LISTA 03

TEORIA DOS GRAFOS

Universidade Federal do Espírito Santo

Centro Universitário do Norte Espírito Santo

Gustavo Fardin Montes

Willian Macedo Rodrigues

2018

1 Solução dos Exercícios

Questão 1: Um grafo G é hamiltoniano se tem um ciclo hamiltoniano. Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um caminho(ou circuito) que contém todos vértice em G.

Um grafo bipartido $K_{m,n}$ não é necessariamente um grafo hamiltoniano. No caso em que o grafo bipartido tem $m \neq n$, cada conjunto só pode ter ligação com o outro. Então, não podemos retornar ao vértice inicial sem repetir um dos vértices do meio do caminho. Mostramos isto com um contra-exemplo.

Na figura 1 temos um grafo bipartido K com $n = 2$ e $m = 3$. Começamos nosso caminho a partir do conjunto $C1$ pelo caminho (A,C,B,E) ou (A,C,B,D) e vemos que não tem como ir ao vértice que sobra em C2, isso porque não há mais vértices em C1 que já não estejam no caminho.

Se começamos em $C2$ temos um caminho (C,A,D,B,E) que é um caminho hamiltoniano, porém, não temos como fechar o ciclo pois o vértice que sobra pertence ao mesmo conjunto do ultimo vértice do caminho, e não podemos ligar eles com uma aresta, pois não teríamos mais um grafo bipartido.

Portanto, concluímos que um grafo bipartido $K_{m,n}$ completo não é necessariamente hamiltoniano.

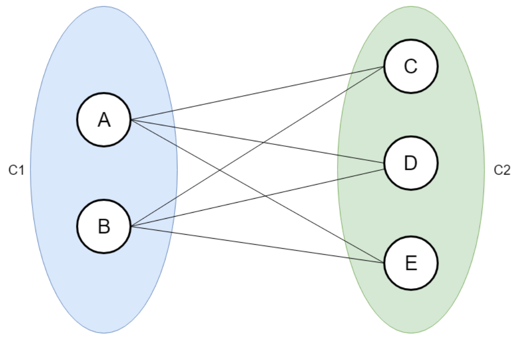

Figura 1: Grafo bipartido $K_{m,n}$ completo utilizado como contra exemplo na questão 1.

Questão 2: Na questão 1 definimos um grafo hamiltoniano. Um grafo de Euler é definido por um grafo que contem uma tour de Euler. Um tour de Euler é um tour no grafo G que contém cada aresta de G exatamente uma vez. Vemos um exemplo na figura 2.

Definimos o grafo como de Euler pois podemos realizar o tour (A,C),(C,B),(B,C),(C,A). Esse tour é um tour euleriano e portanto o grafo é euleriano. O Grafo não é Hamiltoniano pois não há maneira alguma que eu retorne para o vértice inicial sem antes repetir algum vértice no tour.

Notamos que essa característica é mantida para qualquer ponto de inicio. Se eu começo em B, resta ir apenas para C, e de C eu tenho que ir para A, caso contrario vou entrar em um laço e indo para A eu tenho que voltar para meu ponto inicial, porém só tem como fazer isso passando por C. Começando em C eu tenho que escolher ir para A ou B, porém, escolhendo um desses, para incluir o ultimo vértice no caminho, eu tenho que passar por C, pois A não é ligada diretamente a B e vice versa.

Assim, concluímos que o grafo é de Euler e não hamiltoniano.

Questão 3: Um ciclo hamiltoniano é em G é um ciclo que contém todo vértice em G. Aqui vamos mostrar um contra-exemplo que mostra que nem todo grafo com número de vértices $n \geq 3$ e grau mínimo $\delta(G) \geq 2$ possui um ciclo hamiltoniano.

Na figura 3 vemos um grafo com $N = 5$, portanto $N \geq 3$, e com $delta(G) \geq 2$. Esse grafo não possui nenhum ciclo hamiltoniano.

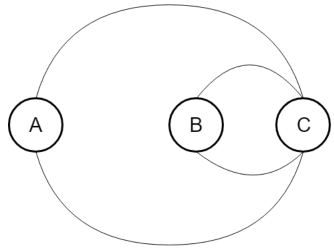

Figura 2: Grafo referente a questão 2.

