

Домашнее задание 7

Ткачев Андрей, группа 166

7 ноября 2016 г.

Задача 1

Разложим 2007 на простые множители: $2007 = 223 \cdot 3 \cdot 3$. По условию задачи произведение чисел, образованных оценками выписанными подряд и разделенными знаками умножения равно 2007. Тогда в силу того, что обычно школьная оценка - число от 2 до 5 (колы не ставятся по условию) и что разложение на простые множители существует и единственно, Петя должен был выписать оценки «2, 2, 3» (обязательно строго подряд) и еще как-то оставшиеся две тройки. Тогда оценка в четверти у Пети выходит не очень хорошая, а именно (в допущении, что оценка за четверть просто среднее арифметическое) 2.6.

Ответ: 2.6.

Задача 2

а)

Рассмотрим какие-нибудь последовательных чисел b_0, b_1, \dots, b_n .

Если $n|b_0$ - отлично произведение делится на n .

Иначе, пусть $b_0 \equiv r \pmod n$. Тогда $b_1 \equiv r + 1 \pmod n$ и т.д. Т.е. $b_i \equiv r + i \pmod n \forall i < n$. Рассмотрим тогда b_{n-r} , $n - r < n$. $b_{n-r} \equiv r + n - r = n \equiv 0 \pmod n$. Т.е. в произведение n последовательных чисел $n - r$ множитель (нумерация в порядке возрастания), где r - ненулевой остаток первого из чисел, кратен $n \Rightarrow$ произведение делится на n .

Задача 3

Воспользуемся расширенным алгоритмом Евклида, чтобы решить уравнение $45x' - 37y' = 1$:

$$a_0 = 1 \cdot 45 + 0 \cdot 37$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0 \cdot 45 + 1 \cdot 37 \\
a_2 &= 0 \cdot 45 + 1 \cdot 37 - (1 \cdot 45 + 0 \cdot 37) \cdot \left\lfloor \frac{45}{37} \right\rfloor = 1 \cdot 45 - 1 \cdot 37 = 8 \\
a_3 &= 1 \cdot 45 - 1 \cdot 37 - (0 \cdot 45 + 1 \cdot 37) \cdot \left\lfloor \frac{37}{8} \right\rfloor = -4 \cdot 45 + 5 \cdot 37 = 5 \\
a_4 &= -4 \cdot 45 + 5 \cdot 37 - (1 \cdot 45 - 1 \cdot 37) \cdot \left\lfloor \frac{8}{5} \right\rfloor = 5 \cdot 45 - 6 \cdot 37 = 3 \\
a_5 &= 5 \cdot 45 - 6 \cdot 37 - (-4 \cdot 45 + 5 \cdot 37) \cdot \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = -9 \cdot 45 + 11 \cdot 37 = 2 \\
a_6 &= -9 \cdot 45 + 11 \cdot 37 - (5 \cdot 45 - 6 \cdot 37) \cdot \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 14 \cdot 45 - 17 \cdot 37 = 1
\end{aligned}$$

Получаем $x' = 14$, $y' = 17$. Покажем, что все остальные решения в целых числах имеют вид $x'' = 14 + 37k$, $y'' = 17 + 45k$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть (x_0, y_0) и $(14, 17)$ - два различных решения уравнения $45x' - 37y' = 1$. Тогда:

$$\begin{aligned}
45 \cdot 14 - 37 \cdot 17 &= 1 \\
45x_0 - 37y_0 &= 1 \\
&\Updownarrow \\
45(14 - x_0) &= 37(17 - y_0)
\end{aligned}$$

Пусть $x_0 = 14 + n$, $y_0 = 17 + m$.

$$45n = 37m$$

Т.к. $(45, 37) = 1$, то $37|n$ и $45|m$. Тогда $m = 45k$, т.к. по ОТА разбиение на простые множители существует и единственно, то $3 : 2 \cdot 5$ содержатся в множителях m .

$$\begin{aligned}
45n &= 37 \cdot 45k \\
n &= 37k
\end{aligned}$$

От куда и получаем $x'' = 14 + 37k$, $y'' = 17 + 45k$. Тогда решения уравнения $45x - 37y = 25$: $(25(14 + 37k), 25(17 + 45k))$.

Ответ: $(25(14 + 37k), 25(17 + 45k))$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4

а)

$111\dots111 = \frac{10^{69}-1}{9}$. Решим уравнение:

$$111\dots111 = \frac{10^{69}-1}{9} \equiv x \pmod{71}$$

$$10^{69}-1 \equiv 9x \pmod{71}$$

$$10^{70}-10 \equiv 90x \pmod{71}$$

По малой т. Ферма $10^{70} \equiv 1 \pmod{71}$.

$$10^{70}-10 \equiv 90x \pmod{71}$$

$$1 \equiv 90x + 10 \pmod{71}$$

$$-9 \equiv 90x \pmod{71}$$

$$62 \equiv 90x \pmod{71}$$

$$31 \equiv 45x \pmod{71}$$

Заметим, что $45^{-1} \equiv 30 \pmod{71}$ (убедится в этом можно воспользовавшись расш. алгоритмом Евклида).

