Домашнее задание 5

Ткачев Андрей, группа 166

19 октября 2016 г.

Задача 1

Любое дерево - связанный граф без циклов, а значит не содержит циклов нечетной длины $\Rightarrow$ любое дерево - двудольный граф.

В двудольном графе можно выделить как минимум два независимых множества - собственно доли графа, суммарное число вершин в которых равно числу вершин в графе. Но тогда в дереве на $2n$ вершин можно выделить одно независимое множество в котором не меньше половины вершин в силу принципа Дирихле.

Задача 2

Пусть в дереве n вершин, степень ни одной из которых не степени 2. Среди этих вершин - x висячих, степень которых по определению равна 1. Тогда deg оставшихся $n-x$ вершин не меньше 3-х. Тогда, если сумма всех степеней в графе D, то

$$D \geqslant x + 3(n - x)$$

Но по лемме о рукопожатиях $D = 2|E| = 2(n - 1)$ т.к. в дереве число ребер на 1 меньше числа вершин. Получаем неравенство:

$$2(n - 1) \geqslant -2x + 3n$$

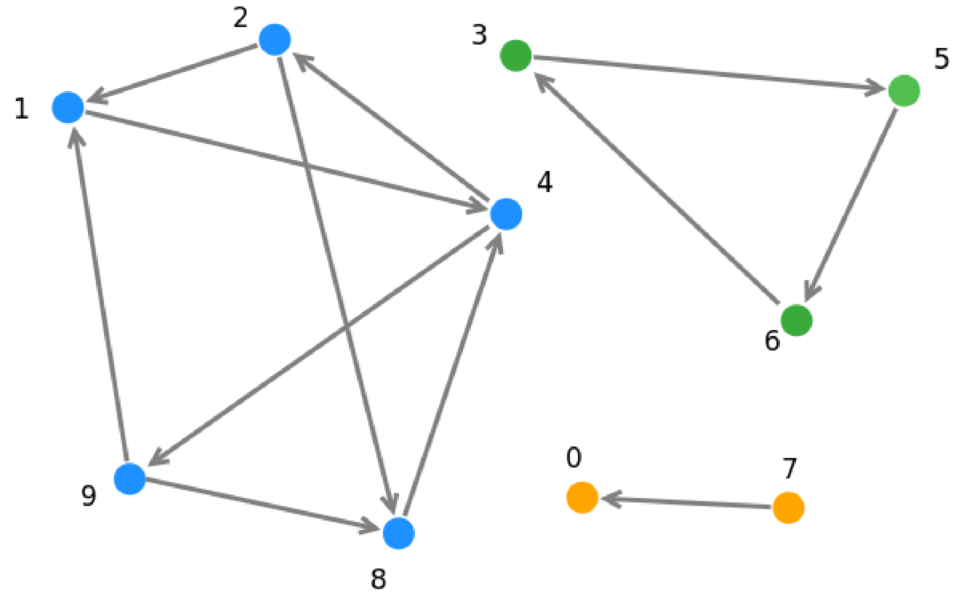
$$2x \geqslant n + 2$$

$$x \geqslant \frac{n}{2} + 1$$

Что и является требуемой оценкой.

Задача 5

Рассмотрим граф, вершинами которого являются цифры 0..9. Соединим ориентированным ребром две вершины если они образуют число кратное 7 в порядке, заданном направлением стрелки, т.е. одно из чисел $14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 84, 91, 98$:

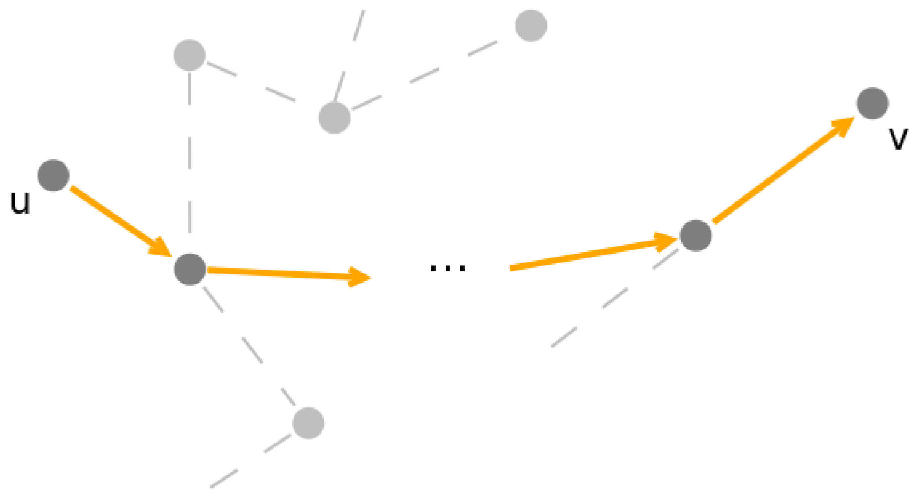


Поймем, что числа в которых подряд стоящие цифры образуют кратные 7 двузначные числа и все цифры различны получаются простым обходом каких-то вершин в данном графе. Но поймем тогда, что самый длинный простой путь в этом графе состоит из вершин $9, 8, 4, 2, 1$. Значит число 98421 - самое большое из удовлетворяющих условию: оно во-первых - самое длинное (пятизначное), а во-вторых содержит все цифры самой большой из компонент связанности, причем поставленных в порядке убывания.

