Домашнее задание 12

Ткачев Андрей, группа 166

8 декабря 2016 г.

Задача 1. Пусть Ω - множество всех исходов, а A - множество исходов, при которых отношение транзитивно. $|\Omega| = 2^4 = 16$ - в бинарном отношении на двух элементах элемент может соотноситься с собой, а может и нет, может вступать в отношение с другим элементом, как левый операнд, может и не вступать; симметрично для второго элемента.

Посчитаем $|\bar{A}|$ - количество не транзитивных бинарных отношений на множестве из двух элементов. Пусть элементы $a,\ b$; отношение R. Поймем, что транзитивность нарушается только в трех случаях: когда aRb, bRa, $(a,\ a) \notin R$ и bRb; когда bRa, aRb, $(b,\ b) \notin R$ и aRa; или когда aRb, bRa, $(a,\ a) \notin R$ и $(b,\ b) \notin R$. Таким образом, $|\bar{A}| = 3$.

Так как модель равновероятная, то $Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega|-|\bar{A}|}{\Omega} = \frac{16-3}{16} = \frac{13}{16}$

Ответ: $\frac{13}{16}$.

Задача 2. Пусть Ω - множество всех всюду определенных функций f из A в B (где $|A| = a,\ |B| = b$). $|\Omega| = b^a$ (Для каждого элемента из A можно сопоставить элемент из B b способами).

Пусть M - множество тех исходов, при которых f - биекция. Посчитаем $|M|$: $|M| = \prod_{i=1}^{max(a,\ b)}(min(a,\ b) - i + 1)$ (Если f - биекция, то каждому $x \in A$ взаимно однозначно соответствует $y \in B$, а значит мощности множеств равны, т.е. $a = b$; В случае равенства множеств выберем первому эл-ту из A b способами эл-т из B, второму - $b-1$ способом и тд. т.е. всего $b! = a!$ биекций; В случае $a \neq b$ одно из чисел a, b больше другого, а значит произведение $\prod_{i=1}^{max(a,\ b)}(min(a,\ b) - i + 1)$ содержит множителем 0, значит равно 0, что отражает число биекций в этом случае).

Модель равновероятная, значит $Pr[M] = \frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{\prod_{i=1}^{max(a,\ b)} min(a,\ b) - i + 1}{b^a}$.

Ответ: $\frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{\prod_{i=1}^{max(a,\ b)}(min(a,\ b) - i + 1)}{b^a}$.

Задача 3. Посчитаем отдельно те исходы, при которых в перестановке 37 стоит на 19 месте, а 36 - среди первых 18-ти (A) и те исходы, при которых 37 находится среди первых 18 чисел (B). Поймем, что события A и

B не пересекаются и в объединении дают событие X «Наибольшее число среди первых 18 больше наибольшего среди 18 последних» (Действительно, наибольшее число в перестановке - 37, значит «побеждают» те 18 чисел, которые содержат его. В случае когда 37 не входит ни в первые ни в последние 18 чисел, «выигрывают» те 18 чисел, среди которых есть 36).

$|A| = 18 \cdot 35!$ - 18 способами размещаем число 36 среди первых 18 и 35! - расставляем оставшиеся числа. $|B| = 18 \cdot 36!$ - размещаем одним из 18 способов 37 среди первых 18 и дополняем перестановку всеми возможными способами.

Так как всего перестановок на 37 элементах 37! и A, B - равновероятные события, то $Pr[X] = \frac{|X|}{37!} = \frac{|A|+|B|}{37!} = \frac{18(1+36)}{36 \cdot 37} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 4. Посчитаем множество A исходов, при которых последовательность заканчивается на 1. $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5) \in A$, если $a_5 = 1$, $37 > a_1 > a_2 > ... > a_4 > 1$

Т.е. $a_1,\ ...\ a_4$ - как-то упорядоченные числа от 2 до 36. Поймем, что любые четыре попарно различных числа можно поставить в порядке убывания, значит таких наборов из 4-х чисел - число способов выбрать 4 каких-то числа от 2-х до 36: $\binom{36-1}{4}$. Тогда $|A| = \binom{35}{4}$.

Всего же убывающих последовательностей длины 5 с числами от 1 до 36: $\binom{36}{5}$. Тогда $Pr[A] = \frac{\binom{35}{4}}{\binom{36}{5}} = \frac{5}{36}$.

Ответ: $\frac{5}{36}$.

