31/05/2022

LEZIONE 35

Riepilogo: def di fz int secondo Riemann e integrale definito, esempi di fz int e non integrabili, caratterizzazione di integrabilità, teorema di int di fz monotone e fz continue.

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Se f è continua in $[a,b]$ allora $\exists\, c \in [a,b]$ tale per cui

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

dim

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

WEIERSTRASS

$\Rightarrow$ f ammette max e min su $[a,b]$, cioè

$$\min f([a,b]) \leq f(x) \leq \max f([a,b])$$

$\forall x \in [a,b]$.

$\Rightarrow$ applicando il teorema del confronto segue

$$\int_a^b \min f([a,b])\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \max f([a,b])\,dx \quad :(b-a)$$

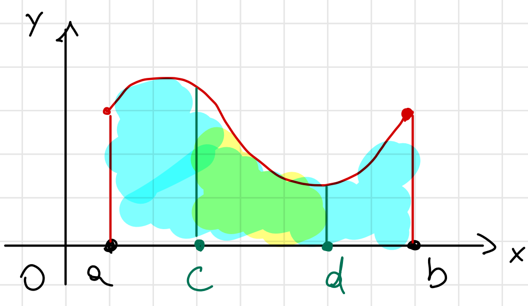
$$\underbrace{\int_a^b \min f([a,b])\,dx}_{=\ \min f([a,b])\,(b-a)} \qquad \underbrace{\int_a^b \max f([a,b])\,dx}_{=\ \max f([a,b])\,(b-a)}$$

$$\min f([a,b]) \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{questo valore è compreso tra } \min f([a,b]) \text{ e } \max f([a,b])} \le \max f([a,b])$$

TEO DEI VALORI INTERMEDI: dato $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\forall\, y \in [\min f([a,b]), \max f([a,b])]$ $\exists\, c \in [a,b] : f(c) = y$.

Prendendo $y = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ABBIAMO LA TESI $\blacksquare$

OSS: Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, cosa possiamo dire su f se la prendiamo su $[c,d]$, con $[c,d] \subseteq [a,b]$?



La funzione f è integrabile su $[c,d]$, qualunque $[c,d] \subseteq [a,b]$.

Se fisso $c \in [a,b]$, che relazione c'è tra $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$?

TEOREMA DI SPEZZAMENTO

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, e sia $c \in [a,b]$.

Allora
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

OSS: prendendo $c = a$ si ha

$$\int_a^b \cancel{f(x)}dx = \int_a^a f(x)dx + \int_a^b \cancel{f}(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0.$$

DOMANDA: dati $a < b$, possiamo definire $\int_b^a f(x)dx$?

RICHIESTA: vogliamo che funzioni il teorema di spezzamento anche per questi integrali, cioè

$a \quad c \quad b$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Si ha

$$\int_a^c \cancel{f(x)dx} = \int_a^c \cancel{f(x)dx} + \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

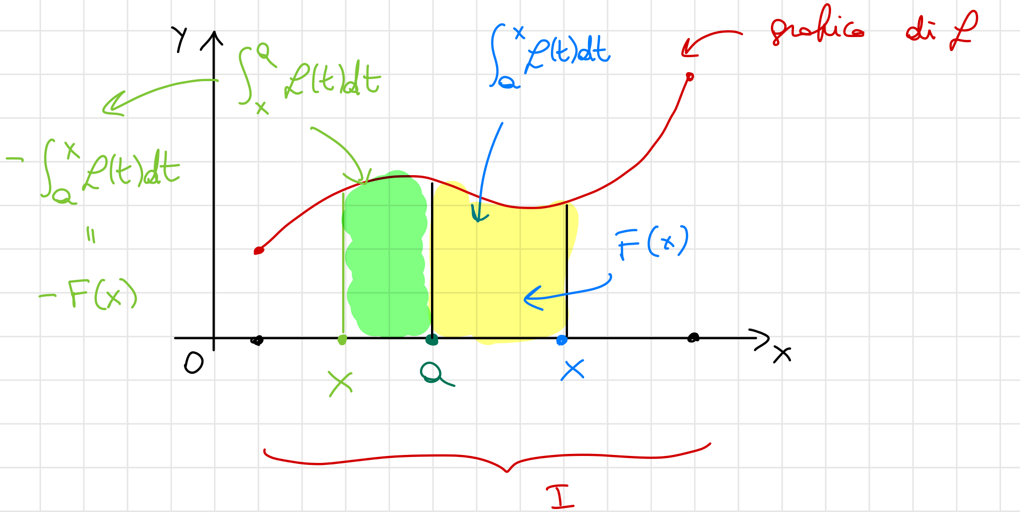
$$\Longrightarrow \quad \int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

DEF: Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, e sia f integrabile in I. Fissiamo $a \in I$, allora possiamo definire una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ come

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in I.$$

F prende il nome di FUNZIONE INTEGRALE.

