Задача 1

Представим пятизначное число $a_4..a_0$ в виде:

$$a_4 * 10^4 + a_3 * 10^3 + .. + a_0$$

Тогда сумма всех таких чисел с нечетными цифрами:

$$10^4 * (a_{40} + a_{41} + .. + a_{44}) * k + .. + 10^0 * (a_{00} + a_{01} + .. + a_{04}) * k$$

Где k - количество таких чисел, у которых в i разряде стоит цифра a_{ij}, j номер нечетной цифры.

Поймем, что $k = 5^4$. И правда, для каждой из 5 нечетных цифр разряда i существует 5^3 вариантов других цифр из прочих разрядов, т.к. числа пятизначные. Поймем, что $\sum_{k=0}^{4} a_{ik} = 1 + 3 + ..9 = 25$, где a_{ij} - нечетная цифра. Получим, что тогда сумма таких пятизначных:

$$5^4 * 25 * (10^4 + .. + 10^0) = 5^6 * 11111$$

Задача 2

a) Количество чисел от 1 до 10^6 в записи которых нет 1 равно 9^6. Заметим, что $9^6 = 531441 > 10^6 : 2$. $\Rightarrow$ Чисел без единицы больше половины среди первого миллиона, а значит их больше чем тех, в которых она есть.
b) Количество чисел от 1 до 10^7, в записи которых нет 1 равно 9^7.

$$9^7 = 47829669 < 5000000 = 10^7 : 2$$

Значит чисел без единицы в записи меньше.

Задача 3

Ω - "Все десятизначные числа."

$$|\Omega| = 10^{10} - 10^9 = 9 * 10^9$$

Пусть A = "В десятизначном числе есть хотя бы две одинаковые цифры." Тогда посчитаем $|\bar{A}|$. $|\bar{A}| = 9*9*8*...*1 = 9!$ (Первую цифру можно выбрать 9-ю способами, ибо начинаться с 0 десятизначное число не может, вторую 9-ю - т.к. тут ноль уже может стоять, третью 9-ю и т.д.). Т.к. $A + \bar{A} = \Omega$ (В десятизначном числе либо есть повторяющаяся цифра, либо ее нет):

$$|A| = |\Omega| - |\bar{A}|$$

Тогда:

$$P(A) = \frac{|\Omega| - |\bar{A}|}{|\Omega|} = \frac{10^9 - 9!}{10^9}$$

Задача 4

Возьмем человека и выберем ему пару. Сделать это можно $2 * n - 1$ способом (с собой быть в паре нельзя). Осталось 2n - 2 людей. Возьмем кого-нибудь и выберем ему пару $2n - 3$ способами. Будем продолжать пока не останутся два человека, которых 1-м способом разобьем на пару (Обязательно останутся 2-ое, т.к. людей $2n$, и каждый раз мы берем 2-х людей). Тогда по правилу произведения число разбиений на пары:

$$(2n-1)*(2n-3)*...*(2n-(2i+1))*...*(2n-(2n-1)) = (2n-1)*(2n-3)*...*1$$

Нечетность этого числа следует из нечетности всех его множителей.

Задача 5

Ω - "Все возможные колоды карт."

$$|\Omega| = 52!$$

Пусть $A =$ "В колоде все карты одной масти расположены в порядке старшинства."

Порядок старшинства для каждой масти задается однозначно $\Rightarrow$ количество исходов A определяется лишь числом вариантов взаимного расположения мастей в колоде.

$$|A| = \binom{52}{13} * \binom{39}{13} * \binom{26}{13} * \binom{13}{13}$$

(Число способов выбрать место масти в колоде определяется числом способов выбрать 13 свободных мест в колоде)
Таким образом:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{(13!)^4}$$

Задача 6

А) Ω - "Все наборы из 6 карт, взятых из колоды размером 32."

$$|\Omega| = \binom{32}{6}$$

Пусть $A =$ "В наборе есть хотя бы один туз."

Тогда посчитаем $|\bar{A}|$, как количество способов набрать 6 карт из колоды без тузов:

$$|\bar{A}| = \binom{32-4}{6} = \binom{28}{6}$$

Заметим, что $A + \bar{A} = \Omega$ (Наборы без тузов и наборы с тузами образуют все возможные наборы).Таким образом:

$$P(A) = \frac{|\Omega| - |\bar{A}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{32}{6} - \binom{28}{6}}{\binom{32}{6}}$$

В) Ω - "Все наборы из 6 карт."

$$|\Omega| = \binom{32}{6}$$

Пусть $A =$ "В наборе есть по карте каждой масти."Посчитаем количество исходов при котором в наборе из 6 есть:

- B - "3 карты одной масти, и все остальные - оставшихся мастей
- C - "По две карты каких-то двух мастей и по одной оставшихся

Заметим, что $A = B + C$ (Больше 4-х карт одной масти в наборах из A быть не может, иначе одной из мастей бы не было).

$|B| = \binom{4}{1} * \binom{13}{3} * 13^3$ (Выбрать какой масти будут 3 карты, и выбрать эти три карты, и выбрать по одной из оставшихся)

$$|C| = \binom{13}{2}^4 \text{ (Выбрать 2 карты каждой масти)}$$

Тогда:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1} * \binom{13}{3} * 13^3 + \binom{13}{2}^4}{\binom{32}{6}}$$

Задача 7

Заселить 4-х местную комнату можно $\binom{7}{4}$ способами. Для каждого из них существует $\binom{3}{2}$ способов заселить 2-х местную. Оставшуюся 1-о местную можно заполнить 1 способом. Итого, количество способов заселить квартиру:

$$\binom{7}{4} * \binom{3}{2}$$

Задача 8

Выберем команды, которые будут хозяевами поля (половина из всего числа команд). Сделать это можно $\binom{16}{8}$ способами. Затем для каждого хозяина выберем соперника из оставшихся команд. Сделать это можно $8 * 7 ... * 1 = 8!$ способами. Тогда количество вариантов расписания:

$$\binom{16}{8} * 8! = \frac{16!}{8!}$$

Задача 9

Пронумеруем книги, и рассмотрим какую-нибудь их расстановку (одну из 20!). Попробуем разбить эту расстановку на промежутки так, чтобы книги из одного промежутка оказались на одной полке, а самих промежутков было 5 . Для этого нужно расставить $5-1=4$ перегородку между книгами (Если пронумеровать перегородки от 0 до 4, то все, что стоит левее 0 перегородки, отправим на первую полку, все что между 0 и 1 - на вторую и т.д. Если между перегородками ничего нет, то это означает, что соответствующая полка пуста). Тогда представим, мы хотим как-то поставить 20 книг и 4 перегородки в пространстве (причем порядок перегородок, как и книг должен быть одним и тем же). Для этого разместим в 24-х ячейках 20 книг (выберем 20 ячеек и поставим в них книги в их порядке), а в оставшиеся поставим перегородки. Сделать это можно столькими способами:

$$\binom{20+4}{20} = \binom{24}{4}$$

Тогда, для каждой расстановки 20 книг существует $\binom{24}{4}$ вариантов расставить их по 5 полкам с сохранением порядка. Тогда, все число способов расставить книги:

$$20! * \binom{24}{4}$$