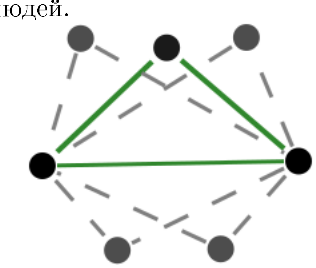
Задача 1

Пусть люди - вершины графа $G = (V, E)$, а ребро между ними - признак знакомства. посмотрим на какую-либо вершину $(u, v) \in E$. По условию $|N(u) \cap N(v)| = 5$.

Поймем, что каждое ребро входит ровно в 5-ть троек попарно знакомых людей.



(Действительно, у двух знакомых людей ровно пять общих знакомых) Тогда посчитаем кол-во таких троек попарно соед. вершин: каждое ребро состоит в 5 треугольниках тогда $|E| \cdot 5$ - число троек с повторами - каждый "треугольник"был посчитан ровно три раза, т.к. он был учтен для каждого из трех ребер "треугольника"$\Rightarrow$ всего троек:

$$\frac{|E| \cdot 5}{3}$$

Но тогда, так как количество троек чисел может быть только целым, то число ребер кратно 3, т.к. 5 и 3 - взаимно просты. $\Rightarrow$ число пар знакомых кратно 3.

Задача 2

A) n вершин. $|E|_{max} = \frac{n(n-1)}{2}$ - случай полного графа. $|E|_{min} = n - 1$. Докажем, что меньше быть не может. Возьмем какой-то связанный граф с n вершинами. Итеративно будем удалять из графа ребра, которые входят в какой-нибудь цикл, до тех пор, пока не останется граф $G' = (V, E')$ без циклов. Поймем, что граф после этого останется связанным и докажем это в Задаче 5.

Поймем, что в G' ровно $n - 1$ ребро и что больше нельзя удалить ребро не потеряв связанности. Для начала докажем второе утв.: предположим, что можно удалить еще одно ребро $(u, v) \in E'$, не потеряв связанность, тогда $\forall w \in V \exists$ простой путь из w в u, v, не проходящий через ребро (u, v), но тогда существует и путь в u проходящий через $(u, v) \Rightarrow$ в вершины u, v можно добраться более чем одним путем, а это значит, что в графе есть какой-нибудь цикл, что не возможно по построению G'.

Докажем теперь, что $|E'| = n - 1$. Возьмем какую-либо вершину степени 1 (ее существование будет доказано в задаче 5), удалим ее и ребро, из нее выходящее, получим связанный граф без циклов (показано в задаче 5), повторим до тех пор, пока не останется одна вершина. Всего мы удалим

$n-1$ вершину, а значит и $n-1$ ребро, а т.к. больше ребер не осталось и на каждом шаге мы удаляли по 1-ой вершине, то ребер было $n-1$.

Тогда в любом связанном графе есть подграф $G' = (V, E') \subset G = (V, E), |V| = n, |E'| = n-1$. Значит в графе G хотя бы $n-1$ ребро.

B) Пусть $|V|$ - количество вершин, тогда пользуясь пунктом **A**:

$$\begin{cases} |V| - 1 <= n, \\ \frac{|V|(|V|-1)}{2} >= n \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

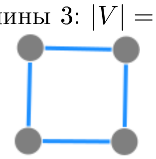
$$\begin{cases} |V| <= n+1 \\ \left[\begin{array}{l} |V| >= \frac{1+2\sqrt{n}}{2}, \\ |V| <= \frac{1-2\sqrt{n}}{2}. \end{array} \right. \end{cases}$$

При $n = 0$, $|V| = 1$ или $|V| = 0$, иначе:

$$\begin{cases} |V| - 1 <= n, \\ |V| > \lfloor \frac{1+2\sqrt{n}}{2} \rfloor \end{cases}$$

Задача 3

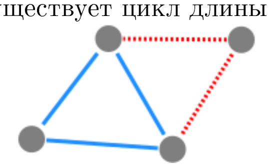
A) Нет. Например следующий граф из 4-х вершин не содержит цикла длины 3: $|V| = 4$, степени вершин $(2; 2; 2; 2)$



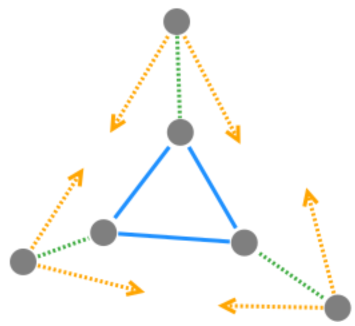
B) Да, обязательно есть. Докажем от противного: нет такого графа $G = (V, E)$ с циклом длины 4, в котором $|V| = 2n, u \in V : d(u) >= n, n >= 2$ (иначе задача теряет смысл).

