

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Институт компьютерных наук и технологий  
Высшая школа программной инженерии

**ОТЧЕТ**

по лабораторной работе №3

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант 6

Студент гр. № 23531/21:  
Преподаватель:

Терехин А.В.  
Воскобойников С.П.

Санкт-Петербург

2018

## Постановка задачи

### ВАРИАНТ N 6

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = -310x_1 - 3000x_2 + 1 / (10t^2 + 1); \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + e^{-2t};$$
$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1; \quad t \in [0, 0.4]$$

следующими способами с одним и тем же шагом печати  $h_{\text{print}} = 0.02$  :

I) по программе **RKF45** с  $\text{EPS}=0.0001$ ;

II) методом Рунге-Кутты 4-й степени точности

$$z_{n+1} = z_n + (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) / 8;$$

$$k_1 = hf(t_n, z_n); \quad k_2 = hf(t_n + h / 3, z_n + k_1 / 3);$$

$$k_3 = hf(t_n + 2h / 3, z_n - k_1 / 3 + k_2); \quad k_4 = hf(t_n + h, z_n + k_1 - k_2 + k_3);$$

с двумя постоянными шагами интегрирования:

a)  $h_{\text{int}} = 0.01$

б) любой другой, позволяющий получить качественно верное решение.  
Сравнить результаты.

# Исходный код программы на языке FORTRAN

```
program Lab3
  integer, parameter :: NEQN = 2
  REAL :: T=0.0,Y(NEQN),TOUT=0.0,RELERR=0.1E-07,ABSERR=0.00
  REAL :: TFINAL=0.4,TPRINT=0.02,WORK(27)
  INTEGER :: IWORK(5),IFLAG

  Y(1)=0
  Y(2)=1
  IFLAG=1

  write(*,*) "=====
  IFLAG=1
  write(*,*) "RK45 с шагом 0,02"
  write(*,*)

  do i = 1, 21
    call RK45(F,NEQN,Y,T,TOUT,RELERR,ABSERR,IFLAG,WORK,IWORK)
    print 111, TOUT, Y(1), Y(2)
    tout = tout + tprint
  end do

111   FORMAT(' T: ',F7.4,2X,' | | OutVal(1): ',F15.6,2X,' | | OutVal(2): ',F15.6)

  write(*,*) "=====
  write(*,*) "Метод Рунге-Кутты 4-й степени с шагом 0,01"
  write(*,*)
  call RungeKutta(0.01)

  IFLAG=1

  write(*,*) "=====
  write(*,*) "Метод Рунге-Кутты 4-й степени с шагом 0,001"
  write(*,*)
  call RungeKutta(0.001)

contains

  subroutine RungeKutta(h)
    REAL :: K1(NEQN),K2(NEQN),K3(NEQN),K4(NEQN),YN(NEQN),Ytmp(NEQN),Y(NEQN)
    REAL :: t=0.0
    integer :: counter=0
    T=0.0
    Y(1) = 0.0
    Y(2) = 1.0
157  Ytmp=Y
    call F(t, Ytmp, YN)
    K1 = h*YN

    Ytmp = Y +(K1/3)
    call F(t+(h/3.0),Ytmp,YN)
    K2= h*YN

    Ytmp = Y -(K1/3) + K2
    call F(t+((2*h)/3.0),Ytmp,YN)
    K3 = h*YN
```

```

Ytmp = Y + K1 - K2 + K3
call F(t+h,Ytmp,YN)
K4 = h*YN

Ytmp = Y + (K4)
YN = Y +1.0/8.0*(K1+3*K2+3*K3+K4)
Y =YN
T=h+T

counter = counter +1
11 FORMAT(' T: ', F7.4,2X, '|| OutVal(1): ', F15.6,2X, '|| OutVal(2): ', F15.6)
12 FORMAT(' T: ', F7.4,2X, '|| OutVal(1): ', F15.6,2X, '|| OutVal(2): ', F15.6)

IF ((h.LE.0.001).and. mod(counter,20).eq.0) PRINT 11, T,YN(1),YN(2)
IF ((h.GE.0.01)) PRINT 12, T,YN(1),YN(2)
IF(T.LT.0.4-h) GO TO 157

end subroutine RungeKutta

subroutine F(t, Y, YP)
  Real t, Y(NEQN), YP(NEQN)

  YP(1) = -310*Y(1)-3000*Y(2)+1/(10*t*t+1)
  YP(2) = Y(1)+exp(-2*t)

end subroutine F

end program Lab3

```

## Метод для вычисления системы дифференциальных уравнений

```
subroutine F(t, Y, YP)
  Real t, Y(NEQN), YP(NEQN)
  YP(1) = -310*Y(1)-3000*Y(2)+1/(10*t*t+1)
  YP(2) = Y(1)+exp(-2*t)
end subroutine F
```

