Дискретная математика. Коллоквиум весна 2017. Теоремы

Орлов Никита

7 марта 2017 г.

Теорема 6

Теорема. *Всякое подмножество B счетного множества A конечно или счетно.*

Доказательство. Выпишем элементы множества A в последовательность:

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$$

Будем вычеркивать из этой последовательности элементы, не лежащие в B. В итоге останется конечная либо счетная последовательность. **[:|||:]**

Теорема. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Для бесконечного множества A будем выделять счетное подмножество. Первый элемент $b_0 \in A$ выберем произвольно. Затем рассматриваем множество $A \setminus \{b_0\}$. Оно бесконечно, а значит мы можем выбрать новый элемент b_1. Утверждается, что этот процесс мы можем проделать бесконечное количество раз: на каждом i шаге мы остаемся с множеством $A \setminus \{b_o \dots b_i\}$, которое бесконечно. **[:|||:]**

Теорема 8

Теорема. *Декартово произведение счетных множеств счетно.*

Доказательство. Б.о.о. можно считать, что необходимо доказать счетность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Разобьем наше декартово произведение в объединение множеств вида $\{a_0\} \times \mathbb{N}$. Каждое такое множество счетно. В итоге декартово произведение разложилось в счетное объединение счетных множеств, а значит и само счетно. **[:|||:]**

Теорема 9

Теорема. *Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно.*

Доказательство. Предположим, что оно счетно, значит его можно пронумеровать. Тогда построим таблицу последовательностей.

$$a_{00} \quad a_{01} \quad a_{02} \quad \dots$$
$$a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12} \dots$$
$$a_{20} a_{21} a_{22} \dots$$

Теперь рассмотрим диагональную последовательность $a_{00}a_{11}a_{22}$... и заменим в ней все биты на противоположные. Такая последовательность отличается от любой a_i в i-й позиции, значит этой последовательности нет в списке, получили противоречие. Значит это множество несчетно. Теперь докажем, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно отрезку [0;1], то есть имеет мощность континуум. Из курса анализа известно, что каждое число из [0;1] можно представить в виде бесконечной двоичной дроби. Делается это так: первый бит после запятой равен 0, если x лежит в левой половине отрезка [0,1] и равен 1, если в правой. И так далее. Делим отрезок пополам и смотрим, куда попал x. Но это не совсем биекция. Такие последовательности как 0,1001111... и 0, 101000... соотвествуют одному и тому же числу. Чтобы исправить это, надо исключить последовательности, в которых начиная с некоторошо момента все цифры равны 1 (кроме 0.111111...). Но таких последовательностей счетное множество, так что их добавление не меняет мощность множества. **[:|||:]**

Задача 4

Решение

Задача 5

Решение

Задача 6

Решение

Задача 7

Решение