И.Е. ТАНАНКО
В.И. ДОЛГОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

И.Е. Тананко, В.И. Долгов

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Учебно-методическое пособие для студентов
математических и технических специальностей
высших учебных заведений

ООО Издательский центр «Наука»
САРАТОВ 2014

УДК 519.872
ББК 22.18
Т18

Тананко И.Е., Долгов В.И.

Т18 **Моделирования систем. Лабораторный практикум**: Учеб.-метод. пособие. – Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2014. – 68 с.

ISBN 978-5-9999-1750-8

Пособие предназначено для студентов математических и технических специальностей высших учебных заведений для овладения навыками построения моделей систем различных типов. Рассмотрены численный метод решения дифференциальных уравнений, метод статистических испытаний и метод имитационного моделирования систем. Пособие содержит наборы задач по каждому из представленных методов анализа систем.

Рекомендует к печати:

кафедра системного анализа и автоматического управления
Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

УДК 519.872
ББК 22.18

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-5-9999-1669-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу данного учебно-методического пособия положены материалы, которые использовались авторами при проведении практических и лабораторных занятий по дисциплинам «Моделирование», «Пакеты прикладных программ» на факультете компьютерных наук и информационных технологий Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. В пособии рассматриваются методы и задачи компьютерного моделирования непрерывно-детерминированных и стохастических систем, а также методы и задачи имитационного моделирования систем и сетей массового обслуживания.

Пособие состоит из трех глав. Каждая глава содержит теоретический материал и задачи для самостоятельной работы. В первой главе пособия рассматриваются задачи моделирования непрерывных систем. Приводятся методы численного решения дифференциальных уравнений первого порядка и систем дифференциальных уравнений, а также метод построения фазовых портретов в плоскости для системы дифференциальных уравнений. Во второй главе излагаются основные методы генерирования дискретных и непрерывных случайных величин в соответствии с заданными законами их распределения. Приводятся примеры генерирования случайных величин, а также формулы для оценки характеристик случайных величин. В третьей главе предложена методология имитационного моделирования систем и сетей массового обслуживания. Вводятся основные понятия и определения теории массового обслуживания, детально рассматриваются принципы организации, структура и основные алгоритмы функционирования имитационных моделей систем и сетей массового обслуживания.

Для освоения содержащегося в пособии материала не требуется наличия у читателя специальных знаний, однако пониманию материала будет существенно способствовать знакомство с основами математического анализа, линейной алгебры и теории вероятностей. При подготовке настоящего пособия в качестве источников была использована литература, указанная в списке цитируемой литературы.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов математических и технических специальностей высших учебных заведений, изучающих соответствующие учебные дисциплины, и широкого круга специалистов, интересующихся задачами компьютерного моделирования непрерывных детерминированных и стохастических систем, имитационного моделирования систем и сетей массового обслуживания.

Авторы выражают глубокую признательность сотрудникам кафедры системного анализа и автоматического управления факультета компьютерных наук и информационных технологий Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского за помощь, оказанную при подготовке пособия.

Авторы

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Будем рассматривать дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t), \tag{1.1}$$

в котором t – параметр времени. Функцию $x(t)$, при подстановке которой уравнение обращается в тождество, назовем решением дифференциального уравнения. Пусть в момент времени t_0 известно начальное значение функции $x(t)$, т. е.

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Требуется найти численное решение дифференциального уравнения (1.1) с начальным условием (1.2).

Решение дифференциального уравнения (1.1) с начальным условием (1.2) представляет собой некоторую функцию $x(t)$, где аргумент t принимает непрерывные значения из соответствующей области.

Для численного решения дифференциальных уравнений непрерывное изменение аргумента t заменим на дискретное. Таким образом, функция $x(t)$ будет представлена не для всех t, а для некоторого дискретного конечного набора значений t_i, которые обычно называют узлами сетки, $i = 0, ..., N$. Обозначим $h = t_{i+1} - t_i$ – шаг сетки, $i = 0, ..., N-1$. Будем считать $h = 0{,}01$ постоянной величиной. Заметим, что число узлов $N+1$, длина шага h и отрезок времени наблюдения $[t_0, t_N]$ за функцией $x(t)$ связаны соотношением

$$N = \frac{t_N - t_0}{h} + 1.$$

Используя определение производной

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

заменим бесконечно малое приращение Δt на конечное h. Перейдем теперь от производной к ее представлению в виде сеточной функции

$$\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{h}.$$

Тогда формула численного решения дифференциального уравнения (1.1) принимает вид

$$\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{h}=f\,(x(t_i),t_i)\,.$$

Окончательно,

$$x(t_{i+1})=x(t_i)+h\cdot f\,(x(t_i),t_i)\,,\qquad i=0,...,N-1,\tag{1.3}$$

с заданным начальным условием $x(t_0)=x_0$ в момент времени t_0.

Формула (1.3) с начальным условием обобщается на случай системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt}=f\,(x(t),\,y(t),t)\,,\qquad \frac{dy}{dt}=g(x(t),\,y(t),\,t)\tag{1.4}$$

с заданными начальными условиями $x(t_0)=x_0$ и $y(t_0)=y_0$ в момент времени t_0.

Фазовая плоскость – координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются значения функций $x(t)$ и $y(t)$ (фазовые координаты). Каждая точка фазовой плоскости отражает одно состояние системы и называется фазовой. Изменение состояния системы отображается на фазовой плоскости движением этой точки. След от движения точки называется фазовой траекторией. Через каждую точку фазовой плоскости проходит лишь одна фазовая траектория, за исключением особых точек. Стрелками на фазовых траекториях показывается перемещение точки с течением времени. Полная совокупность различных фазовых траекторий образует фазовый портрет.

Составить программу численного решения дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений. Начальные условия и параметры модели в программе вводятся с экрана монитора. Найти численное решение задачи. Построить график зависимости искомой функции от времени для задач 1–12. Для задач 13–24 построить фазовый портрет в плоскости $(x,\,y)$ для системы дифференциальных уравнений (1.4).

Ниже представлены задачи к главе 1.

1.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Задача 1. Анатолий и Владимир заказали в кафе кофе и сливки. Когда им одновременно подали по чашке одинаково горячего кофе и сливки, они поступили следующим образом. Анатолий добавил сливки в кофе, и вышел позвонить по телефону. Владимир добавил то же количество сливок только через 10 минут, когда вернулся Анатолий, и они начали пить кофе вместе. Кто же пил более горячий кофе [2]?

Пояснение к задаче. Известно, что температура жидкости (в данном случае температура кофе без сливок или со сливками) с течением времени определяется соотношением

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\eta s(x(t)-\theta)}{lcm},$$

где $x(t)$ – температура жидкости в момент времени t, θ – температура воздуха в кафе, η – теплопроводность материала чашки, l – толщина стенок чашки, s – площадь боковой поверхности стенок чашки, c – удельная теплоемкость жидкости, m – масса жидкости в чашке.

Пусть масса кофейной жидкости – 0,13 *кг*, масса сливок – 0,01 *кг*, температуры кофе и сливок в начальный момент времени $t_0 = 0$ равны соответственно 90° и 20°, температура воздуха в кафе $\theta = 20^\circ$, теплопроводность материала чашки $\eta = 1{,}4\ Дж/(с \cdot м \cdot К)$, толщина стенок чашки $l = 0.03\ м$, площадь боковой поверхности стенок чашки $s = 0{,}02\ м^2$, удельные теплоемкости воды и сливок равны $4{,}18\ Дж/(кг \cdot К)$.

Задача 2. Температура свежевыпеченного хлеба равна 150°. До отправки в магазин хлеб остывает в помещении с постоянной температурой 20°. Требуется определить длительность времени охлаждения хлеба до 40°.

Результат можно получить с использованием закона теплового излучения

$$\frac{dx}{dt} = -k(x-a),$$

где $x(t)$ – температура хлеба в момент времени t, a – температура воздуха в помещении, $k > 0$ – коэффициент пропорциональности. Полагаем, что $k = 0{,}02$.

Задача 3. Цилиндрический сосуд высотой 6 метров и диаметром 4 метра имеет на дне круглое отверстие радиусом 0,1 метра. В начальный момент времени $t_0 = 0$ сосуд доверху наполнен водой. Известно, что зависимость уровня воды x в сосуде от времени определяется дифференциальным уравнением [2]

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{ks\sqrt{2gx}}{S},$$

где $k = 0{,}6$ – коэффициент скорости истечения жидкости из отверстия, s – площадь отверстия на дне сосуда, S – площадь горизонтального сечения сосуда, $g = 9{,}8\ м/с^2$. Требуется определить время, в течение которого уровень воды в сосуде станет равным 0,1 метра.

Задача 4. Предположим, что торговой организацией реализуется продукция, о которой в начальный момент времени $t_0 = 0$ из числа потенциальных покупателей N знает лишь x покупателей. Для ускорения сбыта продукции были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом. С большой степенью достоверности можно считать, что после рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нем еще не знающих.

Если условиться, что время отсчитывается после рекламных объявлений, когда о товаре узнало $a < N$ человек, то приходим к дифференциальному уравнению [2]

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

с начальными условиями $x = a$ в момент $t_0 = 0$, $k > 0$ – коэффициент пропорциональности равный 0,01.

Определить момент времени, когда число знающих о продукции покупателей станет равным $0{,}95 \cdot N$.

Задача 5. Одним из основных законов теории скоростей химических реакций является закон действующих масс, согласно которому скорость химической реакции при постоянной температуре пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в данный момент в реакции.

Решим следующую задачу. Два жидких химических вещества A и B объемом V_a и V_b соответственно в процессе химической реакции образуют новое жидкое химическое вещество C. Полагая, что температура в процессе реакции не меняется, а также что из каждых двух объемов вещества A и одного объема вещества B образуется три объема вещества C, получаем зависимость количества вещества C от времени в виде дифференциального уравнения [2]

$$\frac{dx}{dt} = k\left(V_a - \frac{2}{3}x\right)\left(V_b - \frac{1}{3}x\right),$$

где x – объем (в литрах) вещества C, k – положительный коэффициент пропорциональности равный 0,02. Определить время до полного прекращения реакции, а также объемы веществ A и B в момент прекращения реакции.

Задача 6. Зенитная пушка выстреливает снаряд вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 800\ м/с$. Сопротивление воздуха замедляет его движение, сообщая снаряду отрицательное ускорение $D = -kv^2$, где v – мгновенная скорость снаряда, $k = 0{,}1$ – аэродинамический коэффициент. Изменение скорости движения снаряда описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dv}{dt} = -(g + kv^2),$$

где $g = 9{,}8\ м/с^2$ – ускорение свободного падения.

Определить наивысшее положение снаряда и время его достижения.

Задача 7. Дифференциальное уравнение Мещерского

$$x\frac{dV}{dt} = u\frac{dx}{dt}$$

определяет зависимость скорости V движения ракеты от изменения ее массы x. Здесь u – относительная скорость, с которой движется отделяющаяся от ракеты часть ее массы. Будем считать, что масса ракеты уменьшается с постоянной скоростью и равна $180\ кг/с$. Правая часть уравнения равна силе тяги ракетного двигателя $\vec{F} = 583000 H$. Пусть начальная скорость ракеты $V_0 = 4453\ м/с$, начальная масса ракеты $M = 66500\ кг$, конечная масса ракеты $m = 23500\ кг$, начальный момент времени $t_0 = 337\ c$. Шаг времени моделирования h положить равным 1 секунде.

Определить момент времени и скорость движения ракеты, когда ее масса станет равной m.

Задача 8. Рассмотрим модель роста популяции с учетом полового размножения

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2.$$

Здесь x – численность популяции, $a > 0$ – коэффициент размножения, $b > 0$ – коэффициент смертности.

Построить графики зависимости численности популяции x от времени t при следующих условиях: 1) $x = x_0$ в момент $t_0 = 0$, $x_0 < a/b$; 2) $x = x_0$ в момент $t_0 = 0$, $x_0 > a/b$.

Задача 9. Пусть количество вещества, переходящего в раствор в единицу времени, пропорционально разности между максимально возможной концентрацией P и концентрацией x в данный момент времени. В форме дифференциального уравнения этот закон выглядит в виде [12]:

$$\frac{dx}{dt} = k(P - x),$$

где $k > 0$ – коэффициент растворимости. Пусть $k = 0{,}04$.

Построить график зависимости функции x от времени t при трех различных начальных условиях $x = x_0$, $0 \le x_0 < P$.

Задача 10. Пусть в модели популяции мужских и женских особей учитываются два фактора: 1) при низкой плотности популяции скорость размножения низкая, 2) при большой плотности популяции скорость размножения ограничивается не числом встреч особей противоположного пола, а числом самок в популяции. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее число особей x в популяции имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{bx^2}{N + x},$$

где $b > 0$, $N > 0$ – коэффициенты. В рамках такой модели при малых численностях $x << N$ популяция размножается по гиперболическому, а при больших численностях $x >> N$ – по экспоненциальному закону.

Построить график зависимости функции x от времени t при начальном условии $x_0 \approx 0$ и трех различных значениях b.

Задача 11. Предположим, что скорость потребления пищевых частиц организмом пропорциональна, во-первых, их концентрации S в среде и, во-вторых, степени заполненности пищеварительной системы, определяемой выражением $(X - x)/X$, где X – максимальная вместимость пищеварительной системы, x – наличное количество пищи в пищеварительной системе. Будем считать также, что скорость освобождения пищеварительной системы пропорциональна количеству в нем пищевых частиц. Тогда для количества пищевых частиц в пищеварительной системе организма получим уравнение [1]

$$\frac{dx}{dt} = \alpha S\left(1 - \frac{x}{X}\right) - \mu x,$$

где $\alpha > 0$ и $\mu > 0$ – постоянные коэффициенты.

Построить график зависимости функции x от времени t.

Задача 12. Закон радиоактивного распада – физический закон, описывающий зависимость интенсивности радиоактивного распада от времени и количества радиоактивных атомов в образце. Формулировка закона в виде дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x,$$

где x – число радиоактивных атомов в образце, λ – вероятность радиоактивного распада за единицу времени.

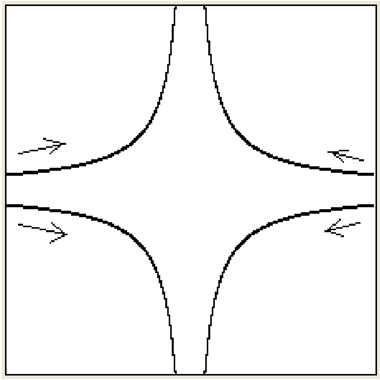
Построить график зависимости функции x от времени t.

