Домашнее задание 10

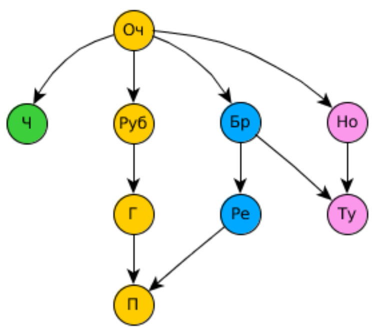
Ткачев Андрей, группа 166

24 ноября 2016 г.

Задача 1

(a)

Построим граф частичного порядка P:



Тогда отношение линейного порядка получается из P таким расположением вершин в линию, что ни из какой вершины нет дуги вверх (т.е. граф ациклический). Пример такого линейного порядка:

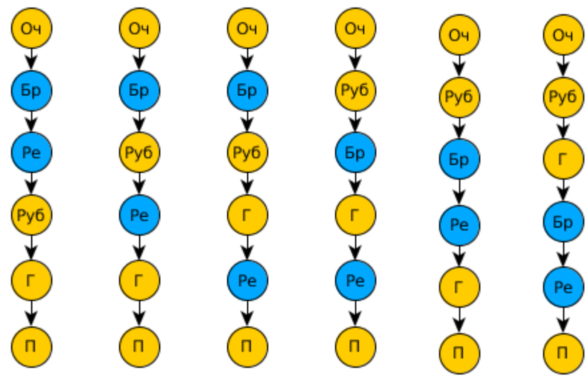
(На иллюстрации, во избежание перегруженности, опустим дуги, которые обеспечивают транзитивность. Здесь и далее будем подразумевать наличие дуг от выше стоящих ко всем ниже стоящим вершинам)

(б)

Количество линейных порядков, содержащих данный частичный P можно посчитать, узнав число способов соединить «ветви» графа порядка P (разные цвета на иллюстрации) в линию, так, чтобы в ней относительный порядок элементов из одной ветви был сохранен.

Поймем тогда, что в любом линейном порядке содержащем P, элемент «Очки» - максимальный, а «Часы» могут располагаться в линии как угодно, но ниже «Очков». Т.е. если мы посчитаем число способов x упорядочить все предметы, кроме часов, то число способов упорядочить те же предметы, но уже с часами - $8x$. Тогда забудем до поры про часы.

Рассмотрим все возможные относительные расположения синих и оранжевых предметов в линейном порядке содержащем P. Их всего $\binom{4}{2} = 6$ - по числу способов расположить между очками и пиджаком 2 упорядоченные пары:



Для получения линейного порядка в каждое из данных расположений нужно вставить предметы «Носки» и «Туфли». Причем «Туфли» идут обязательно ниже «Брюки».

Посчитаем количество способов вставит носки и туфли, для каждого из расположений на третьей иллюстрации:

- Первое расположение. Если «Носки» идут после брюк, то число способов разместить носки с туфлями, как следует из задачи Муавра (носки и туфли можно воспринимать как перегородки), можно $\binom{4+2}{2} = 15$ способами. Если «Носки» идут перед брюками (ровно один вариант такого размещения), то число способов разместить носки с туфлями равно числу способов разместить туфли после Брюк, т.е. 5. Всего вариантов $15 + 5 = 20$.

- Второе расположение. Аналогично первому, т.к. все зависит только от брюк, которые не меняют своего положения. Всего вариантов 20.

- Третье расположение. Аналогично первым двум: 20 вариантов.

- Четвертое и пятое расположение. Рассмотрим случаи, когда носки с туфлями ниже брюк и когда носки выше, а туфли ниже брюк. В первом случае, число способов вставить в порядок носки и туфли по Муавра можно $\binom{3+2}{2} = 10$ способами. Во втором случае по правилу произведения разместить носки и туфли можно $2 \cdot 4 = 8$ способами (2 способа надеть носки и 4 - туфли). Всего - 18 вариантов.

- Шестое расположение. Разместить носки и туфли ниже брюк можно $\binom{2+2}{2} = 6$ способами. Разместить носки, а туфли ниже брюк можно $3 \cdot 3 = 9$ способами. Итого 15 вариантов.