Ad esempio, se



TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo. Allora, fissato $a \in I$, la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I,$$

è UNA PRIMITIVA di f su I, cioè

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Inoltre, se G è una qualunque primitiva di f in I, allora per ogni $b, c \in I$, $b < c$, si ha

$$\int_b^c f(t)\,dt = G(c) - G(b).$$

OSS: questo teorema lega int definiti e int definiti di funzioni.

dim

1) Vogliamo dim che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in I$, è una primitiva di f, cioè F è derivabile in I e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Fissiamo $x_0 \in I$, il rapp inc di F in x_0 è

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right)$$

$x > x_0$

$$= \frac{1}{x-x_0}\Big(\underbrace{\int_a^x f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)dt}_{=\int_{x_0}^x f(t)dt}\Big)$$

TEO SPEZZAMENTO.

$$= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt$$

Applicando il teo della media integrale con $a = x_0$ e $b = x$ (in $[x_0, x]$) segue che

$\exists\, c_x \in [x_0, x]$ tale per cui

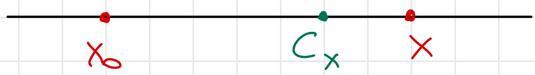
$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt = f(c_x)$$

$\forall x > x_0 \quad \exists\, c_x \in [x_0, x]$ tale per cui

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(c_x)$$

Cosa succede a c_x quando $x \to x_0^+$?

$c_x \in [x_0, x]$



Poiché f è continua, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$c_x - x_0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(c_x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Mettendo insieme, segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(c_x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(c_x) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(c_x) = f(x_0).$$

Questo ragionamento, ripetuto per $x < x_0$, porta

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$ cioè F è derivabile

in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

2) Ricordiamo che:

- $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f in I

- se G è una primitiva di f, allora esiste $d \in \mathbb{R}$ tale per cui $G = F + d$ su I.

Fissiamo $b, c \in I$, $b < c$, allora

$$\int_b^c f(t)\,dt = \int_b^a f(t)\,dt + \int_a^c f(t)\,dt$$

$$= -F(b) + F(c) \quad + d - d$$

$$= (F(c) + d) - (F(b) + d)$$

$$= G(c) - G(b)$$

$\blacksquare$

esempi: Calcolare $\int_1^4 \ln(x)\,dx$

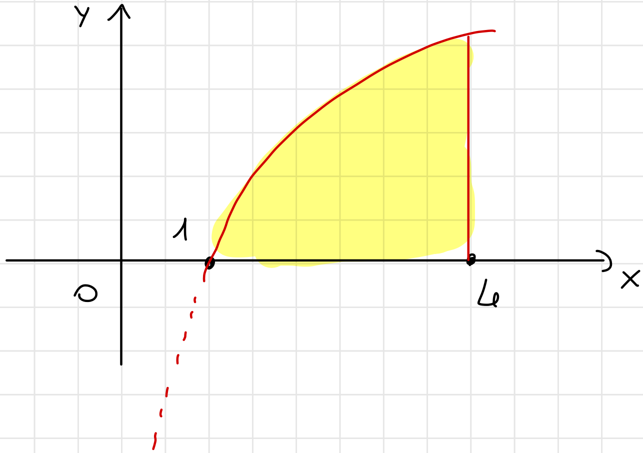
$G(x) = x\ln(x) - x$ è una primitiva di $f(x) = \ln(x)$,

quindi

$$\int_1^4 \ln(x)\,dx = G(4) - G(1)$$

$$= (4 \cdot \ln(4) - 4) - (1 \cdot \cancel{\ln(1)} - 1)$$

$$= 4 \cdot \ln(4) - 3$$



calcolare $\int_0^{\pi} (\sin(x))^3\,dx$

$$\int (\sin(x))^3\,dx = \int \sin(x)\cdot(\sin(x))^2\,dx$$

$$= \int \sin(x)\left(1-(\cos(x))^2\right)dx$$

$$= -\underbrace{\int -\sin(x)\,dx}_{\cos(x)+C} - \int (\cos(x))^2\sin(x)\,dx$$

$$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,dx = G(f(x))+C,$$ dove G è una primitiva di g