$$a_0 = 1 \cdot 71 + 0 \cdot 45$$

$$a_1 = 0 \cdot 71 + 1 \cdot 45$$

$$a_2 = 0 \cdot 71 + 1 \cdot 45 - (1 \cdot 71 + 0 \cdot 45) \cdot \left\lfloor \frac{71}{45} \right\rfloor = 1 \cdot 71 - 1 \cdot 45 = 26$$

$$a_3 = 1 \cdot 71 - 1 \cdot 45 - (0 \cdot 71 + 1 \cdot 45) \cdot \left\lfloor \frac{45}{26} \right\rfloor = -1 \cdot 71 + 2 \cdot 45 = 19$$

$$a_4 = -1 \cdot 71 + 2 \cdot 45 - (1 \cdot 71 - 1 \cdot 45) \cdot \left\lfloor \frac{26}{19} \right\rfloor = 2 \cdot 71 - 3 \cdot 45 = 7$$

$$a_5 = 2 \cdot 71 - 3 \cdot 45 - (-1 \cdot 71 + 2 \cdot 45) \cdot \left\lfloor \frac{19}{7} \right\rfloor = -5 \cdot 71 + 8 \cdot 45 = 5$$

$$a_6 = -5 \cdot 71 + 8 \cdot 45 - (2 \cdot 71 - 3 \cdot 45) \cdot \left\lfloor \frac{7}{5} \right\rfloor = 7 \cdot 71 - 11 \cdot 45 = 2$$

$$a_7 = 7 \cdot 71 - 11 \cdot 45 - (-5 \cdot 71 + 8 \cdot 45) \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = -19 \cdot 71 + 30 \cdot 45 = 1$$

Тогда домножим $31 \equiv 45x \pmod{71}$ на 30.

$$930 \equiv 45 \cdot (45^{-1})x \pmod{71}$$

$$7 \equiv x \pmod{71}$$

Ответ: 7.

б)

Согласно китайской теореме об остатках существует такой x , что

$$\begin{cases} x \equiv 111\dots 111 \pmod{2} \\ x \equiv 111\dots 111 \pmod{5} \\ x \equiv 111\dots 111 \pmod{7} \end{cases}$$

Причем $x \equiv 111\dots 111 \pmod{2 \cdot 5 \cdot 7}$.

Найдем тогда остатки $111\dots 111$ от деления на 2, 5, 7:

$$1\dots 1 = 1\dots 10 + 1 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$1\dots 1 = 1\dots 1 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$1\dots 1 = 111111 \cdot k + 111 = 7 \cdot 15873 \cdot a + 111 \equiv 111 \equiv 6 \pmod{7}$$

Тогда

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

Поймем, что число 41 удовлетворяет сравнениям. Тогда $41 \equiv 111\dots 111 \pmod{2 \cdot 5 \cdot 7}$

$$41 \equiv 111\dots 111 \pmod{70}$$

Ответ: 41.

Задача 5

Посчитаем функцию Эйлера $\varphi(n)$. Пусть $n = p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$. Тогда

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \frac{(p-1)}{p}$$

Заметим, что $\varphi(n)|n!$: если поделить $n!$ на $\varphi(n)$ получим

$$\frac{n! \prod_{p|n} p}{\prod_{p|n} (p-1)}$$

Но т.к. $\forall p, p|n : p < n \Rightarrow 1 < p-1 < n$. Но тогда $\forall p, p|n : (p-1)|n! \Rightarrow \frac{n!}{\varphi(n)} = k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(n)|n!$

Тогда, т.к. $(n, 4) = 1$ - по условию n нечетное положительное, то по теореме Эйлера:

$$4^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Умножив это сравнение на себя $\frac{n!}{\varphi(n)} = k \in N$ раз получим:

$$(4^{\varphi(n)})^k \equiv 1 \pmod{n}$$

$$4^{n!} \equiv 1 \pmod{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$n | (4^{n!} - 1)$$

Что и требовалось доказать.

Задача 6

Обозначим количество книг за n . Тогда из условия следует, что $7|n \Rightarrow n = 7k, k \in N$ (т.к. n имеет не нулевые остатки при делении на 4, 6, 5, и 0-ой при делении на 7). Тогда $n = 7k$ является решением системы

$$\begin{cases} 7k \equiv 1 \pmod{4} \\ 7k \equiv 1 \pmod{5} \\ 7k \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

т.к. при делении книг в группы по 4, 5, 6 остается одна лишняя. Зная, что

$$\begin{cases} 7 \equiv 3 \pmod{4} \\ 7 \equiv 2 \pmod{5} \\ 7 \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} 3k \equiv 1 \pmod{4} \\ 2k \equiv 1 \pmod{5} \\ k \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

