Домашнее задание 8

Ткачев Андрей, группа 166

8 декабря 2016 г.

Задача 1

Разложим 2007 на простые множители: $2007 = 223 \cdot 3 \cdot 3$. По условию задачи произведение чисел, образованных оценками выписанными подряд и разделенными знаками умножения равно 2007. Тогда в силу того, что обычно школьная оценка - число от 2 до 5 (колы не ставятся по условию) и что разложение на простые множители существует и единственно, Петя должен был выписать оценки «2, 2, 3» (обязательно строго подряд) и еще как-то оставшиеся две тройки. Тогда оценка в четверти у Пети выходит не очень хорошая, а именно (в допущении, что оценка за четверть - просто среднее арифметическое) 2.6.

Ответ: 2.6.

Задача 2

а)

Рассмотрим какие-нибудь последовательные числа $b_1, b_2, ...b_n$ ($b_i < b_j \Leftrightarrow i < j$).

Если $n|b_1$ - отлично произведение этих n чисел делится на n.

Иначе, пусть $b_1 \equiv r \mod n$. Тогда $b_2 \equiv r+1 \mod n$ и т.д. Т.е. $b_i \equiv r+i-1 \mod n$ $\forall i \leqslant n$. Рассмотрим тогда b_{n-r+1}, $n-r+1 \leqslant n$. $b_{n-r+1} \equiv r+(n-r+1)-1 = n \equiv 0 \mod n$. Т.е. в произведение n последовательных чисел $n-r+1$ множитель (нумерация в порядке возрастания), где r - ненулевой остаток первого из чисел (т.е. наименьшего из чисел), кратен $n \Rightarrow$ произведение $b_1 \cdot ... \cdot b_{n-r+1} \cdot ... \cdot b_n$ делится на n.

б)

Докажем, что $\forall n, k \in N$ число $\frac{\prod_{i=0}^{n-1} k+i}{n!} \in Z$. Для этого докажем тождество $\binom{k+n-1}{k-1} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k+i}{n!}$:

$$\binom{k+n-1}{k-1} = \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!n!} = \frac{k(k+1)\cdot ... \cdot(k+n-1)}{n!} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k+i}{n!}$$

Но число сочетаний $\binom{k+n-1}{k-1} \in Z \Rightarrow \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k+i}{n!} \in Z \Rightarrow n!| \prod_{i=0}^{n-1} k+i$, для всех $n, k \in N$, что и требовалось доказать.

Задача 3

Воспользуемся расширенным алгоритмом Евклида, чтобы решить уравнение $45x' - 37y' = 1$:

$$a_0 = 1 \cdot 45 + 0 \cdot 37$$

$$a_1 = 0 \cdot 45 + 1 \cdot 37$$

$$a_2 = 0 \cdot 45 + 1 \cdot 37 - (1 \cdot 45 + 0 \cdot 37) \cdot \lfloor\frac{45}{37}\rfloor = 1 \cdot 45 - 1 \cdot 37 = 8$$

$$a_3 = 1 \cdot 45 - 1 \cdot 37 - (0 \cdot 45 + 1 \cdot 37) \cdot \lfloor\frac{37}{8}\rfloor = -4 \cdot 45 + 5 \cdot 37 = 5$$

$$a_4 = -4 \cdot 45 + 5 \cdot 37 - (1 \cdot 45 - 1 \cdot 37) \cdot \lfloor\frac{8}{5}\rfloor = 5 \cdot 45 - 6 \cdot 37 = 3$$

$$a_5 = 5 \cdot 45 - 6 \cdot 37 - (-4 \cdot 45 + 5 \cdot 37) \cdot \lfloor\frac{5}{3}\rfloor = -9 \cdot 45 + 11 \cdot 37 = 2$$

$$a_6 = -9 \cdot 45 + 11 \cdot 37 - (5 \cdot 45 - 6 \cdot 37) \cdot \lfloor\frac{3}{2}\rfloor = 14 \cdot 45 - 17 \cdot 37 = 1$$

