# Авель. Теоремы. Сделано по Каину.

ПМИ 2016
Орлов Никита

6 января 2017 г.

Выражается отдельная благодарность Вадиму Гринбергу за предоставленный материал, а так же всем нашим однокурсникам за помощь в разработке этого сборника

## 1

**Теорема.** *Элементарные преобразования не меняют множества решений.*

Элементарные преобразования: $T1(i,j,t), T2(i,j), T3(i,t)$.

*Доказательство.* Обозначим множество решений СЛУ1 - $S'$, а множество решений СЛУ2 (полученной из СЛУ1 элементарными преобразованиями) - $S''$. Докажем, что $S' = S''$.

Для 2 и 3 случая и так понятно, что множество решений не изменится. (При умножении уравнения на скаляр множество решений уравнения не меняется.) Для первого случая верно, что новая система получена из старой прибавлением $j$-того уравнения, умноженного на скаляр $t$, к $i$-тому. Поскольку если верное равенство умножить на любой скаляр $t$, то оно останется верным, и сумма двух верных равенств – снова верное равенство, всякое решение старой системы является и решением новой.

Следовательно $S' \supseteq S''$.

Докажем в обратную сторону.

Первую систему можно получить из новой путем обратных элементарных преобразований: $T1(i,j,-t), T2(j,i), T3(i,1/t)$. В силу сказанного выше, всякое решение новой системы является и решением старой.

Следовательно $S'' \subseteq S'$.

Из $S' \subseteq S''$ и $S'' \subseteq S'$ следует, что $S' = S''$. □

---

## 2

**Теорема.** *Всякую матрицу можно привести к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк.*

*Доказательство.* В качестве доказательства теоремы сформируем алгоритм приведения матрицы к каноническому виду.

1. Если матрица нулевая - ничего делать не нужно. Иначе мы ищем в ней первый ненулевой столбец, назовем его $j$.

2. Если $a_{1j} \neq 0$, то переходим к следующему шагу, иначе меняем местами строку $j$ и первую, в которой $a_{1k} \neq 0$. *(Делаем так, чтобы самый верхний элемент был ненулевым)*

3. Для каждой следующей строки, после $j$, подбираем коэффициент так, чтобы под элементом $a_{1j}$ все элементы были равны нулю.

4. Повторяем алгоритм для всех следующих строк, на этот раз вытаскивая ведущий элемент на 2 строку, затем третью, и так далее.

5. После приведения к ступенчатому виду, берем последнюю строку, делим ее на такое число, чтобы ведущий элемент стал равен 1, и вычитаем ее из всех строк, которые выше ее, умноженную на коэффициент, равный соответствующему элементу строки над исходной. Повторяем этот пункт для каждой следующей строки.

$\square$

---

# 3

Пусть есть система линейных уравнений, записанная в расширенном матричном виде $(A|B)$. Приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{kn} & b_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{k+1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Если $b_{k+1} \neq 0$, то система несовместна и решений нет. В противном случае приведем ее к улучшенному ступенчатому виду:

(Здесь и далее в блоке покажем на примере матриц определенного размера)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

В этом случае у матрицы бесконечное число решений. Переменные $x_1, x_2, x_4$ - главные, $x_3$ выражается через них.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

В таком случае у системы есть единственное решение.

---

## 4

Пусть у нас есть 2 матрицы $A \in Mat_{m\times n}, B \in Mat_{n\times k}$. Произведением матриц $A \times B$ будет называться матрица $C \in Mat_{m\times k}$, с элементами

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

**Теорема.** *Произведение матриц дистрибутивно относительно сложения.*

*Доказательство.* Докажем для левой дистрибутивности.

Пусть $A \in Mat_{m\times n},\ B, C \in Mat_{n,k}$. Матрицы $A(B + C)$ и $AB + AC$ имеют одинаковый размер $m \times k$. Обозначим их за $D, E$ соответственно.

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = e_{ij}$$

Правая дистрибутивность доказывается аналогично. □

---

## 5

Пусть даны матрицы $A \in Mat_{m\times l}, B \in Mat_{l\times n}, C \in Mat_{n\times p}$.

**Теорема.** *Умножение матриц ассоциативно:* $(AB)C = A(BC)$.

*Доказательство.* Пусть $AB = U, BC = V,(AB)c = Y, A(BC) = X$. Тогда

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{l} u_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}\right) c_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{l}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}c_{kj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \left(\sum_{k=1}^{l} b_{rk}c_{kj}\right) =$$

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir}v_{rj} = x_{ij}.$$

□

В общем случае умножение матриц некоммутативно. Приведем пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

---

## 6

Пусть у нас есть матрица $A$ с элементами $a_{ij}$. Транспонированной будет называться матрица, у которой строки записаны как столбцы.

$$(a_{ij})^T = a_{ji}$$

**Теорема.** *Транспонирование произведения матриц равняется произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке.*

*Доказательство.* Пусть $A \in Mat_{n\times m}, B \in Mat_{m\times k}$. Необходимо доказать, что

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Для начала докажем, что размерности совпадут. Размерность произведения $AB$ - $n \times k$, если транспонировать, получится $k \times n$. Размерность $B^T - k \times m, A^T - m \times n$. Произведение будет иметь размерность $k \times n$.

Пусть $AB = C, B^T A^T = D$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^T a_{kj}^T = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki} = c_{ji} = (c_{ij})^T$$

□

---

## 7

Квадратная матрица, у которой вне главной диагонали стоят нули будет называться диагональной. Пусть есть матрицы $A \in Mat_{n\times m}, B = diag(a_1, \ldots, a_n), C = diag(a_1, \ldots, a_m)$

**Теорема.** *Произведение матрицы на диагональную слева умножит $i$-ую строку на $a_i$, справа умножит $j$-столбец на $a_j$.*

*Доказательство.* Умножение матриц можно представить в виде умножения вектор-строк на вектор столбец. Тогда легко видеть, что при умножении $i$ строки на $j$ столбец ненулевым будет только первое слагаемое в столбце, которое умножится на $a_i$. Рассуждая аналогичным образом можно понять, что утверждение верно.

Аналогичные рассуждения приводятся и для случая умножения справа. □

Диагональная матрица, где все ненулевые элементы равны единице, называется единичной, обозначается как $E_n$.

**Теорема.** *При умножении на единичную матрицу слева и справа исходная матрица не меняется*

*Доказательство.* По предыдущему пункту, каждый элемент строки или столбца увеличится в $a_i$ раз. Но так как все элементы равны единице, то и никакое число в матрице не изменится. □

---

# 8

Матричная единица $M_{ij}$ – это матрица, на $ij$ месте которой стоит 1, а все остальное заполнено нулями.

**Теорема.** *Умножение на матричную единицу слева и справа даст вектор-столбец $i$ (вектор-строку $j$), взятую из исходной матрицы.*

*Доказательство.* Докажем для умножения матричной единицы на матрицу слева. Для умножения справа рассуждения аналогичны.

Умножение матриц состоит из поочередного умножения строк на столбцы. Матричная единица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Получается при умножении очередной строки, обнулятся все соответствующие столбцы. Когда же начнется умножение $i$ строки на $j$ столбец, обнулятся все члены суммы, кроме $j$. Значит, итоговая матрица будет состоять только из $j$ столбца исходной матрицы. □

---

# 9

Пусть есть матрица $A \in Mat_{n \times m}$. Следом матрицы назовем сумму элементов матрицы на главной диагонали:

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**Теорема.** *След суммы матриц является суммой следов матриц.*

*Доказательство.* По определению, сумма матриц это матрица, получившаяся из исходных поэлементным сложением:

$$c_{ij} = (A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Тогда,

$$trC = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = trA + trB$$

□

**Теорема.** *След матрицы, умноженной на скаляр является следом матрицы, умноженным на скаляр.*

*Доказательство.*

$$tr(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha trA$$

□

**Теорема.** *След транспонированной матрицы является следом исходной матрицы.*

*Доказательство.* Так как при транспонировании главная диагональ не меняется, то

$$tr(A^T) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = trA$$

□

**Теорема.** *След произведения матриц равен следу произведения этих матриц, взятом в исходном порядке:*

$$tr(AB) = tr(BA)$$

*Доказательство.* Пусть $A \in Mat_{n\times m}, B \in Mat_{m\times n}, AB = X, BA = Y$. Тогда:

$$trX = \sum_{k=1}^{n} x_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m} a_{lk}b_{kl}\right) = \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kl}a_{lk}\right) = \sum_{l=1}^{m} y_{ll} = trY$$

□

---

# 10

Подстановкой называется математический объект, записываемый в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

являющийся биективным отображением множества $\{1 \dots n\}$ в себя.