1.2. Системы дифференциальных уравнений

Задача 13. Построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx/dt = -x, \\ dy/dt = y. \end{cases}$$

Пояснение к задаче. Схематически фазовый портрет этой системы дифференциальных уравнений имеет вид

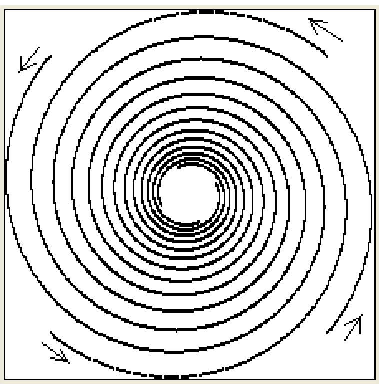


Задача 14. Построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx/dt = ax - y, \\ dy/dt = x + ay \end{cases}$$

при $-0{,}2 < a < 0$. Эксперимент повторить при $a > 0$.

Пояснение к задаче. Схематически фазовый портрет этой системы дифференциальных уравнений имеет вид:

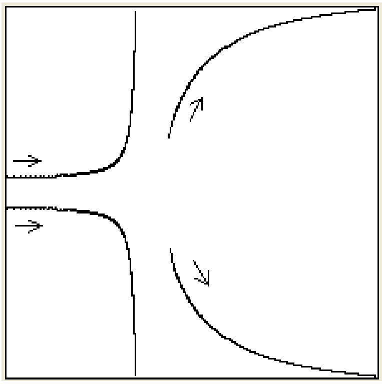


Задача 15. Построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx/dt = ax^2, \\ dy/dt = by \end{cases}$$

при $a > 0$, $b > 0$.

Пояснение к задаче. Схематически фазовый портрет этой системы дифференциальных уравнений имеет вид:

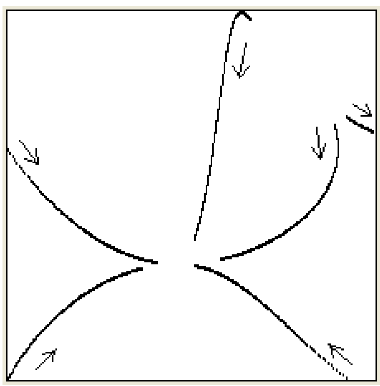


Задача 16. Построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx/dt = a_1 x + x^2 y + x^3 y + x^4 y, \\ dy/dt = a_2 y + y^2 x + y^3 x + y^4 x \end{cases}$$

при $a_2 < a_1 < 0$.

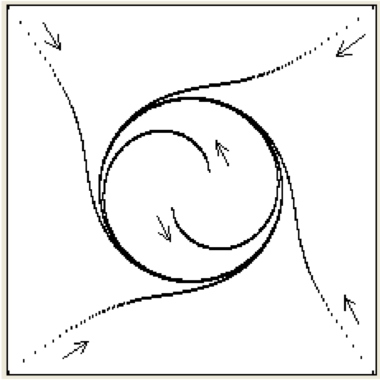
Пояснение к задаче. Схематически фазовый портрет этой системы дифференциальных уравнений имеет вид



Задача 17. Построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx/dt = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ dy/dt = x - y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

Пояснение к задаче. Схематически фазовый портрет этой системы дифференциальных уравнений имеет вид:

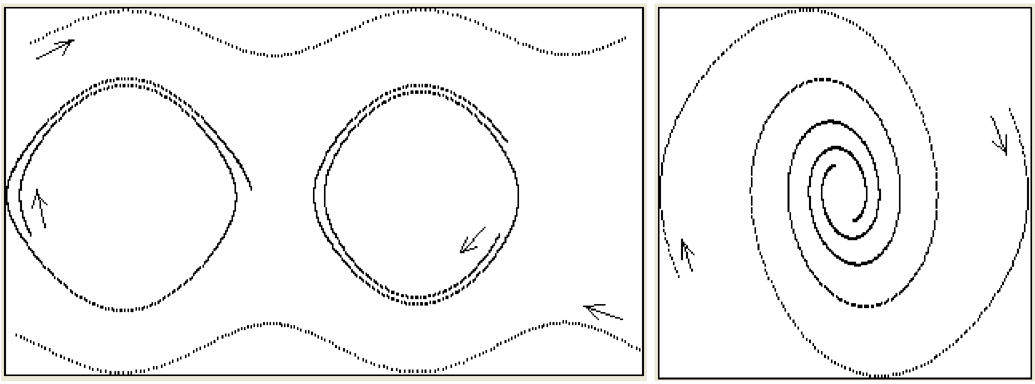


Задача 18. **Нелинейный математический маятник**. Построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений, описывающей движение маятника:

$$\begin{cases} dx/dt = y, \\ dy/dt = -(g/l)\sin(x) - cy/lm. \end{cases}$$

Здесь l – длина, m – масса маятника, c – коэффициент трения. Рассмотреть два случая: 1) когда отсутствует трение, т. е. $c = 0$, 2) присутствует трение, т. е. $c > 0$.

Пояснение к задаче. Схематически фазовый портрет этой системы дифференциальных уравнений с различными значениями коэффициента трения имеет вид:



а) $c = 0$ б) $c > 0$

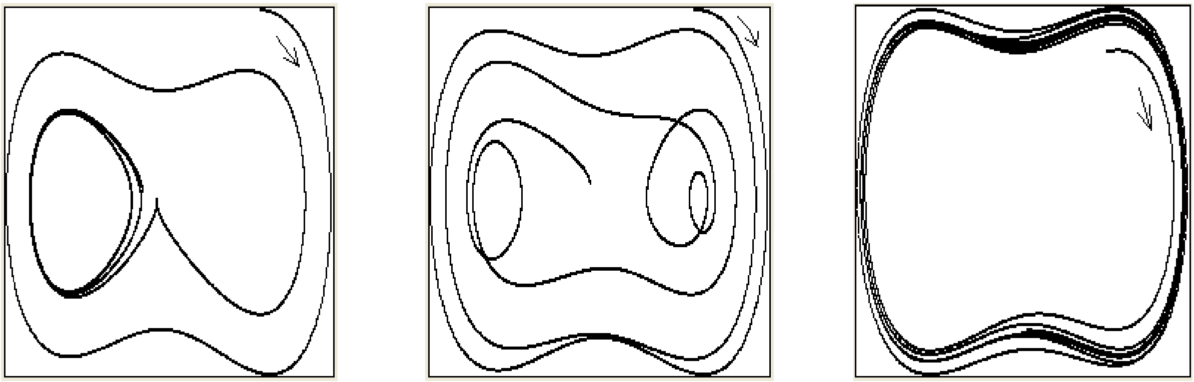
Задача 19. **Уравнение Дуффинга: аттрактор Холмса**. Система дифференциальных уравнений имеет вид [10]:

$$\begin{cases} dx/dt = y, \\ dy/dt = -ay - 0{,}5x(1 - x^2) + b\cos(wt). \end{cases}$$

Областью, представляющей интерес для исследования, является $a = 0{,}15$, $w = 0{,}8$, $0{,}1 \le b \le 0{,}3$. В этой области наблюдается переход от периодического режима к хаотическому.

Построить фазовые портреты системы дифференциальных уравнений при следующих параметрах: 1) $a = 0{,}15$, $w = 0{,}8$, $b = 0{,}1$; 2) $a = 0{,}15$, $w = 0{,}8$, $b = 0{,}15$; 3) $a = 0{,}15$, $w = 0{,}8$, $b = 0{,}3$.

Пояснение к задаче. Фазовые портреты этой системы дифференциальных уравнений с $w = 0{,}8$ и различными значениями a и b имеют вид:



а) $a = 0{,}15$, $b = 0{,}1$ б) $a = 0{,}15$, $b = 0{,}15$ в) $a = 0{,}15$, $b = 0{,}3$

Задача 20. **Уравнение Дуффинга: аттрактор Уэды**. Один из первых примеров хаоса в электрических цепях был открыт Уэдой в цепи с нелинейным индуктивным элементом. Цепь с нелинейной индуктивностью и линейным сопротивлением, возбуждаемая гармонической электродвижущей силой, описывается уравнением [10]

$$x'' + kx' + x^3 = B\cos(t),$$

которое является частным случаем уравнения Дуффинга.

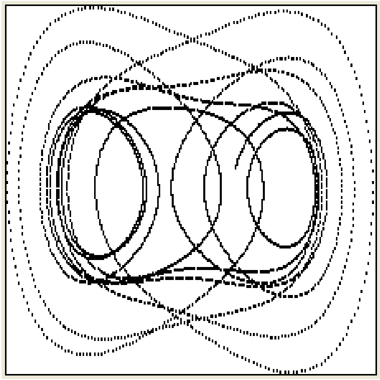
Уравнения этой модели, записанные в виде системы уравнений первого порядка, имеют вид

$$\begin{cases} dx/dt = y, \\ dy/dt = -ky - x^3 + B\cos(t). \end{cases}$$

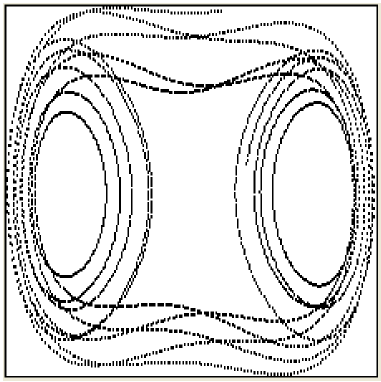
В окрестности значения $B = 10$ траектория имеет хаотическое движение. При $B > 13{,}3$ наблюдается периодичность с переходным хаотическим режимом.

Построить фазовые портреты системы дифференциальных уравнений при следующих параметрах:1) $k = 0{,}1$, $B = 10$; 2) $k = 0{,}1$, $B = 13{,}4$.

Пояснение к задаче. Фазовые портреты этой системы дифференциальных уравнений с различными значениями коэффициентов имеют вид:



а) $k = 0{,}1$, $B = 10$



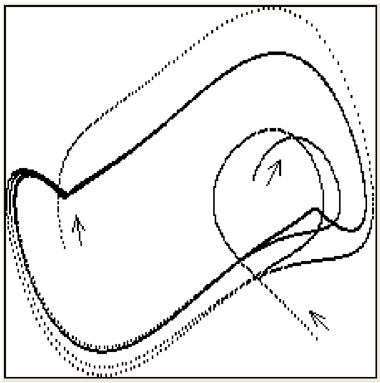
б) $k = 0{,}1$, $B = 13{,}4$

Задача 21. **Аттрактор Уэды**. Моделью генератора колебаний с отрицательным сопротивлением может служить система дифференциальных уравнений [10]

$$\begin{cases} dx/dt = y, \\ dy/dt = -(x^2 - 1)y - x^3 + B\cos(t). \end{cases}$$

Построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений при $B = 10$.

Пояснение к задаче. Схематически фазовый портрет этой системы дифференциальных уравнений имеет вид:



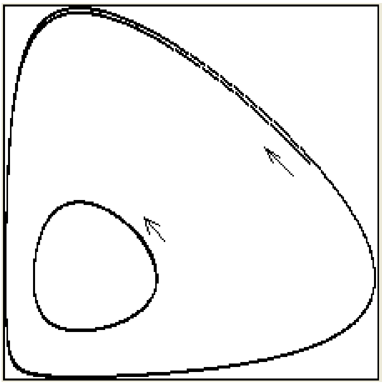
Задача 22. **Простейшая модель «хищник-жертва»**. Система дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерра [8]

$$\begin{cases} dx/dt = a_1 x - b_1 yx, \\ dy/dt = -a_2 y + b_2 yx \end{cases}$$

является математической моделью совместного существования двух биологических видов (популяций) типа «хищник-жертва» в некоторой изолированной среде. Здесь y – число хищников, x – число жертв. Коэффициент $a_1 > 0$ определяет уровень рождаемости жертв, $b_1 > 0$ – коэффициент уменьшения числа жертв от встречи с хищниками, $a_2 > 0$ – коэффициент уменьшения числа хищников от голода, $b_2 > 0$ – коэффициент увеличения числа хищников. Среда предоставляет жертвам питание в неограниченном количестве, а хищники питаются лишь жертвами.

Построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений при допустимых параметрах a_1, a_2, b_1, b_2.

Пояснение к задаче. Схематически фазовый портрет этой системы дифференциальных уравнений имеет вид:

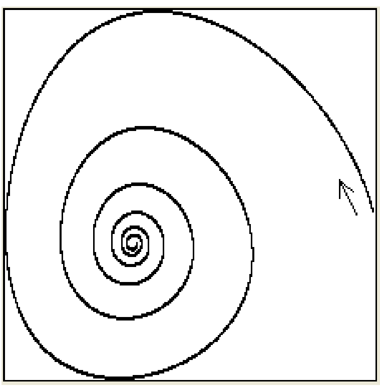


Задача 23. **Модель Дои «хищник-жертва»**. Модель Дои взаимодействия между тунцом и береговыми рыбами отличается от модели «хищник-жертва», представленной в предыдущей задаче, наличием дополнительной зависимости смертности от плотности популяции: [8]

$$\begin{cases} dx/dt = a_1 x - b_1 yx - c_1 x^2, \\ dy/dt = -a_2 y + b_2 yx - c_2 y^2. \end{cases}$$

Построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений при допустимых параметрах a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2.

Пояснение к задаче. Схематически фазовый портрет этой системы дифференциальных уравнений имеет вид:



Задача 24. **Модель Вольтерра «хищник-жертва»**. Математическая модель Вольтерра, отражающая пищевую конкуренцию между двумя популяциями, представляет собой систему дифференциальных уравнений [8]

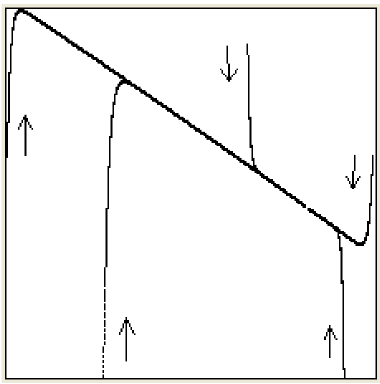
$$\begin{cases} dx/dt = a_1 x(X-(x+b_1 y))/X, \\ dy/dt = a_2 y(Y-(y+b_2 x))/Y, \end{cases}$$

где a_1 и a_2 – потенциальные коэффициенты размножения, X и Y – максимально возможные численности популяций, b_1 и b_2 – коэффициенты борьбы за существование.

В основе этой системы дифференциальных уравнений лежат представления о том, что скорость увеличения численности определяется потенциальными возможностями, характерными для данного вида в оптимальных условиях, и неиспользованными возможностями роста, которые определяются ограниченностью общих запасов пищи и наличием конкурирующей популяции.

Построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений при допустимых параметрах a_1, a_2, b_1, b_2.

Пояснение к задаче. Схематически фазовый портрет этой системы дифференциальных уравнений имеет вид:



2. МЕТОД СТАТИСТИЧЕКИХ ИСПЫТАНИЙ

В главе 2 рассматриваются основные методы генерирования дискретных и непрерывных случайных величин по теоретическим законам распределения вероятностей с требуемыми параметрами [5, 7, 11, 14]. В настоящее время библиотеки математических процедур и функций всех языков программирования высокого уровня имеют программные генераторы равномерно распределенных последовательностей псевдослучайных чисел, которые еще называют датчиками случайных чисел.