Разберем несколько случаев:

I $n \neq 2$ и В графе есть цикл длины 3 из вершин $u, v, w \in V$. По предположению ни у каких двух вершин из $\{u, v, w\}$ нет общего соседа, иначе существует цикл длины 4:



Значит $|N(u) \cap N(v)\ N(w)| = \emptyset$. Но у каждой из вершин $\{u, v, w\}$ хотя бы $n-2$ соседа отличных от $\{u, v, w\}$ (по условию, степень каждой вершины хотя бы n). Но значит в этом графе $N(u) + N(v) + N(w) - |u| - |v| - |w| <= |V| \Rightarrow 3n - 3 <= |V| <= 2n \Rightarrow n <= 3$ Значит $n = 3$. Тогда граф имеет вид хотя бы:



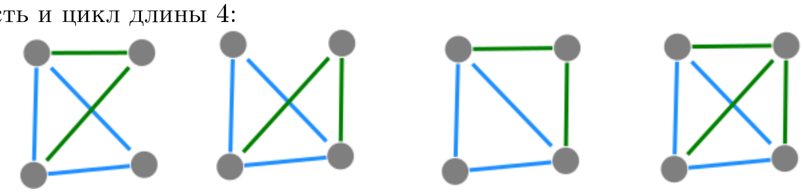
Тогда например сосед u либо соединен с кем-то из соседей v, w, и не соединен с v, w (иначе он их общий сосед и есть цикл длины 4), но тогда эта пара соседей и 2-е вершины из цикла образуют цикл длины 4, что невозможно по предположению.

II

Цикла длины 3 нет. Посмотрим на ребро $(u, v) \in E$. Тогда у $u, v \in V$ нет общих соседей. Это возможно, только если у них ровно по $n-1$ соседу. Посмотрим на $t \in N(u)$. Поймем, что t соединен с кем-то из соседей v, т.к. циклов длины 3 нет, то t не соединен с соседями u, и с вершиной v, значит единственная возможность - быть соединенным с соседями v. Но тогда посмотрим на t, x, u, v, где x - общий сосед t и v: эти вершины образуют цикл длины 4.

III

Цикл длины 3 есть, $n = 2$. Все возможные такие графы: полный и полный без одного ребра. (выделим цикл, у вершины вне этого цикла две возможные степени: 2 - полный без ребра и 3 - полный граф). Но в этих графах есть и цикл длины 4:



Тогда в любом таком графе есть цикл длины 4.

Задача 5

Пусть $G = (V, E)$. Если граф содержит какие-нибудь циклы, тогда возьмем цикл $\{u_0, u_1, ...u_n\}, u_i \in V$. Поймем, что из него можно выкинуть какое-либо ребро, не повредив связанности графа (Действительно, если есть какой-нибудь путь из v в w, проходящий через ребро (u_k, u_m), то существует путь проходящий через прочие ребра цикла, ведь в цикле до каждой вершины можно дойти хотя бы двумя разными путями $\Rightarrow$ граф без этого ребра останется связанным). Тогда выкинем его. Повторим до тех пор пока в графе не останется циклов.

Имеем $G' \subseteq G, V' = V$. Докажем, что в G' есть вершина степени 1. Возьмем, какую либо вершину этого графа. Перейдем в ее соседа, если у соседа нет ребер, отличных от того, по которому мы в него пришли, остановимся в соседе, иначе: перейдем по этому отличному ребру, в еще не посещенную вершину. Будем повторять эти переходы. Поймем, что раз граф связан и количество вершин конечно, то рано или поздно мы не сможем перейти. Это возможно в двух случаях: либо мы оказались в вершине со степенью 1, либо мы не можем перейти в посещенную вершину, что означает наличие цикла, а значит недостижимо. Значит мы остановились в вершине со степенью 1$\Rightarrow$ она существует.

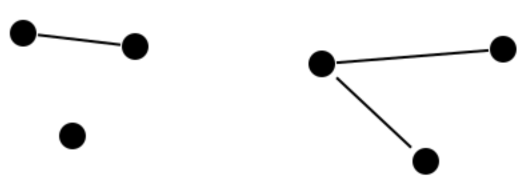
Тога эту вершину можно удалить, не навредив связанности графа, т.к. любой простой путь проходящий по ее ребру ведет в эту вершину или из нее, т.е. только соединяет эту вершину с оставшимися, тогда в отсутствии этой вершины исчезнут только те пути, что вели в нее, а значит граф по прежнему останется связанным.

