第三章 网格生成

◆ 网格生成方法概论

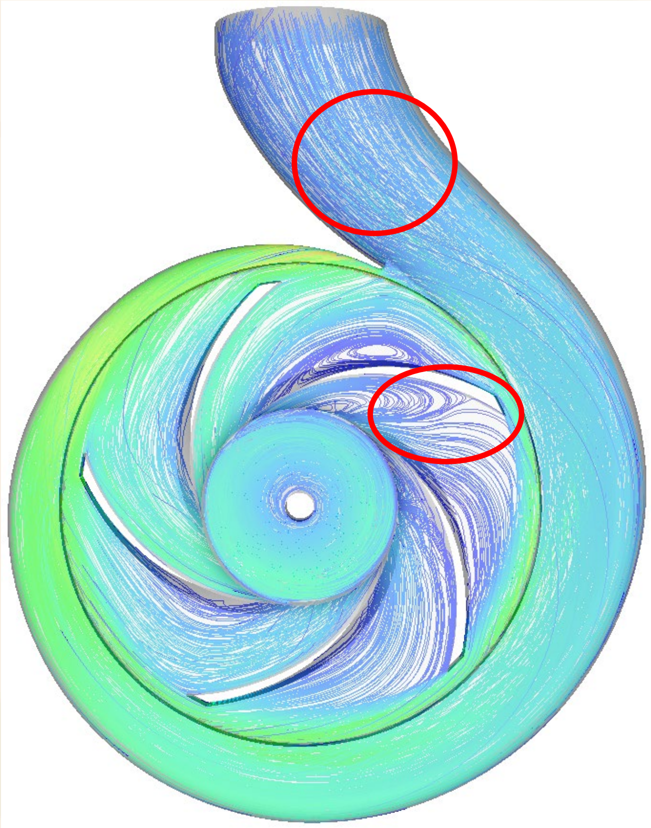
- 重要性

CFD的重要组成部分，影响CFD计算精度；对复杂区域的流动模拟，大约80%的精力是花在网格生成方面

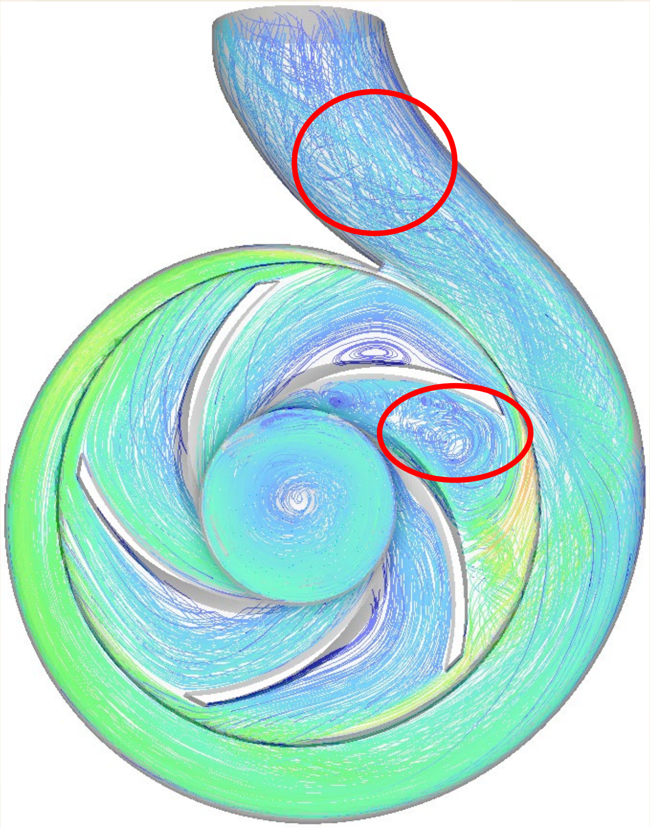
- 国际动态

从1986年召开第一届国际计算流体力学网格生成会议以后，该会议每隔2~3年召开一次，并一直延续至今；网格生成技术已成为计算流体力学、计算传热学等领域学者研究的焦点

