Дискретная математика. Коллоквиум весна 2017. Определения

Потом заполню

9 марта 2017 г.

1. События A и B называются независимыми, если вероятность композиции событий $p(AB)$ равна произведению вероятностей $p(A) \cdot p(B)$

   Свойства независимых событий:

   (a) Если $p(B) \neq 0$, то условная вероятности $p(A \mid B)$ равна вероятности события $p(A)$.

   (b) Если события A и B независимы, то события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$ и $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

2. 6 Множества называются *равномощными*, если между ними существует *биекция*, или взаимо-однозначное соответствие. Равномощность множеств обозначают значком $\sim$.

   Свойства равномощности:

   (a) *Симметричтность:* $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

   (b) *Рефлексивность:* $\forall A: \ A \sim A$

   (c) *Транзитивность:* $A \sim B, \ B \sim C \Rightarrow A \sim C$

3. 8 Множество S называют *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$. Счетные множества обладают некоторыми свойствами:

   (a) Объединение счетных множеств счетно

   (b) Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно

   (c) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество

   (d) Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно

   (e) Конечное либо счетное объединение конечных либо счетных множеств конечно либо счетно.

   (f) Декартово произведение счетных множеств $A \times B$ счетно.

   (g) Число слов в конечном или счетном алфавите счетно.

4. 9
   Континуум - мощность множества [0,1]. Примеры:

   (a) Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц

   (b) Множество вещественных чисел

   (c) Квадрат [0,1]x[0,1].

5. 10 Свойства континуума:

(a) В любом континуальном множестве есть счетное подмножество.

(b) Мощность объединения не более чем континуального семейства множеств, каждое из которых не более чем континуально, не превосходит континуума.

6. 11 Булева функция от n аргументов - отображение из B^n в B, где В - {0,1}. Количество всех n-арных булевых функций равно 2^{2^n}. Булеву функцию можно задать таблицей истинности.

7. 12 Полный базис - это такой набор, который для реализации любой сколь угодно сложной логической функции не потребует использования каких-либо других операций, не входящих в этот набор. Примеры полных базисов:

   (a) Конъюнкция, дизъюнкция, отрицание.

   (b) Конъюнкция, отрицание.

   (c) Конъюнкция, сложение по модулю два, константа один - базис Жегалкина.

   (d) Штрих Шеффера (таблица истинности - 0111).

8. *Булевой схемой* от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется последовательность булевых функций $g_1, \ldots, g_s$, в которой всякая g_i или равна одной из переменных, или получается из предыдущих применением одной из логических операций из *базиса схемы.* Также в булевой схеме задано некоторое число $m \geq 1$ и члены последовательности $g_{s-m+1}, \ldots, g_s$ называются выходами схемы. Число m называют числом выходов. Число s называют размером схемы.

9. Свойства вычислимой функции:

   (a) Если функция f вычислима, то её область определения $D(f)$ является перечислимым множеством.

   (b) Если функция f вычислима, то её область значений $E(f)$ является перечислимым множеством.

   (c) Если функция f вычислима, то для любого перечислимого множества X его образ $f(X)$ является перечислимым множеством.

   (d) Если функция f вычислима, то для любого перечислимого множества X его прообраз $f^{-1}(X)$ является перечислимым множеством.

10. Множество называется *разрешимым*, если для него существует разрешающий алгоритм, который на любом входе останавливается за конечное число шагов (*разрешающий алгоритм для множества — алгоритм, получающий на вход натуральное число и определяющий, принадлежит ли оно данному множеству*).

11. Множество называется *перечислимым*, если все его элементы могут быть получены с помощью некоторого алгоритма.

12. Свойства перечислимых множеств:

   (a) Если множества A и B перечислимы, то их объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$ также перечислимы (*отсюда следует, что объединение или пересечение конечного числа перечислимых множеств перечислимо*).

   (b) Если множество A перечислимо, то оно является областью значений некоторой вычислимой функции (*это также является достаточным условием перечислимости*).

(c) Если множество A перечислимо, то оно является областью определения некоторой вычислимой функции (*это также является достаточным условием перечислимости*).

13. Функция $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется универсальной, если для любой функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует такое p, что $U(p, x) = f(x)$ для любых x (*равенство здесь понимается в том смысле, что при любом x обе функции либо принимают одинаковое значение, либо не определены*).

14. 24 Универсальную вычислимую функцию $U(p, x)$ называют *главной*, если для любой вычислимой функции $V(q, y)$ существует *транслятор* – вычислимая тотальная функция, такая что
$$\forall q, y: \ V(q, y) = U(s(q), y)$$
Такие функции также называются *главными нумерациями.*

15. 25 Пусть $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ - множество вычислимых функций. Пусть $A \subseteq F$ - подмножество функций. Говорят, что функция удовлетворяет некому *свойству*, если она лежит в A. Пусть $U(p, x)$ – универсальная функция. Пусть $P_a = \{p \mid U(p, x) \in A\}$. Утверждается, что если A – нетривиально (т.е $A \neq \oslash, \overline{A} \neq \oslash$), то множество P_a неразрешимо.

16. 26 Пусть $U(p, x)$ – главная нумерация. Тогда для любой тотальной вычислимой функции $p(t)$ $\exists t: \ U(p(t), x) = U(t, x)$. Это утверждение называется теоремой о неподвижной точке.