

# Математическая логика и теория алгоритмов

Посов Илья Александрович

запись конспекта: Блюдин Андрей и Хаматов Вадим

## Содержание

<b>1</b>	<b>Математическая логика</b>	<b>2</b>
1.1	Исчисление высказываний . . . . .	2
1.1.1	Основные понятия . . . . .	2
1.1.2	Функции от 1 переменной (их определения) . . . . .	3
1.1.3	Функции от 2 переменных (их определения) . . . . .	3
1.1.4	Приоритеты операций . . . . .	5
1.1.5	Алгебраические преобразования логических выражений . . . . .	6
1.1.6	Таблица эквивалентных логических выражений . . . . .	6
1.1.7	Многочлены Жегалкина . . . . .	8
1.1.8	Получение многочлена Жегалкина через алгебраические упрощения . . . . .	11
1.1.9	Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ) . . . . .	12
1.1.10	Задача (не) выполнимости . . . . .	14
1.1.11	Запись таблиц истинности в виде графика . . . . .	15
1.1.12	Задача минимизации ДНФ . . . . .	16
1.1.13	Двойственная функция . . . . .	19
1.1.14	Конъюнктивно-нормальная форма КНФ . . . . .	21
1.1.15	Класс замкнутости . . . . .	24
1.1.16	Примеры замкнутых классов . . . . .	26
1.1.17	Теорема Поста . . . . .	32
1.1.18	Автоматическое доказательство теорем . . . . .	36
1.1.19	Логическое следствие . . . . .	36
1.1.20	Метод резолюций . . . . .	39
1.2	Исчисление предикатов . . . . .	43
1.2.1	Операции преобразования . . . . .	48

1.2.2	Нормальные формы . . . . .	51
1.2.3	Предваренная нормальная форма . . . . .	52
1.2.4	Сколемовская нормальная форма . . . . .	52
1.2.5	Формальные языки . . . . .	55
1.2.6	Машина Тьюринга . . . . .	57
1.2.7	Контекстно-свободные языки . . . . .	60
1.2.8	Регулярные языки . . . . .	62

# 1 Математическая логика

## 1.1 Исчисление высказываний

### 1.1.1 Основные понятия

**Определение.** Логическая функция — это множество из 2 элементов. Также, логической функцией называют множество логических значений  $B = \{0, 1\}$ , где 0 — это ложь (false), а 1 — это истина (true)

**Определение.** Логическая функция от  $n$  переменных

$$f : B^n \rightarrow B$$

*Замечание.* Часто логические функции вводят как перечисление возможных аргументов и значений функции при этих аргументах

**Пример.** Введем функцию  $f(x, y)$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 1: Таблица истинности для  $f(x, y)$

Эту же функцию можно задать функцией  $f(x, y) = \max(x, y)$

**Утверждение.** Функция от  $n$  переменных может быть  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

При этом количество всех возможных наборов аргументов равняется  $2^n$ , а количество всех возможных функций при всех возможных наборах аргументов равняется  $2^{2^n}$

$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0 или 1
...	...	...	...	0 или 1
1	1	...	1	0 или 1

Таблица 2: Таблица истинности для  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

**Следствие.** *Посчитаем количество таких функций для разных  $n$*

$n = 1$   $2^2 = 4$  функций  $f(x)$

$n = 2$   $2^{2^2} = 16$  функций  $f(x, y)$

$n = 3$   $2^{2^3} = 2^8 = 256$  функций  $f(x, y, z)$

### 1.1.2 Функции от 1 переменной (их определения)

**Пример.** Перечислим все возможные функции от 1 переменной

$x$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Данные функции имеют значение:

$f_1(x) = 0$  — функция 0

$f_2(x) = x$  — функция  $x$

$f_3(x) = \neg x, \bar{x}, \neg x, \text{not } x$  — функция отрицания (не  $x$ )

$f_4(x) = 1$  — функция 1

### 1.1.3 Функции от 2 переменных (их определения)

**Пример.** Перечислим все возможные функции от 2 переменных

$x$	$y$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 3: Таблица истинности для  $f(x, y)$

Продолжение:

