4/3/2022

LEZIONE 6

Riepilogo: caratterizzazione di inf e sup (II parte), funzioni polinomiali, esponenziali, logaritmiche, radice quadrata, funzione modulo, grafico di una funzione.

OSS: a una f $f: A \to B$ $(A, B \subseteq \mathbb{R}, A, B \neq \emptyset)$ sono associati in modo "naturale" 3 insiemi:

- A: dominio di f
- $f(A)$ o $Im(f)$: immagine di A tramite f,

$$f(A) = \{ b \in B : \exists a \in A, f(a) = b \} = \{ f(a) : a \in A \}.$$

$\subseteq B$

- $G(f)$: grafico di f,

$$G(f) = \{ (a, f(a)) : a \in A \} \subseteq A \times B$$

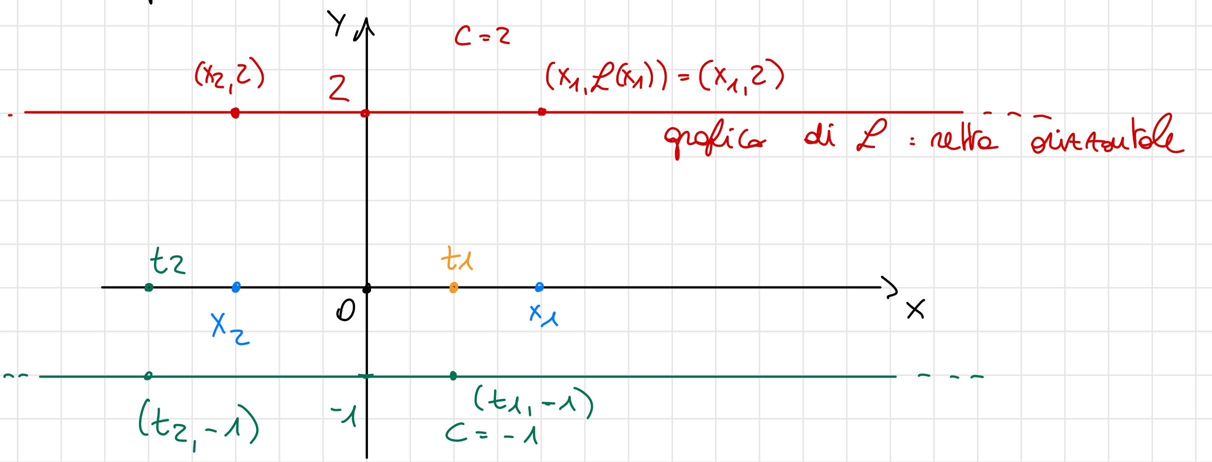
Gli elementi di $G(f)$ sono COPPIE di numeri reali.

esempi: grafici di funzioni elementari.

FUNZIONI POLINOMIALI

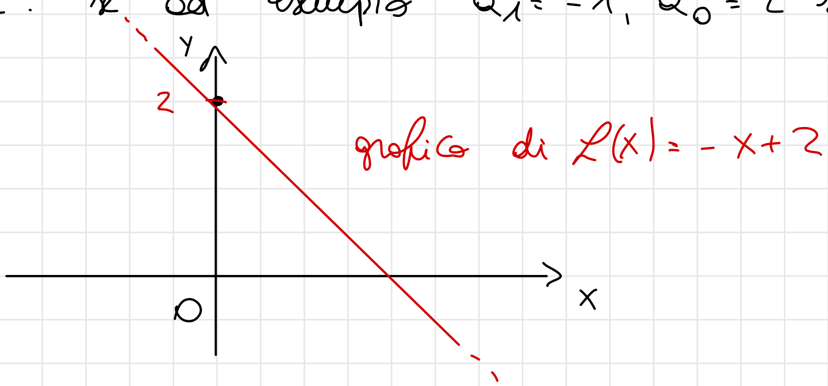
$n = 0 \Rightarrow \quad f(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$

