Домашнее задание 17

Ткачев Андрей, группа 166

1 февраля 2017 г.

Задача 1. Пусть множество $\mathbb{M}$ - множество бесконечных последовательностей 0, 1, 2, в котрых ни один символ не идет два раза подряд.

Покажем, что $2^{\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{M}$. Каждому символу в бесконечной двоичной последовательности из $2^{\mathbb{N}}$ сопоставит последовательность из $\mathbb{M}$ по следующему правилу кодирования:

- $0 \rightarrow 01$
- $1 \rightarrow 02$

Так, например, из последовательности $0110\ldots$ будет получена последовательность $01020201\ldots$. Понятно, что это отображение инъективно (если две двоичные последовательности различаются в i-ом бите, то конечные последовательности будут различаться в $2i+1$-ом символе). При этом, очевидно, что в конечной последовательности никакие две цифры не идут два раза подряд. Таким образом существует инъекция $2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{M}$.

Теперь докажем, что $\mathbb{M} \lesssim 2^{\mathbb{N}}$. Каждому символу в бесконечной последовательности из $\mathbb{M}$ сопоставит последовательность из $\mathbb{M}$ по следующему правилу кодирования:

- $0 \rightarrow 00$
- $1 \rightarrow 01$
- $2 \rightarrow 11$

Так, например, из последовательности $012\ldots$ будет получена последовательность $000111\ldots$. Инъективность такого отображения проверяется ровно так же, как уже было показано выше.

Таким образом, по теореме Кантора-Берштейна, $\mathbb{M} \sim 2^{\mathbb{N}}$.

Задача 2. Пусть множество отношений эквивалентности на натуральных числах - $\mathbb{M}$.

Поймем, что отношение эквивалентности разбивает натуральный ряд на не более чем счетное число классов эквивалентности (иначе из каждого класса можно выбрать по элементу и получить более чем счетное подмножество натурального ряда, что невозможно). Тогда классы эквивалентности можно пронумеровать числами натурального ряда(например, в порядке возрастания наименьших членов).

Значит, конкретному отношению эквиалентности можно сопоставить однозначно функцию $\mathbb{N} rightarrow \mathbb{N}$ (такое отображение будет инъективно; для любых двух неизоморфных разбиений на классы эквивалентности посмотрим на первый такой элемент i, принадлежит разным классам эквивалентности; он принадлежит разным классу $k \leq i$ в одном отношении, в другом отношении он принадлежит классу $k' \neq k$, значит i-ый символы в конечных последовательностях различны). Таким образом $\mathbb{M} \lesssim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$.

Покажем теперь, что $2^{\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{M}$. Построим по двоичной последовательности $S \in 2^{\mathbb{N}}$ разбиение на классы эквивалентности:

- $S_i = 0 \Rightarrow$ число $i+1$ не эквивалентно 0.
- $S_i = 1 \Rightarrow$ число $i+1$ эквивалентно 0.

Т.е. двоичной последовательностью мы разбиваем множество натуральных на два класса эквивалентности — содержащий и не содержащий 0. Каждое такое разбиение однозначно определяет последоваетльность, а последовательность однозначно задает разбиение $\Rightarrow$ существует инъекция $2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{M}$.

Тогда, по теореме Кантора-Берштейна, $2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{M}$.

Задача 3. Пусть $p(A) = 2^A$ - множество всех подможетв A. Пусть множество отношений эквивалентности на множестве действительных чисел - $\mathbb{M}$.

Покажем, что $p(\mathbb{R}) \lesssim \mathbb{M}$. Заметим, что $p(\mathbb{R}) \sim p(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Тогда, возьмем подмножество из $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Объявим, что все числа в него входящие — эквивалентны 0, а все числа, входящие в его дополнение до $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — не эквивалентны 0. Тогда для двух различных подмножеств в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ мы получим два различных разбиения на классы эквивалентности. Тогда $p(\mathbb{R}) \sim p(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \lesssim \mathbb{M}$.

Докажем, что и $\mathbb{M} \lesssim p(\mathbb{R})$. Рассмотрим множество S классов эквивалентности для отношения из $\mathbb{M}$. Каждому классу эквивалентности из S принадлежит хотябы один элемент из $\mathbb{R}$. Тогда для каждому классу в S можно сопоставить элемент из $\mathbb{R}$, ему принадлежащий. Для каждого класса в S выберем этот элемент и составим из них множество $P \lesssim 2^{\mathbb{N}}$ (подмножество континуума). Тогда это отношение эквивалентности определяется функцией $\mathbb{R} \to P$ (каждому числу в $\mathbb{R}$ сопоставляем число выбранное для его класса эквивалентности). Тогда кажодое отношение эквивалентности можно перевести в функцию $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда получаем, что $\mathbb{M} \lesssim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}} = p(\mathbb{R})$.

Значит, по т. Кантора-Берштейна $\mathbb{M} \sim p(\mathbb{R})$.

