Den simple lineære regression model (SLR)

Økonometri A

Bertel Schjerning

September 1, 2025

Program

Model og antagelser (W2.1)

Udledningen af OLS estimatoren (W2.2)

Prædiktioner, residualer og R^2 (W2.3+W2.6)

Fordelingen af OLS estimaterne (W2.5)

- Middelrethed
- Varians

Måleenheder og funktionelle former (W2.4)

Data visualisering

Motivation

Vi er interesseret i at kende (den kausale) sammenhænge mellem et outcome (y) og en forklarende variable (x)

For eksempel:

- Hvordan påvirker gødning produktionen af sojabønner?
- Hvordan påvirker uddannelse timelønnen?
- Hvordan påvirker “kvaliteten” af den administrerende direktør profitten i en virksomhed?
- Hvordan afhænger væksten i BNP af landenes initiale BNP?

Model og antagelser

Den simple lineære regression model

Med SLR antager vi at sammenhængen mellem y og x i "populationsmodellen" er lineær:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \tag{1}$$

y: Afhængig variable

x: Forklarende variable

u: Unobserveret fejlled

β_0: Intercept (konstantled)

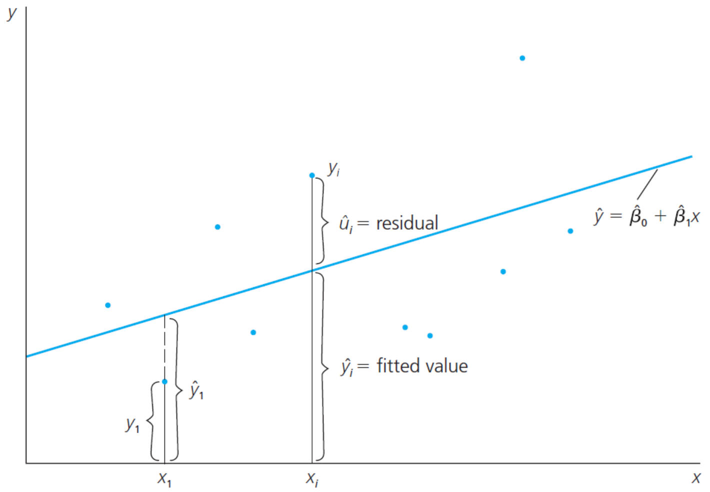
β_1: Hældningskoefficient

Vi er typisk mest interesset i β_1, som måler styrken af sammenhængen mellem y og x):

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x \quad \text{hvis} \quad \Delta u = 0$$

Den simple lineære regression model

FIGURE 2.4 Fitted values and residuals.



Den simple lineære regressionsmodel

Vigtige overvejelser ved specifikation af en lineær regressionsmodel:

Spg. 1: Hvordan håndterer vi andre faktorer end x, der påvirker y?

Spg. 2: Hvilken funktionel form beskriver bedst sammenhængen mellem x og y?

- Skal y afhænge af $\log(x)$, x^2, $1/x$, eller en anden funktion af x?
- Skal vi modellere $\log(y)$ som funktion af x?
- Kan vi antage, at y er lineær i parametrene?

Spg. 3: Kan β_1 fortolkes som en *ceteris paribus* (kausal) effekt?

Den simple lineære regressionsmodel

Spg. 1: Hvordan håndterer vi, at andre faktorer end x påvirker y?

Vi antager, at alle andre faktorer, der påvirker y, er indeholdt i fejlleddet u:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

Diskussion:

- Hvad indeholder fejlleddet u i eksemplet, hvor y er udbyttet af sojabønner, og x er gødningsmængden?
- Hvad indeholder fejlleddet u i eksemplet, hvor y er timeløn, og x er uddannelse (målt i år)?

Den simple lineære regressionsmodel

Spg. 2: Hvilken funktionel form beskriver bedst sammenhængen mellem x og y?

- Vi antager, at y er en **lineær** funktion af x.
- Denne lineære antagelse kan være restriktiv og ikke altid passende.
- Eksempel: Hvordan ser sammenhængen mellem gødning og sojabønner ud? (Overvej aftagende marginalafkast)

Vi vil senere se, hvordan vi kan lempe antagelsen om linearitet.

Den simple lineære regressionsmodel

- Hvorfor tror I, at sammenhængen mellem temperatur og elforbrug er ikke-lineær?
- Er modellen $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + u$ mere passende?

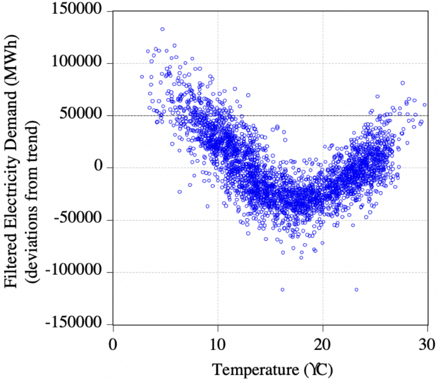


Fig. 2. Non-linearity in electricity demand response to temperature variations.

Den simple lineære regressionsmodel

Spg. 3: **ceteris paribus/kausale** fortolkninger

Kausale fortolkninger kræver ekstra antagelser. β_1 beskriver, hvordan y afhænger af x:

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x, \quad \textbf{hvis} \quad \Delta u = 0$$

Hvornår kan dette være et problem?

- **Eks 1:** Gødning og udbytte? Mere gødning på dårlig jord.
- **Eks 2:** Timeløn og uddannelse? Højere evner kan føre til både mere uddannelse og højere løn.
- I begge tilfælde er ($\Delta u \neq 0$), og vi risikerer at hhv. undervurdere og overvurdere eller effekten af x på y.

Antagelser om u er centrale i økonometri, men ofte svære at validere.

Antagelser om fejlleddet

Alle andre faktorer end x, som påvirker y, er indeholdt i fejlleddet u.

Med SLR laver vi to antagelser om u:

$$E(u) = 0$$
$$E(u|x) = 0$$

Den første antagelse er ret uskyldig – vi normaliserer typisk $E(u)$ til 0

- I sammenhængen mellem timeløn (y) og uddannelse (x) vil evner/intelligens være indeholdt i u.
- Hvis vi normaliserer $E(u) = 0$, vil $\beta_0 = E(y)$ for en person med gennemsnitlig intelligens og uden uddannelse ($x = 0$).

