4/4/2022

LEZIONE 18

Riepilogo: calcolo di limiti, successioni monotone, limiti di successioni monotone.

COROLLARIO: $\{a_n\}_{n\in S}$ successione, e supponiamo che $\{a_n\}_{n\in S}$ sia monotona definitivamente. Allora $\{a_n\}_{n\in S}$ ammette limite.

esempio: $a_n = (n-5)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

a_n non è monotona su $\mathbb{N}$: infatti

$a_0 = 25$, $a_1 = 16$, $a_2 = 9$, ..., $a_5 = 0$, $a_6 = 1$, $a_7 = 4$, ...

$\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente in $[5,+\infty)$, cioè definitivamente, poiché $\forall n \geq 5$, $a_{n+1} \geq a_n$.

In particolare, se $\{a_n\}_{n\in S}$ è crescente (decrescente) $\forall n \geq \bar{n}$, $\bar{n}\in\mathbb{N}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq \bar{n}\} \quad \left(= \inf\{a_n : n \geq \bar{n}\}\right).$$

OSS: se in un esercizio dimostrate che $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$:

$\{a_n\}_{n \in S}$ è crescente da $\bar{n}$ in poi, avete che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq \bar{n}\}$$

IL NUMERO "e" DI NEPERO

Vogliamo dimostrare che $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Osserviamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \text{"}1^{+\infty}\text{"} \qquad \text{F. I.}$$

Dimostriamo che $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ è CRESCENTE.

A noi basta dim che $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} \geq a_n$. (SOLO PER SUCCESSIONI)

Noi dimostriamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq 1$.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1}}$$

$$\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}$$

VOGLIAMO USARE BERNOULLI

$$= \left(1-1+\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(1+\frac{\cancel{-n^2}\cancel{-2n}-1\cancel{+n^2}\cancel{+2n}}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(\underbrace{1-\frac{1}{n^2+2n+1}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

" $(1+x)^{n+1}$ "

$$x = -\frac{1}{n^2+2n+1} > -1 \quad \forall n \geq 1$$

BERNOULLI

$$\geq \left(1+\left(-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)\cdot n+1\right) \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \{a_n\}_{n\geq 1} \text{ È CRESCENTE}$$

$\Rightarrow$ per il teorema sui limiti delle succ monotone ci dice che $\exists \lim_{n \to +\infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

OSS CHE: $\lim_{n \to +\infty} a_n \geq a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$

Si dimostra che la successione:

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è DECRESCENTE per $n \geq 1$,

(PER CASA) e $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 1$.

$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = e$, $\exists \lim_{n \to +\infty} b_n = b$, allora

$e \leq b \leq b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4$

$\Rightarrow$ abbiamo dim che $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \in [2, 4]$.

DEF: si definisce $e := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, è il numero di NEPERO.

OSS: se $\{a_n\}_{n \in S}$ è una successione divergente, allora

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$

esempi: calcolare $\lim_{n \to +\infty} a_n$, con $a_n = \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n$

Vogliamo scrivere qualcosa del tipo $\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n}$, con $\{b_n\}$ successione divergente. La base non si può modificare, una volta riconosciuto "b_n" si lavora sull'esponente.

$$\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2}{2}}\right) = \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)$$

con $b_n = \frac{n^2}{2}$.

Vogliamo avere b_n come esponente: costruiamo b_n all'esponente, troviamo un resto, mettiamo insieme i pezzi.

$$\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2}{2}}\right)^n$$

MOLTIPLICO e DIVIDO L'ESPONENTE PER $\frac{n^2}{2}$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2}{2}}\right)^{\frac{n^2}{2}}}_{c_n}{}^{\cdot \underbrace{n \cdot \frac{2}{n^2}}_{d_n}} \qquad = \frac{2}{n}$$

$$= c_n^{\,d_n}, \text{ con } \begin{cases} c_n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2}{2}}\right)^{\frac{n^2}{2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e \\ d_n = \frac{2}{n} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}(c_n)^{d_n} = e^0 = 1.$$

esempio : $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, infatti:

$x=0$: $e^0=1$, e $\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1$ $\forall n\geq 1$.