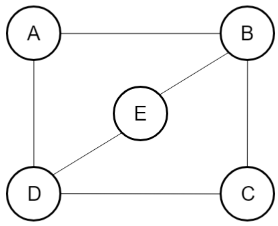

Figura 3: Grafo referente a questão 3.

Questão 4: Começamos provando a ida da proposta. Sabemos que o grafo é conexo e um grafo de Euler, portanto, todo grau de vértice do grafo é par. O grafo pode possuir apenas um circuito que seria o caso mais básico, se não, sobrariam mais arestas para serem percorridas. Como o grafo é conexo então existe um caminho entre qual par de vértices. Logo, existe um caminho entre algum vértice do circuito até uma aresta que não foi inclusa no circuito C.

Imagine que esse caminho seja formado pela aresta (j, k) onde j pertence a c e k pertence a g. Se isso ocorre deve-se percorrer o grafo oa partir de g visitando as novas arestas sem acessar nenhuma aresta em C. Esse novo circuito C' pode ser unido a C formando um único circuito. Se ainda existir arestas, repete-se o processo.

Portanto o circuito de Euler $E = c_1, c_2, \cdots, c_n$ onde a intercessão das aresta do circuito é nula.

Para provar que a reciproca vale supor um grafo G que pode ser decomposto em circuitos, isto é, G é uma união de circuitos disjuntos. Como todo vértice de um circuito possui grau par, o grau de cada vértice de G é necessariamente par, então G é um grafo de Euler.

Questão 5: Para ser solução do problema de cacheiro viajante temos que o grafo tem que ser hamiltaniano e o ciclo hamiltoniano deve ter peso minimo. Vemos que o caminho é hamiltoniano pois ele percorre todos os vértices no circuito

(E,B,A,C,D,E). Vemos que esse circuito não repete nenhum vértice intermediário, apenas o primeiro e ultimo vértice, para fechar o circuito. Pode se conferir que o peso do caminho fechado é minimo por inspeção, já que analisar todas possibilidades geraria um problema $O(n!)$ para um grafo completo, ou seja, cerca de 120 operações para $n = 5$.

Questão 6: A solução é dada pelo caminho fechado (B,A,D,E,C,B) onde encontramos este resultado por inspeção. Neste caso todos os vértices são contidos no caminho e o único vértice repetido é o inicial/final logo temos um grafo e caminho hamiltoniano, então esse caminho fechado sendo o de custo minimo no grafo,logo concluímos temos uma solução para o problema do caixeiro viajante com custo 20.

Questão 7: Para resolver o problema precisamos encontrar o grafo euleriano com menor custo. Vemos que o grafo dado não é euleriano pois existem dois vértices com grau 3, e sabemos que para um grafo ser euleriano, todos os vértices devem ter grau par. Para resolver esse problema vamos usar as técnicas de duplicar arestas de maneira que o grafo obtido tenha o menor peso. Precisamos adicionar o menor numero de arestas possível e com o menor peso.

Analisando o grafo vemos que ao adicionar mais uma aresta (a,b) com peso 1,(b,d) com peso 2, (d,f) com peso e por ultimo outra (f,g) com peso 1, teremos um grafo euleriano, pois todos vértices terão grau par, e o custo será o menor, já que serão adicionados apenas duas arestas com o peso somado igual a 6.

A solução do problema é dado pelo conjunto de arestas

$$E = \{E1, E2, \cdots, E17, E18\}$$

com inicio e fim em A onde essas arestas são dadas na figura 4. Notamos que as arestas foram direcionadas apenas para facilitar a leitura da figura. A resposta final possui um custo 43 onde 37 é a soma do peso de todas as arestas do grafo original e 6 é o peso das arestas que duplicamos, somando os dois, obtemos 43.

Questão 8: Para realizar essa prova devemos mostrar o porquê que os K_5 não é planar.

Sabemos que o K_4 é planar e usamos isto para a demonstração. Se temos 4 vértices conectados entre si, devemos então inserir mais um vértice ligado aos outros existentes. Sabemos que o vértice v_5 a ser inserido deve estar entre uma das 4 regiões de K_4, em $int(c1)$, $int(c2)$, $int(c3)$, onde $c1$ é o ciclo $(V1, V2, V4, V1)$, $c2$ é o ciclo $(V2, V3, V4, V2)$ e $c3$ é o ciclo $(V1, V3, V4, V1)$.