Задача 5. Посчитаем число неубывающих последовательностей $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ где $1 \leqslant x_i \leqslant 36$. Взаимно однозначно сопоставим каждому набору $(x_1,\ ..., x_5)$ набор $(x_1 - 1,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x2,\ ..., 36 - x_5) = (d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5,\ d_6)$ (Каждый набор из x однозначно задает d, а по набору (d_i) можно однозначно восстановить (x_i)). Тогда число наборов (d_i) равно числу наборов (x_i). Заметим, что $d_1 + ... + d_6 = 35$, при этом $0 \leqslant d_i$. Т.е. мы приходим к задаче Муавра. Число таких разбиений 35 на слагаемые: $\binom{35+6-1}{5} = \binom{40}{5}$.

Поймем, что неубывающие последовательности длины 5, начинающиеся с 1-цы получаются приписыванием к 1-це неубывающую последовательность длины 4. Неубывающих последовательностей длины 4: $\binom{35+5-1}{4} = \binom{39}{4}$ - по аналогии с случаем большей размерности. Т.е. если A - событие «последовательность начинается с 1» вероятностного пространства неубывающих последовательностей чисел от 1 до 36, то $|A| = \binom{39}{4}$.

Так как все исходы равновероятны, то $Pr[A] = \frac{|A|}{\binom{40}{5}} = \frac{\binom{39}{4}}{\binom{40}{5}} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Задача 6. Вероятностное пространство Ω - двоичные слова длины 21, все исходы равно возможны, $|\Omega| = 2^{21}$. Искомая вероятность - $Pr[X]$

Примем за α - число единиц в первых 10 битах, β - число единиц в последних 10 битах, γ - в последних 11 битах.

Посчитаем вероятность события A - «$\alpha = \beta$, 10-ый бит - 1 (нумерация с 0)». В располагаться α единиц могут $\binom{10}{\alpha}$ способами в начале и независимо $\binom{10}{\beta} = \binom{10}{\alpha}$ способами в конце. Т.е. $|A| = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} \cdot \binom{10}{i} = \binom{10}{i} \cdot \binom{10}{10-i} = \binom{20}{10}$ (это равенство следует из доказанного в ДЗ-3; установить 10-ый бит в 1 можно ровно 1-м способом). $Pr[A] = \frac{\binom{20}{10}}{|\Omega|}$.

Посчитаем вероятность события B - «$\alpha < \beta$». Поймем, что если событие C - «$\alpha > \beta$», то $Pr[B] = Pr[C]$ из соображений симметрии - длины последовательностей бит равны, все последовательности равно вероятны. Пусть тогда событие D - «$\alpha = \beta$», по аналогии с $|A|$ - $|D| = 2 \cdot \binom{20}{10}$ (теперь 10-ому биту позволено быть и 0, и 1). Поймем, что $Pr[B] + Pr[C] + Pr[D] = 1$, т.к. эти события описывают все вероятностное пространство. Тогда $2 \cdot Pr[B] = 1 - Pr[D] = 1 - \frac{2 \cdot \binom{20}{10}}{|\Omega|}$, $Pr[B] = \frac{1}{2} - \frac{\binom{20}{10}}{|\Omega|}$.

Поймем, что $Pr[B] + Pr[A] = Pr[X]$ - т.к. события A и B не пересекаются, а в объединении описывают все исходы, при которых $\gamma > \alpha$. Тогда $Pr[X] = \frac{\binom{20}{10}}{|\Omega|} + \frac{1}{2} - \frac{2 \cdot \binom{20}{10}}{2|\Omega|} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 7. Вероятностное пространство Ω - все перестановки карт в колоде из 36 карт; все исходы равновероятны; $|\Omega| = 36!$. Пусть событие A_x - «среди первых x карт есть хотя бы один туз».Нужно найти минимальный x, такой, что $Pr[A_x] > \frac{1}{2}$, что мы и сделаем.

Поймем, что $Pr[A_x] > \frac{1}{2} \Leftrightarrow Pr[\bar{A}_x] \leqslant \frac{1}{2}$ (событие $\bar{A}_x$ «Среди первых x карт нет тузов» и событие A_x в объединение дают все пространство). Посчитаем $|\bar{A}_x|$. Среди первых x карт нет, значит все тузы расположены среди $36 - x$ последних карт, причем остальные карты располагаются как угодно. Таких перестановок колоды $(\binom{36-x}{4} \cdot 4!) \cdot 32!$ - (выбираем 4 места под тузы в колоде, расставляем тузов 4! способами и на оставшиеся 32 места прочие карты всеми возможными способами). Таким образом $|\bar{A}_x| = (\binom{36-x}{4} \cdot 4!) \cdot 32! = \frac{(36-x)!32!}{(32-x)!}$. $Pr[|\bar{A}_x|] = \frac{(36-x)!32!}{(32-x)!|\Omega|} = \frac{(36-x)!32!}{(32-x)!36!} = P(x)$.

