Домашнее задание 15

Ткачев Андрей, группа 166

26 января 2017 г.

Задача 1. Пусть S – множество кругов на плосткости. Поймем, что существует биекция $f : S \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Действительно, каждый круг однозначно определяется координатами центра и радиусом. Т.е. каждому кругу в однозначное соответствие можно поставить три вещественных числа (r_0, r_1, r_2), где $(r_0,\ r_1)$ определяет центр, а r_2 – радиус $(r_2 > 0)$. При этом, раз ничего не сказано про персечения, то можно считать, что такие (r_0, r_1, r_2) всегда задают какой-то круг.

Так как $\mathbb{R}_+ \sim \mathbb{R}$, то $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \sim \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \sim \mathbb{R}$. Но тогда $S \sim \mathbb{R}$. Значит S – континуально.

Задача 2. Нет не верно. Например на плоскости можно отметить континуум окружностей, имеющих общий центр (каждая окружность в этом случае задается лишь одним числом – радиусом $r \in \mathbb{R}_+$, т.е. их действительно будет континуум). Но множество центров этих окружностей – конечно (состоит из единственного элемента).

Задача 3. Да, существует. Возьмем множество $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Для каждого $r_0 \in \mathbb{R}$ заведем подмножество в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ в которое входят все пары вида $(r_0,\ r)$, $r \in \mathbb{R}$. Поймем, что все такие подмножества не пересекаются в силу различия первых элементов в парах, их образующих, и что всего таких подмножеств столько же, сколько и вариантов первого числа в паре, т.е. континуум.

Вспомним, что $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \sim \mathbb{R}$, а значит существует биекция $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Но тогда, у каждого из построенных нами подмножеств в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ существует образ в $\mathbb{R}$, причем, в силу биективности отображения, эти образы не пересекаются и их ровно столько же, сколько и их прообразов в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, а значит континуум.

Задача 4. Нет, не верно. Рассмотрим, например множество S функкий $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Т.е. каждая такая функция взаимно однозначно задает бесконечную двоичную последовательность. Значит число таких функций равно числу бесконечных двоичных последоваетельностей, которых как мы знаем – континуум (Вообще, S в данном случае – ни что иное, как $2^{\mathbb{N}}$).

Задача 5. Да, верно. Пусть множество двоичных последовательностей без трех единиц подряд – S. Покажем что существует биекция между $2^{\mathbb{N}}$ и S.

Заметим, что $S \lesssim 2^{\mathbb{N}}$. Инъекция в этом случае очевидна: каждой последовательности из S поставим в соответствие ее же саму в $2^{\mathbb{N}}$.

Покажем, что $2^{\mathbb{N}} \lesssim S$. Поймем, что любую последовательность из $2^{\mathbb{N}}$ можно разбить на «блоки» по два символа, начиная с первого ($10001101\ldots \to 10\ 00\ 11\ 01\ \ldots$). Сопоставим каждому такому блоку код, которым мы будем его заменять, для получения последоваетльности из S.

- $00 \to 000$
- $01 \to 001$
- $10 \to 100$
- $11 \to 010$

Т.е. для каждой строки из $2^{\mathbb{N}}$ мы, по указанному правилу, сможем сопоставить некоторую бесконечную двоичную строку, причем разным строкам сопоставятся разные (если начальные строки различались в i-ом блоке, то конечные будут различатся в i-ом триплете). Поймем, что эта некоторая бесконечная двоичная строка удовлетворяет требованиям задачи, а именно не содержит трех единиц подряд (никакая комбинация из указанных триплетов не даст больше чем две подряд стоящие единицы). Значит мы получили инъекцию $2^{\mathbb{N}} \to S$.

Тогда, по теореме Кантора-Бейрштейна существует биекция $S \leftrightarrow 2^{\mathbb{N}}$, а значит $S \sim 2^{\mathbb{N}}$. Получаем, что S имеет мощность конитинуум.

Задача 6. Будем отождествлять в данной задаче множество функций из $\mathbb{N}$ в абстрактное множество A и бесконечные последовательности состоящие из элементов A, которыми функция и определяется.

Множество биективных функций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (а значит и множество бесконечных последовательностей натуральных, в которых ни одно оне повторяется дважлы) будем обозначать, как $\mathbb{N}_b^{\mathbb{N}}$.

Покажем, что $\mathbb{N}_b^{\mathbb{N}}$ не больше, чем континуум. Действительно, $\mathbb{N}_b^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$. Тогда $\mathbb{N}_b^{\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а значит, не больше континуума.

