Домашнее задание 11

Ткачев Андрей, группа 166

1 декабря 2016 г.

Задача 1. Обозначим функции $f : A \to B$, $g : C \to D$. По условию функции всюду определены, значит $\forall\ a \in A\ \exists!\ b \in B$, такой что $f : a \mapsto b$ и $\forall\ c \in C\ \exists!\ d \in D$, такой что $g : c \mapsto d$. Так же $f \subseteq A \times B$, $g \subseteq C \times D$.

а) Пусть $h = f \cup g$. Тогда, $h \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. Т.е. $h = \{(x,\ y) | x \in A \cup C,\ y \in B \cup D :\ y = f(x)$ или $y = g(x)\}$.

Пусть $x \in A$. Докажем, что если $x \notin A \cap C$, то $\exists!\ y \in B \cup D : (x, y) \in h$. Существование y вытекает из того, что f - тотально, а значит, существует y: $(x,\ y) \in f \subseteq h$. Положим $(x,\ y) \in h$ и $(x,\ y') \in h$. Так как $x \notin A \cap C$ и $x \in A$, то $x \notin C$. Поэтому $(x,\ y) \notin g$ и $(x,\ y') \notin g \Rightarrow (x,\ y) \in f$ и $(x,\ y') \in f$. Но тогда $y = y'$, т.к. f - функция.

Аналогично, если $x \in C$ и $x \notin A \cap C$, то $\exists!\ y \in B \cup D : (x, y) \in h$.

Рассмотрим случай, когда $x \in A \cap C$. Поймем, что если $f : x \mapsto y$, $g : x \mapsto y'$ и $y \neq y'$, то h - не функция, т.к. $(x,\ y) \in h$ и $(x,\ y') \in h$. Если же $\forall x \in A \cap C$ верно, что $f : x \mapsto y$, $g : x \mapsto y'$ влечет $y = y'$ (т.е. $y \in B \cap D$), то h - функция. Иными словами: h - функция тогда и только тогда, когда $h(A \cap C) \subseteq B \cap D$.

б) Пусть $h = f \cap g$. Тогда, $h \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$. Т.е. $h = \{(x,\ y) | x \in A \cap C,\ y \in B \cap D :\ y = f(x)$ и $y = g(x)\}$. Но тогда h - функционально в силу того, что $(x,\ y) \in h \Leftrightarrow y = f(x) = g(x)$, а такой y - существует единственный так как f и g - тотальны(существование) функциональны(единственность).

Задача 2. Покажем, что в общем случае нельзя поставить какой-то определенный знак (из указанных в условии), приведя примеры f и A для которых ? в утверждении $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ принимает одно из значений $\subseteq,\ \supseteq, =$ (и только его).

1) Рассмотрим функцию $f : \{0,\ 1\} \to \{1\}$, $f = \{(0,\ 1)\}$. Тогда $f(\{0,\ 1\}) = \{1\}$, а $f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$. Т.е. $f^{-1}(f(\{0,\ 1\})) \subseteq \{0,\ 1\}$. Т.е. включение в обратную сторону, а тем более равенство в этом случае неуместны.

2) Рассмотрим функцию $f : \{0,\ 1\} \to \{1\}$, $f = \{(0,\ 1),\ (1,\ 1)\}$. Тогда $f(\{0\}) = \{1\}$, а $f^{-1}(\{1\}) = \{0,\ 1\}$. Т.е. $f^{-1}(f(\{0\})) \supseteq \{0\}$. Т.е. включение в обратную сторону, а тем более равенство в этом случае неуместны.

Задача 3. Рассмотрим функцию $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$, $f = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2), (3, 2)\}$. Пусть $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{3\}$.Тогда $f(A \setminus B) = \{1,\ 2\}$. Однако $f(A) \setminus f(B) = \{1,\ 2\} \setminus \{2\} = \{1\}$. Т.е. $f(A \setminus B) \nsubseteq f(A) \setminus f(B)$. Значит такое включение не всегда верно.

Пусть $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тогда $y \in f(A)$ и $y \notin f(B) \Rightarrow \exists x \in A f(x) = y$, причем $x \notin B$ (иначе $y \in f(B)$) $\Leftrightarrow x \in A \setminus B$ (так как $f : A \cup B \to Y$), что влечет $f(x) = y \in f(A \setminus B)$. Значит $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$.

Таким образом, всегда верно, что $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$.

Задача 4. Пусть $x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$. Тогда $x \in f^{-1}(A)$ и $x \notin f^{-1}(B) \Rightarrow \exists! y \in A f(x) = y$, причем $y \notin B$ (иначе $x \in f^{-1}(B)$) $\Leftrightarrow y \in A \setminus B$, что влечет $x \in f(A \setminus B)$. Значит $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$.

