Домашнее задание 21

Ткачев Андрей, группа 166

5 марта 2017 г.

Задача 1 Пусть $A = \{U(p,p) : p \in \mathbb{N}\}$. Покажем, что $\forall a \in \mathbb{N} : a \in A$. Рассмотрим константную функцию $g(x) = a$. Данная функция очевидно вычислима, а т.к. U - у.в.ф., то $\exists p \in \mathbb{N} : g(x) = U(p,x)$. Но тогда, $U(p,p) = a$. Таким образом, для любого натурального числа a найдется $p \in \mathbb{N}$, такое, что $U(p,p) = a$. Значит $A = \mathbb{N}$.

Задача 2 **(а)** Пусть указанное множество S – разрешимо; Пусть функция $f(x)$ такова

$$f(x) = \begin{cases} U(k,k^2)+1 & \text{если } x = k^2, k \in S \\ 0 & \text{если } x \neq k^2, \forall k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{если } x = k^2, k \notin S, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Тогда $f(x)$ — вычислима, т.к. вычислима проверка $x = k^2$ и проверка $k \in S$ — вычислима в силу предположения разрешимости множества S: Тогда $\exists p : f(x) = U(p,x) \forall x \in \mathbb{N}$.

Пусть $p \in S$. Тогда, $U(p,p^2) = f(p^2) = U(p,p^2)+1$. Но $U(p,p^2)$ — определено, при $p \in S \Rightarrow p \notin S$.

Пусть $p \notin S$. Тогда, $U(p,p^2) = undef = f(p^2) = 1$ — противоречие.

Значит, S — неразрешимо.

Ответ: да, верно.

(б) Пусть U — какая-то у.в.ф.; Пусть послдовательность (δ_i) такова, что δ_i — $(i+1)^{\text{ое}}$ по счету число, не являющееся полным квадратом(т.е. $\delta_0 = 2$, $\delta_1 = 3$...). Понятно, что множество $\{\delta_i\}$ — разрешимо (для любого числа можно проверить, является ли оно полным квадратом). Рассмотрим функцию

$$V(p,x) = \begin{cases} 0 & p \notin (\delta_i) \\ U(i,x) & p = \delta_i \end{cases}$$

$V(p,x)$ — у.в.ф., т.к. вычислима(проверки вычислимы и U — у.в.ф.) и если $f(x)$ — некоторая вычислимая функция, то $f(x) = U(n,x)$, тогда $V(\delta_n,x) = U(n,x) = f(x)$. Но поймем, что $\forall p \in \mathbb{N}\ V(p^2,p) = 0$, т.е. определено, значит для данной у.в.ф. множество $\{p | V(p^2,p) \text{ - определено}\}$ совпадает с $\mathbb{N}$, а значит разрешимо.

Ответ: нет, не верно.

Задача 3 Пусть U — некотрая у.в.ф., множество A — бесконечное и разрешимое (и, как следствие перечислимое). Пусть перечислитель A перечисляет множество в порядке $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Построим функцию V:

$$V(p,x) = \begin{cases} notdef & p \notin A \\ U(i,x) & \exists i : p = a_i \end{cases}$$

Т.к. A — разрешимо, то V — вычислима. Покажем, что V — у.в.ф.: если $f(x)$ — вычислимая функция, то $\exists p \forall x : f(x) = U(p,x) = V(a_p,x)$ (a_p существует в силу бесконечности A), т.е. существует k, что $\forall x : f(x) = V(k,x)$. Рассмотрим функцию $g(x) = V(x,x^2)$. Данная функция вычислима, т.к. V — у.в.ф., а значит ее область определения — перечислимое множество (одно из определений перечислимого множества). Но как мы помним по задаче $2(a)$ область определения такой функции — неразрешима. Осталось заметить, что область определения есть подмножество $dom(V) \subset A$ (по построению V — определена только на каком-то подмножестве A, причем $dom(V) \neq A$ т.к. $dom(U) \neq \mathbb{N}$). Значит мы построили неразрешимое перечислимое подмножество в A.

