

Тема "Элементарная алгебра"

1. Задание

Напишите уравнение параболы, проходящей через три точки (х,у): (1,2), (3,10), (5,1)

$y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 10 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 & (1) \\ 9a + 3b + c = 10 & (2) \\ 25a + 5b + c = 1 & (3) \end{cases}$$
$$\begin{cases} c = 2 - a - b & (1) \\ 9a + 3b + 2 - a - b = 10 & (2) \\ 25a + 5b + c = 1 & (3) \end{cases}$$

Решаем ур-е (2)

$$\begin{aligned} 8a + 2b &= 8 \\ 4a + b &= 4 \\ b &= 4 - 4a \Rightarrow \text{Подставляем в ур (3), } b \text{ и } c \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 25a + 5(4 - 4a) + 2 - a - (4 - 4a) &= 1 \\ 25a + 20 - 20a + 2 - a - 4 + 4a &= 1 \\ a(25 - 20 - 1 + 4) &= 1 - 20 - 2 + 4 \\ 8a &= -17 \\ a &= -\frac{17}{8} \end{aligned}$$

Найдем "b"

$$b = 4 - 4 \cdot \left(-\frac{17}{8}\right) = \frac{8 + 17}{2} = \frac{25}{2}$$

Найдем "c"

$$c = 2 + \frac{17}{8} - \frac{25}{2} = \frac{16 + 17 - 100}{8} = -\frac{67}{8}$$

тогда ур-е изряданы

Отв: $y = -\frac{17}{8}x^2 + \frac{25}{2}x - \frac{67}{8}$ Три точки ∈ графику!

2. Задание

Известно, что свежий огурец на 99% состоит из воды. Месяц назад взвесили мешок со свежими огурцами. Получилось, что огурцов ровно 100 кг. Мешок убрали, а через месяц снова взвесили. Огурцы за это время усохли, и теперь вода составляет уже только 98% их веса. Сколько теперь (в кг) весят огурцы?

1) Найдем вес сухого вещества, мешок назад

$$\begin{aligned} \text{Вес огурцов (сух в-ва)} + \text{Вес воды} &= 100 \text{ кг} \\ \text{Вес сух в-ва} &= 100 \text{ кг} - 100 \text{ кг} \cdot 0,99 = 1 \text{ кг} \end{aligned}$$

x - новый вес мешка огурцов.

тогда

$$\begin{aligned} 1 \text{ кг} + 0,98 \cdot x &= x \\ 0,98x - x &= -1 \\ 0,02x &= 1 \\ x &= \frac{1}{0,02} = 50 \text{ кг} \end{aligned}$$

Отв: Теперь мешок огурцов весит 50 кг

3. Задание. Определение логарифма. Решить уравнения:

1. $2^x = 256$

2. $2^x = 300$

3.* $\log_8 2^{8x-4} = 4$

4.* $3^{\log_9(5x-5)} = 5$

5.* $x^{\log_3 x+1} = 9$

① $2^x = 256$

$$x = \log_2 256 = 8$$

$x = 8$ Ответ: $x = 8$

②

$$2^x = 300$$

$$x = \log_2 300 \approx 8,23$$

$x \approx 8,23$ Ответ: $x \approx 8,23$

③ $\log_8 2^{8x-4} = 4$

$$2^{8x-4} = 8^4$$

$$2^{8x-4} = 4096$$

$$8x-4 = 12$$

$$8x = 16$$

$x = 2$

Ответ: $x = 2$

Проверка: $\log_8 2^{8 \cdot 2 - 4} = \log_8 2^{12} = \log_8 4096 = 4$

④ $3^{\log_9(5x-5)} = 5$

$$\log_9(5x-5) = \log_3 5$$

$$\log_3(5x-5)^{\frac{1}{2}} = \log_3 5$$

$$(5x-5)^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$5x-5 = 25$$

$$5x = 30$$

$x = 6$

Ответ: $x = 6$

ОДЗ: $5x-5 > 0$
 $5x > 5$
 $x > 1$

⑤ $x^{\log_3 x+1} = 9$

Прологарифмируем обе части ур-е по основанию 3

$$\log_3 x \log_3 x+1 = \log_3 9$$

$$(\log_3 x+1) \cdot \log_3 x = 2$$

ОДЗ: $x+1 > 0$
 $x > -1$

Заменим $t = \log_3 x$

$$(t+1) \cdot t = 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -1 \\ t_1 \cdot t_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

То есть

1) $\log_3 x = 1$

$x = 3$

2) $\log_3 x = -2$

$x = \frac{1}{9}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1}{9} \end{cases}$

4. Задание Свойства логарифмов. Вычислить:

6. $\log_4 16 =$

7. $\log_5 \frac{1}{25} =$

8. $\log_{25} 5 =$

9. $\log_3 \sqrt{27} =$

10. $\log_2 12 - \log_2 3 =$

11. $\log_6 12 + \log_6 3 =$

12. $e^{\ln 5} =$

13. $\frac{\log_2 225}{\log_2 15} =$

14. $\log_4 32 + \log_{0.1} 10 =$

15.* $9^{\log_3 \sqrt{5}} =$

⑥ $\log_4 16 = 2$

⑦ $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

⑧ $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

⑨ $\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$

⑩ $\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$

⑪ $\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12 \cdot 3) = \log_6 36 = 2$

⑫ $e^{\ln 5} = 5$

⑬ $\frac{\log_2 225}{\log_2 15} = \log_{25} 15 = \frac{1}{2}$

⑭ $\log_4 32 + \log_{0.1} 10 = 5 + (-1) = 4$

⑮ $9^{\log_3 \sqrt{5}} =$
 $= \sqrt{5}^{\log_3 9} = \sqrt{5}^2 = 5$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$