Произведением подстановок $\sigma$ и $\tau$ является их композиция:

$$(\sigma \cdot \tau)(n) = \tau(\sigma(n))$$

**Теорема.** *Произведение подстановок ассоциативно. То есть* $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$

*Доказательство.* Пусть даны перестановки $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3 \in S_n$. Рассмотрим какой-нибудь элемент $i_1$, $1 \leqslant i_1 \leqslant n$.

Пусть при подстановке $\sigma_3$ символ $i_1$ перейдёт в какой-то другой символ $i_2$, $i_2$, в свою очередь, при подстановке $\sigma_2$ перейдёт в $i_3$, а $i_3$ при подстановке $\sigma_1$ - в $i_4$.

Получается, что по по определению умножения при подстановке $\sigma_3\sigma_2$ $i_1$ перейдёт в $i_3$, а результат этой подстановки $i_3$ при подстановке $\sigma_1$ перейдет в $i_4$. По аналогичным соображениям при подстановке $\sigma_2\sigma_1$ $i_2$ перейдёт в $i_4$, а $i_1$ при выполнении подстановки $\sigma_3$ перейдёт в $i_2$. При обеих операциях из $i_1$ в результате выполнения подстановок получилось $i_4$.

□

---

# 11

Тождественная подстановка – это биективное отображение множества $\{1 \dots n\}$ в себя, где $\forall i \in 1 \dots n: \ \sigma(i) = i$.

Обратная посдтановка это такая подстановка, которая в произведении слева и справа дает тождественную:

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = id$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

**Лемма.** *Знак подстановки равен знаку обратной к ней.*

*Доказательство.* Возьмем пару $i, j$, образующие инверсию в $\sigma$. Это значит, что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Но $i$ и $j$ представимы в виде $\sigma^{-1}(\sigma(i))$ и $\sigma^{-1}(\sigma(j))$. Но тогда они образуют инверсию и в $\sigma^{-1}$, а значит число инверсий не поменялось, а значит, что $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$. $\square$

---

# 12

Пусть есть подстановка $\sigma$, транспозиция $\tau$ и элементарная транспозиция $\varphi$.

**Теорема.** $sgn(\sigma \cdot \tau) = -sgn(\sigma)$; $sgn(\sigma \cdot \varphi) = -sgn(\sigma)$

*Доказательство.* Пусть у подстановки $\sigma$ есть $k$ транспозиций. Пусть в подстановке какие-то $i, j$ элементы меняются местами. Если они до применения $\varphi$ были в транспозиции, транспозиция с них снимется, и знак поменяется. Если же они не были в транспозиции, они в нее встанут, и знак опять поменяется.

Для умножения на транспозицию $\tau$ приводятся следующие рассуждения. Пусть какие-то 2 элемента после применения $\tau$ становятся в транспозицию. Тогда рассмотрим элементы между ними. Если $i$ образовывал с кем-нибудь из них инверсию, то она уйдет, и наоборот, если не образовывл - образует. Получается, что суммарное количество инверсий между ними не изменится, но поменяется знак из-за инверсии самих $i$ и $j$. $\square$

---

# 13

Для начала докажем несколько лемм.

**Лемма.** *Любая подстановка представима в виде произведения транспозиций.*

*Доказательство.* Докажем с помощью индукции по $n$.

**База:** $n = 2$. Тогда либо $\sigma = \tau_{12}$, либо $\sigma = \tau_{12}\tau_{21} = \mathrm{id}$.

**Шаг:** $n > 2$. Пусть $s = \sigma^{-1}(n)$, то есть $\sigma(s) = n$. Тогда рассмотрим два случая: когда $s = n$ и когда $s < n$.

Если $s = n$, то ее разложение суть разложение подстановки $\sigma' \in S_{n-1}$, так как $n$-ый элемент ничего не меняет. А для $\sigma'$, по индукционному предположению, такое разложение существует. Соответственно, такое же разложение имеет место в $\sigma$.

Если $s < n$, рассмотрим подстановку $\tau_{sn}\sigma$. Тогда:

$$(\tau_{sn}\sigma)(n) = \sigma(\tau_{sn}(n)) = \sigma(s) = n$$

Итого, эта подстановка относится к предыдущему случаю, когда последний элемент ничего не изменяет, и для него по индукционному предположению есть некое разложение: $\tau_{sn}\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_k$. Домножим слева на $\tau_{ns}$:

$$\tau_{ns} \cdot \tau_{sn}\sigma = \tau_{ns} \cdot \tau_1\tau_2 \dots \tau_k$$
$$\mathrm{id} \cdot \sigma = \tau_{ns} \cdot \tau_1\tau_2 \dots \tau_k$$
$$\sigma = \tau_{ns} \cdot \tau_1\tau_2 \dots \tau_k$$

Итого, получили искомое разложение.

□

**Лемма.** *Любая подстановка представима в виде произведения элементарных транспозиций.*

*Доказательство.* Непосредственно следует из леммы 1 и того, что любая транспозиция представима в виде произведения элементарных транспозиций. На всякий случай, рассмотрим второе чуть подробней:

$$\tau_{ij} = \tau_{i,i+1} \cdot \tau_{i+1,i+2} \dots \tau_{j-1,j} \cdot \tau_{j-1,j-2} \dots \tau_{i+1,i}$$

То есть сначала мы двигаем $i$-ый элемент до $j$-ой позиции, после чего то, что раньше было на $j$-ом месте, стоит на $j-1$-ом, и мы двигаем его обратно на $i$-ую позицию. □

**Теорема** (О знаке произведения)**.** *Знак произведения подстановок есть произведения знаков подстановок:* $\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\rho$.

*Доказательство.* По лемме выше подстановка $\sigma$ представима в виде произведение транспозиций: $\sigma = \tau_1\tau_2\dots\tau_k$. Каждая транспозиция суть инверсия, и потому меняет знак подстановки. Следовательно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau_1\tau_2\dots\tau_k) = (-1)\operatorname{sgn}(\tau_2\dots\tau_k) = (-1)^2\operatorname{sgn}(\tau_3\dots\tau_k) = \dots = (-1)^k$$

Аналогично, для произведения подстановок получим:

$$\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}(\tau_1\tau_2\dots\tau_k\rho) = (-1)\operatorname{sgn}(\tau_2\dots\tau_k\rho) = \dots = (-1)^k\operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\rho)$$

□

---

# 14

**Определение.** *Определитель квадратной матрицы порядка n по определению равен*

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

**Лемма** (Свойство T)**.** *Определитель матрицы не изменяется от транспонирования:* $\det A = \det A^T$ *для любой* $A \in \mathrm{Mat}\ M_n$

*Доказательство.* Распишем определитель $A^T$ по определению:

$$\det A^T = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\dots a_{\sigma(n)n}$$

Переставим элементы произведения так, чтобы их первые индексы шли в порядке возрастания. Это равносильно замене подстановки $\sigma$ на обратную к ней подстановку $\rho = \sigma^{-1}$. Так как количество инверсий в прямой и обратной подстановках совпадают, то их знаки совпадают и этот определитель равен

$$\sum_{\rho\in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)}a_{2\rho(2)}\dots a_{n\rho(n)}$$

А это равно $\det A$. □

**Лемма.** *Определитель матрицы, содержащей нулевую строку или столбец равен нулю.*

*Доказательство.* Пусть в матрице есть нулевая строка. Из определения определителя следует, что каждый член суммы содержит по одному элементу с каждой строки. Но тогда все эти члены равны 0 и определитель равен 0. Для столбцов аналогично. □

---

## 15

**Лемма** (Свойства определителя)**.**

1. *При перестановке двух строк(столбцов) определитель меняет знак.*
2. *Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.*

*Доказательство.*

1. Принимая во внимание свойство $T$, достаточно доказать лишь для строк.