Como nenhum dos ciclos inclui todos os vértices, ao inserir v_5 em algum deles, sempre existirá uma aresta fechando a curva de Jordan, fazendo assim que não possa existir a ligação sem o cruzamento de arestas, então se removermos uma das arestas de algum dos ciclos, não existiria a curva de Jordan, e concluímos que o grafo $K_5 - e$ seria planar.

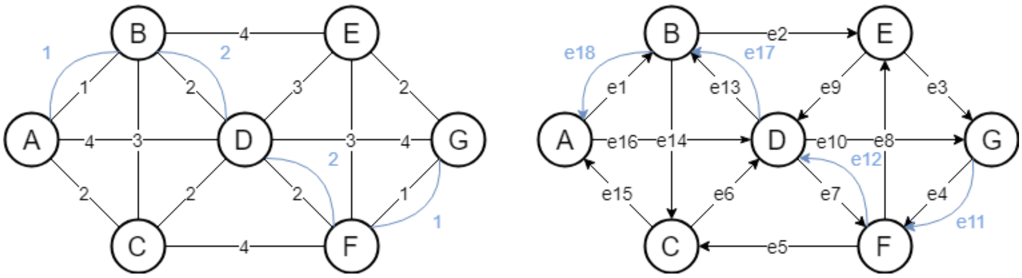

Figura 4: Grafo referente a questão 7. Na primeira figura a esquerda vemos o grafo após adicionar as arestas para tornar todo os graus pares. Na segunda figura vemos o caminho fechado que é a solução do problema.

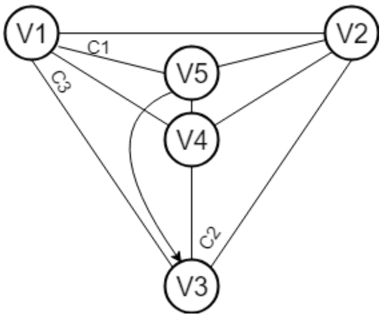

Figura 5: Um exemplo para visualizar o que acontece quando inserimos V5 dentro de uma face. Temos que alguma aresta de v_5 sempre vai ter que cortar um limite da região

Questão 9: Sabemos que por ser um grafo regular a soma dos graus de cada vértice é o dobro do total de arestas. Portante temos que $4v = 2e$ e temos que

$$\Rightarrow f = e - v + 2$$

$$\Rightarrow 10 = 2v - v + 2$$

$$\Rightarrow v = 10 - 2$$

$$\Rightarrow v = 8$$

Vemos um exemplo do desenho de G na figura 7.

Questão 10: A estrategia geral para resolver essa solução enquanto existir caminho aumentante de fluxo com inicio em t e fim em s, onde o caminho aumentante foi escolhido de maneira aleatória, encontramos o bottleneck do caminho (aresta com menor possibilidade de fluxo) e então acrescentamento esse fluxo a todo as

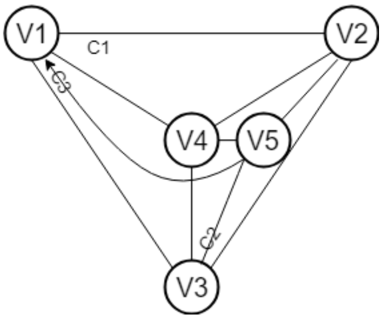

Figura 6: Um segundo exemplo para visualizar o que acontece quando inserimos v_5 dentro de uma face. É fácil observar que v_5 sempre corta uma única aresta, então removendo a mesma, temos que o grafo é planar. Vale ressaltar que há de uma aresta que pode ser removida para tornar o grafo planar e a figura é apenas para ilustrar que sempre há um corte por alguma aresta.

arestas do caminho desde que todos tinha capacidade. Atualizamos o grafo residual onde as arestas azuis demonstram a quantidade de fluxo remanescente que poderia ser passado por cada aresta e inserimos ou atualizamos a aresta vermelha (v, u) que representa a quantidade de fluxo que já passa de u para v. Fazemos isto até não existir mais caminhos aumentantes. Realizando esse processo e analisando a ultima figura 14 temos que o fluxo máximo é 32.