◆ 网格生成方法概论

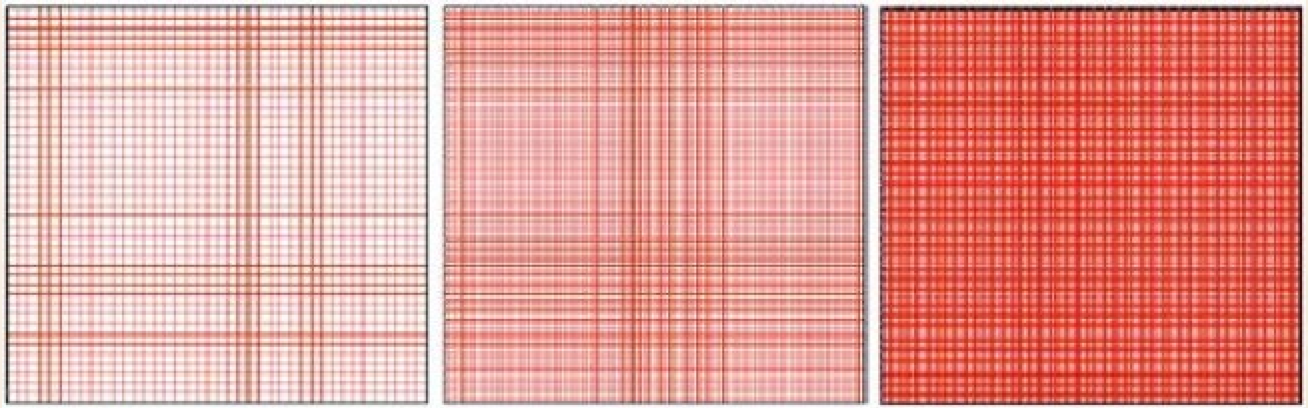


结构化网格

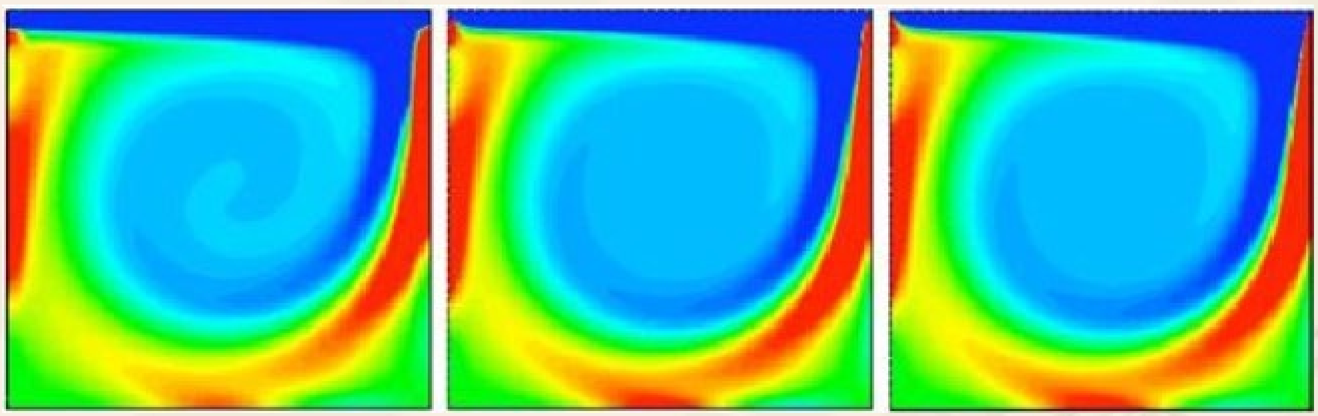


非结构网格

- 从收敛性来看，结构化网格要比非结构化网格容易收敛



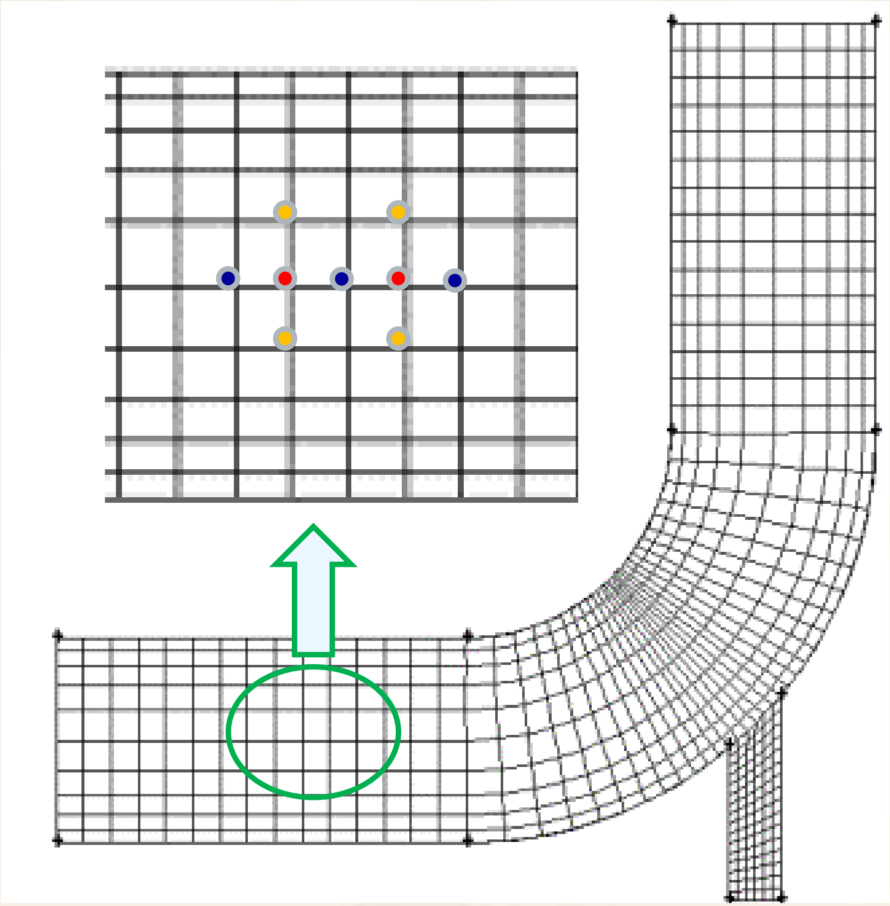
1600网格　　**6400网格**　　**25600网格**

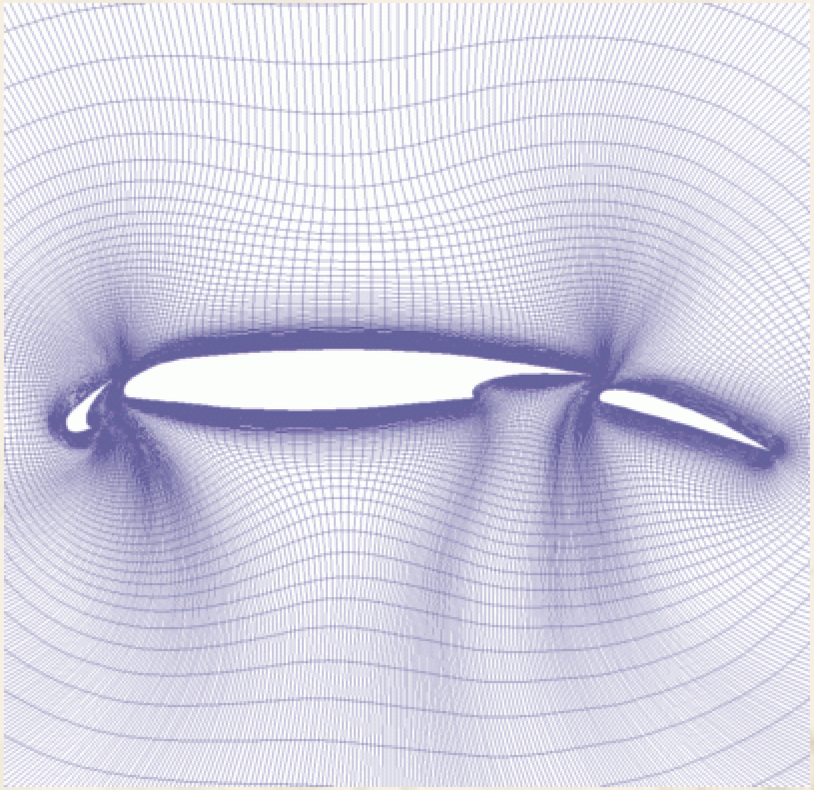


- 同样的网格类型，网格数量对结果会有影响

◆ 网格生成方法概论

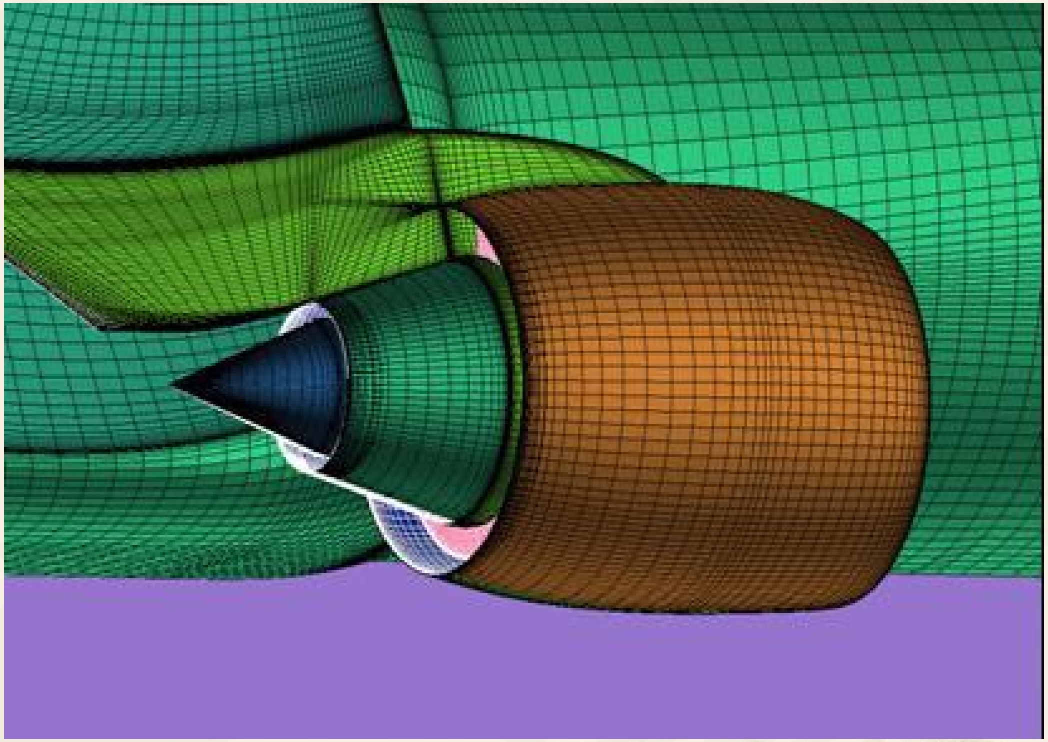
● 结构化网格（ structured grid ）





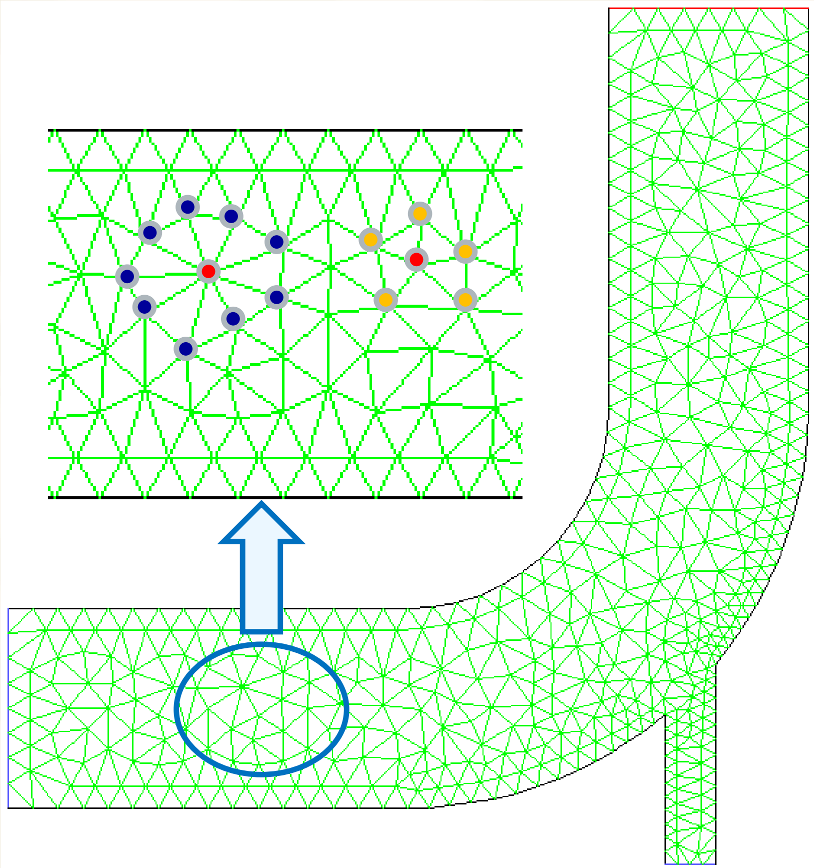
• 网格系统中节点排列有序、每个节点与邻点的关系固定不变

- 块结构化网格（block-structured grid）

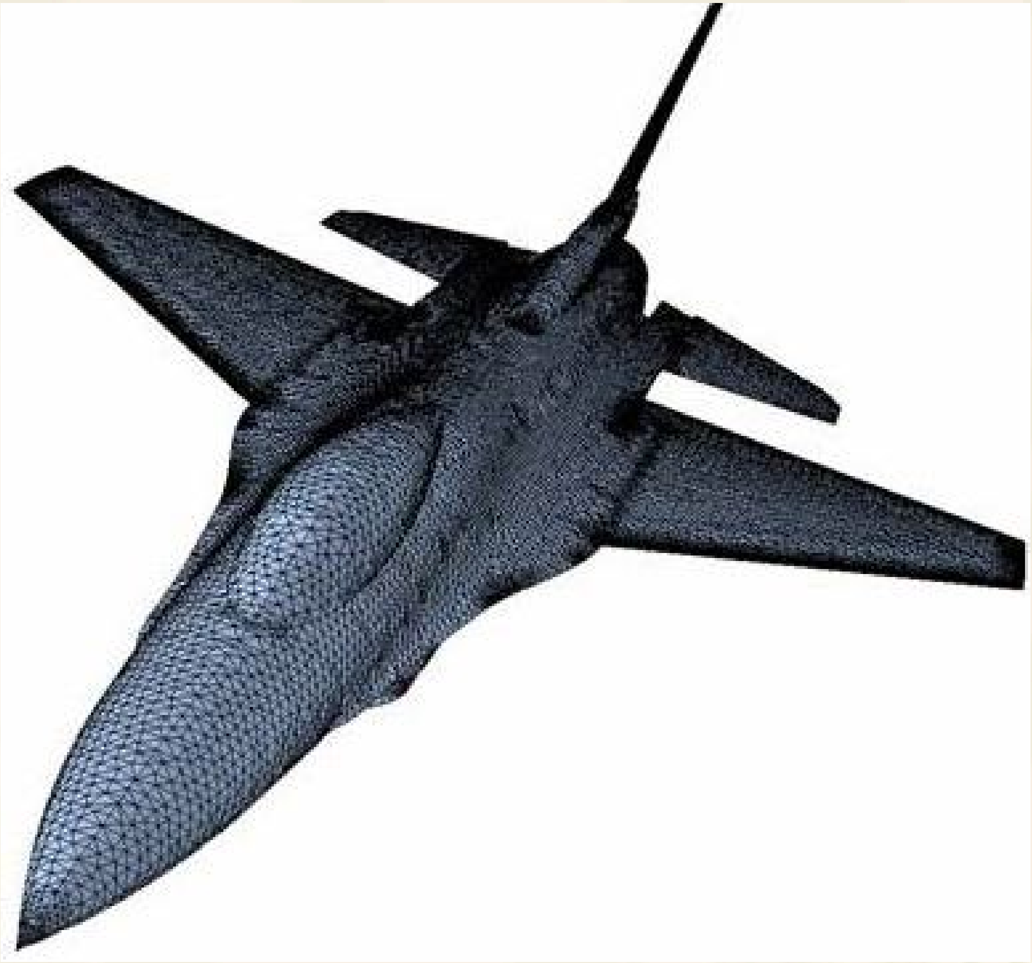


块结构化网格

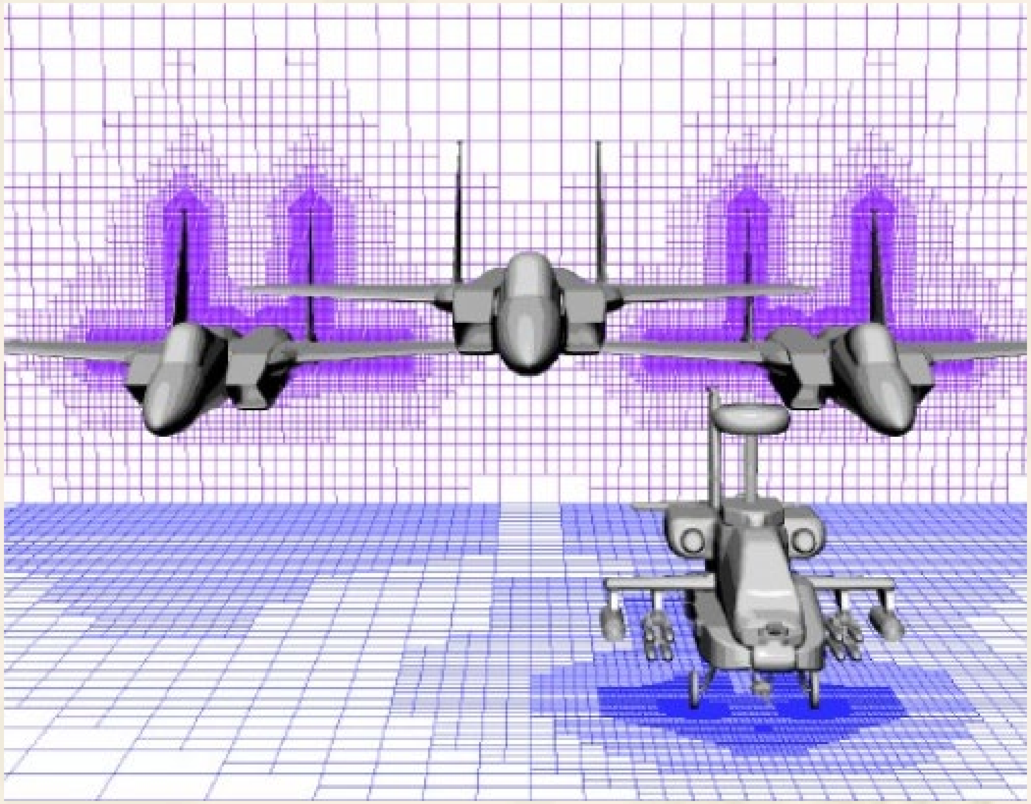
- 非结构化网格（unstructured grid）



- 网格系统中节点编号无一定规则，甚至是完全随意的，每一个节点的邻点个数也不是固定不变的

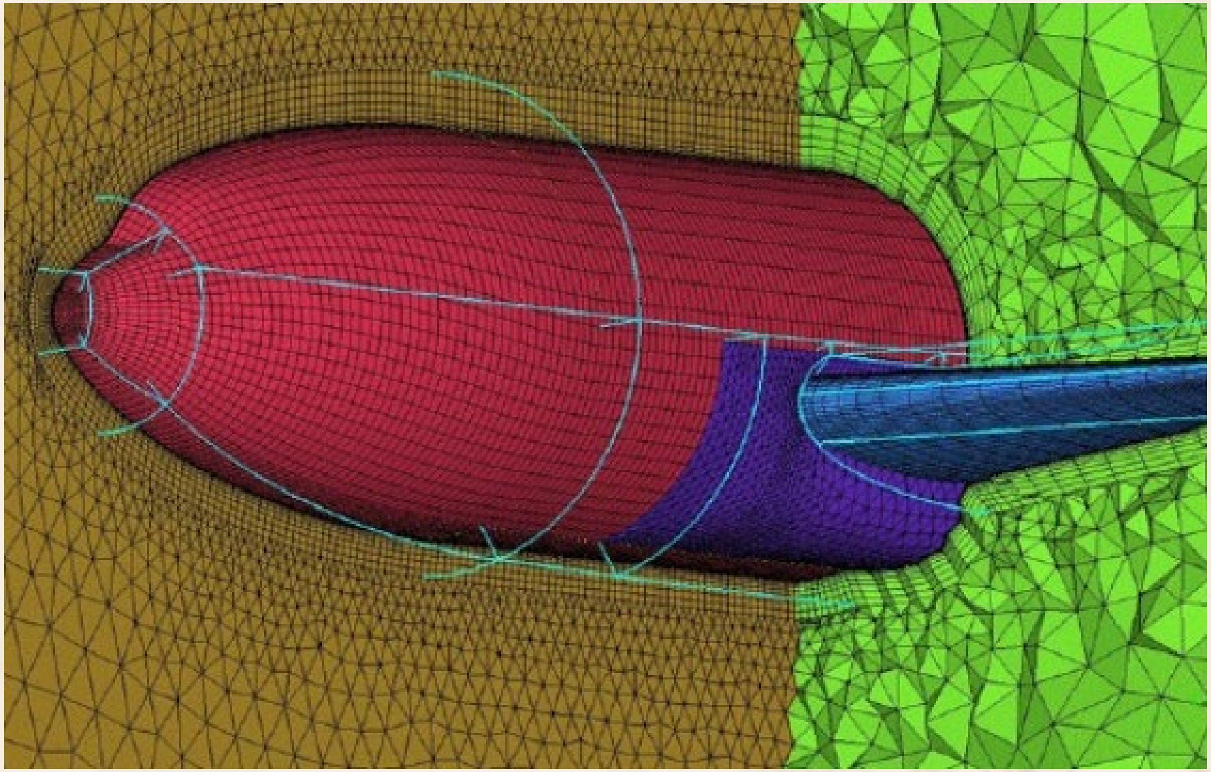


- 非结构化直角坐标法 (unstructured Cartesian grid)



非结构化直角坐标法生成网格

- 混合网格

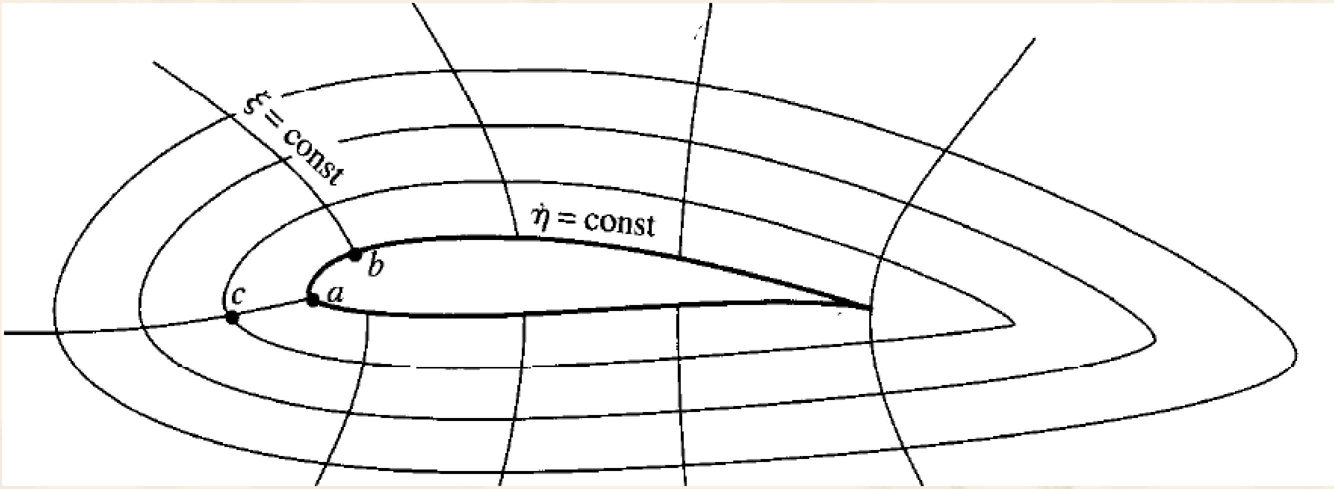


网格生成方法
结构化网格
正交曲线坐标系
贴体网格
保角变换法
代数法
微分方程法
边界规范化方法
双边界法
多面法
无限插值法
对角直角坐标法
椭圆型方程法
双曲型方程法
抛物型方程法
块结构化网格
拼接式
搭接式
非结构化网格
前沿推进法
Delaunay三角形化方法
非结构化直角坐标法
非结构/结构混合网格
自适应网格

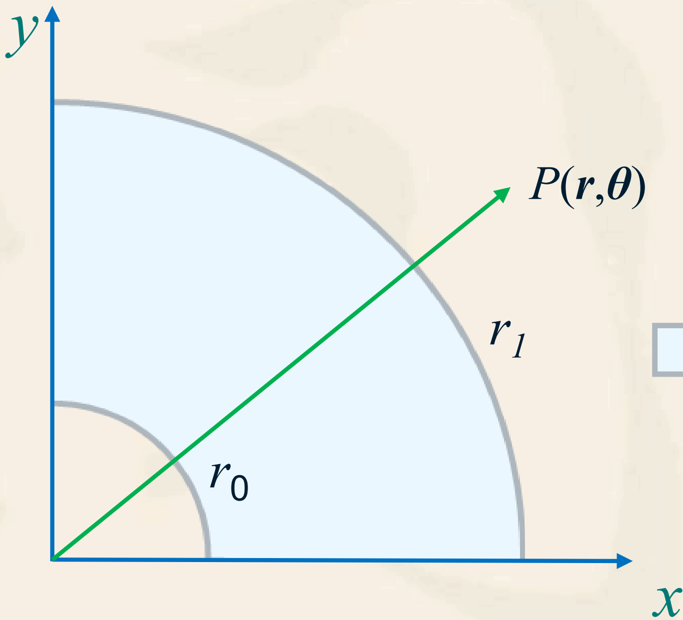
网格生成技术分类

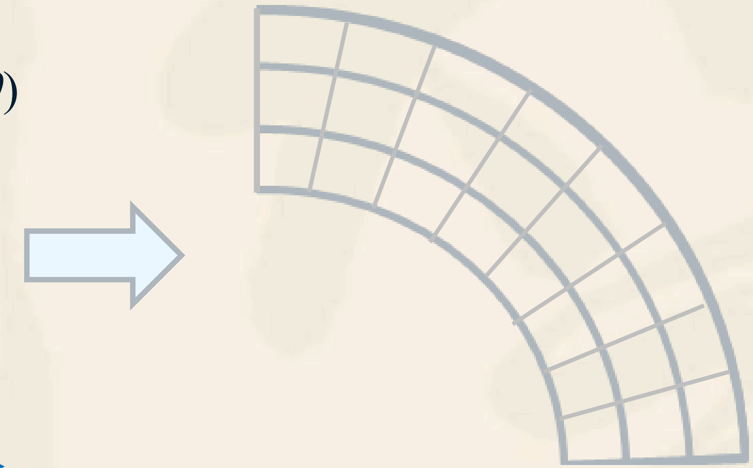
◆ 适体坐标系的基本概念

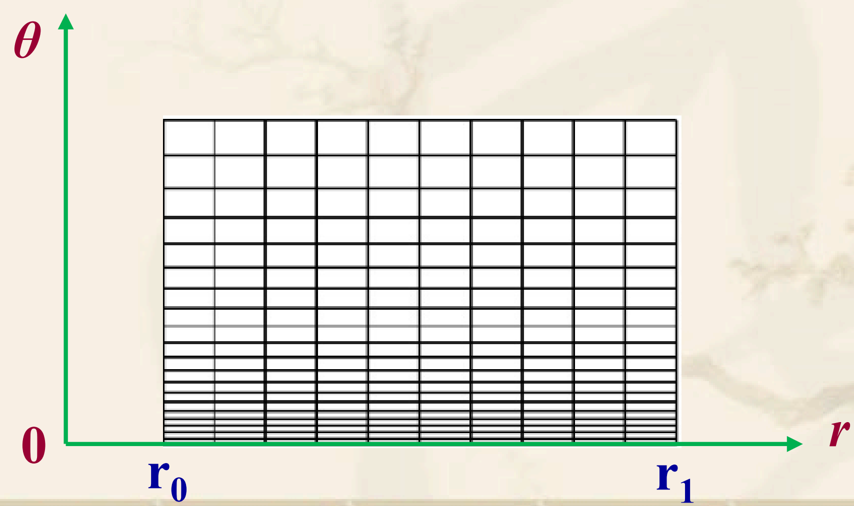
- 各坐标轴与所计算区域的边界一一相符合的坐标体系，称为所计算区域的适体坐标系（**body-fitted coordinates, BFC**），又称贴体坐标、附体坐标



> ➢ 直角坐标系是矩形区域的适体坐标系
>
> ➢ 极坐标系是环扇形区域的适体坐标系 **(有哪些特点?)**

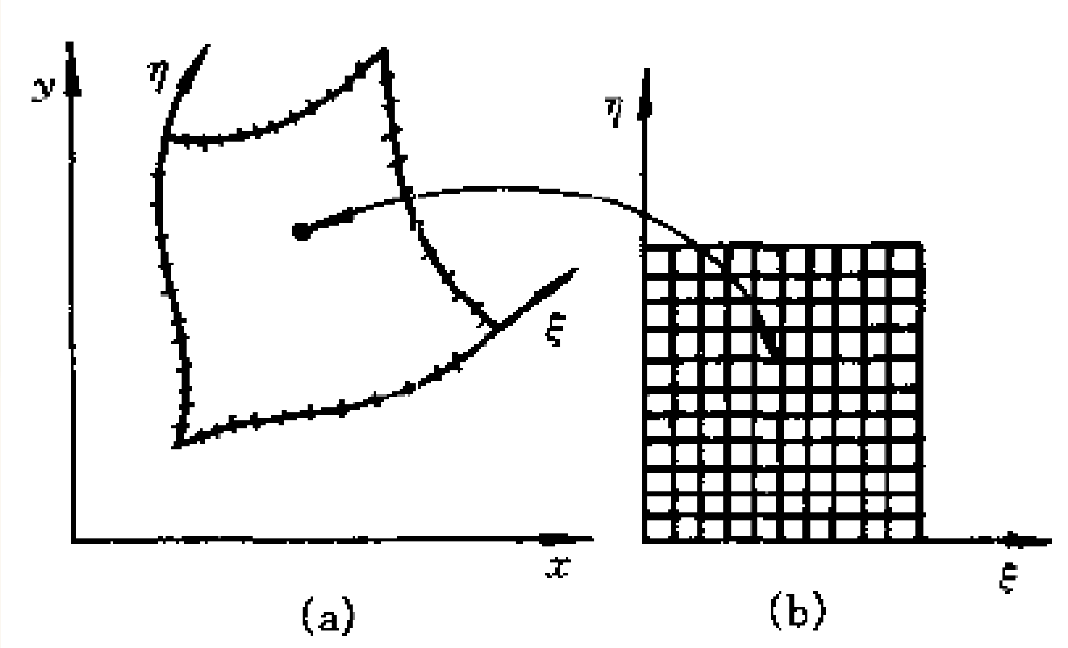






新的坐标系有什么特点?