Докажем теперь, что $2^{\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{N}_b^{\mathbb{N}}$. Сопоставим каждой двоичной последовательности свою последовательность из натуральных чисел, в которой ни какое число не встречается дважды, по следующему правилу:

- Если i-ый бит равен 0, то в результирующей последовательности на позиции $2i$ и $2i+1$ поставим $2i$ и $2i+1$ соответвенно.
- Если i-ый бит равен 1, то в результирующей последовательности на позиции $2i$ и $2i+1$ поставим $2i+1$ и $2i$ соответвенно.

Так например, последовательности $10\ldots$ будет соответсвовать $1, 0, 2, 3, \ldots$.

Поймем, что это отображение инъективно – если исходные последовательности различаются в $i-$ом бите, то конечные последовательности отличаются в числе с номером $2i$. Причем, эта конечная последовательность входит в $\mathbb{N}_b^{\mathbb{N}}$ (если сопоставить каждому члену бесконечной последовательности из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ соответсвующий член в полученной, то получится биекция).

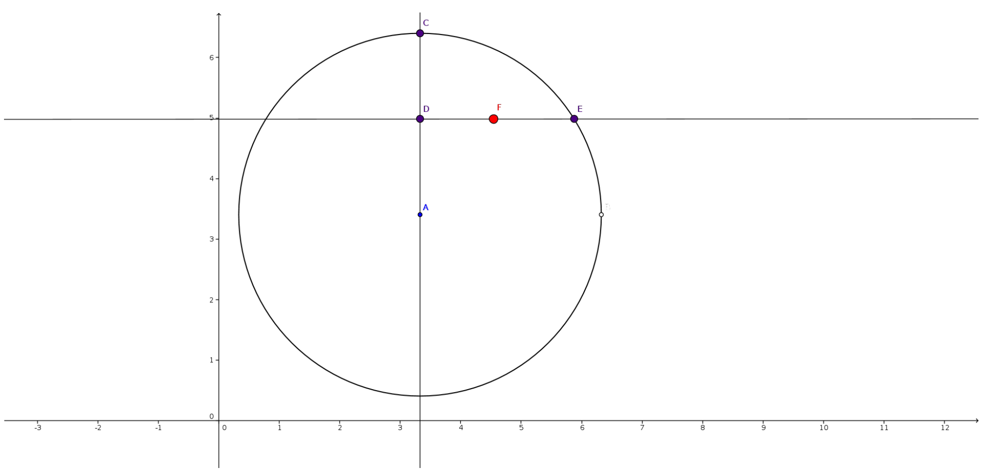
Таким образом, $2^{\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{N}_b^{\mathbb{N}}$.

Тогда, по теореме Кантора-Берштейна $2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}_b^{\mathbb{N}}$, значит $\mathbb{N}_b^{\mathbb{N}}$ – континуально.

Задача 7. Разместим на плоскости континуум «единиц». Возьмем, и разместим на плоскости одну единицу. Проведем биссектриссу ее угла. Теперь параллельным переносом вдоль этой прямой мы можем «скопировать» уже существующую единицу на любом расстоянии от нее. Тогда мы можем каждому вещественному числу r сопоставить «единицу» на плоскости, вершина угла которой удалена от начальной вершины ровно на r (полученные единицы не будут пересекаться, т.е. прямые, которые их образуют – параллельны по построению). Таким образом существует биекция между вещественными числами и «единицами» на плоскости, а значит фигурок – континуум.

Задача 8. Рассмотрим какую-либо окружнось.

Покажем, что в ней мы можем выбрать точку с рациональными координатами (См. рисунок и абзац ниже).



Для этого, проведем через центр прямую AC параллельную оси ординат. На отрезке AC выберем точку D с целочисленной ординатой (Например с ординатой равной среднему арифметическому ординат A и C взятых с избытком и с недостатком). Через нее проведем прямую параллельно оси абсцисс и на отрезке DE выбереме точку с рациональной абсциссой (аналогично, как и в прошлый раз). Эта точка - искомая, так как ее координаты рациональны.

Отлично, теперь мы умеем однозначно(односторонняя однозначность) сопоставлять каждой окружности рациональную точку, находящуюся в ее пределах.

Пусть у нас имеется плоскость с бесконечным числом непресесекающихся восьмерок. Сопоставим каждой из них две рациональные точки - по рациональной точке на каждую из окружностей, образующих восьмерку. Заметим, что никакие две пары точек не совпадают (иначе, мы бы имели две пересекающиеся хотябы в одной точке восьмерки, т.к. двум окружностям спославляется одна и таже рац. точка, если центр одной из них находится в другой; значит мы имеем восьмерки, ни одна из которых не лежит полностью в окружности другой и не лежит во вне, а значит они как-то пересекаются).

Значит мы построили инъекцию из множества восьмерок в $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. Таким образом множество восьмерок не более чем счетно.