Antagelser om fejlleddet

Den anden antagelse er kritisk: $E(u|x) = 0$

Det er antagelsen om **("zero conditional mean assumption")**

Hvad betyder antagelsen?

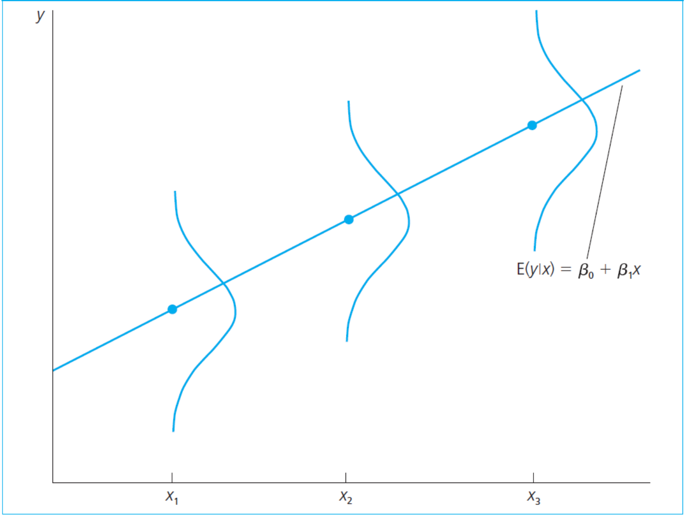
- Den forventede værdi af u er uafhængig af x for alle x.
- Det er en stærkere antagelse en at $cov(u, x) = 0$.
- Omvendt antager vi ikke at x og u er generelt uafhængige
- Fx har vi *ikke* antaget $E(u^2|x) = \sigma$ (konstant varians).
- Generel uafhængighed $\Rightarrow$ alle funktioner af u er uafhængige af x

Med de to antagelser gælder at

$$E(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x + \underbrace{E(u|x)}_{=0}$$

Antagelser om fejlleddet

FIGURE 2.1 E(y|x) as a linear function of x.

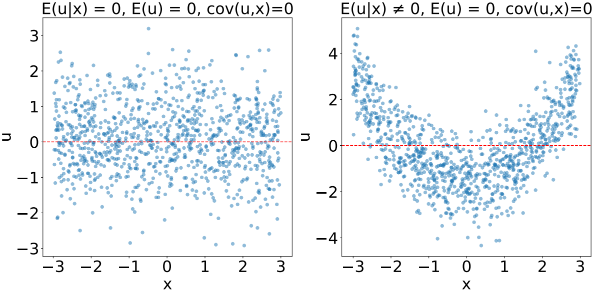


Antagelser om fejlleddet

Alle andre faktorer end x, som påvirker y er indeholdt i fejlleddet u.

Med SLR vi laver to antagelser om u:

$$E(u) = 0 \quad \text{(scalar)}$$
$$E(u|x) = 0 \quad \text{(funktion af x)}$$



Bemærk at $cov(u, x) = 0 \not\Rightarrow E(u|x) = 0$

Antagelser om fejlleddet

Eksempel: Timeløn og uddannelse.

- Model

$$\text{timeløn} = \beta_0 + \beta_1 \text{uddannelse} + u$$

- Fejlleddet indeholder intelligens og andre typer evner.
- Kan vi rimeligvis antage at $E[u|x] = 0$?
- Er følgende antagelser rimelige?

$$E(evner|uddannelse = 9) = E(evner|uddannelse = 17)$$
$$E(evner|folkeskolen) = E(evner|kandidatudd)$$

- Hvad med erhvervserfaring, motivation, familieforhold, uddannelseskvalitet, helbred, jobkarakteristika, geografisk placering, og netværk?

Udledningen af OLS estimatoren

Estimation af parametrene i SLR

Vi ønsker at estimere β_0 og β_1 i **populationsmodellen**:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

En ligning med 3 ubekendte, som kan estimeres på forskellige måder:

1. **Maximum Likelihood Estimation (MLE):**
   - Antag en fordeling for u, fx normalfordeling.
   - Opskriv og maksimer likelihood-funktionen mht. β_0 og β_1.
2. **Method of Moments (MM):**
   - Kræver kun at $E(u|x) = E(u) = 0$.
   - Kræver ingen antagelser om fordelingen af u.

Ideen bag momentestimation

Eksempel: Estimation af den forventede værdi

- Variabel y med $E(y) = \mu$.
- μ er ukendt, og vi ønsker at estimere den.
- Vi har n observationer af y.
- Hvad er en naturlig estimator for μ?

Den naturlige estimator er den empiriske middelværdi (gennemsnit):

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Som er en middelret estimator for μ (se math refresher C2).

Ideen bag MM: Erstat det teoretiske moment (fx middelværdi) med det empiriske moment.

Ideen bag momentestimation

Variansen af y, hvor $E(y) = \mu_y$, er:

$$Var(y) = \sigma_y^2 = E\left[(y - \mu_y)^2\right]$$

MM-estimator:

$$\widehat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

Kovariansen mellem x og y:

$$Cov(x, y) = \sigma_{xy} = E\left[(x - \mu_x)(y - \mu_y)\right]$$

MM-estimator:

$$\widehat{\sigma}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Udledningen af OLS-estimatoren: Momentbetingelser

Regression model:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

Antagelser (moment betingelser):

$$E(u) = 0 \tag{2}$$

$$E(u|x) = 0 \tag{3}$$

Det gælder at $E(u|x) = 0 \implies cov(x,u) = 0$

$$\begin{aligned} cov(x,u) &\equiv E[(x - E(x))(u - E(u))] \\ &= E[(x - E(x))u] \\ &= E(xu) - E(x)E(u) \\ &= E[\ E(xu|x)\ ] \quad \text{(Law of Iterated Expectations (LIE))} \\ &= E[xE(u|x)] = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Udledningen af OLS estimatoren: Momentbetingelser

Vi finder først de relevante populationsmomenter.

Udtryk fejlleddet u ved hjælp af modellen:

$$u = y - \beta_0 - \beta_1 x.$$

Indsæt dette i antagelserne (2) og (4):

$$E(u) = E\left(y - \beta_0 - \beta_1 x\right) = 0$$
$$E(xu) = E\left(x(y - \beta_0 - \beta_1 x)\right) = 0$$

Dette er de teoretiske momenter (populationsmomenter).