   В самом деле, пусть в определителе переставляются лишь $i$-ая и $j$-ая строки, $i \neq j$, а все остальные строки остаются на месте.

$$(1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(2)$$

   Если $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$ есть член определителя (1), то все его множители в определителе (2) остаются, очевидно, в разных строках и в разных столбцах. Таким образом, определители (1) и (2) состоят из одних и тех же членов. Этому члену в определителе (1) соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} (11)$$

   а в определителе (2) – подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} (22)$$

   так как, например, элемент $a_{i\alpha_i}$ стоит теперь в $j$-ой строке, но остается в старом $\alpha_i$-ом столбце. Подстановка (22) получается, однако, из подстановки (11) путем одной транспозиции в нижней строчке, т.е. имеет противоположную четность. Отсюда следует, что все члены определителя (1) входят в определитель (2) с обратными знаками, т.е. определители (1) и (2) отличаются лишь знаком.

2. Принимая по внимания свойство $T$, достаточно доказать лишь для строк.

   В самом деле, пусть определитель равен $d$ и пусть соответственные элементы его $i$-ой и $j$-ой строк ($i \neq j$) равны между собой. После перестановки этих двух строк определитель станет равен (ввиду выше доказанного свойства) числу $-d$. Так как, однако, переставляются одинаковые строки, то определитель не меняется, т.е. $d = -d$, откуда $d = 0$

□

---

## 16

**Лемма** (Свойства определителя)**.**

1. *Если в $A$ все элементы некоторой строки умножить на одно и то же число $\lambda$, то определитель увеличится в $\lambda$ раз:*

$$B_{(i)} = \lambda A_{(i)}, B_{(j)} = A_{(j)}, i \neq j \implies \det B = \lambda \det A$$

*(Аналогично для столбцов из свойства $T$.)*

2. *Пусть какая-то строка $A_{(i)}$ раскладывается в сумму двух строк $A'_{(i)}$ и $A''_{(i)}$, а все остальные остаются неизменными.*
*Тогда $\det A = \det A' + \det A''$. (Аналогично для столбцов из свойства $T$.)*

3. *Если к какой-либо строке прибавить другую строку, умноженную на скаляр, то определитель не изменится. (Аналогично для столбцов из свойства $T$.)*

*Доказательство.*

1. В формуле определителя для $B$ в каждом слагаемом присутствует $\lambda a_{i\sigma(i)}$ (только один) $\Rightarrow$ каждое слагаемое для $\det(B)$ получается умножением на $\lambda$ соответствующего слагаемого для $\det(A) \Rightarrow \det(B) = \lambda \det(A)$.

2.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$
$$= \det(A') + \det(A'')$$

3. $B_{(i)} = A_{(i)}$, $B_{(k)} = A_{(k)} + \lambda A_{(j)}, i \neq k$

$$\det B = \det \begin{pmatrix} B_{(1)} \\ \vdots \\ B_{(i)} \\ \vdots \\ B_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{во второй матрице оказалось} \\ \text{две одинаковые строки} \end{array} \right\} \det A + 0 = \det A$$

□

---

## 17

**Определение.**

*Матрица $A \in M_n$ – **верхнетреугольная**, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ (т.е. ниже диагонали).*

*Матрица $A \in M_n$ – **нижнетреугольная**, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$ (т.е. выше диагонали).*

**Лемма.** *Если $A \in M_n$ – верхнетреугольная (нижнетреугольная) матрица, то $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ — произведение всех элементов главной диагонали.*

*Доказательство.* По свойству $T$ достаточно доказать для верхнетреугольной матрицы.

Пусть $A$ – верхнетреугольная матрица. Возьмём подстановку $\sigma \in S_n$ и соответсвующее ему слагаемое определеителя $P = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n}$.

Если $P \neq 0$, то, так как ниже диагонали идут нули, необходимо, чтобы $\sigma_1 \geq 1, \sigma_2 \geq 2, \ldots, \sigma_n \geq n$. Из этих неравенст и того, что подстановка обладает свойством инъективности, следует, что $\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 2,\ \ldots,\ \sigma_n = n$. Иными словами, $\sigma = \mathrm{id}$. Так как $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$, получаем, что $P = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$, и больше других ненулевых слагаемых определителя не имеется.

Итого, $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. □

**Следствие.**

1. *Определитель диагональной матрицы* $\det A = \det(\operatorname{diag}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)) = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, *т.к. диагональная матрица одновременно и верхнетреугольная, и нижнетреугольная.*
2. *Определитель единичной матрицы* $\det E = 1$, *т.к. она — диагональная с единицами по диагонали.*

---

# Полилинейная кососимметрическая функция строк

Перед тем, как доказывать следующие пункты, докажем одну теорему

**Определение.** *Назовём функцию от нескольких аргументов **полилинейной**, если она линейна по всем аргументам. Иначе, функция $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ полилинейна тогда и только тогда, если для всех $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ выполняется*

$$f(x_1,\ \ldots,\ \alpha x_i + \beta x_i',\ \ldots,\ x_n) = \alpha f(x_1,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n) + \beta f(x_1,\ \ldots,\ x_i',\ \ldots,\ x_n)$$

*Назовём функцию от нескольких аргументов **кососимметрической**, если для всех $i,\ j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $i \neq j$ выполняется*

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_n) = -f(x_1,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_i \ldots,\ x_n)$$

**Примеры:**

- Определитель матрицы является полилинейной кососимметрической функцией от строк матрицы;
- $f(x, y) = x - y$ — кососимметрическая, но не полилинейная;
- $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ — полилинейная, но не кососимметрическая.

Теорема о полилинейной кососимметрической функции строк (столбцов) квадратной матрицы. Аксиоматическое определение определителя. Пусть строки $e_i$, $i \in \{1, \ \dots, n\}$ получены из нулевых строк подстановкой 1 на $i$-ую позицию.

$$\begin{gathered} e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0) \\ e_2 = (0, 1, \dots, 0, 0) \\ \dots\dots \\ e_n = (0, 0, \dots, 0, 1) \end{gathered}$$

**Лемма.** *Пусть $f$ — полилинейная кососимметрическая функция от $n$ строк длины $n$. Тогда $\forall \ \sigma \in S_n$ верно, что*

$$f(e_{\sigma(1)}, \, e_{\sigma(2)}, \ \dots, \, e_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(e_1, \, e_2, \ \dots, \, e_n)$$

*Доказательство.* Разложим $\sigma$ в произведение транспозиций:

$$\sigma = \tau_{p_1, \, q_1} \cdot \tau_{p_2, \, q_2} \cdot \ldots \cdot \tau_{p_k, \, q_k}$$

Теперь в выражении $f(e_{\sigma(1)}, \, e_{\sigma(2)}, \ \dots, \, e_{\sigma(n)})$ выполним эти перестановки (с конца):

$$\begin{gathered} e_{p_k} \leftrightarrow e_{q_k} \\ e_{p_{k-1}} \leftrightarrow e_{q_{k-1}} \\ \dots\dots \\ e_{p_1} \leftrightarrow e_{q_1} \end{gathered}$$

