

Домашнее задание 5

Ткачев Андрей, группа 166

20 октября 2016 г.

Задача 1

Любое дерево - связанный граф без циклов, а значит не содержит циклов нечетной длины \Rightarrow любое дерево - двудольный граф.

В двудольном графе можно выделить как минимум два независимых множества - собственно доли графа, суммарное число вершин в которых равно числу вершин в графе. Но тогда в дереве на $2n$ вершин можно выделить одно независимое множество в котором не меньше половины вершин в силу принципа Дирихле.

Задача 2

Пусть в дереве n вершин, степень ни одной из которых не степени 2. Среди этих вершин - x висячих, степень которых по определению равна 1. Тогда \deg оставшихся $n - x$ вершин не меньше $3 - x$. Тогда, если сумма всех степеней в графе D , то

$$D \geq x + 3(n - x)$$

Но по лемме о рукопожатиях $D = 2|E| = 2(n - 1)$ т.к. в дереве число ребер на 1 меньше числа вершин. Получаем неравенство:

$$2(n - 1) \geq -2x + 3n$$

$$2x \geq n + 2$$

$$x \geq \frac{n}{2} + 1$$

Что и является требуемой оценкой.

Задача 4

Рассмотрим граф, в котором $(n-2)^3$ вершины соответствуют кубикам внутреннего под-куба $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$ и еще одна вершина u соответствует всем крайним кубикам куба. Вершины соединены ребром если и только если из соответствующих им кубиков можно перейти друг в друга сломав только одну перегородку (соответственно с u соединим те вершины, кубики которых имеют общую грань с внешней стеной).

Поймем, что любой путь в этом графе однозначно задает способ сломать перегородки соответствующие ребрам так, чтобы все кубики из этого пути были достижимы друг из друга или из каких-то барьерных элементов при разрушение тех самых перегородок.

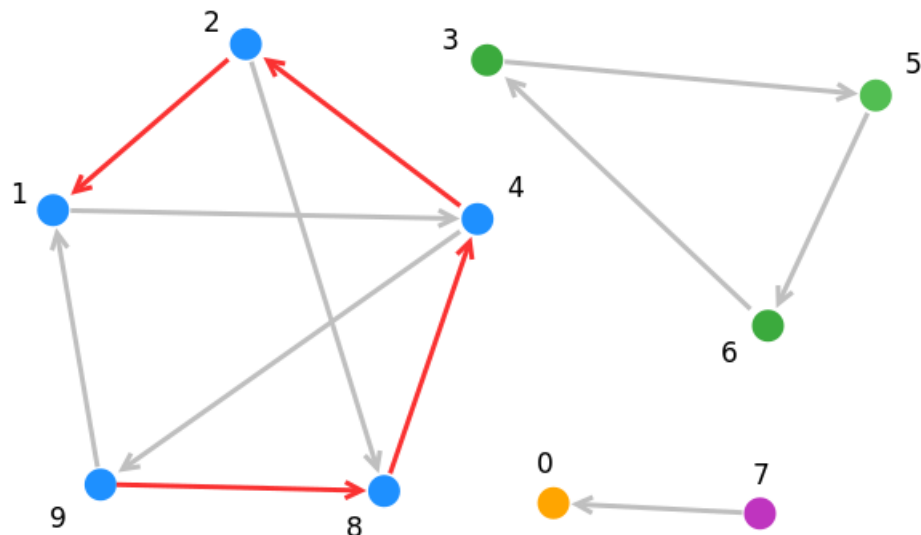
Тогда, остовное дерево этого графа задает способ сломать перегородки так, что бы число разрушений было минимально, и при этом всегда существовал путь к от любого кубика к границе, ведь число ребер остова графа G фиксировано и является минимальным допустимым для сохранения связности при удалении ребер G , а раз в дереве все вершины соединены путем с u , то все кубики при таких разрушениях имеют доступ к границе.

Таким образом достаточно удалить всего лишь $|E| = ((n-2)^3 + 1) - 1$ перегородок.