Udledningen af OLS estimatoren: Momentbetingelser

Method of Moments Estimator:

- Erstat teoretiske momenter med empiriske momenter (Erstat forventningsoperator med gennemsnit)
- $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ løser de empiriske momentbetingelser

$$E(u) = 0 \implies \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

$$E(u \cdot x) = 0 \implies \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)x_i = 0$$

- Lad os løse ligningssystemet for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$

Udledningen af OLS estimatoren: Regneregler

Ingredienser til udledningen:

Regneregler for summer:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i &= \bar{x} \\
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a x_i &= a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = a\bar{x} \\
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a &= a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = a \\
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i + z_i) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i z_i
\end{aligned}
$$

Udledningen af OLS-estimatoren: Regneregler

Regneregler til brug i udledningen:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}\right) = \frac{1}{n}(n\bar{x} - n\bar{x}) = 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\bar{x} = \bar{x} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \bar{x} \cdot 0 = 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})x_i - (x_i - \bar{x})\bar{x}]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \mathrm{Var}(x)$$

Udledningen af OLS-estimatoren: $\hat{\beta}_0$

Trin 1: Udledning af $\hat{\beta}_0$

$$E(u) = 0 \implies \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1 x_i \iff \bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x}$$

Vi har nu udtrykt $\hat{\beta}_0$ som en funktion af $\hat{\beta}_1$,$\bar{y}$ og $\bar{x}$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$$

Trin 2: Udledning af $\hat{\beta}_1$

$$E(u \cdot x) = 0 \implies \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)x_i = 0$$

Indsæt $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[(y_i - \bar{y}) + \hat{\beta}_1(\bar{x} - x_i)\Big]\, x_i = 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})x_i = \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Udledningen af OLS-estimatoren

GOOOOAAAAL! Vi har nu udledt OLS-estimatoren for β_1 og β_0:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\widehat{cov}(x_i, y_i)}{\widehat{var}(x_i)} \tag{5}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \tag{6}$$

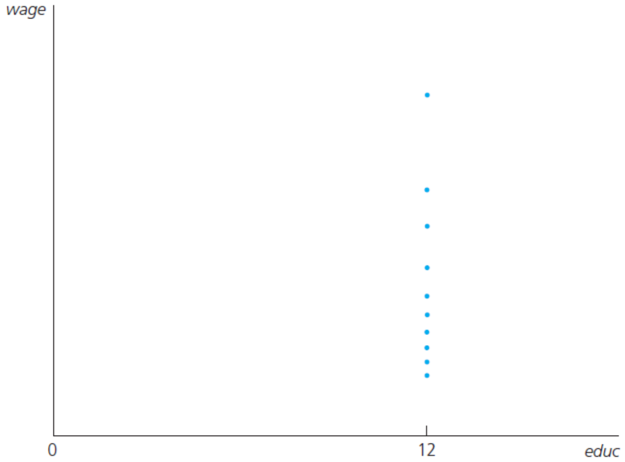
Bemærk: Vi kræver, at $\widehat{var}(x_i) > 0$ for at OLS-estimatoren er veldefineret:

$$SST_x \equiv \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 > 0$$

- Hvorfor er det vigtigt?
- Hvornår er det være en problematisk antagelse?

Udledningen af OLS estimatoren: Variation i x

FIGURE 2.3 A scatterplot of wage against education when $educ_i = 12$ for all i.



Udledningen af OLS-estimatoren: Hvorfor hedder det OLS?

Vi kan estimere β_0 og β_1 ved at minimere residualkvadratsummen:

$$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1 = \arg\min_{\beta_0,\beta_1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}_{Q_n(\beta_0,\beta_1)}$$

Deraf navnet **Ordinary Least Squares (OLS)**.

Førsteordensbetingelserne er identiske med momentbetingelserne:

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_0} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i x_i = 0$$

Samme momentbetingelser $\implies$ samme estimator

Let’s code

- Jypyter Notebook: `02_slr_examples.ipynb`
- Part 1: Timeløn og uddannelse (OLS estimation)

Prædiktioner, residualer og R^2

Prædikterede værdier og residualer

Ud fra parameterestimaterne kan vi finde den prædikterede værdi af y:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

Residualerne kan beregnes som:

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$$

Bemærk: $\hat{y}_i$ er vores bud på $E(y|x_i)$, men $\hat{y}_i$ vil sjældent være lig y_i.

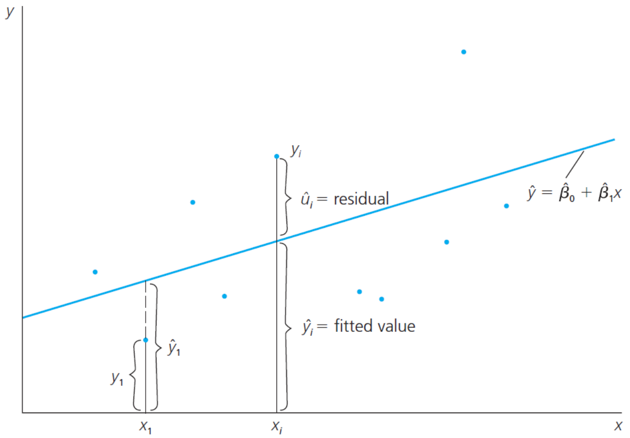
Egenskaber ved OLS residualer:

- $\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0$
- $\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i x_i = 0$

Hvorfor er dette ikke så overraskende?

Prædikterede værdier og residualer

FIGURE 2.4 Fitted values and residuals.



Prædikterede værdier og residualer

Quiz

Lad $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ og $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$

Ræk hånden op, hvis du mener følgende er SAND:

$$A : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$B : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$C : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)\hat{u}_i = 0$$

Goodness of fit

Et relevant spørgsmål:

Hvor meget af variationen i y vi kan forklare med x?

Til det formål definerer vi følgende:

- Total sum of squares (i y): $SST \equiv \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$.
- Explained sum of squares: $SSE \equiv \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$.
- Residual sum of squares: $SSR \equiv \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$.

Goodness of fit

Det gælder at den totale variation (kvadratsum) kan skrive som

$$SST = SSE + SSR$$

Vi kan således dekomponere SST i en forklaret og i en residual del.

