13/05/2022

LEZIONE 28

Riepilogo: esempi di derivate, derivata della funzione composta e inversa, derivata destra e sinistra, derivate successive.

Se ripetiamo il discorso fatto per f ed f' per f'', introduciamo

$$D(f''') := \left\{ x \in D(f'') : \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f''' : D(f''') \to \mathbb{R}, \quad f'''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h},$$

$$x \in D(f''')$$

f''' è la DERIVATA PRIMA di f'', è la DERIVATA SECONDA di f' e viene detta DERIVATA TERZA di f.

Per induzione, possiamo definire la derivata n-esima di f per ogni $n \in \mathbb{N}_0$:

Supponiamo di aver definito $f^{(n)} : D(f^{(n)}) \to \mathbb{R}$,
definiamo

$$D(f^{(n+1)}) = \left\{ x \in D(f^{(n)}) : \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f^{(n+1)} : D(f^{(n+1)}) \to \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h},$$
$$x \in D(f^{(n+1)}).$$

OSS: $D(f^{(n+1)}) \subseteq D(f^{(n)}) \subseteq D(f^{(n-1)}) \subseteq \dots$
$\subseteq D(f') \subseteq D(f)$.

$f^{(n+1)}$ viene detta DERIVATA $(n+1)$-esima di f, o DERIVATA DI ORDINE $n+1$ DI f.

esempio: Calcolare la derivata quarta di

$f(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$. $\leftarrow D(f)$

$f'(x) = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$. $\leftarrow D(f')$

$f''(x) = -\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$. $\leftarrow D(f'')$ $\quad -\sin(x) = (-1) \cdot \sin(x)$

$f'''(x) = 0 + (-\cos(x)) = -\cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$.

$f^{IV}(x) = f^{(4)}(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$.

Calcolare la derivata terza di $f(x) = \log_a(x)$, $x > 0$.
$a > 0 \wedge a \neq 1$.

$$f'(x) = \frac{\log_a(e)}{x}, \quad x > 0. \quad (= (0, +\infty)).$$

$$f''(x) = \log_a(e) \cdot \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{\log_a(e)}{x^2}, \quad x > 0.$$

la derivata di $\frac{1}{x}$ è $-\frac{1}{x^2}$

$$f'''(x) = -\log_a(e)\,(-2x^3) = \frac{2\log_a(e)}{x^3}, \quad x > 0.$$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ la cui derivata è $-2x^{-2-1} = -2x^{-3}$

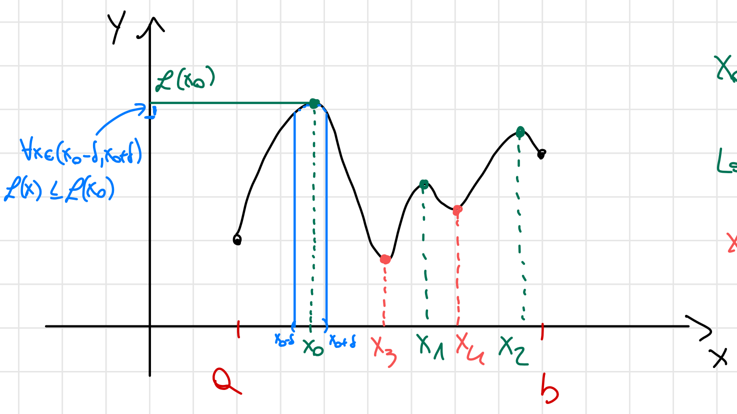
OSS: se $g(x) = K \cdot f(x)$, $K \in \mathbb{R}$, allora se f è derivabile in x_0 anche g è derivabile in x_0 e $g'(x_0) = K \cdot f'(x_0)$.

RELAZIONE TRA DERIVATA (PRIMA e SECONDA) E GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Introduciamo i concetti di massimo e minimo locali o relativi.

DEF: $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto interno di A.

- diciamo che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO LOCALE INTERNO se $\exists\, \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
- diciamo che x_0 è un PUNTO DI MINIMO LOCALE INTERNO se $\exists\, \delta > 0 : f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.



x_0 è un PUNTO DI MASS LOC INT. Lo sono anche x_1 e x_2.

x_3 e x_4 sono PUNTI DI MINIMO LOC INT.

