Домашнее задание 14

Ткачев Андрей, группа 166

12 января 2017 г.

Задача 1. Выигрыш - это случайная величина. Если суммарная стоимость N билетов $100N$ штук, то сумма выигрыша $40N$, тогда средний выигрыш - $\frac{40N}{N} = 40$. Тогда если f - выигрыш, то $E[f] = 40$.

По неравенству Маркова $Pr[f \geq 5000] \leq \frac{E[f]}{5000} = \frac{40}{5000} = 0.008 < 0.01$. Т.е. вероятность выиграть 5000 меньше 1%.

Задача 2. Продолжительность жизни f - случайная величина, $E[f] = 26$. Из условия $Pr[f \leq 8] = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ровно половина людей прожила строго больше 8 лет. Число людей, живших в указанном году N. Рассмотрим два крайних случая:

1. Ровно половина людей жила ровно 8 лет, а остальные - больше 8 лет.
2. Ровно половина людей жила ровно 0 лет, а остальные - больше 8 лет.

В первом случая средняя продолжительность жизни тех, кто прожил не меньше 8 лет (≥ 8) есть $E[f]$, т.е. 26 лет.

Во втором случае пусть x - средняя продолжительность жизни тех, кто прожил не меньше (а значит в данном случае больше) 8-ми лет. Тогда $\frac{N}{2} \cdot 0 + \frac{N}{2} \cdot x = E[f] \cdot N$ (суммарный возраст всех людей $N \cdot E[f]$, из них половина имеет средний возраст 0, а вторая $x > 8$), откуда $x = 52$.

Таким образом средняя продолжительность жизни людей, проживших не меньше 8 лет может принимать одно из значений от 26 до 52 включительно.

Примечание. Покажем, как получить любой из средних возростов людей, проживших $\geq$ 8-ми лет, на указанном промежутке.

Пусть N - число человек всего. Пусть x прожило ровно 8 лет и $\frac{N}{2} - x$ прожило 0 лет, причем $x \leq \frac{N}{2}$. Пусть также средний возраст людей, проживших больше 8 лет равен a. Тогда

$$\frac{0 \cdot (\frac{N}{2} - x) + 8 \cdot x + a \cdot \frac{N}{2}}{N} = 26$$

$$a = 52 - \frac{16x}{N}$$

Допустим мы хотим получить средний возраст V. Для V должно выполняться условие

$$\frac{8x + a\frac{N}{2}}{x + \frac{N}{2}} = V$$

$$\frac{8x + (52 - \frac{16x}{N})\frac{16x}{N}\frac{N}{2}}{x + \frac{N}{2}} = V$$

$$\frac{8x + 26N - 8x}{x + \frac{N}{2}} = V$$

$$\frac{26N}{x + \frac{N}{2}} = V$$

Но $\frac{N}{2} \leq x + \frac{N}{2} \leq N$, а значит $26 \leq V \leq 52$. Теперь покажем, что такие N, x и a существуют для всех V из указанного промежутка. Положим $N = 2V$. Тогда решая линенейное уравнение относительно x получим:

$$x = 52 - V$$

Но так как $V \geq \frac{52}{2}$, то $x \leq \frac{52}{2} \leq \frac{2V}{2}$.

$$a = 52 - \frac{16(52 - V)}{2V} = 52 - \frac{8 \cdot 52}{V} + 8 = 60 - \frac{416}{V} =$$
$$= \frac{60V - 416}{V}$$

Чтобы получить такое a пусть $V-1$ человек имееют возраст $\lfloor 60 - \frac{416}{V} \rfloor - 1$, а оставшийся человек - возраст $\lfloor 60 - \frac{416}{V} \rfloor + 1$. В силу ограничений на V: $\lfloor 60 - \frac{416}{V} \rfloor - 1 \geq 43$. Таким образом люди, которые старше 8 лет могут иметь необходимый средний возраст.

Задача 3.