En naturlig måde at beregne, hvor meget af variationen i y vi kan forklare med x, er således

$$R^2 \equiv \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

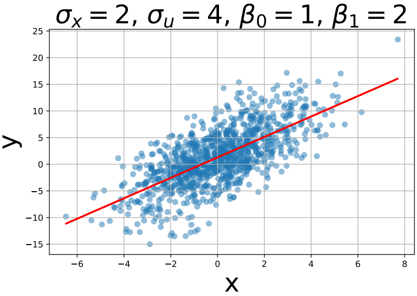
hvor $0 \leq R^2 \leq 1$.

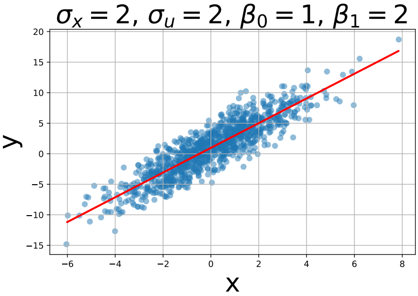
Bemærk at vores model sagtens kan være relevant selvom R^2 er lav.

Goodness of fit

Quiz: I hvilken figur er R^2 størst?

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u, \quad x \sim N(0, \sigma_x^2), \quad u \sim N(0, \sigma_u^2)$$





Let's code

- Jypyter Notebook: `02_slr_examples.ipynb`
- Part 2: Timeløn og uddannelse (Goodness of fit)

Fordelingen af OLS estimaterne

Fordelingen af OLS estimaterne

OLS estimatoren er en maskine:

Input (Data)				**Output (Estimater)**
Sample 1: $\{(y_1, x_1), ..., (y_n, x_n)\}$				$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)_1$
$\vdots$	$\rightarrow$	**OLS**	$\rightarrow$	$\vdots$
Sample k: $\{(y_1, x_1), ..., (y_n, x_n)\}$				$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)_k$

Hvad er fordelingen af OLS estimaterne?

$$\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_0) \sim F(\theta)$$

- Hvilken fordeling $F()$
  (eksempelvis t-fordeling eller normalfordeling)
- og hvilke parametre θ, som $F(\theta)$ afhænger af
  (eksempelvis middelværdi, μ og varians σ^2, frihedsgrader)

Middelret

Definition (se appendix C2)

Antag vi har en estimator **b** for β.

b er en **middelret** (unbiased) estimator for β, hvis:

$$E(\mathbf{b}) = \beta$$

for alle værdier af β.

- Middelrethed er en statistisk egenskab, der sikrer, at estimatorens forventede værdi er lig med den sande parameter.
- Hvorfor er det vigtigt, at en estimator er middelret?
- Kan en estimator være brugbar, selv hvis den ikke er middelret?

Centrale antagelse for den simple lineære regressionsmodel

SLR.1 Populationsmodellen er lineær i parametrene:
$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$.

SLR.2 Tilfældig udvælgelse:
Vi har tilfældigt udvalgte og uafhængige observationer $(x_i, y_i) : i = 1, ..., n$ fra en population.

SLR.3 Variation i x:
I datasættet må x ikke antage den samme værdi for alle observationer.

SLR.4 Den betingede middelværdi af fejlleddet skal være 0:
$E(u|x) = 0$.

Middelrethed af OLS estimatoren

Teorem 2.1: Middelrethed af OLS estimatoren

Under antagelse af SLR.1–SLR.4, er OLS estimatoren **middelret**:

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

Middelrethed af OLS estimatoren: Bevis (1)

Ingredienser til beviset:

SLR.1 $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$

SLR.2 tilfældig stikprøve $\implies E(u_i|x) = E(u|x)$ for alle i.

SLR.3 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \neq 0$

SLR.4 $E(u|x) = 0$

$$\text{OLS estimatoren: } \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{SST_x}$$

Regneregler:

- $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$
- $E(y) = E(E(y|x))$ (Law of iterated expectations)
- $E(a(x)y + b(x)|x) = a(x)E(y|x) + b(x)$ (linearitet af forventning)

Middelrethed af OLS estimatoren: Bevis (2)

Ved brug af SLR.1 kan vi skrive OLS estimatoren som

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \bar{x})}{SST_x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)(x_i - \bar{x})}{SST_x} \\
&= \beta_0 \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})}{SST_x} + \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})}{SST_x} + \frac{\sum_{i=1}^{n} u(x_i - \bar{x})}{SST_x} \\
&= \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} u(x_i - \bar{x})}{SST_x}
\end{aligned}$$

Middelrethed af OLS estimatoren: Bevis (2)

Ved brug af SLR.1 kan vi skrive OLS estimatoren som

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i(x_i - \bar{x})}{SST_x} = \frac{\sum_{i=1}^n(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)(x_i - \bar{x})}{SST_x} \\
&= \beta_0 \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{SST_x} + \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^n x_i(x_i - \bar{x})}{SST_x} + \frac{\sum_{i=1}^n u(x_i - \bar{x})}{SST_x} \\
&= \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n u(x_i - \bar{x})}{SST_x}
\end{aligned}$$

Tag forventning på begge sider, betinget på stikprøven $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\beta}_1|X) &= E(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n u_i(x_i - \bar{x})}{SST_x}|X) \\
&= \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) E(u_i|X)}{SST_x} \quad \text{(linearitet af forventning)}
\end{aligned}$$

Middelrethed af OLS estimatoren: Bevis (3)

SLR.2 + SLR.4 $\implies E(u_i|X) = 0$
SLR.3 $\implies SST_x \equiv \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \neq 0$
således at

$$E(\hat{\beta}_1|X) = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})E(u_i|X)}{SST_x} = \beta_1$$

Pga. law of iterated expectations gælder der, at

$$E(\hat{\beta}_1) = E(E(\hat{\beta}_1|X)) = \beta_1$$

SLR.1-SLR.4 $\implies \hat{\beta}_1$ er en middelret estimator for β_1.

Home run!!!

Middelrethed af OLS estimatoren: Bevis (3)

SLR.2 + SLR.4 $\implies E(u_i|X) = 0$
SLR.3 $\implies SST_x \equiv \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \neq 0$
således at

$$E(\hat{\beta}_1|X) = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})E(u_i|X)}{SST_x} = \beta_1$$

Pga. law of iterated expectations gælder der, at

$$E(\hat{\beta}_1) = E(E(\hat{\beta}_1|X)) = \beta_1$$

SLR.1-SLR.4 $\implies \hat{\beta}_1$ er en middelret estimator for β_1.

