5/4/2022

LEZIONE 19

Riepilogo: "e" come limite di successione, formula di Stirling, serie, serie geometrica.

SOTTOSUCCESSIONI

Sia $\{a_n\}_{n\in S}$ successione, è possibile che ci siano sottoinsiemi di $\{a_n\}_{n\in S}$, che possono ancora essere visti come successioni, che godono di proprietà che $\{a_n\}_{n\in S}$ non ha.

Ad esempio: $a_n = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, non ha limite per $n \to +\infty$, ma se consideriamo:

- $b_n := a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ed essendo costante ha limite 1 per $n \to +\infty$.
- $c_n := a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ha limite -1 per $n \to +\infty$.

$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni costruite a partire da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, loro hanno limite ma

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no. Non possiamo prendere $\{a_n\}_{n \text{ PARI}}$, l'insieme $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ è PARI}\}$ NON È UNA SEMIRETTA di $\mathbb{N}$, perché se $n_0 \in \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\}$ allora $n_0 + 1 \notin$ a questo insieme.

Il trucco è prendere una funzione definita su una semiretta di $\mathbb{N}$ e comporla con la successione; nell'esempio, se prendiamo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi(n) = 2n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, osserviamo che $b_n = a_{\varphi(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

DEF: Sia $\{a_n\}_{n\in S}$ successione, e sia $\varphi : S \to S$ strettamente crescente. Allora la successione $\{b_n\}_{n\in S}$ definita come $b_n = a_{\varphi(n)}$ $\forall n \in S$ viene detta SOTTO SUCCESSIONE di $\{a_n\}_{n\in S}$.

OSS: la funzione φ serve ad individuare gli indici della succ di partenza che consideriamo.

OSS: $\{b_n\}_{n\in S}$ è una successione: infatti, è definita per ogni $n \in S$ come $\ell \circ \varphi$, dove ℓ è la funzione "associata" ad $\{a_n\}_{n\in S}$.

OSS: se prendiamo $\varphi(n) = n$ $\forall n \in S$ abbiamo $b_n = a_{\varphi(n)} = a_n$ $\forall n \in S$. Questo vuol dire che $\{a_n\}_{n\in S}$ è sottosuccessione di se stessa.

esempio: $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, vogliamo individuare la sottosucc di a_n in cui consideriamo solo gli indici che sono dei quadrati. In questo caso:
$\varphi(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, e $b_n = a_{\varphi(n)} = a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

LEMMA: Se S è una semiretta di $\mathbb{N}$ e $\varphi : S \to S$ è strettamente crescente, allora $\varphi(n) \geq n$ $\forall n \in S$.

dim

$S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \in \mathbb{N}\}$.

PASSO BASE: $n = n_0$, allora $\varphi(n_0) \in S \Rightarrow \varphi(n_0) \geq n_0$.

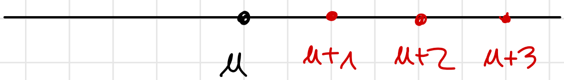
PASSO INDUTTIVO: dim che se $\varphi(n) \geq n$ allora
IPOTESI

$\varphi(n+1) \geq n+1$, $\forall n \in S$.
TESI

- $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ perché $n+1 > n$ e φ è strettamente crescente.

Ma $\varphi(n) \geq n$ per ipotesi induttiva, quindi

$\varphi(n+1) > n \Rightarrow \varphi(n+1) \geq n+1$ poiché $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$



PASSO BASE $\oplus$ PASSO INDUTTIVO $\Rightarrow$ principio di induzione,

e dunque $\varphi(n) \geq n \quad \forall n \in S$.

PROPOSIZIONE. Sia $\{a_n\}_{n\in S}$ successione. Allora

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se per ogni sottosuccessione $\{b_n\}_{n\in S}$ di $\{a_n\}_{n\in S}$ $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

OSS: di solito questo risultato si utilizza con la contronominale per dire che una successione non ha limite $\rightarrow$ ($P \Leftrightarrow Q$ è eq a $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$)

Infatti: se P = " $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ " e

Q = " ogni sottosucc $\{b_n\}_{n\in S}$ di $\{a_n\}_{n\in S}$ soddisfa $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$ ",

allora

$\overline{P}$ = " il limite di a_n non è ℓ per $n\to+\infty$ ".