В силу кососимметричности, при выполнении каждой такой перестановки функция будет менять знак. Поэтому в результате получим $(-1)^k f(e_1, \, e_2, \ \dots, \, e_n)$. Осталось только заметить, что $(-1)^k = \operatorname{sgn}(\sigma)$. □

**Теорема.** *Пусть $f$ — полилинейная кососимметрическая функция от строк матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n$. Тогда*

$$f(A) = f(E) \det A$$

*Доказательство.* Рассмотрим строки матрицы $A$: $A_{(1)}, \, A_{(2)}, \ \dots, \, A_{(n)}$. Заметим, что каждую строку можно выразить через введенные нами строки $e$:

$$A_1 = (a_{11}, \, a_{12}, \ \dots, \, a_{1n}) = a_{11} \cdot e_1 + (0, \, a_{12}, \ \dots, \, a_{1n}) = \ldots = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1 i_1} e_{i_1}$$

$$A_{(2)} = \sum_{i_2=1}^{n} a_{2 i_2} e_{i_2}$$

$$\dots\dots$$

$$A_{(n)} = \sum_{i_n=1}^{n} a_{n i_n} e_{i_n}$$

Тогда перезапишем с помощью этого $f(A)$:

$$\begin{gathered} f(A) = f(A_{(1)}, \, A_{(2)}, \ \dots, \, A_{(n)}) = \\ = f(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1 i_1} e_{i_1}, \, A_{(2)}, \ \dots, \, A_{(n)}) \end{gathered}$$

Наша функция полилинейна, так что воспользуемся линейностью по первому аргументу.

$$f(A) = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} f(e_{i_1},\, A_{(2)},\, \ldots,\, A_{(n)})$$

Аналогичные действия мы можем проделать со всеми строками, и в итоге получим:

$$f(A) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} f(e_{i_1},\, e_{i_2},\, \ldots,\, e_{i_n})$$

Заметим, что если среди чисел $i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_n$ есть одинаковые, то $f(e_{i_1},\, e_{i_2},\, \ldots,\, e_{i_n}) = 0$ из кососимметричности (так как знак должен поменяться при перестановке любых двух аргументов, в том числе если мы переставим равные). А если все числа различны, то тогда существует такая подстановка $\sigma \in S_n$, что $i_1 = \sigma(1)$, $i_2 = \sigma(2),\, \ldots,\, i_n = \sigma(n)$.

$$f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} f(e_{\sigma(1)},\, e_{\sigma(2)},\, \ldots,\, e_{\sigma(n)})$$

Применим доказанную ранее лемму и заметим, что получили определитель:

$$\begin{aligned} f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) f(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n) = \\ = f(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n) \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \\ = f(E) \det A \end{aligned}$$

□

**Следствие.** *Единственная полилинейная кососимметрическая функция от строк матрицы $A$, равная 1 на $E$, есть $\det A$.*

*Аналогично для столбцов (по свойству $T$).*

---

# 18

**Определение.** ***Матрицей с углом нулей*** *называется квадратная блочная матрица вида*

$$C = \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ P & B \end{pmatrix}$$

**Теорема** (Об определителе с углом нулей)**.** *Пусть есть матрицы $C$ и $D$ с углом нулей, где на месте $P$ могут стоять произвольные числа, а на месте 0 — нулевая матрица. При этом матрицы $A \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ — квадратные.*
*Тогда определитель $\det C = \det D = \det A \det B$.*

*Доказательство.* Докажем для матрицы $C$, так как для $D$ аналогично (по свойству $T$).

Рассмотрим $f = \det C$ — функцию от столбцов $A$, зафиксировав $P$ и $B$. Тогда $f$ — полилинейная кососимметрическая функция, следовательно,

$$\det C = \det A \cdot \begin{vmatrix} E_k & P \\ 0 & B \end{vmatrix}.$$

Теперь рассмотрим $\begin{vmatrix} E_k & P \\ 0 & B \end{vmatrix}$ как функцию $g$ от строк матрицы $B$, зафиксировав $P$. Тогда $g$ — полилинейная кососимметрическая функция, следовательно,

$$\det C = \det A \cdot \det B \cdot \begin{vmatrix} E_k & P \\ 0 & E_n \end{vmatrix}.$$

Заметим, что матрица $\begin{pmatrix} E_k & P \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ — верхнетреугольная с единицами на диагонали, значит её определитель равен 1. Тогда $\det C = \det A \det B$. □

---

# 19

**Теорема.** *Пусть $A$, $B$ — квадратные матрицы рамера $n$. Тогда* $\det AB = \det A \cdot \det B$

*Доказательство.*

$$(AB)_{(i)} = A_{(i)}B$$
$$\det(AB) = \det((AB)_{(1)},\ \ldots,\ (AB)_{(n)}) = \det(A_{(1)}B,\ \ldots,\ A_{(n)}B)$$

Рассмотрим определитель как функцию от строк матрицы $A$, зафиксировав $B$. По аксиоматическому определению эта функция является полилинейной кососимметрической функцией. Тогда по теореме о полилинейной кососимметрической функции строк:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(EB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

□

---

# 20

**Определение.** ***Дополнительным минором*** *к элементу $a_{ij}$ матрицы $A \in \mathrm{M}_n$ называют определитель матрицы, полученной из $A$ удалением $i$-ой строки и $j$-го столбца:*

$$\overline{M}_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Определение.** ***Алгебраическим дополнением*** *элемента $a_{ij}$ матрицы $A \in \mathrm{M}_n$ называют число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}$*

**Теорема Лапласа о разложении определителя по строке (столбцу).** *Пусть выбрана $i$-я строка матрицы $A \in \mathrm{M}_n$. Тогда определитель матрицы $A$ равен сумме всех элементов строки, умноженных на их алгебраические дополнения:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

*Для столбца формулировка аналогична.*

*Доказательство.* Так как определитель не изменяется от транспонирования, то достаточно рассмотреть разложение по строке. Докажем следующее:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\overline{M}_{11}$$

Для этого рассмотрим определитель по определению. Заметим, что $\sigma(1) = 1$ (иначе член обнуляется). Тогда $\sigma = \rho \in S_{n-1}$ и определитель равен

$$a_{11} \sum_{\rho \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\rho) a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)}$$

А это в свою очередь равно

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теперь вернёмся к основному рассуждению. Разложим $i$-ю строку матрицы в сумму строк вида $(0,\ \dots,\ a_{ij},\ \dots,\ 0)$. Тогда определитель разобъётся в сумму определителей, где вместо $i$-й строки будет стоять строка такого вида, а все остальные останутся на месте. Переставим элемент с позиции $(i,\ j)$ на позицию $(1,\ 1)$ с помощью перестановок соседних строк, а затем столбцов. На это понадобится $i + j - 2$ перестановки. Тогда $i$-я строка станет первой, а $j$-й столбец — тоже первым. Тогда согласно ранее доказанному утверждению, этот определитель равен $(-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_{ij} = a_{ij} A_{ij}$. Тогда

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

$\square$

---

## 21

**Лемма о фальшивом разложении определителя.** *Сумма произведений всех элементов некоторой фиксированной строки (столбца) матрицы $A$ на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой фиксированной строки (столбца) равна нулю.*

*При фиксированных $i,\ k \in \{1,\ \dots,\ n\}$, $i \neq k$*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$$

*При фиксированных $j,\ m \in \{1,\ \dots,\ n\}$, $j \neq m$*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{im} = 0$$

*Доказательство.* Свойство $T$ — достаточно доказать для строк.

