Математическая логика и теория алгоритмов

Посов Илья Александрович

запись конспекта: Блюдин Андрей и Хаматов Вадим

Содержание

1 Математическая логика

1.1 Исчисление высказываний

1.1.1 Основные понятия

Определение. Логическая функция — это множество из 2 элементов. Также, логической функцией называют множество логических значений $B = \{0, 1\}$, где 0 — это ложь (false), а 1 — это истина (true)

Определение. Логическая функция от n переменных

$$f : B^n \to B$$

Замечание. Часто логические функции вводят как перечисление возможных аргументов и значений функции при этих аргументах

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 1: Таблица истинности для $f(x, y)$

Пример. Введем функцию $f(x, y)$

Эту же функцию можно задать функцией $f(x, y) = max(x, y)$

Утверждение. *Функция от* n *переменных может быть* $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

x_1	x_2	...	x_n	f($x_1, x_2, \ldots, x_n$)
0	0	...	0	0 или 1
...	...	...	...	0 или 1
1	1	...	1	0 или 1

Таблица 2: Таблица истинности для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

При этом количество всех возможных наборов аргументов равняется 2^n*, а количество всех возможных функций при всех возможных наборах аргументов равняется* 2^{2^n}

Следствие. *Посчитаем количество таких функкий для разных* n

$n = 1 \quad 2^2 = 4$ *функций* $f(x)$

$n = 2 \quad 2^{2^2} = 16$ *функций* $f(x, y)$

$n = 3 \quad 2^{2^3} = 2^8 = 256$ *функций* $f(x, y, z)$

1.1.2 Функции от 1 переменной (их определения)

Пример. Перечислим все возможные функции от 1 переменной

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Данные функции имеют значение:

$f_1(x) = 0$ — функция 0

$f_2(x) = x$ — функция x

$f_3(x) = !x, \bar{x}, \neg x$, not x — функция отрицания (не x)

$f_4(x) = 1$ — функция 1

1.1.3 Функции от 2 переменных (их определения)

Пример. Перечислим все возможные функции от 2 переменных

x	y	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 3: Таблица истинности для $f(x, y)$

Продолжение:

x	y	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$	$f_{11}(x)$	$f_{12}(x)$	$f_{13}(x)$	$f_{14}(x)$	$f_{15}(x)$	$f_{16}(x)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 4: Таблица истинности для $f(x, y)$

Перечислим основные значения функций:

$f_2(x, y)$ — это конъюнкция или "лочическое и"или логическое умножение $(xy, x\&y, x \wedge y)$

$f_7(x, y)$ — это исключающее или $(x+y, xXORy, x \oplus y)$, также данную функцию можно ассоциировать как $(x + y)mod2$

$f_8(x, y)$ — это логическое или, но ее можно также записать как $max(x, y)$ $(x|y, x \vee y)$

$f_{10}(x, y)$ — это эквивалентность $(x \Leftrightarrow y, x \equiv y, x == y)$

$f_{14}(x, y)$ — это импликация $(x \Rightarrow y, x \to y)$

Импликация работает так, что истина следует из чего угодно:

лешия не существует $\Rightarrow$ русалок не существует $= 1$ $(1 \Rightarrow 1 = 1)$

допса скучная $\Rightarrow$ русалок не существует $= 1$ $(0 \Rightarrow 1 = 1)$

русалки существуют $\Rightarrow$ драконы существуют $= 1$ $(0 \Rightarrow 0 = 1)$

x $\Rightarrow$ y = 0 только если x = 1, а y = 0

$f_{12}(x, y)$ — это обратная импликация $(x \Leftarrow y = y \Rightarrow x)$

$f_9(x, y)$ — стрелка Пирса $(x \downarrow y = \overline{x \vee y})$

$f_{15}(x, y)$ — штрих Шеффера $(x|y = \overline{xy})$

$f_3(x, y)$ — запрет по y $(x > y = \overline{x \Rightarrow y})$

$f_1(x, y)$ — 0

$f_4(x, y)$ — x

$f_5(x, y)$ — запрет по x ($x < y = \overline{x \Leftarrow y}$)
$f_6(x, y)$ — y
$f_{11}(x, y)$ — не y ($\neg y$)
$f_{13}(x, y)$ — не x ($\neg x$)
$f_{16}(x, y)$ — 1

Определение. Логические выражения — способ задания логических функций с помощью переменных, цифр 0 или 1 и операций:
$\cdot \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad + \quad \equiv \quad | \quad \downarrow \quad < \quad >$

