

常见概率分布

王树佳
深圳大学经济学院
wangsj@szu.edu.cn

目录

1	离散型随机变量的分布	2
1.1	(0-1) 分布	2
1.2	二项分布	2
1.3	几何分布	2
1.4	负二项分布	2
1.5	超几何分布	2
1.6	泊松分布	3
2	连续型随机变量的分布	3
2.1	均匀分布	3
2.2	正态分布	3
2.3	指数分布	3
2.4	伽马 (Γ) 分布	4
2.5	逆伽玛分布	4
2.6	贝塔 (β) 分布	4
2.7	柯西分布	4
2.8	对数正态分布	5
2.9	韦布尔分布/韦伯分布	5
2.10	t 分布	5
2.11	一般 t 分布	5
2.12	多元 t 分布	6
2.13	卡方 (χ^2) 分布	6
2.14	F 分布	6
2.15	拉普拉斯分布	6
2.16	瑞利分布	6
3	常用多维分布	7
3.1	多项分布	7
3.2	多元正态分布	7
3.3	威希特分布 (Wishart 分布)	8
3.4	T^2 分布 (Hotelling T^2 分布)	8
3.5	Wilks 分布	8

1 离散型随机变量的分布

1.1 (0-1) 分布

定义 1 设随机变量 X 只可能取 0 与 1 两个值, 它的分布律是

$$P(X = k) = p^k q^{1-k}, k = 0, 1; p + q = 1 (0 < p < 1)$$

则称 X 服从(0-1)分布或两点分布, 记为 $X \sim B(x, p)$ 。

其中 $E(X) = p, D(X) = p(1-p)$ 。

1.2 二项分布

定义 2 在 n 次独立重复试验中, 记 X 为事件 A 发生的次数, 假设在每次试验中事件 A 发生的概率都是 p , 则随机变量 X 的分布称为二项分布, 记为 $X \sim Binom(n, p)$, 其概率函数为

$$P(X = k|n, p) = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k}, (k = 0, 1, \dots, n; 0 < p < 1)$$

其中 $E(X) = np, D(X) = np(1-p)$ 。

1.3 几何分布

定义 3 在 n 次伯努利试验中, 试验 k 次才得到第一次成功的机率, 即前 $k-1$ 次皆失败, 第 k 次成功的概率。其概率函数为

$$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, (x = 1, 2, \dots)$$

则称 X 的分布为几何分布, 记为 $X \sim geom(p)$ 。

其数学期望和方差分别为

$$E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

1.4 负二项分布

定义 4 假设有一组独立的伯努利实验, 每次实验都有两种结果“成功”和“失败”, X 为实验成功 r 次之前失败的次数, 实验持续到 r 次成功, r 为正整数, 其概率函数为

$$f(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x, (x = 0, 1, 2, \dots)$$

则称 X 的分布为负二项分布, 记为 $X \sim NB(r, p)$ 。当 $r = 1$ 时, $NB(1, p) = Geom(p)$ 。

其数学期望和方差为

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p}, D(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

1.5 超几何分布

定义 5 产品抽样检查中经常遇到一类实际问题, 假定在 N 件产品中有 M 件不合格品, 即不合格率 $p = M/N$ 。在产品中随机抽 n 件做检查, 发现 k 件不合格品的概率为

$$PX = k = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k \in Z, \max\{0, n-N+M\} \leq k \leq \min\{n, M\}$$

则称 X 的分布为超几何分布, 记为 $X \sim H(N, M, n)$ 。

其数学期望和方差为

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{nM}{N}, \\ D(X) &= \frac{nM}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right). \end{aligned}$$

1.6 泊松分布

定义 6 设随机变量 X 所有可能取的值为 $0, 1, 2, \dots$, 参数 λ 是单位时间 $[0, 1]$ 内随机事件的平均发生次数, 其概率函数为

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, (x = 0, 1, 2, \dots)$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim \text{Posi}(\lambda)$ 。

