LEZIONE 15

Riepilogo teorema del confronto $I \subseteq \mathbb{R}$, successi dei successi

TEOREMA (DI I CARABINIERI)

- $a_n \le b_n \le c_n$ DEFINITIVAMENTE
- $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\exists \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Allora $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$

DIM: è riformulare che utilizzare delle due con ε: δ_1 quando finito e quale finito δ_2 finito

COROLLARIO quando finito non è non conosciamo del teorema (quando I?)

Nel caso che

$a_n \le b_n$ DEF. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 : \forall n > \delta_1$ $b_n > \ell - \varepsilon$

$b_n \le c_n$ DEF. $\lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 : \forall n > \delta_2$ $b_n < \ell + \varepsilon$ $\Rightarrow \ell \le \lim_{n\to+\infty} b_n$

IL CALCOLARLO non è di BOND, diamo che $\lim$

- $\ell = +\infty$, il quale con a che ℓ finito (ℓ) del b con I
- $\ell = -\infty$, c ℓ ℓ finito (ℓ) $\ldots$

dim

Tutto dunque il caso $\ell \in \mathbb{R}$

Sia $\ell \in \mathbb{R}$, proviamo che

- $\exists a_n(\ell)$ tale che $a_n \le b_n \le c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

$\Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|c_n - \ell| < \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

$\Rightarrow \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$

Vogliamo sia che $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$, cioè

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|b_n - \ell| < \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

Prendiamo $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \delta_\varepsilon\} \in \mathbb{N}$

Quindi, $\forall n > \delta$, si ha

$\ell - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < \ell + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$

OSS questo teorema non si può usare se a_n e c_n tendono a limiti finiti dunque ad esempio se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si $b_n \le c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora

$\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, cioè $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ DEF. $\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$ $\Rightarrow$ $\forall M > 0$ $\exists \delta_1 : \forall n > \delta_1$ $a_n > M$

$\exists \lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$ DEF. $\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$ $\Rightarrow$ $\forall M > 0$ $\exists \delta_2 : \forall n > \delta_2$ $c_n > M$

$\Rightarrow \ell \ge \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

COROLLARIO (DEL DEF X)

- Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non necessarie con $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ allora $b_n \to +\infty$ DEF.
- Se $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non necessarie con $\lim_{n\to+\infty} c_n = -\infty$ allora $b_n \to -\infty$ DEF.

dim

Si prova quale è dimostrato con il Nr DEF X, prendendo $M = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

OSS quale condizione quindi di sopra che **MEDIANTE IL PARAMETRO DEL SEGNO**

DEF Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non necessarie $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **INFINITESIMA** se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

DEF Una $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non necessarie $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **LIMITATA** se è limitata nel sistema di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$, cioè

- $\exists M, N \in \mathbb{R}$ $m \le a_n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Altrimenti

- $\forall M > 0$ $|a_n| > M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

PROPOSIZIONE

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni. Se

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è LIMITATA,
- $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è INFINITESIMA

allora la successione $\{a_n \cdot b_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ è INFINITESIMA, cioè

$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

DIMOSTRAZIONE

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni. Se

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è LIMITATA,
- $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è INFINITESIMA

allora la successione $\{a_n \cdot b_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ è INFINITESIMA, cioè

$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

DIM

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata $\Rightarrow$ $\exists M > 0$ $|a_n| \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sia $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|b_n| < \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

Quindi $|a_n \cdot b_n| < M\varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

COROLLARIO (DEL DEF X)

- Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non necessarie con $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ allora $b_n \to 0$ DEF.
- Se $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non necessarie con $\lim_{n\to+\infty} c_n = -\infty$ allora $b_n \to 0$ DEF.

dim

Si prova quale è dimostrato con il Nr DEF X, prendendo $M = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

OSS quale condizione quindi di sopra che **MEDIANTE IL PARAMETRO DEL SEGNO**

DEF Una $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non necessarie $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **INFINITESIMA** se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

DEF Una $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non necessarie $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **LIMITATA** se è limitata nel sistema di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$, cioè

- $\exists M, N \in \mathbb{R}$ $m \le a_n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Altrimenti

- $\forall M > 0$ $|a_n| > M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

PROPOSIZIONE

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni. Se

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è LIMITATA,
- $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è INFINITESIMA

allora la successione $\{a_n \cdot b_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ è INFINITESIMA, cioè

