Дискретная математика. Коллоквиум весна 2017. Определения

Потом заполню

12 марта 2017 г.

1. 1

   Основные понятия элементарной теории вероятностей. Исходы, события, вероятность события.

   Определение 1.

   Пространством элементарных исходов $\mathbf{\Omega}$ («омега») называется множество, содержащее все возможные результаты данного случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один. Элементы этого множества называют элементарными исходами и обозначают буквой ω («омега») с индексами или без.

   Определение 2. Событиями мы будем называть подмножества множества $\mathbf{\Omega}$. Говорят, что в результате эксперимента произошло событие $A \subseteq \mathbf{\Omega}$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество A.

   Определение 3.

   Поставим каждому элементарному исходу $\omega_i \in \mathbf{\Omega}$ в соответствие число $p(\omega_i) \in [0{,}1]$ так, что

   $\sum_{\omega_i \in \mathbf{\Omega}} p(\omega_i) = 1$.

   Назовем число $p(\omega_i)$ вероятностью элементарного исхода ω_i. Вероятностью события $A \subseteq \mathbf{\Omega}$ называется число

   $\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$, равное сумме вероятностей элементарных исходов, входящих в множество A.

2. 2

   Случайные графы. Конструкция и примеры использования.

   Случайный граф на n вершинах — элемент вероятностного пространства Ω, состоящего из всевозможных графов на n вершинах, каждому из которых приписана некоторая вероятность. В терминалогии данного курса, граф не содержит петель и кратных ребер, поэтому всего графов на n вершинах $2^{\binom{n}{2}} \Rightarrow |\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$. Понятно, что случайным будет множество ребер графа.

   Пример конструкции — каждому графу Ω присвоена одинаковая вероятность, т.е. все графы равно вероятны (т.е. для любого графа $G = (V, E) \in \Omega$, для каждой пары вершин $u, v \in V$, $Pr[(u, v) \in E] = \frac{1}{2}$).

   Случайные графы используются для изучения каких-то свойств графов. Например, нестрогая постановка вопроса при работе со случайными графами: велика ли вероятность того, что граф обладает данным свойством? Более конкретный пример использования: доказательство того, что при достаточно большом числе вершин, случайный граф (в равновозможной модели) будет почти всегда связен. Формально: Ω_n — вероятностное пространство состоящее из графов на n вершинах, все графы равновозможны, событие A_n — случайный граф на n вершинах связен; доказать $\lim_{n\to\infty} Pr[A_n] = 1$.

3. 3

   Условная вероятность — вероятность наступления одного события при условии, что другое событие уже произошло.

   P (A|B) = P (AB) / P (B), где:

   P (A|B) – условная вероятность итога A;

   P (AB) – вероятность совместного появления событий A и B;

   P (B) – вероятность события B.

4. События A и B называются независимыми, если вероятность композиции событий $p(AB)$ равна произведению вероятностей $p(A) \cdot p(B)$

   Свойства независимых событий:

   (a) Если $p(B) \neq 0$, то условная вероятности $p(A \mid B)$ равна вероятности события $p(A)$.

   (b) Если события A и B независимы, то события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$ и $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

5. 5

   Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

   Математическое ожидание дискретной случайной величины

   Говоря простым языком, это среднееожидаемое значение при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2 ... x_n$ с вероятностями $p_1, p_2 .. p_n$ соответственно. Тогда математическое ожидание данной случайной величины равно сумме произведений всех её значений на соответствующие вероятности: $M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$

6. 6 Множества называются *равномощными*, если между ними существует *биекция*, или взаимо-однозначное соответствие. Равномощность множеств обозначают значком $\sim$.

   Свойства равномощности:

   (a) *Симметричтность:* $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

   (b) *Рефлексивность:* $\forall A: \ A \sim A$

   (c) *Транзитивность:* $A \sim B, \ B \sim C \Rightarrow A \sim C$

7. 7

   В теории множеств, счётное множество есть бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами

   Примеры:

   1.Натуральные числа

   2.Целые числа

   3.Рациональные числа

   Несчетные множества:

1.Вещественные числа

2.Комплексные числа

8. 8 Множество S называют *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$. Счетные множества обладают некоторыми свойствами:

   (a) Объединение счетных множеств счетно
   (b) Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно
   (c) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество
   (d) Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно
   (e) Конечное либо счетное объединение конечных либо счетных множеств конечно либо счетно.
   (f) Декартово произведение счетных множеств $A \times B$ счетно.
   (g) Число слов в конечном или счетном алфавите счетно.

9. 9
   Континуум - мощность множества [0,1]. Примеры:

   (a) Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц
   (b) Множество вещественных чисел
   (c) Квадрат [0,1]x[0,1].

10. 10 Свойства континуума:

    (a) В любом континуальном множестве есть счетное подмножество.
    (b) Мощность объединения не более чем континуального семейства множеств, каждое из которых не более чем континуально, не превосходит континуума.

11. 11 Булева функция от n аргументов - отображение из B^n в B, где В - {0,1}. Количество всех n-арных булевых функций равно 2^{2^n}. Булеву функцию можно задать таблицей истинности.