Home run!!!

Hvad med $\hat{\beta}_0$?

Middelrethed af OLS estimatoren: Bevis (4)

OLS estimatoren for β_0 og SLR.1 giver

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} \\ &= \beta_0 + \beta_1\bar{x} + \bar{u} - \hat{\beta}_1\bar{x} = \beta_0 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)\bar{x} + \bar{u}\end{aligned}$$

Tag betinget forventning betinget på stikprøven, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}_0|X) &= E(\beta_0 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)\bar{x} + \bar{u}|X) \\ &= \beta_0 + E(\beta_1 - \hat{\beta}_1|X)\bar{x} + E(\bar{u}|X) = \beta_0\end{aligned}$$

Vi har lige har vist $E(\beta_1 - \hat{\beta}_1|X) = 0$
SLR.2 + SLR.4 giver $E(\bar{u}|X) = 0$

Dermed er $\hat{\beta}_0$ en middelret estimator for β_0

$$E(\hat{\beta}_0) = E[E(\hat{\beta}_0|X)] = \beta_0$$

Variansen af OLS-estimatoren

Selvom OLS-estimatoren er middelret, vil $\hat{\beta}_1$ ofte afvige fra β_1 og variere mellem stikprøver.

- $\hat{\beta}_1$ er en stokastisk variabel med en middelværdi (β_1) og en varians.
- Variansen af $\hat{\beta}_1$ givet stikprøven X, $\text{Var}(\hat{\beta}_1 \mid X)$, bestemmer estimatets præcision.
- Lav varians betyder, at estimaterne er tæt på β_1 på tværs af stikprøver, hvilket øger tilliden til resultaterne.

For at udlede (en simple formel for) variansen af $\hat{\beta}_1$ kræves en ekstra antagelse.

Variansen af OLS-estimatoren

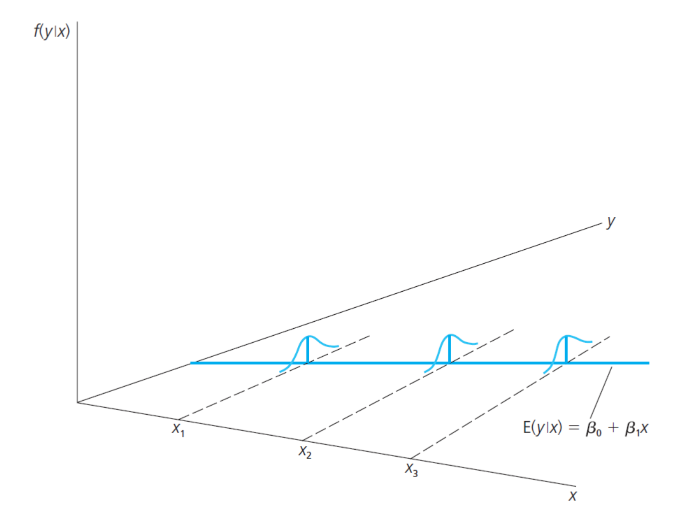
SLR.5 Variansen af fejlleddet er konstant:

$$Var(u|x) = \sigma^2 \quad \text{(Homoskedasticitet)}$$

- **Gauss-Markov:** SLR.1-SLR.5 gør OLS til den bedste lineære, ubiaserede estimator (BLUE).
- **Middelrethed:** Kun SLR.1-SLR.4 kræves for, at OLS er middelret.
- **Efficiens:** SLR.5 sikrer, at OLS er efficient med minimal varians.
- Uden SLR.5 er fejlleddene **heteroskedastiske**, hvilket kan gå ud over efficiens, men ikke middelrethed.
- Vi kan let udlede $Var(\hat{\beta})$ under SLR.5. Uden homoskedasticitet er det mere kompliceret (det ser vi på i kap. 8)

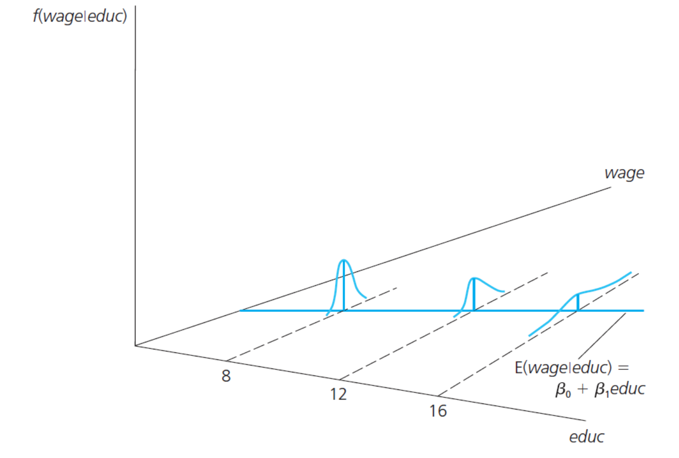
Homoskedasticitet: SLR.5 opfyldt

FIGURE 2.8 The simple regression model under homoskedasticity.



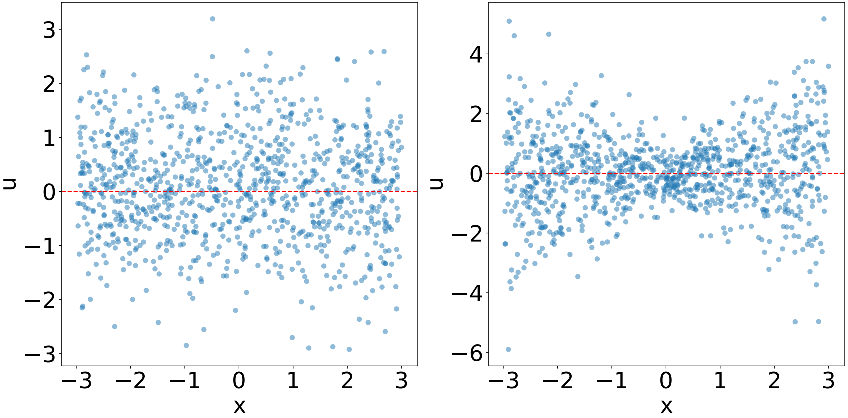
Heteroskedasticitet: SLR.5 ikke-opfyldt

FIGURE 2.9 Var(*wage*|*educ*) increasing with *educ*.