Тогда эту же вершину можно удалить и из начального графа G, не вредя связанности, т.к. в нем есть связанный G'' (граф без вершины степени из G').

Задача 6

Предположим противное: ни сам граф $G = (V, E)$, ни его дополнение $\bar{G}$не содержат циклы длины 3.

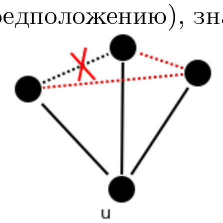
Это означает, что в графе G нет таких 3-х вершим между которыми нет ни одного ребра и таких 3-х вершин, которые попарно соединены между собой. Тогда любые 3 вершины в графе соединяются одним из двух способов.



Т.е. в любой тройке людей есть либо два незнакомых человека, либо два знакомых.

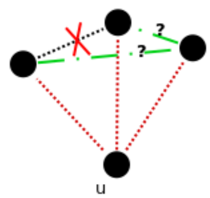
Поймем, что у какого-нибудь человека u либо 3 и более знакомых **(1)**, либо 3 и более незнакомых **(2)**(т.к. всего людей хотя бы 6, по принципу Дирихле).

1) Среди трех знакомых с u есть хотя бы два знакомых между собой (по предположению), значит с u они образуют цикл длины 3.



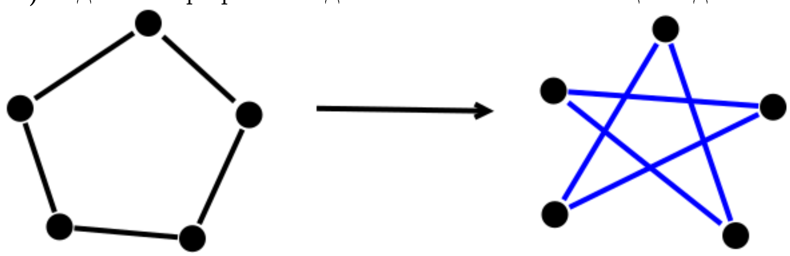
Что невозможно по предположению.

2) Среди трех незнакомых u есть хотя бы два не знакомых между собой человека (т.к. они образуют тройку), а значит вместе с u они образуют тройку попарно незнакомых.

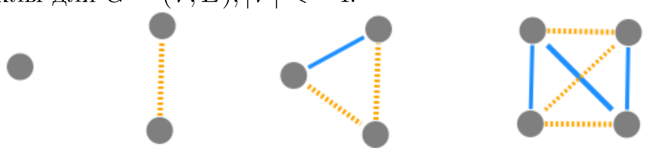


Но тогда эти три незнакомых в $\bar{G}$ образуют цикл длины 3. Что не возможно по предположению. Противоречие. $\Rightarrow$ Граф с более чем пятью вершинами или его дополнение содержат цикл длины 3.

A) В данном графе и его дополнении есть только цикл длины 5.



B) Примеры графов без циклов, дополнения которых так же не содержат циклы для $G = (V, E); |V| <= 4$:



Докажем, что если $|V| = 5$, то G содержит цикл. Разберем случаи, когда граф связан и когда не связан.

I

(1) Граф связан и в нем есть цикл - задача решена.

(2) Граф связан, цикла нет, тогда есть висячая вершина u (см. 5). Тогда в дополнении $\bar{G}$ u соединена с тремя вершинами, с которыми не соединена в начальном графе. Но как мы помним в G циклов нет $\Rightarrow$ хотя бы две вершины из этих трех не соединены между собой в G, а значит соединены в $\bar{G}$, а значит есть цикл длины 3 в дополнении из вершины u и тех двух не соединенных в начальном графе.

II

(1) Граф не связан и в нем есть цикл - задача решена.

(2) Граф не связан, циклов нет. Поймем, что если компонент связанности больше 2-х, то в дополнении все вершины из разных компонент соединены между собой, а значит есть цикл длины хотя бы 3. Если компонент - 2, то либо в одной 3 вершины а во второй 2, либо в одной 1 во второй 4.

В обоих случаях в больших компонентах есть хотя бы две не соединенных вершины (иначе есть цикл), между которыми есть ребро в дополнении, а вершины(а) из меньшей компоненты в дополнении соединена со всеми вершинами большей компоненты $\Rightarrow$ соединена с двумя соединенными вершинами $\Rightarrow$ есть цикл.