Суммируем и получаем $20 \cdot 3 + 18 \cdot 2 + 15 = 111$ линейных порядков не содержащих элемент «Часы». Добавляем часы в каждый из 93-х порядков одним из 8-ми способов и получаем $111 \cdot 8 = 888$ линейных порядков, содержащих отношение порядка P.

Ответ: а) см. иллюстрацию 2; б)888 линейных порядка.

Задача 2

Докажем для начала, что ациклическое связное отношение P является отношением строгого частичного порядка. Для этого проверим антирефлексивность, антисимметричность и транзитивность отношения P.

Антирефлексивность

По условию P - ациклично, т.е. не существует k таких, что если $a_1, \ ...a_k \in A$, то $a_1Pa_2P \ ...Pa_kPa_1$. Значит ни для каких i неверно, что a_iPa_i, если $a_i \in A$. Значит P - антирефлексивно.

Антисимметричность

Если $\exists a_x, \ a_y \in A, \ a_x \neq a_y$: a_xPa_y и a_yPa_x, то P не ациклично $\Rightarrow$ таких $a_x, \ a_y$ нет в A. Значит P - антисимметрично.

Транзитивность

Рассмотрим любые попарно неравные $a, \ b, \ c \in A$. Так P - связное отношение, то $a, \ b, \ c$ как-то попарно соединены, причем по принципу Дирихле есть элемент который входит в отношение P слева и справа. Для определенности, пусть aPb и bPc. Но тогда, в силу ацикличности, неверно, что cPa. Но тогда в силу связности aPc. Значит $\forall a, \ b, \ c \in A \ aPb, \ bPc \Leftrightarrow aPc$. А так как в силу антирефлексивности и антисимметричности $aPb, \ bPc$ возможно только если $a, \ b, \ c$ попарно не равны, то P - транзитивно.

Но тогда P - связное отношение строго частичного порядка $\Rightarrow$ по определению P - строгий линейный порядок.

Задача 3

(a)

Поможем волшебнику. Пронумеруем города от 1 до n. Введем отношение R на множестве городов A, и зададим направление движение на дороге между двумя городами $a, \ b \in A$ из a в b, если aRb. Обозначим за $n(c), \ c \in A$ номер города c. Тогда примем $aRb \Leftrightarrow n(a) < n(b)$. Поймем, что в силу того, что номера всех городов различны и мы можем однозначно сравнить номера любых двух городов, R - антирефлексивное, антисимметричное, транзитивное связное отношение, т.е. строгий линейный порядок. Строгий линейный порядок - отношение ациклическое, значит для любого города $c_0 \in A$ не существует $c_1, \ ...c_k \in A$, таких что $c_0Rc_1Rc_2 \ ...Rc_kRc_0$. Значит нет такого не пустого маршрута, по которому можно из любого города попасть в него же. Т.е. если выехать из города, то вернуться в него уже нельзя.

(б)

Рассмотрим граф дорог между городами. Он представляет собой ацикличный турнир, т.е., как следует из задачи 2, задает отношение строго линейного порядка R на множестве городов A. Но в любом ацикличном отношении по лемме о существовании максимального(минимального) элемента, существует максимальный(минимальный) элемент u, т.е. такой, что $\forall c \neq u \in A: \ uRc \ (cRu)$. Это означает, что существует город, из которого дороги только выходят(в который дороги только входят), а значит в силу того, что любые два города попарно соединены, есть город из которого можно приехать в любой другой и город, из которого нельзя уехать.

(в)

Докажем для начала, что такой путь вообще существует.

Как мы помним, такая ориентированная система дорог однозначно задает строгий линейный порядок R на множестве A. По лемме о существовании максимального элемента, в множестве A', на котором задан строгий линейный порядок, найдется элемент u, такой что $\forall a \neq u \in A' : uRa$. Тогда из множества городов A возьмем тот самый город, из которого достижимы все остальные по пути длины 1, и исключим его и все дороги из него исходящие из системы коммуникаций Вестероса. Поймем, что оставшиеся дороги и города по-прежнему задают связное ацикличное отношение, т.е. линейный порядок, а значит мы можем повторить только что проделанное но уже с подмножеством $A' \subseteq A$. Будем повторять указанные действия по индукции. В силу конечности A, мы достигнем ситуации, когда останется один город без дорог, который мы так же удалим. Тогда выпишем все города в порядке удаления из A:

$$c_1, \ c_2, \ ...c_n$$

Поймем, что $\forall 1 \leq i \leq n$: есть дорога из c_i в c_{i+1}, т.к. на i операции удаления c_i был максимальным элементом и имел прямую дугу ко всем городам в оставшемся множестве. Т.е. существует путь проходящий по всем городам.