12. 12 Полный базис - это такой набор, который для реализации любой сколь угодно сложной логической функции не потребует использования каких-либо других операций, не входящих в этот набор. Примеры полных базисов:

    (a) Конъюнкция, дизъюнкция, отрицание.
    (b) Конъюнкция, отрицание.
    (c) Конъюнкция, сложение по модулю два, константа один - базис Жегалкина.
    (d) Штрих Шеффера (таблица истинности - 0111).

13.

14. ДНФ, СДНФ и СКНФ.

    Необходимое определение. Простой конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

    Простая конъюнкция

    - **полная**, если в неё каждая переменная (или её отрицание) входит ровно 1 раз;

- **монотонная**, если она не содержит отрицаний переменных.

Дизъюнктивная нормальная форма, она же ДНФ – нормальная форма, в которой булева функция имеет вид дизъюнкции нескольких *простых* конъюнктов.

Пример ДНФ: $f(x,y,z) = (x \land y) \lor (y \land \neg z)$.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма, СДНФ – ДНФ, удовлетворяющая условиям:

- в ней нет одинаковых простых конъюнкций,
- каждая простая конъюнкция полная.

Пример СДНФ: $f(x,y,z) = (x \land \neg y \land z) \lor (x \land y \land \neg z)$.

Конъюктивная нормальная форма и Совершенная конъюктивная нормальная форма определяются аналогично:

- Конъюктивная нормальная форма – конъюнкция простых дизъюнктов
- СКНФ – КНФ, в которой каждый дизъюнкт — полный.

15. *Булевой схемой* от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется последовательность булевых функций $g_1, \ldots, g_s$, в которой всякая g_i или равна одной из переменных, или получается из предыдущих применением одной из логических операций из *базиса схемы.* Также в булевой схеме задано некоторое число $m \geq 1$ и члены последовательности $g_{s-m+1}, \ldots, g_s$ называются выходами схемы. Число m называют числом выходов. Число s называют размером схемы.

16. Свойства вычислимой функции:

    (a) Если функция f вычислима, то её область определения $D(f)$ является перечислимым множеством.

    (b) Если функция f вычислима, то её область значений $E(f)$ является перечислимым множеством.

    (c) Если функция f вычислима, то для любого перечислимого множества X его образ $f(X)$ является перечислимым множеством.

    (d) Если функция f вычислима, то для любого перечислимого множества X его прообраз $f^{-1}(X)$ является перечислимым множеством.

17. Множество называется *разрешимым*, если для него существует разрешающий алгоритм, который на любом входе останавливается за конечное число шагов (*разрешающий алгоритм для множества — алгоритм, получающий на вход натуральное число и определяющий, принадлежит ли оно данному множеству*).

18. Множество называется *перечислимым*, если все его элементы могут быть получены с помощью некоторого алгоритма.

19. Свойства перечислимых множеств:

    (a) Если множества A и B перечислимы, то их объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$ также перечислимы (*отсюда следует, что объединение или пересечение конечного числа перечислимых множеств перечислимо*).

    (b) Если множество A перечислимо, то оно является областью значений некоторой вычислимой функции (*это также является достаточным условием перечислимости*).

(c) Если множество A перечислимо, то оно является областью определения некоторой вычислимой функции (*это также является достаточным условием перечислимости*).

20. Функция $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется универсальной, если для любой функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует такое p, что $U(p, x) = f(x)$ для любых x (*равенство здесь понимается в том смысле, что при любом x обе функции либо принимают одинаковое значение, либо не определены*).

21. 23. Определение отладочной функции

    Пусть $U(p, x)$ – универсальная вычислимая функция. Для данной у.в.ф. существует функция $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, называемая отладочной, для которой выполняются следущие свойства:

    - $F(p, x, t)$ не убывает по t (Т.е. $\forall x, p \in N : t_0 < t_1 \Leftrightarrow F(p, x, t_0) \leq F(p, x, t_1)$)
    - $U(p, x)$ не определена $\Leftrightarrow \forall t \in N : F(p, x) = 0$

    Неформально говоря, значение функции $F(p, x, t)$ равно 0 тогда и только тогда, когда программа p на входе x не закончила работу за количество шагов t. В противном случае значение функции $F(p, x, t)$ равно 1.

22. 24 Универсальную вычислимую функцию $U(p, x)$ называют *главной*, если для любой вычислимой функции $V(q, y)$ существует *транслятор* – вычислимая тотальная функция, такая что

    $$\forall q, y : \; V(q, y) = U(s(q), y)$$

    Такие функции также называются *главными нумерациями*.

23. 25 Пусть $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ - множество вычислимых функций. Пусть $A \subseteq F$ - подмножество функций. Говорят, что функция удовлетворяет некому *свойству*, если она лежит в A. Пусть $U(p, x)$ – универсальная функция. Пусть $P_a = \{p \mid U(p, x) \in A\}$. Утверждается, что если A – нетривиально (т.е $A \neq \oslash, \overline{A} \neq \oslash$), то множество P_a неразрешимо.

24. 26 Пусть $U(p, x)$ – главная нумерация. Тогда для любой тотальной вычислимой функции $p(t)$ $\exists t : \; U(p(t), x) = U(t, x)$. Это утверждение называется теоремой о неподвижной точке.