实验八 测定金属的杨氏模量

实验人：钟易轩　　指导教师：刘春玲

组号：九组七号　　学号：2000012706

实验时间：2021 年 11 月 19 日　　实验地点：物理楼南楼 134

【实验目的】

(1) 用伸长法测定金属的杨氏模量；

(2) 用 CCD 成像系统测量微小长度变化；

(3) 用逐差法、最小二乘法处理数据；

(4) 利用梁的弯曲测定杨氏模量.

【仪器用具】

测定杨氏模量专用支架，砝码若干，显微镜，CCD 成像系统，米尺，螺旋测微器，电子天平，可移动的平行刀口及基座，金属梁，读数显微镜，游标卡尺等.

【数据及处理】

1. 数据的测量与简单处理

杨氏模量的计算公式为

$$E = \frac{4mgL}{\pi d^2 \delta L}$$

已知北京所在地的重力加速度为 $g = 9.801m/s^2$. 在测量金属丝长度之前，将仪器调节好，并先将两个砝码放置在托盘上以达到拉直细金属丝的目的. 之后利用米尺测量出金属丝的长度为 $L = 78.80cm$.

接下来再测量每个砝码的重量 m 和金属丝的直径 d，如表 1 和表 2 所示.

表 1: 测量砝码质量数据表

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m/g	200.48	200.05	199.91	200.08	200.29	199.54	200.11	199.72	200.01

表 2: 测量金属丝直径数据表

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d/mm	0.321	0.321	0.321	0.321	0.321	0.321	0.320	0.321	0.321	0.321

由表 1 可知，砝码质量的平均值为 $\bar{m} = \dfrac{\sum_{i=1}^{9} m_i}{9} = 200.02(g)$.

由表 2 可知，金属丝直径的平均值为 $\bar{d} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{10} = 0.3209(mm)$, 其算术平均值的标准差为 $\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(d_i - \bar{d})^2}{9 \times 10}} = 0.0001(mm)$. 若考虑螺旋测微器的仪器允差 $e = 0.004mm$, 则金属丝直径 d 的不确定度为 $\sigma_d = \sqrt{\sigma_{\bar{d}}^2 + \dfrac{e^2}{3}} = \sqrt{(0.0001)^2 + \dfrac{(0.004)^2}{3}} \approx 0.0023(mm)$. 同时可以发现 0.0023 和 0.004 是同一个量级，而 0.0023 和 0.0001 不是一个量级，说明在 d 的测量当中，仪器误差占主要地位，随机误差占次要地位.

一切准备就绪之后，就可以依次往托盘上放置砝码去观测金属丝受外力拉伸后的伸长变化，测量数据如表 3 所示.

表 3: 测量金属丝受外力拉伸后的伸展变化数据表

i	m_i/g	r_i/mm	r_i'/mm	$\bar{r}_i/mm$	$\delta L = (\bar{r}_{i+5} - \bar{r}_i)/mm$
0	0.00	1.90	1.95	1.925	0.575
1	200.48	2.05	2.05	2.050	0.575
2	400.53	2.15	2.18	2.165	0.580
3	600.44	2.29	2.30	2.295	0.555
4	800.52	2.40	2.40	2.400	0.565
5	1000.81	2.50	2.50	2.500	
6	1200.35	2.62	2.63	2.625	
7	1400.46	2.74	2.75	2.745	
8	1600.18	2.85	2.85	2.850	
9	1800.19	2.96	2.97	2.965	

2. 逐差法处理数据

(1)δL: 在使用逐差法时，如果逐项逐差那么就会损失很多数据，因此 10 个数据那么我们选用逐五项逐差的方式. 则根据表 3 中数据得 $\overline{\delta L} = 0.570(mm)$,$\sigma_{\overline{\delta L}} = \sqrt{\dfrac{4 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} \approx 0.004(mm)$, 若考虑仪器误差 $e = 0.05mm$(取自分划板的分度值)，则 $\sigma_{\delta L} = \sqrt{\sigma_{\overline{\delta L}}^2 + e^2/3} \approx 0.03(mm)$, 因此 $\delta L = \overline{\delta L} \pm \sigma_{\delta L} = (0.57 \pm 0.03)mm$. 分析上述数据可知，$0.03 \gg 0.004$, 因此也是仪器误差占主导.

(2)L: 由于 L 是用米尺测量的，因此将米尺允差作为测量的极限误差，则 $\sigma_L = \frac{1.5}{\sqrt{3}} \approx 0.866(mm) \approx 0.09(cm)$, 则 $L = (78.80 \pm 0.09)cm$.

(3)d: 由上文计算可得，$d = (0.3209 \pm 0.0023)mm$.

(4)m: 由于是逐五项逐差，则 $\bar{m} = 999.884(g)$, 且砝码质量是由电子天平测量，其极限误差 $e_m = 0.01g$, 则 $\sigma_m = \frac{0.01}{\sqrt{3}} = 0.006(g)$. 因此，$m = (999.884 \pm 0.006)g$.