## Метод для вычисления системы методом Рунге-Кутты 4-й степени ТОЧНОСТИ

```
subroutine RungeKutta(h)
  REAL :: K1(NEQN),K2(NEQN),K3(NEQN),K4(NEQN),YN(NEQN),Ytmp(NEQN),Y(NEQN)
  REAL :: t=0.0
  integer :: counter=0
  T=0.0
  Y(1) = 0.0
  Y(2) = 1.0
157 Ytmp=Y
  call F(t, Ytmp, YN)
  K1 = h*YN

  Ytmp = Y +(K1/3)
  call F(t+(h/3.0),Ytmp,YN)
  K2= h*YN

  Ytmp = Y -(K1/3) + K2
  call F(t+((2*h)/3.0),Ytmp,YN)
  K3 = h*YN

  Ytmp = Y + K1 - K2 + K3
  call F(t+h,Ytmp,YN)
  K4 = h*YN

  Ytmp = Y + (K4)
  YN = Y +1.0/8.0*(K1+3*K2+3*K3+K4)
  Y =YN
  T=h+T
  counter = counter +1

  11 FORMAT(' T: ', F7.4,2X, '|| OutVal(1): ', F15.6,2X, '|| OutVal(2): ', F15.6)
  12 FORMAT(' T: ', F7.4,2X, '|| OutVal(1): ', F15.6,2X, '|| OutVal(2): ', F15.6)

  IF ((h.LE.0.001).and. mod(counter,20).eq.0) PRINT 11, T,YN(1),YN(2)
  IF ((h.GE.0.01)) PRINT 12, T,YN(1),YN(2)
  IF(T.LT.0.4-h) GO TO 157

end subroutine RungeKutta
```

## Результаты выполнения программы

=====

RKF45 с шагом 0,02

T: 0.0000		OutVal(1):	0.000000		OutVal(2):	1.000000
T: 0.0200		OutVal(1):	-8.591610		OutVal(2):	0.865187
T: 0.0400		OutVal(1):	-7.226856		OutVal(2):	0.726118
T: 0.0600		OutVal(1):	-6.081976		OutVal(2):	0.611497
T: 0.0800		OutVal(1):	-5.138126		OutVal(2):	0.516987
T: 0.1000		OutVal(1):	-4.359166		OutVal(2):	0.438969
T: 0.1200		OutVal(1):	-3.715448		OutVal(2):	0.374478
T: 0.1400		OutVal(1):	-3.182686		OutVal(2):	0.321086
T: 0.1600		OutVal(1):	-2.740991		OutVal(2):	0.276803
T: 0.1800		OutVal(1):	-2.374067		OutVal(2):	0.240002
T: 0.2000		OutVal(1):	-2.068566		OutVal(2):	0.209346
T: 0.2200		OutVal(1):	-1.813551		OutVal(2):	0.183743
T: 0.2400		OutVal(1):	-1.600061		OutVal(2):	0.162296
T: 0.2600		OutVal(1):	-1.420751		OutVal(2):	0.144271
T: 0.2800		OutVal(1):	-1.269602		OutVal(2):	0.129066
T: 0.3000		OutVal(1):	-1.141678		OutVal(2):	0.116187
T: 0.3200		OutVal(1):	-1.032934		OutVal(2):	0.105229
T: 0.3400		OutVal(1):	-0.940049		OutVal(2):	0.095861
T: 0.3600		OutVal(1):	-0.860298		OutVal(2):	0.087810
T: 0.3800		OutVal(1):	-0.791447		OutVal(2):	0.080852
T: 0.4000		OutVal(1):	-0.731660		OutVal(2):	0.074803