Пусть $x \in f^{-1}(A \setminus B)$. Тогда $\exists y \in A \setminus B : f(x) = y$. Это означает, что $y \in A$ и $y \notin B$ (иначе $y \notin A \setminus B$). Но тогда $x \in f^{-1}(A)$ и $x \notin f^{-1}(B)$. Значит $x \in \supseteq f(A) \setminus f(B)$. Тогда $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$.

Мы доказали включение в обе стороны $\Rightarrow f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Задача 5.

а) Пусть $A = \{x_1,\ ...,\ x_a\}$, $B = \{y_1,\ ...,\ y_b\}$. Тогда $f \subseteq A \times B$ - функциональное отношение, если $\forall i \in \{1,\ ...,\ a\} :\ (x_i,\ y_k) \in f,\ (x_i,\ y_j) \Leftrightarrow k = j$. Т.е. при всех прочих фиксированных x_i и их отношений для каждого x_j есть b вариантов функций где x_j в отношении с одним из b элементов мн-ва B + одна функция, где x_j не находится в отношениях (т.к. под функцией мы понимаем не обязательно всюду определенное отношение). Тогда всего функций $(b+1)^a$ - для каждого элемента из A существует $b+1$ способ вступить в отношение с B.

б) Если функция f из A в B - инъекция, то каждому $x \in A$ соответствует не более одного $y \in B$ и каждому $y \in B$ соответствует не более одного x из A. Пусть тогда только x из $\{x_{i_1},\ ...,\ x_{i_k}\} \subseteq A$ вступают в отношение с элементами B. Для x_{i_0} выбрать элемент y_0, такой, чтобы $(x_{i_0},\ y_0)$ можно b способами, затем для x_{i_1} - $b-1$ способами и тд. Т.е. для каждого такого мн-ва $S = \{x_{i_1},\ ...,\ x_{i_k}\}$ из A существует $[b]_k$ вариантов функциональных отношений, таких, что $S = f(B)$ ($[b]_k = b(b-1) \cdot ... \cdot (b-k+1)$; $k \leqslant min(a,\ b)$, иначе по принципу Дирихле каким-то различным эл-там из A сопоставлен один из B). Всего способов выбрать k элементное подмножество из A: $\binom{a}{k}$. Тогда по правилам суммы и произведения, число функций-инъекций из A в B:

$$\sum_{i=0}^{min(a,\ b)} \binom{a}{i} [b]_i$$

Задача 6.

а) Пусть $b \neq 0$.

Рассмотрим отношение $f \subseteq [0,\ 1] \times [a,\ b]$, такое, что $(x,\ y) \in f \Leftrightarrow y = bx + a$. $(\forall x \in [0,\ 1] : a \leqslant bx + a \leqslant b)$. Докажем, что f - биекция.

Заметим, что f определена на $[0,\ 1]$ и что f - функция (из построения следует, что любому $x \in [0,\ 1]$ сопоставлен хотя бы один $y \in [a,\ b]$; из построения так же следует, что если если $(x,\ y) \in f$ и $(x, y') \in f$, то $y = bx + a = y'$).

Поймем, что f - инъекция. Действительно, если $(x',\ y) \in f$ и $(x'', y) \in f$, то $y = bx' + a = bx'' + a \Rightarrow bx' = bx''$, а так как $b \neq 0$, то $x' = x''$.

Докажем, что f - сюръекция. Пусть $y \in [a,\ b]$, тогда $\exists x \in [0,\ 1]$, такой, что $y = bx + a$ - так как это уравнение имеет решение $x = \frac{y-a}{b}$, причем $0 \leqslant x \leqslant 1$ ($b \neq 0$, $0 \leqslant y - a \leqslant b \Rightarrow 0 \leqslant \frac{y-a}{b} \leqslant 1$). Т.е. $\forall y \in [a,\ b] \exists\ x \in [0,\ 1] : f(x) = y$.

Тогда f - биекция.

Если $b = 0$, то рассмотрим биекцию $g : [a,\ b] \to [a+1,\ b+1]$ (т.е. к каждому числу из $x \in [a,\ b]$ взаимно однозначно сопоставим $x + 1$ из $[a+1,\ b+1]$). Тогда если мы построим биекцию из $[0,\ 1]$ в $[a+1,\ b+1]$, то пользуясь тем фактом, что композиция биекций - биекция, мы получим биекцию из $[0,\ 1]$ в $[a,\ b]$ через $[a+1,\ b+1]$: $g \circ f$.