Домножив $3k, 2k, k$ на обратные (по соответствующему модулю) числам 3, 2, 1, получим

$$\begin{cases} k \equiv 3 \pmod{4} \\ k \equiv 3 \pmod{5} \\ k \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

Так как $(5, 6) = 1$ и $3 \equiv 3 \pmod{5}, 3 \equiv 3 \pmod{6}$, то по Китайской теореме об остатках $k \equiv 3 \pmod{5 \cdot 6}$. Тогда:

$$\begin{cases} k \equiv 1 \pmod{6} \\ k \equiv 3 \pmod{20} \end{cases}$$

Поймем, что $k \neq 3$, $k \neq 23$, и что $k = 43$ является минимальным натуральным решением системы (43 - наименьшее после 3 и 23 число дающее в остатке 3 при делении на 20). Тогда минимальное $n = 7 \cdot 43 = 301$.

Ответ: 301.

Задача 7

Согласно китайской теореме об остатках для любых попарно взаимно-простых a_1, a_2, \dots, a_n и для любых r_1, r_2, \dots, r_n таких, что $0 \leq r_i < a_i$, существует единственный x , такой, что $0 \leq x < M = \prod_1^n a_i$ и x является решением системы:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{a_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{a_2} \\ \vdots \\ x \equiv r_n \pmod{a_n} \end{cases}$$

И любой $x' \equiv x \pmod{\prod_1^n a_i}$ так же является решением этой системы. Причем каждому набору остатков соответствует один $0 \leq x < \prod_1^n a_i$.

В свете этого условие задачи можно сформулировать так: « Сколько существует x , таких что $0 \leq x \leq 2310000$ и для всех $a_i \in 2, 3, 5, 7, 11$ верно $x \equiv r_{ij} \pmod{a_i}$, где $0 < r_{ij} < a_i$ »

Т.е найти решения системы по модулю 2310000

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{2} \\ x \equiv r_2 \pmod{3} \\ x \equiv r_3 \pmod{5} \\ x \equiv r_4 \pmod{7} \\ x \equiv r_5 \pmod{11} \end{cases}$$

(x является решением системы $\iff x$ не делится на 2, 3, 5, 7, 11 и меньше 2310000, т.е. является принадлежит множеству тех чисел которые нужно посчитать по оригинальному условию). Но поймем, что для любого набора r_1, r_2, \dots, r_5 существует единственное решение по модулю $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ и соответственно 1000 решений по модулю $2310 \cdot 1000$. Всего наборов остатков не равных 0: $(2-1) \cdot (3-1) \cdot (5-1) \cdot (7-1) \cdot (11-1) = 480$, тогда решений системы по модулю $2310 \cdot 1000$ ровно 480000.

Ответ: 480000.

Задача 8

Если число n взаимно-просто с 10, то по теореме Эйлера:

$$10^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Поймем, что число $E_{\varphi(n)} = \frac{10^{\varphi(n)} - 1}{9}$ - репьюнит, и что $9E_{\varphi(n)} \equiv 0 \pmod n$. Рассмотрим репьюнит из $9\varphi(n)$ единиц.

$$\begin{aligned} E_{9\varphi(n)} &= E_{\varphi(n)} \cdot 10^{8\varphi(n)} + \dots + E_{\varphi(n)} \cdot 10^{\varphi(n)} + E_{\varphi(n)} = \\ &= E_{\varphi(n)}(9E_{\varphi(8n)} + 1 + 9E_{\varphi(7n)} + 1 + \dots + 9E_{\varphi(n)} + 1 + 1) = \\ &= 9E_{\varphi(n)}(E_{\varphi(8n)} + E_{\varphi(7n)} + \dots + E_{\varphi(n)} + 1) \end{aligned}$$

Получается $E_{9\varphi(n)} = 9E_{\varphi(n)} \cdot k \equiv 0 \pmod n$. Т.е. для любых n взаимно-простых с 10 существует хотя бы репьюнит кратный n . Поймем, что их на самом деле бесконечно много: пусть $n|E_k$, тогда $n|E_k + 10^k \cdot E_k$, т.е. $n|E_{2k}$ по индукции $n|E_{2^m k} \forall m \in \mathbb{N}$.

Ответ: Да, их будет бесконечно много.

Задача 8

Так как для любых $k > 1$ $(10^k, 7) = 1$ (7 не имеет общих простых множителей с $10^k = 2^k 5^k$), то по малой теореме Ферма:

$$7^{\varphi(10^k)} \equiv 1 \pmod{10^k}$$

Тогда в частности для $k = 4$:

$$7^{\varphi(10^4)} \equiv 1 \pmod{10^4}$$

Т.е. $7^{\varphi(10^4)} = 10^4 \cdot k + 1$, т.е. оканчивается на 0001. Для пущей уверенности посчитаем $\varphi(10^4) = \varphi(2^4)\varphi(5^4) = 2^3 \cdot (2-1)5^3 \cdot (5-1) = 4000$. Ну и удовлетворимся окончательно: $7^4000 = 246694835101319738472068684918281917911905473779679455520629791367$