Рассмотрим матрицу $B$, полученную из $A$ заменой $i$-ой строки на $k$-ую. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}$$

есть разложение определителя матрицы $B$ по $k$-ой строке. Также ввиду свойства определителя о наличии двух одинаковых строк (столбцов), $\det B = 0$

Заметим, что алгебраические дополнения элементов $i$-ой строки матрицы $B$ совпадают с алгебраическими дополнениями соответствующих элементов $i$-ой строки матрицы $A$. Но элементами $i$-ой строки матрицы $B$ являются соответствующие элементы $k$-ой строки матрицы $A$. Таким образом, сумма произведений всех элементов $i$-ой строки матрицы $B$ на их алгебраические дополнения с одной стороны равна нулю, а с другой стороны равна сумме произведений всех элементов $k$-ой строки матрицы $A$ на алгебраические дополнения соответствующих элементов $i$-ой строки матрицы $A$. □

---

## 22

**Определение.** *Матрица $B \in \mathrm{M}_n$ называется* ***обратной матрицей*** *к $A$, если $AB = BA = E$. Обозначение: $A^{-1}$.*

**Теорема.** *Если обратная матрица существет, то она* ***единственная****:*

*Доказательство.* Пусть $B$ и $B'$ - две обратные к $A$ матрицы.

$$B = EB = (B'A)B = B'(AB) = B'E = B'$$

□

**Определение.** *Матрица $A$ называется* ***невырожденной****, если для нее существует обратная матрица.*

**Теорема.** *Если матрица $A$ невырожденная, то* $\det(A) \neq 0$ *и*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

*:*

*Доказательство.* Воспользуемся тем, что произведение определителей есть опредеделитель произведения:

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(E) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0,\ \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

□

---

## 23

**Определение.** ***Матрица, присоединённая к*** *$A$ — $\hat{A} = (A_{ij})^T$ — матрица из алгебраических дополнений:*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Теорема.** *Матрица $A$ —* ***невырожденная*** *(имеет обратную) $\iff$ $\det A \neq 0$, при этом $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \hat{A}$*

*Доказательство.*

$\Longrightarrow$ — лемма об определителе обратной матрицы.

$\Longleftarrow$ Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow$ достаточно доказать, что $\hat{A} \cdot A = \det A \cdot E$.

Пусть $\hat{A} = B \Rightarrow b_{ij} = A_{ji}$ по определению $\Rightarrow$.

1. Для $X = A \cdot \hat{A}$ выполнено:

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{если } i = j \text{ (разложение по } i\text{-ой строке)} \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ (фальшивое разложение)} \end{cases}$$

2. Для $Y = \hat{A} \cdot A$ выполнено:

$$y_{ij} = \sum_{m=1}^{n} b_{im} \cdot a_{mj} = \sum_{m=1}^{n} A_{mi} \cdot a_{mj} = \begin{cases} \det A, & \text{если } i = j \text{ (разложение по i-ой строке)} \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ (фальшивое разложение)} \end{cases}$$

Таким образом, $\hat{A} \cdot A = \det A \cdot E$, откуда следует, что $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \hat{A}$.

□

**Следствие.** *Если $A$, $B$ — невырожденные, то $AB$ — тоже невырожденная, причём $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.*

*Доказательство.*

$$A, B\text{— невырожденные} \Rightarrow \det A \neq 0, \det B \neq 0 \Rightarrow \det AB = \det A \cdot \det B \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB\text{— невырожденная} \Rightarrow (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot AB = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B =$$
$$= B^{-1} \cdot B = E \Rightarrow (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (AB)^{-1}.$$

□

---

## 24

Пусть есть невырожденная $A \in M_n,\ B \in Mat_{n\times m}$.

**Теорема.** *Уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$ имеют единственное решение.*

*Доказательство.* Докажем для случая $AX = B$.

Пусть $C$ и $C'$ - решения такой системы. Тогда

$$AC = B = AC' \Rightarrow AC = AC' \Rightarrow A(C - C') = 0$$

Так как матрица $A$ невырожденна, то она ненулевая, а значит $C = C'$ □

Перенесем $A$ в другую сторону, получим:

$$X = A^{-1}B$$

$$X = BA^{-1}$$

Такие системы можно интерпретировать как $m$ систем линейных уравнений, которые мы умеем решать методом гаусса. Тогда будет иметь корректность следующий алгоритм: Пусть у нас есть матрицы $A, B$. Запишем их в виде:

$$(A|B)$$

Приведем матрицу $A$ к каноническому виду, при этом проделывая все те же преобразования к матрице $B$. В итоге на месте $B$ мы получим матрицу $B'$, которая будет являться решением.

---

## 25

Пусть $A$ — матрица коэффициентов некой СЛУ, в которой количество уравнений равно количеству неизвестных, $\vec{b}$ — вектор правых частей, $\vec{x}$ — вектор неизвестных, матрицы $A_i$ – матрицы, полученные из $A$ заменой в них $i$-ого столбца на $\vec{b}$.

**Теорема.** *Если* $\det A \neq 0$, *то СЛУ имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

*Эти формулы называются формулами Крамера.*

*Доказательство.* При любом элементарном преобразовании СЛУ в матрицах $A$ и $A_i$ одновременно происходит соотвествующее элементарное преобразование строк и, следовательно, отношения, стоящие в правых частях формул Крамера, не изменяются. С помощью элементарных преобразований строк матрицу $A$ можно привести к единичной, поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда $A = E$.

Если $A = E$, то система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \dots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

Она, очевидно, имеет единственное решение $x_i = b_i$.

С другой стороны,

$$\det A = \det E = 1, \quad \det A_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & b_i & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_n & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_i,$$

– получается разложением по строке (столбцу), так что формулы Крамера в этом случае действительно верны. □

---

## 26

**Определение.** *Полем называется множество $F$, на котором заданы две операции — «сложение» $(+)$ и «умножение» $(\cdot)$,*

$$F \times F \to F \Rightarrow \begin{matrix} + : (a, b) \mapsto a + b \\ \cdot : (a, b) \mapsto a \cdot b \end{matrix}$$

*удовлетворяющие следующим свойствам («аксиомам поля»):*

1. $\forall a, b \in F : \quad a + b = b + a$
2. $\forall a, b, c \in F : \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists 0 \in F \ \forall a \in F : \quad a + 0 = a$
4. $\forall a \in F \ \exists(-a) \in F : a + (-a) = 0$
5. $\forall a, b \in F : \quad a \cdot b = b \cdot a$
6. $\forall a, b, c \in F : \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
7. $\exists\ 1 \in F : \quad a \cdot 1 = a$
8. $\forall a \neq 0 \in F \ \exists(a^{-1}) : \quad a \cdot (a^{-1}) = 1$
9. $\forall a, b, c \in F : \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

**Пример.**

- $\mathbb{Q}$ — *рациональные числа;*
- $\mathbb{R}$ — *вещественные числа;*
- $\mathbb{C}$ — *комплексные числа;*
- $F_2 = \{0, 1\}$, *при сложении и умножении по модулю 2.*

**Определение.** *Полем* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел называется множество* $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, *на котором заданы операции сложения:*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

*и умножения:*

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

**Предложение 1.** $\mathbb{C}$ *и впрямь является полем.*

*Доказательство.* Операции сложения и умножения введены, осталось только проверить выполнение всех аксиом.

1. очевидно, так как сложение идет поэлементно;
2. также очевидно;
3. $0 = (0, 0)$;
4. $-(a, b) = (-a, -b)$;
5. $(a,\, b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \to (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.
6. ясно (тоже прямая проверка);
7. проверим:
$$((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)(a_3, b_3) =$$
$$= (a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) =$$
$$= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3));$$
8. $1 = (1, 0)$;
9. почти очевидно (т.е. прямая проверка);

□

Осталось только проверить, правда ли введенное поле $\mathbb{C}$ удовлетворяет нашим требованиям:

(T1) Заметим, что в подмножестве $\mathbb{C}$, состоящим из элементов вида $(a, 0)$ операции сложения и умножения будут работать как в поле вещественных чисел.