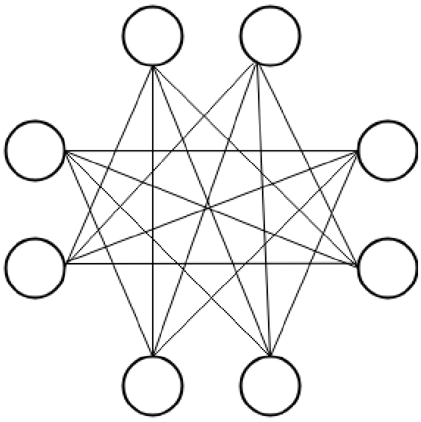

Figura 7: Grafo que representa uma representação de G do resultado da questão 9.

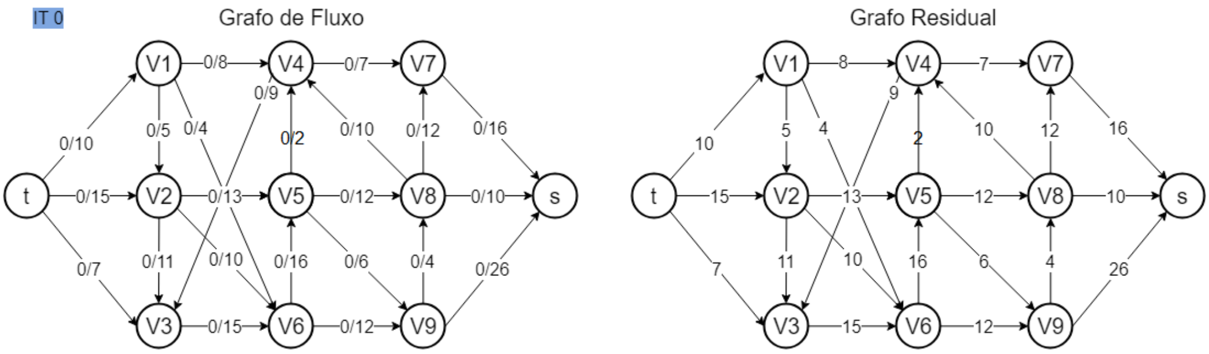

Figura 8: Dois grafos encontrados na iteração 0 da questão 10. Notamos que este passo consiste em apenas iniciar todos os valores do grafo de fluxo como 0 e fazer uma copia do grafo original para o grafo residual.

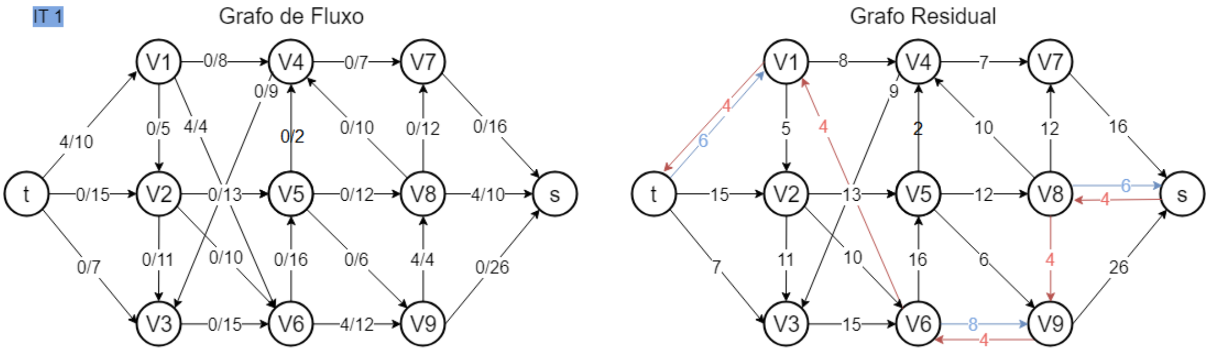

Figura 9: Dois grafos encontrados na iteração 1 da questão 10. Escolhemos de forma aleatória o caminho $(t, v_1, v_6, v_9, v_8, s)$ que possui um valor de bottleneck 4 e então atualizamos os dois grafos.

