Домашнее задание 7

Ткачев Андрей, группа 166

6 ноября 2016 г.

Задача 1

Разложим 2007 на простые множители: $2007 = 223 \cdot 3 \cdot 3$. По условию задачи произведение чисел, образованных оценками выписанными подряд и разделенными знаками умножения равно 2007. Тогда в силу того, что обычно школьная оценка - число от 2 до 5 (колы не ставятся по условию) и что разложение на простые множители существует и единственно, Петя должен был выписать оценки «2, 2, 3» (обязательно строго подряд) и еще как-то оставшиеся две тройки. Тогда оценка в четверти у Пети выходит не очень хорошая, а именно (в допущении, что оценка за четверть просто среднее арифметическое) 2.6.

Ответ: 2.6.

Задача 2

а)

Рассмотрим какие-нибудь последовательных чисел $b_0, b_1, ...b_n$.

Если $n|b_0$ - отлично произведение делится на n.

Иначе, пусть $b_0 \equiv r \mod n$. Тогда $b_1 \equiv r + 1 \mod n$ и т.д. Т.е. $b_i \equiv r + i \mod n$ $\forall i < n$. Рассмотрим тогда b_{n-r}, $n - r < n$. $b_{n-r} \equiv r + n - r = n \equiv 0 \mod n$. Т.е. в произведение n последовательных чисел $n - r$ множитель (нумерация в порядке возрастания), где r - ненулевой остаток первого из чисел, кратен $n \Rightarrow$ произведение делится на n.

Задача 3

Воспользуемся расширенным алгоритмом Евклида, чтобы решить уравнение $45x' - 37y' = 1$:

$$a_0 = 1 \cdot 45 + 0 \cdot 37$$

$$a_1 = 0 \cdot 45 + 1 \cdot 37$$

$$a_2 = 0 \cdot 45 + 1 \cdot 37 - (1 \cdot 45 + 0 \cdot 37) \cdot \lfloor \frac{45}{37} \rfloor = 1 \cdot 45 - 1 \cdot 37 = 8$$

$$a_3 = 1 \cdot 45 - 1 \cdot 37 - (0 \cdot 45 + 1 \cdot 37) \cdot \lfloor \frac{37}{8} \rfloor = -4 \cdot 45 + 5 \cdot 37 = 5$$

$$a_4 = -4 \cdot 45 + 5 \cdot 37 - (1 \cdot 45 - 1 \cdot 37) \cdot \lfloor \frac{8}{5} \rfloor = 5 \cdot 45 - 6 \cdot 37 = 3$$

$$a_5 = 5 \cdot 45 - 6 \cdot 37 - (-4 \cdot 45 + 5 \cdot 37) \cdot \lfloor \frac{5}{3} \rfloor = -9 \cdot 45 + 11 \cdot 37 = 2$$

$$a_6 = -9 \cdot 45 + 11 \cdot 37 - (5 \cdot 45 - 6 \cdot 37) \cdot \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 14 \cdot 45 - 17 \cdot 37 = 1$$

Получаем $x' = 14$, $y' = 17$. Покажем, что все остальные решения в целых числах имеют вид $x'' = 14+37k$, $y'' = 17+45k$, $k \in Z$. Пусть (x_0, y_0) и $(14, 17)$ - два различных решения уравнения $45x' - 37y' = 1$. Тогда:

$$45 \cdot 14 - 37 \cdot 17 = 1$$

$$45x_0 - 37y_0 = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$45(14 - x_0) = 37(17 - y_0)$$

Пусть $x_0 = 14 + n$, $y_0 = 17 + m$.

$$45n = 37m$$

Т.к. $(45, 37) = 1$, то $37|n$ и $45|m$. Тогда $m = 45k$, т.к. по ОТА разбиение на простые множители существует и единственно, то $3 : 2 \cdot 5$ содержатся в множителях m.

$$45n = 37 \cdot 45k$$

$$n = 37k$$

От куда и получаем $x'' = 14 + 37k$, $y'' = 17 + 45k$. Тогда решения уравнения $45x - 37y = 25$: $(25(14 + 37k), 25(17 + 45k))$.