Получаем $x' = 14$, $y' = 17$. Покажем, что все остальные решения в целых числах имеют вид $x'' = 14+37k$, $y'' = 17+45k$, $k \in Z$. Пусть (x_0, y_0) и $(14, 17)$ - два различных решения уравнения $45x' - 37y' = 1$. Тогда:

$$45 \cdot 14 - 37 \cdot 17 = 1$$

$$45x_0 - 37y_0 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$45(14 - x_0) = 37(17 - y_0)$$

Пусть $x_0 = 14 + n$, $y_0 = 17 + m$.

$$45n = 37m$$

Т.к. $(45, 37) = 1$, то $37|n$ и $45|m$. Тогда $m = 45k$, т.к. по ОТА разбиение на простые множители существует и единственно, то $3 : 2 \cdot 5$ содержатся в множителях m.

$$45n = 37 \cdot 45k$$

$$n = 37k$$

От куда и получаем $x'' = 14 + 37k$, $y'' = 17 + 45k$. Тогда решения уравнения $45x - 37y = 25$: $(25(14 + 37k), 25(17 + 45k))$.

Ответ: $(25(14 + 37k), 25(17 + 45k))$, где $k \in Z$.

Задача 4

а)

$111...111 = \frac{10^{69}-1}{9}$. Решим уравнение:

$$111...111 = \frac{10^{69}-1}{9} \equiv x \mod 71$$

$$10^{69} - 1 \equiv 9x \mod 71$$

$$10^{70} - 10 \equiv 90x \mod 71$$

По малой т. Ферма $10^{70} \equiv 1 \mod 71$.

$$10^{70} - 10 \equiv 90x \mod 71$$

$$1 \equiv 90x + 10 \mod 71$$

$$-9 \equiv 90x \mod 71$$

$$62 \equiv 90x \mod 71$$

$$31 \equiv 45x \mod 71$$

Заметим, что $45^{-1} \equiv 30 \mod 71$ (убедится в этом можно воспользовавшись расш. алгоритмом Евклида).

$$a_0 = 1 \cdot 71 + 0 \cdot 45$$

$$a_1 = 0 \cdot 71 + 1 \cdot 45$$

$$a_2 = 0 \cdot 71 + 1 \cdot 45 - (1 \cdot 71 + 0 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{71}{45} \rfloor = 1 \cdot 71 - 1 \cdot 45 = 26$$

$$a_3 = 1 \cdot 71 - 1 \cdot 45 - (0 \cdot 71 + 1 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{45}{26} \rfloor = -1 \cdot 71 + 2 \cdot 45 = 19$$

$$a_4 = -1 \cdot 71 + 2 \cdot 45 - (1 \cdot 71 - 1 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{26}{19} \rfloor = 2 \cdot 71 - 3 \cdot 45 = 7$$

$$a_5 = 2 \cdot 71 - 3 \cdot 45 - (-1 \cdot 71 + 2 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{19}{7} \rfloor = -5 \cdot 71 + 8 \cdot 45 = 5$$

$$a_6 = -5 \cdot 71 + 8 \cdot 45 - (2 \cdot 71 - 3 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{7}{5} \rfloor = 7 \cdot 71 - 11 \cdot 45 = 2$$

$$a_7 = 7 \cdot 71 - 11 \cdot 45 - (-5 \cdot 71 + 8 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = -19 \cdot 71 + 30 \cdot 45 = 1$$

Тогда домножим сравнение $31 \equiv 45x \mod 71$ на 30.

$$930 \equiv 45 \cdot (45^{-1})x \mod 71$$

$$7 \equiv x \mod 71$$

Ответ: 7.

б)

Согласно китайской теореме об остатках существует такой x, что

$$\begin{cases} x \equiv 111...111 \mod 2 \\ x \equiv 111...111 \mod 5 \\ x \equiv 111...111 \mod 7 \end{cases}$$

Причем $x \equiv 111...111 \mod 2 \cdot 5 \cdot 7$.

