Questão 1)

a) Sabemos que para T ser uma árvore geradora de G, deve conter os n vértices de G e conter apenas n-1 arestas de G. Portanto cada vértice de tem apenas um caminho para chegar em outro vértice, assim se v tem grau > 1, ele possui ligação com dois vértices diferentes, e ao removê-lo irá resultar em um grafo desconexo, ou seja, um grafo com duas ou mais componentes conexas.

b) Para v ser um vértice de corte, ao removê-lo deveremos obter pelo menos duas componentes conexas. Sabendo que existe apenas um caminho entre qualquer vértice em uma árvore geradora, se v é um vértice de corte ele deve ser adjacente a pelo menos outros dois vértices, sendo assim o grau de v é maior que 1.

c) Não. Como o vértice é "folha" ele contém apenas um vértice adjacente, e ao removê-lo a árvore gerada continuara com apenas uma componente conexa, logo, as folhas não podem ser vértices de corte.

Questão 2)

Para um grafo ser conexo deve-se encontrar pelo menos um caminho ligando quaisquer dois vértices pertencente ao grafo, se existem n vértices e n-1 arestas, então para ser conexo deve ocorrer ciclos entre os vértices, assim cumprimos as propriedades de uma árvore.

Questão 3)

Chamando m de número de arestas e n de número de vértices, temos que para T ser árvore geradora de G, $n_t=n_g$, ou seja, T possui todos os vértices de G. Sabemos também que para T ser árvore não existe ciclos entre seus vértices, então $m_t=n_t-1=n_g-1$, e para continuar com a propriedade de árvore, T é conexo, onde todas as arestas são pontes. Daí T é subgrafo conexo minimal de G.

Questão 4)

Se T é arvore, então é conexa e sem ciclos, tendo em mente essas duas definições, o grau de um vértice indica quantos "galhos" diferentes existem independentes dos outros. Logo o maior grau de T, representa o número mínimo de folhas que existe em T, pois cada "galho" possui de 1 ate (Δ(T)-1) folhas.

Questão 5)

Cada aresta contribui exatamente para um grau de entrada e um grau de saída. Portanto, a soma das entradas = soma das saídas = número total de arestas do grafo.

Questão 6)

Questão 7)

a) Sabemos que para um subgrafo H ser induzido de G, para quaisquer dois vértices u e v pertencentes a G que estão presentes em H, então existe a aresta (u,v) se a mesma pertencer a G. Daí, vemos que a expressão dos grafos induzidos dado o número de n é:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Que é o somatório de todas as combinações realizadas escolhendo de p a p o número de vértices do subgrafo induzido, onde a ordem dos vértices não importa.

b)

c) Como o subgrafo é gerador temos a certeza de que todos os vértices de G estão presentes em H, portanto o número de subgrafos é dado por combinação das arestas m, tomadas de p a p:

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

Onde p = 1 é quando existe apenas uma aresta e p = m é o número máximo de arestas.

Questão 8)

Questão 9)

Se T é uma árvore, não possui ciclos e é conexo, portanto cada vértice v de T possui pelo menos um vértice adjacente, e neste caso, v é uma folha. O grau de uma folha é 1, e a sua remoção resulta em apenas uma componente conexa, se o $\delta(v) > 1$, v é chamado de vértice de corte, pois a sua remoção irá gerar pelo menos duas componentes conexas e esse número depende do grau de v, pois como não existe ciclos não há como traçar um caminho para chegas nos vértices ligados a v após a sua remoção, logo $|C(T-v)| = \delta(v)$.

Questão 10)

No percurso em largura os vértices alcançados são colocados em uma fila, ou seja, o que está a mais tempo na fila é o primeiro a ser utilizado. Com esse esquema garantimos que primeiro encontramos todos vértices adjacentes a raiz, e descendo os níveis de acordo com o número de vértices necessários para chegar a raiz. Se um vértice já foi encontrado não fazemos nada, evitando a criação de ciclos. No final o resultado é uma arvore onde o caminho da raiz r até qualquer vértice v, possui a menor quantidade de arestas possível.

Questão 11)

Questão 12)

Questão 13)

a) No percurso em profundidade, a estrutura em que colocamos os vértices alcançados pela primeira vez é uma pilha, logo, ao inserir o primeiro vértice v adjacente a raiz r, na próxima iteração a busca será feita a partir de v, e segue o processo para os descendentes de v, até que o programa comece a desempilhar até voltar a r, se ainda existir vértices adjacentes a r, o procedimento continua até não existir. Caso exista vértices adjacentes a raiz após o primeiro empilhamento e desempilhamento, significa que nenhum dos descendentes de w possui ligação com os mesmos, portanto concluímos que r é vértice do corte em G.

b) Considerando que v é um vértice de corte, para que isso ocorra seus descendentes não podem ter “ligações” com os seus ancestrais, pois implicaria em um ciclo em G, fazendo com que exista outro caminho para sair dos ancestrais e chegar nos descendentes. Portanto se em G, v liga os ancestrais até os descendentes com um único caminho, significa que v é um vértice de corte.

c) De maneira análoga ao que ocorre no exercício anterior, se não existir caminhos entre os ancestrais de u com um descendente de v, temos que em G, (u,v) é uma ponte, ou seja, uma aresta de corte que ao ser removida gera duas componentes conexas.