$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

DIM

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata $\Rightarrow$ $\exists M > 0$ $|a_n| \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sia $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|b_n| < \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

Quindi $|a_n \cdot b_n| < M\varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|b_n| < \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

$\Downarrow$

Per $n > \delta_\varepsilon$ **si ha**

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|b_n| < \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

$\Downarrow$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ $\exists \delta_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$

$|a_n b_n| \le M|b_n| < M\varepsilon' = \varepsilon$ $\forall n > \delta_{\varepsilon'}$

Q $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

$\frac{n+1}{n} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + 0 = 1$

D $\{a_n\}$ è limitata, cioè $\exists M > 0$ $|a_n| \le M$

$\{b_n\}$ è infinitesima, cioè $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

Dim che $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|a_n b_n| \le \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|b_n| \le \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

$\Downarrow$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|a_n| \le M$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

$\Downarrow$

Per $n > \delta_\varepsilon$ **si ha**

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|a_n b_n| \le M|b_n| \le M\varepsilon = \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ $\exists \delta_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$

Q $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0$

$\frac{n+1}{n^2} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + 0 = 0$

D $\{a_n\}$ è limitata, cioè $\exists M > 0$ $|a_n| \le M$

$\{b_n\}$ è infinitesima, cioè $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

Dim che $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|a_n b_n| \le \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|b_n| \le \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

$\Downarrow$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|a_n| \le M$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

$\Downarrow$

Per $n > \delta_\varepsilon$ **si ha**

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $|a_n b_n| \le M|b_n| \le M\varepsilon = \varepsilon$ $\forall n > \delta_\varepsilon$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ $\exists \delta_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$

Q $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0$

$\frac{n+1}{n^2} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + 0 = 0$

OSS una successione limitata non sono finite cioè non è detto che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$

ESEMPIO $a_n = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora $|a_n| \le 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Quindi limitata per $\lim_{n\to+\infty} a_n$ $\nexists$ $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Se $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, e quindi

$\lim_{n\to+\infty} |a_n - 0| = 0$

$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \frac{1}{n} = 0$

ESEMPIO Sia $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora intanto che

$|a_n| = \frac{|\sin(n)|}{n} \le \frac{1}{n}$

Quindi intanto che

$-1 \le |\sin(n)| \le 1$

$\Downarrow$

$\frac{-1}{n} \le a_n \le \frac{1}{n}$

$\Downarrow$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

OSS non vale che **NON COMPARARE** $\lim_{n\to+\infty} \sin(n)$ $\lim_{n\to+\infty} |a_n| > 0$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (**AD LIMITE PRECEDENTE**), cioè $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

OPERAZIONI (X) $\overline{\mathbb{R}}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ cioè $\overline{\mathbb{R}}$ (**AKA** $\mathbb{R}$ **ESTESO**) è l'insieme dei numeri reali a cui aggiungiamo $\{\text{limiti} \to +\infty, -\infty\}$

In realtà i limiti intermedi è usuale "sistema" il dato a cui tende $\{+\infty, -\infty\}$ quando proviamo a discutere il dato delle del limite successione.

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{n}$ non è dato dal quadrato.

Proviamo dunque una equazione in cui tende al $\frac{1}{n}$ che non cambia con quale cosa diventa.

Ma supponiamo che

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{0} = +\infty$

$\frac{1}{+\infty}$ è il risultato di un operazione $\overline{\mathbb{R}}$.

SOMMA Sia $a \in \mathbb{R}$, allora

$a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty$

$a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$

$+\infty + (+\infty) = +\infty$

$+\infty + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = +\infty$ NON SONO DEFINITI

MOLTIPLICAZIONE Sia $a \in \mathbb{R}$, allora

$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases}$

$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases}$

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$ NON SONO DEFINITI

RAPORTO Sia $a \in \mathbb{R}$, allora

$\frac{a}{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases}$

$\frac{a}{-\infty} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases}$

$\frac{+\infty}{a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$ NON SONO DEFINITI

$\frac{-\infty}{a} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

$\frac{+\infty}{+\infty} = \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{+\infty}{-\infty} = \frac{-\infty}{+\infty} = 0$

Con multiplo a considerare $\frac{a \to 0}{0 \to 0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$? $\Rightarrow$ "INDETERMINATE" diverse cose in codice implicito, una non ce dia segno intuitivo. Quindi

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{\infty}$ $\frac{\infty}{0}$ non è DEF. su $\overline{\mathbb{R}}$, cioè $\notin \overline{\mathbb{R}}$.