б) Пусть $A = \{a|\ a \in (0,\ 1)\};\ B = \{b|\ b \in (0, +\infty)\}$.

Рассмотрим отношение f на $A \times B$, такое, что $(x,\ y) \in f$, если $y = \frac{1}{1-x} - 1$. Поймем, что при $x \in A$, $\frac{1}{1-x} - 1 \in (0, +\infty)$:

$$\frac{1}{1-x} - 1 > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x-1}{1-x} > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in (0,\ 1)$$

Тогда $\forall x \in A\ \exists y \in B :\ (x,\ y) \in f$, значит f - всюду определено.

Заметим, что f - функция. Действительно, если $(x, y_0) \in f$ и $(x, y_1) \in f$, то $y_0 = \frac{1}{1-x} - 1 = y_1$.

Поймем, что f - инъекция. В самом деле, если $(x',\ y) \in f$ и $(x'',\ y) \in f$, то $y = \frac{1}{1-x'} - 1 = \frac{1}{1-x''} - 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x'} = \frac{1}{1-x''}$, т.к. $x' \neq 1$ и $x'' \neq 1$, то $x' = x''$.

Докажем, что f - сюръекция. Пусть $y \in B$. Покажем, что $\exists x :\ (x,\ y) \in f$: решим уравнение $\frac{1}{1-x} - 1 = y$ на интервале $(0,\ 1)$.

$$\begin{cases} \frac{1}{1-x} - 1 = y, \\ x \in (0,\ 1), \\ y \in (0,\ +\infty); \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$1 - 1 + x = (1 - x)y$$

$$x(y + 1) = y$$

$$x = \frac{y}{y + 1}$$

Тогда $\forall y \in B\ \exists x \in A:\ (x,\ y) \in f \Rightarrow f$ - сюръекция. Тогда по определению $f : A \to B$ - биекция.

в) Сопоставим каждому элементу $x \in [0,\ 1)$, элемент $y \in (0,\ 1)$, по правилу: $y = f(x)$, причем $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(x) = x$, если $x \neq \frac{1}{2^n},\ \forall n \in N \cup 0$ и $f(x) = \frac{x}{2}$ иначе. Докажем, что $f : [0, 1) \to (0, 1)$ - биекция.

Поймем, что все элементы отличные от 0 и чисел вида $\frac{1}{2^n}$ взаимно однозначно переходят в равные себе числа, т.е. этот переход инъективен и сюръективен и функционален, т.к. отображение множества переводящее элементы самих в себя - биекция. Заметим, что числам вида $\frac{1}{2^n}$ из $[0,\ 1)$ взаимно однозначно соответствуют числа $\frac{1}{2^{n+1}}$ из $(0,\ 1)$, а числу 0 взаимно однозначно соответствует $\frac{1}{2}$. Тогда каждому числу из $[0,\ 1)$ взаимно однозначно соответствует число из $(0,\ 1)$, т.е. f - биекция.

Задача 7. Докажем, что f - инъекция. Пусть $f(x') = x$ и $f(x'') = x$. Из условия следует, что $f \circ g \circ f(x') = id_A(x') = x'$. С другой стороны

$$x' = f \circ g \circ f(x') = (f \circ g)(f(x')) = f \circ g(x) = (f \circ g)(f(x'')) = f \circ g \circ f(x'') = x''$$

Т.е. $f(x') = x$ и $f(x'') = x \Leftrightarrow x' = x''$. Значит, f - инъекция. Докажем теперь, что f - сюръекция. Пусть $x' \in A$. В силу тотальности f и g: $f(x') = x''$, $g(x'') = x'''$. Но как мы знаем $f \circ g \circ f(x') = x'$ и в силу ассоциативности $f \circ g \circ f(x') = f \circ (g \circ f)(x') = f(x''')$. Тогда $f(x''') = x'$, т.е. $\forall x' \in A\ \exists\ x \in A :$ $f : x \mapsto x'$.

В итоге, f - функционально, тотально, инъективно и сюръективно, значит - биекция!

Задача 8. Нет, не верно. Построим пример иллюстрирующий, что g не всегда всюду определена. Определим функции как $f : \{0\} \to \{0\}$ и $g :$ $\{0,\ 1\} \to \{0\}$, причем $g = \{(0,\ 0)\}$. Тогда очевидно, что $\forall x \in \{0\}:\ g \circ f(x) =$ x. Т.е. $g \circ f = id_{\{0\}}$ Но g - не всюду определена, в частности не определено $g(1)$.