Домашнее задание 9

Ткачев Андрей, группа 166

14 ноября 2016 г.

Задача 1

Для $\forall a \in A$, $\forall b \in B$:

- $\bar{P} = (A \times B) \setminus P$
- $P^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in P\}$

Тогда $a\bar{P}b \Rightarrow (a, b) \notin P \Rightarrow (b, a) \notin P^{-1} \Rightarrow \neg aP^{-1}b$. Тогда равенство $P^{-1} = \bar{P}$ невозможно ни для каких бинарных отношений.

Задача 2

P_1 и P_2 транзитивны.

а) Транзитивно ли $\bar{P}_1$?

Рассмотрим отношение делимости $P_1 = |$ на множестве натуральных чисел. Это отношение транзитивно: если $a|b$ и $b|c$, то $a|c$ ($c = bm = (ak)m$). Но при этом если $a \nmid b$ и $b \nmid c$, то это не означает, что $a \nmid c$ (Пример $a = 3$, $b = 5$, $c = 9$). Т.е. $\bar{P}_1 = \nmid$ не транзитивно.

Ответ: не обязательно транзитивно.

б) Транзитивно ли $P_1 \cap P_2$?

Рассмотрим $M = (x, y)|(x, y) \in P_1 \cap P_2$. Если aMb и bMc, то $(a, b) \in M$ и $(b, c) \in M$, а так как $M \subseteq P_1$, то $(a, b) \in P_1$ и $(b, c) \in P_1$ и так как $M \subseteq P_2$, то $(a, b) \in P_2$ и $(b, c) \in P_2 \Rightarrow (a, c) \in P_1$ в силу транзитивности P_1 и $(a, c) \in P_2$ в силу транзитивности P_2, но тогда $(a, c) \in P_1 \cap P_2 = M$. Т.е. M - транзитивно.

Ответ: да, транзитивно.

в) Транзитивно ли $P_1 \cup P_2$?

Пусть $P_1 =<$, а $P_2 =>$ на множестве действительных (Отношение строго больше(меньше) - транзитивно). Поймем, что если $(a, b) \in P_1 \subset P_1 \cup P_2$ и $(b, c) \in P_2 \subset P_1 \cup P_2$, то не обязательно, что $(a, c) \in P_1 \cup P_2$. Например, если $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$ то $(a, c) \notin P_1 \cup P_2$, т.к. $a = c$ - отношение равенства, не пересекается с отношениями строго больше(меньше).

Ответ: не обязательно транзитивно.

в) Транзитивна ли композиция $P_1 \circ P_2$?

Рассмотрим множество $A = a, b, c, d, e$. Определим отношения P_1 и P_2, так, что aP_2d, dP_1b, bP_2e и eP_1c. Тогда P_1 и P_2 - транзитивны (Действительно $\forall i < 2$, $\nexists x, y, z \in A : xP_iy$, $yP_iz \not\Rightarrow xP_iz$).

Также, по определению: $a\ P_1 \circ P_2\ b$ и $b\ P_1 \circ P_2\ c$. Но при этом не верно, что $a\ P_1 \circ P_2$, так как $\nexists x : aP_2x$ и xP_1c. Тогда композиция $P_1 \circ P_2$ транзитивных отношений, не транзитивна.

Ответ: не обязательно транзитивна.

Задача 3

Путь a и b - карты из колоды. Отношение заданное на колоде $R =$ «Одна из карт старше 10-ки, другая младше». Тогда $aRb \Leftrightarrow (a < 10$ и $b > 10)$ или $(a > 10$ и $b < 10)$.

Поймем, что R - симметрично. Действительно если aRb, то и bRa (условие - одна из карт больше 10, другая - меньше, выполняется вне зависимости от порядка карт).

Так как одна карта может быть больше 10, меньше 10 или же равна 10, то не для каких карт a в колоде не верно aRa, значит R - не рефлексивно.

Поймем также, что R не транзитивно. Например, если рассмотреть карты 6, 11, 5, то получим $6R11$, $11R5$, но неверно, что $6R5$.

Посчитаем количество пар карт (a, b), таких, что $a < 10 < b$. Карт, младших 10 - всего $4 \cdot 4 = 16$ (по четыре в каждой масти). Карт, старше чем 10-ка так же 16 (4 в каждой масти). По правилу произведения кол-во пар (a, b) равно $16 \cdot 16 = 256$. Но так как R - симметричное отношение, то раз aRb, то и bRa. Тогда $|R| = 256 \cdot 2 = 512$.

Ответ: 512.