Ответ: $(n-2)^3$

Задача 5

Рассмотрим граф, вершинами которого являются цифры 0..9. Соединим ориентированным ребром две вершины если они образуют число кратное 7 в порядке, заданном направлением стрелки, т.е. одно из чисел 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 84, 91, 98:

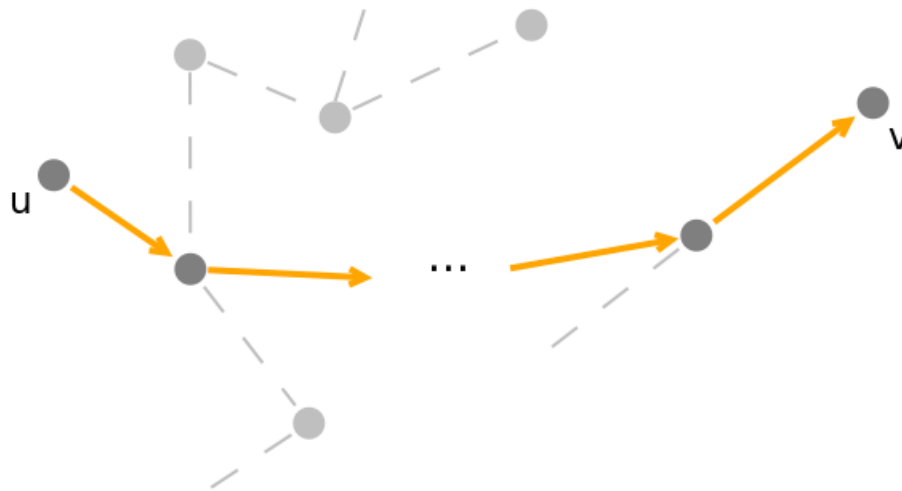


Поймем, что числа в которых подряд стоящие цифры образуют кратные 7 двузначные числа и все цифры различны получаются простым обходом каких-то вершин в данном графе. Но поймем тогда, что самый длинный простой путь в этом графе состоит из вершин 9, 8, 4, 2, 1. Значит число 98421 - самое большое из удовлетворяющих условию: оно во-первых - самое длинное (пятизначное), а во-вторых содержит все цифры самой большой из компонент связности, причем поставленные в порядке убывания.

Ответ: 98421.

Задача 6

Выделим в графе какое-нибудь остовное дерево и рассмотрим какой либо простой путь в этом дереве, начинающийся в одном листе u , и заканчивающийся в другом листе v (В любом дереве хотя бы 2 листа, и любой путь из одной вершины в другую - простой). Зададим ориентацию на ребрах этого пути в направлении обхода.



Рассмотрим теперь все вершины, которые в остове соединены с вершинами пути. Ориентируем эти вершины по направлению к вершинам пути.

Если в остове еще остались вершины, не соединенные ориентированным ребром с уже существующим ориентированным подграфом, то выделим из них те, которые связаны ребром с вершинами из ориентированного подграфа, и зададим направление к нему. Будем повторять до тех пор, пока в остове не останется вершин не связанных с ориентированным подграфом ориентированным ребром (Число вершин конечно, а на каждой итерации мы уменьшаем число вершин вне ориентированной конструкции).

Заметим, что по построению на каждой итерации мы получаем такой ориентированный подграф, в котором из любой вершины можно добраться в v .

Это можно доказать по индукции по номеру итерации. "После n итераций мы получим ориентированный граф в котором из все вершин достигается v ".

База: итерация 1 - в пути из u в v можно было добраться от любой вершины до v , значит при указанной ориентации соединенных с путем вершин мы добавили к конструкции некоторое число вершин из которых можно дойти до главного пути, а по нему в v .

Тогда пусть верно для итерации n . Поймем, что на итерации $n + 1$ мы задаем ориентацию ребер остова в направлении уже существующего подграфа, а значит из всех новых вершин мы можем добраться до v по предположению. Значит верно для всех n .

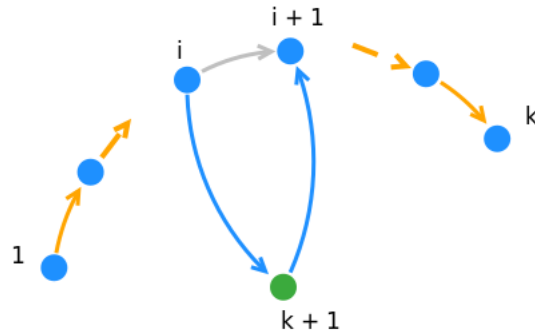
Задача 7

Докажем, что в турнире на n вершинах всегда есть Гамильтонов путь по индукции по числу вершин.

База $n = 1$. Очевидно есть Гамильтонов путь.