=====

---

Метод Рунге-Кутты 4-й степени с шагом 0,01

T: 0.0100	OutVal(1):	4.750977	OutVal(2):	0.898453
T: 0.0200	OutVal(1):	10.868881	OutVal(2):	0.800319
T: 0.0300	OutVal(1):	18.905048	OutVal(2):	0.703006
T: 0.0400	OutVal(1):	29.613873	OutVal(2):	0.603316
T: 0.0500	OutVal(1):	44.029339	OutVal(2):	0.497185
T: 0.0600	OutVal(1):	63.570141	OutVal(2):	0.379323
T: 0.0700	OutVal(1):	90.184326	OutVal(2):	0.242733
T: 0.0800	OutVal(1):	126.547913	OutVal(2):	0.078034
T: 0.0900	OutVal(1):	176.338226	OutVal(2):	-0.127445
T: 0.1000	OutVal(1):	244.609558	OutVal(2):	-0.390926
T: 0.1100	OutVal(1):	338.309875	OutVal(2):	-0.735911
T: 0.1200	OutVal(1):	466.990784	OutVal(2):	-1.194543
T: 0.1300	OutVal(1):	643.784607	OutVal(2):	-1.810876
T: 0.1400	OutVal(1):	886.746399	OutVal(2):	-2.645344
T: 0.1500	OutVal(1):	1220.700439	OutVal(2):	-3.780925
T: 0.1600	OutVal(1):	1679.780273	OutVal(2):	-5.331600
T: 0.1700	OutVal(1):	2310.916992	OutVal(2):	-7.453997
T: 0.1800	OutVal(1):	3178.642090	OutVal(2):	-10.363386
T: 0.1900	OutVal(1):	4371.681152	OutVal(2):	-14.355679
T: 0.2000	OutVal(1):	6012.034668	OutVal(2):	-19.837673
T: 0.2100	OutVal(1):	8267.457031	OutVal(2):	-27.368671
T: 0.2200	OutVal(1):	11368.599609	OutVal(2):	-37.717648
T: 0.2300	OutVal(1):	15632.615234	OutVal(2):	-51.941860
T: 0.2400	OutVal(1):	21495.580078	OutVal(2):	-71.494995
T: 0.2500	OutVal(1):	29557.123047	OutVal(2):	-98.375885
T: 0.2600	OutVal(1):	40641.679688	OutVal(2):	-135.332733
T: 0.2700	OutVal(1):	55882.929688	OutVal(2):	-186.144562
T: 0.2800	OutVal(1):	76839.585938	OutVal(2):	-256.007050
T: 0.2900	OutVal(1):	105654.976562	OutVal(2):	-352.064911
T: 0.3000	OutVal(1):	145276.093750	OutVal(2):	-484.141388
T: 0.3100	OutVal(1):	199755.062500	OutVal(2):	-665.743652
T: 0.3200	OutVal(1):	274663.625000	OutVal(2):	-915.444092
T: 0.3300	OutVal(1):	377662.812500	OutVal(2):	-1258.779297
T: 0.3400	OutVal(1):	519286.937500	OutVal(2):	-1730.863770
T: 0.3500	OutVal(1):	714019.937500	OutVal(2):	-2379.977539
T: 0.3600	OutVal(1):	981777.562500	OutVal(2):	-3272.505371
T: 0.3700	OutVal(1):	1349944.250000	OutVal(2):	-4499.731934
T: 0.3800	OutVal(1):	1856173.250000	OutVal(2):	-6187.165527
T: 0.3900	OutVal(1):	2552237.750000	OutVal(2):	-8507.386719
T: 0.4000	OutVal(1):	3509326.750000	OutVal(2):	-11697.687500

=====

Метод Рунге-Кутты 4-й степени с шагом 0,001

T: 0.0200	OutVal(1):	-8.591598	OutVal(2):	0.865187
T: 0.0400	OutVal(1):	-7.226857	OutVal(2):	0.726118
T: 0.0600	OutVal(1):	-6.081978	OutVal(2):	0.611497
T: 0.0800	OutVal(1):	-5.138126	OutVal(2):	0.516987
T: 0.1000	OutVal(1):	-4.359166	OutVal(2):	0.438969
T: 0.1200	OutVal(1):	-3.715447	OutVal(2):	0.374478
T: 0.1400	OutVal(1):	-3.182686	OutVal(2):	0.321086
T: 0.1600	OutVal(1):	-2.740990	OutVal(2):	0.276803
T: 0.1800	OutVal(1):	-2.374066	OutVal(2):	0.240002
T: 0.2000	OutVal(1):	-2.068566	OutVal(2):	0.209346
T: 0.2200	OutVal(1):	-1.813550	OutVal(2):	0.183743
T: 0.2400	OutVal(1):	-1.600060	OutVal(2):	0.162296
T: 0.2600	OutVal(1):	-1.420750	OutVal(2):	0.144271
T: 0.2800	OutVal(1):	-1.269601	OutVal(2):	0.129066
T: 0.3000	OutVal(1):	-1.141679	OutVal(2):	0.116187
T: 0.3200	OutVal(1):	-1.032934	OutVal(2):	0.105229
T: 0.3400	OutVal(1):	-0.940049	OutVal(2):	0.095861
T: 0.3600	OutVal(1):	-0.860299	OutVal(2):	0.087810
T: 0.3800	OutVal(1):	-0.791448	OutVal(2):	0.080852
T: 0.4000	OutVal(1):	-0.731660	OutVal(2):	0.074803

## Вывод

Исходя из результатов работы программы, при достаточно большом шаге интегрирования  $h = 0.01$  метод Рунге-Кутты 4-й степени точности расходится, при этом разница между точным значением и полученным увеличивается. Это приводит к не точному решению системы. При использовании меньшего шага интегрирования  $h = 0.001$  метод Рунге-Кутты 4-й степени точности начинает сходиться. Значения, полученные при шаге интегрирования  $h = 0.001$  получены достаточно точно.

Если оценивать шаг через собственные числа матрицы можно вычислить оптимальную границу шага интегрирования. Выше этой границы метод будет неустойчив, результат некорректен:

$$\begin{pmatrix} -310 - \alpha & -3000 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$(-310 - \alpha) * (-\alpha) = -3000$$

$$310\alpha + \alpha^2 + 3000 = 0$$

$$D = 96100 - 12000 = 84100$$

$$X = \frac{-310 \pm 290}{2}$$

$$X_1 = -300 \quad X_2 = -10$$

$$h = 0.0033$$



Таким образом, при шаге большем чем 0.0033 решение методом Рунге-Кутта будет неустойчивым.