其中 $E(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$ 。

2 连续型随机变量的分布

2.1 均匀分布

定义 7 如果随机变量 X 的密度函数 (pdf) 为

$$X \sim f(x|a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

则 X 的分布称为 (a, b) 区间的均匀分布, 记为 $X \sim \text{Unif}(a, b)$ 。

其数学期望和方差分别为

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a+b}{2}, \\ D(X) &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

2.2 正态分布

定义 8 若连续型随机变量 x 的概率密度 (pdf) 为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

其中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为常数, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

其中 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$ 。

当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 正态分布就成了标准正态分布, 记为 $X \sim N(0, 1)$ 。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

2.3 指数分布

定义 9 设连续型随机变量 x 的概率密度 (pdf) 为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数, 则称为 X 服从参数 λ 的指数分布, 记为 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 。

其数学期望和方差分别为

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$\end{eqnarray*}$

2.4 伽马 (Γ) 分布

定义 10 假设随机变量 x 为等到第 α 件事发生所需的等候时间, 概率密度函数 (*pdf*) 为

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, (x > 0)$$

则称 X 的分布称为伽马分布, 分布中的参数 α 为形状参数, λ 为尺度参数, 记为 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ 或 $X \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda)$ 。

其数学期望和方差分别为

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, D(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

2.5 逆伽玛分布

定义 11 如果 $1/X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, 则称 X 服从逆伽玛分布, 记为 $X \sim \text{IG}(\alpha, \beta)$ 分布, 其 *pdf* 为:

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/x), (\alpha > 0, \beta > 0)$$

其数学期望为

$$E(X) = \beta/(\alpha - 1), \alpha > 1,$$

其方差为

$$D(X) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \alpha > 2.$$

If $X \sim \text{IG}(\alpha, \beta)$, then $1/X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$,

If $X \sim \text{IG}(\nu/2, \nu s^2/2)$, then $\nu s^2/X \sim \chi^2(\nu)$ 。

2.6 贝塔 (β) 分布

定义 12 一组定义在 $(0, 1)$ 区间的连续概率分布, 有两个参数 $\alpha, \beta > 0$, 其概率密度函数 (*pdf*) 为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, (0 < x < 1) \end{aligned}$$

随机变量 X 服从参数为 α, β 的贝塔分布, 记为 $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ 。

其数学期望和方差分别为

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \\ D(X) &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \end{aligned}$$

2.7 柯西分布

定义 13 柯西分布是一个数学期望不存在的连续型概率分布, 其概率密度函数 (*pdf*) 为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\beta\pi} [1 + (\frac{x-m}{\beta})^2]^{-1} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + (x-a)^2}, (-\infty < x < \infty) \end{aligned}$$

式中 m 为定义峰值位置的位置参数, β 为尺度参数, 记为 $X \sim \text{cauchy}(\text{location} = m, \text{scale} = \beta)$ 。

其数学期望和方差不存在。

2.8 对数正态分布

定义 14 一个随机变量的对数服从正态分布, 则该随机变量服从**对数正态分布**, 设 X 是取值为正数的连续随机变量, 若 $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X 的概率密度函数 (*pdf*) 为

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], (x > 0)$$

记为 $X \sim Inorm(\mu, \sigma^2)$ 。

其数学期望和方差分别为

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \\ D(X) &= (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}. \end{aligned}$$

2.9 韦布尔分布/韦伯分布

定义 15 韦伯分布是一个连续型的概率分布, 是可靠性分析和寿命检验的理论基础, 其概率密度函数 (*pdf*) 为

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right), (x > 0)$$

其中, α 为比例参数, β 是形状参数, 记为 $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$ 。

其数学期望和方差分别为

$$\begin{aligned} E(X) &= \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \\ D(X) &= \alpha^2 [\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})^2]. \end{aligned}$$

2.10 t 分布

定义 16 设 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ 。且 X, Y 独立, 则称随机变量 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记为 $t \sim t(n)$ 。 t 分布又称学生氏分布, $t(n)$ 分布的概率密度函数 (*pdf*) 为

$$h(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, (-\infty < x < \infty)$$