Ответ: 98421

Задача 6

Выделим в графе какое-нибудь остовное дерево и рассмотрим какой либо простой путь в этом дереве, начинающийся в одном листе u, и заканчивающийся в другом листе v (В любом дереве хотя бы 2 листа, и любой путь из одной вершины в другую - простой). Зададим ориентацию на ребрах этого пути в направлении обхода.



Рассмотрим теперь все вершины, которые в остове соединены с вершинами пути. Ориентируем эти вершины по направлению к вершинам пути.

Если в остове еще остались вершины, не соединенные ориентированным ребром с уже существующим ориентированным подграфом, то выделим из них те, которые связаны ребром с вершинами из ориентированного подграфа, и зададим направление к нему. Будем повторять до тех пор, пока в остове не останется вершин не связанных с ориентированным подграфом ориентированным ребром (Число вершин конечно, а на каждой итерации мы уменьшаем число вершин вне ориентированной конструкции).

Заметим, что по построению на каждой итерации мы получаем такой ориентированный подграф, в котором из любой вершины можно добраться в v.

Это можно доказать по индукции по номеру итерации. "После n итераций мы получим ориентированный граф в котором из все вершин достигается v". База: итерация 1 - в пути из u в v можно было добраться от любой вершины до v, значит при указанной ориентации соединенных с путем вершин мы добавили к конструкции некоторое число вершин из которых можно дойти до главного пути, а по нему в v. Тогда пусть верно для итерации n. Поймем, что на итерации n + 1 мы задаем ориентацию ребер остова в направлении уже существующего подграфа, а значит из всех новых вершин мы можем добраться до v по предположению. Значит верно для всех n.

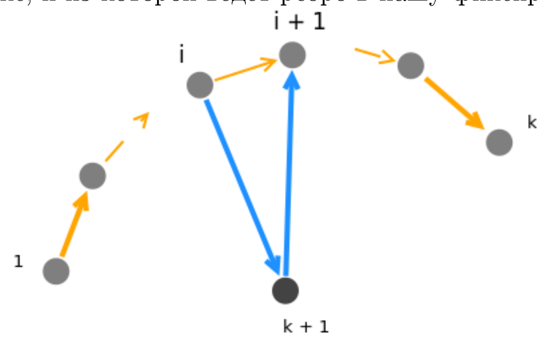
Задача 7

Докажем, что в турнире на n вершинах всегда есть Гамильтонов путь по индукции по числу вершин.

База $n = 1$. Очевидно есть Гамильтонов путь.

Предположение. Пусть верно, что в турнире на $n = k, k > 2$ вершинах есть Гамильтонов путь.

Шаг индукции. Рассмотрим граф турнир на $n = k+1$ вершинах. Зафиксируем вершину $k+1$. По предположению индукции оставшиеся k соединены Гамильтоновым путем. Пронумеруем вершины этого пути от 1 до k. Тогда рассмотрим такую вершину i этого пути которая имеет максимальный индекс, и из которой ведет ребро в нашу фиксированную вершину $k+1$.



Раз i максимальна, то во все вершины начиная с $i+1$ ребро идет из $k+1$. Тогда рассмотрим путь

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow ...i \longrightarrow k+1 \longrightarrow i+1 \longrightarrow ...k$$

Поймем, что этот путь Гамильтонов: он проходит через все $k+1$ вершины. Тогда на всем множестве натуральных чисел верно, что в турнире с n вершинами есть г. путь.

Задача 8

Возьмем какую-нибудь вершину $u \in V$. Она соединена ровно с $n-2$ вершинами направленным исходящем ребром и не соединена исходящим ребром ровно с одной вершиной v.

I

Есть ребро из v в u. Рассмотрим тогда множество $N(u)$ ориентированных соседей u (т.е. те в которые есть ребро из u). Поймем, что из любой $w \in N(u)$ есть ребро ведущее либо в u либо в v, либо в обе вершины сразу.

Если $\forall w \in N(u)$ нет исходящего ребра в w, то в графе всего 2 компоненты связанности: вершина w, которая не достижима из остальных и все оставшиеся вершины, которые очевидно взаимно достижимы.

Иначе, есть хоть одна w из $N(u)$ из которой есть ребро в v. Но тогда граф сильно связанный: из u можно достигнуть соседей u, из соседей u можно достигнуть либо v, либо саму u, а из v есть ребро в u.

II

Если из v нет ребра в u, то из u и из v дуги идут к одним и тем же $n-2$ вершинам, образующих множество N. $\forall w \in N$ обязательно соединена либо с u, либо с v, или с обоими, т.к. $|N \ w| = n-3$, а $d(w) = n-2$.

Поймем, что если $\exists w' \in N$ из которой есть путь в u и если $\exists w'' \in N$, то граф сильно связный: из u можно прийти во все вершины, из которых достижима v, а из v во все вершины из которых достижима u - все эти категории в совокупности покрывают все вершины.

Иначе, все вершины из N ведут только в одну из вершин u или v. Не вредя общности, что все дуги из N ведут в u. Но тогда все вершины из $N + u$ взаимно достижимы, а v не достижима ни от куда.

Ответ: Одна или две компоненты связанности равновероятно.