Задача 4 Обозначим за S бесконечное подмножество $\mathbb{N}$.

Докажем прямое следствие: S – бесконечно разрешимо $\Rightarrow \exists f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — всюду опрделенная возрастающая вычислимая функция, $E(f) = S$. Построим такую функцию, но для начала оговорим, что если множество S разрешимо, то и перечислимо в порядке возрастания и без повторений (перечислние путем простой иттерацией по натуральным и вычлимой проверкой на вхождение в S) $s_0 < s_1 < s_2 < \ldots$: $f(x) = s_x$. Данная функция всюдуопределена, т.к. S —

бесконечно, и очевидно возрастает, по природе последовательности (s_i) и область значения совпадает с S (т.к. любое $s \in S$ входит в (s_i)).

Докажем обратное следствие: $f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — всюду опрделенная возрастающая вычислимая функция с областью значений $S \Rightarrow$ S – бесконечное разрешимое множество.

Бесконечность множества S следует из тотальности и возрастания $f(x)$. Покажем, что S — разрежимо. Пусть нам необходимо узнать, принадлежит ли $a \in \mathbb{N}$ множеству S. За конечное число шагов найдем минимальное x_m, такое, что $f(x_m) > b$ (функция возрастает, значит существует аргумент начиная с которого функция привысит любую наперед заданную константу). Тогда $a \in S \Leftrightarrow f(x_m - 1)$ и $x_m - 1 \geq 0$ (действительно, если $f(x_m - 1) = a$, то $f(x_m) > a$ — минимальное число строго большее a и $f(0) \leq a$). Значит $\forall x \in N$ за конечное число шагов можно определить принадлежность x мн-ву значений S.

Значит $f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — всюду опрделенная возрастающая вычислимая функция с областью значений $S \Leftrightarrow$ S – бесконечное разрешимое множество.

Задача 5 Пусть A – бесконечное перечислимое множество. Тогда существует перечислитель, который перечисляет элементы A без повторения (существует какой-то перечислитель, заставим его запоминать уже выведенные числа, и не будем перечислять уже выведенное). Пусть перечислитель перечисляет эл-ты в последовательности $a_0, a_1, a_2 \ldots$. Зададим последовательность (s_i) следующим образом:

$$s_i = \begin{cases} a_0 & i = 0 \\ a_j & s_{i-1} = a_k, \text{ тогда } a_j \text{ — первое число в } (a_i), \text{ что } j > k \text{ и } a_j > a_k \end{cases}$$

Поймем, что последовательность (s_i) бесконечна и возрастает, т.к. для любого $a_i \in A$ существует $j > i : a_j > a_i$ (иначе существует бесконечно много натуральных числел меньших a_i, что не так). Но тогда рассмотрим функцию $f(x) = s_x$. Она возрастает и ее область значений — множество $\{s_i\}$, а значит, как следует из задачи 5, множество $\{s_i\}$ – разрешимо. Т.е. мы получили бесконечное разрешимое подмножество в A.

Задача 6 Для каждой у.в.ф. $U(p,x)$ существует вычислимая отладочная функция $F(p,n,t)$, такая, что F – тотальна и не убывает по t и $F(p,x,t) = 0 \Leftrightarrow$ алгоритм, вычисляющий $U(p,x)$ не остановится за t шагов. Мы знаем, что множество $\mathbb{N}^3$ — перечислимо. Тогда будем перечислять всевозможные тройки (p,x,t) и выводить p, тогда когда на входе (p,x,t) вычислимая всюдуопределенная F принимает значение 1. Тогда мы перечислим ровно те p, при которых $U(p,x)$ определена хотябы на одном x (т.к. если p перечислено, то перечислена тройка $(p,x,t) : F(p,x,t) = 1$, т.е. в точке x U_p определено; Обратно: если U_p определено на входе x, то алгоритм вычисляющий $U(p,x)$ остановится за конечное число шагов k, а значит $F(p,x,t) = 1$, но тройка (p,x,t) будет перечислена перечислителем $\mathbb{N}^3$, заначит число p) будет выведено).