28/2/2022

LEZIONE 4

Riepilogo: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ASSIOMI DI $\mathbb{R}$, DEFINIZIONE DI MASSIMO e MINIMO DI UN INSIEME, INSIEME DEI MAGGIORANTI e DEI MINORANTI DI UN INSIEME

esempio: l'intervallo $A = [0,1)$ non ammette massimo, mentre l'insieme $B = [0,1]$ ha massimo e $\max B = 1$.

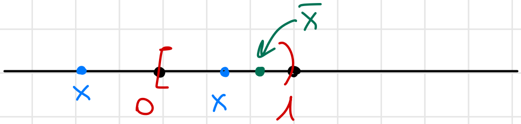
La differenza tra A e B è il punto 1. Però si ha:

$$M_A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \ \forall a \in A\} = [1,+\infty).$$

Infatti se $x \geq 1$, allora $x \geq a$ $\forall a \in [0,1)$, e quindi

$$[1,+\infty) \subseteq M_A.$$

Se $x < 1$, allora se $x \leq 0$ $x \notin M_A$, e se $x \in [0,1)$, allora il punto



$$\bar{x} = \frac{x+1}{2} = x + \frac{1-x}{2} \in A, \quad e \quad \bar{x} > x \quad (\text{perché?})$$

$\Rightarrow$ $(-\infty,1)$ NON HA PUNTI IN COMUNE CON M_A, cioè

$$(-\infty,1) \cap M_A = \emptyset.$$

$\Longrightarrow \quad M_A = [1, +\infty)$.

Lo stesso ragionamento ci dice che $M_B = [1, +\infty)$.

Quindi

$$A \neq B \quad \text{ma} \quad M_A = M_B$$

Infine, $\max B = 1$, e quale ci "sarebbe piaciuto" fosse $\max A$? 1, ma

$$\min M_B = \min M_A = 1 = \max B$$

DEF: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Definiamo l'ESTREMO SUPERIORE DI A come:

$$\sup A = \begin{cases} +\infty, & M_A = \emptyset. \\ \min M_A, & M_A \neq \emptyset. \end{cases}$$

(NON CHIAMATELO "SUPERIORE DI A")

- Definiamo l'ESTREMO INFERIORE DI A come:

$$\inf A = \begin{cases} -\infty, & m_A = \emptyset, \\ \max m_A, & m_A \neq \emptyset. \end{cases}$$

(NON CHIAMATELO "INFERIORE DI A")

OSS: $\sup A$ e $\inf A$ sono ben definiti ed esistono sempre.

PROPOSIZIONE: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora $\inf A$ è unico e $\sup A$ è unico.

dim

Se $m_A = \emptyset$ allora $\inf A = -\infty$. Se $m_A \neq \emptyset$, allora $\inf A = \max m_A$, e siano m_1 e m_2 due estremi inferiori di A. Allora

$$m_1 = \inf A = \max m_A = m_2$$

- Allo stesso modo si dimostra che l'estremo superiore è unico.

PROPOSIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Se esiste $\min A$, allora $\min A = \inf A$.
- Se esiste $\max A$, allora $\max A = \sup A$.

dim

- Supponiamo che esista $\underline{a} = \min A$. Vogliamo dimostrare che $\underline{a} = \inf A = \max m_A$, se $m_A \neq \emptyset$, oppure $\inf A = -\infty$ se $m_A = \emptyset$.

1) se esiste $\min A$, allora $m_A \neq \emptyset$. Infatti $\underline{a} = \min A$

soddisfa le condizioni:

$\underline{a} \leq a \quad \forall a \in A$, e $\underline{a} \in A$.

$\hookrightarrow \quad \underline{a} \in m_A$.

in questo caso $\inf A = \max m_A$.

Inoltre poiché $\underline{a} \in A$, $\forall x \in m_A$ si ha

$$x \leq \underline{a} \quad \Rightarrow \quad \underline{a} = \max m_A.$$

PER CASA: dim il punto 2.

$\blacksquare$

OSS: se vogliamo dimostrare una tesi, le ipotesi

sono le proprietà che ci servono per poter dare

senso alla tesi considerata.

domanda: che relazione c'è tra massimo e minimo

di A?

Se $M = \max A$, ed $m = \min A$, allora $M \geq m$.

Infatti: $M \geq a \quad \forall a \in A$, $m \in A \Rightarrow M \geq m$

quando $M = m$? L' uguaglianza si ha solo se $A = \{a\}$. Infatti se $A = \{a_1, a_2\}$, $a_1 < a_2$ allora $\min A = a_1 < a_2 = \max A$.

Allo stesso modo, $\sup A \geq \inf A$ e vale l'uguaglianza se e solo se $A = \{a\}$.

$\downarrow$ $\sup A = \inf A$.

Consideriamo $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$, che relazione c'è tra $\max A$, $\max B$ e $\min A$, $\min B$?

PROPOSIZIONE: Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, e sia $A \subseteq B$.

- se $\max A$ e $\max B$ esistono, allora $\max A \leq \max B$.
- se $\min A$ e $\min B$ esistono, allora $\min A \geq \min B$.

dim PER CASA

PROPOSIZIONE: Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, e sia $A \subseteq B$.

- $\inf A \geq \inf B$.
- $\sup A \leq \sup B$.

dim

Dimostriamo che $\sup A \le \sup B$.

CASO 1: se $\sup B = +\infty$ allora la tesi è immediata

(perché?)

CASO 2: $\sup B < +\infty$, cioè $M_B \neq \emptyset$. Questo vuol dire che esiste $x \in M_B$, cioè che

$$\forall b \in B \quad x \ge b$$

$A \subseteq B$

$$\Rightarrow \forall a \in A, \quad x \ge a \quad \Rightarrow x \in M_A, \text{ cioè } M_A \neq \emptyset.$$

Quindi $\sup A < +\infty$.