Ответ: $(25(14 + 37k), 25(17 + 45k))$, где $k \in Z$.

Задача 4

а)

$111...111 = \frac{10^{69}-1}{9}$. Решим уравнение:

$$111...111 = \frac{10^{69}-1}{9} \equiv x \mod 71$$

$$10^{69} - 1 \equiv 9x \mod 71$$

$$10^{70} - 10 \equiv 90x \mod 71$$

По малой т. Ферма $10^{70} \equiv 1 \mod 71$.

$$10^{70} - 10 \equiv 90x \mod 71$$

$$1 \equiv 90x + 10 \mod 71$$

$$-9 \equiv 90x \mod 71$$

$$62 \equiv 90x \mod 71$$

$$31 \equiv 45x \mod 71$$

Заметим, что $45^{-1} \equiv 30 \mod 71$ (убедится в этом можно воспользовавшись расш. алгоритмом Евклида).

$$a_0 = 1 \cdot 71 + 0 \cdot 45$$

$$a_1 = 0 \cdot 71 + 1 \cdot 45$$

$$a_2 = 0 \cdot 71 + 1 \cdot 45 - (1 \cdot 71 + 0 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{71}{45} \rfloor = 1 \cdot 71 - 1 \cdot 45 = 26$$

$$a_3 = 1 \cdot 71 - 1 \cdot 45 - (0 \cdot 71 + 1 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{45}{26} \rfloor = -1 \cdot 71 + 2 \cdot 45 = 19$$

$$a_4 = -1 \cdot 71 + 2 \cdot 45 - (1 \cdot 71 - 1 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{26}{19} \rfloor = 2 \cdot 71 - 3 \cdot 45 = 7$$

$$a_5 = 2 \cdot 71 - 3 \cdot 45 - (-1 \cdot 71 + 2 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{19}{7} \rfloor = -5 \cdot 71 + 8 \cdot 45 = 5$$

$$a_6 = -5 \cdot 71 + 8 \cdot 45 - (2 \cdot 71 - 3 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{7}{5} \rfloor = 7 \cdot 71 - 11 \cdot 45 = 2$$

$$a_7 = 7 \cdot 71 - 11 \cdot 45 - (-5 \cdot 71 + 8 \cdot 45) \cdot \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = -19 \cdot 71 + 30 \cdot 45 = 1$$

Тогда домножим $31 \equiv 45x \mod 71$ на 30.

$$930 \equiv 45 \cdot (45^{-1})x \mod 71$$

$$7 \equiv x \mod 71$$

Ответ: 7.

б)

Согласно китайской теореме об остатках существует такой x, что

$$\begin{cases} x \equiv 111...111 \mod 2 \\ x \equiv 111...111 \mod 5 \\ x \equiv 111...111 \mod 7 \end{cases}$$

Причем $x \equiv 111...111 \mod 2 \cdot 5 \cdot 7$.

Найдем тогда остатки 111...111 от деления на 2, 5, 7:

$$1...1 = 1...10 + 1 \equiv 1 \mod 2$$

$$1...1 = 1...1 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \equiv 1 \mod 5$$

$$1...1 = 111111 \cdot k + 111 = 7 \cdot 15873 \cdot a + 111 \equiv 111 \equiv 6 \mod 7$$

Тогда

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 6 \mod 7 \end{cases}$$

Поймем, что число 41 удовлетворяет сравнениям. Тогда $41 \equiv 111...111 \mod 2 \cdot 5 \cdot 7$

$$41 \equiv 111...111 \mod 70$$

Ответ: 41.