Датчики случайных чисел могут генерировать последовательность как действительных, так и целых чисел. Если поле параметров датчика оставить пустым, то датчик будет генерировать последовательность действительных равномерно распределенных на интервале $[0, 1)$ чисел. Количество таких чисел может сильно варьироваться и зависит от алгоритма, реализованного в датчике, но обычно не превышает 2^{31}.

Установление в поле параметров датчика случайных чисел целого числа $m > 1$, приводит к генерированию последовательности целых равномерно распределенных чисел из множества $\{0, 1, ..., m-1\}$.

Датчики целых случайных чисел используются для генерирования дискретных случайных событий, например, выпадение очков при подбрасывании игральной кости, выпадение «орла» или «решки» при подбрасывании монеты и др.

Датчики действительных случайных чисел являются основным инструментом для генерирования как дискретных, так и непрерывных случайных величин.

Генерирование дискретных случайных величин. Генерирование дискретной случайной величины, имеющей $1 < K < \infty$ различных значений x_k, $k = 1, ..., K$, с равными вероятностями с использованием датчика действительных случайных чисел, производится следующим образом. Разбиваем интервал $[0, 1)$ на K равных интервалов $[0, 1/K)$, $[1/K, 2/K)$, …, $[(K-1)/K, 1)$. Интервалу $[(k-1)/K, k/K)$, $k = 1, ..., K$, ставим в соответствие значение x_k случайной величины. Используя датчик действительных случайных чисел, получаем значение r. Определяем интервал, которому принадлежит число r. Пусть для определенности, это будет k-й интервал, т. е. $[(k-1)/K, k/K)$. Тогда считаем, что случайная величина приняла значение x_k.

Рассмотрим алгоритм генерирования дискретной случайной величины, имеющей $1 < K < \infty$ различных значений x_k с вероятностями p_k, $k = 1, ..., K$. Алгоритм основан на следующем очевидном соотношении:

$$P\left(\sum_{m=1}^{k} p_{m-1} \le R < \sum_{m=1}^{k} p_m\right) = p_k,$$

где $p_0 = 0$, R – непрерывная равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$ случайная величина.

Стандартный алгоритм определения x_k для заданного значения r случайной величины R реализуется по следующей схеме.

Алгоритм.

Шаг 1. $M := r$, $k := 1$.

Шаг 2. $M := M - p_k$.

Шаг 3. Если $M > 0$, то $k := k + 1$ и выполнить шаг 2. В противном случае выполнить шаг 4.

Шаг 4. Считать, что дискретная случайная величина приняла значение x_k. Конец алгоритма.

Далее приведены методы генерирования некоторых непрерывных случайных величин.

Равномерное непрерывное распределение. Для формирования непрерывной случайной величины X, имеющей равномерную функцию распределения на отрезке $[a,b]$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & b < x, \end{cases}$$

и функцию плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \le x \le b, \\ 0, & x < a, x > b, \end{cases}$$

используется формула

$$X = a + R(b - a), \tag{2.1}$$

где R имеет распределение $U(0, 1)$ (равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$). Значения случайной величины R генерируются с использованием датчика действительных случайных чисел.

Нормальное распределение. Для генерирования случайной величины X с распределением $N(\mu, \sigma)$ (нормальное распределение с параметрами μ и σ), используется выражение

$$X = \mu + \sigma\left(\sum_{i=1}^{12} R_i - 6\right), \tag{2.2}$$

где R_i, $i = 1, ..., 12$, независимые случайные величины с распределением $U(0, 1)$. Заметим, что для генерирования одного значения случайной величины X используется двенадцать значений случайных величин R_i, которые получаются последовательным двенадцатикратным обращением к датчику действительных случайных чисел.

Экспоненциальное (показательное) распределение. Для формирования случайной величины X, имеющей экспоненциальную функцию распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad 0 \le x < \infty,$$

где $\lambda > 0$ – параметр функции распределения, используется выражение

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(R),$$

где R имеет распределение $U(0, 1)$.

Примеры генерирования случайных величин.

1. Моделирование выпадения очков при подбрасывании игральной кости. Параметр датчика случайных чисел устанавливаем равным 6. Тогда датчик будет генерировать числа из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. К выдаваемым значениям надо прибавлять 1, чтобы получались числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, как на игральной кости.

2. Моделирование исхода подбрасывания монеты. Параметр датчика случайных чисел устанавливаем равным 2. Тогда возможные значения датчика принадлежат множеству чисел $\{0, 1\}$. Если значение датчика равно 0, то полагаем, что при подбрасывании монеты выпала «решка». Если же значение датчика равно 1, то выпал «орел».

Последний пример показывает, что датчик случайных чисел может быть использован также для моделирования не числовых случайных событий. Так, например, если в модели необходимо отобразить равновероятное единичное перемещение на север, запад, восток или на юг, то элементам множества

$\{0, 1, 2, 3\}$ в программе необходимо поставить, например, следующие соответствия: «0» $\to$ «на север», «1» $\to$ «на запад», «2» $\to$ «на восток», «3» $\to$ «на юг». Заметим, что влияние выбора конкретного соответствия «число $\to$ событие» на статистические оценки характеристик случайных величин уменьшается при увеличении объема выборочных значений этих случайных величин.

3. Моделирование координат точки прямоугольника. Пусть точка с равной вероятностью попадает в любую точку прямоугольника с координатами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(\pi, 1)$, $(\pi, 0)$. Требуется, применяя выражение (2.1), получить координаты точки внутри прямоугольника.

Используя датчик действительных случайных чисел, получаем числа r_1 и r_2. Тогда координаты (x, y) точки прямоугольника выражаются через эти псевдослучайные числа:

$$x = 0 + (\pi - 0)r_1 = \pi r_1, \qquad y = 0 + (2 - 0)r_2 = 2r_2.$$

4. Моделирование координат точки попадания стрелы по мишени. Пусть координаты (x, y) стрелы, попавшей в мишень, есть случайные величины с распределением $N(0, \sigma)$, где σ – заданное среднее квадратическое отклонение. Для моделирования координат (x, y) используем выражение (2.2):

$$x = 0 + \sigma\left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6\right), \qquad y = 0 + \sigma\left(\sum_{i=13}^{24} r_i - 6\right),$$

где r_i получены с использованием датчика действительных случайных чисел.

5. Моделирование пуассоновского потока частиц. Известно [9], что длительности интервала времени между очередными моментами появления частиц пуассоновского потока есть экспоненциально распределенные случайные величины. Параметр λ пуассоновского распределения и экспоненциальной функции распределения в модели используется как интенсивность потока, т. е. среднее число частиц, которые появляются в единицу времени. Тогда моделирование пувссоновского потока сводится к генерированию последовательности моментов t_i, $i = 1, 2, \ldots$, поступления частиц.

Алгоритм генерирования последовательности моментов.

Шаг 1. $i := 0$, $t_0 := 0$.

Шаг 2. $i := i + 1$.

Шаг 3. $t_i := t_{i-1} + \left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(r_i)\right)$.

Шаг 4. Перейти на шаг 2, если не выполнено заданное условие завершения алгоритма.

В алгоритме числа r_i, $i = 1, 2, \ldots$, получены с использованием датчика действительных случайных чисел.

Оценка характеристик случайной величины.

Оценка $\overline{X}$ математического ожидания случайной величины вычисляется по формуле

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k ,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ – выборочные значения случайной величины, n – объем выборки.

Оценка дисперсии $\overline{s}^2$ и среднее квадратическое отклонение $\overline{s}$ вычисляются соответственно по формулам:

$$\overline{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \overline{X} \right)^2 , \qquad \overline{s} = \sqrt{\overline{s}^2} .$$

Оценка вероятности события A определяется из выражения:

$$p^*(A) = k/n ,$$

где k – число появлений события A в n независимых испытаниях.

Построение выборочной функции плотности распределения случайной величины. Пусть в результате проведенных испытаний с моделью получена выборка $x_1, \ldots, x_n$ из распределения случайной величины X, где n – число выборочных значений. Тогда для построения выборочной функции плотности распределения случайной величины X воспользуемся следующим алгоритмом.

Алгоритм.

Шаг 1. Найдем минимальное и максимальное значения из множества $x_1, \ldots, x_n$ для определения отрезка $[a, b]$, которому принадлежат все элементы $x_1, \ldots, x_n$.

Шаг 2. Разбиваем отрезок $[a, b]$ на 20 равных интервалов. Определяем число элементов x_j, попавших в каждый из двадцати интервалов. Обозначим эти числа k_i, $i = 1, \ldots, 20$. Ясно, что $\sum_{i=1}^{20} k_i = n$.

Шаг 3. Вычисляем $p_i = k_i/n$ – частота попадания элементов выборки в i-й интервал, $i = 1, \ldots, 20$.

Шаг 4. Строим гистограмму, т. е. график зависимости p_i от i-го интервала группировки.

2.1. Равномерно распределенная случайная величина

Задача 1. Квадрат площадью 9 (будем называть его «исходный квадрат») условно поделен на 9 квадратов с равными площадями. На исходный квадрат бросаются окрашенные квадраты площадью 1, которые с равной вероятностью точно попадают в один из квадратов исходного квадрата. Оценить математическое ожидание числа окрашенных квадратов, необходимых для полного окрашивания исходного квадрата. Оценку получить на основании 1000 испытаний.

Задача 2. В мусорный бак может поместиться 10 пакетов с мусором. В день в бак с равной вероятностью может поступить 0, 1, 2 или 3 пакета. Построить модель поступления пакетов в бак. На основании 1000 испытаний оценить математическое ожидание числа дней до полного заполнения бака.

Задача 3. Два игрока по очереди бросают монету. Если выпадает «орел», то первый игрок добавляет в свой актив одно очко. Если выпадает «решка», то очко добавляется второму игроку. Разница очков показывает игрока, выигрывающего в текущий момент времени. Построить модель процесса бросания монеты и вычисления разницы очков. Провести 10 испытаний по 1000 исходов от подбрасываний монет в каждом и оценить математическое ожидание периода выигрывания первого игрока. Периодом выигрывания будем называть число шагов между подбрасываниями монеты, в каждом из которых один из игроков имеет большее число очков, чем его соперник.

Задача 4. Построить модель выпадения очков на игральной кости. Оценить математическое ожидание числа выпавших очков на основании результатов 500 бросаний игральной кости. Провести 10 испытаний.

Задача 5. Рассмотрим задачу о пьяном прохожем, которую называют еще задачей о случайном блуждании [14]. Предположим, что пьяный, стоя на углу улицы, решает прогуляться. Пусть вероятности того, что, достигнув очередного перекрестка, он пойдет на север, юг, восток или запад, одинаковы. Оценить вероятность того, что, пройдя 10 кварталов, пьяный окажется не далее двух кварталов от места, где он начал прогулку. Оценку вероятности провести на основании 1000 испытаний.

Задача 6. Мишень имеет четыре области. Снаряд с равной вероятностью попадает в одну из областей. Промахи по мишени невозможны. Мишень считается пораженной, если в одну из областей попало три снаряда. Оценить математическое ожидание числа снарядов, необходимых для поражения мишени. Оценку провести на основании 1000 испытаний.

Задача 7. В корзине находятся 3 белых, 3 синих и 3 красных шара. Последовательно выбираем шары из корзины без возвращения. Построить модель процесса выбора шаров из корзины. Оценить вероятность того, что первым будет выбран белый, вторым – синий, а третьим – красный шар. Оценку провести на основании 1000 испытаний.

Задача 8. В корзине находятся 3 белых, 3 синих и 3 красных шара. Берем шар из корзины, запоминаем его цвет и возвращаем его обратно. Построить модель процесса выбора шаров из корзины. Оценить вероятность того, что первым будет выбран белый, вторым – синий, а третьим – красный шар. Оценку провести на основании 1000 испытаний.

Задача 9. Два игрока играют в настольную игру, передвигая фишки на число клеток, соответствующих числу очков, выпавших на игральной кости. Фишка сбивает фишку противника, если оказывается после очередного хода на клетке, занятой фишкой противника. В этом случае игра заканчивается. Максимальная «длина» игры – 30 клеток, причем на 30-й клетке сбивать противника нельзя. Построить модель игры. После 1000 испытаний оценить вероятность того, что игра закончится раньше 30-й клетки.

Задача 10. Мишень имеет четыре области. Снаряд с равной вероятностью попадает в одну из областей. Промахи по мишени невозможны. Мишень считается пораженной, если во все области попало хотя бы по одному снаряду. Построить модель процесса попадания снарядами по мишени. Оценить математическое ожидание числа снарядов, необходимых для поражения мишени. Оценку провести на основании 1000 испытаний.

Задача 11. Построить модель выпадения очков на двух игральных костях. Оценить вероятность того, что сумма выпавших очков будет не больше 5. Оценку провести на основании результатов 500 бросаний. Провести 10 испытаний.

Задача 12. Бросаются 4 игральные кости. Первый игрок забирает выигрыш, если хотя бы на одной игральной кости выпало 6 очков. В противном случае, выигрыш забирает второй игрок. Построить модель процесса выпадения очков. Кто из игроков выигрывает чаще? Вывод сделать на основании 10000 бросаний.

Задача 13. Проверить, действительно ли датчик случайных чисел можно использовать для формирования непрерывных на интервале $[0, 1)$ псевдослучайных чисел, имеющих равномерную функцию распределения. Для решения задачи необходимо разбить отрезок [0,1] на 10 равных отрезков. Получить 1000 значений датчика и подсчитать число значений, попавших в каждый из 10 интервалов. Будем считать, что датчик можно использовать, если число точек в каждом интервале близко к 100.

Задача 14. Проверить, действительно ли датчик случайных чисел можно использовать для формирования псевдослучайных чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots$, (на интервале $[0, 1)$), имеющих равномерную функцию распределения. Для решения задачи необходимо построить пары чисел (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots$, и координаты этих точек отобразить на единичном квадрате. Вывод сделать на основании сначала 50, затем 100 точек, расположенных на единичном квадрате.

Задача 15. Проверить, действительно ли датчик случайных чисел можно использовать для формирования псевдослучайных чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots$, (на интервале $[0, 1)$), имеющих равномерную функцию распределения. Для решения задачи необходимо построить пары чисел (x_i, x_{i+2}), $i = 1, 2, \ldots$, и координаты этих точек отобразить на единичном квадрате. Вывод сделать на основании сначала 50, затем 100 точек, расположенных на единичном квадрате.

Задача 16. Построить модель бросания точек на квадрат со стороной 2. Оценить площадь круга, вписанного в этот квадрат на основании 10, 30, 60, 100, 1000 точек.

Задача 17. Оценить интеграл $I = \int_0^{\pi} \sin x dx$ (как показывают элементарные вычисления $I = 2$), используя метод статистических испытаний, при объемах выборки $n = 10$, 20, 50, 100, 1000.