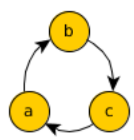
Докажем его единственность. Пусть существует путь $b_1, \ b_2, \ ...b_n$. В силу транзитивности отношения R, b_1 соединен со всеми городами $b2, \ ...b_n$, но тогда b_1 совпадает с c_1 (в силу единственности максимального элемента). По индукции b_i совпадает с c_i (т.е. база: $i = 1$; предположение: $b_1, \ ...b_k$ совпадают с $b_1, \ ...b_k$; переход: рассмотрим оставшиеся города $b_{k+1}, \ ...b_n$, в силу предположения это множество совпадет с тем, что было получено после k-ого удаления максимального элемента при построении пути, а в силу транзитивности и единственности максимума b_{k+1} совпадает с c_{k+1}). Т.е. любой путь, проходящий по всем городам совпадает с приведенным.

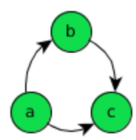
(г)

Количество способов ввести отношение строгого линейного порядка на множестве из n элементов равно $n!$ (т.е. n способами выбрать максимум, затем $n-1$ способом выбрать второй после максимума и т.д.).

Задача 4

Поймем, что если P - турнир, то xPy только если $x \neq y$ и $y\bar{P}x$. Тогда рассмотрим три попрано различные альтернативы a, b, c. В силу того, то они попарно различны, любые две из трех альтернатив входят в отношение P. Тогда возможны всего два не изоморфных варианта попарных отношений $a,\ b,\ c$:





Тогда, либо существуют три такие альтернативы $a,\ b,\ c$: $aPb\ bPc\ cPa$, либо для любых наборов $a,\ b,\ c$ можно без вреда общности сказать, что $aPb,\ bPc \Leftrightarrow aPc$. А так как P - связно и две альтернативы связаны отношением P, только если они различны, то второй вариант означает, что P - транзитивно. Но тогда P - связное отношение строго частичного порядка, т.е. P - строгий линейный порядок.

Задача 5

Пусть P - отношение порядка на множестве из n элементов, в котором есть только одна пара несравнимых элементов.

Поймем, что два элемента $x,\ y$ $(x \neq y)$ не сравнимы в P тогда и только тогда, когда не существует z такого, что yf $(xPz$ и $zPy)$ или $(yPz$ и $zPx)$, иначе, в силу транзитивности P: xPy или yPx.

Но тогда, если для z верно, что zPx, то верно и что zPy. Аналогично, если xPz, то и yPz. То есть в P x не отличим от y, т.к. они одинаково соотносятся со всеми прочими элементами. Выберем тогда какие-то 2 элемента из множества, на котором определено P, которые будут несравнимы, $\binom{n}{2}$ способами. Тогда количество вариантов отношений порядка P в которые не входят фиксированные x и y равно $(n-1)!$, т.е. числу линейных порядков на множестве из $n-1$ элемента, т.к. если объединить (в силу одинакового соотношения с прочими элементами) x и y в x', то мы получим строгое линейное отношение порядка, которое однозначно соответствует отношению P.

Тогда всего отношений порядка на n элементном множестве, в которых ровно два элемента не сравнимы: $(n-1)! \cdot \binom{n}{2}$.

Задача 6

Пусть P - некоторый частичный порядок на n элементах. Если $\nexists\ a, b$: $(a,b) \notin P\ (b,a) \notin P$, то P - линейный порядок, а значит представимо в виде пересечения не более n^2 линейных (при натуральных n, $1 \leqslant n^2$).

Пусть тогда $\exists\ a, b : (a,b) \notin P,\ \ (b,a) \notin P; a \neq b$. Любой частичный порядок представим в виде пересечения линейных его содержащих по теореме Душника — Миллера, следовательно существуют хотя бы два линейных порядка L_1 и L_2, таких что, $P \subseteq L_1$ и $P \subseteq L_2$, и $(a,b) \notin L_1 \cap L_2,\ (b,a) \notin L_1 \cap L_2$, так как иначе любое пересечение линейных порядков содержащих P содержит так же и $(a,\ b)$ или $(b,\ a)$, значит и в P элементы a и b сравнимы, что не так по предположению.