$g(x)=x^2$, $f(x)=\cos(x)$

$$\Rightarrow (\cos(x))^2\cdot\sin(x) = g(f(x))\,(-f'(x)),$$

quindi $\int(\cos(x))^2\sin(x)\,dx = -\int(\cos(x))^2(-\sin(x))\,dx$

$$= -\int g(f(x))\cdot f'(x)\,dx$$

In questo caso $G(x) = \frac{1}{3}x^3$, quindi

$$\int (\cos(x))^2 \sin(x)\,dx = -\frac{(\cos(x))^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

se deriviamo $F(x) = -\frac{(\cos(x))^3}{3}$ otteniamo

$$F'(x) = -\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}(\cos(x))^2 \cdot (\cancel{-}\sin(x)) = (\cos(x))^2 \sin(x)\,dx$$

Risolviamo per sostituzione: $\cos(x) = t$

$x = \arccos(t) = \ell(t) \rightsquigarrow \ell'(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$t = \cos(x) = g(x)$ $\rightsquigarrow$ $dx = \ell'(t)\,dt$

$\Downarrow$

$$dt = g'(x)\,dx$$
$$= -\sin(x)\,dx$$

$$-\int \underbrace{(\cos(x))^2}_{t^2}\underbrace{(-\sin(x))dx}_{dt} = -\int t^2\,dt = -\frac{t^3}{3} + c$$

$$= -\frac{(\cos(x))^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

OSS: Con fz trigonometriche si può usare la sostituzione $t = \tg\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in (-\pi, \pi)$.

$\rightsquigarrow \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

Inoltre

$$x = 2\arctan(t) = \varphi(t)$$

$$\Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Quindi

$$\int (\sin(x))^3\,dx = \int \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3 \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{16t^3}{(1+t^2)^4}\,dt$$

$$\frac{16t^3}{(1+t^2)^4} = \frac{Ax+B}{1+t^2} + \frac{Cx+D}{(1+t^2)^2} + \frac{Ex+F}{(1+t^2)^3} + \frac{Gx+H}{(1+t^2)^4}$$

Vogliamo calcolare $\int \frac{1}{ax^2+b}\,dx$, $a,b>0$.

$a=1, b=1 \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{ax^2+b} = \frac{1}{b\left(\frac{a}{b}x^2+1\right)} = \frac{1}{b}\,\frac{1}{\frac{a}{b}x^2+1}$$

$$\frac{1}{\frac{a}{b}x^2+1} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x\right)^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{ax^2+b}\,dx = \frac{1}{b}\int \frac{1}{\Big(\underbrace{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x}_{=t}\Big)^2+1}\,dx$$

$t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x$

$x = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}t = f(t)$

$dx = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\,dt$

$$= \frac{1}{b}\int \frac{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}\cdot \arctan(t) + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x\right) + C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

esempi: Sia $F(x) = \int_0^x \underbrace{e^{t^2}}_{f(t)}\,dt$

$G(x) = \int_0^x \underbrace{e^t}_{=f(t)}\,dt = e^x - 1$

$\Rightarrow$ F è derivabile in $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x) = e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

$G'(x) = e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

NO!!!

$$H(x) = \int_0^{3x} e^{t^2}\,dt \not\Rightarrow H'(x) = e^{x^2}$$

H è una funzione composta: $g(x) = 3x$, allora

$$H(x) = F(g(x)) = (F \circ g)(x)$$

$$\int_0^{g(x)} e^{t^2} dt = \int_0^{3x} e^{t^2} dt$$

$$\Rightarrow H'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{(g(x))^2} \cdot 3$$

$$= 3 \cdot e^{(3x)^2} = 3e^{9x^2}$$

PRATICAMENTE:

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt \Rightarrow H'(x) = g'(x) \cdot f(g(x))$$

Se anche l'estremo in basso dell'integrale dipende da x, allora si ha la seguente formula:

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

$$\Rightarrow K'(x) = g'(x) \cdot f(g(x)) - h'(x) \cdot f(h(x))$$

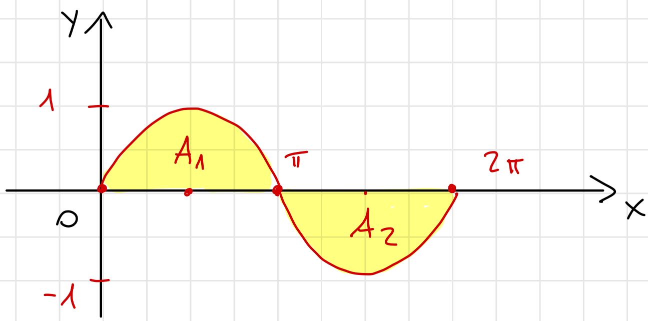
esempio: $$F(x) = \int_{2x}^{x^2} e^{-t^2} dt$$

$$F'(x) = 2x \cdot e^{-(x^2)^2} - 2e^{-(2x)^2}$$

OSS: non bisogna derivare f, cioè non bisogna scrivere $F'(x) = f'(x)$!!!