其数学期望和方差分别为

$$E(X) = 0, D(X) = \frac{n}{n-2}$$

2.11 一般 t 分布

定义 17 一个随机变量称为 $T \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$, 如果 $T = \mu + \sigma Z$, 其中 Z 为标准 t -分布, 其 *pdf* 为

$$f(t|\nu, \mu, \sigma^2) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{(\sigma^2 \nu \pi)^{1/2} \Gamma(\nu/2)} \left[1 + \frac{(t-\mu)^2}{\nu \sigma^2}\right]^{-(\nu+1)/2}$$

其中 ν 为自由度, μ 为位置参数, σ 为尺度参数。

其均值为 $E(T) = \mu (\nu > 1)$, 其方差为

$$Var(T) = \frac{\nu \sigma^2}{\nu - 2} (\nu > 2).$$

如果 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$, 则为标准 t -分布: $T \sim t(\nu)$ 。

2.12 多元 t 分布

定义 18 称 p 维随机向量 $\mathbf{y} \sim t_\nu(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 或 $t(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \nu)$, 如果

$$f(\mathbf{y}) = c|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right)^{-(\nu+p)/2}$$

其中 ν 自由度, $\boldsymbol{\mu}$ 为位置参数, Σ 为尺度参数 (正定矩阵)。

如果 $\nu = 1$, 则为哥西 (Cauchy) 分布。

其数学期望为 $E(Y) = \mu, (\nu > 1)$, 其方差为

$$D(Y) = \frac{\nu}{\nu - 2} \Sigma, (\nu > 2).$$

2.13 卡方 (χ^2) 分布

定义 19 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(0, 1)$ 的样本, 则称统计量 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布, 记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ 。自由度是指包含独立变量的个数。其概率密度函数 (pdf) 为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

其数学期望和方差分别为

$$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$$

2.14 F 分布

定义 20 设 $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$ 。且 U, V 独立, 则称随机变量 $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$, 其概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2] (n_1/n_2)^{n_1/2} y^{(n_1/2)-1}}{\Gamma(n_1/2) \Gamma(n_2/2) [1+(n_1 y/n_2)]^{(n_1+n_2)/2}} & y > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

其数学期望和方差分别为

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{n_2}{n_2 - 2}, \\ D(X) &= \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}, (n_2 > 4). \end{aligned}$$

2.15 拉普拉斯分布

定义 21 如果随机变量 X 的密度函数 (pdf) 为

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\lambda}\right)$$

其中 λ, μ 为常数, 且 $\lambda > 0$, 则称 X 服从参数为 μ (位置参数), λ (尺度参数) 的拉普拉斯分布, 记为 $X \sim La(\mu, \lambda)$ 。

其数学期望和方差分别为 $E(X) = \mu, D(X) = 2\lambda^2$ 。

2.16 瑞利分布

定义 22 如果随机变量 X 的密度函数 (pdf) 为

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

则 X 的分布称为瑞利分布。

其数学期望和方差分别为

$$\begin{aligned} E(X) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \\ D(X) &= \frac{4-\pi}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

3 常用多维分布

3.1 多项分布

定义 23 假设进行 n 次独立重复试验，每次试验中有 k 个可能的结果，各个结果发生的概率分别为 p_1, \dots, p_k (其中 $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^k p_i = 1$)。记 X_i 为第 i 个结果出现的次数，则称随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ 服从多项分布 (*Multinomial distribution*)，参数为 n 和 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)^T$ ，记为 $\mathbf{X} \sim \text{Multinom}(n, \mathbf{p})$ ，其联合概率函数 (pmf) 为

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \binom{n}{x_1 x_2 \dots x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}, (x_i \geq 0, \sum_{i=1}^k x_i = n).$$

多项分布 $\text{Multinom}(n, \mathbf{p})$ 具有如下性质：

1. $E(\mathbf{X}) = n\mathbf{p}$, 即 $E(X_i) = np_i (i = 1, 2, \dots, k)$
2. \mathbf{X} 的协方差矩阵 Σ 是对称矩阵，其对角线元素为

$$\sigma_i^2 = np_i(1 - p_i),$$

非对角线元素为

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j (i \neq j).$$

3. \mathbf{X} 的相关系数矩阵元素为

$$\text{Corr}(X_i, X_j) = \frac{-np_i p_j}{\sqrt{np_i(1 - p_i) \cdot np_j(1 - p_j)}} = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{q_i q_j}}$$

4. 记 $\mathbf{X}_{(k-1)} = (X_1, X_2, \dots, X_{k-1})^T$ ，则 $\mathbf{X}_{(k-1)} \sim \text{Multinom}(n, \mathbf{p}_{(k-1)})$ ，其中

$$\mathbf{p}_{(k-1)} = (p_1, \dots, p_{k-2}, p_{k-1} + p_k)^T.$$

特别, $X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$.