◆ 适体坐标构造原则



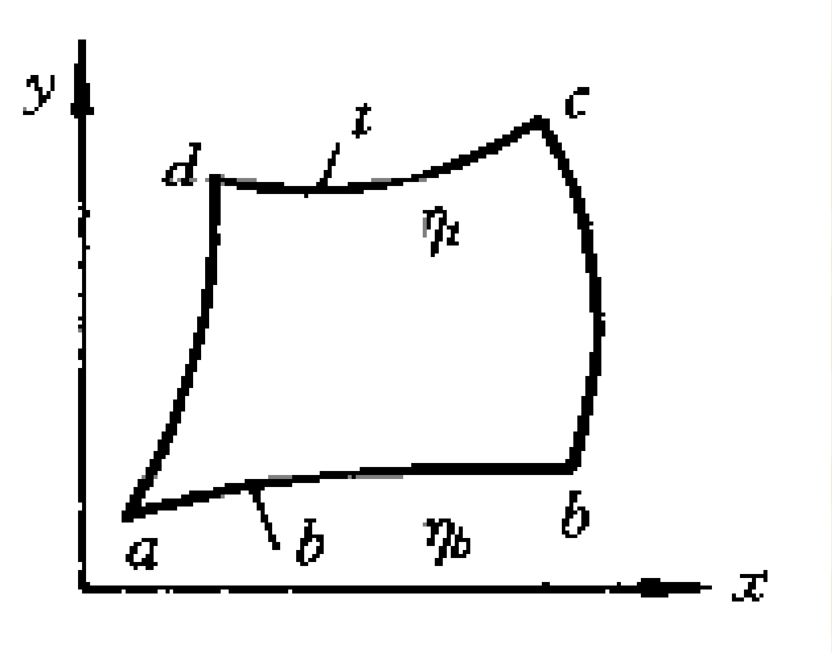
适体坐标示意图

- 在一个边上只能一个坐标单值地发生变化，而另一个坐标则保持为常数；
- 在两条对应边上，同一曲线坐标的最大值与最小值应当对应相等。
- 物理区域内部的网格疏密要易于控制

◆ 生成适体坐标的代数法

- 代数法是指通过一些代数关系式把物理平面上的不规则区域转换成计算平面上矩形区域的方法
  - 边界规范化方法（**boundary normalization**）
  - 双边界法（**two-boundary method**）
  - 无限插值法（**transfinite interpolation, TFI**）
  - 多面法（**multi-surface method**）

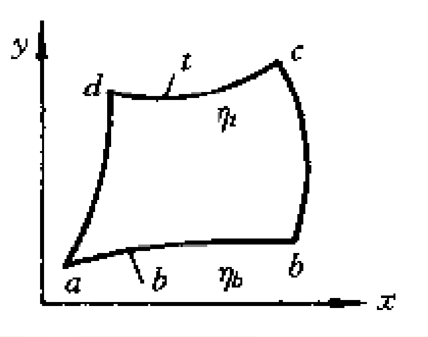
- 双边界法（two-boundary method）



双边界法生成适体坐标区域

- 选定两条不直接相联的边界***ab***, ***cd***, 两个边界上的***x***,***y***仅随**ξ**而变

$$\begin{cases} x_b = x_b(\xi), \ \ y_b = y_b(\xi) \\ x_t = x_t(\xi), \ \ y_t = y_t(\xi) \end{cases}$$



其中，下标***b***，***t***代表底边与顶边

- 为了简便起见，计算平面上的**ξ**，**η**可取在**0～1**之间

- 根据计算平面上**ξ**，**η**的取值，确定物理平面上对应的**x**，**y**值

$$x(\xi,\eta) = x_b(\xi)f_1(\eta) + x_t(\xi)f_2(\eta)$$

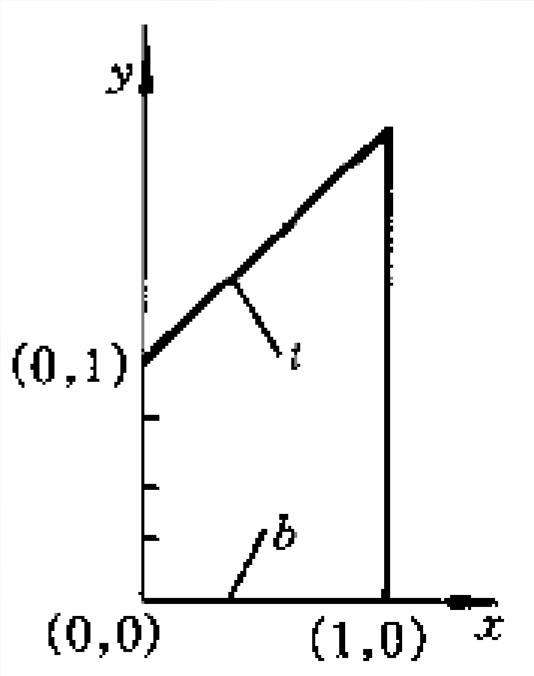
$$y(\xi,\eta) = y_b(\xi)f_1(\eta) + y_t(\xi)f_2(\eta)$$

$$f_1(\eta) = 1 - \eta, f_2(\eta) = \eta$$

- 联接各点生成物理平面的网格线

例题：

- 应用双边法转换图示梯形区域，并画出内部区域网格线

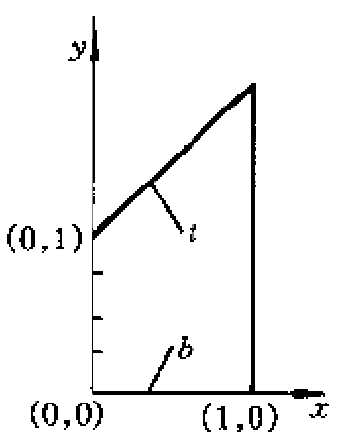


双边法例题

试取：

$$x_b = \xi, \quad x_t = \xi$$

$$y_b = 0, \quad y_t = 1 + \xi$$



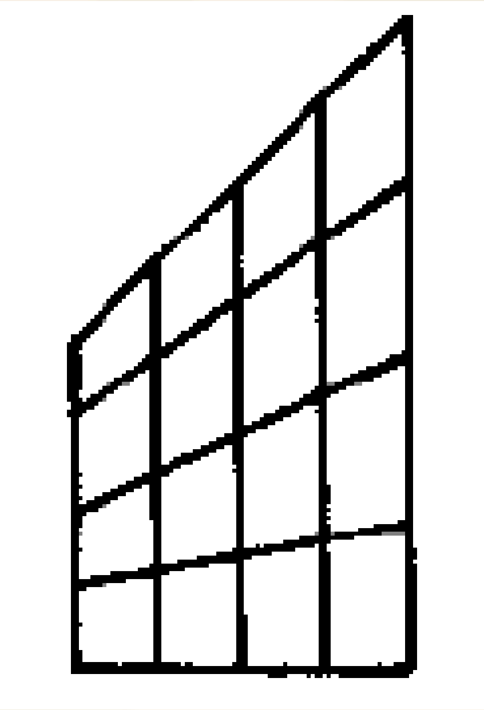
按照变换关系

$$x(\xi,\eta) = x_b(\xi)(1-\eta) + x_t(\xi)\eta = \xi(1-\eta) + \xi\eta = \xi$$

$$y(\xi,\eta) = y_b(\xi)(1-\eta) + y_t(\xi)\eta = (1+\xi)\eta$$

分别取 $\xi = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1; \quad \eta = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$

求出相应的x, y值，联接成网格线

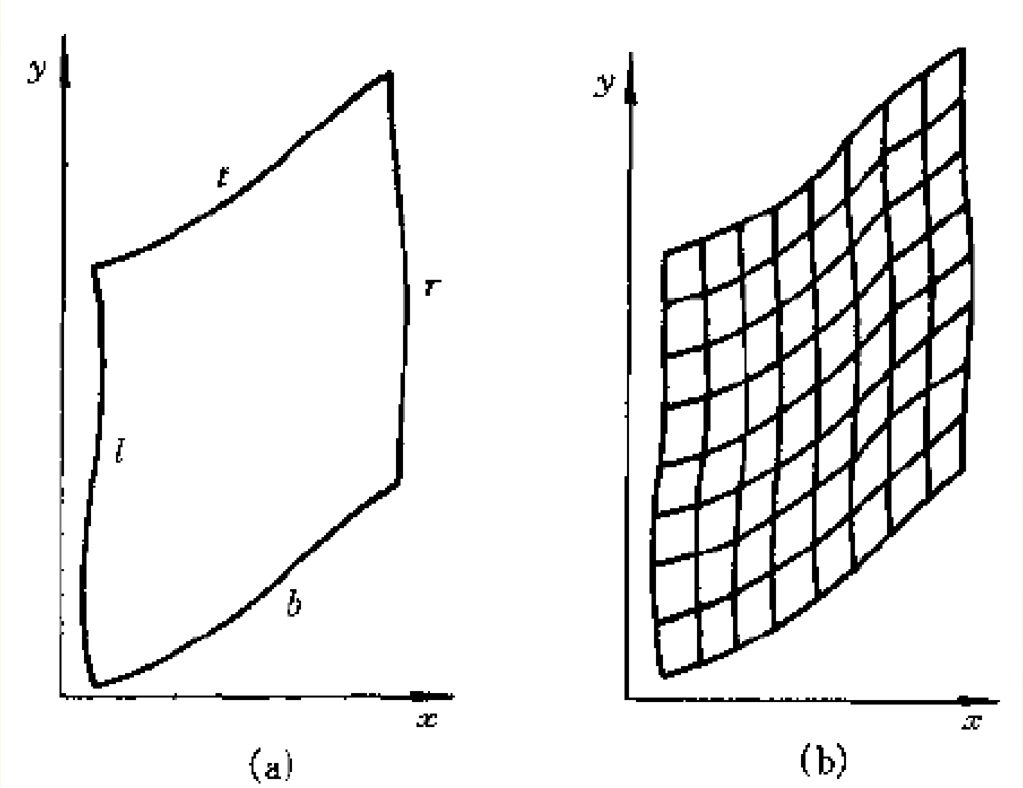


双边法生成网格结果

优点：实施过程简单

缺点：边界上的网格线与边界是不垂直的，影响第二类边界条件的给定

■ 无限插值法（**transfinite interpolation, TFI**）



无限插值方法生成网格示意图

- 在四条不规则的边界上各自规定 (x,y) 与 (ξ,η) 的关系
  - 这种关系可以是**解析的**，也可以是**离散的**对应关系
  - 分别为 $x_b(\xi)$，$y_b(\xi)$，$x_t(\xi)$，$y_t(\xi)$，$x_l(\eta), y_l(\eta)$，$x_r(\eta), y_r(\eta)$，下标 ***b***，***t*** 代表底边与顶边，***l***，***r*** 代表左边和右边
- 通过插值方法得到物理平面上 (x,y) 与计算平面上 (ξ,η) 的关系

$$x(\xi,\eta)=(1-\eta)x_b(\xi)+\eta x_t(\xi)+(1-\xi)x_l(\eta)+\xi x_r(\eta)-[\xi\eta x_t(1)+\xi(1-\eta)x_b(1)+\eta(1-\xi)x_t(0)+(1-\xi)(1-\eta)x_b(0)]$$

$$y(\xi,\eta)=(1-\eta)y_b(\xi)+\eta y_t(\xi)+(1-\xi)y_l(\eta)+\xi y_r(\eta)-[\xi\eta y_t(1)+\xi(1-\eta)y_b(1)+\eta(1-\xi)y_t(0)+(1-\xi)(1-\eta)y_b(0)]$$

优点：实施过程简单、计算量小

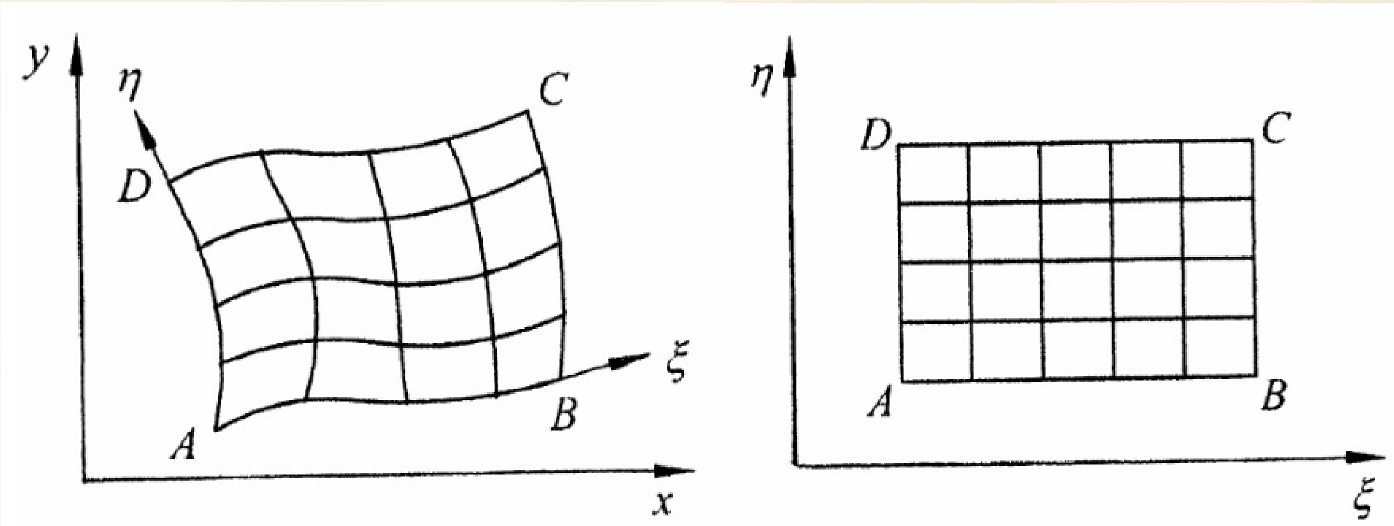
缺点：光滑性差、过于依赖人工

◆ 生成适体坐标的微分方程法 (TTM方法)

- TTM是Thompson、Thames和Martin三个人姓的第一字母

  - 椭圆型偏微分方程
  - 双曲型偏微分方程
  - 抛物型偏微分方程

■ 用椭圆型方程生成网格



椭圆型方程生成网格示意图

物理空间边界 ⟷ 计算空间边界

物理空间内点 ⟷ 计算空间内点

- 已知条件

(1) 计算平面上 ξ,η 方向的节点总数及节点位置。在计算平面上网格总是均匀划分的，一般取 $\Delta\xi=\Delta\eta=1$ 。

(2) 物理平面计算区域上的节点设置。这种节点设置反映出我们对网格疏密布置的要求。

- 需要求解的问题

找出计算平面上求解区域内的一点(ξ,η)与物理平面上一点(x,y)之间的对应关系。

- 问题的实质——计算平面上的边值问题

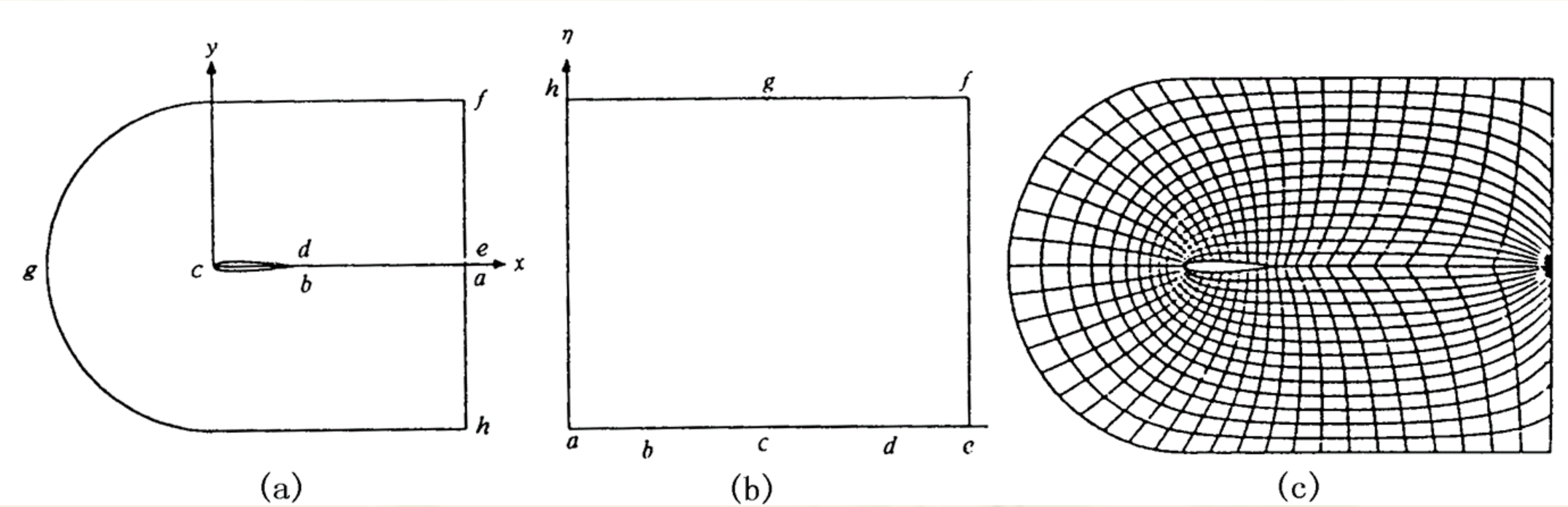
在计算平面的矩形**边界上**规定 $x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)$ 的取值方法，然后通过求解微分方程来确定计算区域内部各点的 (x, y) 值，即找出与计算平面求解区域内各点相应的物理平面上的坐标。

- 方程形式(**Laplace方程**)

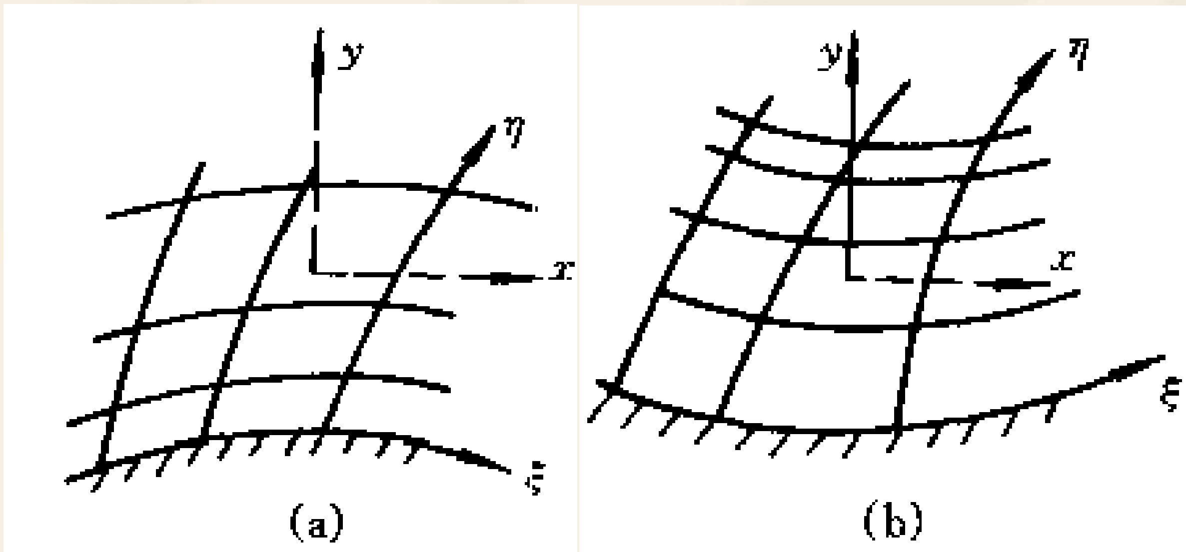
$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\eta\xi} + \gamma x_{\eta\eta} = 0$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\eta\xi} + \gamma y_{\eta\eta} = 0$$