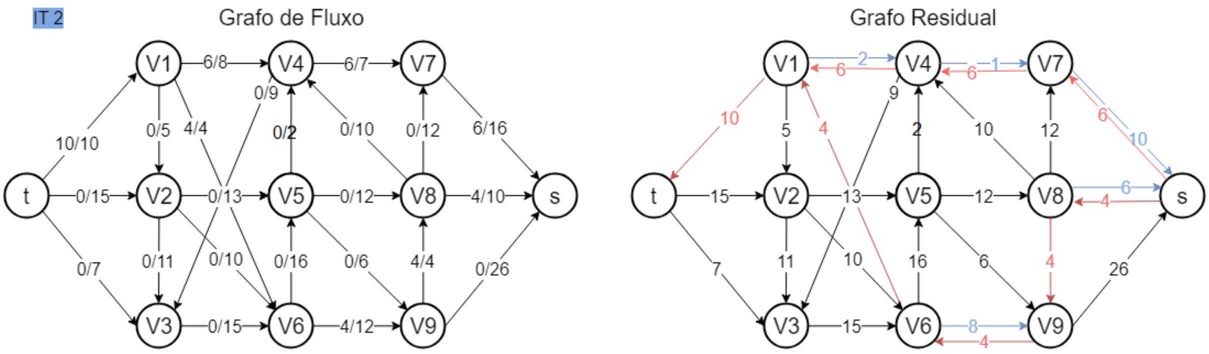

Figura 10: Dois grafos encontrados na iteração 2 da questão 10. Nesta iteração escolhemos o caminho aumentante (t, v_1, v_4, v_7, s) que possui um valor de bottleneck 6 e atualizamos os grafos. Notamos que a aresta que liga v_1 a fonte já possui fluxo máximo então não podemos mais incluir ela nos caminhos aumentantes.

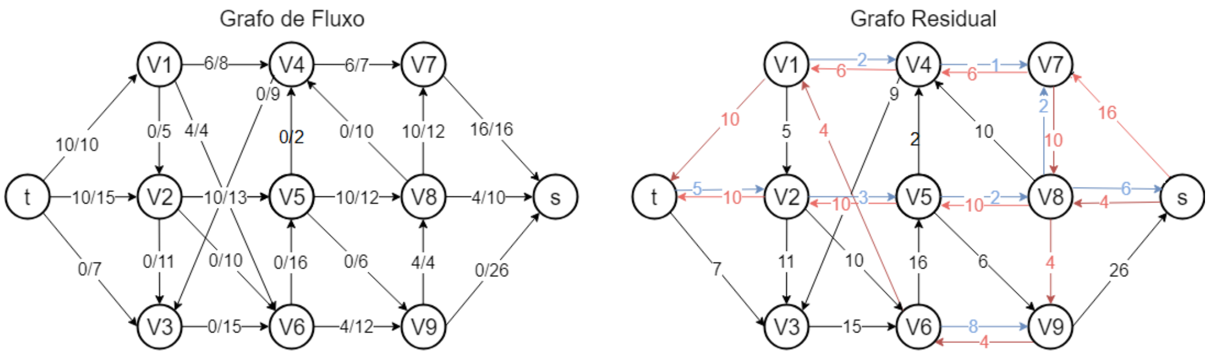

Figura 11: Dois grafos encontrados na iteração 3 da questão 10. Aqui escolhemos o caminho aumentante $(t, v_2, v_5, v_8, v_7, s)$ que possui um valor de bottleneck 10. Notamos que fazendo isto não temos que levar mais enconta a aresta que liga v_7 ao sumidouro, pois o fluxo já é máximo.

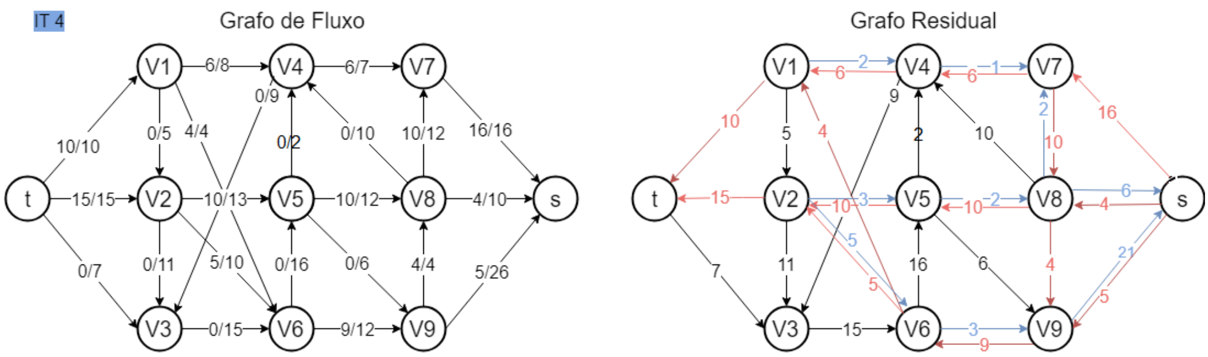

Figura 12: Dois grafos encontrados na iteração 4 da questão 10. Utilizamos o caminho aumentante (t, v_2, v_6, v_9, s) com um valor de bottleneck 5 visando ter fluxo máximo pela aresta que liga a fonte ao vértice v_2. Após este passo temos apenas uma aresta por onde a fonte pode fornecer fluxo.