3.2 多元正态分布

定义 24 多元正态分布亦称为多变量高斯分布。它是一元正态分布向多维的推广。

N 维随机向量 $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_N]^T$ 如果服从多元正态分布，必须满足下面的三个等价条件：

- (1) 任何线性组合 $Y = a_1 X_1 + \dots + a_N X_N$ 服从正态分布。
- (2) 存在随机向量 $\mathbf{Z} = [Z_1, \dots, Z_M]^T$ (它的每个元素服从独立标准正态分布)，向量 $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_N]^T$ 及 $N \times M$ 矩阵 A 满足 $\mathbf{X} = A\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$ 。
- (3) 存在 $\boldsymbol{\mu}$ 和一个对称半正定阵 Σ 满足 \mathbf{X} 的特征函数：

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \exp(i\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^T \Sigma \boldsymbol{\mu})$$

如果一个 p 维随机向量 \mathbf{X} 服从多元正态分布 (多元高斯分布)，其联合概率密度函数为

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}, (\Sigma > 0)$$

其中 $\boldsymbol{\mu}$ 是均值向量, $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称正半定矩阵, 记为 $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 。

其数学期望和方差分别为

$$E(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}, D(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma}.$$

3.3 威希特分布 (Wishart 分布)

定义 25 假设 $\boldsymbol{X}_{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) 相互独立, 且 $\boldsymbol{X}_{(\alpha)} \sim N_p(0, \boldsymbol{\Sigma})$, 则随机 $p \times p$ 矩阵 $\boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T$ 服从自由度为 n 的威希特分布, 记为 $\boldsymbol{W} \sim W_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$ 。其概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2^{\frac{np}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{n}{2}} \Gamma_p(\frac{n}{2})} |\boldsymbol{W}|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{W})\}$$

其数学期望和方差分别为

$$E(\boldsymbol{W}) = n\boldsymbol{\Sigma},$$

$$D(w_{ij}) = n(\sigma_{ij}^2 + \sigma_{ii}\sigma_{jj})$$

对于 $n \geq p$ 的矩阵 \boldsymbol{W} , 如果 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是可逆的, 那么它也是可逆的。当 $p = \boldsymbol{\Sigma} = 1$, 那么这个分布是一个自由度为 n 的 χ^2 分布。

3.4 T^2 分布 (Hotelling T^2 分布)

定义 26 假设 $\boldsymbol{W} \sim W_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{X} \sim N_p(0, \boldsymbol{\Sigma})$, $n \geq p$, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$, \boldsymbol{W} 与 \boldsymbol{X} 相互独立, 则随机变量

$$T^2 = n\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{X}$$

所遵从的分布为第一自由度为 p , 第二自由度为 n 的 T^2 分布, 记为 $T^2 \sim T^2(p, n)$ 。 T^2 分布可转化为 F 分布, 其关系可以表示为:

$$\frac{n-p+1}{pn} T^2(p, n) = F(p, n-p+1)$$

3.5 Wilks 分布

定义 27 假设 $\boldsymbol{W}_1 \sim W_p(n_1, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{W}_2 \sim W_p(n_2, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$, $n_1 > p$, \boldsymbol{W}_1 与 \boldsymbol{W}_2 相互独立, 则

$$\Lambda = \frac{\boldsymbol{W}_1}{\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W}_2}$$

服从维度为 p , 第一自由度为 n_1 , 第二自由度为 n_2 的 Wilks- Λ 分布, 记为 $\Lambda \sim \Lambda(p, n_1, n_2)$ 。