Задача 5

Посчитаем функцию Эйлера $\varphi(n)$. Пусть $n = p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_m^{k_m}$. Тогда

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \frac{(p-1)}{p}$$

Заметим, что $\varphi(n)|n!$: если поделить $n!$ на $\varphi(n)$ получим

$$\frac{n! \prod_{p|n} p}{\prod_{p|n}(p-1)}$$

Но т.к. $\forall p, p|n : p < n \Rightarrow 1 < p - 1 < n$. Но тогда $\forall p, p|n : (p-1)|n! \Rightarrow \frac{n!}{\varphi(n)} = k \in N \Rightarrow \varphi(n)|n!$

Тогда, т.к. $(n, 4) = 1$ - по условию n нечетное положительное, то по теореме Эйлера:

$$4^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

Умножив это сравнение на себя $\frac{n!}{\varphi(n)} = k \in N$ раз получим:

$$(4^{\varphi(n)})^k \equiv 1 \mod n$$

$$4^{n!} \equiv 1 \mod n$$

$$\Updownarrow$$

$$n|(4^{n!} - 1)$$

Что и требовалось доказать.

Задача 7

Согласно китайской теореме об остатках для любых попарно взаимно-простых $a_1, a_2, ..., a_n$ и для любых $r_1, r_2, ..., r_n$ таких, что $0 \leqslant r_i < a_i$, существует единственный x, такой, что $0 \leqslant x < M = \prod_1^n a_i$ и x является решением системы:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \mod a_1 \\ x \equiv r_2 \mod a_2 \\ \vdots \\ x \equiv r_n \mod a_n \end{cases}$$

И любой $x' \equiv x \mod \prod_1^n a_i$ так же является решением этой системы. Причем каждому набору остатков соответствует один $0 \leqslant x < \prod_1^n$.

В свете этого условие задачи можно сформулировать так: « Сколько существует x, таких что $0 \leqslant x \leqslant 2310000$ и для всех $a_i \in 2, 3, 5, 7, 11$ верно $x \equiv r_{ij} \mod a_i$, где $0 < r_{ij} < a_i$»

Т.е найти решения системы по модулю 2310000

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \mod 2 \\ x \equiv r_2 \mod 3 \\ x \equiv r_3 \mod 5 \\ x \equiv r_4 \mod 7 \\ x \equiv r_5 \mod 11 \end{cases}$$

(x является решением системы $\Longleftrightarrow$ x не делится на 2, 3, 5, 7, 11 и меньше 2310000, т.е. является принадлежит множеству тех чисел которые нужно посчитать по оригинальному условию). Но поймем, что для любого набора $r_1, r_2, ..., r_5$ существует единственное решение по модулю $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ и соответственно 1000 решений по модулю $2310 \cdot 1000$. Всего наборов остатков не равных 0: $(2-1) \cdot (3-1) \cdot (5-1) \cdot (7-1) \cdot (11-1) = 480$, тогда решений системы по модулю $2310 \cdot 1000$ ровно 480000.

Ответ: 480000.

Задача 8

Если число n взаимно-просто с 10, то по теореме Эйлера:

$$10^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

Поймем, что число $E_{\varphi(n)} = \frac{10^{\varphi(n)}-1}{9}$ - репьюнит, и что $9E_{\varphi(n)} \equiv 0 \mod n$. Рассмотрим репьюнит из $9\varphi(n)$ единиц.

$$\begin{gathered}E_{9\varphi(n)} = E_{\varphi(n)} \cdot 10^{8\varphi(n)} + ... + E_{\varphi(n)} \cdot 10^{\varphi(n)} + E_{\varphi(n)} = \\ = E_{\varphi(n)}(9E_{\varphi(8n)} + 1 + 9E_{\varphi(7n)} + 1 + ... + 9E_{\varphi(n)} + 1 + 1) = \\ = 9E_{\varphi(n)}(E_{\varphi(8n)} + E_{\varphi(7n)} + ... + E_{\varphi(n)} + 1)\end{gathered}$$

Получается $E_{9\varphi(n)} = 9E_{\varphi(n)} \cdot k \equiv 0 \mod n$. Т.е. для любых n взаимно-простых с 10 существует хотя бы репьюнит кратный n. Поймем, что их на самом деле бесконечно много: пусть $n|E_k$, тогда $n|E_k + 10^k \cdot E_k$, т.е. $n|E_{2k}$ по индукции $n|E_{2^m k} \forall m \in N$.

Ответ: Да, их будет бесконечно много.