Задача 4. Посмотрим, при каких значениях аргументов функция принимает значение 1.

$$f(\vec{x}) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 \vee x_2) = 1, \\ (\bar{x}_1 \vee x_3) = 1, \\ (\bar{x}_2 \vee x_5) = 1, \\ \ldots \\ (\bar{x}_7 \vee x_9) = 1; \end{cases}$$

В свою очередь $x_1 \vee x_2 = 1 \Rightarrow x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$. При этом из равенства $x_1 = 0$ следует, что $x_3 = 1$, из чего следует $x_5 = 1 \ldots x_9 = 1$.

Аналогично, если $x_2 = 1$, то $x_2 = x_4 = \ldots = x_8 = 1$.

Поймем теперь, что если $x_{2k+1} = 1$, все последующие $x_{2m+1} = 1$ и что если $x_{2k} = 1$, все последующие $x_{2m} = 1$.

Отсюда получаем, что должно быть истинным одно из следующих выражений:

$$x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 \cdot x_2 x_4 x_6 x_8$$

$$\bar{x}_1 x_3 x_5 x_7 x_9 \cdot x_2 x_4 x_6 x_8$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_3 x_5 x_7 x_9 \cdot x_2 x_4 x_6 x_8$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 x_7 x_9 \cdot x_2 x_4 x_6 x_8$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_7 x_9 \cdot x_2 x_4 x_6 x_8$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_7 \bar{x}_9 \cdot x_2 x_4 x_6 x_8$$

$$x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 \cdot \bar{x}_2 x_4 x_6 x_8$$

$$x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 \cdot \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_6 x_8$$

$$x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 \cdot \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_6 x_8$$

$$x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 \cdot \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_6 \bar{x}_8$$

Тогда запись ДНФ выглядит так:

$$\vee_{i=0}^{4} (x_2 x_4 \ldots x_8 \cdot \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{2i+1} \ldots x_9) \ \vee_{i=1}^{4} (x_1 x_3 \ldots x_9 \cdot \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2i} \ldots x_8) \ \vee (x_1 x_2 \ldots x_9)$$

Задача 5. Выразим с помощью штриха Шеффера каждую связку из системы $(\neg, \wedge)$, которая является полной.

$\neg x = x|x$

Действительно, если $x = 1$, то $\neg(x \wedge x) = 0$, и если $x = 0$, то $\neg(x \wedge x) = 1$.

$x \wedge y = \neg(\neg(x \wedge y)) = \neg(x|y) = (x|y)|(x|y)$

Таким образом, мы выразили все связки полной системы штрихом Шеффера $\Rightarrow$ он образует полную систему.

Задача 6. Покажем, что любую функцию алгебры логики $f(\vec{x})$ можно представить в КНФ. Пусть $f(\vec{x})$ принимает значение истины только на наборах $a_0, \ldots, a_n$. Тогда рассмотрим функцию $g(\vec{x})$, которая принимает значение истины на всех наборах аргументов, кроме $a_0, \ldots, a_n$. Т.е. $g(\vec{x}) = \bar{f}(\vec{x})$. Для функции $g(\vec{x})$ существует некоторе представление в ДНФ:

$$g(\vec{x}) = p_0 \vee p_1 \vee \ldots \vee p_k$$

Где p_i — конъюнкция некоторых аргументов. Тогда отрицание g можно записать как:

$$\bar{g}(\vec{x}) = \overline{p_0 \vee p_1 \vee \ldots \vee p_k}$$

Применяя $k-1$ раз закон Де Моргана ($\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$) получаем.

$$\bar{g}(\vec{x}) = \bar{p}_0 \wedge \bar{p}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{p}_k$$

Помня о внутреннем устройстве p_i — конъюнкция нескольких литералов и законе Де Моргана об отрицании произведения ($\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$) имеем: $\bar{p}_i$ — дизъюнкция некторых литералов. Но тогда $\bar{g}(\vec{x}) = f(\vec{x})$ есть конъюнкция дизъюнкций литералов, т.е. у f есть представление в КНФ.

Задача 7. Поймем, что $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \ldots \oplus x_1x_2 \ldots x_n$. Действительно, левая часть выражения принимает значение 0, только если $\vec{x} = \vec{0}$. Докажем, что и правая часть ведет себя также.

Очевидно, что $0 \oplus 0 \ldots \oplus 0 = 0$. Пусть тогда $x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = 1$, $k \geq 1$. Тогда ненулевыми будут только те коэффициэнты, что являются конъюнкцией чисел из x_{i_j}. Таких найдется ровно $\binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k} = 2^k - 1$. Тогда слагаемых, равных «единице» нечетное число, а значит значение выражения равно 1, если хотябы один из аргументов равен 1.

Количество ненулевых членов в данном полиноме равно $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$.

Задача 8. Поймем, что функция $MAJ(x_1, x_2, x_3)$ является самодвойственной (действительно, если в наборе x_1, x_2, x_3 больше «единиц», то в наборе $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ больше 0 и $MAJ(x_1, x_2, x_3) = \neg(MAJ(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3))$, аналогично если среди аргументов больше «нулей»).

Но функция $\neg$ тоже является самодвойственной: $\neg(x) = \neg(\neg(\neg(x)))$.

Но тогда композиция этих функций тоже самодвойственна, а значит не способна вычислить не самодвойственную функцию, а значит система $(\neg, MAJ(x_1, x_2, x_3))$ не полна.