**Перечислим основные значения функций:**

$f_2(x, y)$  — это конъюнкция или "логическое и" или логическое умножение ( $xy, x \& y, x \wedge y$ )

$x$	$y$	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$	$f_{11}(x)$	$f_{12}(x)$	$f_{13}(x)$	$f_{14}(x)$	$f_{15}(x)$	$f_{16}(x)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 4: Таблица истинности для  $f(x, y)$

$f_7(x, y)$  — это исключающее или  $(x + y, x XOR y, x \oplus y)$ , также данную функцию можно ассоциировать как  $(x + y) \bmod 2$

$f_8(x, y)$  — это логическое или, но ее можно также записать как  $max(x, y)$   $(x|y, x \vee y)$

$f_{10}(x, y)$  — это эквивалентность  $(x \Leftrightarrow y, x \equiv y, x == y)$

$f_{14}(x, y)$  — это импликация  $(x \Rightarrow y, x \rightarrow y)$

Импликация работает так, что истина следует из чего угодно:

лешия не существует  $\Rightarrow$  русалок не существует = 1 ( $1 \Rightarrow 1 = 1$ )

допса скучная  $\Rightarrow$  русалок не существует = 1 ( $0 \Rightarrow 1 = 1$ )

русалки существуют  $\Rightarrow$  драконы существуют = 1 ( $0 \Rightarrow 0 = 1$ )

$x \Rightarrow y = 0$  только если  $x = 1$ , а  $y = 0$

$f_{12}(x, y)$  — это обратная импликация  $(x \Leftarrow y = y \Rightarrow x)$

$f_9(x, y)$  — стрелка Пирса  $(x \downarrow y = \overline{x \vee y})$

$f_{15}(x, y)$  — штрих Шеффера  $(x|y = \overline{xy})$

$f_3(x, y)$  — запрет по  $y$   $(x > y = \overline{x \Rightarrow y})$

$f_1(x, y) = 0$

$f_4(x, y) = x$

$f_5(x, y)$  — запрет по  $x$   $(x < y = \overline{x \Leftarrow y})$

$f_6(x, y) = y$

$f_{11}(x, y)$  — не  $y$  ( $\neg y$ )

$f_{13}(x, y)$  — не  $x$  ( $\neg x$ )

$f_{16}(x, y) = 1$

**Определение.** Логические выражения — способ задания логических функций с помощью переменных, цифр 0 или 1 и операций:

$\cdot \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad + \quad \equiv \quad | \quad \downarrow \quad < \quad >$

**Пример.** Примеры логических выражений:

$(x \vee y) =$

$(x \Rightarrow yz) \vee (y \equiv z)$

$(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y)$

**Определение.** Значения логического выражения можно записать **Таблицей истинности**

**Пример.**  $f(x, y, z) = (x \vee y)z$

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

*Замечание.* Порядок строчек в таблице истинности может быть любым, но лучше использовать как у двоичных чисел

**Утверждение.** Таблицы истинности часто считают постепенно

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y)z$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

#### 1.1.4 Приоритеты операций

$\neg$

.

$\vee$

$+$   $\equiv$

$\Rightarrow$   $\Leftarrow$

$|$   $\downarrow$   $<$   $>$

**Пример.** Примеры приоритетов операций:

$$\neg x \vee y = (\neg x) \vee y$$

$$x \vee yz = x \vee (yz)$$

$$x \Rightarrow y \vee z = x \Rightarrow (y \vee z)$$

### 1.1.5 Алгебраические преобразования логических выражений

**Определение.** Алгебраические преобразования логических выражений — изменяем выражения по правилам, обычно в сторону упрощения