Il grafico di $f(x) = c$ è

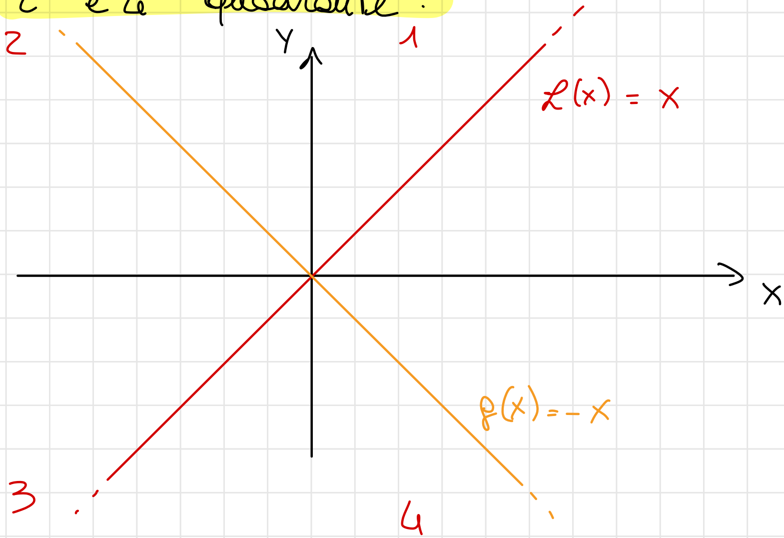


$n = 1 \Rightarrow \quad f(x) = a_1 x + a_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}$
$a_1 \neq 0.$

Il grafico di $f(x) = a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$, è una retta obliqua: x ad esempio $a_1 = -1$, $a_0 = 2$ si ha



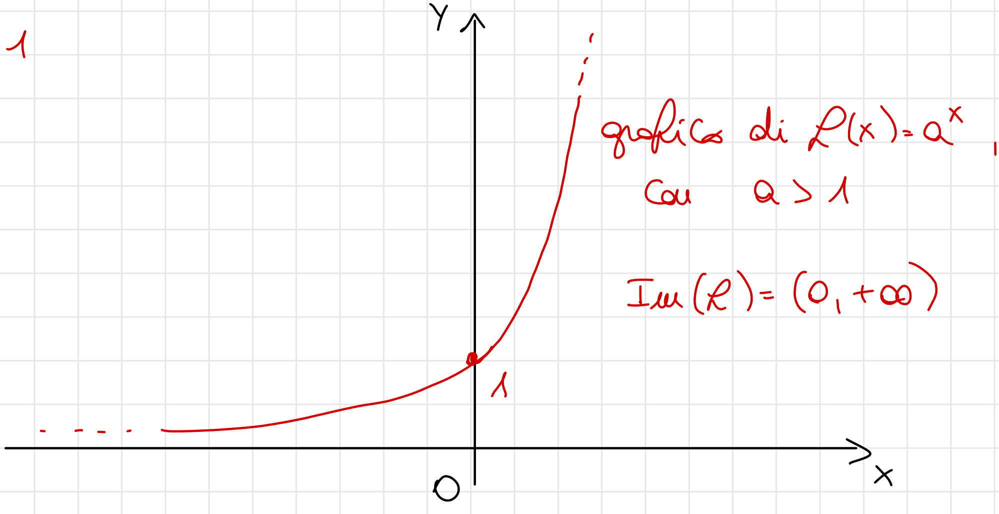
Tra tutte le rette, ce ne sono 2 più significative: sono le BISETTRICI di 1° e 3° quadrante e di 2° e 4° quadrante:



FUNZIONI ESPONENZIALI

Sia $f(x) = a^x$, con $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$a > 1$



$a \in (0,1)$ $(0 < a < 1)$

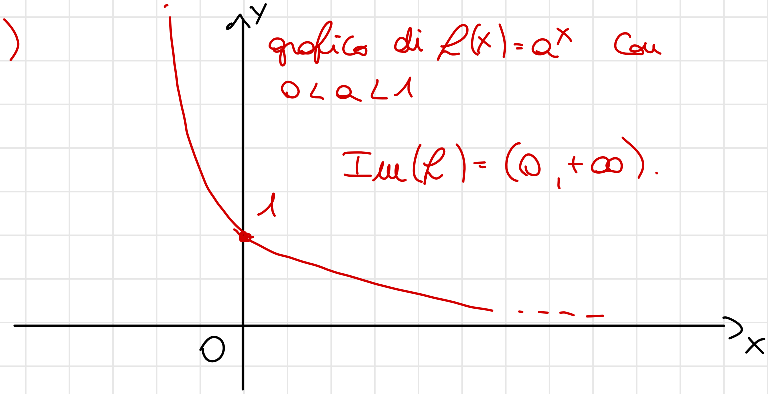


grafico di $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

$Im(f) = (0, +\infty)$.

