Домашнее задание 15

Ткачев Андрей, группа 166

19 января 2017 г.

Задача 1. $A \setminus B$ - бесконечно $\Rightarrow \exists C : \ C \subseteq A \setminus B \subseteq A$ - счетно. Тогда $C \cap B = \emptyset$. Пусть $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$, $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$. Построим биекцию $f(x) : A \setminus B \to A$.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin C \\ b_k & x = c_{2k} \\ c_k & x = c_{2k+1} \end{cases}$$

Поймем, что $f(x)$ действительно биекция.

Очевидно, что $f(x)$ - сюръекция (любой элемент $a \in A$ либо пренадлежит B, либо C, либо не принадлежит им обоим, значит по $a \in A$ можно востановить $a' \in A \setminus B$)

Если $f(x') = f(x'')$, то либо $x', x'' \notin C$, либо $x' = c_{2k},\ x'' = c_{2m}$, либо $x' = c_{2k+1},\ x'' = c_{2m+1}$, так как множества B, C и $A \setminus (B \cup C)$ попарно не пересекаются, а $f(x)$ отображает x в одно из них. Если $x', x'' \notin C$, то $f(x') = f(x'') = x' = x''$. В противном случае $f(x') = c_{2k} = c_{2m} = f(x'')$, такое возможно только когда $k = m$. Аналогично $f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$. Т.е. отображение не склеивающее.

Таким образом между A и $A \setminus B$ сущ. биекция, значит они равномощны.

Ответ: Верно.

Задача 2. Расмотрим такой пример: $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Понятно, что $A \sim \mathbb{N} \sim B$ (между B и $\mathbb{N}$ можно установить естественную биекцию $n \to n-1$, поэтому B - счетно; A - бесконечно, т.к. $\mathbb{N}$ - бесконечно).

Но тогда $A \triangle B = \mathbb{N} \triangle \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{0\} \nsim A$.

Ответ: Неверно.

Задача 3. Заметим, что $A \setminus B$ - бесконечно $\Rightarrow \exists C : \ C \subseteq A \setminus B \subseteq A$ и C - счетно. Тогда $C \cap B = \emptyset$. Пусть $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$, $B = \{b_0, b_1, \ldots\ b_{n-1}\}$ ($|B| = n$). Построим биекцию $f(x) : A \setminus B \to A$.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin C \\ b_k & x = c_k,\ k < n \\ c_k & x = c_{k-n}, k \geq n \end{cases}$$

Нетрудно убедится, что $f(x)$ всюду определенная функция, инъекция и сюръекция (всюду определенность очевидна; инъективность достигается за счет того, что если $f(x) = f(x')$, то либо $x, x' \in C \Rightarrow x = x'$, либо $x = c_a, x = c_b$ причем a и b либо больше n либо нет, но в силу построения $a = b \Rightarrow x = x'$; сюръективность следует из того, что любой элемент в A либо $\in C$, либо $\in B$, либо $\in A \setminus (C \cup B)$ и для каждой из опций возможно востановить соответсвующий член из $A \setminus B$), а значит и биекция. Тогда $A \setminus B \sim A$.

Ответ: Верно.

Задача 4. Пусть множество интервалов S. Каждый интервал определяется парой различных вещественных чисел. Между любыми двумя вещественными числами можно найти рациональное (как мы помним из курса математического анализа). Т.е. любому интервалу можно однозначно поставить в соответствие какое-либо рациональное число, ему принадлежащее (например среденее арифмитическое рационального приближения левой границы с избытком и правой с недостатком), причем для двух непресекающихся интервалов эти числа обязательно будут разными.

Тогда существует инъекция из S в $\mathbb{Q}$. Т.е. существует биекция между S и проекций S в $\mathbb{Q}$, т.е. S равномощно какому-то подмножеству $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ - счетно, значит S - не более чем счетно, значит конечно или счетно.

Задача 5. Всякое бесконечное множество A содержит счетное множество B. Докажем теперь, что всякое счетное множество B содержит в себе бесконечное число счетных множеств.

Раз B счетно, то бесконечно. Пусть $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$. Пусть множество $\mathbb{P} = \{p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5\ldots\}$ - множество простых чисел, которое, как мы знаем, счетно. Рассмотрим множество $C = \{\{x_i = b_{p_0^i}\}, \{x_i = b_{p_1^i}\}, \ldots, \{x_i = b_{p_2^i}\}\ldots\}$, где $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Поймем, что если $c_1, c_2 \in C$, то либо $c_1 = c_2$, либо $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ (т.к. каждый элемент из C - множество элементов из B с индексами предствимыми в виде p_k^n, т.е. наличие общих элементов в c_1 и c_2 влечет равенство оснований по которому выбирали (ведь основания простые числа и $p_k^n = p_t^l \Rightarrow p_k = p_t$ и $n = l$ по ОТА)). Но C - счетно, т.к. $C \sim \mathbb{P} \sim \mathbb{N}$, значит бесконечно. При этом $c \in C$ - бесконечное подмножество B ($c = \{b_{p_k^1}, b_{p_k^2}, b_{p_k^3}\ldots\}$, т.е. $c \sim \mathbb{N}$ так как существует естественная биекция: степень $\to$ натуральное число), которое счетно, значит c - счетно.

Задача 6. Поймем, что чтобы описать периодическую функцию с перидом T достаточно знать, какие значения она принимает в целых точках на отрезке $[0, T-1]$.

