Задача 1

$$(2+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 2^n + \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} + ... + \binom{n}{n} \cdot 2^0$$

Тогда решим такое неравенство:

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} < \binom{n}{k+1} \cdot 2^{n-k-1}$$

И найдем такие k при которых следующее слагаемое больше предыдущего:

$$\binom{n}{k} \cdot 2 < \binom{n}{k+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot 2 < \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}$$

$$\Updownarrow$$

$$(k+1) \cdot 2 < n - k$$

$$\Updownarrow$$

$$k < \frac{n-2}{3}$$

Тогда рассмотрим слагаемое с номером $k = \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 1$ (нумерация с 0). Оно с одной стороны не меньше всех предыдущих (т.к. до этого k выполнялось неравенство $a_i < a_{i+1}$, где a_j - какое-то слагаемое $\Rightarrow$ при $k_0 = \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 1$, $a_{k_0} >= a_i$, $i < k_0$), а с другой все последующие слагаемые образуют невозрастающую последовательность, иначе неравенство выполнялось бы и для них.
Тогда $a_{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 1}$ - максимальное слагаемое в разложении (или одно из максимальных, как при $n = 2$).

Задача 2

Будем считать, что равно-вместительные комнаты одинаковы.

Количество способов выбрать 8 человек, для заселения в 4-х местные квартиры: $\binom{18}{8}$. Количество способов поделить их пополам: $\frac{\binom{8}{4}}{2}$ (Т.к. число способов выбрать 4 человека из 8 содержит в себе взаимодополняющие варианты - когда выбираешь сначала 4-х людей, а потом 4-х оставшихся, в то время как 4 выбранных человека однозначно определяют разделение). Т.е. всего способов заселить четырехместные комнаты:

$$\binom{18}{8} \cdot \frac{\binom{8}{4}}{2}$$

Заселить 3-х местные комнаты, с уже заселенными 4-х местными:

$$\binom{10}{6} \cdot \frac{\binom{6}{3}}{2}$$

Заселить 2-х местные комнаты, с уже заселенными 4-х и 3-х местными:

$$\binom{4}{4} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{2}$$

Итого способов заселить все комнаты:

$$\binom{18}{8} \cdot \frac{\binom{8}{4}}{2} \cdot \binom{10}{6} \cdot \frac{\binom{6}{3}}{2} \cdot \binom{4}{4} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{18!}{(4!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (2!)^2 \cdot 2^3}$$

Задача 3

A) $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$ - это число выбрать подмножества длины k множества M, $|M| = m$, причем M - подмножество N, $|N| = n$.
Поймем, что посчитать это число можно иначе: сначала выберем k элементов из N ($\binom{n}{k}$ способами), затем дополним их $m-k$ элементами из оставшихся в N ($\binom{n-m}{m-k}$ способами). В итоге мы получим все такие подмножества длины k, являющиеся подмножествами множества $M, |M| = m$ и M входит в N, а число способов сделать это: $\binom{n}{k}\binom{n-m}{m-k}$

$$\Downarrow$$

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-m}{m-k}$$

B) $\binom{2n}{n}$ - число способов выбрать n элементных подмножества множества из $2n$ элементов. Поймем, как это можно посчитать по другому. Рассмотрим два множества длиной n, объединение которых дает множество из $2n$ элементов. Посчитаем кол-во способов выбрать из этих двух множеств в сумме n элементов. Это кол-во равно число способов выбрать из первого множества 0 элементов, а из второго $n-0$ + число способов выбрать из первого множества 1 элементов, а из второго $n-1$ + ...
Более формально:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{n-i}$$

(Т.е. для каждых i элементов первого множества мы выбираем $n-i$ элементов второго) В силу равенства $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

В силу того, что мы посчитали одно и тоже 2-мя разными способами:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Задача 4

Пусть человеку i достанется x_i акций. Тогда количество способов поделить акции равно количеству решений уравнения:

$$\sum_{k=0}^{4} x_k = 100, x_k >= 1$$

Поймем, что $\sum_{k=0}^{4} x_k = 100, x_k >= 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{4} x_k = 95, x_k >= 0$. Последнее уравнение есть задача Муавра, и количество решений такого уравнения:

$$\binom{95+5-1}{4} = \binom{99}{4}$$

Задача 5

Возьмем какой-нибудь порядок из шести человек и попробуем записать их к врачу именно в этом порядке (т.е. чтобы каждый следующий пациент доктора соответствовал следующему в порядке). Тогда пусть в i день доктор примет x_i человек. Тогда кол-во расписаний для этого порядка людей соответствует числу решений уравнения:

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$$

Это задача Муавра, ответ на которую, в данном случае: $\binom{6+5-1}{4} = \binom{10}{4}$. Тогда, т.к. всего порядков пациентов 6!, вариаторов расписаний:

$$\binom{10}{4} \cdot 6!$$

Задача 6

A) Каждый человек может проголосовать за n кандидатов, при любом выборе остальных людей. Следовательно всего вариантов распределения голосов, при которых важен голос каждого человека персонально:

$$\prod_{1}^{n} n = n^n$$

B) Пусть за i кандидата проголосовало x_i человек. Тогда всего вариантов распределения голосов соответствует числу решений уравнения:

$$x_0 + x_1 + .. + x_n = n$$

Т.к. x_i - любое (ведь можно голосовать и за себя), то число решений этого уравнения, как следует из задачи Муавра:

$$\binom{2n-1}{n}$$

Задача 7

Пусть:

- A - "Включен свет"
- B - "Играет музыка"
- C - "Идет дождь"

Пересечение этих трех событий минимально тогда, когда максимально объединение противоположных событий, т.е. тех при которых не играет музыка ИЛИ/И не идет дождь ИЛИ/И не включен свет. Т.е. когда $|\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}| = max$.

- $|\bar{A}| = 100 - |A| = 20$
- $|\bar{B}| = 100 - |B| = 10$
- $|\bar{C}| = 100 - |C| = 50$

Тогда, максимум $|\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}| = 80$. Соответственно, музыка свет и дождь активны одновременно вне этих 80%, т.е. в 20% времени минимум.

Задача 9

A) Посчитаем количество таких разбиений, где $x_1 > 3$. Их ровно столько, сколько разбиений числа 6 на 4 слагаемых (т.е. если сводить задачу к задаче Муавра, будем считать, что в ящик x_1 мы уже положили 4 камушка, теперь осталось расположить оставшиеся 6), а именно:

$$\binom{6+3}{3} = 84$$

Всего же способов разбить 10 на 4слагаемых $\binom{10+4-1}{10} = 286$. Тогда количество способов разбить 10 на 4 слагаемых, первое из которых $<= 3$:

$$286 - 84 = 202$$

B) Пусть $|A|$ - число способов разбить 10 на слагаемые, где $x_1 > 3$, $|B|$, аналогично, но $x_2 > 3$. Посчитаем количество способов разбить 10 на слагаемые, в которых хотя бы одно из первых 2-х числе > 3 (т.е. те разбиения, которые дополняют искомые до всех возможных) по формуле включений и исключений:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$|A \cap B|$ - число таких разбиений, где и $x_1 >= 4$ и $x_2 >= 4$, т.е. $|A \cap B| = \binom{2+4-1}{2} = 10$. (Т.е. число разбиений где $x_1 >= 4$ и $x_2 >= 4$, равно числу разбиений 2-ки на четыре слагаемых, см. выше) При этом $|A| = |B|$, как симметричные относительно переменных.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 84 + 84 - 10 = 158$$

Так, как мы ищем ровно противоположные разбиения, в которых $x_1, x_2 <= 3$, мы вычтем это число из общего числа разбиений:

$$286 - 158 = 128$$

C) Пусть $|A|$ - число способов разбить 10 на слагаемые, где $x_1 > 3$, $|B|$, аналогично, но $x_2 > 3$, $|C|$, так же, но $x_3 > 3$. По формуле включений и исключений посчитаем разбиения в которых хотя бы одно из первых 3-х чисел больше 3:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C|$$