ALGEBRA Sia $a \in \mathbb{R}$, allora

$a^{+\infty}$ indica il valore a seguente tendente per successione di limiti per valore di valore seguente e seguendo $a^{+\infty}$

$a^{-\infty}$ indica il valore "a" seguendo con un rapporto del limite per valore di valore successo e seguendo $a^{-\infty}$.

ESEMPIO $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}^{+\infty} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}^{n} = 0$

Quindi $\frac{+\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{-\infty} = \frac{-\infty}{+\infty} = \frac{-\infty}{-\infty} = 0$ $\begin{cases} +\infty, \text{se } a > 0 \\ -\infty, \text{se } a < 0 \end{cases}$

$0^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, \text{se } a > 0 \\ -\infty, \text{se } a < 0 \end{cases}$

$0^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, \text{se } a > 0 \\ -\infty, \text{se } a < 0 \end{cases}$

DEFINIZ. $\forall a \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < +\infty$

DEF Si definisce che una successione infinitesima (oppure $a^{+\infty}$, $0^{+\infty}$) prendere il nome di FORME INDETERMINATE. (F.I.)

TEOREMA (ALGEBRA DEI LIMITI)

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni con

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = m$

(1) Se $\ell, m \in \mathbb{R}$ NON È UNA F.I., allora $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \ell + m$

(2) Se ℓ, m NON È UNA F.I., allora $\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \ell \cdot m$

(3) Se $\frac{\ell}{m}$ NON È UNA F.I., e $b_n \neq 0$ DEF allora

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}$

ESEMPI

① Scrivere la successione a_n $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}$

② Non vale $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ usando la definizione (PARI $\to$ CASO $\ell = 1$, DISPARI $\to$ CASO $\ell = -1$)

③ Dim che se $\{a_n\}$ è limitata e $\{b_n\}$ è infinitesima, allora $\{a_n b_n\}$ è infinitesima

④ Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n} - n$ usando l'algebra dei limiti

⑤ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $|a_n - \ell| \le \frac{1}{m}$ $\forall n \ge 1$

$\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall n \ge 1$

$\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $|a_n - \ell| \le \frac{1}{m}$ $\forall n \ge 1$

⑥ Dim che $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ usando la definizione (PARI $\to$ CASO $\ell = 1$, DISPARI $\to$ CASO $\ell = -1$)

⑦ Dim che se $\{a_n\}$ è limitata e $\{b_n\}$ è infinitesima, allora $\{a_n b_n\}$ è infinitesima

⑧ Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n} - n$ usando l'algebra dei limiti

⑨ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $|a_n - \ell| \le \frac{1}{m}$ $\forall n \ge 1$

$\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall n \ge 1$

$\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $|a_n - \ell| \le \frac{1}{m}$ $\forall n \ge 1$

⑩ Dim che $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ usando la definizione (PARI $\to$ CASO $\ell = 1$, DISPARI $\to$ CASO $\ell = -1$)

⑪ Dim che se $\{a_n\}$ è limitata e $\{b_n\}$ è infinitesima, allora $\{a_n b_n\}$ è infinitesima

⑫ Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n} - n$ usando l'algebra dei limiti

⑬ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $|a_n - \ell| \le \frac{1}{m}$ $\forall n \ge 1$

$\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall n \ge 1$

$\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $|a_n - \ell| \le \frac{1}{m}$ $\forall n \ge 1$

⑭ Dim che $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ usando la definizione (PARI $\to$ CASO $\ell = 1$, DISPARI $\to$ CASO $\ell = -1$)

⑮ Dim che se $\{a_n\}$ è limitata e $\{b_n\}$ è infinitesima, allora $\{a_n b_n\}$ è infinitesima

⑯ Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n} - n$ usando l'algebra dei limiti

⑰ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $|a_n - \ell| \le \frac{1}{m}$ $\forall n \ge 1$

$\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall n \ge 1$

$\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $|a_n - \ell| \le \frac{1}{m}$ $\forall n \ge 1$

⑱ Dim che $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ usando la definizione (PARI $\to$ CASO $\ell = 1$, DISPARI $\to$ CASO $\ell = -1$)

⑲ Dim che se $\{a_n\}$ è limitata e $\{b_n\}$ è infinitesima, allora $\{a_n b_n\}$ è infinitesima

⑳ Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n} - n$ usando l'algebra dei limiti