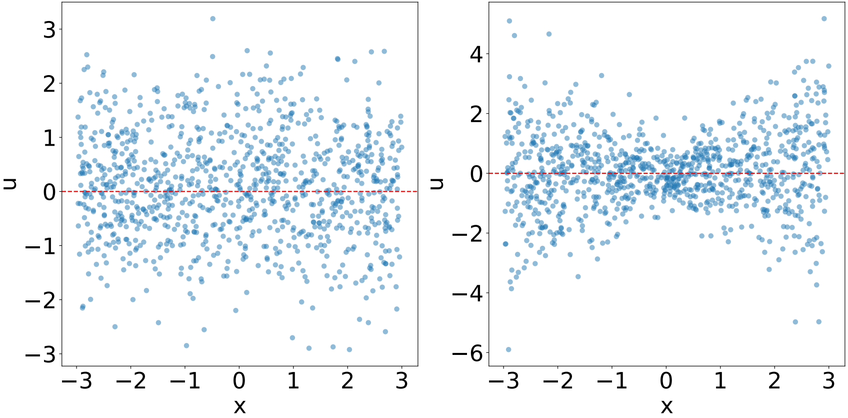
Heteroskedasticitet

Quiz: I hvilken figur er u heteroskedastisk?



Heteroskedasticitet

Quiz: I hvilken figur er *u* heteroskedastisk?



Left $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, for all i

Right $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(x_i))$ where $\sigma(x_i) = \sigma_0(1 + \gamma|x_i|)$

Homoskedasticitet

Hvad betyder homoskedasticitet?

- Det betyder at variansen af u beintinget på x er uafhængig af x.

Vi kan vise, at når SLR.5 er opfyldt, så gælder.

$$\begin{aligned} Var(u|x) &= E([u - E(u|x)]^2|x) \\ &= E(u^2|x) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Der gælder også, at:

$$Var(u) = E(u^2) = E(E(u^2|x)) = \sigma^2$$

Altså den ubetingede varians af fejlleddet er også σ^2.

Variansen af OLS-estimatoren

Teorem 2.2: Variansen af OLS-estimatoren

Under antagelse af SLR.1-SLR.5 gælder det, at variansen af OLS-estimatoren er:

$$Var(\hat{\beta}_1 \mid X) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{SST_x}$$

$$Var(\hat{\beta}_0 \mid X) = \frac{\sigma^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

hvor $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ er de x'er, vi har i vores data.

Variansen af OLS-estimatoren: Bevis

Ingredienser til beviset:

$$\text{OLS-estimatoren: } \hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n u_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Antagelser:

- SLR.1: Model: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$
- SLR.2: Observationerne er uafhængige.
- SLR.3: $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \neq 0$
- SLR.4: $E(u_i \mid x_i) = 0$
- SLR.5: $Var(u_i \mid x_i) = \sigma^2$

Regneregl:

- $Var(a(x)y + b(x) \mid x) = a(x)^2 Var(y \mid x)$

Variansen af OLS-estimatoren: Bevis

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}_1 \mid X) &= Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n u_i(x_i - \bar{x})}{SST_x} \middle| X \right) \\
&= \frac{1}{SST_x^2} Var\left(\sum_{i=1}^n u_i(x_i - \bar{x}) \middle| X \right) \quad \text{(brug SLR.2)} \\
&= \frac{1}{SST_x^2} \sum_{i=1}^n Var(u_i \mid X)(x_i - \bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{SST_x^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{(brug SLR.5)} \\
&= \frac{\sigma^2}{SST_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}
\end{aligned}
$$

Variansen af OLS-estimatoren

Variansen af fejlleddet, σ^2, er ukendt.

Vi kan estimere σ^2 med følgende estimator:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \frac{SSR}{n-2} \tag{7}$$

Bemærk: Vi dividerer med $n-2$ (ikke n) for at korrigere for at to parametre, $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$, er estimeret fra data.

Teorem 2.3: Middelrethed af OLS-variansestimatoren

Under antagelse af SLR.1-SLR.5 er estimatoren for variansen af fejlleddet middelret:

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

Bevis: Se Wooldridge (Teorem 2.3)

Variansen af OLS-estimatoren

Vi kan nu udregne **standardfejlen** for OLS-estimatoren.

Under antagelserne SLR.1-SLR.5 er standardfejlen for OLS-estimatoren:

$$se(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1 \mid X)} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} \tag{8}$$

Standardfejlen måler variationen i $\hat{\beta}_1$ forårsaget af stikprøvevariation.

Standardfejlen er central i hypotesetestning og konfidensintervaller.

Fordelingen af OLS-estimaterne

Opsummering

- Givet SLR.1-SLR.4 er OLS-estimatoren middelret.
- Givet SLR.1-SLR.5 er variansen af OLS-estimatoren:

$$Var(\hat{\beta}_1 \mid X) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

hvor variansen kan estimeres som:

$$\hat{\sigma}^2 = \tfrac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \tfrac{SSR}{n-2}$$

Dvs. vi ved nu:

$$\hat{\beta}_0 \sim ?\left(\beta_0, \frac{\sigma^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right) \quad \text{og} \quad \hat{\beta}_1 \sim ?\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$$

Vi har endnu ikke udledt fordelingen af $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$.

Let's code

- Jypyter Notebook: `02_slr_examples.ipynb`
- Part 3: Timeløn og uddannelse (Varians og standard fejl)
- Part 4: Simulationsstudie (egenskaber ved OLS estimator)

Regressionsmodel uden konstantled

Nogle gange kan vi have en formodning om at regressionsmodel **ikke** bør indholde et konstantled.