CALCOLO AREE

Data $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, 2\pi]$, calcolare l'area compresa tra il grafico di f e l'asse x



Se diciamo che $A_1 + A_2 = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx$, otteniamo che

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = \underbrace{(-\cos(2\pi))}_{-1} - \underbrace{(-\cos(0))}_{-1} = 0.$$

2 MODI : o si studia $\sin(x) \geq 0$, e si impone

$$A = \int_{\{\sin(x) \geq 0\}} \sin(x)dx + \int_{\{\sin(x) \leq 0\}} -\sin(x)dx$$

$$= \int_0^{2\pi} |\sin(x)|dx$$

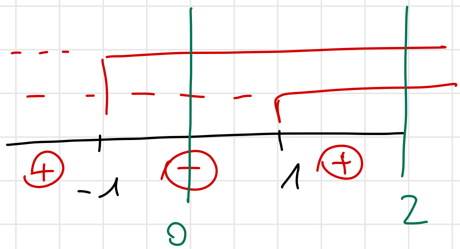
$$= \int_0^{\pi} \sin(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)dx = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) + \cos(2\pi) - \cos(\pi)$$

esercizio:

$$\int_0^2 |x^2-1|\,dx$$

studiamo il segno di x^2-1 in $[0,2]$

$x^2-1 \geq 0 \qquad (x-1)(x+1) \geq 0$



$x^2-1 \geq 0$ in $[1,2]$ e $x^2-1 \leq 0$ in $[0,1]$.

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & x^2-1 \geq 0, \\ -(x^2-1), & x^2-1 \leq 0, \end{cases}$$

allora

$$\int_0^2 |x^2-1|\,dx = \int_0^1 -(x^2-1)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx$$

esempio: Calcolare $\int_0^{\pi} x^2 \cos(x)\,dx$

$$\int x^2 \cos(x)\,dx = \sin(x)\cdot x^2 - \int 2x \sin(x)\,dx$$

$f'(x) = \cos(x) \rightsquigarrow f(x) = \sin(x)$

$g(x) = x^2 \rightsquigarrow g'(x) = 2x$

$$= x^2 \sin(x) - 2\int x \sin(x)\,dx$$

$$f'(x) = \sin(x) \rightsquigarrow f(x) = -\cos(x)$$

$$g(x) = x \rightsquigarrow g'(x) = 1$$

$$= x^2 \sin(x) - 2\left(-x\cos(x) - \int -\cos(x)\,dx\right)$$

$$= x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\int \cos(x)\,dx$$

$$= \underbrace{x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - \sin(x)}_{F(x)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} x^2 \cos(x)\,dx = F(\pi) - F(0)$$

$$= 2\pi\cos(\pi) - 2\cdot 0\cos(0)$$

$$= -2\pi$$

esempio: calcolare $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln(x))^2+1}{x(\ln(x)+2)}\,dx$

$$t = \ln(x) \qquad x = e^t = f(t) \Rightarrow dx = e^t\,dt$$

$$\int \frac{(\ln(x))^2+1}{x(\ln(x)+2)}\,dx = \int \frac{t^2+1}{\cancel{e^t}(t+2)} \cdot \cancel{e^t}\,dt$$

Questo integrale si può risolvere anche nel seguente modo:

$$\int_1^2 \frac{(\ln(x))^2+1}{x\,(\ln(x)+2)}\,dx = \int_0^{\ln(2)} \frac{t^2+1}{e^t(t+2)}\,e^t\,dt$$

$t = \ln(x)$

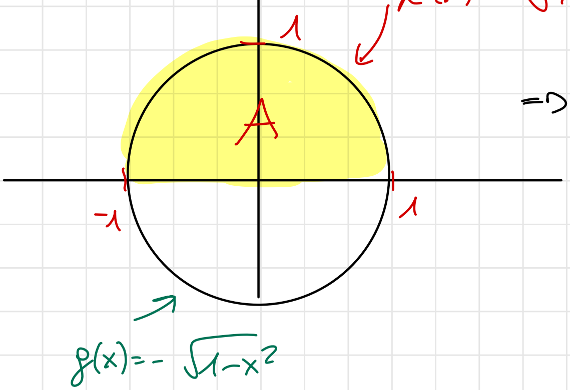
SOSTITUZIONE NEGLI ESTREMI: $x=1 \rightsquigarrow t = \ln(1) = 0$

$x=2 \rightsquigarrow t = \ln(2)$

DOPO NON SERVE TORNARE INDIETRO.

esercizio: Calcolare l'area del semicerchio di raggio 1:

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$



$g(x) = -\sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

CON LA SOSTITUZIONE

$x = \cos(t)$

o

$x = \sin(t)$