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

Следовательно, отображение $a \mapsto (a, 0)$ отождествляет $\mathbb{R}$ с этим подмножеством, то есть $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Что нам и требуется.

(T2) Примем $i = (0, 1)$. Тогда $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Итого, требование выполнено.

Однако запись комплексных чисел в виде упорядоченной пары $(a, b)$ не очень удобна и громоздка. Поэтому преобразуем запись следующим образом:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Тем самым мы получили реализацию поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел как множества $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\, i^2 = -1\}$, с обычным сложением и умножением.

---

## 27

**Определение.** *Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\overline{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = a + bi$.*

**Лемма.** *Для любых двух комплексных числе $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
2. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

*Доказательство.* Пусть $z = a + bi$, а $w = c + di$.

1. $\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$
2. $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$

□

**Замечание.** *Равенство $z = \overline{z}$ равносильно равенству $\operatorname{Im} z = 0$, то есть $z \in \mathbb{R}$.*

**Определение.** *Модулем комплексного числа $z = a+bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|; |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Свойства модуля:

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$;
2. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ — неравенство треугольника;
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

   *Доказательство.* $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$. □

4. $|zw| = |z| \cdot |w|$;

   *Доказательство.* Возведем в квадрат.

   $$|z|^2 \cdot |w|^2 = z\overline{z}w\overline{w} = (zw)\overline{z}\overline{w} = zw\overline{zw} = |zw|^2$$

   □

**Замечание.** *Из свойства 3 следует, что при $z \neq 0$ выполняется:*

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

---

## 28

**Определение.** *Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол $\varphi$ такой что*

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Неформально говоря, аргумент $z$ — это угол между осью $Ox$ и соответствующим вектором.

**Замечание.**

1. *Аргумент определен с точностью до $2\pi$.*

2. *Аргумент $z = 0$ не определен.*

**Определение.** *Запись $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа $z$.*

**Предложение 2.** *Пусть $z_1 = |z_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$, $z_2 = |z_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$. Тогда*

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)$$

*Доказательство.* Просто раскроем скобки и приведём подобные.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1\right)\right) = \\ = |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right) \end{aligned}$$

□

**Следствие.** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)$

**Следствие** (Формула Муавра)**.** *Пусть $z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$. Тогда:*

$$z^n = |z|^n\left(\cos\left(n\varphi\right) + i\sin\left(n\varphi\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

---

## 29

**Определение.** *Корнем $n$-й степени из числа $z$ называется всякое $w \in \mathbb{C}$: $w^n = z$. То есть*

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

Если $z = 0$, то $|z| = 0$, а значит $|w| = 0$, $w = 0$. Получается, 0 — единственное комплексное число, у которого корень определён однозначно.

Далее рассмотрим случай $z \neq 0$.

$$\begin{gathered} z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \\ w = |w|\left(\cos\psi + i\sin\psi\right) \end{gathered}$$

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi \in \operatorname{Arg}\ (z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до кратного $2\pi$ различные значения в формуле $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ получаются при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Значит $z$ имеет ровно $n$ корней $n$-й степени.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{|z|\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \;\middle|\; k = 0, \ldots, n-1\right\}$$

---

## 30

**Определение.** *Множество $V$ называется* ***векторным (линейным) пространством*** *над полем $\mathbb{R}$, если на $V$ заданы следующие операции:*

1. *Сложение векторов: $V \times V \to V : (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$;*
2. *Умножение вектора на скаляр: $\mathbb{R} \times V \to V : (\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda\vec{a}$,*

*для которых верны следующие* ***аксиомы векторного пространства:***

1. $\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in V\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *— коммутативность*
2. $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ *— ассоциативность*
3. $\exists \vec{0} \in V : \forall \vec{a} \in V\ \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ *— существование нулевого вектора.*
4. $\forall \vec{a} \in V \exists\ -\vec{a} \in V : (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ *— существование противоположного вектора*
5. $\forall \vec{a} \in V\ 1\vec{a} = \vec{a}$ *— умножение на единичный скаляр*
6. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R};\ \vec{a} \in V\ (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ *— ассоциатвность умножения на скаляр*
7. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R};\ \vec{a} \in V\ (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ *— дистрибутивность умножения относительно сложения*
8. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R};\ \vec{a}, \vec{b} \in V\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ *— дистрибутивность сложения относительно умножения*

Примеры векторных пространств над $\mathbb{R}$ с введёнными операциями сложения и умножения на скаляр:

1. $V = \{\vec{0}\}$
2. $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{R}^n$ (реализованное как пространство строк или стобцов)
4. $\mathrm{Mat}_{n\times m}$ (то же самое, что $\mathbb{R}^{nm}$)
5. Множество функций $f : M \mapsto \mathbb{R}$, где $M$ — произвольное (но фиксированное) множество. Частный случай: $M = [0, 1]$.

**Следствие.**

1. *Нулевой элемент единствен.*
2. *Противоположный элемент единствен.*
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda\vec{0} = \vec{0}$
4. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda(-\vec{a}) = -\lambda\vec{a}$
5. $0\vec{a} = \vec{0}$
6. $(-1)\vec{a} = (-\vec{a})$

*Доказательство.*

1. Пусть $\vec{0}_1$ и $\vec{0}_2$ — два нуля. Тогда $\vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2$.
2. Пусть $-\vec{a}_1$ и $-\vec{a}_2$ — два противоположных к $\vec{a}$ элемента. Тогда $-\vec{a}_1 = -\vec{a}_1 + \vec{0} = -\vec{a}_1 + \vec{a} - \vec{a}_2 = \vec{0} - \vec{a}_2 = -\vec{a}_2$.
3. $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0} \iff \lambda\vec{0} = \vec{0}$
4. $\lambda(-\vec{a}) + \lambda\vec{a} = \lambda((-\vec{a} + \vec{a})) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$
5. $0\vec{a} = (0 + 0)\vec{a} = 0\vec{a} + 0\vec{a} \iff 0\vec{a} = \vec{0}$
6. См. пункт 4 при $\lambda = 1$.

$\square$

---

# 31

Пусть $V$ — векторное пространство.

**Определение.** *Подмножество векторов $U \subseteq V$ — **подпространство**, если:*

*1.* $\vec{0} \in U$

*2.* $\vec{a} \in U$, $\vec{b} \in U \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in U$

*3.* $\vec{a} \in U$, $\lambda \in F \Rightarrow \vec{\lambda a} \in U$

**Предложение.** *Всякое подпространство $U$, принадлежащее векторному пространству $V$, само является векторным пространством относительно имеющихся в $V$ операций.*

*Доказательство.* Проверка всех аксиом векторного пространства — они выполняются и в подпространстве. $\square$

Примеры:

1. $\vec{0}$ и само пространство $V$ — подпространства в $V$.
2. Множество диагональных, множество верхнетреугольных матриц, множество нижнетреугольных матриц в $\mathrm{M}_n$ — все эти множества являются подпространствами в $\mathrm{M}_n$.

**Предложение.** *Множество решений всякой однородной СЛУ $A\vec{x} = \vec{0}$, где $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, является подпространством в $\mathbb{R}^n$.*

*Доказательство.* Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений нашей однородной СЛУ. Тогда просто проверим выполнение всех условий подпространства:

1. $\vec{0} \in S$, т.к. $A\vec{0} = \vec{0}$, то есть нуль-вектор всегда является решением.
2. $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in S \Rightarrow A(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = A\vec{x_1} + A\vec{x_2} = 0$, то есть сумма решений тоже является решением.
3. $\vec{x} \in S$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow A\vec{\lambda x} = \lambda A\vec{x} = 0$, то есть решение, умноженное на скаляр, тоже является решением.