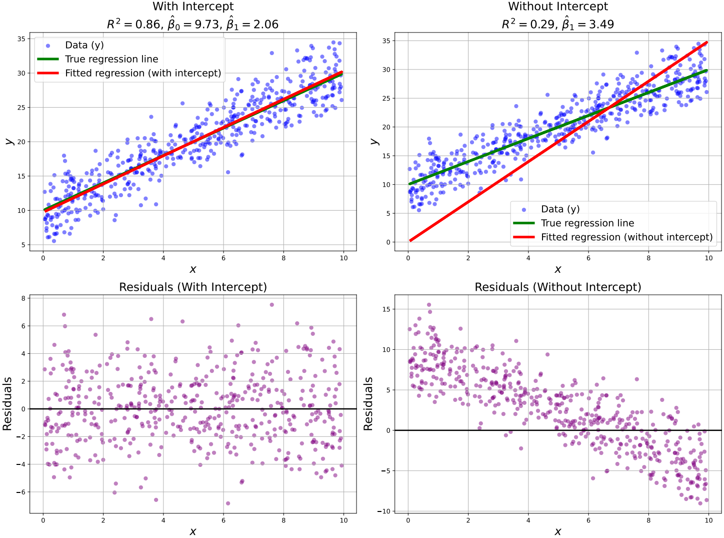
$$y = \beta_1 x_1 + u$$

Uden konstantled holder nogle af OLS egenskaberne dog ikke holder længere:

- Summen af residualerne $\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i$ er ikke nødvendigvis 0.
- R^2 kan blive negativ.
- Hvis der faktisk er et konstantled i den "sande model", vil OLS estimationen af en model uden konstantled være en **ikke-middelret estimator**.

Regressionsmodel med og uden konstantled

True parameters: $\beta_0 = 10, \beta_1 = 2$



Måleenheder og funktionelle former

Måleenheder og Funktionelle Former

- Skal sammenhængen mellem y og x være lineær for at anvende OLS? **Nej**.
- Transformationer ændrer parameterestimaterne, men OLS kan stadig bruges korrekt, så længe modellen er *lineær i parametrene*:

$$g(y_i) = \beta_0 + \beta_1 f(x_i) + u_i$$

- Fortolkningen af parametrene ændrer sig.
- Vi undersøger både *lineære* og *ikke-lineære* transformationer.

Lineære Transformationer

Regressionsmodel:

$$\text{timeløn}_i = \beta_0 + \beta_1\,\text{uddannelse}_i + u_i$$

Typiske lineære transformationer:

- **Timeløn i 2010-DKK priser:**
  $\text{timeløn}_i^{2010} = \text{timeløn}_i^{1994} \times 1.37$
- **Uddannelse i måneder:**
  $\text{uddannelse}_i^{\text{måned}} = 12 \times \text{uddannelse}_i^{\text{år}}$
- **Uddannelse relativt til 9. klasse:**
  $\text{uddannelse}_i^{9.\text{klasse}} = \text{uddannelse}_i^{0.\text{klasse}} - 9$

Let's code

- Jypyter Notebook: `02_slr_examples.ipynb`
- Part 5: Timeløn og uddannelse (Lineære transformationer)

Lineære transformationer

Overordnet gælder, at hvis vi starter fra modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

Så medfører de transformerede variable $\tilde{y}$ og $\tilde{x}$ følgende

$$\begin{aligned}
\tilde{y} = y * a \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\beta}_0 = a\hat{\beta}_0, \qquad && \tilde{\beta}_1 = a\hat{\beta}_1 \\
\tilde{y} = y + a \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\beta}_0 = \hat{\beta}_0 + a, \qquad && \tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x} = x * a \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\beta}_0 = \hat{\beta}_0, \qquad && \tilde{\beta}_1 = 1/a\hat{\beta}_1 \\
\tilde{x} = x + a \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\beta}_0 = \hat{\beta}_0 - a\hat{\beta}_1, \qquad && \tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1
\end{aligned}$$

I kan tjekke ovenstående ved at bruge $(\tilde{y}, \tilde{x})$ i udledningen af OLS estimatoren.

Lineære transformationer, Prædiktioner og Goodness of Fit

Påvirker lineære transformationer prædiktioner og R^2?

- Generelt nej.
- **Transformation af** x:
  - Betragt modellen: $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$
  - For prædiktionen: $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$
  - Transformeret model: $y = \beta_0 + \frac{\beta_1}{a}(a \cdot x) + u$
  - Dette giver: $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$
  - Da prædiktionen $\hat{y}$ forbliver den samme, ændres R^2 heller ikke.
- **Transformation af** y:
  - R^2 beregnes som: $R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{\sum(y-\hat{y})^2}{\sum(y-\bar{y})^2}$
  - Ved transformation af y, $y^* = a \cdot y$, får vi:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(a \cdot y - a \cdot \hat{y})^2}{\sum(a \cdot y - a \cdot \bar{y})^2}$$

  - Konstanten a forkorter sig ud, så R^2 forbliver uændret.

Lineære transformationer: Standardiserede variable

En særlig form for lineære transformation af en variabel kaldes **standardisering**

$$\tilde{x} = \frac{x_i - \bar{x}}{\hat{\sigma}_x}$$

Dvs. vi omdanner x til at have middelværdi 0 og standardfejl 1.

Hældningskoefficienten angiver effekten på y, når x stiger med en standard afvigelse (hvis MLR.1-4 er opfyldt).

Standardiserede variable bruges often når enheden på x er svært at fortolke. Fx testscore eller IQ-målinger.

Mere om det i Wooldridge kapitel 6.1.

Lineære transformationer

Quiz Betragt følgende estimations model

$$løn = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 uddannelse,$$

hvor vi måler uddannelse i år.

Antag at vi i stedet måler uddannelse i måneder. Hvilket af følgende udsagn er sande?

1. Parameterestimaterne er uændret.
2. SSE er uændret.
3. R^2 er uændret.
4. Standardfejlen på β_1 er uændret.

Ikke-lineære transformationer (funktionel form)

I mange studier er vi interesserede i den **procentvise effekt** på y ved en ændring i x. Fx det **procentvise afkast** af et ekstra år uddannelse.

En sådan model indebærer en **ikke-lineær sammenhæng** mellem x og y, men vi kan stadig estimere med OLS:

$$\log(\text{timeløn}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{uddannelse}_i + u$$

Fortolkning af β_1:

- Den **relative ændring** i timeløn ved et ekstra år uddannelse (ceteris paribus).
- $100 \cdot \beta_1$ er tilnærmelsesvist det **procentvise afkast** af et år uddannelse.

