8/4/2022

LEZIONE 20

Riepilogo: sottosuccessioni, teorema di Bolzano-Weierstrass, esercizi ed esempi.

LIMITI DI FUNZIONI

Vogliamo generalizzare il discorso (e i risultati) sui limiti di successioni a funzioni il cui dominio è un qualunque sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$.

Nel caso delle successioni, il fatto che il dominio fosse una semiretta di $\mathbb{N}$ implicava che l'unico P.d.A. del dominio fosse $+\infty$.

Nel caso $f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, allora potenzialmente ogni $x \in \overline{\mathbb{R}}$ è P.d.A. per A, possiamo studiare il limite per f che tende a x ogni volta che x è P.d.A. per A.

Ad esempio, $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, allora $D(f) = \mathbb{R}$ e quindi i P.d.A. di $D(f)$ sono tutti gli elementi di $\overline{\mathbb{R}}$.

DEF: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ P.d.A. per A (questo non vuol dire che $x_0 \in A$).

Diciamo che "f ammette LIMITE $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_0" se

$$\forall U \in \mathcal{I}_\ell \quad \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(V \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq U$$

In questo caso scriviamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

OSS: se $x_0 = +\infty$ "recuperiamo" un limite simile a quello delle successioni.

- DOMANDA: perché x_0 deve essere P.d.A. per A?

Nella def noi stiamo studiando l'immagine di $V \cap A \setminus \{x_0\}$ tramite f, e il fatto che x_0 sia P.d.A. per A mi garantisce che, qualunque $V \in \mathcal{I}_{x_0}$ io consideri, sicuramente $V \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

È POSSIBILE RISCRIVERE la def di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

NEI CASI SPECIFICI, cioè dividendo i casi $\ell, x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = x_0 = +\infty$ e $\ell = x_0 = -\infty$.

1) $\ell, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\underset{\Downarrow\; U}{\forall \varepsilon > 0} \quad \underset{\Downarrow\; V}{\exists \delta > 0} : \underbrace{f\big(A \cap \overbrace{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}^{= V} \setminus \{x_0\}\big) \subseteq \overbrace{(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)}^{U}}_{\text{RISCRIVIAMOLA IN MODO PIÙ ESPLICITO}}$$

$$\forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}, \quad f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in A \text{ e } \underset{x \neq x_0}{0 <} |x - x_0| \underset{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)}{<} \delta, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2) $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 = -\infty$:

$$\underset{\Downarrow\; U}{\forall \varepsilon > 0} \quad \underset{\Downarrow\; V}{\exists M > 0} : f\big(A \cap \underset{\Downarrow\; V}{(-\infty, -M)}\big) \subset \underset{\Downarrow\; U}{(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)}$$

Ragionando come prima otteniamo:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 : \quad \forall x < -M$ e $x \in A$ si ha

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

NON C'È " $\setminus \{-\infty\}$ " PERCHÉ $x \in \mathbb{R}$ È SEMPRE $\neq -\infty$

GLI ALTRI CASI SI TRATTANO IN MODO ANALOGO

Vediamo alcuni teoremi sui limiti di funzioni.

TEOREMA (UNICITÀ DEL LIMITE PER FZ)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, e sia x_0 p.d.a. per A.

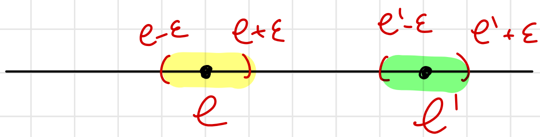
Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, questo è unico,

cioè se esiste ℓ' che soddisfa la definizione di limite, allora $\ell = \ell'$.

__dim__

Consideriamo il caso in cui $\ell, \ell', x_0 \in \mathbb{R}$.

P.A. supp che $\ell \neq \ell'$, e prendiamo $\ell < \ell'$.



"ℓ" ed "ℓ'" soddisfano la def di limite:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x \in A \vee 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x \in A \vee 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon$

Scegliamo $\varepsilon > 0 : \ (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \cap (\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon) = \emptyset$.

Scegliamo $\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{4}$ $\left(= \dfrac{|\ell' - \ell|}{4} \right)$

segue che: $\exists\, \delta_\ell > 0 : \forall x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta_\ell$ si ha

$$f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

$\exists\, \delta_{\ell'} > 0 : \forall x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta_{\ell'}$ si ha

$$f(x) \in (\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon)$$

con $\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{4}$. Posto $\bar\delta = \min\{\delta_\ell, \delta_{\ell'}\}$ si ha

$$\forall x \in A \text{ e } 0 < |x - x_0| < \bar\delta \quad \begin{cases} \nearrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \\ \searrow f(x) \in (\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon) \end{cases}$$

Ma con la scelta di ε che abbiamo fatto abbiamo che $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \cap (\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon) = \emptyset$

Otteniamo dunque la contraddizione cercata, poiché abbiamo dimostrato che l'insieme vuoto non è vuoto.

$\blacksquare$

Mostriamo ora un risultato che lega limiti di funzioni e limiti di successioni.