Задача 18. Оценить интеграл $I=\int_0^1 x^2 dx$, используя метод статистических испытаний, при объемах выборки $n=10$, 20, 50, 100, 1000.

Задача 19. Система состоит из трех приборов. Известна вероятность безотказной работы каждого из них в течение времени T. Приборы выходят из строя независимо друг от друга. При отказе хотя бы одного прибора вся система перестает работать. Провести 1000 испытаний с моделью системы и оценить вероятность того, система откажет за время T.

Задача 20. Запрос на запасную деталь равен 0, 1, 2 или 3 единицы в день с вероятностями 0,2, 0,3, 0,4 и 0,1 соответственно. Цех технического обеспечения имеет на складе 8 таких деталей и немедленно восстановит запас до этого же уровня, если их останется на складе две или меньше единиц. На основе 1000 испытаний оценить математическое ожидание числа дней до первого пополнения запаса деталей.

Задача 21. В сборочном цехе собирают изделия, состоящие из четырех элементов. Каждый элемент исправен с вероятностью 0,9. Изделие с исправными элементами поступает в продажу. Изделие с одним неисправным элементом ремонтируется. Изделие с двумя или более неисправными элементами ремонту не подлежит. Построить модель сборки изделий и определения числа неисправностей. Оценить вероятность того, что изделие работоспособно, изделие требует ремонта, изделие ремонту не подлежит. Оценку провести на основании 1000 испытаний.

Задача 22. Вероятность победы первой футбольной команды в матче над второй командой равна 0,3, а вероятность победы первой команды в матче над третьей командой равна 0,4. Оценить вероятность победы первой команды в матчах со второй и третьей командами. Оценку провести на основании 1000 испытаний.

Задача 23. Телевизоры проверяются на наличие дефектов. В 80% случаев телевизор успешно проходит проверку и упаковывается, иначе он ремонтируется. Символически эту ситуацию можно представить одним из двух способов.

1. Выполнить ремонт с вероятностью 0,2, упаковать с вероятностью 0,8.

2. Упаковать с вероятностью 0,8, выполнить ремонт с вероятностью 0,2.

Построить модели проверки телевизоров для каждого из двух способов. Оценить вероятность упакованных телевизоров после испытаний на 20, 50, 500, 1000 телевизорах для каждого из способов, используя одну и ту же последовательность псевдослучайных чисел.

Задача 24. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20%. Построить модель банкротства банков. Оценить вероятности того, что в течение года обанкротятся один, два, три, четыре банка.

2.2. Нормально распределенная случайная величина

Задача 1. Пушка ведет стрельбу по центру мишени шириной 3 м. Снаряды отклоняются от центра в соответствии с нормальным законом распределения. Однако с учетом ветра снаряды отклоняются от центра мишени вправо с математическим ожиданием равным 1 и средним квадратическим равным 2. Провести 1000 испытаний с моделью. Оценить вероятность попадания снаряда по мишени.

Задача 2. Вес коробки с печеньями есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu = 100$ гр. и $\sigma = 5$ гр. Одна упаковка содержит 10 коробок с печеньями. Построить модель формирования веса одной упаковки. Оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение веса одной упаковки на основании 1000 испытаний.

Задача 3. Внутренний диаметр железного цилиндра является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 1 см и стандартным отклонением 0,01 см. При сборке внутрь каждого цилиндра вставляется железный стержень. Диаметр стержня является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 0,99 см и стандартным отклонением 0,01 см. Наугад берутся цилиндр и стержень. Требуется на 1000 цилиндрах и 1000 стержнях оценить процент пар цилиндр-стержень, которые не подойдут для сборки.

Задача 4. Хронометр за сутки дает погрешность во времени, которая является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $\mu = 0$ мин. и $\sigma = 1$ мин. Через неделю показания времени с трех хронометров усредняются. Построить модель определения усредненного момента времени. На основании 1000 испытаний с моделью оценить вероятность того, что усредненный момент времени отличается от истинного более чем на 2 минуты.

Задача 5. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Оценить $P(|X - Y| \leq 1)$ на основании 1000 выборочных значений пар (x_i, y_i), $i = 1, ..., 1000$.

Задача 6. Даны случайные величины *A*, *B* и *C*. Переменные *A* и *B* распределены нормально и независимы. Распределение переменной *C* задано в следующем виде:

Значение *C*	10	20	30	40
Вероятность	0,10	0,25	0,50	0,15

Применяя метод статистических испытаний, оцените математическое ожидание и дисперсию новой переменной *Z*, определяемой как $Z = (A + B)/C$, пользуясь выборкой из 1000 значений.

Задача 7. Ученик выходит из дома в школу за 40 минут до начала уроков. Длительность интервала времени перехода от дома до остановки трамвая есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu_1 = 10$ мин. и $\sigma_1 = 1$ мин. Длительность интервала времени от момента ожидания трамвая, последующей поездки и до момента выхода из трамвая есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu_2 = 20$ мин. и $\sigma_2 = 5$ мин. Длительность интервала времени перехода от остановки трамвая до школы есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu_3 = 5$ мин. и $\sigma_3 = 1$ мин. Построить модель определения времени перехода ученика от дома до школы. На основании 1000 испытаний с моделью оценить вероятность того, что ученик опоздает к началу уроков.

Задача 8. Бомбардировщик атакует прямоугольную цель (60×150 м.) ракетами класса «воздух-земля». Каждая ракета наводится на цель индивидуально. Заход на атаку производится с направления, совпадающего с направлением длинной оси цели, точка прицеливания – геометрический центр цели. Фактическую точку попадания для каждой ракеты можно определить отклонением курса x и отклонением дальности y. Для расстояния, с которого запускаются ракеты, оба отклонения независимы, нормально распределены относительно точки прицеливания и имеют нулевое среднее значение. Среднеквадратические отклонения 30 м в направлении x и 60 м в направлении y. Бомбардировщик при каждом заходе выпускает шесть ракет. Необходимо построить модель ведения стрельбы шестью ракетами по цели. Провести 1000 испытаний и оценить математическое ожидание числа ракет, попавших в цель за один заход.

Задача 9. Вес хлебобулочных изделий, выпускаемых хлебозаводом за сутки, есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu = 500$ кг и $\sigma = 20$ кг. Спрос за сутки, выражаемый в килограммах, на хлебобулочные изделия этого хлебозавода есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu = 500$ кг и $\sigma = 30$ кг. Построить модель спроса и предложения. На основании 1000 испытаний с моделью оценить математическое ожидание неудовлетворенного спроса на хлебобулочные изделия.

Задача 10. Вес людей, которые хотят совершить прогулку на вертолете в парке аттракционов, является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 75 кг и стандартным отклонением 6 кг. Вместимость вертолета составляет 5 пассажиров, максимальная грузоподъемность – 400 кг. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить вероятность того, что вертолет не взлетит с пятью пассажирами на борту?

Задача 11. Пусть в течение суток длительность интервала времени между очередными поступлениями трамваев на остановку имеет нормально распределенную случайную величину с параметрами $\mu = 20$ и $\sigma = 5$. Один раз в сутки пассажир приходит на остановку в случайный момент времени суток (равномерное распределение длительности) и ожидает очередной трамвай в течение времени Δ, чтобы уехать на нем. Провести 1000 испытаний и оценить математическое ожидание случайной величины Δ.

Задача 12. Вес белого порошка, выпускаемого одним заводом за рабочий день, есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu_б = 100$ кг и $\sigma_б = 10$ кг. Вес красного порошка, выпускаемого другим заводом за рабочий день, есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu_k = 100$ кг и $\sigma_k = 10$ кг. На третьем заводе порошки смешиваются в весовом соотношении 1:1 до полного израсходования одного из видов порошков. Имеющиеся остатки порошка с одного или другого завода утилизируются. Построить модель определения веса смеси порошков. На основании 1000 испытаний с моделью оценить математическое ожидание веса смеси порошков.

Задача 13. В начальный момент времени система состоит из двух новых одинаковых элементов. Первый элемент включается сразу после начала работы системы. Второй элемент является резервным и включается только после отказа первого элемента. Система считается работоспособной, если работоспособен хотя бы один элемент. Длительность безотказной работы элемента является нормально распределенной случайной величиной с параметрами μ и σ. Построить модель для определения длительности безотказной работы системы с двумя элементами. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить вероятность того, что система работоспособна после непрерывной работы в течение заданного периода времени T.

Задача 14. Диаметр шарика для шарикоподшипника является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $\mu = 10$ и $\sigma = 0.03$. В отделе качества диаметры шариков измеряются. Результатом измерения является нормально распределенная случайная величина со средним, равным фактическому диаметру шарика, а среднее квадратическое отклонение равно 0,02 – ошибка измерения. Если результат измерения находится в интервале $[9{,}97; 10{,}03]$, то шарик передают в сборочный цех. В противном случае, шарик отбраковывается. Оценить вероятность того, что в сборочном цехе окажутся шарики с диаметром не принадлежащем $[9{,}97; 10{,}03]$. Оценку вероятности получить на основании 1000 испытаний.

Задача 15. В начальный момент времени система состоит из трех новых элементов. Длительность безотказной работы каждого из элементов есть нормально распределенная случайная величина с параметрами μ и σ. При отказе всех элементов система перестает работать. Построить модель возникновения отказов в указанной системе. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить математические ожидания: 1) длительности работы элемента, который отказал первым; 2) длительности работы элемента, который отказал вторым; 3) длительности работы элемента, который отказал третьим.

Задача 16. В начальный момент времени система состоит из трех новых элементов. Длительность безотказной работы каждого из элементов есть нормально распределенная случайная величина с параметрами μ и σ. При отказе хотя бы одного элемента вся система перестает работать. Построить модель возникновения отказов в указанной системе. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение длительности безотказной работы системы.

Задача 17. В начальный момент времени система состоит из трех новых элементов. Длительность безотказной работы каждого из элементов есть нормально распределенная случайная величина с параметрами μ и σ. При отказе любых двух элементов вся система перестает работать. Построить модель возникновения отказов в указанной системе. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение длительности безотказной работы системы.

Задача 18. В начальный момент времени система состоит из трех новых элементов. Длительность безотказной работы каждого из элементов есть нормально распределенная случайная величина с параметрами μ и σ. При отказе всех элементов система перестает работать. Построить модель возникновения отказов в указанной системе. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение длительности безотказной работы системы.

Задача 19. Система состоит из двух новых элементов. В начальный момент времени начинают работать оба элемента. Длительность безотказной работы каждого из элементов есть нормально распределенная случайная величина с параметрами μ и σ. После отказа одного из элементов, длительность работы оставшегося элемента есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu/10$ и $\sigma/10$. После отказа второго элемента система перестает работать. Построить модель возникновения отказов в указанной системе. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение длительности безотказной работы системы.

Задача 20. Две стрелы последовательно выпускаются в круг радиуса 10 см. Оценить вероятность того, что хотя бы одна стрела попадет в этот круг, если отклонения по осям x, y, проведенным на плоскости круга из центра круга распределены по нормальному закону $N(0,8)$.

Задача 21. Высота сосны в роще есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu_c = 8$ м и $\sigma_c = 2$ м. Высота ели в этой же роще есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu_e = 9$ м и $\sigma_e = 3$ м. Всего в роще 40 сосновых и 60 еловых деревьев. Построить модель формирования высоты для всех деревьев рощи. Оценить математическое ожидание высоты дерева в роще.

Задача 22. Пусть в начальный момент времени цель находится в точке 0. В момент выстрела снарядом по цели, цель начинает двигаться прямолинейно. К моменту попадания снаряда в точку 0, цель успевает переместиться на расстояние, которое является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $\mu_ц$ и $\sigma_ц$. Радиус поражения цели снарядом является нормально распределенной случайной величиной с параметрами μ_c и σ_c от точки 0. Построить модель поражения цели снарядом. Оценить вероятность поражения цели снарядом на основании 1000 испытаний.

Задача 23. Температура воздуха в теплице остается неизменной в течение суток. Выборочные значения температуры принадлежат нормально распределенной случайной величине с параметрами μ_t и σ_t. Растения в теплице погибнут, если в течение двух суток подряд температура воздуха в теплице будет менее $\mu_t - 2\sigma_t$. Построить модель процесса изменения температуры воздуха в теплице. Оценить вероятность того, что растения погибнут в течение двух недель.

Задача 24. В магазине находится 5 мешков сахара. На каждом из них указан вес – «5 кг». Вес сахара в каждом мешке есть нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 5 кг и стандартным отклонением 0,03 кг. Покупатель, поднимая каждый из мешков, оценивает их вес. Его оценка веса мешка есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $(\mu; 0{,}1)$, где μ – истинный вес мешка. На основании оценок весов пяти мешков, покупатель выбирает, на его взгляд, самый «тяжелый» мешок. Построить модель выбора «тяжелого» мешка. Провести 1000 испытаний с моделью и найти математическое ожидание веса самого «тяжелого» мешка. Оценить вероятность того, что выбранный мешок действительно окажется самым тяжелым.

2.3. Экспоненциально распределенная случайная величина

Задача 1. Пакеты с мусором поступают в бак в соответствии с пуассоновским законом распределения. В бак помещается не более определенного числа пакетов. Построить модель процесса заполнения бака пакетами. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить математическое ожидание интервала времени, необходимого для заполнения 9/10 объема бака.

Задача 2. С момента появления первых признаков неисправности до полного отказа элемента проходит экспоненциально распределенный интервал времени. Математическое ожидание этого интервала равно 1. Через равные интервалы времени (равные 0,5) элемент проходит техническое обслуживание и с вероятностью 0,7 признаки неисправности будут обнаружены и элемент будет заменен. На основании 1000 исходов (замена элемента или его отказ) оценить вероятность того, что неисправность элемента не будет обнаружена при проведении технического обслуживания и этот элемент выйдет из строя.

Задача 3. Пуассоновский поток частиц разделяется на два потока таким образом, что в первый поток частицы попадают с вероятностью 3/4, а во второй с вероятностью 1/4. Построить модель потока и разделения частиц. Получить выборку из 1000 моментов поступления частиц. Построить выборочную функцию плотности распределения длительности интервала времени между двумя частицами для каждого из потоков.

Задача 4. Частица двигается вдоль отрезка прямолинейно из точки $z = 0$ к точке $z = H$ «пробегами» случайной длины, распределенными экспоненциально. В конце каждого пробега с заданной вероятностью p частица либо прекращает движение, либо продолжает движение. Построить модель движения частицы. Необходимо оценить вероятность достижения частицей точки $z = H$ на основании 1000 испытаний с моделью.

Задача 5. Пусть в течение суток длительность интервала времени между очередными поступлениями трамваев на остановку распределена экспоненциально с математическим ожиданием равным 15 минутам. Один раз в сутки пассажир приходит на остановку в случайный момент времени суток (равномерное распределение длительности) и ожидает очередной трамвай в течение времени Δ. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить математическое ожидание Δ.