$x\neq 0$: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{n\cdot\frac{n}{x}\cdot\frac{x}{n}}$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x \longrightarrow e^x,\quad n\to+\infty.$$

PER CASA: scrivere a^x come limite, $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ e $x\in\mathbb{R}$.

FORMULA DI STIRLING: $\forall n\geq 1$ si ha

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq (n\cdot e)\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

PROPOSIZIONE: Sia $\{a_n\}_{n\in S}$ una successione con $a_n > 0$ definitivamente. Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

OSS: il risultato ci dice che: se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, allora esiste il $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ e i limiti coincidono.

Applicazione di questo risultato: vogliamo calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{=a_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\cancel{(n+1)}!}{\cancel{n!}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \to (n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \text{"}1^{+\infty}\text{"}, \; n\to+\infty \qquad \text{F.I.}$$

2 STRADE: cerchiamo di scrivere $\frac{n}{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$:

$$\frac{n}{n+1} = 1 - 1 + \frac{n}{n+1} = 1 + \frac{\cancel{-n}-1\cancel{+n}}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{-(n+1)}$$

PER CASA: finire questo limite mettendo a posto l'esponente

2^a strada: $$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e}, \quad n \to +\infty$$

Abbiamo dim che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e}, \quad n \to +\infty \implies \sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{e}, \quad n \to +\infty$$

Poiché $a_n = \frac{n!}{n^n}$, si ha

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{n}} \to \frac{1}{e}$$

" $\implies$ " $\frac{n!}{n^n}$ è un infinito dello stesso ordine di $\frac{1}{e^n}$

" $\implies$ " $n!$ è dello stesso ordine di infinito di $\frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$

SERIE: SUCCESSIONI DI SOMME

Sia $\{a_n\}_{n\in S}$ successione, $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$.

$\forall n \in S$ (cioè $\forall n \geq n_0$) definiamo

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n$$

Abbiamo definito la successione $\{S_n\}_{n\geq n_0}$

DEF: Data la successione $\{a_n\}_{n\geq n_0}$, definiamo SERIE di termine generale $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ la successione $\{S_n\}_{n\geq n_0}$, con

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k.$$

Il termine S_n viene detto SOMMA PARZIALE di indice "n".

OSS: la teoria delle serie risolve "in modo formale" i paradossi di Zenone (Achille e la tartaruga).

DOMANDA: che senso dare al limite, se esiste, della successione $\{S_n\}_{n\geq n_0}$?

esempio: $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, allora

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+\dots+n$$

$$\left(= \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

S_n è la somma di $n+1$ addendi, se mandiamo n all'infinito, $\lim_{n \to +\infty} S_n$ sarà la somma di ∞ addendi.

Se esiste $\lim_{n \to +\infty} S_n$, questo viene indicato con

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k := \lim_{n \to +\infty} S_n$$

Noi consideriamo $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ con $a_n \geq 0$ $\forall n \geq n_0$, cioè CONSIDERIAMO solo SERIE a termini POSITIVI.

PROPOSIZIONE: Sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ con $a_n \geq 0$ $\forall n \geq n_0$, allora:

(i) $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $\{S_n\}_{n \geq n_0}$ è CRESCENTE

dim (ii)

Si ha

$$S_{m+1} = \sum_{k=n_0}^{n+1} a_k = \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} a_k}_{S_m} + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_m \quad \forall n \geq n_0.$$

CONSEGUENZA: Se $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$, allora la serie di termine generale $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ ammette limite $\ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

SERIE GEOMETRICA: dato $q \geq 0$, definiamo

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è a termini positivi, vogliamo calcolarne il limite.

① Dim che $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$, $q \neq 1$.

Usiamo l'induzione.

PASSO BASE: $n = 0$, si ha

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 \quad e \quad \frac{1 - q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

PASSO INDUTTIVO: Vogliamo dim che

$$S_{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}, \quad \text{sapendo che} \quad S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = S_n + q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-\cancel{q^{n+1}} + \cancel{q^{n+1}} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$\Rightarrow$ il passo induttivo è verificato, e dunque se $q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Segue che $(q \neq 1)$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} +\infty, & q > 1, \\ \frac{1}{1-q}, & q \in [0,1). \end{cases}$$

Se $q = 1$, allora

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = (n+1) \longrightarrow +\infty, \quad n \to +\infty$$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ si chiama SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE q.

esercizio: dim che $0,\overline{9} = 1$ usando la serie geometrica di ragione $\frac{1}{10}$.