Т.к. уравнение симметрично, относительно переменных, то $|A \cap B| = |C \cap B| = |A \cap C| = 84$. Поймем, что 3 слагаемых одновременно не могут быть больше трех, иначе выражение в левой части равенства будет хотя бы 12, а справа 10, что невозможно. $\Rightarrow |A \cap B \cap C| = 0$. Тогда:

$$|A \cup B \cup C| = 84 \cdot 3 - 10 \cdot 3 + 0 = 222$$

Так, как мы ищем ровно противоположные разбиения, в которых $x_1, x_2, x3 <= 3$, мы вычтем полученное число из общего числа разбиений с целью добыть ответ:

$$286 - 222 = 64$$

D) Повторим рассуждения первых трех пунктов, добавив лишь $|D|$, по аналогии, число способов разбить на слагаемые, с последним из них, большим 3-ки.

$$|A \cup B \cup C \cup D| = \binom{4}{1}|A| - \binom{4}{2}|A \cap B| + \binom{4}{3}|A \cap B \cap C| - \binom{4}{4}|A \cap B \cap C \cap D|$$

$$\Updownarrow$$

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \cdot |A| - 6 \cdot |A \cap B| + 4 \cdot |A \cap B \cap C| - 1 \cdot |A \cap B \cap C \cap D|$$

$$\Updownarrow$$

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 336 - 60 = 276$$

Так, как мы ищем ровно противоположные разбиения, в которых $x_1, x_2, x3, x4 <= 3$, мы вычтем полученное число из общего числа разбиений с целью добыть ответ:

$$286 - 276 = 10$$

Задача 10

Будем считать, что строчки нумеруются с 0. Тогда k-ое число n-ой строчки треугольника Паскаля имеет вид $\binom{n}{k}$.

Заметим, что после нечетной строчки треугольника П. идет строчка, в которой все числа, кроме первого и последнего четны. Причина этому рекуррентная модель поведения: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Тогда поймем, в каких строчках все числа, кроме первого и последнего четны. Т.е. при каких n, $\binom{n}{k}$ кратно 2, $k \neq 0, k \neq n$.

Поймем, что при $n = 2^m$ это так. Докажем по индукции: при $n = 1; n = 2$ - верно, все числа между 1-цами в 1-ой и 2-ой строке треугольника П. четны. Предположим тогда, что $\binom{2^A}{k}$ кратно 2, $k \neq 0, k \neq 2^A$. Докажем, что и $\binom{2^{A+1}}{k}$ кратно 2.

Поделим множество из 2^{A+1} элементов пополам. Посчитаем количество способов выбрать k элементов суммарно из двух наборов (как в задаче **3б**): из первого можно выбрать 0, а из второго - k и т.д. (причем неважно, что k может быть больше 2^A, ведь $\binom{2^{A+1}}{k} = \binom{2^{A+1}}{2^{A+1}-k}$) Т.е всего:

$$\sum_{i=0}^{2^A} \binom{2^A}{i} \cdot \binom{2^A}{2^A - i}$$

Но заметим, что по предположению индукции каждое число в сумме - есть произведение двух четных, кроме двух слагаемых (первого и последнего, которые равны единице), сумма которых тоже четна $\Rightarrow \binom{2^(A+1)}{k}$ четно, при $k \neq 0, k \neq 2^{A+1}$, значит все строки с номерами, равными степеням двойки состоят из четных чисел (кроме первого и последнего).

Из построения треугольника следует, что такие "четные" строки могут быть получены только из "нечетных"($\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $\binom{n-1}{0} = 1 \Rightarrow \binom{n-1}{1}$ не кратно 2 и т.д.) Значит каждая строка с номером $2^m - 1$ состоит из нечетных чисел.

Осталось доказать, что не бывает иных четных строк (т.е. четных строк, номера которых не степень 2-ки). Предположим противное, и такая строка есть. Поймем, что если строка четна, то у нее четный номер ($\binom{n}{1} = n$ - обязательный член любой строки). Тогда повторим прием из задачи **3б**: поделим $2n$-элементное множество пополам. Тогда число способов выбрать k элементов:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Но по предположению это число четно, значит, четны все числа вида $\binom{n}{k}$. Тогда есть четная строка с номером n. Если $n = 2a$, повторим до тех пор пока не получим, что $n' = 2b - 1$, и строка с этим номером четна. Такое возможно лишь, если $n' = 1$. Но тогда $2n = 2^x$ - противоречие $\Rightarrow$ иных четных строк отличных от описанной нет.