Задача 6. Два зенитных орудия одновременно ведут стрельбу по самолету до тех пор, пока либо самолет не будет сбит одной из зениток, либо пока самолет не выйдет из зоны действия зениток через известный период времени. Время, необходимое, каждой зенитке для попадания в самолет, распределено экспоненциально. Построить модель указанного процесса. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить среднее время жизни сбитого самолета, а также вероятность того, что самолет не будет сбит.

Задача 7. Построить модель процесса слияния двух пуассоновских потоков (с параметрами соответственно λ_1 и λ_2) частиц в один поток. Построить выборочную функцию плотности распределения длительности интервала времени между двумя частицами общего потока.

Задача 8. На домашний телефон поступает пуассоновский поток звонков. Построить модель процесса поступления звонков. На основании одной недели модельного времени построить выборочную функцию плотности распределения длительности интервала времени между двумя звонками.

Задача 9. Покупатель последовательно выбирает в магазине три единицы товара. Время выбора каждой из единиц товара является экспоненциально распределенной случайной величиной с одним и тем же параметром. Построить модель определения длительности выбора трех единиц товара. На основании 1000 испытаний с моделью построить выборочную функцию плотности распределения длительности выбора трех единиц товара.

Задача 10. Подруга звонит другу на мобильный телефон, начиная с 9 часов утра. Длительность интервала времени между последовательными интервалами времени распределена экспоненциально. Интенсивность потока звонков равна 1 звонку за 10 мин. В 10 часов утра друг включает свой мобильный телефон. Пусть с момента включения телефона и до момента первого полученного звонка от подруги проходит время Δ. Построить модель процесса поступления звонков и определения длительности Δ. На основании 1000 экспериментов с моделью оценить математическое ожидание Δ и математическое ожидание числа пропущенных звонков от подруги.

Задача 11. Два друга выехали одновременно, чтобы встретиться в условленном месте. Длительность времени проезда каждого из них есть экспоненциально распределенные случайные величины с заданными параметрами. Тот, кто приедет раньше, ждет другого. Построить модель указанного процесса. На основании 1000 испытаний оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение длительности ожидания одного из друзей своего товарища.

Задача 12. В начальный момент времени частица расположена в точке 0 вещественной оси. Частица мгновенно перемещается по оси вправо или влево с равными вероятностями на расстояния, которые являются экспоненциально распределенными случайными величинами с равными параметрами. Построить модель перемещения частицы. На основании 1000 полученных координат частицы оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение местоположения частицы.

Задача 13. Система состоит из двух новых элементов. В начальный момент времени начинают работать оба элемента. Длительность безотказной работы каждого из элементов есть экспоненциально распределенная случайная величина. При отказе любого из элементов система перестает работать. Построить модель возникновения отказов в указанной системе. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение длительности безотказной работы системы.

Задача 14. Система состоит из двух новых элементов. В начальный момент времени начинают работать оба элемента. Длительность безотказной работы каждого из элементов есть экспоненциально распределенная случайная величина. При отказе обоих элементов система перестает работать. Построить модель возникновения отказов в указанной системе. Провести 1000 испытаний с моделью и оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение длительности безотказной работы системы.

Задача 15. Система состоит из двух основных элементов и одного резервного. В начальный момент времени начинают работать оба основных элемента. Время жизни основных и резервного элементов – независимые экспоненциально распределенные случайные величины. В момент отказа обоих основных элементов мгновенно включается в работу резервный элемент. С момента отказа резервного элемента вся система перестает работать. Построить имитационную модель этой системы. На основании 1000 испытаний оценить математическое ожидание времени жизни системы и математическое ожидание времени жизни системы до отказа второго основного элемента.

Задача 16. Длительность интервала времени между поступлениями покупателей в магазин распределена экспоненциально с параметром λ. Построить модель определения моментов поступления покупателей в магазин. Оценить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение длительности интервала времени между поступлениями покупателей в магазин.

Задача 17. Пуассоновские потоки частиц из двух источников сначала соединяются в один поток, в котором частицы нумеруются в порядке поступления. Затем этот поток разделяется на два таким образом, что первый поток состоит из четных частиц, а второй из нечетных. Построить функцию распределения и функцию плотности распределения длительности интервала времени между двумя частицами первого потока на основании 1000 выборочных значений уже разделенного потока.

Задача 18. Дозиметрический прибор работает от батареи и регистрирует пуассоновский поток частиц. Пусть одной батареи хватает для того, чтобы зарегистрировать 700 частиц. Построить модель определения времени работы прибора до полной разрядки батареи. Определить аналитический вид функции зависимости времени работы прибора на одной новой батарее от интенсивности потока частиц.

Задача 19. Система состоит из n элементов. Пусть k – число исправных элементов и в начальный момент времени $t = 0$ число $k = n$. В процессе работы элементы последовательно выходят из строя. Длительность интервала времени между последовательными выходами из строя элементов – минимальное значение из k экспоненциально распределенных случайных величин с параметром $\lambda/(k+1)$. Оценить математическое ожидание числа исправных элементов в момент времени $t = T$.

Задача 20. Даны экспоненциально распределенные случайные величины A и B. Применяя метод Монте-Карло, оцените математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = AB$, пользуясь выборкой из 1000 значений.

Задача 21. Даны экспоненциально распределенные случайные величины A и B. Применяя метод Монте-Карло, оцените математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 2A/B$, пользуясь выборкой из 1000 значений.

Задача 22. Даны экспоненциально распределенные случайные величины A и B. Применяя метод Монте-Карло, оцените математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = |A - B|$, пользуясь выборкой из 1000 значений.

Задача 23. Клиенты приходят в парикмахерскую в соответствии с пуассоновским законом распределения. Оценить математическое ожидание числа клиентов, обслуживаемых парикмахерской за один рабочий день (8 часов работы) на основании 1000 экспериментов с моделью.

Задача 24. Пуассоновский поток частиц поступает на дозиметрический прибор. Прибор может показывать только два уровня радиации – низкий и высокий. Если уровень радиации высокий, то лампочка горит, если низкий, то лампочка не горит. Если в течение заданного фиксированного интервала времени прибор зарегистрирует три или более частиц, то лампочка загорается и горит весь следующий интервал времени. Лампочка не горит или потухнет, если прибор зарегистрирует в течение прошлого интервала времени менее трех частиц. Построить модель процесса регистрации частиц прибором. По прошествии 1000 интервалов времени оценить вероятность того, что лампочка горит.

3. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

3.1. Системы массового обслуживания

Система массового обслуживания (СМО) [9] производит обслуживание требований, поступающих в нее из *источника требований* и возвращающихся после обслуживания в источник. Обслуживание требований в системе производится обслуживающими *приборами*. Система может содержать от одного до бесконечного числа приборов. В зависимости от реализации в системе возможности ожидания поступившими требованиями их обслуживания системы массового обслуживания делятся на три типа: 1) системы с потерями, в которых требования, не нашедшие в момент поступления ни одного свободного прибора, теряются (возвращаются в источник без обслуживания); 2) системы с ожиданием, в которых возможно ожидание любого числа требований, при этом ожидающие требования образуют *очередь*, длина которой не ограничена; 3) системы с ожиданием и ограничениями, в которых допускается возможность образования очереди ограниченной длины; при этом требования, поступившие в систему, когда отсутствуют свободные места для ожидания в очереди, теряются (возвращаются в источник без обслуживания). В системах с ожиданием очередь в общем случае может иметь сложную структуру, являясь некоторым набором очередей. Выбор очередного требования из очереди на обслуживание производится с помощью некоторой *дисциплины обслуживания*. Примером таких дисциплин является *FCFS* (первый пришел – первым обслужен), *LCFS* (последний пришел – первым обслужен), *RANDOM* (очередное требование выбирается из очереди наугад), *PS* (разделение процессора), *PRIORITY* (с приоритетом).

В системах обслуживания с приоритетами, требования неоднородны как по распределению длительности обслуживания, так и по занимаемому месту в очереди. Существует два варианта поведения системы в ситуации, когда во время обслуживания требования с некоторым приоритетом в СМО поступает требование более высокого приоритета. Система называется системой с *относительным приоритетом*, если поступление такого требования не прерывает обслуживание требования. В противном случае, система называется СМО с *абсолютным приоритетом*.

Случайная последовательность требований, которые поступают в систему обслуживания и которые необходимо обслуживать, называется *потоком* требований. Она определяется моментами поступлений t_i и числом требований γ_i, поступающих в момент t_i. В дальнейшем будем считать, что $\gamma_i = 1$, а t_i в общем случае случайны.

Особенно важен случай, когда все $\xi_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 1, 2, \ldots$, имеют одинаковое экспоненциальное распределение с параметром λ. Такой поток называется *пуассоновским* (или простейшим потоком) с интенсивностью λ, так как случайное число требований, поступающих в промежутке времени длительности τ, подчинено пуассоновскому распределению с параметром $\lambda\tau$. Пуассоновский поток характеризуется тем, что вероятность поступления требований в систему обслуживания в некотором промежутке времени не зависит от того, сколько или какие требования уже находятся в ней. Системы обслуживания, в которые поступают только такие потоки, называются системами с *бесконечным* числом источников или *открытыми* системами обслуживания.

Иная ситуация в потоках требований, которые встречаются в системах обслуживания с *конечным* числом источников или в так называемых *замкнутых* системах обслуживания. Здесь принимается во внимание, что в то время, когда требование обслуживается или ожидает, его источник не может порождать новых требований.

Последовательность длительностей обслуживания на любом, но фиксированном, приборе или длительностей обслуживания требований некоторого источника, как правило, предполагается последовательностью независимых одинаково распределенных положительных случайных величин. Последовательность интервалов обслуживания, естественно, не содержит промежутков времени, когда прибор не производит обслуживания требований.

Введем общее обозначение системы массового обслуживания:

$$A \mid S \mid \kappa \mid B \mid Z .$$

Буква A характеризует поток требований. Например,

$A = M$ (Markov) – пуассоновский поток требований;

$A = G$ (general) – поток с возможной зависимостью интервалов времени между последовательными требованиями. Интервалы имеют произвольное одинаковое распределение длительностей;

$A = D$ (deterministic) – регулярный поток, поток с постоянными интервалами между требованиями.

Буква S характеризует случайные последовательности длительностей обслуживания на отдельных приборах системы обслуживания. Например,

$S = M$ – последовательность независимых, одинаково распределенных экспоненциально длительностей обслуживания на каждом приборе;

$S = G$ – последовательность одинаково распределенных длительностей обслуживания, распределение произвольное;

$S = D$ – последовательность одинаковых длительностей обслуживания.

Буква κ обозначает число обслуживающих приборов в системе.

Буква B – число мест ожидания в очереди (максимальная длина очереди). Значение $B = 0$ характеризует систему с потерями, $0 < B < \infty$ – комбинированная система с ожиданием и потерями, $B = \infty$ – система обслуживания с ожиданием. Если $B = \infty$, то запись «$| \infty$» в обозначении СМО обычно опускается.

Буква Z указывает число источников требований. Если $Z = \infty$, то запись «$| \infty$» в обозначении СМО обычно опускается.

Если Z – ограниченное число, то предполагается, что в каждом источнике находится по одному требованию. В этом случае в системе обслуживания может находиться не более Z требований.

При рассмотрении систем массового обслуживания и имитационных моделей этих систем будут использованы также следующие обозначения:

λ – интенсивность входящего потока требований (среднее число требований, поступающих в СМО в единицу времени);

μ – интенсивность обслуживания требований одним прибором (среднее число требований, обслуживаемых одним прибором при условии, что этот прибор непрерывно занят);

$\overline{u}$ – математическое ожидание длительности пребывания требований в системе обслуживания;

$\overline{w}$ – математическое ожидание длительности ожидания требований в очереди системы обслуживания;

$\overline{n}$ – математическое ожидание числа требований в системе обслуживания.

Рассмотрим теперь принципы имитационного моделирования систем на примере создания имитационной модели системы $\boldsymbol{S}$, состоящей из источника требований и системы массового обслуживания (рис. 3.1).

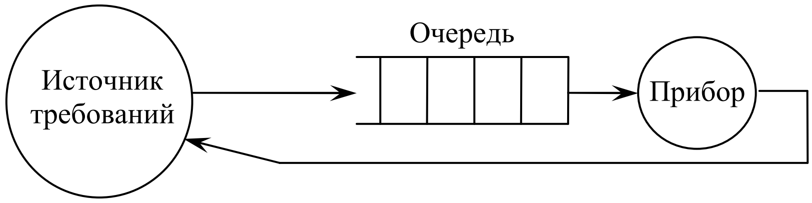


Рис. 3.1. Система S : источник требований и СМО

Система массового обслуживания состоит из одного обслуживающего прибора и очереди неограниченной длины. Из источника требований в очередь системы обслуживания поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Постановка и выбор требований из очереди производятся прибором в соответствии с дисциплиной *FCFS*. Длительность обслуживания требований прибором является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром μ. Для выполнения условия существования стационарного режима полагаем $\lambda < \mu$. Необходимо построить имитационную модель системы ***S***. Модель должна вычислять оценки характеристик $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{n}$ системы обслуживания.

Будем считать, что система ***S*** состоит из следующих объектов: источник требований, очередь требований системы обслуживания, прибор системы обслуживания, требование. Все объекты системы ***S***, за исключением требования, могут быть только в единственном экземпляре.

Объектам системы ***S*** поставим в соответствие объекты имитационной модели.

Требования. В общем случае требования представляют собой перемещаемые по системе объекты, различающиеся классом, приоритетом, номером и другими параметрами. Из всего набора параметров требования реальной системы в модели необходимо отобразить только те, которые способствуют достижению цели моделирования. В нашем случае понадобятся следующие атрибуты требования модели: момент поступления требования $t_п$ в очередь системы из источника, момент начала обслуживания требования $t_н$, момент завершения обслуживания требования $t_з$. Таким образом, требование в компьютерной модели можно представить именованной областью памяти, содержащей форматированные поля данных (атрибуты требования).

Заметим, что разность моментов $t_з$ и $t_п$ определяет длительность пребывания требования в системе обслуживания, а разность моментов $t_н$ и $t_п$ – длительность ожидания требования в очереди системы обслуживания. Для получения статистически значимых оценок характеристик $\bar{u}$ и $\bar{b}$ потребуется определенное число обслуженных требований. Организуем их хранение в модели следующим образом.

Прибор, завершив обслуживание требования, будет направлять его не в источник, а в специально организованную очередь обслуженных требований $Q_{обсл}$. Тогда признаком окончания эксперимента с имитационной моделью будет достижение заранее определенного числа обслуженных требований в очереди $Q_{обсл}$.

Очереди. Очереди являются самостоятельными объектами имитационных моделей систем обслуживания и служат для хранения требований, ожидающих обработки. Установление требований в очереди и выбор их из очередей производится программными процессами, поэтому каждая очередь считается принадлежащей конкретному процессу. Основным набором характеристик очереди являются: максимальное число требований в очереди, дисциплина установления требований в очередь и выбора их из очереди, приоритет требований, которым разрешается пребывать в очереди. Будем считать, что имитационная модель системы $\boldsymbol{S}$ содержит очередь Q требований, ожидающих обслуживания, и очередь $Q_{обсл}$ обслуженных требований.