ESERCIZI:

- Calcolare il limite delle seguenti successioni:

- $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+n^3}{3^n+n^2}$
- $\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot 2^{-\sqrt{n}}$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$

- Dim che se $f, g: A \to \mathbb{R}$ sono crescenti in A, allora $f+g$ è crescente in A. È vero che $f \cdot g$ è crescente in A? $\Rightarrow$ NO, se $f(x) = g(x) = x$, $f \cdot g(x) = x^2$

CORREZIONE: $\# A < \# \mathcal{P}(A)$

P.A. $f: A \to \mathcal{P}(A)$ suriettiva, $\forall S \in \mathcal{P}(A)$ $\exists a \in A : f(a) = S$.

$$S = \{ a \in A : a \notin f(a) \}$$

$S \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow \exists s \in A : f(s) = S$.

2 poss: $s \in S$ o $s \notin S$.

Se $s \in S \Rightarrow s \notin f(s) = S$

Se $s \notin S \Rightarrow s \in f(s) = S$

CONTRADDIZIONI

- $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = 1^{+\infty}$ F. I.

$$\frac{n+3}{n+1} = \frac{n+1+2}{n+1} = 1+\frac{2}{n+1} = 1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}$$

$$\frac{n+3}{n+1} = 1-1+\frac{n+3}{n+1} = 1+\frac{-n-1+n+3}{n+1} = 1+\frac{2}{n+1}$$

$\leadsto a_n = \frac{n+1}{2}$

$$\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]}_{\substack{\downarrow\, n\to+\infty \\ e}}{}^{\underbrace{\frac{2}{n+1}\cdot n}_{= \frac{2n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2}}$$

$\longrightarrow e^2$, $n\to+\infty$,

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, $n\to+\infty$

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+n^3}{3^n+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n}\cdot\frac{1+\frac{n^3}{2^n}}{1+\frac{n^2}{3^n}} = 0\cdot\frac{1+0}{1+0} = 0.$$

$\frac{n^3}{2^n} \to 0$, $\frac{n^2}{3^n} \to 0$

- $\lim_{n\to+\infty} n^2\cdot 2^{-\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F. I.

I: CR RAPPORTO

$$a_n = \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{\sqrt{n+1}}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overset{n^2+2n+1}{\Downarrow}(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n+1}}} \longrightarrow 1 \quad n \to +\infty \quad \text{(dai conti sotto)}$$

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1, \; n \to +\infty$$

$$2^{\underbrace{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}} \to \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \longrightarrow +\infty - \infty \quad \text{F. I.}$$

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} \longrightarrow -\frac{1}{+\infty\left(1+\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{+\infty}}}\right)} = -\frac{1}{(+\infty)\cdot 2} = 0$$

2° METODO: "logaritmo":

$$n^2 \cdot 2^{-\sqrt{n}} = e^{\ln\left(n^2 \cdot 2^{-\sqrt{n}}\right)} = e^{\underbrace{\ln(n^2) + \ln\left(2^{-\sqrt{n}}\right)}}$$

$$= \underbrace{2\ln(n) - \sqrt{n}\,\ln(2)} \longrightarrow +\infty - \infty \;, n \to +\infty \quad \text{F. I.}$$

$$= \sqrt{n}\left(2\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} - \ln(2)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty\left(2\cdot 0 - \ln(2)\right) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot 2^{-\sqrt{n}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\downarrow \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}}$$

• $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$n^n > 2^n \Rightarrow$ questo limite è $+\infty$?

RAPPORTO :

$$a_n = \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad n\to+\infty.$$

$\rightarrow 1,\ n\to+\infty$ (CONTI SOTTO)

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\left[\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}}\right](n+1)^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$\downarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}\cdot\frac{n}{n}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n\to+\infty} e^{\frac{1}{+\infty}} = 1.$$

$$(n+1)^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = e^{\underbrace{\ln\left((n+1)^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)}}$$

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln(n+1) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \ln(n+1)$$

$\rightarrow 0,\ n\to+\infty$