■ Laplace方程生成网格特点



特点：边界网格可控，内部网格分布无法控制，不能保证网格的局部疏密性



- 在凸面附近，随着离壁距离的增加，网格线呈现逐渐变稀的倾向；
- 在凹面附近，随着离壁距离的增加，网格线呈现逐渐变密的倾向；

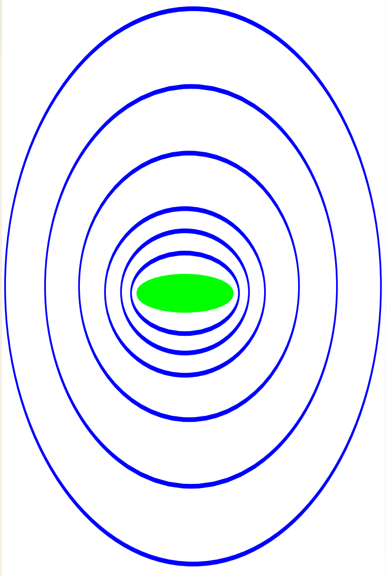
需要有控制网格分布的技术

■ Poisson方程生成网格特点

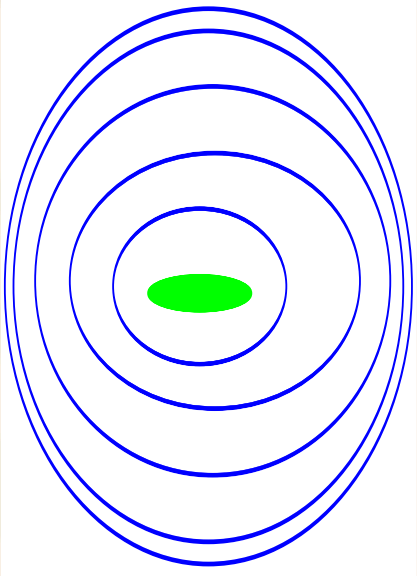
$$\nabla^2 \xi = \xi_{xx} + \xi_{yy} = P$$

$$\nabla^2 \eta = \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q$$

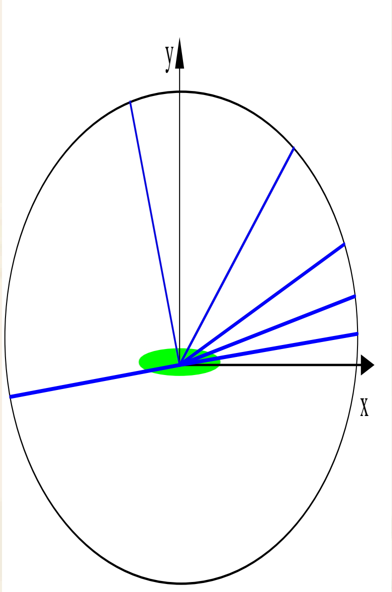
P<0



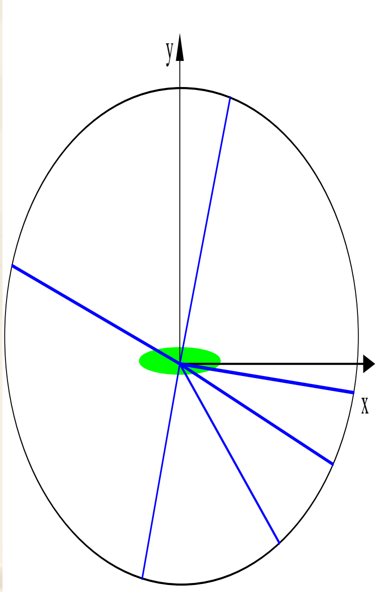
P>0



Q<0



Q>0



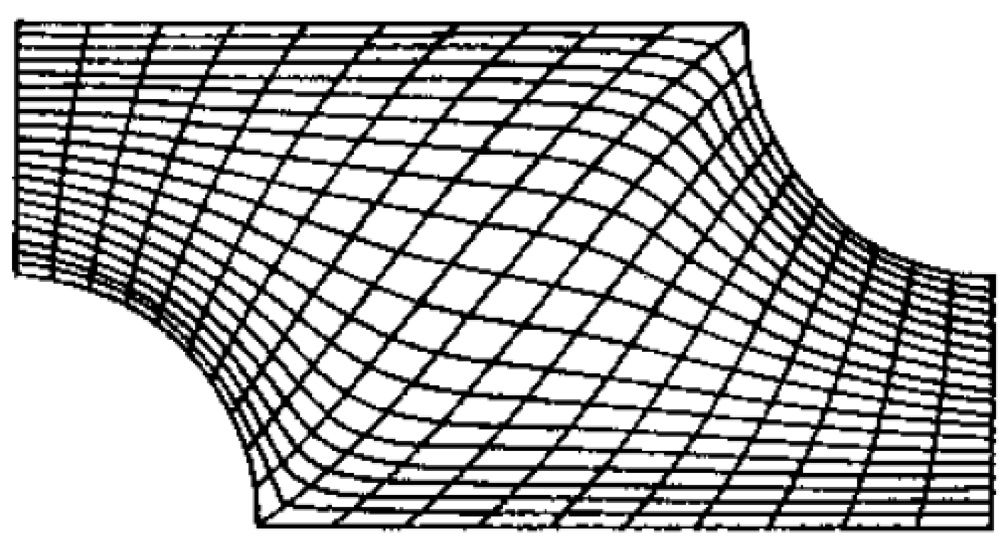
- 源项P、Q能够控制网格走势

■ Poisson方程生成网格特点

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\eta\xi} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2(Px_\xi + Qx_\eta)$$

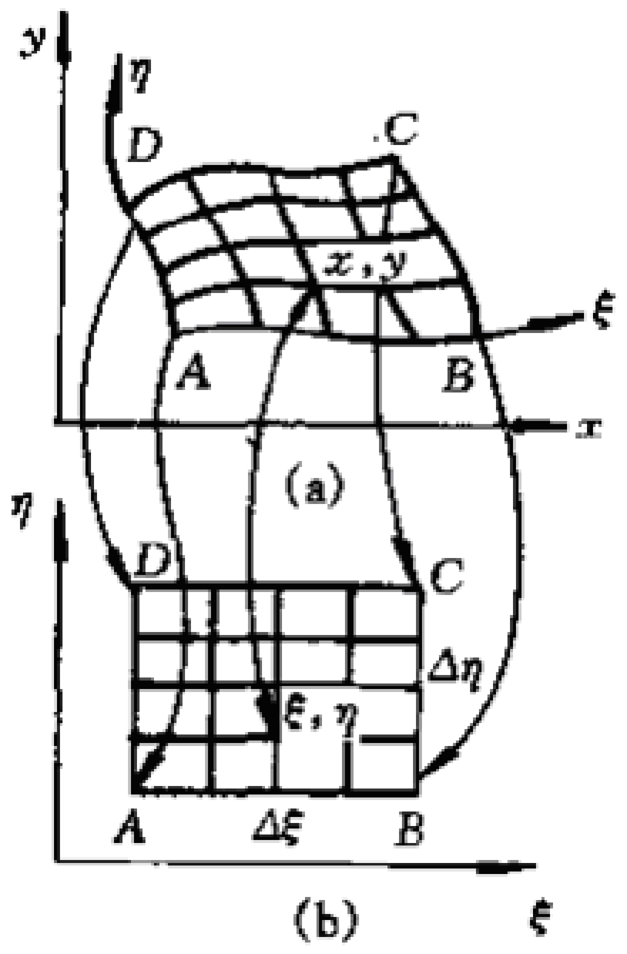
$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\eta\xi} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2(Py_\xi + Qy_\eta)$$

P, Q是用来调节区域内网格分布及正交性的，称为源函数(source function)或控制函数(control function)



➢ 边界上网格的疏密和内部网格的正交性已明显改善

◆ 控制方程的转化和离散化



转换关系示意图

- 链式关系

$$\frac{\partial}{\partial x}=\xi_x\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial}{\partial \eta}+\zeta_x\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\xi_y\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial}{\partial \eta}+\zeta_y\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\xi_z\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_z\frac{\partial}{\partial \eta}+\zeta_z\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

其中

$$\xi_x=\frac{\partial \xi}{\partial x},\quad \eta_x=\frac{\partial \eta}{\partial x},\quad \zeta_x=\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

……

- 坐标变换的测度关系

$$\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 测度表达式为

$$\xi_x=\frac{1}{J}\left(y_\eta z_\zeta-y_\zeta z_\eta\right)$$

$$\eta_x=\frac{1}{J}\left(z_\eta x_\zeta-z_\zeta x_\eta\right)$$

$$\zeta_x=\frac{1}{J}\left(x_\eta y_\zeta-x_\zeta y_\eta\right)$$

$$J=\begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{vmatrix}$$

。。。。。。

- 在计算区域中网格离散时，取等分网格，或者干脆取

$$\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$$

$$\left(x_\xi\right)_{ijk} = \frac{x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}}{2\Delta\xi} = \frac{x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}}{2}$$

$$\left(x_\eta\right)_{ijk} = \frac{x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}}{2\Delta\eta} = \frac{x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}}{2}$$

。。。。。。

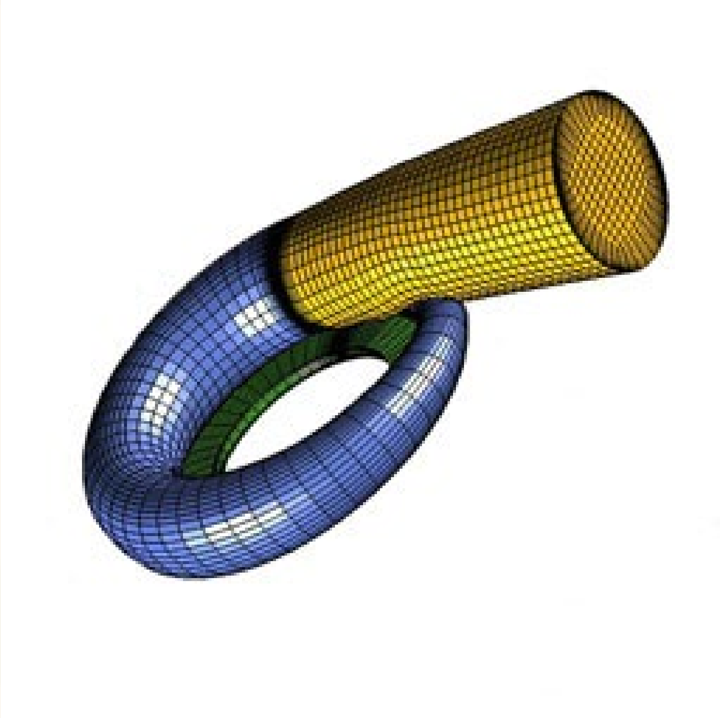
- 当物理区域中的任意曲线网格划分以后，上述偏导数可以确定

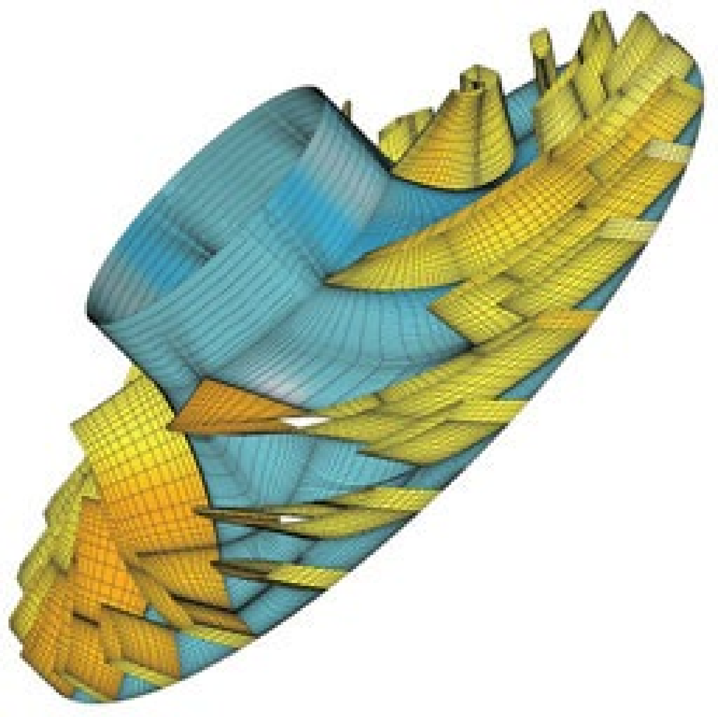
$$\nabla\varphi = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(J\nabla\xi_i\varphi\right)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(J\xi_{i,j}u_j\right)$$

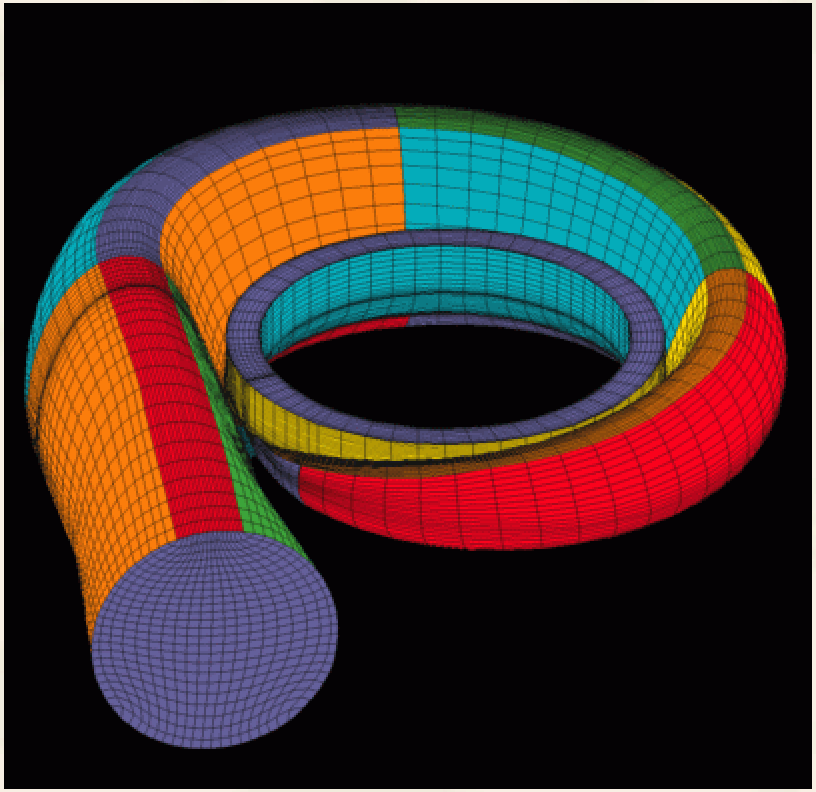
◆ 结构化网格生成软件介绍

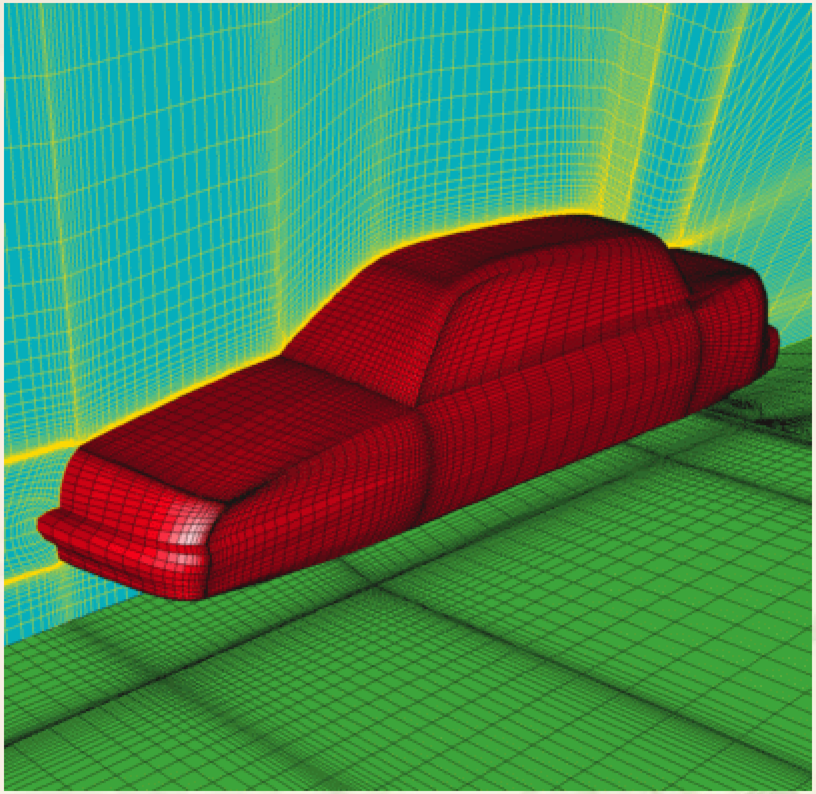
- **TrueGrid** (www.xyzsa.com)



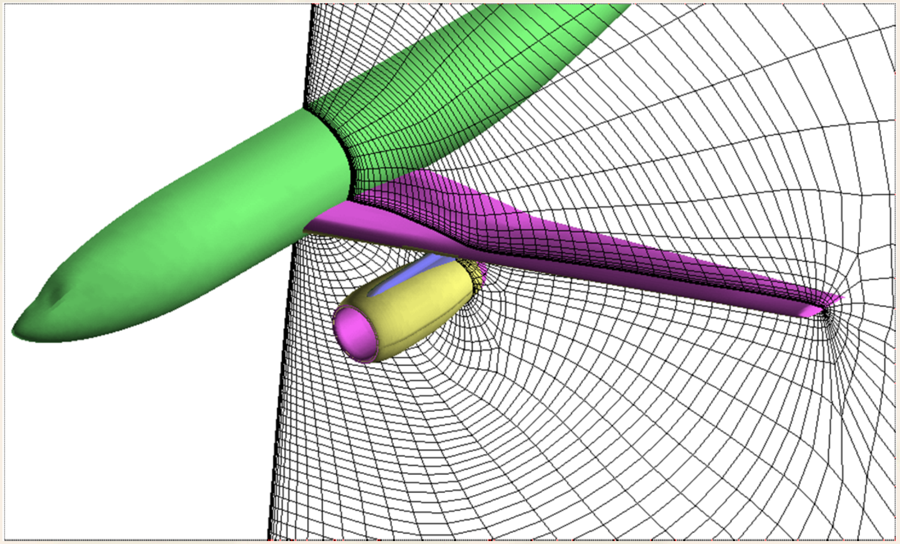


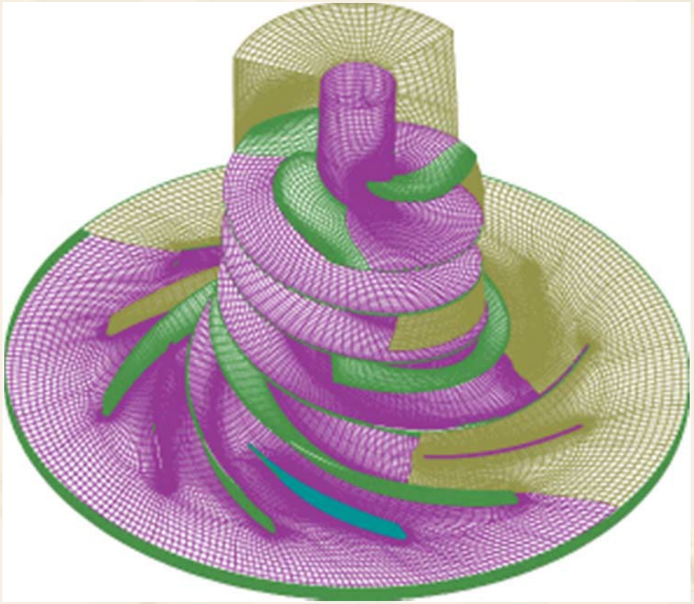
- **GridGen** (www.pointwise.com)