Найдем тогда остатки 111...111 от деления на 2, 5, 7:

$$1...1 = 1...10 + 1 \equiv 1 \mod 2$$

$$1...1 = 1...1 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \equiv 1 \mod 5$$

Заметим, что число 11..11000 (66 единиц), кратно 111111, так как $11..11 = 111111 \cdot 10^{60} + ... + 111111 \cdot 10^6 + 111111$, где 11..11 - 66 единиц.

$$1...1 = 11...11000 + 111 = 111111 \cdot k + 111 = 7 \cdot 15873 \cdot a + 111 \equiv 111 \equiv 6 \mod 7$$

Тогда

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 6 \mod 7 \end{cases}$$

Поймем, что число 41 удовлетворяет сравнениям. Тогда $41 \equiv 111...111 \mod 2 \cdot 5 \cdot 7$

$$41 \equiv 111...111 \mod 70$$

Ответ: 41.

Задача 5

Посчитаем функцию Эйлера $\varphi(n)$. Пусть $n = p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_m^{k_m}$. Тогда

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \frac{(p-1)}{p}$$

Заметим, что $\varphi(n)|n!$: если поделить $n!$ на $\varphi(n)$ получим

$$\frac{n! \prod_{p|n} p}{\prod_{p|n}(p-1)}$$

Но т.к. $\forall p, p|n : p < n \Rightarrow 1 < p - 1 < n$. Но тогда каждое из чисел $p-1$ входит в разбиение $n!$ на множители по определению (т. е. на в разбиение $n! = 1 \cdot ... \cdot$), значит $n!$ делится на произведение $\prod_{p|n} p - 1 \Rightarrow \frac{n!}{\varphi(n)} = k \in N \Rightarrow \varphi(n)|n!$

Тогда, т.к. $(n, 4) = 1$ - по условию n нечетное положительное, то по теореме Эйлера:

$$4^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

Умножив это сравнение на себя $k = \frac{n!}{\varphi(n)} \in N$ раз получим:

$$(4^{\varphi(n)})^k \equiv 1 \mod n$$

$$4^{\varphi(n) \cdot k} \equiv 1 \mod n$$

$$4^{n!} \equiv 1 \mod n$$

$$\Updownarrow$$

$$n|(4^{n!} - 1)$$

Что и требовалось доказать.

Задача 6

Обозначим количество книг за n. Тогда из условия следует, что $7|n \Rightarrow n = 7k,\ k \in N$ (Т.к. n имеет не нулевые остатки при делении на 4, 6, 5, и 0-ой при делении на 7). Тогда $n = 7k$ является решением системы

$$\begin{cases} 7k \equiv 1 \mod 4 \\ 7k \equiv 1 \mod 5 \\ 7k \equiv 1 \mod 6 \end{cases}$$

т.к. при делении книг в группы по 4, 5, 6 остается одна лишняя. Зная, что

$$\begin{cases} 7 \equiv 3 \mod 4 \\ 7 \equiv 2 \mod 5 \\ 7 \equiv 1 \mod 6 \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} 3k \equiv 1 \mod 4 \\ 2k \equiv 1 \mod 5 \\ k \equiv 1 \mod 6 \end{cases}$$

Домножив сравнения на обратные для чисел $3, 2, 1$ по модулям $4, 5, 6$ соответственно, получим

$$\begin{cases} k \equiv 3 \mod 4 \\ k \equiv 3 \mod 5 \\ k \equiv 1 \mod 6 \end{cases}$$

Так как $(5, 4) = 1$ и $3 \equiv 3 \mod 5$, $3 \equiv 3 \mod 4$, то по Китайской теореме об остатках $k \equiv 3 \mod 5 \cdot 4$. Тогда:

$$\begin{cases} k \equiv 1 \mod 6 \\ k \equiv 3 \mod 20 \end{cases}$$

Поймем, что $k \neq 3$, $k \neq 23$, и что $k = 43$ является минимальным натуральным решением системы (43 - наименьшее после 3 и 23 число дающее в остатке 3 при делении на 20). Тогда минимальное $n = 7 \cdot 43 = 301$.

Ответ: 301.