Найдем наименьшее в натуральных числах решение неравенства $\frac{(36-x)!32!}{(32-x)!36!} \leqslant \frac{1}{2}$. Для начала поймем, что если $P(a) > \frac{1}{2}$, то $\forall a' < a : \; P(a') > \frac{1}{2}$, так как $P(a) > P(a')$ (Действительно, вероятность не встретить туза среди первых a' карт больше, чем встретить туза среди первых a карт, т.к. $\bar{A}_a \subseteq \bar{A}_{a'}$). Заметим, что $P(6) = \frac{87}{187} \leqslant \frac{1}{2}$, $P(5) = \frac{899}{1683} > \frac{1}{2}$. Тогда $x = 6$ - минимальное решение неравенства.

Получается из колоды карт необходимо вытащить минимум 6 карт, чтобы вероятность встретить туза была больше $\frac{1}{2}$.

Ответ: 6.

Задача 8. Вероятностное пространство Ω - все возможные наборы дней рождений (без 29-ого февраля) в группе из 30 человек. $|\Omega| = 364^{30}$. Событие A - «в наборе найдется две совпадающие даты». Тогда $\bar{A}$ - «Все даты в наборе из 30 попарно различны». Поймем, что A и $\bar{A}$ - взаимно дополняющие события и $Pr[A] + Pr[\bar{A}] = 1$.

Найдем $Pr[\bar{A}]$. Посчитаем число попарно различных наборов чисел от 1 до 364 из 30 элементов: $|\bar{A}| = \binom{364}{30} \cdot 30!$ - для каждого множества нужных дат, мощностью 30 введем порядок 30! способами, получив все возможные наборы попарно различных дат. $Pr[\bar{A}] = \frac{\bar{A}}{|\Omega|} = \frac{364!}{334!364^{30}}$.

Тогда $Pr[A] = 1 - \frac{364!}{334!364^{30}} = 1 - \frac{335 \cdot \ldots \cdot 364}{364^{30}} \approx 0.707331$ в чем можно убедиться произведя соответствующие вычисления.

Задача 9. Всего турниров на n элементном множестве - $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (всего всего пар элементов в отношениях - $\frac{n(n-1)}{2}$, причем между $(a,\ b)$ дуга отношения может идти либо от a к b, либо от b к a - 2 опции, для каждой пары отношений). Тогда, если Ω - вероятностное пространство из условия, то $|\Omega| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Линейных порядков на n элементном множестве - $n!$ - по количеству способов упорядочить n элементов. Тогда вероятность события A: случайный турнир - линейный порядок, равна $Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

Посчитаем $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n!}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

$$\frac{n!}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} < \frac{n!}{2^{(\frac{(n-1)}{2})^{(n-1)}}} = 1 \cdot \frac{2}{2^{\frac{(n-1)}{2}}} \cdot \frac{3}{2^{\frac{(n-1)}{2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2^{\frac{(n-1)}{2}}}$$

Докажем теперь, $\frac{n}{2^{\frac{(n-1)}{2}}} < \frac{1}{2}$. Заметим, что последовательность $a_n = \{\frac{n}{2^{\frac{(n-1)}{2}}}\}$ - убывает: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{\frac{n}{2}}}}{\frac{n}{2^{\frac{n-1}{2}}}} = \frac{n+1}{\sqrt{2}n} < 1$, $a_{11} = \frac{11}{2^5} < \frac{1}{2} \Rightarrow a_n < \frac{1}{2}$, $11 \leqslant n$. Но тогда при больших n: $\prod_{i=2}^{n} \frac{i}{2^{\frac{(n-1)}{2}}} < \prod_{i=2}^{n} \frac{n}{2^{\frac{(n-1)}{2}}} < (\frac{1}{2})^{n-1}$.

Тогда имеем $1 \cdot \frac{2}{2^{\frac{(n-1)}{2}}} \cdot \frac{3}{2^{\frac{(n-1)}{2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2^{\frac{(n-1)}{2}}} < (\frac{1}{2})^{n-1}$. Т.е. $0 \leqslant \frac{n!}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \leqslant (\frac{1}{2})^{n-11}$ при $n \to \infty$, но $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{n-1} = 0$. Тогда по теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = 0$.

Таким образом вероятность того, что турнир окажется линейным порядком стремится к нулю, при $n \to \infty$.