Задача 4

а)

Да, это отношение может быть рефлексивным. Например, рассмотрим Декартово произведение этого множества с собой без трех пар вида (a, a).

Получим подмножество Декартова произведения, которое задает какое-то симметричное отношение из 33 пар.

Ответ: да, может.

б)

Докажем от противного, что такое отношение не может быть транзитивным.

Положим, R - транзитивное отношение на множестве M из 6 элементах, такое что $|R| = 33$. Тогда R - подмножество $M \times M$ без трех пар (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Тогда рассмотрим граф отношений, выкинув из него те дуги, которые как-то соединяют x_i и y_i, и дуги которые соединяют вершину саму с собой. Оставшиеся дуги обладают рефлексивностью (если дуга ведет из a в $b0$, то есть дуга и из b в a), т.е. данный граф соответствует полному графу на 6 вершинах без трех ребер $G = (E, V)$.

Если в G нет вершины со степенью меньше, чем 3, то он Гамильтонов граф (выполняется условие Дирака), т.е. в нем есть цикл проходящий по каждой вершине ровно 1 раз. В этом случае поймем, что в силу транзитивности R, если из a в b есть путь через c, то есть дуга из a в c, а так как подмножество $R' \subset R$, которое изображает G, симметрично, то есть дуга и из c в a. Значит все вершины в графе G соединены ребром, значит он - полный. Противоречие.

Тогда в G есть вершина u со степенью меньше чем 3. Так как G отличается от полного только отсутствием 3-х ребер, то $deg(u) = 2$. Но тогда $\forall v$, $w \in V$, $v \neq u$, $w \neq u$, $w \neq v$: $(v, w) \in E$. Пусть u не соединена с x, и соединена с y. Значит $(x, y) \in E$, но в силу транзитивности R, так как xRy, yRu, то xRu. Аналогично: uRy, $yRx \Rightarrow uRx$. Тогда $(x, u) \in E$ - противоречие.

Вывод: R не может быть транзитивным.

Ответ: нет, не может.

Задача 5

а)

Отношение на множестве A задается подмножеством пар из $A \times A$. $|A \times A| = n^2$, тогда всего подмножеств в $A \times A$: 2^{n^2}. Соответственно и число всех бинарных отношений на множестве A равно $2^{(n^2)}$.

Ответ: $2^{(n^2)}$.

б)

Если R - рефлексивно, то все пары вида (a, a) (n штук) $\in A \times A$ содержатся и в R, а остальные пары могут как содержаться, так и не содержаться. Т.е. $|R| = 2^{(n^2 - n)}$.

Ответ: $2^{(n^2-n)}$.

в)

Если R - симметрично из $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$. Тогда посчитаем число x таких подмножеств из $A \times A$ в которых одновременно содержатся и (a,b) и (b,a), $a \neq b$.

Для каждой пары (a,b) есть выбор включить ее и пару (b,a) в подмножество или нет; число таких пар (a,b), где $a \neq b$ равно $n(n-1)$; причем если включить (a,b) в отношение, то необходимо включить и (b,a), значит число таких отношений $x = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Осталось учесть, что R может содержать пары вида (a,a). Тогда в каждое из уже посчитанных подмножеств мы можем добавить от 0 до n новых пар, не меняя симметричности задаваемых ими отношений, т.е. дополнительно нужно выбрать включать какие-то из этих n пар в отношение или нет. Это и дает нам число симметричных отношений: $2^{\frac{n(n-1)}{2}+n}$.

Ответ: $2^{\frac{n(n-1)}{2}+n}$.

г)

Поймем, что искомая оценка - это число всех подмножеств - x из прошлого пункта. И правда, множество R - антисимметрично если aRb и bRa влечет $a = b$, т.е. число антисимметричных отношений - в точности число отношений, в которых пары (a,b) и (b,a) не входят одновременно, где $a \neq b$, т.е. $2^{(n^2)} - 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

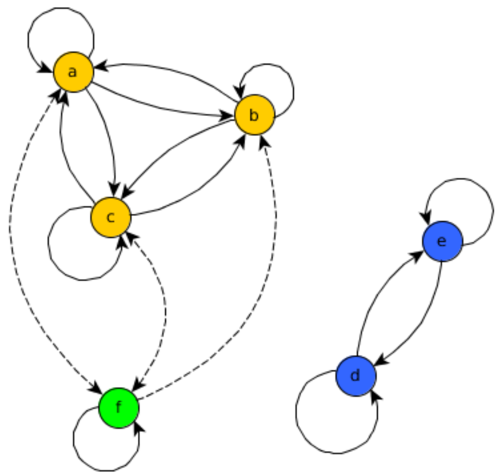
Ответ: $2^{(n^2)} - 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Задача 6

а)

Из того, что P - отношение эквивалентности, значит оно транзитивно, рефлексивно и симметрично. Тогда понятно, что a, b, c - принадлежат одному классу эквивалентности, а элементы d, e - другому, т.к. в силу транзитивности отношения P все a, b, c попарно эквивалентны, и не эквивалентны элементу d, который в свою очередь эквивалентен d.