FUNZIONI LOGARITMICHE

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a(x)$ $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

$a > 1$

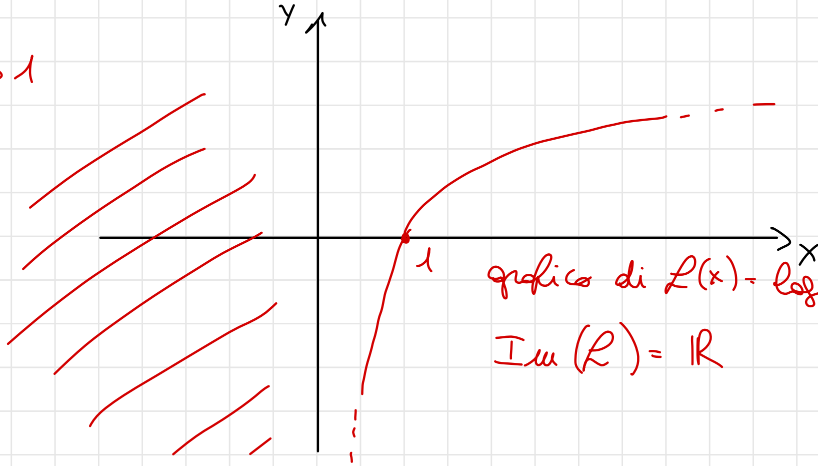


grafico di $f(x) = \log_a(x)$, $a > 1$

$Im(f) = \mathbb{R}$

$0 < a < 1$

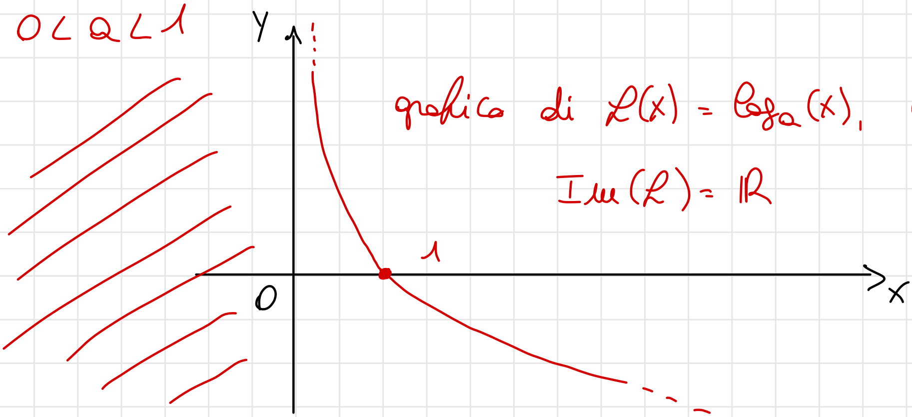
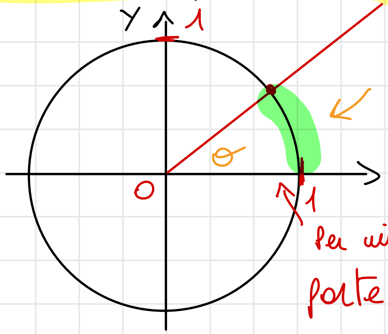


grafico di $f(x) = \log_a(x)$, $a \in (0,1)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



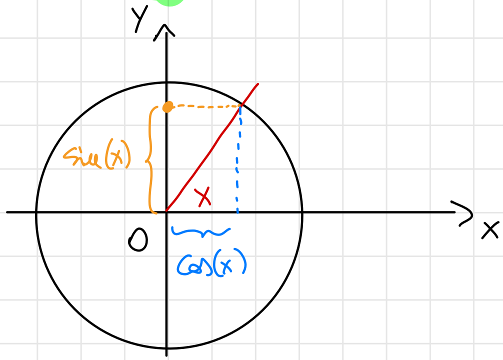
θ = lunghezza dell'arco.