- **GridPro** (www.gridpro.cn)





■ 参考文献

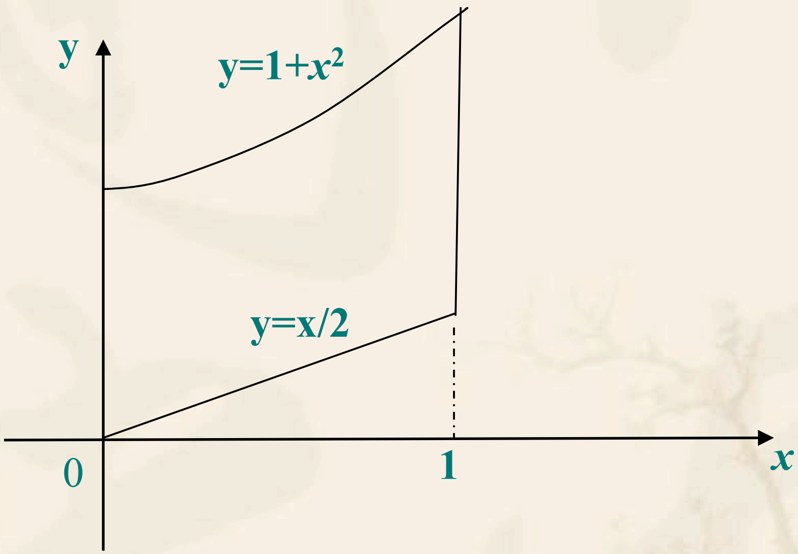
- ✓ 陶文铨. 数值传热学，西安交通大学出版社，2001。

- ✓ Joe F. Thompson, Z. U. A. Warsi and C. W. Mastin. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications，Publisher: North Holland，1985。

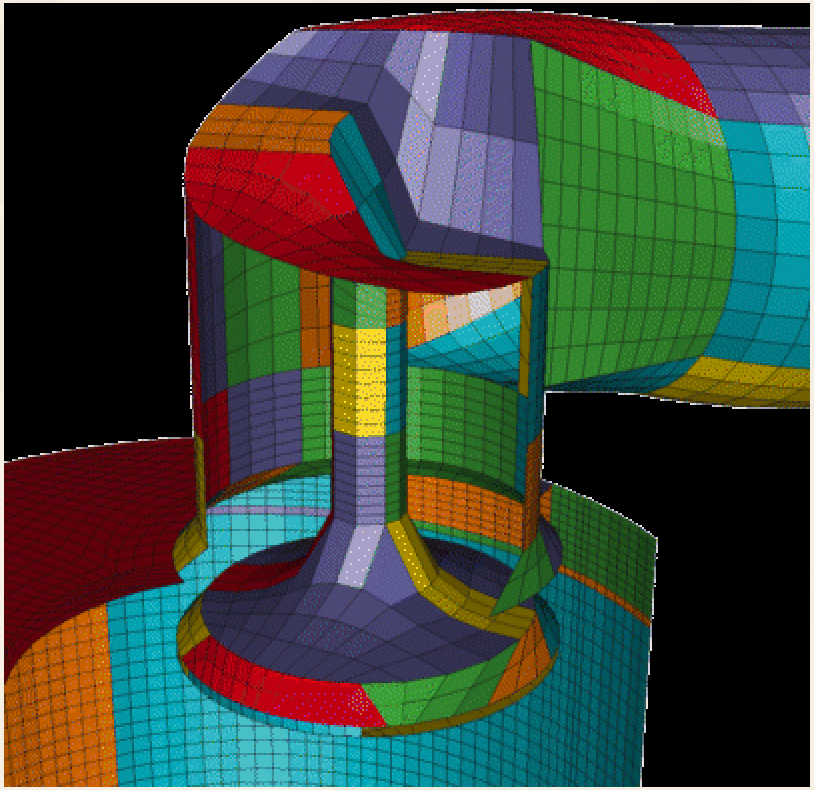
- ✓ John D. Anderson. Computational Fluid Dynamics: The Basics and Applications. McGraw Hill, 1995.

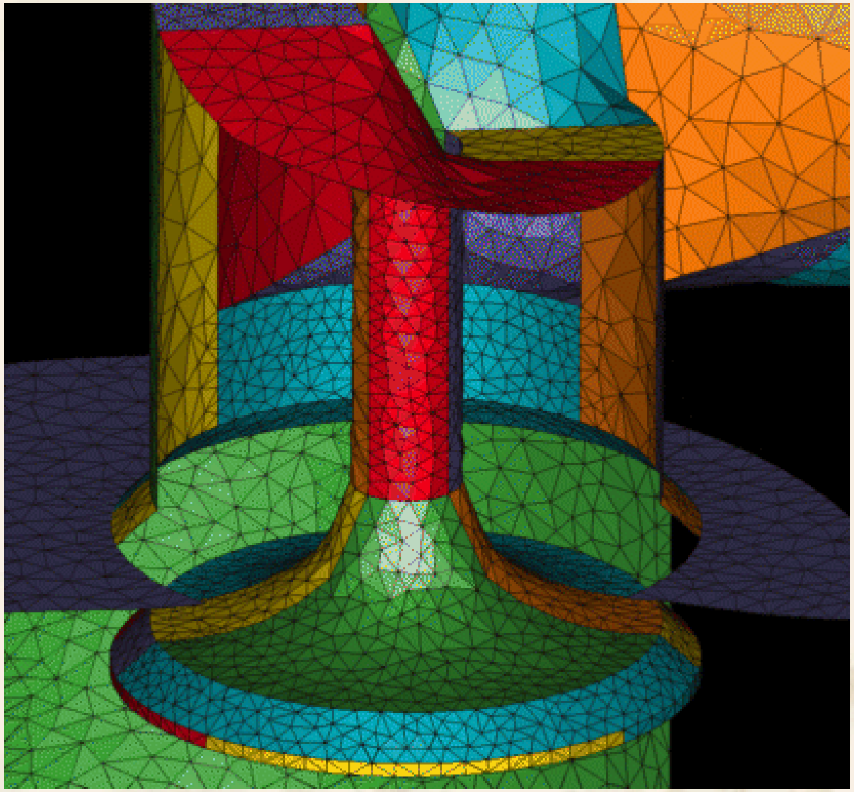
■ 课后作业

采用双边界法生成图示区域的网格(每个方向至少有两条内部网格线, 要求写出详细步骤,并画出图)



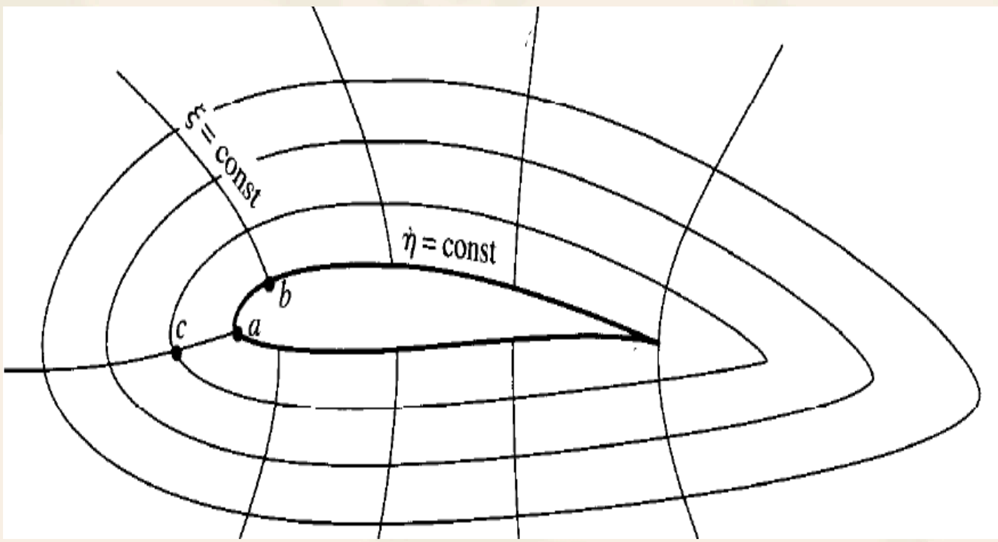
◆ 非结构化网格概述



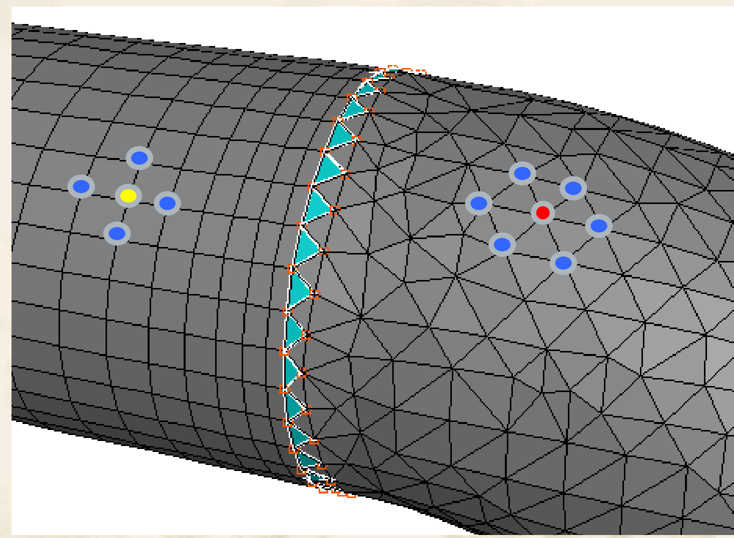


结构化与非结构网格比较

- 非结构化网格特点
  - 网格系统中节点的编号并无一定规则
  - 每一个节点的邻点个数也不是固定不变的



结构网格示例



混合网格示例

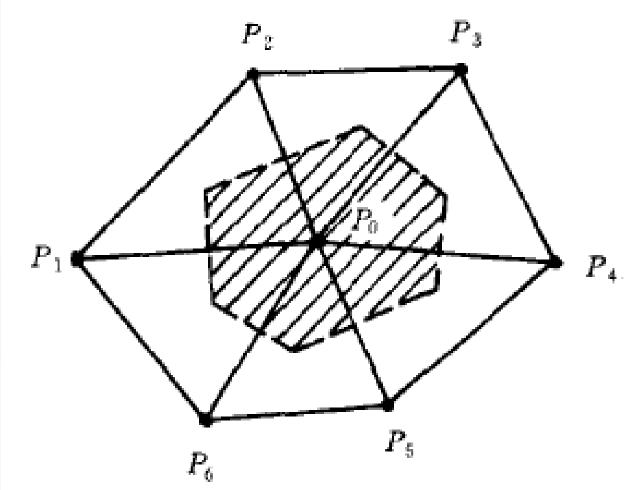
- 非结构化网格生成方法分类
  - 前沿推进法（advancing front method）
  - Delaunay 三角形化方法（Delaunay triangulation）
  - 其它方法