Предположение. Пусть верно, что в турнире на $n = k, k > 2$ вершинах есть Гамильтонов путь.

Шаг индукции. Рассмотрим граф турнир на $n = k + 1$ вершинах. Зафиксируем вершину $k + 1$. По предположению индукции оставшиеся k соединены Гамильтоновым путем. Пронумеруем вершины этого пути от 1 до k . Тогда рассмотрим такую вершину i этого пути которая имеет максимальный индекс, и из которой ведет ребро в нашу фиксированную вершину $k + 1$.



Раз i максимальна, то во все вершины начиная с $i + 1$ ребро идет из $k + 1$. Тогда рассмотрим путь

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \dots i \longrightarrow k + 1 \longrightarrow i + 1 \longrightarrow \dots k$$

Поймем, что этот путь Гамильтонов: он проходит через все $k + 1$ вершины. Тогда на всем множестве натуральных чисел верно, что в турнире с n вершинами есть г. путь.

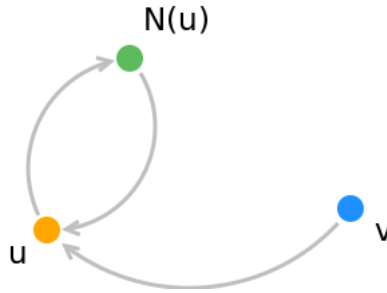
Задача 8

Возьмем какую-нибудь вершину $u \in V$. Она соединена ровно с $n - 2$ вершинами направленным исходящим ребром и не соединена исходящим ребром ровно с одной вершиной v .

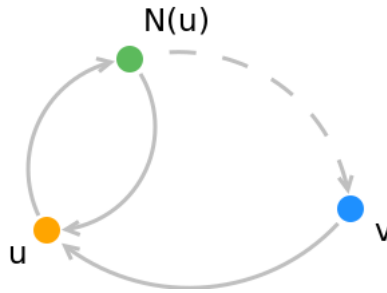
I

Есть ребро из v в u . Рассмотрим тогда множество $N(u)$ ориентированных соседей u (т.е. те в которые есть ребро из u). Поймем, что из любой $w \in N(u)$ есть ребро ведущее либо в u либо в v , либо в обе вершины сразу.

Если $\forall w \in N(u)$ нет исходящего ребра в v , то в графе всего 2 компоненты связности: вершина v , которая не достижима из остальных и все оставшиеся вершины, которые очевидно взаимно достижимы.



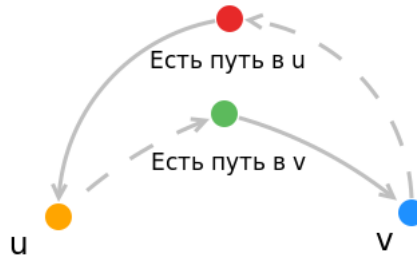
Иначе, есть хоть одна w из $N(u)$ из которой есть ребро в v . Но тогда граф сильно связанный: из u можно достигнуть соседей u , из соседей u можно достигнуть либо v , либо саму u , а из v есть ребро в u .



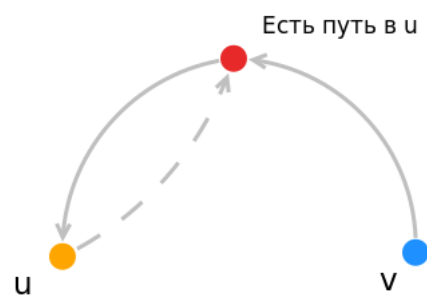
II

Если из v нет ребра в u , то из u и из v дуги идут к одним и тем же $n - 2$ вершинам, образующих множество N . $\forall w \in N$ обязательно соединена либо с u , либо с v , или с обоими, т.к. $|N \setminus \{w\}| = n - 3$, а $d(w) = n - 2$.

Поймем, что если $\exists w' \in N$ из которой есть путь в u и если $\exists w'' \in N$ из которой есть путь в v , то граф сильно связанный: из u можно прийти во все вершины, из которых достижима v , а из v во все вершины из которых достижима u - все эти категории в совокупности покрывают все вершины.



Иначе, все вершины из N ведут только в одну из вершин u или v . Не вредя общности, будем считать, что все дуги из N ведут в u . Но тогда все вершины из $N + \{u\}$ взаимно достижимы, а v не достижима ни от куда.



Ответ: Одна или две компоненты связности равновероятно.