OSS: Se x_0 è punto di MAX LOC INT per $f: A \to \mathbb{R}$ non è detto che sia anche PUNTO DI MASSIMO.

Vale il viceversa: se x_0 è un punto interno per A

e x_0 è un punto di massimo per $f: A \to \mathbb{R}$

(cioè $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in A$), allora x_0 è un punto di MASSIMO LOCALE INTERNO.

Stessa cosa vale se al posto di MASSIMO scrivete MINIMO.

Che relazione c'è tra punti di MAX / MIN LOCALI INTERNI e DERIVATA PRIMA?

LEMMA DI FERMAT

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, e sia x_0 punto interno per A. Se x_0 è un punto di MIN (o MAX) LOCALE INTERNO per f ed f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

OSS: • Posso avere punti di max / min locali interni anche dove f non è derivabile: $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, allora $x_0 = 0$ è un PUNTO DI MIN LOC INT ma $f'(0)$ non esiste.

• Non è detto che se $f'(x_0) = 0$ allora f ha MAX o MIN LOCALE INT in x_0: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$,

$f'(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$, e quindi $f'(x_0) = 0$ ma

0 non è né di MAX né di MIN LOCALE INTERNO.

dim

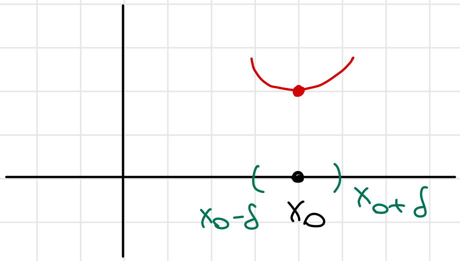
Supp che x_0 sia un punto di min loc int per f e che esista $f'(x_0)$. Vogliamo dim che $f'(x_0) = 0$.

Se dim che $(f')^-(x_0) \leq 0$, $(f')^+(x_0) \geq 0$, otteniamo

$$f'(x_0) = \begin{cases} (f')^+(x_0) \geq 0 \\ (f')^-(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

- $\exists\, \delta > 0 : \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \geq f(x_0)$.

Graficamente:



Studiamo il segno del rapp inc di f in x_0 quando $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e quando $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

$x \in (x_0-\delta, x_0)$: $\quad \overbrace{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{x<x_0 \Rightarrow x-x_0<0}}}^{f(x)\geq f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0)\geq 0} \rightsquigarrow \leq 0$ perché ha numeratore ≥ 0, denominatore <0

Quindi

$$(f')^-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0.$$

$\uparrow$ TEO CONFRONTO I

$x \in (x_0, x_0+\delta)$: $\quad \overbrace{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{x>x_0 \Rightarrow x-x_0>0}}}^{f(x)\geq f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0)\geq 0} \rightsquigarrow \geq 0$ perché ha numeratore ≥ 0, denominatore >0

Dunque

$$(f')^+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$$

Il caso x_0 punto di MAX LOC INT si dimostra allo stesso modo (PER CASA)

$\blacksquare$

Conseguenze del Lemma di Fermat: Teorema di Rolle, Teorema di Lagrange, Teorema di Cauchy.

TEOREMA DI ROLLE

Sia $f: [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui:

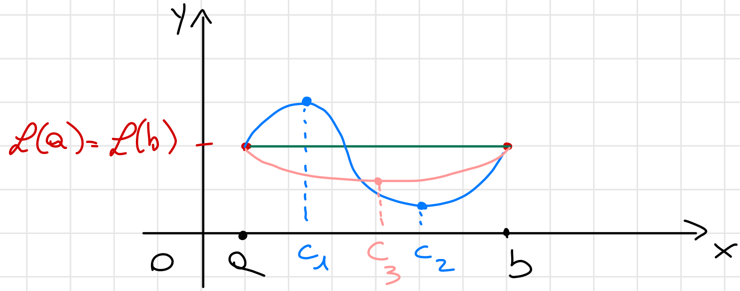
(i) f è continua in $[a,b]$;

(ii) f è derivabile in (a,b);

(iii) $f(a) = f(b)$.