TEOREMA (DI COLLEGAMENTO)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, e sia x_0 p.d.a. di A. Allora:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\},$$

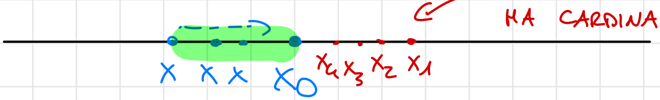
$x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ È UNA SUCCESSIONE}} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

OSS: il "collegamento" consiste nel prendere "tutte le successioni che tendono a x_0 (meno quelle "costantemente uguali a x_0)" al posto della condizione "x tende a x_0".

LA CARDINALITÀ DELL'INS DI QUESTI PUNTI È QUELLA DI $\mathbb{R}$

OGNUNA DELLE SUCC CONS HA CARDINALITÀ = A QUELLA DI $\mathbb{N}$.



dim

$\Rightarrow$) PER CASA, cioé dim che se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

allora $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ con $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$,

allora $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

CONS IL CASO $\ell, x_0 \in \mathbb{R}$

IPOTESI

$\Leftarrow$) dim che se ogni succ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$

con $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$ soddisfa $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$,

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. $\Leftarrow$ TESI

Per dim in modo "diretto", dovremmo provare che:

$$\forall U \in \mathcal{I}_\ell \quad \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$$

Ma costruire $V \in \mathcal{I}_{x_0}$ usando le successioni è complicato.

Noi dimostriamo la CONTRONOMINALE: la negazione della tesi implica la negazione dell'ipotesi, questo è equivalente a ipotesi $\Rightarrow$ tesi.

NEGAZIONE TESI: $\exists U \in \mathcal{I}_\ell : \forall V \in \mathcal{I}_{x_0} \quad \exists x_V \in A \cap V \setminus \{x_0\} :$

"NON È VERO CHE $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$" $\quad f(x_V) \notin U.$

NEGAZIONE IPOTESI: $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ con $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$: non è vero che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell.$

PUNTO 1: COSTRUIAMO $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$

CASO $x_0 \in \mathbb{R}$: nella negazione della tesi prendiamo

$V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 . \quad V_n \in \mathcal{I}_{x_0}$

$\Rightarrow \quad \exists \; x_{V_n}^{(1)} \in A \cap V_n \setminus \{x_0\}$ tale per cui

$f(x_{V_n}) \notin U.^{(2)}$

(1) CI DARÀ $x_{V_n} \to x_0$ per $n \to +\infty$

(2) CI DARÀ che non è vero che $\lim_{n \to +\infty} f(x_{V_n}) = \ell.$

La successione l'abbiamo costruita: basta prendere

$x_n := x_{V_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$

CASI $x_0 = +\infty$ e $x_0 = -\infty$: si ragiona allo stesso modo con $V_n := (n, +\infty)$ o $V_n := (-\infty, -n).$

PUNTO 2: dim che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq A\setminus\{x_0\}$ e

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$$

Poiché $x_n \in A \cap V_n \setminus\{x_0\}$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$, segue che

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq A \setminus\{x_0\}.$$

Osserviamo che $x_n \in V_n = \left(x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$.

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\downarrow\\0}}{0} \le |x_n - x_0| < \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}} \quad \forall n\in\mathbb{N}_0 \qquad n\to+\infty$$

$\Rightarrow$ il teorema dei 2 carabinieri ci dice che

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - x_0| = 0,$$

il che è equivalente a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$.

PUNTO 3: dim che non è vero che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$,

cioè che

$$\exists U \in \mathcal{I}_\ell : \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \bar{n} \ge n \quad \text{e} \quad f(x_{\bar{n}}) \notin U.$$

Per ora sappiamo che $\exists U \in \mathcal{I}_\ell$ tale per cui

$f(x_n) \notin U$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$, e questo ci dice che non è vero che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

$\blacksquare$

esempi: LIMITI NOTEVOLI, abbiamo che:

$\forall \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \to 0$ "x_0" per $n\to+\infty$, $a_n \neq 0$ "x_0"

def. si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1 \quad \overset{\text{TEO COLL}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

OSS: il concetto "DEFINITIVAMENTE" significa "IN UN INTORNO DI $+\infty$", cioè "IN UN INTORNO DEL PTO DI ACC $+\infty$ CHE STIAMO CONSIDERANDO".

TEOREMA (DEL CONFRONTO PER FZ I)

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 p.d.a. per A.

Se $f \leq g$ in un intorno di x_0, allora:

(i) se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m$, allora $\ell \leq m$.

(ii) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

(iii) se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

TEOREMA (DEL CONFRONTO PER FZ II)

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, sia x_0 p.d.a. per A, e supponiamo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m$, $\ell < m$.

Allora esiste un intorno di x_0, V, tale per cui $f < g$ su $A \cap V \setminus \{x_0\}$.

TEOREMA DEI DUE CARABINIERI (PER FZ)

Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, sia x_0 p.d.a. per A,

e supp che $f \leq g \leq h$ in un intorno di x_0.

Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}},$$

allora $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.