Задача 7

Согласно китайской теореме об остатках для любых попарно взаимно-простых $a_1, a_2, ..., a_n$ и для любых $r_1, r_2, ..., r_n$ таких, что $0 \leqslant r_i < a_i$, существует единственный x, такой, что $0 \leqslant x < M = \prod_1^n a_i$ и x является решением системы:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \mod a_1 \\ x \equiv r_2 \mod a_2 \\ \vdots \\ x \equiv r_n \mod a_n \end{cases}$$

И любой $x' \equiv x \mod \prod_1^n a_i$ так же является решением этой системы. Причем каждому набору остатков соответствует один $0 \leqslant x < \prod_1^n a_i$.

В свете этого условие задачи можно сформулировать так: «Сколько существует x, таких что $0 \leqslant x \leqslant 2310000$ и для всех $a_i \in 2, 3, 5, 7, 11$ верно $x \equiv r_{ij} \mod a_i$, где $0 < r_{ij} < a_i$»

Т.е найти решения следующей системы по модулю 2310000

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \mod 2 \\ x \equiv r_2 \mod 3 \\ x \equiv r_3 \mod 5 \\ x \equiv r_4 \mod 7 \\ x \equiv r_5 \mod 11 \end{cases}$$

(x является решением системы $\iff x$ не делится на 2, 3, 5, 7, 11 и меньше 2310000, т.е. принадлежит множеству тех чисел которые нужно посчитать по оригинальному условию). Но поймем, что для любого набора $r_1, r_2, ..., r_5$ существует единственное решение по модулю $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ (т.к. все решения попарно сравнимы по этому модулю) и соответственно 1000 решений по модулю $2310 \cdot 1000$. Всего наборов остатков не равных 0: $(2-1)\cdot(3-1)\cdot(5-1)\cdot(7-1)\cdot(11-1) = 480$, тогда решений системы по модулю $2310 \cdot 1000$ ровно 480000.

Ответ: 480000.

Задача 8

Если число n взаимно-просто с 10, то по теореме Эйлера:

$$10^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

Поймем, что число $E_{\varphi(n)} = \frac{10^{\varphi(n)}-1}{9}$ - репьюнит, и что $9E_{\varphi(n)} \equiv 0 \mod n$. Рассмотрим репьюнит из $9\varphi(n)$ единиц.

$$E_{9\varphi(n)} = E_{\varphi(n)} \cdot 10^{8\varphi(n)} + ... + E_{\varphi(n)} \cdot 10^{\varphi(n)} + E_{\varphi(n)} =$$
$$= E_{\varphi(n)}(9E_{\varphi(8n)} + 1 + 9E_{\varphi(7n)} + 1 + ... + 9E_{\varphi(n)} + 1 + 1) =$$
$$= 9E_{\varphi(n)}(E_{\varphi(8n)} + E_{\varphi(7n)} + ... + E_{\varphi(n)} + 1)$$

Получается $E_{9\varphi(n)} = 9E_{\varphi(n)} \cdot k \equiv 0 \mod n$. Т.е. для любых n взаимно-простых с 10 существует хотя бы один репьюнит кратный n. Поймем, что их на самом деле бесконечно много: пусть $n|E_k$, тогда $n|E_k + 10^k \cdot E_k$, т.е. $n|E_{2k}$ по индукции $n|E_{2^m k} \forall m \in N$.

Ответ: Да, их будет бесконечно много.

Задача 9

Так как для любых $k > 1$ $(10^k, 7) = 1$ (7 не имеет общих простых множителей с $10^k = 2^k 5^k$), то по малой теореме Ферма:

$$7^{\varphi(10^k)} \equiv 1 \mod 10^k$$

Тогда в частности для $k = 4$:

$$7^{\varphi(10^4)} \equiv 1 \mod 10^4$$

Т.е. $7^{\varphi(10^4)} = 10^4 \cdot k + 1$, т.е. оканчивается на 0001. Для пущей уверенности посчитаем $\varphi(10^4) = \varphi(2^4)\varphi(5^4) = 2^3 \cdot (2-1)5^3 \cdot (5-1) = 4000$.

Ответ: Да существует, например 7^{4000}.