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale per cui $f'(c) = 0$.

OSS: Graficamente



OSS: Il teorema non mi dice quanti sono i punti in cui f' si annulla né come trovarli.

dim

Dividiamolo in due casi: nel primo avremo f costante mentre nel secondo no.

Da (i) possiamo applicare Weierstrass, e dunque

$\exists\, x_m, x_M \in [a,b] : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

$\forall x \in [a,b]$.

CASO 1: $x_m, x_M \in \{a,b\}$, cioè $x_m = a$ e $x_M = b$

oppure $x_m = b$ e $x_M = a$.

Da (iii) sappiamo che

$$f(x_m) = f(a) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(b) = f(a)$$

$\forall x \in [a,b]$.

$\Rightarrow f(x) = k \quad \forall x \in [a,b]$, cioè f è costante su

$[a,b] \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$, e dunque

possiamo scegliere un qualunque $c \in (a,b)$.

CASO 2: o x_m non è né a né b, o x_M non

è né a né b.

Supponiamo che $x_m \in (a,b)$, dall'oss precedente

segue che x_m è un punto di min loc int

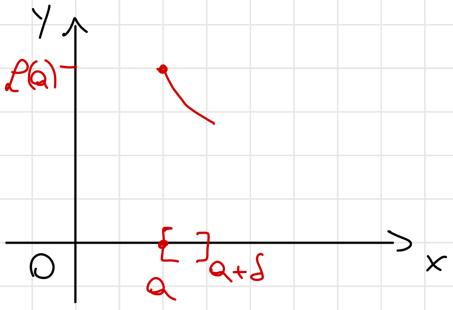
$\Rightarrow f'(x_m) = 0$, e prendiamo $c = x_m$.

LEMMA DI FERMAT

Se $x_M \in (a,b)$, allora x_M è punto di max loc int

$\Rightarrow f'(x_M) = 0$ e $c = x_M$.

DOMANDA: Cosa succede se abbiamo un pto di max non interno? Supponiamo che $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ed esiste un intorno destro di a tale per cui $f(x)\le f(a)$ $\forall x$ in questo intorno ($\exists\,\delta>0$: $f(x)\le f(a)$ $\forall x\in[a,a+\delta]$).



Supponiamo che $\exists\,(f')^+(a)$, allora $(f')^+(a)\le 0$, infatti:

$$(f')^+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\le 0}}{\underbrace{x-a}_{>0}}\quad\Big\}\ (f')^+(a)\le 0.$$

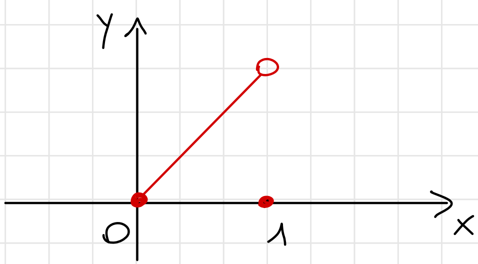
Non posso concludere che $(f')^+(a)=0$, ma solo che $(f')^+(a)\le 0$.

Controesempi:

- eliminiamo (i), cioè $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile in (a,b) e $f(a)=f(b)$.

  Costruiamo una funzione che non ha $c\in(a,b)$ tali per cui $f'(c)=0$.

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1), \\ 0, & x=1. \end{cases}$$



$f'(x)=1 \quad \forall x\,(0,1)$

$f(0)=0=f(1)$

- eliminiamo (ii): $f(x)=|x|$, $x\in[-1,1]$, si ha:

  f continua in $[-1,1]$, $f(-1)=1=f(1)$ ma $\nexists\, c\in(-1,1)$ con $f'(c)=0$, poiché

$$f'(x)=\begin{cases} -1, & x\in(-1,0) \\ 1, & x\in(0,1) \end{cases}$$

- eliminiamo (iii): $f(x)=x$, $x\in[0,1]$, è continua in $[0,1]$, è derivabile in $(0,1)$ e $f'(x)=1\ \forall x$