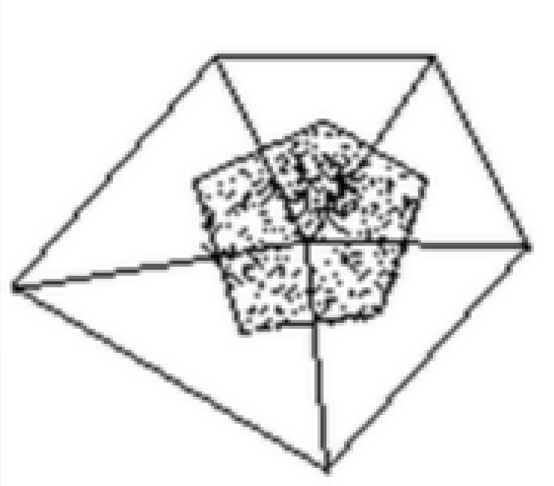
- 节点设置方法分类

➢ 单元顶点法（cell vortex）

- 以每个单元的三个顶点作为节点，每一个节点的控制容积由共享这一顶点若干个三角形的顶点部分组成

- 图中各条虚线是各三角形的中心与两三角形公共边的中点的连线，打阴影部分即为点 P_0 的控制容积，而邻点则为$P_1 \sim P_6$

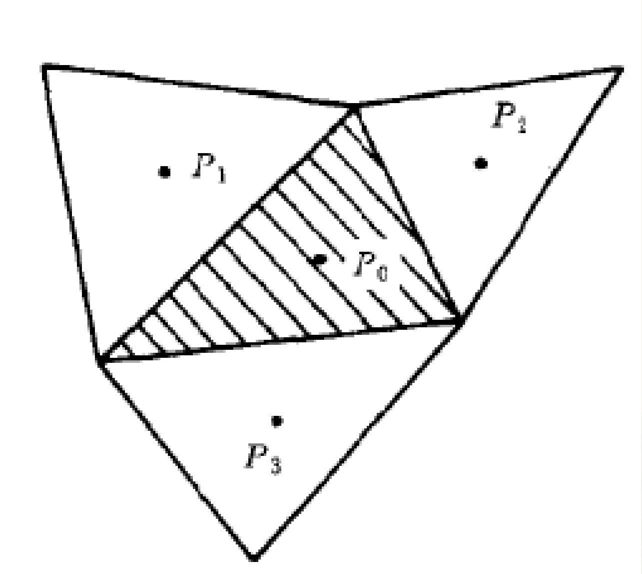




单元顶点法示意图

单元中心法（cell centered）

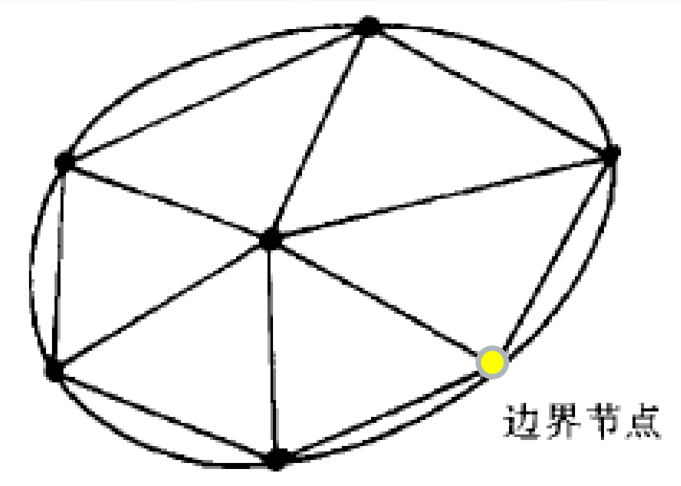
- 每个单元的中心为节点，因而该单元就是该节点所代表的控制容积



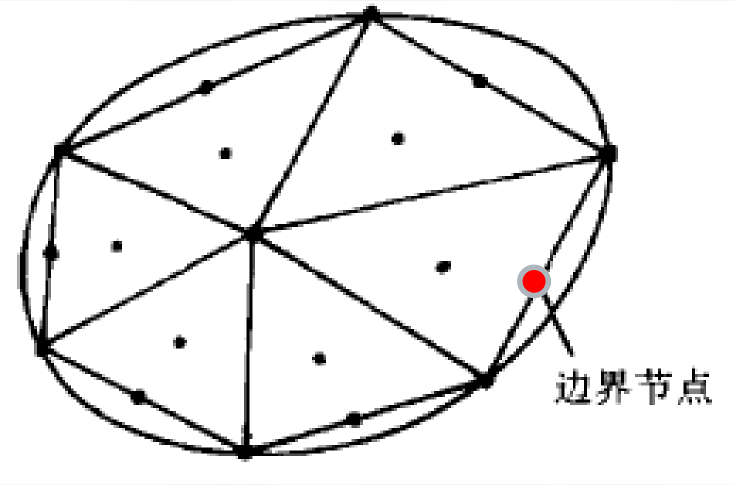
单元中心法示意图

- 两种节点布置方法的区别

  - 边界节点位置不同



单元顶点法



单元中心法

- 单元顶点法中位于边界上的三角形顶点即为计算节点，易于处理第一类边界条件
- 单元中心法边界节点取在与边界相交的这一条边的中点，对于处理第二类边界条件比较方便

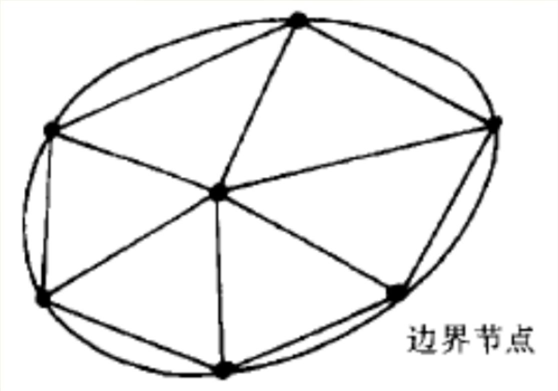
- 方程个数和邻点数目不同

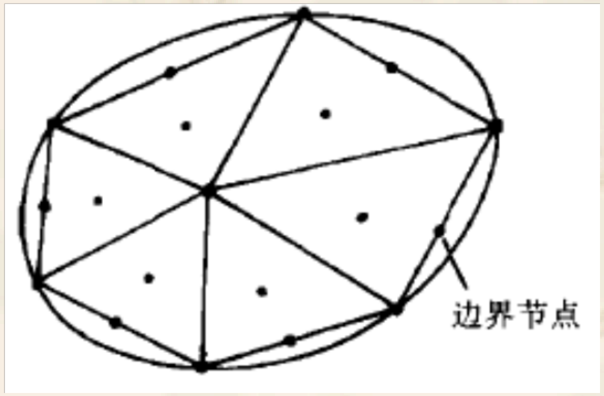
单元中心法：内部节点个数和三角形单元相同；每一个节点只有三个邻点。

单元顶点法：内部节点个数小于三角形个数（多个三角形只有一个内部节点），每个顶点的邻点个数多于单元中心法（每个顶点有多个邻点）。

- 数值特性不同

  - 单元中心法编程与计算比较方便；
  - 网格非均匀时，单元顶点法离散误差比较小(有争议)。





- 非结构化网格生成的流程

给定求解区域边界上的网格点位置

↓

向区域内部加点，并与已有的邻点之间组成三角形

↓

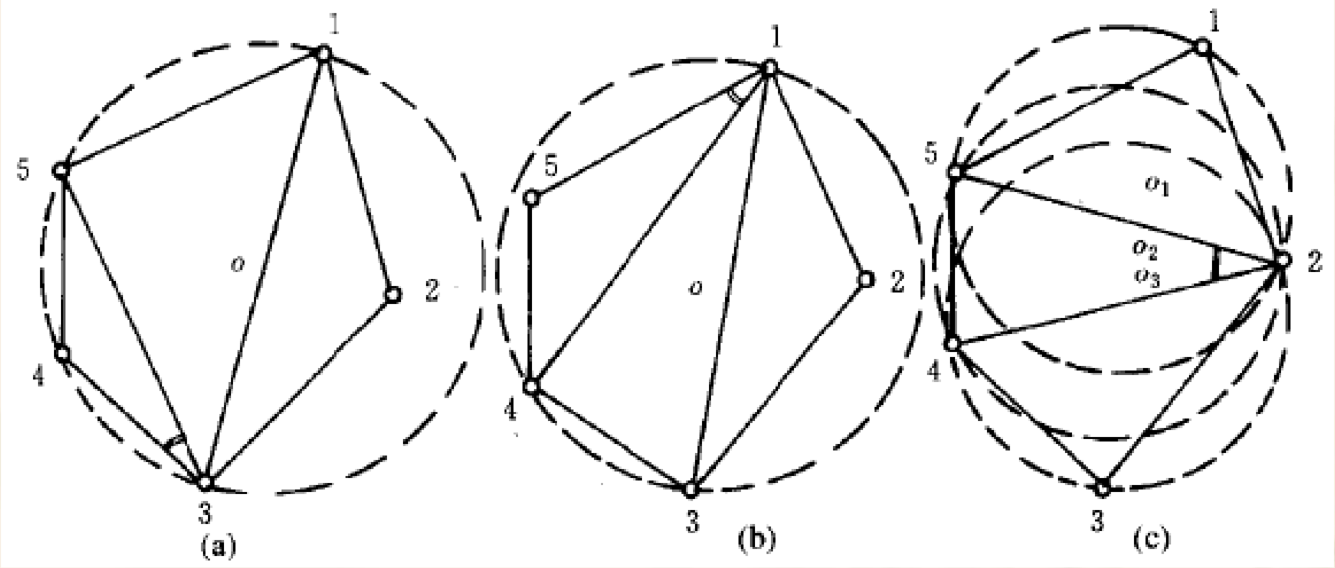
进行光顺化处理

↓

输出网格信息

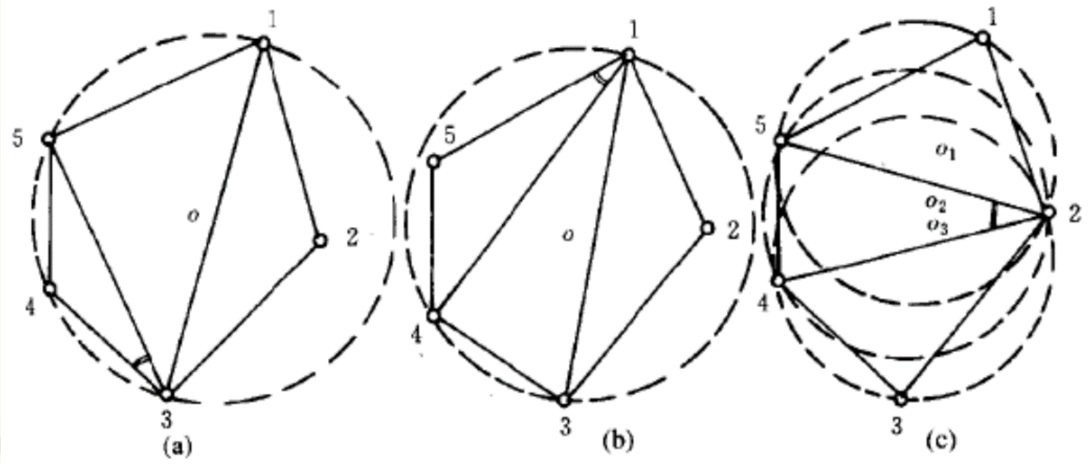
◆ Delaunay三角形化方法的实施

- 判断三角形网格质量的标准：各个三角形都尽可能接近正三角形，以减少离散过程中由于网格不均匀而引入的额外误差



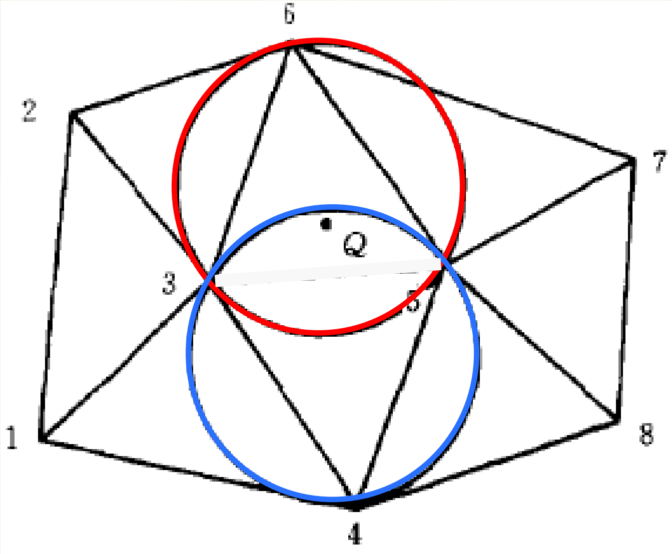
不同三角形联接方法举例

- **Delaunay三角形化的特点**
  - 所形成的三角形互不重叠；
  - 所形成的三角形可以覆盖整个平面；
  - 每一个点均不位于不包含该点的三角形的外接圆内（circle准则）
  - 所形成三角形边长的均匀性最好，所形成的各三角形中的最小角对给定的这一组点是各种联接方案中的最大者，这一结果是唯一的（最大最小角准则）。



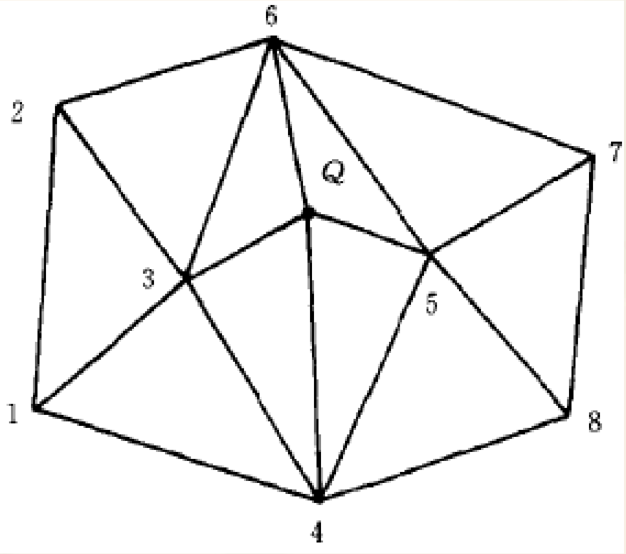
◆ Delaunay三角形化方法实施的过程

假设：我们已经将平面上一组给定点中的若干个点联接成了Delaunay三角形，研究任意一个未被联接的点，如何将它与已联接的点联接起来，组成新的Delaunay三角形。



Delaunay三角形化的实施过程

- 对每一个联接的三角形作出其外接圆；
- 找出外接圆包含Q点在内的所有三角形，图中为△345和△356
- 消去外接圆包含Q点的三角形的公共边，形成所谓Delaunay空腔，图中四边形4563

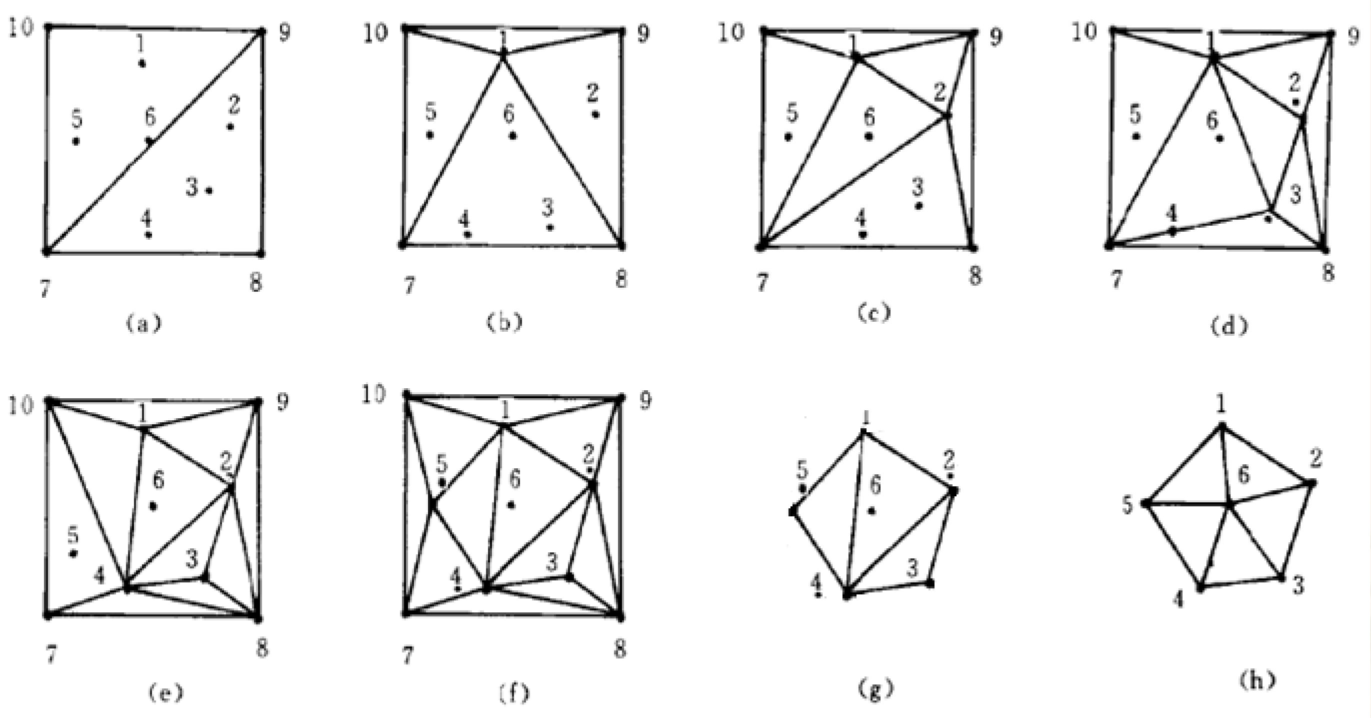


- 联接Q点及Delaunay空腔的各个顶点，就构成了一组新的Delaunay三角形

- Delaunay三角形化方法面临的两个问题
  - 如何自动地向求解区域加点，使生成的网格能满足要求；
  - 生成三角形的边可能与求解区域的边界不匹配，即求解区域的边界可能并不是Delaunay三角形的边，这称为边界匹配问题（boundary conforming）

- 初始三角形化方法

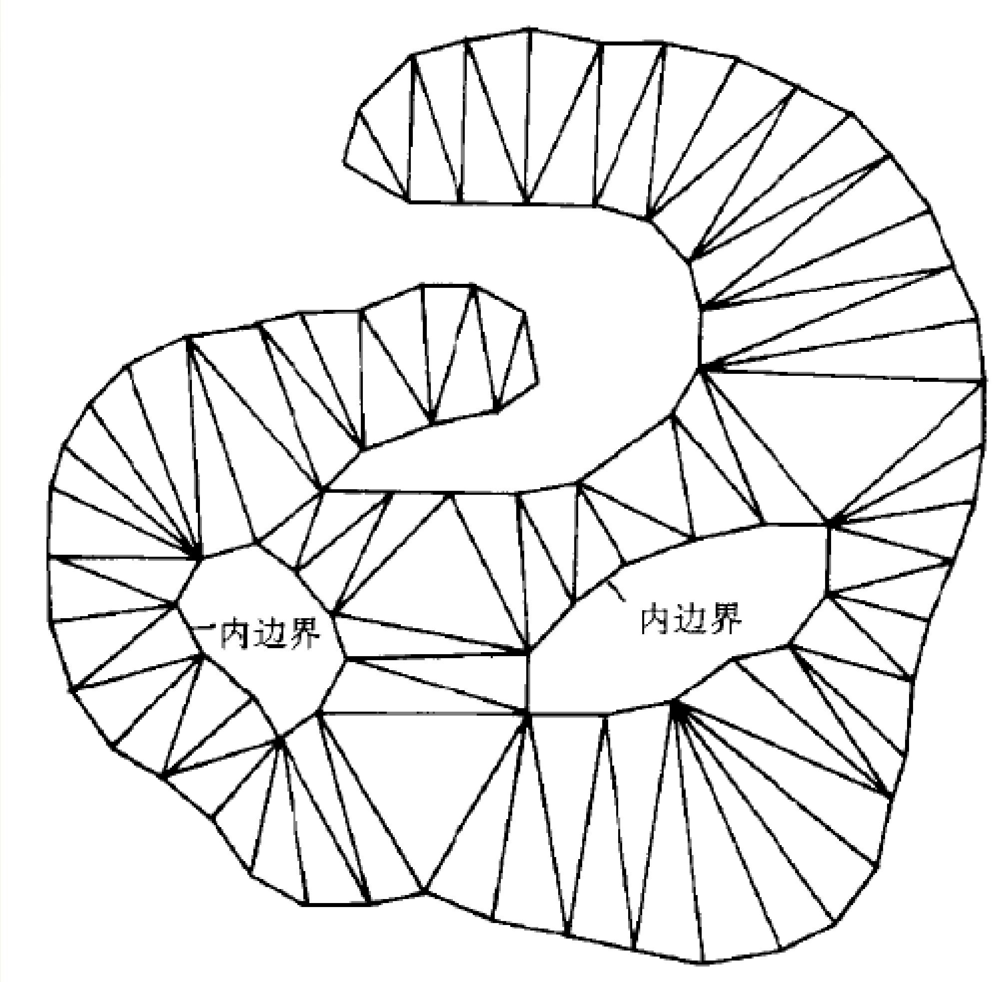
基本思想：先将给定的求解区域边界上的一系列点都作为一组初始的Delaunay三角形的顶点，形成一组很粗但能满足Delaunay三角形要求的网格，然后再向求解区域内加点。



初始化三角形生成方法

- 初始化Delaunay三角形的形成过程

  - 包围该求解区域的各边界点做一个辅助正四边形及两个三角形△7910，△789，显然，这两个三角形为Delaunay三角形（图a）
  - 首先考虑节点1，它位于△7910及△789外接圆内；
  - 消去 $\overline{79}$ 线，连接点1与四个顶点（图b）；
  - 考虑节点2，它位于△178及△189外接圆内（图b）；
  - 消去 $\overline{18}$ 线，连接2与四个顶点（图c）；
  - 采用同样的方法依次考虑点3、4、5，形成图f 所示的情形；
  - 将所有重心不在求解区域内的三角形删去，形成图g中△124、△234、△145三个初始化Delaunay三角形；
  - 考虑区域内部点6，形成图h所示情形。



复杂区域初始化三角形示例

◆ Delaunay三角形化方法的实施

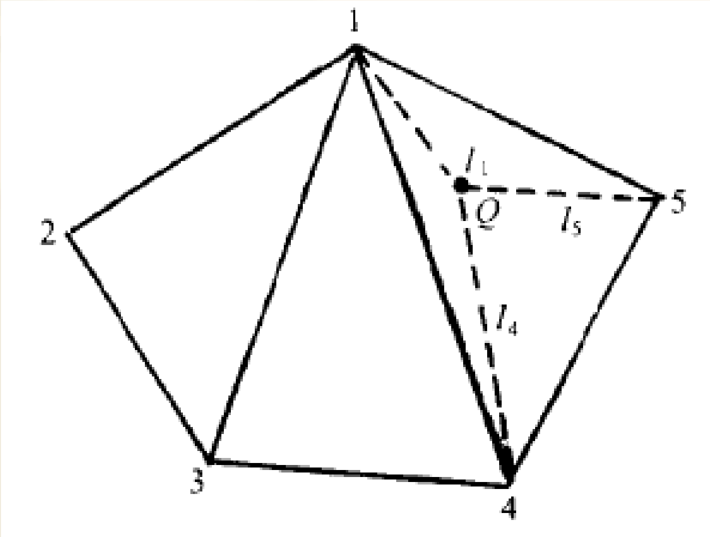
- 向初始化的Delaunay三角形内的加点过程有三个基本要求
  - 过程能自动进行，即所加入点的位置的选择有一定的规则可依据，按照这种规则自动完成，无需人工干预
  - 内部点的生成能将边界上已经设定的网格点疏密程度光滑地传递到求解区域内部；
  - 能方便地控制区域内某点（或某一条线）附近地网格的疏密。

◆ 两个几何参数

- 长度标尺（**length scale**）

边界上网格点的长度尺度：该点到边界上相邻两网格点的距离的平均值的 $\sqrt{3}/2$ 倍。

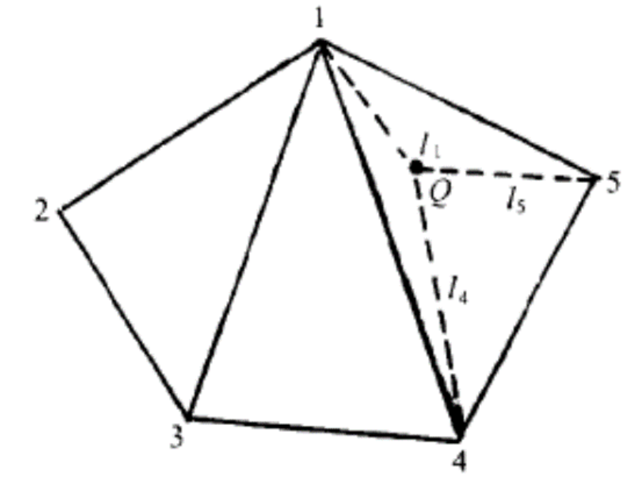
内部网格点的长度尺度：按照倒数原则由边界上的网格点的长度标尺插值而得



内部长度标尺的确定

设Q点是要插入到图中△145中的一点，则Q点的长度标尺表示为

$$L(Q)=\frac{L(1)/l_1+L(4)/l_4+L(5)/l_5}{1/l_1+1/l_4+1/l_5}$$



$L(1),L(4),L(5)$ 是边界网格点的长度标尺；

l_1,l_4,l_5 是Q点到三顶点的距离

参数的意义:

- ❖ 边界网格点的长度尺度表示边界上网格疏密的程度，
- ❖ 内部网格点长度尺度的倒数原则使边界上给定的网格疏密程度光滑传递到内部

- 三角形外接圆无量纲半径（**dimensionless circumcircle radius**）

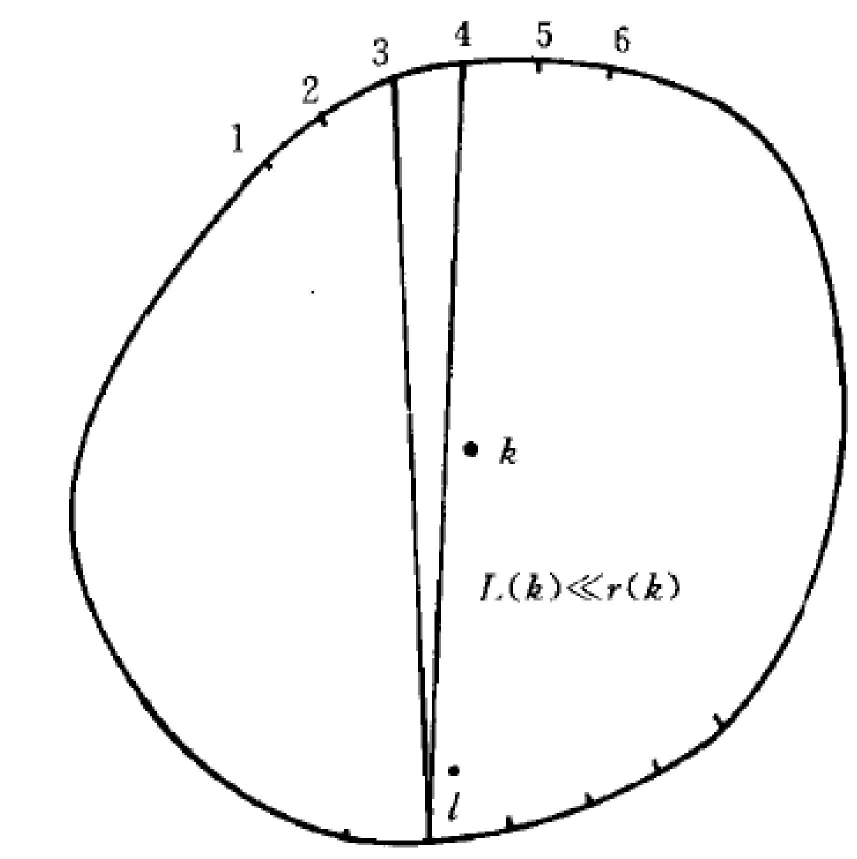
设任意一个**Delaunay**三角形 Δk ，其外接圆半径为 $r(k)$ ，其外接圆圆心的长度标尺为 $L(k)$ ，则其外接圆无量纲半径为：

$$R(k)=\frac{r(k)}{L(k)}$$

参数的意义：

对于正三角形 $R(k)=\frac{2}{3}<1$，$R(k)$ 表示一个三角形偏离正三角形的相对程度

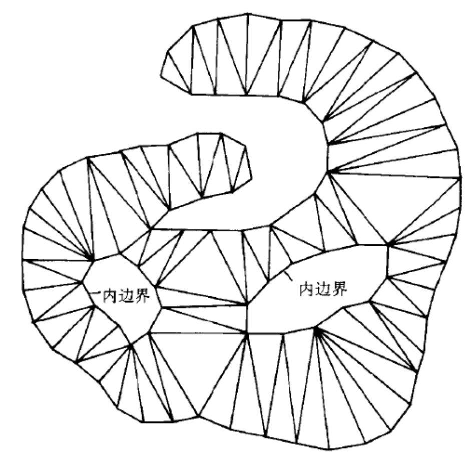
$R(k)$ 越大，偏离正三角形越严重

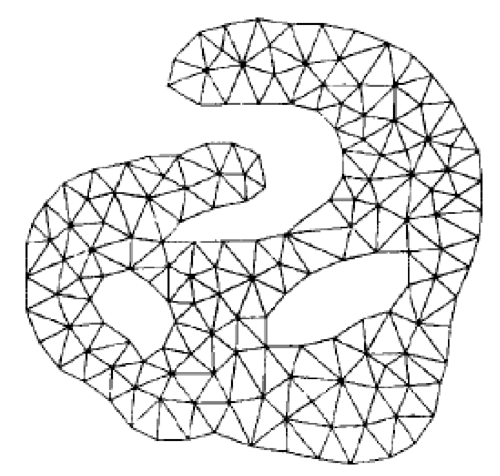


初始化三角形 $R(k) \gg 1$

◆ 向求解区域中自动加点的步骤

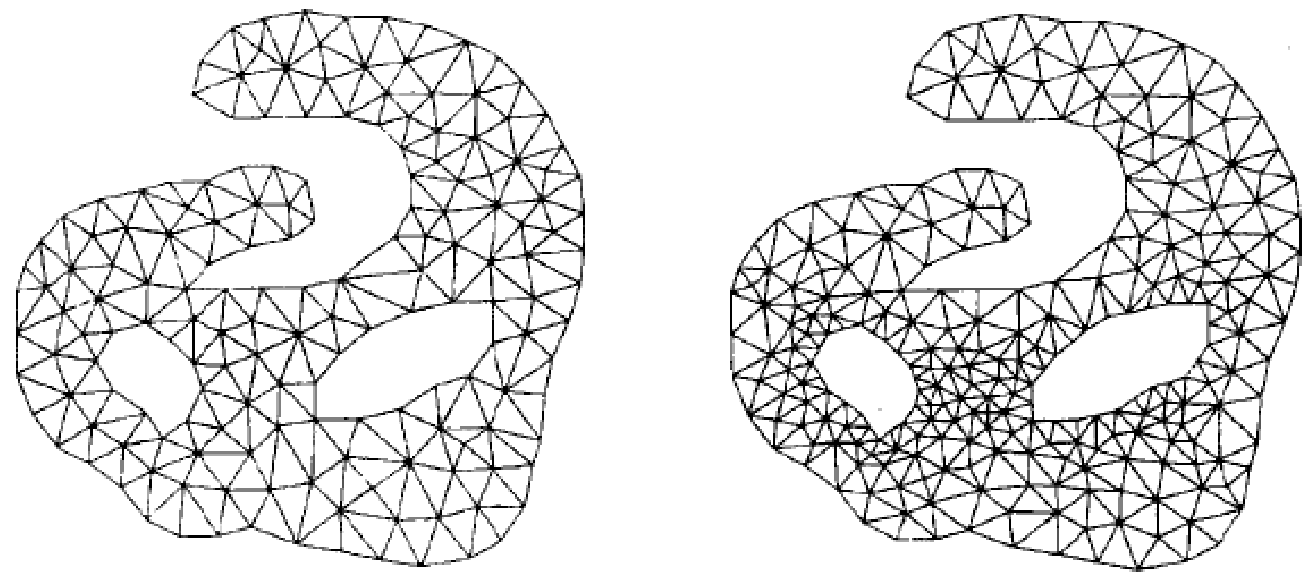
- 应用倒数原则，计算所有已生成的初始化**Delaunay**三角形的外接圆的圆心的长度标尺 $L(k)$ 及外接圆半径 $r(k)$ ；
- 计算所有三角形的外接圆无量纲半径 $R(k)$，并按大小排序；
- 向 $R(k)$ 最大的三角形外接圆圆心处增加一个新的内点**Q**；
- 利用**Delaunay**三角化方法，连接**Q**点与有关的网格点，生成一组新的**Delaunay**三角形；
- 重复步骤（**2**）～（**4**），直到达到要求**[** 如 $R(k) < 1$**]**为止。





◆ 控制网格疏密的方法

- 通过加密边界上网格点的方式来控制

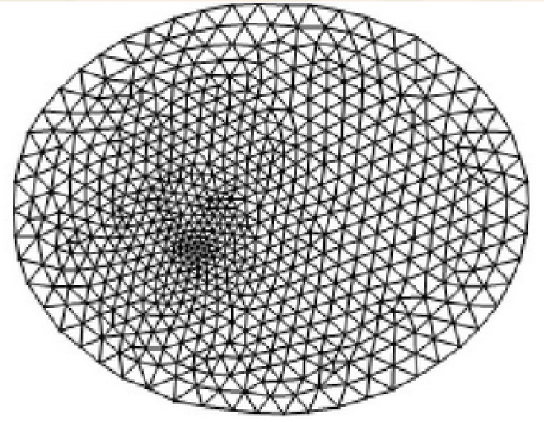


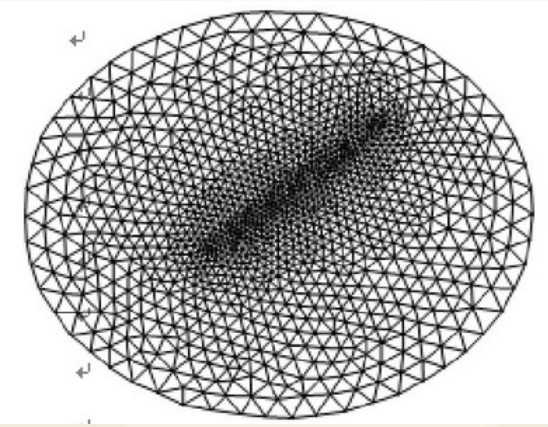
(a) 内边界加密前　　(b) 内边界加密后

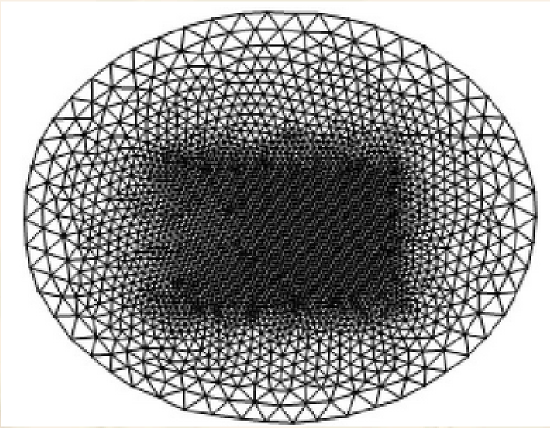
通过边界网格控制网格疏密

- 通过设置内部“源项”来控制内部网格的疏密

  内部源项是指需要局部加密地区的一些代表性的网格点，把它们作为边界上的网格点对待，即把它们位置坐标、长度标尺随边界点的信息一起输入，并与边界点一起形成初始化Delaunay三角形

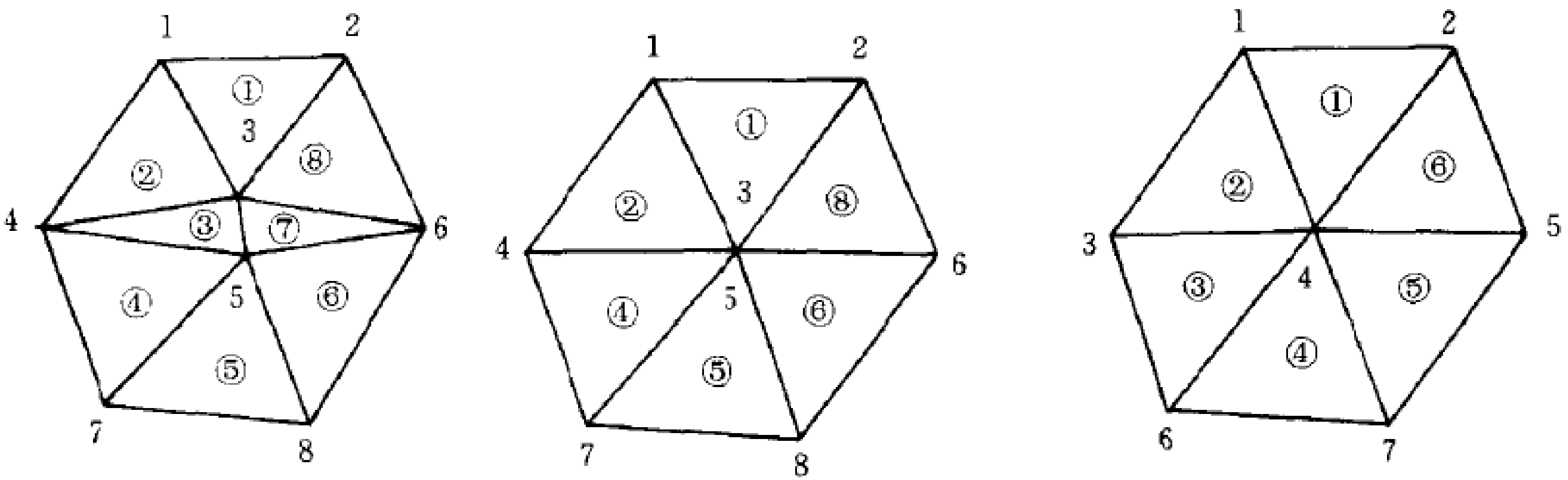






网格局部加密实例

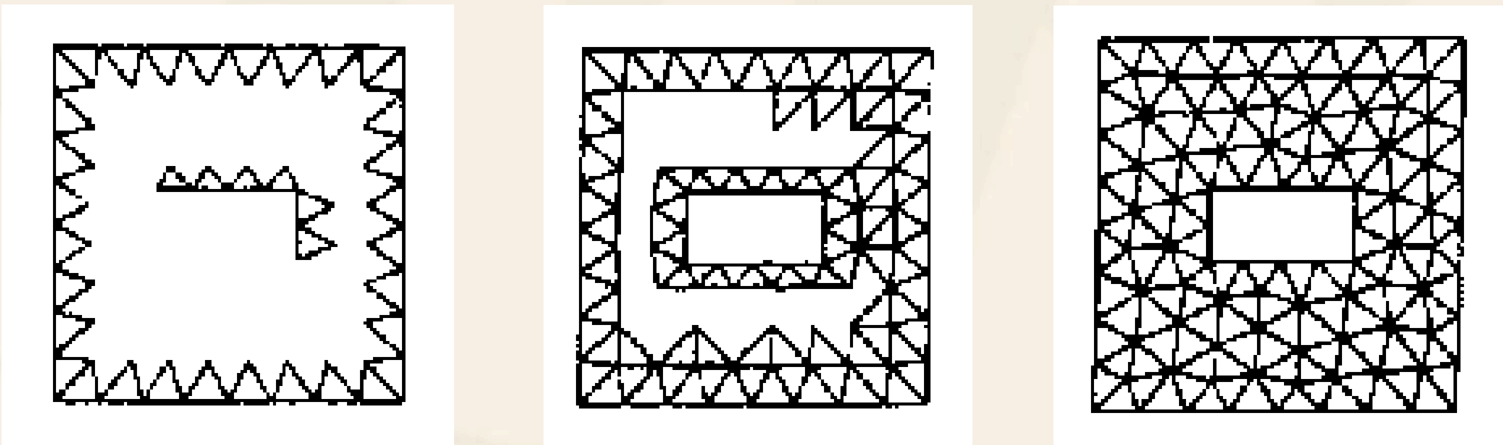
◆ 网格生成后的光顺化处理



(a) 去掉过小单元③⑦ (b) 去掉过小单元③⑦后 (c) 重新编号后

去掉过小单元操作

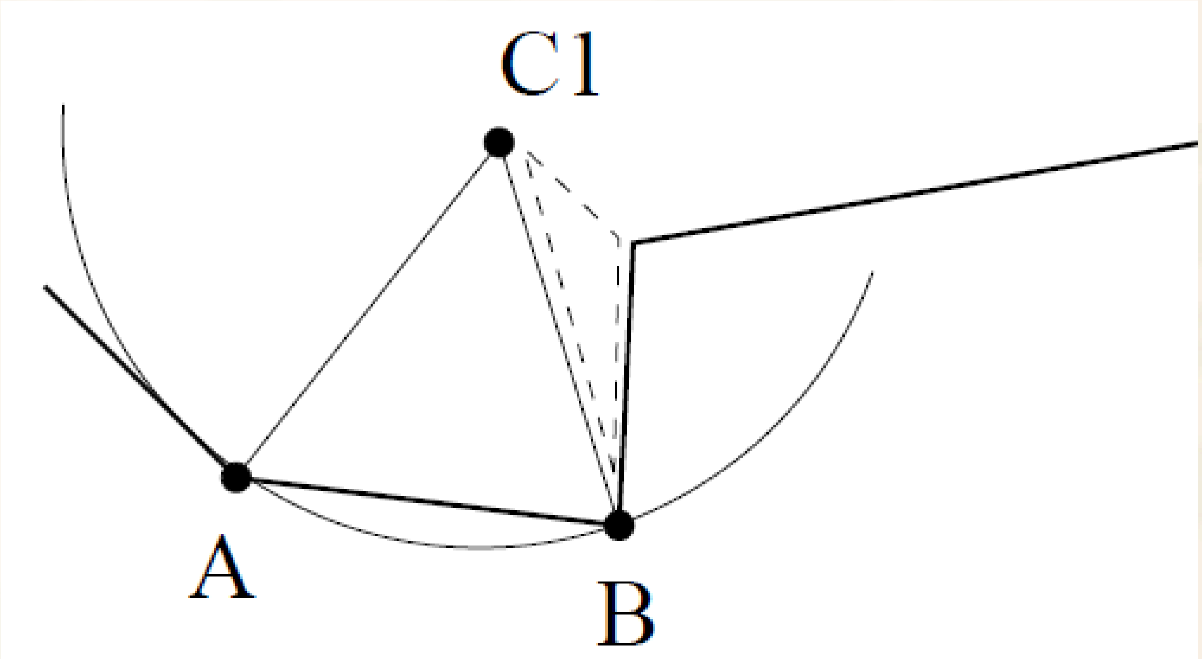
◆ 前沿推进法的实施



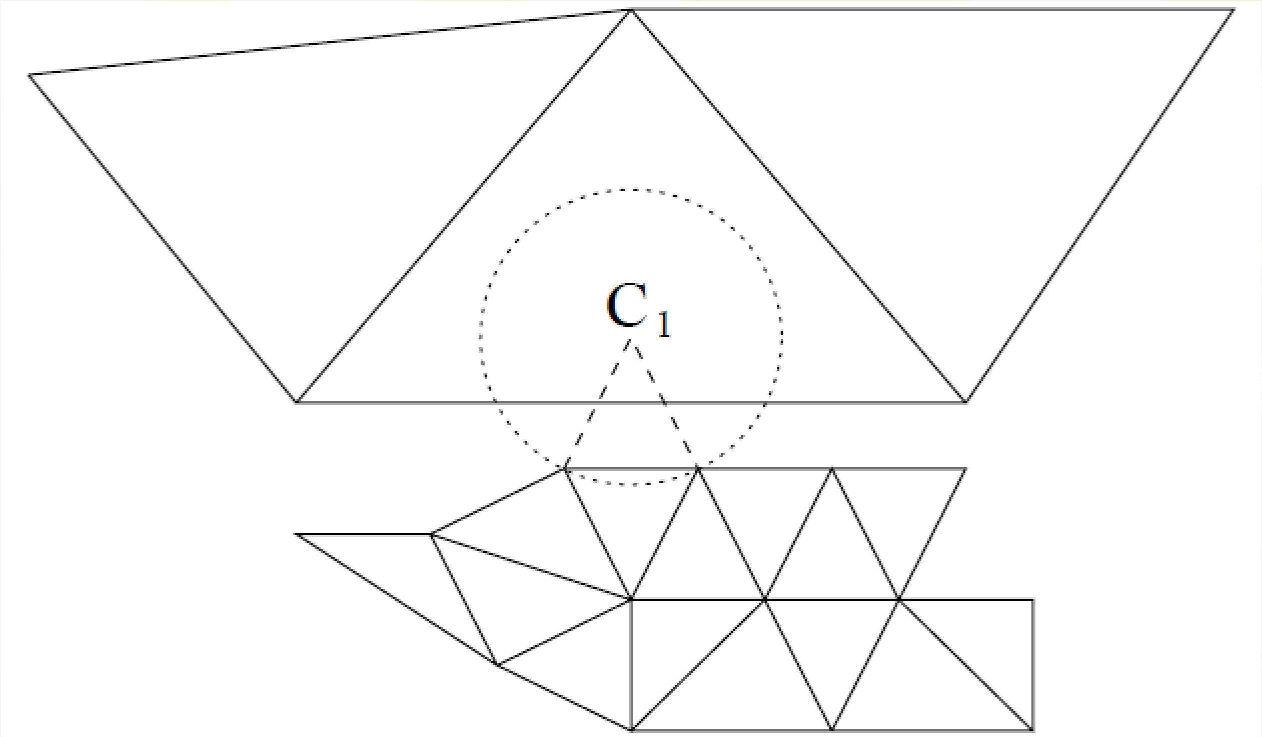
前沿推进法生成网格示例

- 在边界上生成离散点，形成初始前沿；
- 以初始前沿为基础，向区域内增加三角形（至少一条边在初始前沿上），形成新的前沿；
- 前沿向区域内推进，直到充满整个区域