$\square$

---

# 32

**Определение.** ***Линейная комбинация*** *конечного набора векторов векторного пространства — всякий вектор*

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n},\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$$

**Определение.** *Линейная комбинация* $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ *называется* ***тривиальной****, если* $\lambda_i = 0\ \ \forall\ i$*, и* ***нетривиальной*** *в противном случае.*

**Определение.** *Пусть* $S \subseteq V$ *— какое-то подмножество.*

*Совокупность всевозможных (конечных) линейных комбинаций векторов из* $S$ *называется* ***линейной оболочкой*** *множества* $S$ *и обозначается через* $\langle S \rangle$*. Это наименьшее подпространство пространства* $V$*, содержащее* $S$*.*

*Говорят, что пространство* $V$ ***порождается*** *множеством* $S$*, если* $\langle S \rangle = V$*.*

**Определение.** *Векторное пространство называется* ***конечномерным****, если оно порождается конечным числом векторов, и* ***бесконечномерным*** *в противном случае.*

**Предложение.** *Линейная оболочка подмножества* $S$ *векторного пространства* $V$ *является подпространством этого векторного пространства.*

*Доказательство.* Чтобы доказать, что линейная оболочка является подпространством, достаточно показать, что выполняются его свойства.

- Ноль лежит в линейной оболочке.

$$v_1,\ \ldots,\ v_n \in S,\quad 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_n = 0 \in \langle S \rangle \to 0 \in \langle S \rangle$$

- Сумма двух линейных комбинаций лежит в линейной оболочке.

$$\begin{gathered} v_1,\ \ldots,\ v_n,\ w_1,\ \ldots,\ w_m \in S,\quad x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \in \langle S \rangle,\quad y_1w_1 + \ldots + y_mw_m \in \langle S \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1v_1 + \ldots + x_nv_n + y_1w_1 + \ldots + y_mw_m \in \langle S \rangle \end{gathered}$$

- Линейная комбинация, умноженная на скаляр,
  лежит в линейной оболочке.

$$\begin{gathered} v_1,\ \ldots,\ v_n \in S,\quad x_1,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1v_1 + \ldots x_nv_n \in \langle S \rangle \\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x_1v_1 + \ldots + \lambda x_nv_n \in \langle S \rangle \end{gathered}$$

□

### Примеры

- $\langle \vec{0} \rangle = \{0\}$
- $\vec{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \Rightarrow \langle \vec{a} \rangle = \{\lambda\vec{a} \mid \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ — прямая, содержащая $\vec{a}$.
- $e_1,\ \ldots,\ e_n \in \mathbb{R}^n$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \ldots,\quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle e_1, \ \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$, так как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

---

## 33

**Лемма** (О линейной зависимости)**.** *Возьмём $a_1, a_2, \ \dots, a_r$ и $b_1, b_2, \ \dots, b_s$ — две системы векторов, причём $r < s$. Пусть вторая система линейно выражается через первую, то есть $b_i \in \langle a_1, a_2, \ \dots, a_r \rangle \forall\ i \in \{1, \ \dots, s\}$. Тогда система $b_1, b_2, \ \dots, b_s$ линейно зависисима.*

*Доказательство.* Исходя из условия, можно записать:

$$b_i = \alpha_{1i} a_1 + \ldots + \alpha_{ri} a_r, \ i \in \{1, \ \dots, s\}$$

Для произвольных коэффициентов $\lambda_1, \ \dots, \lambda_s$ запишем:

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_s b_s = \lambda_1(\alpha_{11} a_1 + \ldots + \alpha_{r1} a_r) + \ldots + \lambda_s(\alpha_{1s} a_1 + \ldots + \alpha_{rs} a_r) =$$
$$= (\alpha_{11}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{1s}\lambda_s) a_1 + \ldots + (\alpha_{r1}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{rs}\lambda_s) a_r$$

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{1s}\lambda_s = 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{2s}\lambda_s = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{r1}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{rs}\lambda_s = 0 \end{cases}$$

относительно $\lambda_1, \ \dots, \lambda_s$. Она совместна, поскольку в ней $r$ уравнений и $s$ неизвестных, а $r < s$ по условию. Также из этого же следует, что система не является определённой (уравнений меньше, чем неизвестных). Значит, она имеет хотя бы одно ненулевое решение.

Найдём это ненулевое решение и подставим вместо $\lambda_1, \ \dots, \lambda_s$ в выражение от $b_i$ выше, тем самым получая зависимость системы $b_1, \ \dots, b_s$. ☐

---

## 34

**Определение.** *Система векторов $\{e_1, e_2, \ \dots, e_n\}$ векторного пространства $V$ называется* ***базисом*** *этого векторного пространства, если всякий вектор $\vec{v}$ из этого векторного пространства <u>единственным образом</u> представим в виде линейной комбинации векторов $e_1, \ \dots, e_n$:*

$$\vec{v} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

*где $x_1, x_2, \ \dots, x_n$ —* ***координаты вектора $\vec{v}$ в базисе*** $\{e_1, \ \dots, e_n\}$

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^n$. Векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют в нём **стандартный** базис.

**Теорема.** *Система векторов $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ является базисом в $V$ тогда и только тогда, когда $\langle S \rangle = V$ и $S$ линейно независима.*

*Доказательство.* Докажем в обе стороны:

[$\Rightarrow$] Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис в $V$. Из определения базиса и линейной оболочки следует, что любой вектор из $V$ линейно выражается единственным образом через векторы из $S$, то есть $V = \langle S \rangle$. При этом из определения базиса следует линейная независимость $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

[$\Leftarrow$] Так как $V = \langle S \rangle = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$, то для любого вектора $\vec{v} \in V$ найдутся скаляры $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что $\vec{v} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Теперь покажем, что такое разложение единственно. Пусть это не так, и есть другой набор скаляров $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такой, что $\vec{v} = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$. Но тогда существует нетривиальная нулевая комбинация векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:

$$(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + \ldots + (x_n - y_n)e_n = 0$$

что противоречит условию линейной независимости. Тогда всякое разложение единственно, и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис в $V$.

□

**Следствие.** *Всякая конечномерная линейно независимая система векторов является базисом своей линейной оболочки.*

---

## 35

**Предложение.** *Из всякой конечной системы $S$ векторов пространства $V$ можно выделить конечную подсистему, являющуюся базисом линейной оболочки $\langle S \rangle$.*

*Доказательство.* Пусть $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Докажем утверждение индукцией по числу векторов $m$.

**База:** $m = 1$. Тогда в системе лишь один вектор. Если он нулевой, то в качестве базиса берём пустое множество (в математике принята договорённость, согласно которой $\langle \varnothing \rangle = \vec{0}$. Если не нулевой, то система линейно независима и является базисом.

**Шаг:** Теперь пусть $m \geqslant 2$ и утверждение верно для меньших $m$.

- Если система $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ линейно независима, то она уже является базисом $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = S$.
- Пусть система линейна зависима. Тогда существует вектор $v_i$, который линейно выражается через остальные векторы. Тогда $\langle S \rangle$ совпадает с $\langle S \setminus \{v_i\} \rangle$. Но в $\langle S \setminus \{v_i\} \rangle$ можно выбрать базис по предположению индукции.

□

**Следствие.** *Всякое конечномерное пространство обладает базисом.*

*Доказательство.* $V$ конечномерно, а значит $\exists\, v_1, \ldots, v_m \in V$ такие, что $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. Но среди $v_1, \ldots, v_m$ можно выбрать базис по предложению выше. □

**Предложение.** *Все базисы конечномерного векторного пространства $V$ содержат одно и то же число элементов.*

*Доказательство.* Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_m$ - два базиса в $V$ и $m > n$. Тогда $e'_1, \dots, e'_m \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Но тогда $e'_1, \dots, e'_m$ линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Противоречие. □

**Определение.** ***Размерностью*** *линейного векторного пространства $V$ называется число элементов в базисе $V$. Обозначение:* $\dim V$.