$\overline{Q}$ = " $\exists\, \{b_n\}_{n\in S} \subseteq \{a_n\}_{n\in S}$ e $b_n \not\to \ell$ per $n\to+\infty$ ".

SOTTO SUCC

esempio: $a_n = (-1)^n$ $n \in \mathbb{N}$ non ha limite.

Se esiste il limite di a_n e lo chiamiamo ℓ,

- se $\ell = 1$, abbiamo $b_n = a_{2n+1} = -1$ ha limite -1.
- se $\ell \neq 1$, abbiamo $b_n = a_{2n} = 1$ ha limite 1.

dim

$\Leftarrow$) È OVVIO PERCHÉ $\{a_n\}_{n \in S}$ È SOTTOSUCCESSIONE di se stessa.

$\Rightarrow$) Sappiamo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, cioè

$\forall U \in \mathcal{U}_\ell \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad a_n \in U \quad \forall n \geq \bar{n}$

Fissiamo $\{b_n\}_{n \in S}$ sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \in S}$,
vogliamo dimostrare che

$\forall U \in \mathcal{U}_\ell \quad \exists \bar{n}_b \in \mathbb{N} : \quad b_n \in U \quad \forall n \geq \bar{n}_b$.

Sia $U \in \mathcal{U}_\ell$, allora $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n \in U \ \forall n \geq \bar{n}$,
ed esiste $\varphi : S \to S$ strettamente crescente
tale per cui $b_n = a_{\varphi(n)}$ e $\varphi(n) \geq n \ \forall n \in S$.

In particolare, $\varphi(\bar{n}) \geq \bar{n}$ e $\forall n \geq \bar{n}$ abbiamo

$$\varphi(n) \geq \varphi(\bar{n}) \geq \bar{n}.$$

Quindi

$$a_{\varphi(n)} \in U \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$\overset{\shortparallel}{b_n}$$

$a_{\varphi(n)}$ e $\varphi(n) \geq \bar{n}$ $\forall n \geq \bar{n}$.

Abbiamo ottenuto che:

$$\forall U \in \mathcal{I}_e \quad \exists \, \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad b_n \in U \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$\boxtimes$

TEOREMA (DI BOLZANO - WEIERSTRASS)

Sia $\{a_n\}_{n \in S}$ una successione limitata. Allora esiste una sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \in S}$ convergente.

OSS: Questo teorema non ci dice quale sottosuccessione è convergente.

Questo teorema non ci dice quale sia il limite di questa sottosuccessione.

esercizi.

1_ calcolare $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2^{\frac{1}{n}}-1}$

Mandando $n\to+\infty$ otteniamo $\dfrac{\ln(0+1)}{2^0-1} = \dfrac{0}{0}$ F.I.

si usano i limiti notevoli.

$$\ln\left(\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)+\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)-1+1\right)$$

$$= \left[\frac{\ln\left(\overbrace{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}^{a_n}+1\right)}{\underbrace{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}_{a_n}}\right] \cdot \left(\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)+\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)-1\right)$$

1, $n\to+\infty$ $\qquad \dfrac{\ln(a_n+1)}{a_n}$

Consideriamo anche il denominatore: ci rimane

$$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{2^{1/n}-1}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2^{1/n}-1} + \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{2^{1/n}-1}$$

RICOSTRUIAMO I LIMITI NOTEVOLI

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n}\right]}_{\to 1,\ n \to +\infty} \cdot \frac{1}{n}$$

$$2^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\ln\left(2^{\frac{1}{n}}\right)} - 1 = e^{\overbrace{\frac{1}{n}\ln(2)}} - 1 \quad \to a_n = \frac{1}{n}\cdot\ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$= \underbrace{\left[\frac{e^{\frac{1}{n}\ln(2)} - 1}{\ln(2)\cdot\frac{1}{n}}\right]}_{\to 1,\ n\to+\infty} \cdot \left(\ln(2)\cdot\frac{1}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = -\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\underbrace{\left[\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right]}_{\to \frac{1}{2},\ n\to+\infty} \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Quindi :

