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0, \end{cases} = \begin{cases} x, & x > 0, \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$A = \mathbb{R}$

$B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

OSS: Se

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq x_0, \\ f_2(x), & x < x_0, \end{cases}$$

con $f_1, f_2$ derivabili in $(x_0, +\infty)$ e $(-\infty, x_0)$, rispettivamente. Allora sicuramente $f$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x), & x > x_0, \\ f_2'(x), & x < x_0. \end{cases}$$

Per vedere cosa succede in $x_0$ o faccio il limite del rapporto incrementale, oppure si usano dei teoremi che vedremo più avanti.

DOMANDA: che relazione c'è tra continuità e derivabilità?

TEOREMA

Siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0$ punto interno ad $A$.

$f$ è derivabile in $x_0$ $\Rightarrow$ $f$ è continua in $x_0$.

dim

Dobbiamo dim che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$f$ è der in $x_0$ $\Rightarrow$ $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) \overset{\cdot \frac{x-x_0}{x-x_0}}{=} \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0) \in \mathbb{R}} \underbrace{(x - x_0)}_{0 \ (x \to x_0)}$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad \blacksquare$$

OSS: il viceversa non è vero: $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, allora $f$ è continua in $0$ ma non è derivabile in $0$. Quindi:

DERIVABILITÀ IN $x_0$ $\Rightarrow$ CONTINUITÀ IN $x_0$

CONTINUITÀ IN $x_0$ $\not\Rightarrow$ DERIVABILITÀ IN $x_0$

Che relazione c'è tra o piccoli e derivata?

Se consideriamo $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sappiamo che

$\sin(x) = x + o(x)$, $x \to 0$.

Inoltre $f'(x) = \cos(x)$, e $\cos(0) = 1$, quindi $f'(0) = 1$,

cioè la retta tangente al grafico di $f$ in $x_0 = 0$ è

$$y = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{f'(0)}\,(x-0) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(0)} \Rightarrow y = x$$

$\Rightarrow$ il coeff di $x$ nello sviluppo del seno e il coeff angolare della retta tg al sin in $x_0 = 0$ coincidono.

TEOREMA

Siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0$ punto interno di $A$.

$f$ è derivabile in $x_0$ $\iff$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(x - x_0),$$

per $x \to x_0$.

In questo caso abbiamo $c = f'(x_0)$.

dim

$\Rightarrow$) Prendiamo $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$,

Vogliamo dire che $g(x) = o(x - x_0)$, $x \to x_0$. Si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \Bigg( \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow \atop f'(x_0)} - \underbrace{f'(x_0)}_{\downarrow \atop f'(x_0)} \Bigg) \quad x \to x_0$$

$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

$\Rightarrow$ $g(x) = o(x - x_0)$, $x \to x_0$

$\Rightarrow$ $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$

$\Rightarrow$ $f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\shortparallel \atop c}(x - x_0) + o(x - x_0)$

$\Leftarrow$) Supponiamo che $\exists c \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c(x-x_0) + o(x-x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \Big( \underbrace{c}_{\downarrow \, c} + \underbrace{\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow \, 0 \quad x \to x_0} \Big) = c.$$

$\Rightarrow$ $f$ è DERIVABILE in $x_0$ e $f'(x_0) = c$.

TEOREMA (ALGEBRA DELLE DERIVATE)

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0$ punto interno di $A$, e siano $f$ e $g$ derivabili in $x_0$. Allora:

(i) $f+g$ è DERIVABILE in $x_0$ e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(ii) $f \cdot g$ è DERIVABILE in $x_0$ e

REGOLA DI LEIBNIZ

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

(iii) Se $g(x_0) \neq 0$ allora $f/g$ è DERIVABILE in $x_0$ e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

dim

(i) Consideriamo $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, sappiamo che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0),$$
$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), \quad x \to x_0.$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (f(x_0) + g(x_0)) + (f'(x_0) + g'(x_0))(x-x_0) + o(x-x_0)$$
$$= (f+g)(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0))(x-x_0) + o(x-x_0), \quad x \to x_0$$

$\Rightarrow$ $f+g$ è derivabile in $x_0$ e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(ii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$= f(x_0)\left(g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\right)$$
$$+ f'(x_0)\left(g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\right)(x-x_0)$$
$$+ o(x-x_0)\left(g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\right)$$

$$= f(x_0) \cdot g(x_0) + \left(f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)\right)(x-x_0)$$
$$+ o(x-x_0) \leftarrow$$ SI MANGIA TUTTI GLI ALTRI TERMINI

$$= (f \cdot g)(x_0) + \left(f(x_0) g'(x_0) + f'(x_0) g(x_0)\right)(x-x_0)$$
$$+ o(x-x_0), \quad x \to x_0$$

$\Rightarrow$ $f \cdot g$ è DERIVABILE in $x_0$ e

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

ESERCIZIO 1:

Calcolare lo sviluppo della funzione $f(x) = tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ in un intorno di 0 all'ordine 5.

Per farlo, usiamo lo sviluppo di sin e cos in un intorno di 0:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6), \quad x \to 0,$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5), \quad x \to 0.$$

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

PER TOGLIERE IL DENOMINATORE SI USA

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{n} y^k + o(y^n)$$

$$= 1 + y + o(y) = 1 + y + y^2 + o(y^2), \quad y \to 0.$$

Se prendiamo $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, quindi

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \cdot \frac{1}{1-y}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)\left(1 + y + y^2 + o(y^2)\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)\left(1 + \left(\cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^4}{4!}} + o(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2\right)\right)$$

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right)$$

$$= o(x^5) + x + \frac{x^3}{2} + \frac{5}{24}x^5 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120}$$

$$= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{25 - 10 + 1}{120}x^5 + o(x^5)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

2° METODO: Noi cerchiamo uno sviluppo del tipo

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \sin(x) = \cos(x)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)\right)$$

Sviluppando sin e cos troviamo le condizioni

$a_0, \dots, a_5 \in \mathbb{R}$.

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)\right)$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)$$

$$- \frac{a_0}{2} x^2 - \frac{a_1}{2} x^3 - \frac{a_2}{2} x^4 - \frac{a_3}{2} x^5$$

$$+ \frac{a_0}{24} x^4 + \frac{a_1}{24} x^5$$

$$= a_0 + a_1 x + x^2\left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right) + x^3\left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right)$$

$$+ x_4\left(a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24}\right) + x^5\left(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24}\right) + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cancel{a_0 = 0}, \quad a_1 = 1, \quad \cancel{a_2 - \frac{a_0}{2} = 0}, \quad a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\cancel{a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24} = 0}, \quad a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24} = \frac{1}{120}$$

$$a_1 = 1 \qquad a_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \qquad a_5 = \frac{1}{120} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

ESERCIZIO 2:

$$\text{Calcolare} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{e^x - 1 - \frac{x^2}{2} - x}$$

Sostituendo si ottiene $\left[\frac{0}{0}\right]$ F.I., i limiti notevoli non aiutano, proviamo a sviluppare:

$$\sin(x) = x + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x) - x}{e^x - 1 - \frac{x^2}{2} - x} = \frac{\cancel{x} + o(x^2) - \cancel{x}}{\cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{x} + \cancel{x}}$$

$$= \frac{o(x^2)}{o(x^2)} = \frac{\cancel{x^2} \cdot o(1)}{\cancel{x^2} \cdot o(1)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

ORDINE 3:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x) - x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{6} + \cancel{o(x)}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{6} + \cancel{o(1)}^{\to 0}\right)}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{-1/6}{1/6} = -1.$$