Домашнее задание 14

Ткачев Андрей, группа 166

7 января 2017 г.

Задача 1. Выигрыш - это случайная величина. Если суммарная стоимость N билетов $100N$ штук, то сумма выигрыша $40N$, тогда средний выигрыш - 40. Тогда если f - выигрыш, то $E[f] = 40$.

По неравенству Маркова $Pr[f \geq 5000] \leq \frac{E[f]}{5000} = \frac{40}{5000} = 0.008 < 0.01$. Т.е. вероятность выиграть 5000 меньше 1%.

Задача 2. Продолжительность жизни f - случайная величина, $E[f] = 26$. Из условия $Pr[f \leq 8] = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ровно половина людей прожила строго больше 8 лет. Число людей, живших в указанном году N. Рассмотрим два крайних случая:

1. Ровно половина людей жила ровно 8 лет, а остальные - больше 8 лет.

2. Ровно половина людей жила ровно 0 лет, а остальные - больше 8 лет.

В первом случая средняя продолжительность жизни тех, кто прожил не меньше 8 лет (≥ 8) есть $E[f]$, т.е. 26 лет.

Во втором случае пусть x - средняя продолжительность жизни тех, кто прожил не меньше (а значит в данном случае больше) 8-ми лет. Тогда $\frac{N}{2} \cdot 0 + \frac{N}{2} \cdot x = E[f] \cdot N$, откуда $x = 52$.

Таким образом средняя продолжительность жизни людей, проживших не меньше 8 лет может принимать одно из значений от 26 до 52 включительно.

Задача 3.

Кубик честный. Броски первого игрока будем обозначать парой чисел $(x,\ y)$, $1 \leq x,\ y \leq 6$. Каждая из пар $(x,\ y)$ выпадает с вероятностью $\frac{1}{36}$. Тогда ожидание выигрыша f первого игрока $E[f] = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} xy = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} x \sum_{i=1}^{6} y = \frac{21^2}{36} = 12.25$.

Средний же выигрыш второго игрока - это среднее арифметическое значение суммы квадратов первых 6 натуральных числе: $\frac{1^2+2^2+\ldots+6^2}{6} = \frac{91}{6} = 15\frac{1}{6}$.

Таким образом средний выигрыш второго игрока больше.

Кубик нечестный. Пусть вероятности выпадения граней $p_1, p_2, \dots p_6$.

Задача 4. Пусть f - случайная величина равная числу вхождения подслова ab в данное слово. Через g_i обозначим случайную величину, принимающую значение 1, если символы i и $i+1$ образуют слово ab (порядок важен) и 0, в противном случае.

Тогда $f = \sum_{i=1}^{20-1} g_i$. В силу линейностити математического ожидания $E[f] = E[\sum_{i=1}^{20-1} g_i] = \sum_{i=1}^{20-1} E[g_i]$.

Посчитаем ожидание случайной величины g_i. Несложно видеть, что вероятность события A «символы i и $i+1$ образуют слово ab» в вероятностном пространстве слов $\{a,\ b\}^2 0$:

$$Pr[A] = \frac{2^{20-2}}{2^{20}} = \frac{1}{4}$$

Таким образом $E[g_i] = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{4}$. Получаем $E[f] = \sum_{i=1}^{20-1} \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$.
Ответ: $\frac{19}{4}$.

Задача 5. Пусть f - случайная величина, показывающая число различных завтраков в трехнедельном рационе проректора. Введем случайную величину g_i принимающую значение 1, если завтрак i был съеден за все время проректором и 0 - в противном случае.

Посчитаем $E[g_i]$. В вероятностном просранстве всех возможных комбинаций завтраков, коих 10^{15}, найдем вероятность события A «i завтрак будет входить в один из 15 съеденных нашим трудягой» через событие-дополнение. $Pr[A] = 1 - Pr[\overline{A}] = 1 - \frac{9^{15}}{10^{15}} = \frac{10^{15} - 9^{15}}{10^{15}}$ (всего затраков в которые не входит какой-то i-ый - 9^{15}).

Заметим, что $f = \sum_{i=1}^{10} g_i$. Тогда всилу линейности мат. ожидания:

$$E[f] = E[\sum_{i=1}^{10} g_i] = \sum_{i=1}^{10} E[g_i] = 10 - \frac{9^{15}}{10^{14}} \approx 7.941$$

Т.е. проректор в среднем попробует около 8 различных завтраков.
Ответ: $10 - \frac{9^{15}}{10^{14}}$.

Задача 6. Введем случайную величину g_{ij} принимающую значение 1, если в π пара i и j образует инверсию и 0 - в противном случае.

$E[g_{ij}] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$, т.к. перестановок, в которых $(i,\ j)$ образует инверсию ровно столько же, сколько и тех, в которых они инверсию не образуют (можно установить биективное отношение).

Но $I(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} g_{ij}$. Тогда $E[I(\pi)] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[g_{ij}] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$.
Ответ: $\frac{n(n-1)}{4}$.

Задача 7. X - не отрицательная величина, значит $X \geq 6 \Leftrightarrow 2^X \geq 2^6$. Тогда $Pr[X \geq 6] = Pr[2^X \geq 64]$. Применим неравенство Маркова:

$$Pr[2^X \geq 64] \leq \frac{E[2^X]}{64} = \frac{5}{64} \approx 0.07 < \frac{1}{10}$$

Что и требовалось доказать.

Задача 8. Пусть g_i случайная величина, равная среднему числу жвачек, которых нужно купить, чтобы попался вкладыш, отличный от уже $i-1$ имеющихся. В часности $g_1 = 1$.

Посчитаем g_k, $1 \leq k \leq n$. Вероятность того, что очередной вкладыш отличен от $k-1$ имеющихся - $p_k = \frac{n-(k-1)}{n}$, так как все вкладыши равновероятны, а нас устраивают ровно $n-(k-1)$ вкладышей. Среднее число покупок жвачек, чтобы попаласась жвачка вероятность которой p_k: $\frac{1}{p_k}$ (т.к. $g_k = p_k \cdot 1 + (1-p_k) \cdot (1+g_k)$, с вроятностью p_k нужная жвачка попадется в первой покупке иначе с вероятностью $1-p_k$ нужно суммарно $1+p_k$ покупок). Т.е. $E[g_k] = \frac{n}{n-k+1}$.

Если f - случайная величина, равная среднему числу жвачек, которые нужно купить, чтобы собрать полную коллекцию, то $f = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Тогда в силу линейности мат. ожидания:

$$E[f] = \sum_{i=1}^{n} E[g_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1}.$$

Ответ: $\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1}$.