Рассмотрим граф отношений R на данном множестве.



Так как $e\bar{P}f$, то e и f не эквивалентны. С другой стороны про отношения f с a, b, c ничего не известно, кроме того, что возможно f принадлежит тому же классу эквивалентности.

Так как отношение эквивалентности определяется разбиением множества на непересекающиеся подмножества возможно всего 2 варианта отношения P: первый, когда P разбивает множество A на два класса эквивалентности $\{a, b, c, f\}$ и $\{e, d\}$, второй, когда классов эквивалентности 3 $\{a, b, c\}$, $\{f\}$ и $\{e, d\}$.

б)

Для множества A, содержащего дополнительный элемент g выпишем все возможный разбиения на классы эквивалентности, с учетом пункта a).

$$\{a, b, c, f, g\} \quad \{b, e\}$$
$$\{a, b, c, f\} \quad \{b, e, g\}$$
$$\{a, b, c, f\} \quad \{b, e\} \quad \{g\}$$

$$\{a, b, c, g\} \quad \{b, e\} \quad \{f\}$$
$$\{a, b, c\} \quad \{b, e, g\} \quad \{f\}$$
$$\{a, b, c\} \quad \{b, e\} \quad \{f, g\}$$
$$\{a, b, c\} \quad \{b, e\} \quad \{f\} \quad \{g\}$$

Т.е. для каждого из классов эквивалентности для каждого из двух вариантов P из прошлого пункта, g может принадлежать одному из них или образовывать отдельный класс.

Каждое из приведенных разбиений на непересекающиеся множества задает возможное отношение эквивалентности P.

Задача 7

Докажем формулу $p_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p_i$ по индукции по n.

База. Число отношений p_0 эквивалентности на множестве $A_0 = \emptyset$ равно способу разбить A_0 на непересекающиеся множества (здесь и далее будем под разбиением на непересекающиеся множества понимать некое отношение эквивалентности), т.е. 1. Число отношений эквивалентности p_1 на множестве $A_1 = a$ равно числу способов разбить A_1 на непересекающиеся подмножества, т.е. 1. В свою очередь: $1 = \binom{0}{0} p_0$.

Предположение, пусть формула верна для $0, \cdots, n$.

Переход $0, \cdots, n \Rightarrow n+1$. Рассмотрим множество B из $n+1$ элемента. Зафиксируем какой-то один элемент $x \in B$. Рассмотрим множество $B' = B \subset \{x\}$. Любое подмножество B' из $k < n$ элементов можно разбить на p_k непересекающихся подмножеств. Рассмотрим тогда такое разбиение B на подмножества:

$$\{a_1, \cdots, a_k\} \quad \{x, a_{k+1}, \cdots, a_n\}, \quad (a_i \in B')$$

Поймем, что все разбиения B на подмножества, в которых x входит в подмножество из $n-k$ элементов (не считая сам x) могут быть получены разбиением $\{a_1, \cdots, a_k\}$ на другие непересекающиеся подмножества ровно p_k способами (по предположению индукции). А так как в любом разбиении B на непересекающиеся подмножества x входит в подмножество какой-то длины $n-k$, то нам достаточно найти способов разбить B' на подмножества C и D длины $n-k$ и k, а D разбить вообще на все возможные разбиения на подмножества.

Выбрать k элементов из B', с которыми x будет образовывать подмножество B, можно $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ способами. Разбить оставшиеся $n-k$ элементов на непересекающиеся подмножества, по предположению индукции, можно p_k способами. Тогда всего разбиений B на непересекающиеся подмножества таких, что x входит в подмножество из $n-k$ элементов равно $p_k \binom{n}{k}$.

Из этих соображений получаем, что общее число разбиений B на непересекающиеся подмножества равно числу способов разбить его так, чтобы x лежал в подмножестве из 0, 1-ого, ... , n элементов (не считая x). То есть получаем формулу для p_{n+1}:

$$p_{n+1} = \binom{n}{0} p_0 + \cdots + \binom{n}{n} p_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p_i$$