**Лемма.** *$V$ — векторное пространство,* $\dim V = n < \infty$. *Если $v_1, \dots, v_m \in V$ — линейно независимые векторы, то $m \leqslant n$.*

*Доказательство.* Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в $V$. Тогда $v_1, \dots, v_m \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Значит, $m \leqslant n$ – иначе векторы $v_1, \dots, v_m$ были бы линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости, что противоречит условию. □

---

# 36

**Предложение.** *Следующие условия, определяющие конечномерное векторное пространство $V$ размерности $n$, эквивалентны:*

1. *$V$ конечномерно и $dimV = n$*
2. *Наибольшее число векторов в линейно независимой подсистеме $V$ равно $n$*
3. *Существует линейно независимая подсистема $v'$, содержащая $n$ векторов и все такие подсистемы есть базисы $V$.*

*Доказательство.* Докажем циклически.

1 $\Rightarrow$ 2. Пусть $e_1, \dots, e_n$ - базис в $V$ и $S \subseteq V$ – линейно независимая подсистема. Тогда $|S| = m,\ m \in \{1, \dots, \} \cup \{\infty\}$. Значит $S$ лежит в $\langle e_1, \dots, e_n \rangle \Rightarrow m \leqslant n$. Тогда по основной лемме о линейной зависимости взяв в качестве $S$ базис, получим $|S| = n$.

2 $\Rightarrow$ 3. Существование очевидно. Пусть $S \subseteq V$ - линейная подсистема, $|S| = n,\ S = \{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда по лемме получаем, что

$$\forall v \in V : v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle \Rightarrow V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

А значит и $e_1, \dots, e_n$ - базис нашего пространства.

3 $\Rightarrow$ 1. Очевидно, по определнию. □

---

# 37

**Теорема.** *Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{K}$ – произвольное поле – с базисом*
$(e_1, e_2, \dots, e_n)$. *Тогда любую систему $f_1, f_2, \dots, f_s$, $s \leqslant n$ линейно независимых векторов можно дополнить до базиса.*

*Доказательство.* Рассмотрим систему векторов $f_1, f_2, \ldots, f_s, e_1, e_2, \ldots, e_n$. Выбросим из этой системы все вектора, линейно выражаемые через предыдущие. Так как $f_1, f_2, \ldots, f_s$ линейно независимы, то ни один из них выброшен не будет, и система будет иметь вид

$$f_1, f_2, \ldots, f_s, e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}$$

Любое нетривиальное соотношение

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \ldots + \beta_t e_{i_t} = 0$$

обязательно содержало бы какой-либо коэффициент $\beta_k \neq 0$ – иначе система $f_1, f_2, \ldots, f_s$ была бы линейно зависима. Без ограничения общности считаем индекс $k$ максимальным из таких индексов. Но тогда $e_{i_k}$ выразился бы через предыдущие векторы, что невозможно. Значит, существует только тривиальная линейная комбинация, дающая 0.

С другой стороны, все векторы из $V$ линейно выражаются через базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и тем более через систему $f_1, f_2, \ldots, f_s, e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда линейно независимая система $f_1, f_2, \ldots, f_s, e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}$ максимальна. Следовательно, она является базисом, а $e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}$ — искомое дополнение. □

---

# 38

**Теорема.** *Возьмем конечномерное векторное пространство $V$ размерности $n$. Пусть $U \subseteq V$ — подпространство, тогда*

1. *$U$ — конечномерно и $\dim U \leq \dim V$.*
2. *$\dim U = \dim V \iff U = V$.*

*Доказательство.*

1. Пусть $u_1, \ldots, u_m$ — максимальная линейно независимая система векторов в $U$ (такая система конечна, т.к. $U \subseteq V$). Тогда, поскольку всякую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса, $u_1, \ldots, u_m$ порождают $U$. Значит, они есть базис в $U$. Следовательно, по лемме о размерности системы векторов в конечномерном векторном пространстве, $m \leqslant n \Rightarrow \dim U \leqslant \dim V$.
2. Если $U = V$, их размерности равны. Докажем в обратную сторону. Пусть $\dim U = \dim V$, но $U \neq V$, тогда в $U$ есть базис из $n$ векторов и эти же векторы есть базис в $V$, т.к. всякий набор из $n$ линейно независимых векторов $n$-мерного векторного пространства есть его базис. Следовательно, $U = V$.

□

---

# 39

**Определение.** ***Фундаментальной системой решений*** *однородной системы линйеных уравнений называется базис пространства решений этой системы.*

Пусть $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ — ФСР некой СЛУ. Тогда любое решение этой СЛУ будет единственным образом представимо в виде линейной комбинации:

$$\lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + \ldots + \lambda_n\vec{u_n}$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ — произвольные коэффициенты из $\mathbb{R}$.

Замечание: Количество векторов в ФСР равно количеству **свободных неизвестных.**

Будем строить ФСР. Алгоритм построения следующий: приравнивать каждую свободную неизвестную по очереди к единице, при этом все остальные приравнивать к нулю, подставить значения свободных неизвестных в систему и выразить исходя из этого все зависимые.

**Теорема о размерности пространства решений однородной системы линейных уравнений.** *Пусть $A$ — матрица однородной системы линейных уравнений относительно $n$ неизвестных. Тогда множество решений этой системы является подпространством в $\mathbb{R}^n$ размерности $n - \operatorname{rk} A$.*

*Доказательство.* Пусть некоторые решения $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ принадлежат множеству решений $S$. Значит, $A\vec{x}_1 = \vec{0}, A\vec{x}_2 = \vec{0}$. Тогда $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, то есть $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ принадлежит множеству решений $S$.

Аналогично показывается принадлежность множеству решений умножения решения на скаляр. Таким образом, множество решений образует векторное пространство. Найдём его размерность.

Приведём матрицу к каноническому виду. Заметим, что пространство решений при элементарных преобразованиях не меняется.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \ldots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Поскольку ранг матрицы равен $r$, то в ней ровно $r$ главных неизвестных. Выразим главные неизвестные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{a_{11}}(a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = -\dfrac{1}{a_{rr}}(a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n) \end{cases}$$

Из общего решения выделим некоторые частные решения, приравнивая свободные неизвестные к единице. Получим систему из $n - r$ векторов:

$$\begin{cases} u_1 = (\ldots,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0) \\ u_2 = (\ldots,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-r} = (\ldots,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1) \end{cases}$$

Докажем, что она образует базис:

1. **Независимость**:

   Предположим, что есть такой ненулевой набор скаляров $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}$, что

   $$\lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + \ldots + \lambda_n\vec{u_{n-r}} = \vec{0}$$

Тогда $\forall\ i \in \{1,\ \ldots,\ n-r\}$ $(r+i)$-я координата левой части равна $\lambda_i$, откуда $\lambda_i = 0$. Следовательно, все $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$, значит $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-r}$ — линейно независимы (существует только тривиальная их комбинация, равная нулю).

2. **Порождение** $S$

   Покажем, что $\langle u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-r}\rangle$ порождает пространство решений $S$.

   Возьмём некое решение $\vec{u} \in S$, тогда $\vec{u} = (\ldots,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-r})$. Рассмотрим вектор $\vec{v} = u - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 - \ldots - \lambda_{n-r} u_{n-r}$. Но тогда $v = (\ldots, 0, 0,\ \ldots, 0)$, а т.к. значения всех главных неизвестных однозначно определяются значениями свободных, то $v = (0,\ \ldots, 0,\ \ldots, 0) = \vec{0}$, следовательно
$$\vec{u} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n-r} u_{n-r}$$

   А это в свою очередь означает, что
$$u \in \langle u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-r}\rangle \Rightarrow \langle u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-r}\rangle = S$$

Получается, векторы $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-r}$ действительно состаляют базис в $S$. А из этого следует, что $\dim S = n - r = n - \operatorname{rk} A$. $\square$