Введем некоторые определения.

Модельное время в имитационной модели представлено глобальной переменной вещественного типа, принимающей значения на интервале $[0, \infty)$ и обеспечивающей имитацию параллельного развития процессов системы $\boldsymbol{S}$.

Обозначим Θ – текущий момент модельного времени.

Состояние модели системы $\boldsymbol{S}$ характеризуется совокупностью текущих значений ее атрибутов и связей.

Событие – мгновенное изменение состояния модели системы $\boldsymbol{S}$. Событие характеризуется:

– условиями возникновения;

– типом события, определяющим алгоритм обработки этого события;

– нулевой длительностью.

В имитационной модели будем различать события трех типов: *поступление требования* в систему массового обслуживания, *начало обслуживания требования* прибором системы обслуживания и *уход требования* из системы массового обслуживания после завершения обслуживания.

Процесс функционирования системы $\boldsymbol{S}$ в имитационной модели представим логически связанной последовательностью событий на оси модельного времени. Эта последовательность характеризуется интервалами времени между событиями и типом событий.

Заметим, что если очередь Q пуста, то событие «поступление требования» наступает раньше события «начало обслуживания требования», хотя моменты появления этих событий совпадают на оси модельного времени. Возможна другая ситуация. Если очередь Q не пуста и завершается обслуживание требования, то событие «уход требования» наступает раньше события «начало обслуживания требования», хотя моменты появления этих событий также совпадают на оси модельного времени.

Алгоритм обработки события в имитационной модели представим в виде отдельной программной единицы, называемой *сегментом процесса*.

Сегмент процесса π_n, связанный с поступлением требования в СМО, выполняет следующие операции:

– создает новое требование;

– наделяет это требование значениями атрибутов. В нашем случае текущий момент модельного времени присваивается моменту поступления требования в очередь Q системы обслуживания;

– ставит требование в очередь Q системы обслуживания;

– формирует интервал времени τ_u (длительность интервала времени между очередными поступлениями требований), по истечении которого повторится последовательность операций этого сегмента;

– определяет очередной момент выполнения сегмента процесса π_n. Он равен $\theta + \tau_u$;

– сегмент процесса завершает свою работу.

Сегмент процесса $\pi_н$, связанный с началом обслуживания требования в СМО, выполняет следующие операции:

– проверяет наличие требований в очереди Q. Если очередь Q пуста, то момент активизации данного сегмента устанавливается равным ∞ (бесконечности) и сегмент завершает свою работу.

Момент времени равный «бесконечности» (в ЭВМ это большое число, заранее большее момента модельного времени завершения эксперимента с моделью) делает невозможным активизацию процесса в текущие моменты модельного времени. Такой прием используется для активизации процессов при выполнении логических условий.

Если очередь Q не пуста, то требование выбирается из очереди согласно дисциплине FCFS;

– переводит прибор в состояние «занят»;

– наделяет выбранное требование значениями атрибутов. В нашем случае текущий момент модельного времени присваивается моменту начала обслуживания требования;

– формирует интервал времени τ_o, по истечении которого завершится обслуживание требования (длительность обслуживания требования прибором);

– определяет момент выполнения сегмента процесса, связанного с уходом требования. Он равен $\theta + \tau_o$;

– момент активизации сегмента $\pi_н$ устанавливается равным ∞. Сегмент завершает свою работу.

Сегмент процесса $\pi_з$, связанный с уходом требования из СМО, выполняет следующие операции:

– изменяет значения атрибутов требования, завершившего обслуживание. В нашем случае текущий момент модельного времени присваивается моменту ухода этого требования из системы обслуживания;

– ставит требование, завершившее обслуживание, в очередь $Q_{обсл}$;

– переводит прибор в состояние «свободен»;

– устанавливает момент выполнения сегмента $\pi_н$ равным Θ. Этим действием фактически активизируется процесс $\pi_н$;

– сегмент завершает свою работу.

Существует два способа представления сегментов процессов в компьютерной программе:

1) Каждый сегмент процесса в компьютерной модели реализуется в виде отдельной процедуры.

2) В отдельную процедуру включаются все те сегменты процессов, которые образуют законченный алгоритм функционирования объекта моделируемой системы. В нашем случае алгоритм функционирования объекта «Источник требований» целиком реализован в сегменте процесса $\pi_п$. Алгоритм функционирования объекта «Прибор системы обслуживания» состоит из сегментов $\pi_н$

и $\pi_з$. Реализованный в имитационной модели алгоритм функционирования объекта системы ***S*** называется *программным процессом*.

Каждый из рассмотренных способов представления сегментов процессов имеет достоинства и недостатки. В частности, первый способ предпочтителен, если создается сравнительно простая имитационная модель. Второй способ лучше использовать, если в модели отражено большое число связанных разнотипных объектов моделируемой системы со сложными алгоритмами функционирования.

Управление работой имитационной модели обеспечивается *ведущей программой*. Ведущая программа выполняет следующие функции:

– определяет объекты имитационной модели (сегменты процессов, очереди требований, структуру требования);

– формирует начальное состояние модели:

- – начальный момент модельного времени равен нулю,
- – прибор переводится в состояние «свободен»,
- – момент активизации сегмента $\pi_п$ равен нулю,
- – момент активизации сегмента $\pi_н$ равен ∞,
- – момент активизации сегмента $\pi_з$ равен ∞,
- – число требований в очереди Q (как правило, устанавливается в положение «пусто»),
- – очередь $Q_{обсл}$ устанавливается в положение «пусто»,
- – определяет функцию распределения длительности интервала времени между очередными поступлениями требований в СМО,
- – определяет интенсивность потока требований λ,
- – определяет функцию распределения длительности обслуживания требований прибором,
- – определяет интенсивность обслуживания требований μ,
- – определяет условие завершения выполнения имитационной модели);

– в текущий момент модельного времени Θ в установленной последовательности выполняет все сегменты процессов (сегменты программных процессов), моменты активизации которых совпадают с Θ. Результатом выполнения любого сегмента процесса, в частности, является момент его следующего выполнения или изменение моментов выполнения других сегментов процессов. Ведущая программа запоминает эти моменты и соответствующие им типы сегментов процессов;

– обеспечивает продвижение модельного времени посредством установления текущего момента Θ равным ближайшему моменту выполнения сегмента процесса;

– определяет момент завершения выполнения имитационной модели. Как правило, условием завершения выполнения имитационной модели является достижение заданного числа обслуженных требований либо превышение явно указанного момента модельного времени;

– обеспечивает обработку статистических данных;

– выводит полученные результаты в требуемом формате в файл или экран монитора.

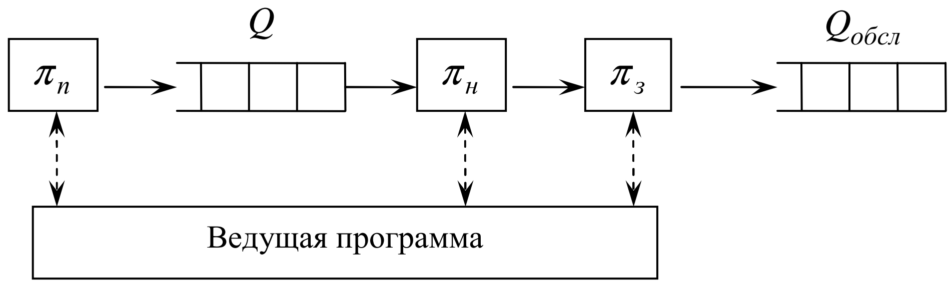


Рис. 3.2. Структура модели системы S

Графическое изображение структуры модели системы $\boldsymbol{S}$ представлено на рис. 3.2. Модель состоит из ведущей программы, трех сегментов процессов, очереди требований Q и очереди обслуженных требований $Q_{обсл}$. Сплошными стрелками показано направление движения требований. Пунктирными стрелками отображены информационные и управляющие связи между ведущей программой и сегментами процессов.

Рассмотрим теперь особенности представления в имитационной модели системы обслуживания с несколькими идентичными приборами. В этом случае модель содержит одну очередь Q, каждому j-му прибору системы обслуживания будут соответствовать сегменты процессов $\pi_{j,н}$ и $\pi_{j,з}$, $j=1,...,\kappa$, где κ – число приборов. Если одновременно несколько свободных приборов претендуют на обслуживание требования, то из очереди требование выбирается, например, тем прибором, который имеет наименьший номер. Обслуженные требования помещаются в очередь $Q_{обсл}$.

Рассмотрим метод вычисления $\tilde{u}$ – оценки математического ожидания длительности пребывания требований в системе обслуживания. Пусть K – число обслуженных требований на момент завершения выполнения имитационной модели, $t_{зi}$ – момент завершения обслуживания i-го по счету требования прибором, t_{ni} – момент постановки требования в очередь Q, $i = 1, 2, ..., K$. Тогда оценка математического ожидания длительности пребывания требований в системе обслуживания определяется из выражения

$$\tilde{u} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(t_{зi} - t_{ni}).$$

Аналогичным образом определяется $\tilde{w}$ – оценка математического ожидания длительности пребывания требований в очереди Q системы обслуживания:

$$\tilde{w} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(t_{нi} - t_{ni}).$$

Представим теперь метод вычисления $\tilde{n}$ – оценки математического ожидания числа требований в системе обслуживания. Пусть T – длительность модельного времени проведения эксперимента с моделью, $\tau_i^{(k)}$ – длительность i-го интервала времени, когда в системе обслуживания находилось ровно k требований, $k = 0, 1, 2, ...$, $i = 1, 2, ..., L_k$, где R_k – число интервалов времени, когда в СМО находилось ровно k требований.

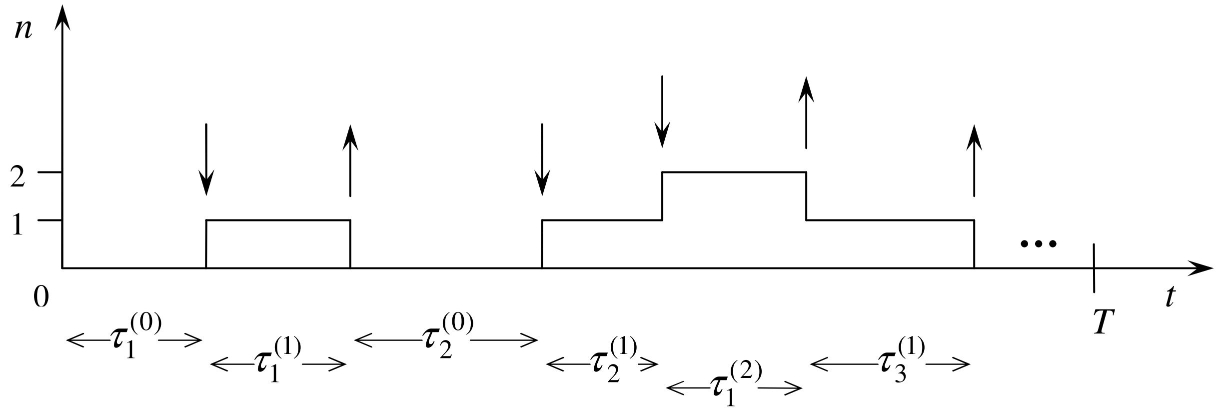


Рис. 3.3. Реализация процесса поступления и обслуживания требований

На рис. 3.3 показана одна из типичных реализаций процесса поступления и обслуживания требований системой обслуживания. На оси модельного времени t вертикальными стрелками, направленными вниз и вверх, показаны моменты соответственно поступления и ухода требований из СМО. Буквой n обозначено число требований в СМО, $\tau_1^{(0)}$, $\tau_2^{(0)}$, … – интервалы времени, в течение которых в СМО нет требований, $\tau_1^{(1)}$, $\tau_2^{(1)}$, $\tau_3^{(1)}$, … – интервалы времени, в течение которых в СМО находится одно требование, $\tau_1^{(2)}$, … – интервалы времени, в течение которых в СМО находится два требования.

Оценка вероятности того, что в системе обслуживания находится ровно k требований, равна

$$\tilde{p}_k = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{R_k}\tau_i^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Тогда оценка величины $\bar{n}$ вычисляется по формуле

$$\tilde{n} = \sum_{k=1}^{\infty} k\tilde{p}_k .$$

В задачах 1–12 предполагается, что в системах обслуживания используется дисциплина *FCFS*.

Задача 1. Дана СМО типа $M \mid M \mid 2 \mid 0 \mid \infty$. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\bar{u}$, $\bar{n}$ и вероятность отказа требованию в обслуживании.

Задача 2. Дана СМО типа $M \mid M \mid 2$. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\bar{u}$ и $\bar{n}$.

Задача 3. Дана СМО типа $M \mid M \mid 2 \mid 2 \mid \infty$. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\bar{u}$, $\bar{n}$ и вероятность отказа требованию в обслуживании.

Задача 4. Дана СМО типа $M \mid M \mid 1 \mid 4 \mid 5$. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\bar{u}$ и $\bar{n}$.

Задача 5. Дана СМО типа $M \mid M \mid 1$. Сначала в систему обслуживания поступает пуассоновский поток требований в течение длительности времени τ. Затем поток требований прерывается на время τ. Процессы поступления и прерывания требований из источника повторяются. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\bar{u}$ и $\bar{n}$.

Задача 6. Дана СМО типа $M\,|\,M\,|\,3\,|\,2\,|\,5$. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$, $\overline{n}$ и вероятность отказа требованию в обслуживании.

Задача 7. Дана СМО типа $M\,|\,M\,|\,1$. Предполагается, что в этой системе может изменяться параметр функции распределения длительности обслуживания требований, последовательно принимая значения из множества $\{\mu_1, \mu_2\}$. Длительности использования системой обслуживания интенсивностей μ_1 или μ_2 равны τ. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$.

Задача 8. Дана СМО типа $\bullet\,|\,M\,|\,1$. Построить имитационную модель системы обслуживания с функциями распределения длительности между последовательными поступлениями требований: постоянная величина, экспоненциальная, нормальная. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$ для каждой из функций A. Использовать одинаковые математические ожидания длительности между последовательными поступлениями требований.

Задача 9. Дана СМО типа $M\,|\bullet|\,1$. Построить имитационную модель системы обслуживания с функциями распределения длительности обслуживания требований: постоянная величина, экспоненциальная, нормальная. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$ для каждой из функций S. Использовать одинаковые математические ожидания длительности обслуживания требований.

Задача 10. Дана СМО типа $M\,|\,M\,|\,1$. Предполагается, что через экспоненциально распределенные интервалы времени в этой системе мгновенно уничтожаются все требования. После этого события система обслуживания продолжает нормальное функционирование. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$.