Пусть S_T - множество всех периодических функций $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ с периодом T ($T \in N \setminus \{0\}$). Тогда поймем, что существует биекция $S_T \to \mathbb{Z}^T$ (фунции с периодом T взаимно однозначно соответсвует вектор из $\mathbb{Z}^T$, координаты вектора - упорядоченные значения принимаемыми функцией из

S_T на $[0, T-1]$). Но тогда $S_T \sim \mathbb{Z}^T \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, а значит S_T - счетно.

Поймем, что множество S всех периодических функций $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ можно записать как $S = \cup_{T=1}^{\infty} S_T$. Тогда S - счетное объединение счетных множеств, а значит счетно.

Задача 7. Пусть $\mathbb{N}^*$ - множество всех конечных последовательностей натуральных чисел, а $\mathbb{M}^*$ - множество всех конечных последовательностей натуральных не содержащих нулей.

Построим биекцию $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{M}^*$. Пустой последовательности из $\mathbb{N}^*$ сопоставим ее же в $\mathbb{M}^*$. Каждой не пустой последовательности $S = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^*$ взаимно однозначно сопоставим последовательность

$$S' = (s_0 + 1, s_1 + 1, \dots, s_n + 1) \in \mathbb{M}^*.$$

Поймем, что указанным образом мы дествительно установим взаимно однозначное соответсвие между последовательностаями в $\mathbb{N}^*$ и в $\mathbb{M}^*$ (действительно, такое соответствие всюду определено и функционально (по любой последовательности S можно однозначно построить S'), инъективно (если $a \to S'$ и $b \to S'$, то $a_i = S_i - 1 = b_i$, где i - индекс элемента последовательности)), сюръективно(по любой последовательности из $\mathbb{M}^*$ можно сказать из какой последовательности она была получена, просто вычтя единицу их каждого члена)).

Таким образом

$$f(x) = \begin{cases} x & x \text{ - пустая последовательность} \\ (x_0 + 1, \dots, x_n + 1) & x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

Пусть теперь $\mathbb{T}$ - множество всех возрастающих последовательностей натуральных чсел, не содрежащих 0. Построим биекцию $g : \mathbb{M}^* \to \mathbb{T}$. Как и прежде пустой последовательности сопоставим пустую последовательность. Если же $S = \{s_0, \dots, s_n\} \in \mathbb{M}^*$ непустая последовательность, то сопоставим ей следущую последовательность

$$S' = (s_0, s_0 + s_1, s_0 + s_1 + s_2, \dots, \sum_{i=0}^{n} s_i)$$

Т.е. каждый член S задает в новой последовательности «отступ» от предыдущего (например последовательности $(1, 3, 2, 1)$ будет сопоставлена последовательность $(1, 4, 6, 7)$).

Очевидно, что $S' \in \mathbb{T}$, ведь эта последоваетльность возрастает по построению, т.к. каждый член отличен от предыдущего на положительную ненулевую величину. То есть g имеет вид

$$g(x) = \begin{cases} x & x \text{ - пустая последовательность} \\ (x_0, x_0 + x_1, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i) & x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Поймем, что g всюдуопределено и функционально (указанными операциями мы для любой последовательности из $\mathbb{M}^*$ однозначно определяем последовательность из $\mathbb{T}$).

Почему g - инъективно? Пусть $g\left((a_0, \dots, a_n)\right) = g\left((b_0, \dots, b_m)\right) = (c_0, \dots, c_k)$. Очевидно, что $k = n = m$, т.к. последовательности длины $n+1$ сопостаявляется последовательность длины $n+1$. Также $c_0 = a_0 = b_0$. Но тогда $c_1 = a_0 + a_1 = b_0 + b_1 \Rightarrow b_1 = b_2$. Применяя метод индукции получим, что $\forall i <= n : a_i = b_i \Rightarrow (a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_m)$.

Перейдем к сюръекции. Пусть $S = (s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{T}$. Поймем, что $S' = (s_0, s_1 - s_0, s_2 - s_1, \dots, s_n - s_{n-1}) \in \mathbb{M}^*$ (последовательность S строго возрастает, значит S' состоит из положительных чисел ≥ 1). Но $g(S') = S$. Значит g - сюръекция.

Таким образом g - биекция.

Заключительный штрих. Построим биекцию $h : \mathbb{T} \to \mathbb{Y}$, где $\mathbb{Y}$ - множество всех строговозрастающих конечных последовательностей натуральных чисел. Постоение тривиально и практически повторяет построение f:

$$h(x) = \begin{cases} x & x \text{ - пустая последовательность} \\ (x_0 - 1, x_1 - 1, \dots, x_n - 1) & x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Всюдуопредленность, функциональность, инъективность и сюръективность h очевидны.

При этом рузультат применения h - строговозрастающая последовательность, которая возможно содержит нулевые элементы (вернее один нулевой элемент - первый).

Тогда $h \circ g \circ f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Y}$ - требуемая биекция (композиция биекций - биекция). Более формально:

$$h \circ g \circ f(x) = \begin{cases} x & x \text{ - п. п.} \\ ((x_0 + 1) - 1, ((x_0 + 1) + (x_1 + 1)) - 1, \dots, & \\ \sum_{i=0}^{n} (x_i + 1) - 1) & x = (x_0, \dots, x_n) \end{cases}$$

Или в упрощенном виде:

$$h \circ g \circ f(x) = \begin{cases} x & x \text{ - п. п.} \\ (x_0 - 1, \dots, \sum_{i=0}^{k} (x_i) + k - 1, \dots, & \\ \sum_{i=0}^{n} x_i + n - 1) & x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Примечание. Во всех определениях функция запись $f(x), g(x), etc$ подразумевает, что x находится в области определения.