Per misurare gli angoli in radianti si parte dalla semiretta positiva sulle ascisse e si gira in senso antiorario

Come si misura θ "in radianti", ovvero in numeri reali?

θ è la lunghezza dell'arco di circonferenza corrispondente all'angolo considerato.

La funzione $\sin(x)$, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è la proiezione sull'asse delle ordinate corrispondente all'angolo $x = \theta$.



La funzione $\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, è la proiezione del punto della circonferenza corrispondente all'angolo $\theta = x$ sull'asse delle ascisse.

OSS: i valori di $\theta > 2\pi$ si trovano effettuando "giri completi", i valori di $\theta < 0$ si trovano effettuando rotazioni in senso orario.

$\Rightarrow$ $x \in [0, 2\pi]$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

$\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall K \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + K2\pi) = \cos(x)$

$\sin(x + K2\pi) = \sin(x)$

$\Rightarrow$ sin e cos sono funzioni periodiche di periodo 2π

$\Rightarrow$ tutte le informazioni su sin e cos si hanno studiando tali funzioni su un qualsiasi intervallo del tipo $[a, a + 2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{Im}(\cos) = \mathrm{Im}(\sin) = [-1, 1]$.

Partendo da sin e cos definiamo la ft

$$f: A \to \mathbb{R}, \quad A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

$$= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z} \right\}$$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} =: tg(x) \quad (\text{tangente di } x)$$

La condizione su A è per avere il denominatore $\neq 0$, $Im(tg) = \mathbb{R}$ e la funzione tangente è una funzione periodica di periodo π.

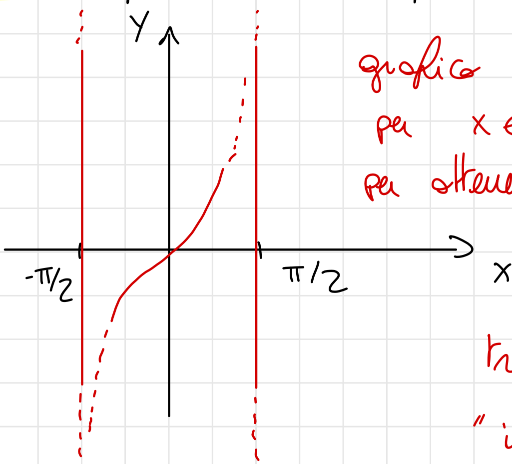
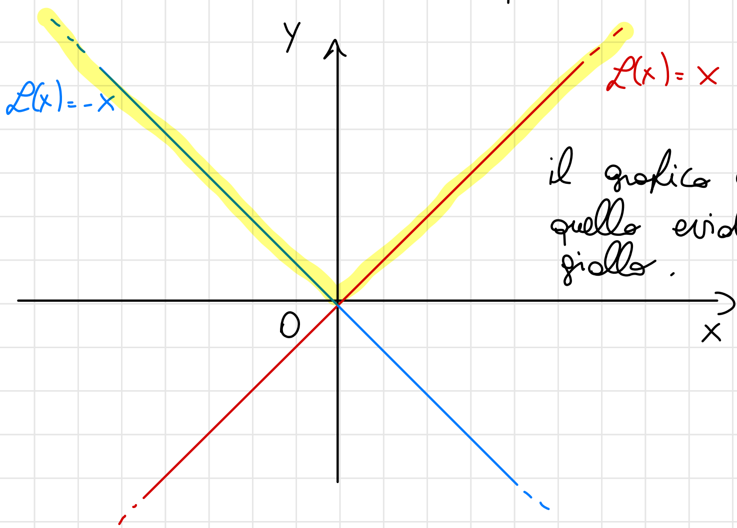


grafico di $f(x) = tg(x)$ per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, per ottenere il grafico di f su A basta "copiare" il grafico tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ e "incollarlo" in modo opportuno grafico della funzione modulo:

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

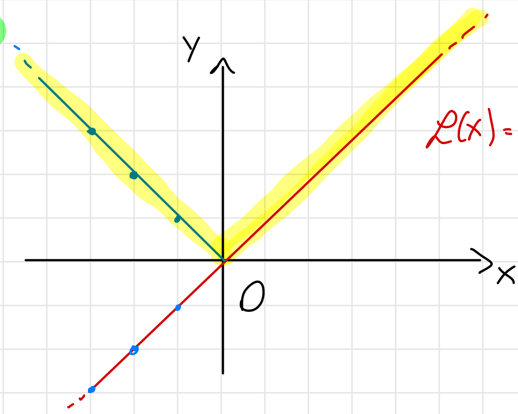


il grafico di $f(x) = |x|$ è quello evidenziato in giallo.