Тогда для каждой пары (a,b) не сравнимых элементов существует хотя бы два линейных порядка L_1 и L_2, таких что aL_1b и bL_2a, а $P \in L_1 \cap L_2$, т.е. эти элементы не сравнимы в $L_1 \cap L_2$. Пусть в P - k пар не сравнимых. Тогда P представимо в виде пересечения не более чем $2k$ линейных порядков - на каждую пару несравнимых берем и пересекаем по два линейных порядка. Всего несравнимых пар элементов может быть $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, значит любой строгий частичный порядок представим в виде пересечения не более чем $2 \cdot \binom{n}{2} = n(n-1)$ линейных. В случае не строгого частичного порядка мы лишь требуем, чтобы $\forall a:\ aPa$ и $aL_i'a$ и повторяем рассуждения.

Задача 7

(а)

Если $a\ I_p\ b$, то $(a,\ b) \notin P$ и $(a,\ b) \notin P^{-1}$. Тогда $(a,\ b) \notin P \cup P^{-1} \ \ \Leftrightarrow a\ \overline{P \cup P^{-1}}\ b\ \ \Leftrightarrow a\ \overline{P} \cap \overline{P^{-1}}\ b\ \ \Leftrightarrow I_p = \overline{P} \cap \overline{P^{-1}}$.

(б)

Если P - слабый порядок, докажем, что I_p - отношение эквивалентности, проверив рефлексивность, симметричность и транзитивность.

- **Рефлексивность**

  P - строгий частичный порядок $\Rightarrow \forall a\ a\overline{P}a$ и $a\overline{P^{-1}}a$, т.к. P - не рефлексивно. Значит $\forall a\ a\overline{P} \cap \overline{P^{-1}}a \Rightarrow a\ I_p\ a$.

- **Симметричность**

  Пусть $I_p^{-1} = (\overline{P} \cap \overline{P^{-1}})^{-1} = (\overline{P})^{-1} \cap (\overline{P^{-1}})^{-1} = \overline{P^{-1}} \cap \overline{P} = \overline{P} \cap \overline{P^{-1}} = I_p$.

- **Транзитивность**

  Пусть aI_pb и bI_pc. Тогда, т.к. $I_p \subseteq \overline{P}$, $a\overline{P}b$ и $b\overline{P}c$. Но P - слабый порядок, значит $a\overline{P}c$. В силу симметричности bI_pa и cI_pb. Тогда, $c\overline{P}a \ \Rightarrow$ либо $a = c$ и aI_pc, либо $a \neq c$. Во втором случае $(a,c) \notin P$ и $(c,a) \notin P$ $\Rightarrow (a,c) \notin P^{-1} \Rightarrow (a,c) \in \overline{P^{-1}}$, а значит $a\overline{P} \cap \overline{P^{-1}}c \Rightarrow aI_pc$.

Докажем в обратную сторону. Т.е. если I_p - отношение эквивалентности, докажем, что $\overline{P}$ - транзитивно.

Пусть $a\overline{P}b$ и $b\overline{P}c$.

Если bPa и cPb, то $cPa \Rightarrow a\overline{P}c$.

Если $b\overline{P}a$ и $c\overline{P}b$, то bI_pa и cI_pb, но тогда aI_pc, т.е. a не сравнимо с c. Но тогда $a\overline{P}c$.

Если aI_pb и $bP^{-1}c$, то $(a,c) \notin I_p$ - так как иначе по эквивалентности I_p: bI_pc; значит a сравнимо с c. Если $(a,c) \in P$, то по транзитивности P- aPb, что не верно, значит $cPa \Rightarrow a\overline{P}c$.

Если $aP^{-1}b$ и bI_pc, то $(a,c) \notin I_p$ - так как иначе по эквивалентности I_p: aI_pb; значит a сравнимо с c. Если $(a,c) \in P$, то по транзитивности P: bPc, что не верно, значит $cPa \Rightarrow a\overline{P}c$.