Пример. Примеры логических выражений:
$(x \vee y) =$
$(x \Rightarrow yz) \vee (y \equiv z)$
$(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y)$

Определение. Значения логического выражения можно записать **Таблицей истинности**

Пример. $f(x, y, z) = (x \vee y)z$

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Замечание. Порядок строчек в таблеце истинности может быть любым, но лучше использовать как у двоичных чисел

Утверждение. *Таблицы истинности часто считают постепенно*

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y)z$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

1.1.4 Приоритеты операций

$$\neg$$

$$\cdot$$

$$\vee$$

$$+ \quad \equiv$$

$$\Rightarrow \quad \Leftarrow$$

$$| \quad \downarrow \quad < \quad >$$

Пример. Примеры приоритетов операций:
$\neg x \vee y = (\neg x) \vee y$
$x \vee yz = x \vee (yz)$
$x \Rightarrow y \vee z = x \Rightarrow (y \vee z)$

1.1.5 Алгебраические преобразования логических выражений

Определение. Алгебраические преобразования логических выражений — изменяем выражения по правилам, обычно в сторону упрощения

Пример. $(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y) = 1 \vee (1 \Rightarrow y) = 1$

Утверждение 1.

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Доказательство:

x	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

Утверждение 2. *При* $\vee$*:*

$$1 \vee x = 1$$

$$0 \vee x = x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

1.1.6 Таблица эквивалентных логических выражений

Утверждение. $x \vee y = y \vee x$ - *симметричность*

$x \vee 0 = x$
$x \vee 1 = 1$
$x \vee x = x$
$x \vee \overline{x} = 1$

Доказательство:

x	$\overline{x}$	$x \vee \overline{x}$
0	1	$0 \vee 1 = 1$
1	0	$1 \vee 0 = 1$

$xy = yx$
$x * 0 = 0$
$x * 1 = x$
$x * x = x$
$x * \overline{x} = 0$
$x + y = y + x$
$x + 0 = x$
$x + 1 = \overline{x}$
$x + x = 0$
$x + \overline{x} = 1$

Утверждение. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ - *ассоциативность*

Ассоциативность означает,что порядок скобок не важен

Пример. $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$ - не симметричная функция

Доказательство:

x y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	1
1 1	1	1

Замечание. $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$

$x \Rightarrow 0 = \overline{x}$
$0 \Rightarrow x = 1$

Доказательство:

x	$x \Rightarrow 0$
0	$0 \Rightarrow 0 = 1$
1	$1 \Rightarrow 0 = 0$

$x \Rightarrow 1 = 1$
$1 \Rightarrow x = x$
$x \Rightarrow x = 1$
$x \Rightarrow \overline{x} = \overline{x}$
$\overline{x} \Rightarrow x = x$
$\overline{x} \Rightarrow y \Rightarrow z$ *договоримся, что это* $x \Rightarrow y(y \Rightarrow z) \neq (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$

x y z	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

$x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$
$x \Leftrightarrow 0 = \overline{x}$
$x \Leftrightarrow 1 = x$
$x \Leftrightarrow x = 1$
$x \Leftrightarrow \overline{x} = 0$
$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z$ *- ассоциативно*

Утверждение. *Дистрибутивность*
$(x \vee y)z = xz \vee yz$
$(x + y)z = xz + yz$ *по таблице истинности*
$(x\&y) \vee z$ $(xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$
$(x \vee y)\&z = (x\&z) \vee (y\&z)$
$(x\&y) \vee z = (x \vee z)\&(y \vee z)$

Замечание. $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(y_1 \vee y_2) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_2 = x_1y_1 \vee x_2y_1 \vee x_3y_1 \vee x_1y_2 \vee x_2y_2 \vee x_3y_2$

$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = xy \vee xz \vee zy \vee zz = xy \vee xz \vee zy \vee z = xy \vee xz \vee zy \vee z * 1 = xy \vee z(x \vee y \vee 1) = xy \vee z$ сошлось

$x + y = \overline{x \Rightarrow} y$ *- смотри Таблицу истинности*

$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = x \Rightarrow y$

1.1.7 Многочлены Жегалкина

Замечание. Одну и ту же функцию можно записать по разному.