Задача 11. Дана СМО типа $M\,|\,M\,|\,2$. Предполагается, что через экспоненциально распределенные интервалы времени в этой системе мгновенно уничтожаются все требования, находящиеся в очереди. После этого события система обслуживания продолжает нормальное функционирование. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$.

Задача 12. Дана СМО типа $M|M|1$. После обслуживания, требование с заданной вероятностью p возвращается в систему обслуживания, а с вероятностью $1-p$ покидает эту систему обслуживания. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$.

Задача 13. Дана СМО типа $M|M|1$ с двумя классами требований и относительным приоритетом. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$ для каждого класса требований.

Задача 14. Дана СМО типа $M|M|1$ с двумя классами требований и абсолютным приоритетом. Требования 2-го класса, обслуживание которых было прервано требованиями 1-го класса, встают в хвост очереди с остаточным временем обслуживания. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$ для каждого класса требований.

Задача 15. Дана СМО типа $M|M|1$ с двумя классами требований и абсолютным приоритетом. Требования 2-го класса, обслуживание которых было прервано требованиями 1-го класса, мгновенно покидают СМО без дообслуживания. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ для каждого класса требований, а также вероятность отказа в обслуживании требований 2-го класса.

Задача 16. Дана СМО типа $M|M|1$ с двумя классами требований и абсолютным приоритетом. Требования 2-го класса, обслуживание которых было прервано требованиями 1-го класса, мгновенно встают в хвост очереди СМО с первоначальной длительностью обслуживания. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$ для каждого класса требований.

Задача 17. Дана СМО типа $M|M|2|3$ с двумя классами требований и относительным приоритетом. Если в момент поступления требования 1-го класса в СМО имеется требование 2-го класса, то требование 2-го класса, стоящее ближе к хвосту очереди, уходит из СМО без обслуживания. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ для каждого класса требований и вероятности отказов требованиям каждого класса в обслуживании.

Задача 18. Дана СМО типа $M \mid M \mid 1$ с дисциплиной *PS* (разделение процессора). Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$.

Задача 19. Дана СМО типа $M \mid M \mid 1$ с дисциплиной *RANDOM* (требования случайным образом выбираются из очереди с равной вероятностью). Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$.

Задача 20. Дана СМО типа $M \mid M \mid 1$. Дисциплина обслуживания: из очереди на обслуживание выбирается требование с минимальной длительностью обслуживания. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$.

Задача 21. Дана СМО типа $M \mid M \mid 1$. Дисциплина обслуживания: из очереди на обслуживание выбирается требование с максимальной длительностью обслуживания. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$.

Задача 22. Дана СМО типа $M \mid M \mid 1$. Поступающие в СМО требования покинут эту СМО, если через определенный интервал времени (экспоненциально распределенная случайная величина с параметром γ) не начнут обслуживаться прибором. Дисциплина обслуживания: из очереди на обслуживание выбирается требование с минимальной остаточной длительностью пребывания в очереди. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$, $\overline{n}$, а также вероятность ухода требований из СМО без обслуживания.

Задача 23. Дана СМО типа $M \mid M \mid 1$ с дисциплиной *LCFS*. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$ и $\overline{n}$.

Задача 24. Дана СМО типа $M \mid M \mid 1 \mid 4 \mid \infty$ с дисциплиной *LCFS*. Построить имитационную модель системы. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}$, $\overline{n}$ и вероятность отказа требованию в обслуживании.

3.2. Сети массового обслуживания

Сеть массового обслуживания (СеМО) [9] представляет собой совокупность взаимосвязанных систем массового обслуживания, обеспечивающих в процессе функционирования сети прием, хранение, обработку и выдачу требований, поступающих в системы обслуживания.

По отношению к внешнему источнику требований сети обслуживания делятся на открытые и замкнутые. Открытые СеМО имеют внешний источник требований бесконечной емкости; требования поступают в сеть из источника, обслуживаются в сети и возвращаются в источник. Число требований, пребывающих в открытой СеМО в процессе ее эволюции, является дискретной случайной величиной. Замкнутые СеМО не имеют внешних источников требований. Число требований, пребывающих в замкнутой СеМО, является постоянной величиной.

Одним из основных параметров сети обслуживания является маршрутная матрица, элементами которой являются вероятности перехода требований между системами обслуживания в сети. Элемент θ_{ij} равен вероятности перехода требования из системы обслуживания с номером i в систему обслуживания с номером j после завершения обслуживания данного требования в i-й СМО. Элементы θ_{0j} и θ_{i0}, $1 \le i,\ j \le L$, где L – число СМО в сети обслуживания, определяют соответственно вероятности поступления требований из источника в j-ю СМО и из i-й СМО в источник. Переход требований между системами обслуживания в сетях происходит мгновенно.

Рассмотрим теперь принципы имитационного моделирования сетей массового обслуживания.

В случае, если сеть обслуживания открытая, то источник требований в имитационной модели представим сегментом процесса π_n, описанного в разделе 3.1. Если же сеть обслуживания замкнутая, то необходимо сформировать заданное число требований и распределить их некоторым образом по очередям систем обслуживания. В процессе функционирования модели сети число требований не меняется.

Модель системы обслуживания, представленную в разделе 3.1, используем в качестве структурной единицы модели сети обслуживания для отображения алгоритмов функционирования системы обслуживания с номером i, $i = 1, ..., L$.

Связь между системами обслуживания в имитационной модели отобразим посредством передачи требований из очереди одной системы обслуживания в очередь другой системы. Например, последовательное соединение моделей двух СМО, представлено на рис. 3.4.

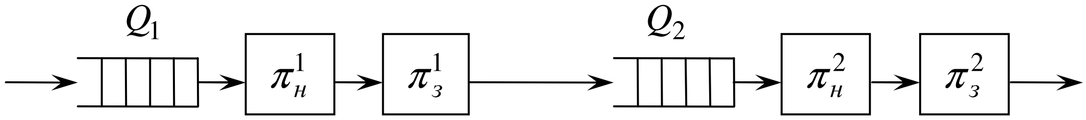


Рис. 3.4. Последовательное соединение моделей двух СМО

Параллельное соединение моделей двух СМО, т. е. когда две системы обслуживания имеют только один источник, показано на рис. 3.5.

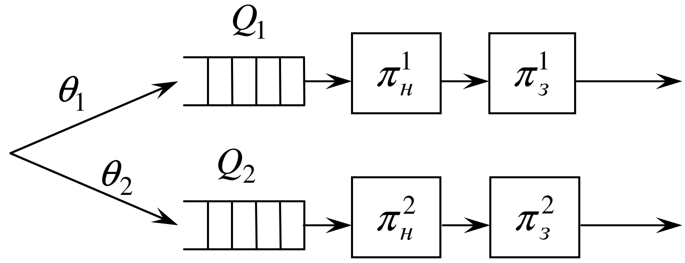


Рис. 3.5. Параллельное соединение моделей двух СМО

Буквами Q_1, $\pi_н^1$, $\pi_з^1$ и Q_2, $\pi_н^2$, $\pi_з^2$ обозначены соответственно объекты моделей первой и второй систем обслуживания, θ_1 и θ_2 – вероятности переходов требований соответственно в первую и вторую СМО. Если из источника требования поступают только в первую и вторую СМО, то $\theta_1 + \theta_2 = 1$.

Задача 1. Сеть массового обслуживания состоит из двух последовательно связанных СМО типа $M \mid M \mid 1$. Из источника требований в первую СМО сети поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Затем требования переходят во вторую СМО. После обслуживания во второй системе, требования возвращаются в источник. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$.

Задача 2. Сеть массового обслуживания состоит из двух последовательно связанных СМО типа $M \mid M \mid 1 \mid 0$ и $M \mid M \mid 1$. Из источника требований в первую СМО поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Затем требования переходят во вторую СМО. После обслуживания во второй системе, требования возвращаются в источник. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$.

Задача 3. Сеть массового обслуживания состоит из двух параллельно связанных СМО типа $M|M|1|0$. Из источника требований в СеМО поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Требования направляются в первую и вторую системы с заданными вероятностями. После обслуживания, требования возвращаются в источник. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить м. о. числа требований в сети обслуживания и вероятность отказа требованию в обслуживании.

Задача 4. Сеть массового обслуживания состоит из двух параллельно связанных СМО типа $M|M|2|0$. Из источника требований в сеть поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Требования направляются в первую и вторую системы с заданными вероятностями. После обслуживания, требования возвращаются в источник. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить м. о. числа требований в сети обслуживания и вероятность отказа требованию в обслуживании.

Задача 5. Сеть массового обслуживания состоит из двух параллельно связанных СМО типа $M|M|2$. Из источника требований в сеть поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Требования направляются в первую и вторую системы с заданными вероятностями. После обслуживания, требования возвращаются в источник. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить м. о. числа требований в сети обслуживания и м. о. длительности пребывания требований в сети.

Задача 6. Сеть массового обслуживания состоит из двух параллельно связанных СМО типа $M|M|2$. Из источника требований в сеть поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Требования направляются в первую и вторую системы с заданными вероятностями. После обслуживания первой СМО требования с вероятностью 0,8 возвращаются в источник или с вероятностью 0,2 переходят во 2-ю СМО. После обслуживания второй СМО требования с вероятностью 0,7 возвращаются в источник или с вероятностью 0,3 переходят во 1-ю СМО. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить м. о. числа требований в сети обслуживания и м. о. длительности пребывания требований в сети.

Задача 7. Сеть массового обслуживания состоит из двух последовательно связанных СМО типа $M|M|1$. Из источника требований в первую СМО сети поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Затем требования переходят во вторую СМО. После обслуживания во второй системе, требования с вероятностью p возвращаются в источник или с вероятностью $1-p$ переходят в очередь первой СМО. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$.

Задача 8. Сеть массового обслуживания состоит из двух параллельно связанных СМО типа $M|M|1$. В каждую из систем поступает пуассоновский поток требований с заданными интенсивностями. Если в первой СМО имеется хотя бы одно требование, то интенсивность обслуживания требований во второй СМО увеличивается в два раза. После обслуживания в первой или во второй системах, требования возвращаются в источник. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$.

Задача 9. Замкнутая сеть массового обслуживания состоит из трех систем обслуживания типа $M|M|1$, связанных в однонаправленное кольцо. В сети находится 6 требований. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ и $\bar{u}_3$.

Задача 10. Сеть массового обслуживания состоит из двух систем обслуживания типа $M|M|1$. Из источника в первую систему обслуживания поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. После обслуживания в первой системе, требования с вероятностью p покидают сеть или с вероятностью $1-p$ поступают во вторую систему обслуживания. После обслуживания во второй системе, требования мгновенно поступают в первую систему. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить математическое ожидание длительности пребывания требований в сети обслуживания.

Задача 11. Сеть массового обслуживания состоит из двух последовательно связанных СМО типа $M \mid M \mid 1$ и $M \mid M \mid 1 \mid 2$. Из источника требований в первую СМО поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Затем требования переходят во вторую СМО. После обслуживания во второй системе, требования возвращаются в источник. Если после обслуживания в первой СМО во второй СМО прибор и оба места ожидания заняты, то требование уходит в источник. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$.

Задача 12. Замкнутая сеть массового обслуживания состоит из трех систем обслуживания типа $M \mid M \mid 1 \mid 2$, связанных в однонаправленное кольцо. В сети находится 5 требований. Построить имитационную модель сети обслуживания. На основании 1000 выборочных значений оценить $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ и $\overline{u}_3$.

Задача 13. Автозаправочная станция (АЗС) состоит из четырех заправочных колонок. Возле каждой колонки имеется площадка на 3 машины (одна машина обслуживается и две ожидают). На АЗС поступает пуассоновский поток машин с интенсивностью λ. Длительность обслуживания машин каждой колонкой является нормально распределенной случайной величиной $N(\mu, \sigma)$. Вновь поступающая на АЗС машина становится в очередь с минимальным количеством машин. Если одна из колонок освободилась и имеются машины, ожидающие обслуживания, то любая из машин, стоящих в хвосте очереди, мгновенно занимает свободную колонку. Если на АЗС все места заняты, то новые машины на АЗС не принимаются. Построить имитационную модель АЗС. Оценить:

– м.о. длительности пребывания машин на АЗС;

– м. о. числа машин на АЗС;

– вероятность того, что машины не принимаются на АЗС.

Задача 14. В сборочный цех поступают пуассоновские потоки деталей типов A, B и C соответственно с интенсивностями λ_a, λ_b и λ_c. На первом этапе сборки из одной детали типа A и двух деталей типа B образуется промежуточное изделие типа D. Длительность первого этапа является нормально распределенной случайной величиной $N(\mu_d, \sigma_d)$. На втором этапе из одного изделия типа D и четырех деталей типа C собирается изделие типа E, которое и является результатом работы сборочного цеха. Длительность второго этапа является нормально распределенной случайной величиной $N(\mu_e, \sigma_e)$. В случае отсутствия необходимого количества или типа деталей на любом этапе сборки, сборочный цех приостанавливает работу. Полагаем, что цех может хранить неограниченное количество деталей любого типа. Построить имитационную модель сборочного цеха. Оценить интенсивность потока изделий типа E и вероятность того, что сборочный цех простаивает.

Задача 15. На сортировочную станцию железной дороги (станция) с Первого и Второго направлений поступают железнодорожные составы. Длина любого поступающего состава – число вагонов – целочисленная равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[10, 16]$. Длительность интервала времени между очередными поступлениями составов – нормально распределенная случайная величина $N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2$. На станции одновременно могут расформировываться не более двух составов. Длительность интервала времени расформирования любого состава – нормально распределенная случайная величина $N(\mu_p, \sigma_p)$. Вагоны расформированного состава распределяются и группируются по выходным направлениям Третье, Четвертое и Пятое соответственно с вероятностями θ_3, θ_4 и θ_5. Как только число вагонов в любом из выходных направлений достигает 12, то состав из этих вагонов мгновенно покидает станцию. Построить имитационную модель станции. Оценить:

– м. о. длительности пребывания вагонов на станции;

– м. о. числа вагонов на станции;

– вероятность того, что вновь поступающий на станцию состав будет вынужден ожидать освобождения места на станции.

Задача 16. В конструкторское бюро (КБ) поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ на выполнение определенных работ. В КБ производится распределение всей работы по заявке по трем отделам. Длительность интервала времени выполнения работы i-м отделом – нормально распределенная случайная величина $N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$. В отделе может ожидать выполнения неограниченное число работ. После завершения работ во всех отделах по заявке, считается, что заявка выполнена. Если после выполнения очередной работы за отделом числятся две или более работ, то отдел выполняет работу с наименьшим временем выполнения. Построить имитационную модель функционирования КБ. Оценить:

– м. о. длительности выполнения заявок в КБ;

– м. о. числа заявок в КБ.