- 前沿推进法缺点

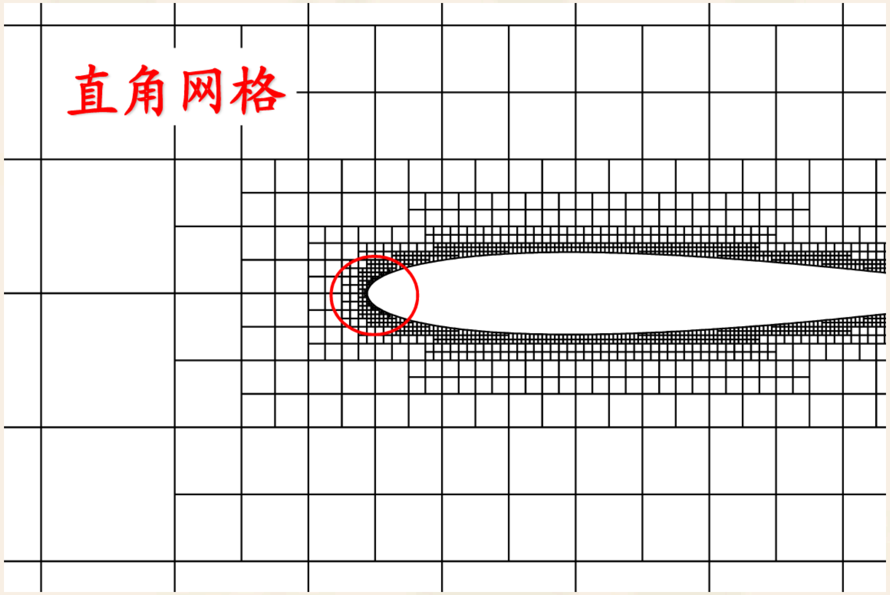


生成扭曲网格示意图

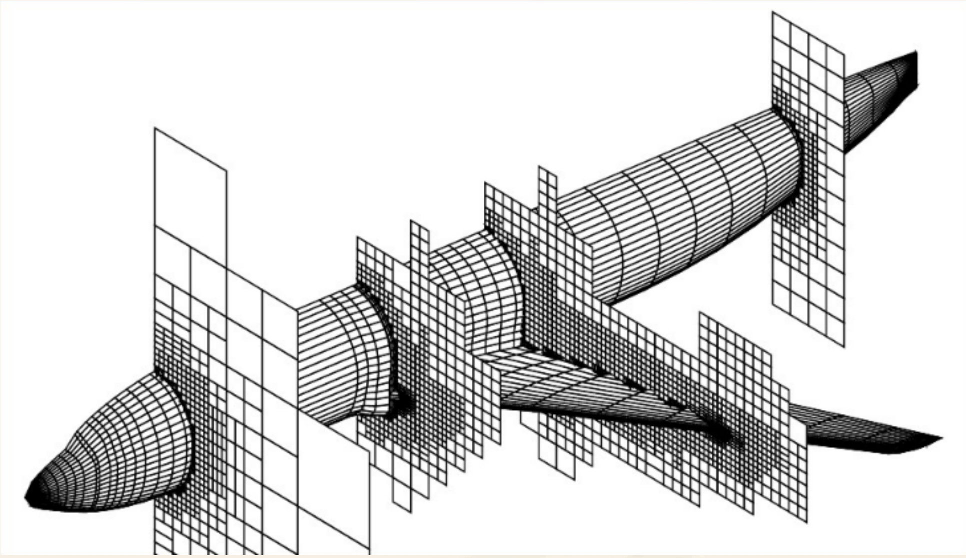


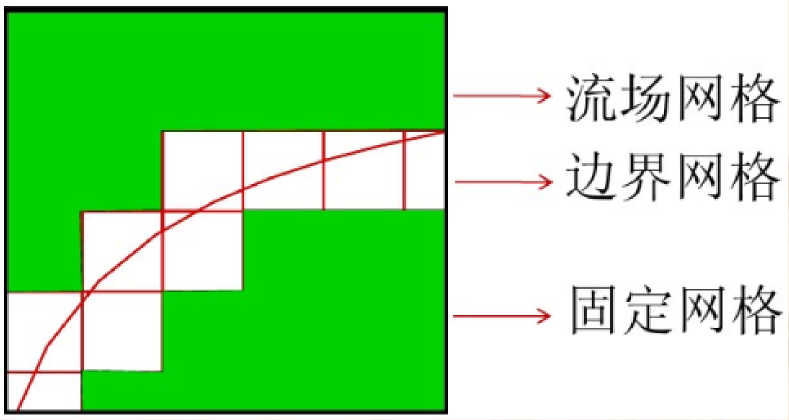
生成网格失败示意图

◆ 生成网格的其它方法

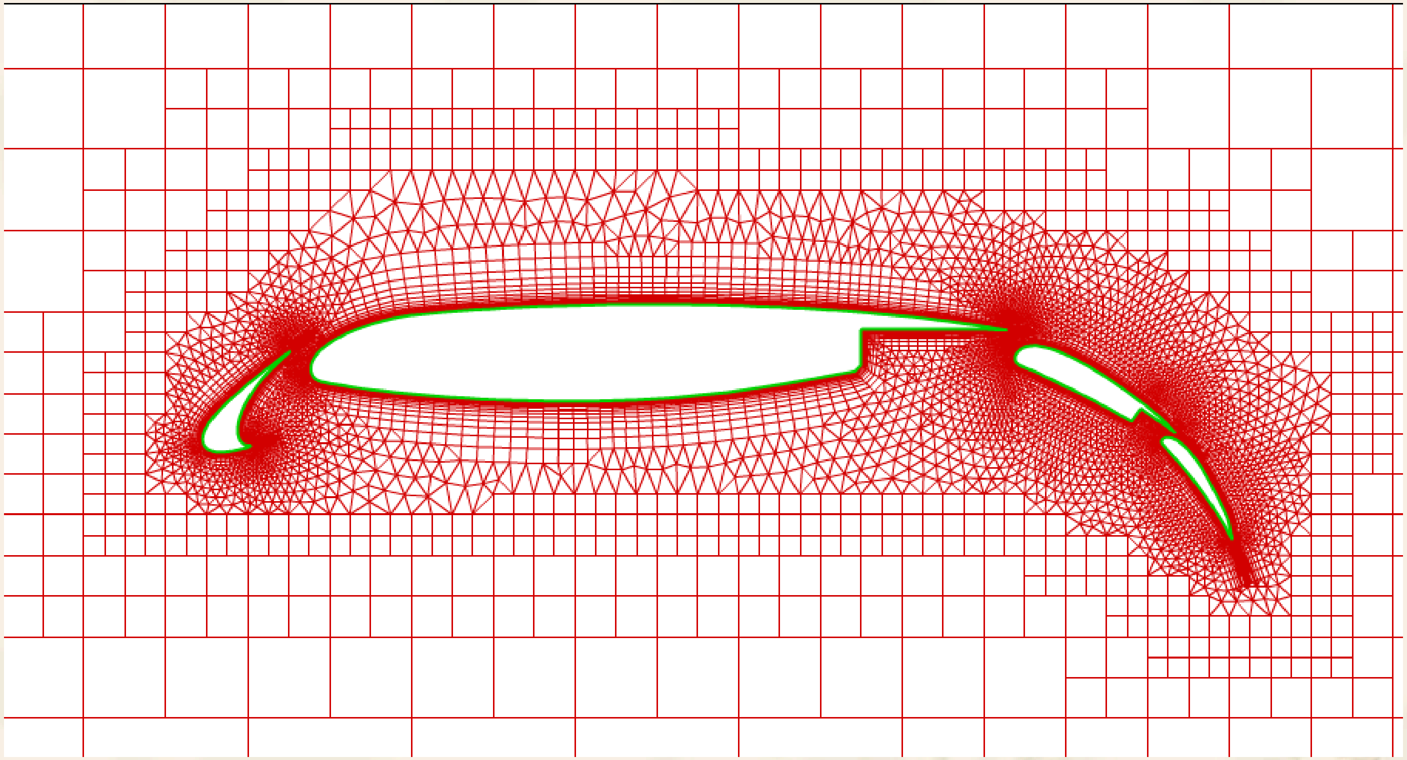


非结构化直角坐标网格

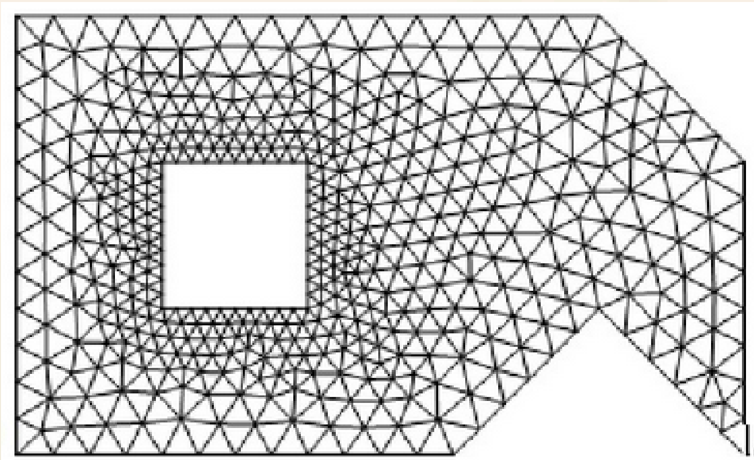


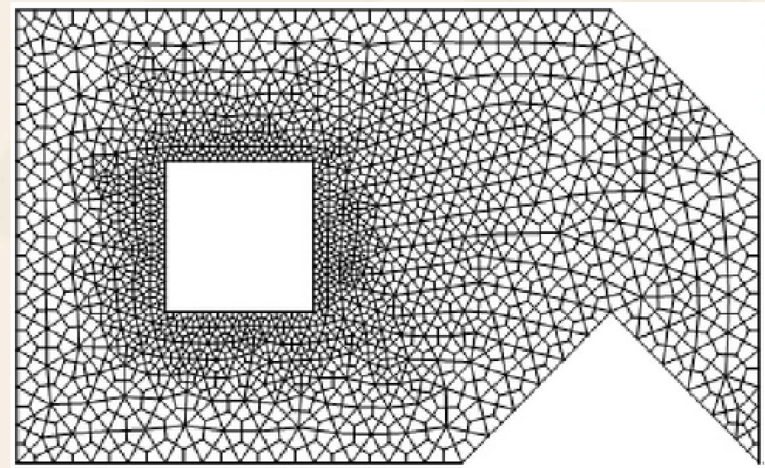


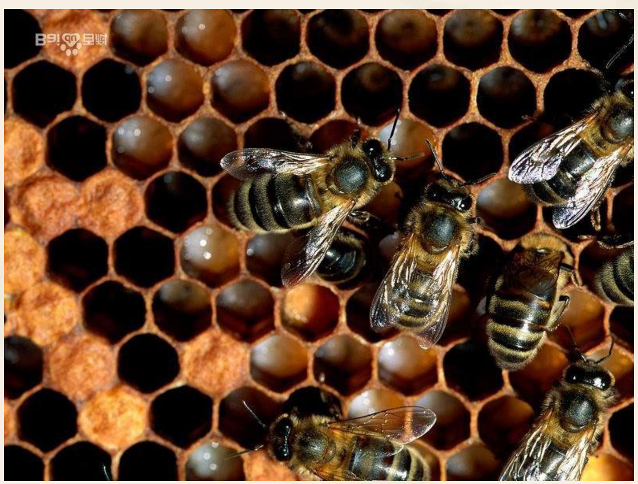
◆ 生成网格的其它方法

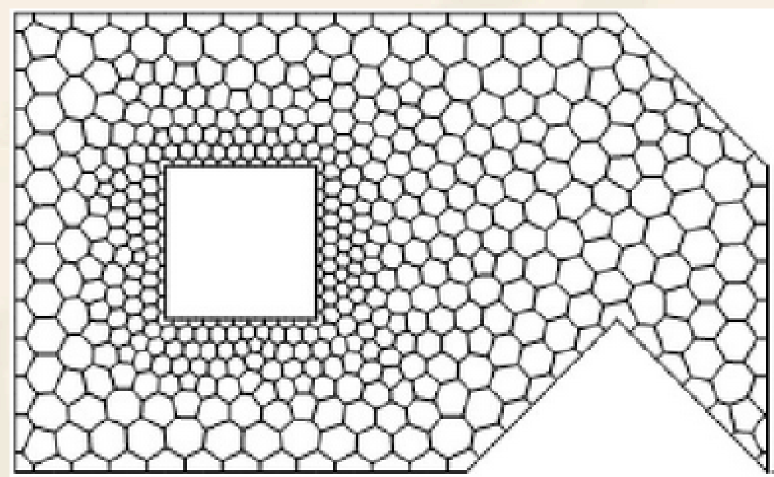


结构化与非结构化的混合网格



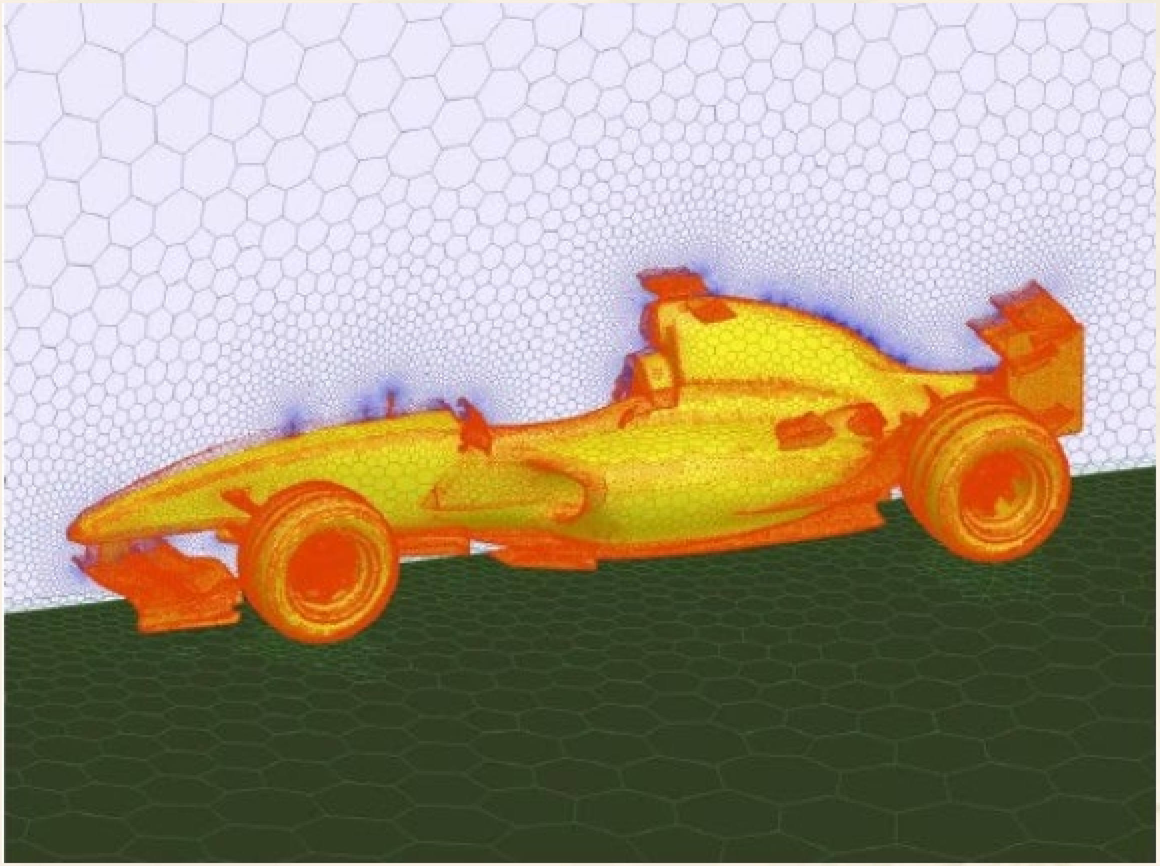






多面体非结构化网格

◆ 生成网格的其它方法



多面体非结构化网格

参考文献

陶文铨. 计算传热学的近代进展, 北京:科学出版社.2000

■ 课后作业

采用双边界法生成图示区域的网格(每个方向至少有两条内部网格线, 要求写出详细步骤,并画出图)