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2^{\frac{1}{n}} - 1} = \cancel{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}^{\,1} \cdot \cancel{\frac{1}{n}} \cdot \cancel{\frac{\ln(2)\cdot\frac{1}{n}}{2^{1/n} - 1}}^{\,1} \cdot \frac{1}{\ln(2)\cdot\cancel{\frac{1}{n}}}$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(2)}$$

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{2^{\frac{1}{n}} - 1} = \cancel{\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}}^{\,\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{n^{\cancel{2}}}\right) \cdot \cancel{\frac{\ln(2)\frac{1}{n}}{2^{\frac{1}{n}} - 1}}^{\,1} \cdot \frac{1}{\ln(2)\cdot\cancel{\frac{1}{n}}}$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} -\frac{1}{+\infty}\cdot\frac{1}{\ln(2)} = 0$$

Mettendo insieme i pezzi si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2^{\frac{1}{n}}-1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{\ln(2)}+0\right)$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} = \log_2(e)$$

$a=2$

$$\ln(2) = \frac{\log_a(2)}{\log_a(e)} = \frac{1}{\log_2(e)}$$

2 _ Determinare il coefficiente di x^5 nello sviluppo di $(x-12)^6$

BINOMIO DI NEWTON: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Nel nostro caso:

$$(x-12)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^k (-12)^{6-k}$$

a noi interessa solo il caso $k=5$.

$$\binom{6}{5} = \frac{6!^{\,=6\cdot 5!}}{\cancel{5!}(6-5)!} = \frac{6}{1!} = 6$$

$$(-12)^{6-5} = -12$$

$\Rightarrow$ il coeff di x^5 è $6\cdot(-12) = -72$

3 _ Sia $A = \left\{ \frac{2n^2+1}{n^2+5n} , n \geq 1 \right\}$

Trovare sup e inf di questo insieme.

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{2n^2+1}{n^2+5n}}_{= a_n} = 2$$

$$\frac{(-1)^n}{n} \to 0 , \quad n \to +\infty$$

Sostituiamo dei valori di n:

$n=1$ $\quad \frac{2+1}{1+5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad n=2$ $\quad \frac{2\cdot 4+1}{4+10} = \frac{9}{14}$

$n=3$ $\quad \frac{2\cdot 9+1}{9+15} = \frac{19}{24}$ $\qquad n=4$ $\quad \frac{32+1}{16+20} = \frac{33}{36}$

OBIETTIVO: dim che a_n è crescente, cioè che

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)^2+1}{(n+1)^2+5(n+1)} - \frac{2n^2+1}{n^2+5n}$$

$$= \frac{(2(n^2+2n+1)+1)(n^2+5n) - (2n^2+1)(n^2+2n+1+5n+5)}{(\quad)(\quad)}$$

$$= \frac{(2(u^2+2u+1)+1)(u^2+5u) - (2u^2+1)(u^2+2u+1+5u+5)}{(\quad)(\quad)}$$

$$= \frac{(2u^2+4u+3)(u^2+5u) - (2u^2+1)(u^2+7u+6)}{//}$$

$$= \frac{\cancel{2u^4} + \cancel{10u^3} + \cancel{4u^3} + 20u^2 + 3u^2 + 15u - (\cancel{2u^4} + \cancel{14u^3} + 6u^2 + u^2 + 7u + 6)}{//}$$

$$= \frac{16u^2 + 8u - 6}{(\quad)(\quad)}$$

$16x^2 + 8x - 6 \geq 0 \qquad 8x^2 + 4x - 3 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{8}$$

se $\quad x \leq \dfrac{-2-\sqrt{28}}{8} \quad \vee \quad x \geq \underbrace{\dfrac{-2+\sqrt{28}}{8}}_{\leq \frac{-2+6}{8} = \frac{1}{2}}$

$\sqrt{28} \leq \sqrt{36} = 6$

$n \geq 1 \Rightarrow$ "x" $\geq \frac{1}{2}$ e dunque il numeratore è sempre ≥ 0

$\Rightarrow a_n$ è CRESCENTE $\Rightarrow$ $\inf A = \min A = a_1$.

$\sup A = 2$, $\nexists \max A$.