Задача 17. Конвейер состоит из трех последовательно соединенных станков. Каждый станок может одновременно обрабатывать только одну деталь. Около каждого станка имеется по три места для деталей, ожидающих обработки. К первому станку поступает пуассоновский поток деталей с интенсивностью λ. Длительность обработки детали i-м станком – нормально распределенная случайная величина $N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$. После первого станка деталь последовательно проходит обработку на втором и третьем станках. Если после обработки детали первым или вторым станками окажется, что соответственно у второго или третьего станков все места для ожидания заняты, то деталь остается в станке и станок останавливает свою работу до освобождения мест (блокирование станка). Построить имитационную модель конвейера. Оценить м. о. длительности прохождения деталей по конвейеру; вероятность того, что i-й станок свободен, $i = 1, 2, 3$; вероятность блокировки i-го станка, $i = 1, 2$.

Задача 18. Пусть овощная база характеризуется следующими параметрами:

– имеется две группы рабочих, которые сортируют овощи по ящикам на два сорта: годен к продаже, брак;

– вмещает 200 ящиков с овощами;

– имеется четыре площадки на которые четыре машины могут разгрузить овощи;

– с фермерских хозяйств поступает пуассоновский поток машин либо с картофелем, либо с морковью соответственно с интенсивностями $\lambda_{кф}$ («кф» – картофель фермерский) и $\lambda_{мф}$ («мф» – морковь фермерская);

– от потребителей поступает пуассоновский поток машин либо за картофелем, либо за морковью соответственно с интенсивностями $\lambda_{кб}$ («кб» – картофель с базы) и $\lambda_{мб}$ («мб» – морковь с базы);

Если на базе имеется хотя бы одна свободная площадка, то вновь прибывшая машина с фермерского хозяйства сгружает на нее овощи и уезжает. Если же свободных площадок нет, то машина уезжает без разгрузки.

Свободная группа рабочих начинает немедленно сортировать овощи по ящикам. С каждой машины получается число ящиков – целочисленная равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[18, 22]$. Длительность формирования одного ящика – нормально распределенная случайная величина

$N(\mu, \sigma)$. Картофель оказывается годным к продаже с вероятностью $\theta_{кг}$ («кг» – картофель годный к продаже) или бракованным с вероятностью $\theta_{кб}$ («кб» – картофель бракованный). Морковь оказывается годной к продаже с вероятностью $\theta_{мг}$ («мг» – морковь годная к продаже) или бракованной с вероятностью $\theta_{мб}$ («мб» – морковь бракованная).

Рабочие прекращают сортировать овощи, если на базе скопилось 200 готовых ящиков с овощами.

Прибывающие на базу машины от потребителя различаются назначением прибытия: за картофелем или за морковью, годными для продажи. Каждая машина забирает число ящиков – целочисленная равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[2, 6]$. Если на базе нет необходимого числа ящиков, то машина забирает все ящики с овощами данного типа, которые имеются на базе. Если на базе нет готовых ящиков необходимого типа, то машина уезжает с базы ни с чем. Время загрузки машин от потребителя считается равным нулю.

Ящики с бракованными овощами обоих типов увозит специальная машина, которая за один раз может взять не больше 20 ящиков. Такая машина забирает овощи через фиксированные интервалы времени τ.

Построить имитационную модель овощной базы. Оценить

– вероятность того, что занята i-я группа рабочих, $i = 1, 2$;

– вероятность того, что машине с фермерского хозяйства с картофелем (с морковью) будет отказано в разгрузке;

– вероятность того, что машина от потребителя за картофелем (за морковью) уедет с базы без ящиков.

Задача 19. В отделе технического контроля (ОТК) изделие последовательно проходит проверку на полноту комплектации, проверку на соответствие техническим требованиям, проверку на надежность.

Изделия поступают в ОТК в соответствии с пуассоновским законом распределения с параметром λ.

Проверка на полноту комплектации (ППК) осуществляется одним работником. Длительность проверки одного изделия – нормально распределенная случайная величина $N(\mu_к, \sigma_к)$. Изделия здесь могут образовывать очередь неограниченной длины. С вероятностью 0,9 изделие проходит этот этап проверки и поступает на второй этап – проверка на соответствие техническим требованиям. С вероятностью 0,1 изделие доукомплектовывается работником ППК и передается на следующий этап. Длительность доукомплектования – нормально распределенная случайная величина $N(\mu_\partial, \sigma_\partial)$.

Проверка на соответствие техническим требованиям осуществляется двумя работниками. Длительность проверки одного изделия одним работником – нормально распределенная случайная величина $N(\mu_m, \sigma_m)$. Изделия здесь могут образовывать очередь неограниченной длины. С вероятностью 0,8 изделие проходит этот этап проверки и поступает на третий этап – проверка на надежность. С вероятностью 0,2 изделие отбраковывается.

Проверка на надежность проводится в отдельном помещении, содержащем десять мест по одному на изделие. Проверка заключается в эксплуатации изделия в течение длительного времени постоянной длины τ. Считаем, что помещение вмещает неограниченное число изделий, ожидающих проверки. С вероятностью 0,8 изделие проходит этот этап проверки и покидает ОТК с пометкой «годен к эксплуатации». С вероятностью 0,2 изделие отбраковывается.

Построить имитационную модель ОТК. Оценить м. о. длительности времени прохождения годного к эксплуатации изделия через ОТК и м. о. числа изделий в ОТК.

Задача 20. На станцию технического обслуживания (СТО) поступает пуассоновский поток автомобилей с интенсивностью λ. Здесь их встречает работник, который проводит предварительный анализ состояния автомобилей. Длительность интервала времени, в течение которого проводится проверка – нормально распределенная случайная величина $N(\mu_n, \sigma_n)$. Максимальное число автомобилей на входе в СТО равно 5. После окончания проверки работник может направить автомобиль на проведение мелкого ремонта с вероятностью θ_1, на проведение крупного ремонта с вероятностью θ_2 или сделать заключение, что автомобиль исправен с вероятностью θ_3. Если автомобиль оказался исправен, то этот автомобиль покидает СТО.

Длительность мелкого и крупного ремонта – нормально распределенные случайные величины соответственно $N(\mu_1, \sigma_1)$ и $N(\mu_2, \sigma_2)$. Автомобили могут образовывать очереди неограниченной длины, ожидая мелкого или крупного ремонтов. После проведения ремонта автомобили покидают СТО.

Построить имитационную модель СТО. Оценить м. о. длительности времени нахождения автомобилей на СТО и м.о. числа автомобилей на СТО.

Задача 21. В кафетерий поступает пуассоновский поток посетителей с интенсивностью λ. Посетители становятся в единую очередь к двум барменам. Каждый из барменов выполняет заказ посетителей в течение интервала времени распределенного по нормальному закону $N(\mu_б, \sigma_б)$. Обслуженный барменом посетитель занимает свободное место за столиком. Всего в кафетерии 5 столиков на 2 человека каждый. Новый посетитель не войдет в кафетерий, если увидит, что все столики заняты. Если посетитель получил заказ от бармена, но все столики заняты, то этот посетитель ожидает в отдельной очереди типа FCFS, пока не освободится место за столиком. Длительность пребывания посетителя за столиком – нормально распределенная случайная величина $N(\mu_c, \sigma_c)$. Закончив трапезу за столиком, посетитель покидает кафетерий.

Построить имитационную модель кафетерия. Оценить:

– м. о. числа посетителей в кафетерии;

– м. о. числа посетителей, получивших заказ от бармена и ожидающих освобождения места за столиком;

– м. о. длительности пребывания посетителей в кафетерии.

Задача 22. В кафетерии установлен большой телевизор, по которому транслируется матч по футболу. В кафетерий поступает пуассоновский поток посетителей с интенсивностью λ. Посетители становятся в очередь к бармену. Бармен выполняет заказ посетителей в течение интервала времени распределенного по нормальному закону $N(\mu_б, \sigma_б)$. Обслуженный барменом посетитель занимает свободное место за столиком. Всего в кафетерии 5 столиков на 3 человека каждый. Новый посетитель не войдет в кафетерий, если увидит, что все столики заняты. Если посетитель получил заказ от бармена, но все столики заняты, то этот посетитель ожидает в отдельной очереди типа FCFS, пока не освободится место за столиком. Посетитель заканчивает трапезу за столиком через интервал времени, который является нормально распределенной случайной величиной $N(\mu_c, \sigma_c)$. При этом, с вероятностью 0,9 он не освобождает столик, а идет в очередь к бармену за очередным заказом. С вероятностью 0,1 посетитель освобождает столик и покидает кафетерий.

Построить имитационную модель кафетерия. Оценить:

– м. о. числа посетителей в кафетерии;

– м. о. числа посетителей, получивших заказ от бармена и ожидающих освобождения места за столиком;

– м. о. длительности пребывания посетителей в кафетерии.

Задача 23. Конвейер состоит из пяти последовательно соединенных станков. Каждый станок может одновременно обрабатывать только одну деталь. Около каждого станка имеется по 4 места для деталей, ожидающих обработки. К первому станку поступает пуассоновский поток деталей с интенсивностью λ. Длительность обработки детали i-м станком – постоянная величина равная τ, $i = 1, ..., 5$. После первого станка деталь последовательно проходит обработку на 2-м, 3-м, 4-м и 5-м станках. Таким образом, момент завершения обработки детали на i-м станке, $i = 1, ..., 4$, совпадает с моментом начала обслуживания этой детали на $i+1$ станке и с началом обработки следующей детали на i-м станке. После обработки на 5-м станке деталь покидает конвейер.

Каждый из станков может выходить из строя и восстанавливаться. Длительность наработки на отказ и длительность восстановления i-го станка являются экспоненциально распределенными случайными величинами соответственно с параметрами α_i и β_i, $i = 1, ..., 5$.

Если во время обработки детали i-й станок, $i = 1, ..., 5$, выходит из строя, то деталь становится бракованной и снимается с дальнейшей обработки. Станок при этом не обрабатывает другие детали до восстановления. Если все 4 места у i-го станка, $i = 2, ..., 5$, оказываются занятыми, то вновь обработанная деталь не выходит из $i-1$ станка (станок блокируется). Этот станок останавливает свою работу до освобождения места у i-го станка. Деталь в блокированном станке считается готовой к обработке на следующем станке. Если все места оказываются занятыми у 1-го станка, то детали не поступают в конвейер.

Построить имитационную модель процесса прохождения деталей по конвейеру. Оценить:

– м. о. длительности пребывания детали на конвейере;

– м. о. числа деталей на конвейере;

– вероятность того, что деталь окажется бракованной.

Задача 24. Гражданину необходимо оформить документ № 4. Отдел № 4, который оформляет такие документы, требует с гражданина документы с номерами 1, 2 и 3, которые готовятся соответственно отделами 1, 2 и 3. Существует также дополнительный отдел № 5, в котором возможно оформление дополнительного документа № 5. Длительности времени подготовки документов в отделах 1 – 5 фиксированы и равны соответственно τ_1 – τ_5.

Начало оформления документа № 4 начинается с посещения отдела № 1. По истечении времени τ_1 отдел № 1:

– с вероятностью 0,7 выдает документ № 1. Копии этого документа гражданин мгновенно передает в отделы 2 и 3, которые начинают свою работу;

– с вероятностью 0,3 отдел № 1 дает мотивированный отказ в выдаче документа № 1. В этом случае гражданин устраняет причины отказа в течение фиксированного времени $\tau_г$ и сразу обращается в отдел № 1.

Отдел № 2 при получении документа № 1 начинает работу и по истечении времени τ_2:

– с вероятностью 0,7 выпускает документ № 2;

– с вероятностью 0,3 может понадобиться дополнительный документ № 5 для подготовки документа № 2. В этом случае включается в работу отдел № 5. По истечении времени τ_5 отдел № 2 начнет работу заново. Число дополнительных документов № 5 для работы отдела № 2 не ограничено.

Отдел № 3 при получении документа № 1 и через время равное τ_3 выдает документ № 3. Срок действия документа № 3 ограничен и равен $\tau_{огр}$, причем, если $\tau_2 > \tau_3$, то $\tau_2 - \tau_3 < \tau_{огр} < \tau_2 - \tau_3 + 2\tau_5$. Если же $\tau_3 \ge \tau_2$, то $\tau_3 - \tau_2 < \tau_{огр} < \tau_3 - \tau_2 + 2\tau_5$. Если к моменту обращения в отдел № 4 срок действия документа № 3 истек, то гражданин мгновенно обращается в отдел № 3 за новым документом.

Отдел № 4 начнет работу, только если имеются документы № 1, № 2 и не просроченный документ № 3. По истечении времени τ_4 отдел № 4:

– с вероятностью 0,7 выдает документ № 4;

– с вероятностью 0,2 отказывает в выдаче по причине выявленных противоречий в документе № 1. В этом случае документы №№ 1-3 оказываются недействительны, гражданин устраняет причины отказа в течение фиксированного времени $\tau_г$ и сразу обращается в отдел № 1;

– с вероятностью 0,1 отказывает в выдаче по причине выявленных противоречий в документе № 2. В этом случае документ № 2 оказывается недействителен, гражданин устраняет причины отказа в течение фиксированного времени $\tau_г$ и сразу обращается в отдел № 2.

Построить имитационную модель процесса прохождения документов по отделам. На основании 1000 выборочных значений оценить:

– м. о. длительности интервала времени от первого обращения гражданина в отдел № 1 и до момента получения документа № 4;

– м. о. длительности времени обработки документов одного гражданина каждым отделом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.В., Крышев И.И., Сазыкина Т.Г. Физическое и математическое моделирование экосистем. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. – 368 с.

2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 160 с.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

4. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. – 512 с.

5. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1976. – 320 с.

6. Кузенков О.А., Рябова Е.А., Круподерова К.Р. Математические модели процессов отбора. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 133 с.

7. Лоу А.М., Кельтон В.Д. Имитационное моделирование. – СПб.: Питер; Киев: BHV, 2004. – 887 с.

8. Меншуткин В.В. Математическое моделирование популяций и сообществ водных животных. – Наука, Ленингр. отд., 1971. – 196 с.

9. Митрофанов Ю.И. Анализ сетей массового обслуживания: Учебное пособие. – Саратов: Научная книга, 2005. – 175 с.

10. Мун Ф. Хаотические колебания: вводный курс для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1990. – 312 с.

11. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. – М.: Сов. радио, 1971. – 400 с.

12. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. – Минск: Выш. шк., 1973. – 560 с.

13. Таха Х.А. Введение в исследование операций / Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

14. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука / Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 418 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Тананко Игорь Евстафьевич
Долгов Виталий Игоревич

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Учебно-методическое пособие для студентов математических и технических специальностей высших учебных заведений

Оригинал-макет авторов

Подписано в печать 13.03.2014. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Печать RISO. Объем 4,25 печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № 205.

ООО Издательский Центр «Наука»
410600, г. Саратов, ул. Пугачевская, 117, оф. 50

Отпечатано с готового оригинал-макета
Центр полиграфических и копировальных услуг
Предприниматель Серман Ю.Б. Свидетельство № 3117
410600, Саратов, ул. Московская, д.152, офис 19, тел. 26-18-19, 51-16-28