(5)E: 根据上述结果计算 E,$E = \frac{4mgL}{\pi d^2 \delta L} = \frac{4 \times 0.999884 \times 9.801 \times 0.7880}{\pi \times (0.3209 \times 10^{-3})^2 \times 0.57 \times 10^{-3}} \approx 1.6751 \times 10^{11}(Pa)$; 再根据标准差方和根合成公式得,

$$\sigma_E = \sqrt{(\frac{\partial E}{\partial m})^2 \sigma_m^2 + (\frac{\partial E}{\partial L})^2 \sigma_L^2 + (\frac{\partial E}{\partial d})^2 \sigma_d^2 + (\frac{\partial E}{\partial \delta L})^2 \sigma_{\delta L}^2}$$

最后带入数据算得 $\sigma_E = 9.1395 \times 10^9(Pa)$. 则 $E = (1.675 \pm 0.091) \times 10^{11} Pa$.

3. 用最小二乘法处理数据

由 $E = \frac{4mgL}{\pi d^2 \delta L}$ 变化得 $\delta L = \frac{4gL}{\pi d^2 E} m$, 则以 δL 为因变量，且将 m 视为无误差的自变量.δL 和 m 的数据如表 4 所示.

表 4: δL 和 m 数据对应表

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m/g	200.48	400.53	600.44	800.52	1000.81	1200.35	1400.46	1600.18	1800.19
$\delta L/mm$	0.125	0.240	0.370	0.475	0.575	0.700	0.820	0.925	1.040

再利用 Matlab 做线性回归. 求出斜率 $k = 5.7011 \times 10^{-4}$, 相关系数为 $R = 0.9998$.

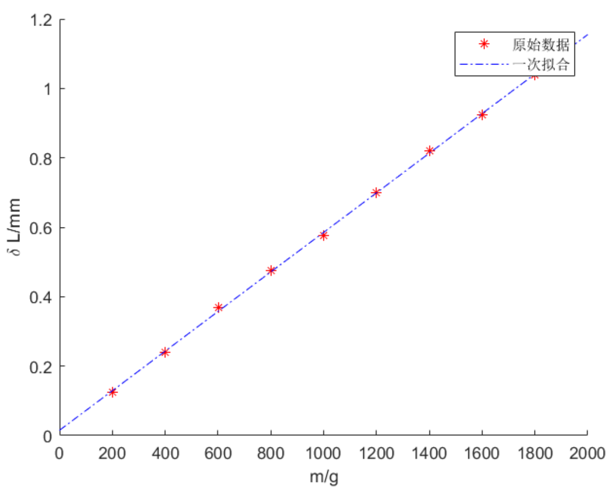

图 1: 最小二乘法线性回归图

由于 $k=\dfrac{4gL}{\pi d^2E}$, 则 $E=\dfrac{4gL}{\pi d^2k}\approx 1.675\times 10^{11}(Pa)$. 又根据公式 $\sigma_k=\dfrac{\sigma_{\delta L}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9}(m_i-\bar{m})^2}}$, 则有 $\sigma_{k1}=\dfrac{0.05/\sqrt{3}}{1.5489\times 10^3}=1.86\times 10^{-5}$,$\sigma_{k2}=k\sqrt{\dfrac{1/R^2-1}{7}}=4.31\times 10^{-6}$, 最终 $\sigma_k=\sqrt{\sigma_{k1}^2+\sigma_{k2}^2}=1.91\times 10^{-5}$. 由于 $E=\dfrac{4gL}{\pi d^2k}$, 则根据方和根合成公式得,

$$\sigma_E=\sqrt{(\frac{\partial E}{\partial L})^2\sigma_L^2+(\frac{\partial E}{\partial d})^2\sigma_d^2+(\frac{\partial E}{\partial k})^2\sigma_k^2}$$

最后带入数据算得 $\sigma_E=6.1066\times 10^9(Pa)$，则 $E=(1.675\pm 0.061)\times 10^{11}Pa$. 与逐差法所得的 σ_E 相比较，最小二乘法算出来的 σ_E 更小一点，显得更为精确.

【选做实验：梁的弯曲测定杨氏模量】

矩形梁的长度为 $l=23.20cm$、厚度为 $h=1.359mm$、宽度为 $a=10.55mm$. 由于测量时间的有限，则在测量梁的厚度和宽度时并没有多次测量，因此暂不考虑它们的随机误差，只考虑仪器造成的误差. 则 $l=(23.20\pm 0.06)cm, h=(1.359\pm 0.002)mm, a=(10.55\pm 0.03)mm$.

测量梁材料的杨氏模量公式为 $E=\dfrac{mgl^3}{4\lambda ah^3}$, 下面是测量数据：

表 5: 测量梁受外力拉伸后的伸展变化数据表

i	m_i/g	r_i/mm	r_i'/mm	$\bar{r}_i/mm$
0	0.00	34.611	33.568	34.0895
1	200.48	33.569	32.348	32.9585
2	400.53	32.400	31.121	31.7605
3	600.44	31.212	29.959	30.5855
4	800.52	30.041	28.779	29.4100
5	1000.81	28.822	27.685	28.2535
6	1200.35	27.261	26.646	26.9535

现在为了逐项逐差，因此去掉第一组数据，再逐三项逐差.
则 $\bar{E}=\dfrac{(1.9778+1.9539+1.9086)\times 10^{11}}{3}=1.947\times 10^{11}(Pa)$.

【分析与讨论】

开始情况下，r 比正常量大的原因是金属丝有弯曲；而 r 比正常量小的原因是金属丝有扭曲或者接触处有摩擦. 我的数据为前者这种情况，可能是金属丝使用过多导致有些弯曲没法消除.