Кубик честный. Броски первого игрока будем обозначать парой чисел $(x,\ y)$, $1 \leq x,\ y \leq 6$. Каждая из пар $(x,\ y)$ выпадает с вероятностью $\frac{1}{36}$. Тогда ожидание выигрыша f_1 первого игрока

$$E[f_1] = \frac{1}{36}\sum_{x=1}^{6}\sum_{y=1}^{6} xy = \frac{1}{36}\sum_{x=1}^{6} x \sum_{y=1}^{6} y = \frac{21^2}{36} = 12.25.$$

Средний же выигрыш второго игрока - это среднее арифметическое значение суммы квадратов первых 6 натуральных числел: $E[f_2] = \frac{1^2+2^2+\ldots+6^2}{6} = \frac{91}{6} = 15\frac{1}{6}$.

Таким образом средний выигрыш второго игрока больше.

Кубик нечестный. Пусть вероятности выпадения граней $p_1, p_2, \dots p_6$. Тогда по анологии с прошлым пунктом ожидание выиграша первого игрока

$$E[f_1] = \sum_{x=1}^{6}\sum_{y=1}^{6}(x \cdot p_x) \cdot (y \cdot p_y) = \sum_{x=1}^{6}(x \cdot p_x) \cdot \sum_{y=1}^{6}(y \cdot p_y) = (\sum_{x=1}^{6} xp_x)^2$$

Ожидание же выигрыша второго игрока:

$$E[f_2] = \sum_{x=1}^{6} x^2 p_x.$$

Рассмотрим случайную величину f_3 принимающую целые значения от 1 до 6 с вероятностями $p_1, \dots, p_6$. $E[f_3] = \sum_{x=1}^{6} xp_x$. Тогда дисперсия f_3:

$$D[f_3] = E[f_3^2] - (E[f_3])^2 = \sum_{x=1}^{6} x^2 p_x - (\sum_{x=1}^{6} xp_x)^2 = E[f_2] - E[f_1]$$

Но дисперсия - вличина не отрицательная $\Rightarrow E[f_1] - E[f_2] \geq 0$. Таким образом

$$E[f_1] \leq E[f_2]$$

Значит в общем случае выигрыш первого игрока в среднем не больше выигрыша второго.

Задача 4. Пусть f - случайная величина равная числу вхождения подслова ab в данное слово. Через g_i обозначим случайную величину, принимающую значение 1, если символы i и $i+1$ образуют слово ab (порядок важен) и 0, в противном случае.

Тогда $f = \sum_{i=1}^{20-1} g_i$. В силу линейностити математического ожидания $E[f] = E[\sum_{i=1}^{20-1} g_i] = \sum_{i=1}^{20-1} E[g_i]$.

Посчитаем ожидание случайной величины g_i. Несложно видеть, что вероятность события A «символы i и $i+1$ образуют слово ab» в вероятностном пространстве слов $\{a,\ b\}^{20}$:

$$Pr[A] = \frac{2^{20-2}}{2^{20}} = \frac{1}{4}$$

Таким образом $E[g_i] = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{4}$. Получаем $E[f] = \sum_{i=1}^{20-1} \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$.
Ответ: $\frac{19}{4}$.

Задача 5. Пусть f - случайная величина, показывающая число различных завтраков в трехнедельном рационе проректора. Введем случайную величину g_i принимающую значение 1, если завтрак i был съеден за все время проректором и 0 - в противном случае.

Посчитаем $E[g_i]$. В вероятностном просранстве всех возможных комбинаций завтраков, коих 10^{15}, найдем вероятность события A «i завтрак будет входить в один из 15 съеденных нашим трудягой» через событие-дополнение. $Pr[A] = 1 - Pr[\overline{A}] = 1 - \frac{9^{15}}{10^{15}} = \frac{10^{15}-9^{15}}{10^{15}}$ (всего затраков в которые не входит какой-то i-ый - 9^{15}).

Заметим, что $f = \sum_{i=1}^{10} g_i$. Тогда всилу линейности мат. ожидания:

$$E[f] = E[\sum_{i=1}^{10} g_i] = \sum_{i=1}^{10} E[g_i] = 10 - \frac{9^{15}}{10^{14}} \approx 7.941$$

Т.е. проректор в среднем попробует около 8 различных завтраков.

Ответ: $10 - \frac{9^{15}}{10^{14}}$.

Задача 6. Введем случайную величину g_{ij} принимающую значение 1, если в π пара i и j образует инверсию и 0 - в противном случае.