В алгебре: $f(x) = 1 + x = x + 1 = x + 5 - 4 = sin(x - x) + x = ...$

В логике: $f(x, y) = x \vee y = x \vee y \vee 0 = (x \vee y)(\overline{y} \vee y = x\overline{y} \vee y$ *(= - дистрибутивность)*

Многочлены Жегалкина для логической формулы

Определение. $f(x_1......x_n)$ - это многочлен с переменными xi, конспектами 0,1 и со степенями переменных $\leqslant 1$. Это многочлены от xi $\mathbf{Z_2}$

Пример. $f(x, y, z) = 1 + x + yz + xyz$

$1 + x$ $\qquad$ $xy + xyz$

$1 + xy$

Не многочлены

$1 + x + (y \vee z)$

$1 + x + z^2$ *нельзя степень 2*

Замечание. В общем случае многочлен от 1 переменной ($_i = 0$ или 1)

$a_0 + a_1x$

от 2ух: $a_0 + a_1x + a2y + a3xy$

от 3ех: $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$

В общем случае $f(x1....x_n)$ $a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n + ax_1x_2 + ax_1x_3 + ...$ *(все пары переменных)* $+ ax_1x_2x_3 + ax_1x_3x_2$ $\leftarrow$*все тройки перменных*$+ax_1x_2x_3...x_n$

Определение. $\forall f(x_1...x_n)$ - логические функция $\exists!$ многочлен Жегалкина $g(x_1...x_n) : f = g$

Замечание. Всего 4 функции от 1ой переменной

$f(x) = 0 = \overline{x} = 0 + 0x$

$f(x) = 1 = 1 = 1 + 0x$

$f(x) = x = x = 0 + 1x$

$f(x) = \overline{x} = 1 + x = 1 + 1x$

Докозательство:

Определение. Разные многочлены - это разные логические функции т.е. $f(x_1 ... x_n = a_0 + ... + a_1 x_1 ... x_n$

$g(x_1 ... x_n) = b_0 + ... + b x_1 ... x_n$

$\exists! : a_i \neq b_i$ различающийся

Доказательство:

Возьмем индекс с самым большик количеством переменных

$f(x, y, z) = 1 + x + xy + xyz = ... + 1x + Dy + Dz + 1xy$

$g(x, y, z) = 1 + y + z + xyz ... + Dx + 1y + 1z$

для переменных этого слагаемого подставим 1 0xy

для остальных переменных : 0

[В примере $x = 1, y = 0, z = 0 : f(1, 0, 0)g(1, 0, 0)$]

и в f и в g все другие слагаемые равны 0

Теперь f(...) и g(...)

$f(...) = a_i x 1 x_2 x_3 \neq b_i x_1 x_2 x_3 \Rightarrow f(x_1 ... x_n) \neq y$

Доказательство:

Проверим, что многочленов Жегалкина столько, сколько функций:

Посчитаем

$a_0 + a_1 x_1 + ... + a_1 x_1 x_2 ... x_n$

Сколько слагаемых:

1) 1 слагаемых без переменных

n слагаемых с переменной

$a_1 x_1 + ... + a_n x_n$

C_n^2 *- слагаемых с 2 - мя переменными*

^3_n *- слагаемых с 3 - мя переменными*

C_n^n *- слагаемых с n переменными*

Всего : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... C_n^n = 2^n((1 + 1)^2)$

Пример. $a_0 + a_1 x$ - 2 слагаемых

$a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy - 2^2 = 4$ слагаемых

2) Все слагаемых имею вид: $x_1, x_2, x_3 ... x_n$ (0 или 1) - 2^n слагаемых

Итого: многочлен Жегалкина от n переменных

Задача. Сколько разных многочленов?

Это столько же, сколько логический функций

Итог:

Следствие: Любая логическая функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина

Пример. $f(x, y) = x \vee y$

$f(x, y) = x * y$ - уже многочлен Жегалкина

Метод неопределенных коэффициентов:

Подберем $x \vee y = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$

$f(0, 0) = 0$

$f(0, 0) = a_0 + a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3 ...$

$f(1, 0) = 1 \vee 0 = 1$

$f(1, 0) = a_0 + a_1 = a_1$ $(a_0 = 0, \Rightarrow a_1 = 1$

$f(0, 1) =$ аналогично $\Rightarrow a_1 = 1$

$f(x, y) = x + y + a_3 xy$

$f(1, 1) = 1 \vee 1 = 1$

$f(1, 1) = 1 + 1 + a_3 = 0 + a_3 = a_3$, $a_3 = 1$

Ответ: $x \vee y = x + y + xy$