$M_A \supseteq M_B$: PERCHÉ ?

Questo vuol dire che: $x \in M_B$ allora $x \in M_A$.

Questo è vero perché se $x \in M_B$ allora $x \ge b \ \forall b \in B$ e quindi $x \ge a \quad \forall a \in A$, cioè $x \in M_A$.

(abbiamo usato che se: $A \subseteq B$, gli elementi di B soddisfano la proprietà P, allora anche gli elementi di A soddisfano la proprietà P).

Dunque $M_B \subseteq M_A \Rightarrow \underset{\sup B}{\min M_B} \ge \underset{\sup A}{\min M_A}$

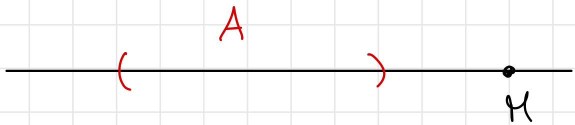
Per caso: fare il punto 2

$\blacksquare$

OSS: se $A \not\subseteq B$ allora in generale non si può dire nulla sulla relazione tra $\inf A$, $\inf B$ e $\sup A$, $\sup B$.

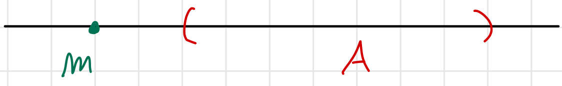
DEF: $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Diciamo che A È LIMITATO SUPERIORMENTE se esiste ($\exists$) $M \in \mathbb{R}$: $a \leq M$ $\forall a \in A$.



(trovo un "limite" superiore all'insieme A)

- si dice che A è LIMITATO INFERIORMENTE se esiste $m \in \mathbb{R}$: $a \geq m$ $\forall a \in A$.



- si dice che A è LIMITATO se è LIMITATO SUPERIORMENTE ed INFERIORMENTE, cioè $\exists\ m, M \in \mathbb{R}$: $m \leq a \leq M$ $\forall a \in A$.

PROPOSIZIONE: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

- A è LIMITATO SUPERIORMENTE se e solo se $\sup A < +\infty$. (cioè A lim sup $\Rightarrow$ $\sup A < +\infty$
  $\sup A < +\infty \Rightarrow A$ lim sup)

- A è LIMITATO INFERIORMENTE se e solo se $\inf A > -\infty$.

- A è LIMITATO se e solo se $\inf A > -\infty$ e $\sup A < +\infty$.

dim PER CASA.

DEF: $A \subseteq \mathbb{R}$.

- A si dice ILLIMITATO SUPERIORMENTE se $\sup A = +\infty$.
- A si dice ILLIMITATO INFERIORMENTE se $\inf A = -\infty$.
- A si dice ILLIMITATO se è ILLIMITATO INFERIORMENTE e SUPERIORMENTE.

OSS: A è ill sup se non è LIM superiormente, cioè

(NEGAZIONE)

se $\overline{(\exists M \in \mathbb{R} : M \geq a \ \forall a \in A)}$

$= \text{"} \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : \quad a > M \text{"}$

PER CASA: $\left(\exists m \in \mathbb{R} : \ \forall a \in A \quad m \leq a \right) = \ldots$

esempio: $A = [2, 5)$ è LIMITATO: $\sup A = 5$,
$\max A$ non esiste, $\min A = \inf A = 2$.

$B = [100, +\infty)$ è LIMITATO INF MA NON SUP: infatti
$\min B = 100$, $\sup B = +\infty$.

$\mathbb{N}$ è LIMITATO INFERIORMENTE: $\min \mathbb{N} = 0$, ma è
illimitato superiormente: infatti se si suppone che
$\exists M \in \mathbb{R} : \ M \geq n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, allora si ottiene una
CONTRADDIZIONE.

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ è ILL SUPERIORMENTE, perché supporre che
sia LIMITATO SUP porta a una contraddizione.

$\mathbb{Z}$ È ILLIMITATO

PROPOSIZIONE: $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq B$.

- se B è LIM SUP., allora A è LIM SUP.
- se B è LIM INF., allora A è LIM INF.
- se B è LIM, allora A è LIM.

dim

B è LIM SUP $\Leftrightarrow$ $\sup B < +\infty$

$A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$

$\Rightarrow \sup A < +\infty$

OSS: se $A \subseteq B$, allora la limitatezza di A non ci dice nulla sulla limitatezza di B. Ad esempio

$$[0,1) \subseteq [0,+\infty)$$

$$[0,1) \subseteq [-1,5]$$

Caratterizzazione di sup e inf in "termini di ε"

↳ vuol dire che abbiamo un teorema del tipo:

$\ell = \sup A$ se e solo se ...

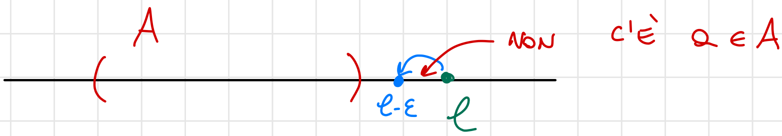
TEOREMA

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $\sup A < +\infty$. Allora $\ell = \sup A$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

- $\ell \geq a \quad \forall a \in A$.
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a > \ell - \varepsilon$.

$\inf A > -\infty$. Allora $m = \inf A$ se e solo se valgono seguenti condizioni:

- $m \leq a \quad \forall a \in A$.
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \quad a < m + \varepsilon$.



" $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \quad a > \ell - \varepsilon$ " vuol dire che se parto da ℓ e mi sposto un po' a sinistra, $(\ell - \varepsilon)$ allora troviamo un elemento di A che sta a destra di dove siamo arrivati.