$E[g_{ij}] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$, т.к. перестановок, в которых $(i,\ j)$ образует инверсию ровно столько же, сколько и тех, в которых они инверсию не образуют (можно установить биективное отношение).

Но $I(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} g_{ij}$. Тогда $E[I(\pi)] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[g_{ij}] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$.

Ответ: $\frac{n(n-1)}{4}$.

Задача 7. X - не отрицательная величина, значит $X \geq 6 \Leftrightarrow 2^X \geq 2^6$. Тогда $Pr[X \geq 6] = Pr[2^X \geq 64]$. Применим неравенство Маркова:

$$Pr[2^X \geq 64] \leq \frac{E[2^X]}{64} = \frac{5}{64} \approx 0.07 < \frac{1}{10}$$

Что и требовалось доказать.

Задача 8. Пусть g_i случайная величина, равная среднему числу жвачек, которых нужно купить, чтобы попался вкладыш, отличный от уже $i-1$ имеющихся. В часности $g_1 = 1$.

Посчитаем g_k, $1 \leq k \leq n$. Вероятность того, что очередной вкладыш отличен от $k-1$ имеющихся - $p_k = \frac{n-(k-1)}{n}$, так как все вкладыши равновероятны, а нас устраивают ровно $n-(k-1)$ вкладышей. Среднее число покупок жвачек, чтобы попаласась жвачка вероятность которой p_k: $\frac{1}{p_k}$ (Пусть среднее число необходимых закупок n. Тогда f - число жвачек с нужными вкладышами $f = \sum_{i=1}^{n} g_i$, где $g_i = 1$, если i жвачка с нужным вкладышем. Тогда $E[f] = \sum_{i=1}^{n} E[g_i] = n \cdot (1 \cdot p_k + 0 \cdot (1-p_k))$. Но раз n - среднее число закупок, при которых требуемая живачка только одна, то понятно, что за

n покупок мы в среднем получим ровно одну жвачку, т.е. $E[f] = 1$. Отсюда $n = \frac{1}{p_k}$). Т.е. $E[g_k] = \frac{n}{n-k+1}$.

Если f - случайная величина, равная среднему числу жвачек, которые нужно купить, чтобы собрать полную коллекцию, то $f = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Тогда в силу линейности мат. ожидания:

$$E[f] = \sum_{i=1}^{n} E[g_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1}.$$

Ответ: $\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1}$.

Задача 9. Пусть множество вершин - V, $|V| = n$. Будем случайно формировать независимое множество V_d. Для начала возьмем в V_d с вероятностью $\frac{1}{d}$ вершины из V (для любой вершины из V мы независимо от других говорим, что она войдет в V_d с вероятностью $\frac{1}{d}$).

Пусть X - число вершин в V_d. Тогда

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d} \cdot 1 + (1 - \frac{1}{d}) \cdot 0 = \frac{n}{d}.$$

Пусть Y - число тех ребер, обе вершины которых лежат в V_d. Y - случайная величина, которая разбивается на $\frac{nd}{2}$ простых g_i, таких что, $g_i = 1$, если обе вершины ребра в множестве и 0 - иначе. Вероятность того, что обе вершины ребра лежат в V_d равна $\frac{1}{d} \cdot \frac{1}{d}$. Так как всего ребер $\frac{nd}{2}$, то

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{\frac{nd}{2}} 1 \cdot (\frac{1}{d})^2 + 0 \cdot (1 - (\frac{1}{d})^2) = \frac{n}{2d}.$$

Теперь для каждого из таких ребер удалим ровно одну какую-то вершину из V_d. Таким образом мы получим множество вершин, никакие две из которых не соединены ребром. Размер итогового множества V_d равен $X - Y$ (на каждое ребро приходится одна удаленная вершина). Но тогда

$$E[X - Y] = E[X] - E[Y] = \frac{n}{d} - \frac{n}{2d} = \frac{n}{2d}.$$

Но так как среднее не больше максимума, то существует такое множество V_p основанное на V, в котором не меньше $\frac{n}{2d}$ вершин и которое по построению (мы искоренили все ребра между вершинами в V_p) независимое.