Vi kan også bruge log(uddannelse) for at fange **aftagende marginale effekter**

Ikke-lineære transformationer (funktionel form)

TABLE 2.3 Summary of Functional Forms Involving Logarithms			
Model	Dependent Variable	Independent Variable	Interpretation of β_1
Level-level	y	x	$\Delta y = \beta_1 \Delta x$
Level-log	y	$\log(x)$	$\Delta y = (\beta_1/100)\%\Delta x$
Log-level	$\log(y)$	x	$\%\Delta y = (100\beta_1)\Delta x$
Log-log	$\log(y)$	$\log(x)$	$\%\Delta y = \beta_1 \%\Delta x$

Eksempel:

$$\log(y) = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

Antag $dy/du = 0$ og differentier ligningen med hensyn til x:

$$d\log(y)/dx = \beta_1$$

Ikke-lineære transformationer: Stata eksempel

```
estimates table reg_base reg_lwage reg_leduc reg_loglog, stats(N r2)
```

Variable	reg_base	reg_lwage	reg_leduc	reg_loglog
educ	4.2669794	.02821304		
leduc			67.098009	.45628662
_cons	90.336431	4.5603896	-24.529995	3.7694963
N	1078	1078	1046	1046
r2	.0890296	.08450376	.11585009	.1159361

1 års udd ⇒ 4.27kr mere i timen

1 års udd ⇒ 2,8% mere i timeløn

100% mere udd. ⇒ 67 kr mere i timen

100% mere udd. ⇒ 46% mere i timen.

God øvelse. Prøv at genskabe i Python

Ikke-lineære transformationer (funktionel form)

Quiz

Ræk hånden op, hvis du mener følgende modeller er lineære i parametrene:

1. $y_i = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{x_i} + u_i$
2. $\exp(y_i) = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{x_i + 3} + u_i$
3. $Y_i = A L_i^{\beta_1} u_i$
4. $\log y_i = \beta_0 x_i^{\beta_1} + u_i$

Er det muligt at omskrive modellerne så de bliver lineære?

Data visualisering

Data visualisering

Indtil videre har vi været i en verden, hvor vi har antaget at modellen er lineær:

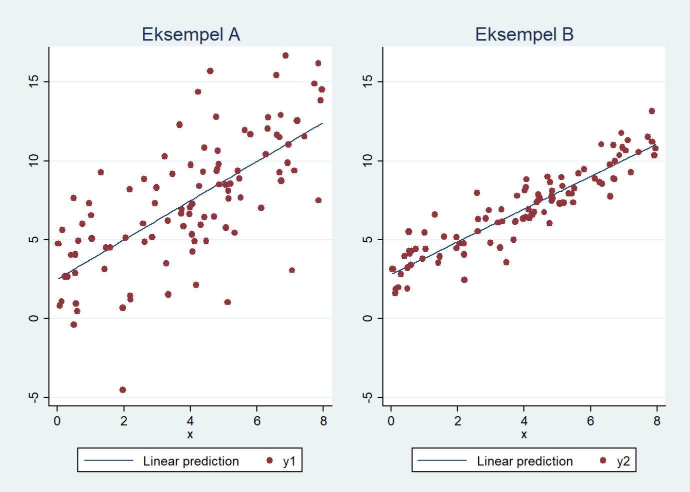
$$E(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Vi skal senere se formelle test af om den funktionelle form er rigtig.

En mere simpel måde at validere den funktionelle form på er ved visuel inspektion af data.

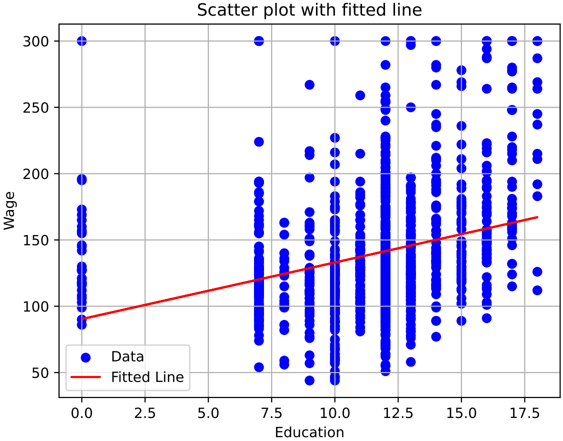
Quiz

Ræk hånden op, hvis du mener den funktionelle form er rigtig:



Data visualisering: Python eksempel

Hvad med her?



Hvad hvis vi havde millioner af observationer?

Data visualisering

Vi kan danne et simpelt "ikke-parametrisk" estimator for $E(y|x)$, som

$$E(y|x) = \mu(x)$$

hvor $\mu(x)$ er gennemsnittet af y for personer med $x_i \in [x - \epsilon; x + \epsilon]$.

Vi kan plotte μ_x sammen med den fittede linje OLS uanset hvor mange observationer vi har.

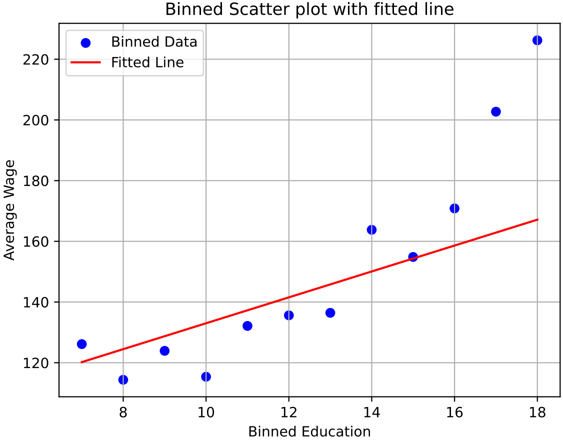
Det kaldes et **bin scatter plot**.

- Bin = et interval af x.
- Dvs. vi beregner gennemsnittet af y indenfor et interval af x.
- I vores eksempel er det mest naturlige at bruge år.

Data visualisering: Python eksempel

Hvad med nu?

Ræk hånden op, hvis du mener den funktionelle form er rigtig:



Repliaction code for scatter and binned scatter plot

- Jypyter Notebook: `02_slr_examples.ipynb`
- Part 6: Timeløn og uddannelse (Data visualization)

Opsummering

Opsummering: OLS er en (conditional) mean estimator

Opsummering

OLS model: $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$

- SLR.1-SLR.4 $\implies$ OLS er middelret.
- SLR.5 $\implies$ Vi kan udregne variansen af OLS.

Husk der er forskel på:

- **Populationsparametre:** β_0 og β_1 (de sande værdier i populationen)
- **Estimater:** $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ (beregnet ud fra data ved hjælp af OLS-estimatoren)
- **OLS-estimatoren:** Metoden vi bruger til at beregne estimaterne

Og forskel på

- Statistisk antagelse: $E(u|x) = E(u) = 0$
- Mekaniske egenskaber for residualerne: $\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i x_i = 0.$