Un altro modo per disegnare il grafico di $|f(x)|$ è disegnare il grafico di $f(x)$, e "ribaltare" questo grafico rispetto all'asse x quando $f(x) < 0$.

L'insieme dei punti del piano con ordinata ≥ 0 è il grafico di $|f(x)|$.

Se $f(x) = x$, allora



PROPRIETÀ ASTRATTE DI FUNZIONI

Obiettivo: parlare di massimo, minimo, sup e inf di funzioni.

Noi sappiamo cosa sono max, min, inf e sup associati a degli insiemi, quindi l'idea è trovare un insieme "legato" alla funzione.

- $G(f)$ SICURAMENTE non va bene perché non è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$
- Rimangono dominio e immagine: se $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$, si ha $D(f) = D(g)$ anche se f e g sono molto diverse

$\Rightarrow$ per associare i concetti di max, min, inf e sup a una funzione bisogna considerare l'immagine di f.

DEF: Sia $f: A \to B$.

- Si definisce MASSIMO di f su A, se esiste, il valore $\max(f(A)) = \max(\mathrm{Im}(f))$
- Si definisce MINIMO di f su A, se esiste, il valore $\min(f(A)) = \min(\mathrm{Im}(f))$
- Si definisce ESTREMO SUPERIORE di f su A il valore $\sup(f(A)) = \sup(\mathrm{Im}(f))$ (può essere anche $+\infty$)
- Si definisce ESTREMO INFERIORE di f su A il valore $\inf(f(A)) = \inf(\mathrm{Im}(f))$ (può essere anche $-\infty$)

DEF: Sia $f: A \to B$.

- Si dice che f è LIMITATA INFERIORMENTE su A se $\inf(f(A)) > -\infty$.
- Si dice che f è LIMITATA SUPERIORMENTE su A se $\sup(f(A)) < +\infty$.
- f è LIMITATA su A se f è LIMITATA INF e SUP su A.

OSS:
- $\min(f(A)) = \min\{f(a) : a \in A\}$
- $\sup(f(A)) = \sup\{f(a) : a \in A\}$

esempio:
- $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ ha $\mathrm{Im}(f) = \{1\}$

$\Rightarrow \max(f(\mathbb{R})) = \min(f(\mathbb{R})) = 1$.

Poiché $\{1\}$ è LIMITATO, allora f è LIMITATA su $\mathbb{R}$.

- $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ ha $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.

$\Rightarrow \sup(f(\mathbb{R})) = \sup([0,+\infty)) = +\infty$ ILL SUP

$\inf(f(\mathbb{R})) = \inf([0,+\infty)) = 0$ $(= \min([0,+\infty)))$

LIM INF

- $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $x \in [-1,1]$.

In questo caso $A = [-1,1]$, e

$Im(f([-1,1])) = [0,1]$

$\Rightarrow \max(f([-1,1])) = 1$, $\min(f([-1,1])) = 0$

e quindi f è LIMITATA in $[-1,1]$.

- COME COSTRUIRE NUOVE FUNZIONI

Costruiremo le funzioni somma, prodotto, rapporto e la funzione composta.

Siano $f_1: A_1 \to B_1$, $f_2: A_2 \to B_2$.

DEF: la funzione $f_1 + f_2 : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}$, definita come $(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $\forall x \in A_1 \cap A_2$, si dice FUNZIONE SOMMA DI f_1 ed f_2.

esempio: $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sin(x)$, allora

$$(f_1 + f_2)(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{f_1(x)} + \underbrace{\sin(x)}_{f_2(x)} \qquad \forall x \ \underbrace{\overset{A_1}{[0,+\infty)} \cap \overset{A_2}{\mathbb{R}}}_{= [0,+\infty)}$$

DEF: la funzione $(f_1 \cdot f_2): A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}$ definita come $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, $\forall x \in A_1 \cap A_2$, si dice FUNZIONE PRODOTTO di f_1 per f_2.