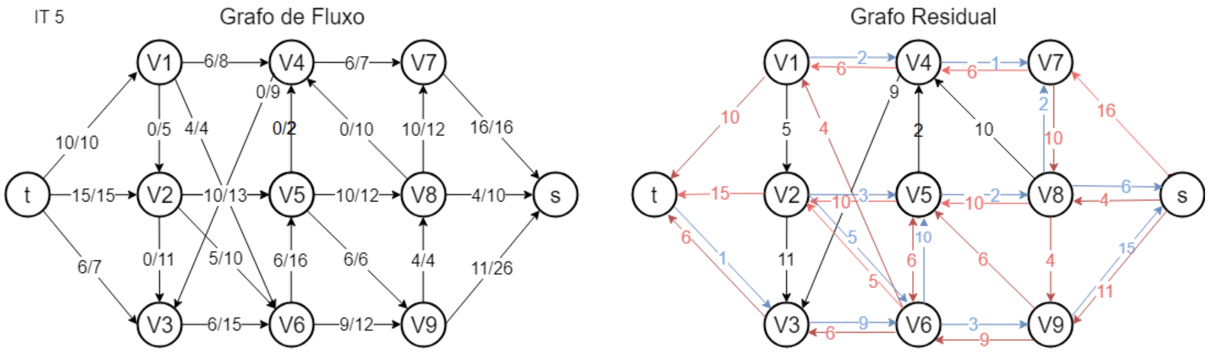

Figura 13: Dois grafos encontrados na iteração 5 da questão 10. Nesta iteração escolhemos o caminho $(t, v_3, v_6, v_5, v_9, s)$ com um valor de bottleneck 6. É fácil perceber que este vai ser o penúltimo passo do nosso algoritmo pois tentamos escolher um caminho aumentante com o maior valor de fluxo possível e há apenas uma unidade de fluxo restante para passar por v_3.

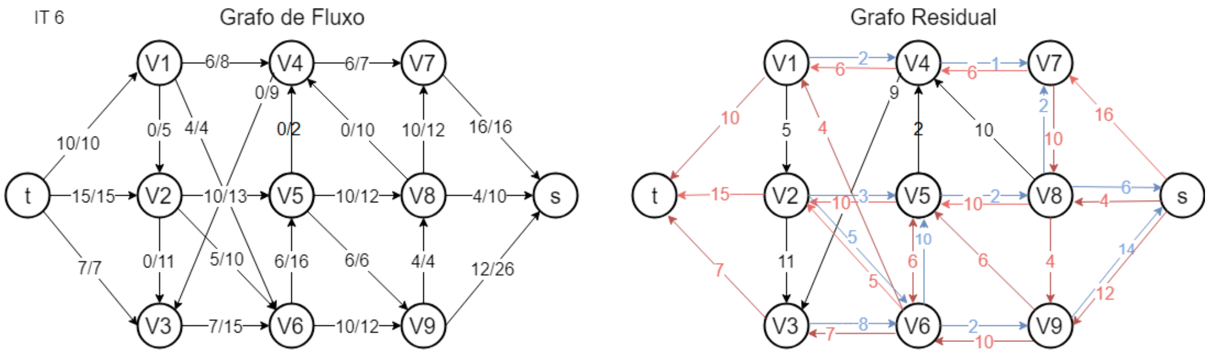

Figura 14: Dois grafos encontrados na iteração 6 da questão 10. Aqui encontramos a ultima iteração do algoritmo que vamos realmente mudar a estrutura do grafo. Escolhemos o caminho (t, v_3, v_6, v_9, s) usando um bottleneck de 1. Atualizamos os grafos o nosso programa tentar executar uma ultima iteração. Encontra se que não há mais caminho aumentante (não é possível sair de t e chegar em s no grafo residual), portanto o nosso algoritmo finaliza sua execução e nosso fluxo máximo é a soma dos pesos das arestas que ligam a s no nosso grafo de fluxo que é 32.