**Пример.**  $(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y) = 1 \vee (1 \Rightarrow y) = 1$

**Утверждение 1.**

$$\overline{\overline{x}} = x$$

*Доказательство:*

$x$	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

**Утверждение 2.** При  $\vee$ :

$$1 \vee x = 1$$

$$0 \vee x = x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

### 1.1.6 Таблица эквивалентных логических выражений

**Утверждение.**  $x \vee y = y \vee x$  - симметричность

$$x \vee 0 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \vee x = x$$

$$x \vee \overline{x} = 1$$

*Доказательство:*

$x$	$\overline{x}$	$x \vee \overline{x}$
0	1	$0 \vee 1 = 1$
1	0	$1 \vee 0 = 1$

$$xy = yx$$

$$x * 0 = 0$$

$$x * 1 = x$$

$$x * x = x$$

$$x * \bar{x} = 0$$

$$x + y = y + x$$

$$x + 0 = x$$

$$x + 1 = \bar{x}$$

$$x + x = 0$$

$$x + \bar{x} = 1$$

**Утверждение.**  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  - ассоциативность  
 Ассоциативность означает, что порядок скобок не важен

**Пример.**  $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$  - не симметричная функция

**Доказательство:**

x y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	1
1 1	1	1

*Замечание.*  $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$

$$x \Rightarrow 0 = \bar{x}$$

$$0 \Rightarrow x = 1$$

**Доказательство:**

x	$x \Rightarrow 0$
0	$0 \Rightarrow 0 = 1$
1	$1 \Rightarrow 0 = 0$

$$x \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 \Rightarrow x = x$$

$$x \Rightarrow x = 1$$

$$x \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}$$

$$\bar{x} \Rightarrow x = x$$

$$\bar{x} \Rightarrow y \Rightarrow z \text{ договоримся, что это } x \Rightarrow y(y \Rightarrow z) \neq (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$$

$$x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$$

$$x \Leftrightarrow 0 = \bar{x}$$

$$x \Leftrightarrow 1 = x$$

x y z	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

$$x \Leftrightarrow x = 1$$

$$x \Leftrightarrow \bar{x} = 0$$

$$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z \text{ - ассоциативно}$$

**Утверждение.** Дистрибутивность

$$(x \vee y)z = xz \vee yz$$

$$(x + y)z = xz + yz \text{ по таблице истинности}$$

$$(x \& y) \vee z = (xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$$

$$(x \vee y) \& z = (x \& z) \vee (y \& z)$$

$$(x \& y) \vee z = (x \vee z) \& (y \vee z)$$

*Замечание.*  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(y_1 \vee y_2) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_2 = x_1y_1 \vee x_2y_1 \vee x_3y_1 \vee x_1y_2 \vee x_2y_2 \vee x_3y_2$

$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = xy \vee xz \vee zy \vee zz = xy \vee xz \vee zy \vee z = xy \vee xz \vee zy \vee z * 1 = xy \vee z(x \vee y \vee 1) = xy \vee z \text{ сошлось}$$

$$x + y = \overline{x \Rightarrow y} \text{ - смотри Таблицу истинности}$$

$$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = x \Rightarrow y$$

### 1.1.7 Многочлены Жегалкина

*Замечание.* Одну и ту же функцию можно записать по разному.

$$\text{В алгебре: } f(x) = 1 + x = x + 1 = x + 5 - 4 = \sin(x - x) + x = \dots$$

*В логике:*  $f(x, y) = x \vee y = x \vee y \vee 0 = (x \vee y)(\bar{y} \vee y = x\bar{y} \vee y \text{ (= - дистрибутивность)}$

**Многочлены Жегалкина для логической формулы**

**Определение.**  $f(x_1, \dots, x_n)$  - это многочлен с переменными  $x_i$ , конспектами 0,1 и со степенями переменных  $\leq 1$ . Это многочлены от  $x_i$  **Z<sub>2</sub>**

**Пример.**  $f(x, y, z) = 1 + x + yz + xyz$

$$1 + x \quad xy + xyz$$

$$1 + xy$$



*Не многочлены*

$$1 + x + (y \vee z)$$

$$1 + x + z^2 \text{ нельзя степень } 2$$

*Замечание.* В общем случае многочлен от 1 переменной ( $a_i = 0$  или 1)

$$a_0 + a_1x$$

$$\text{от } 2 \text{ух: } a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

$$\text{от } 3 \text{ех: } a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$$

*В общем случае*  $f(x_1 \dots x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + ax_1x_2 + ax_1x_3 + \dots$  (все пары переменных)  $+ ax_1x_2x_3 + ax_1x_3x_2 \leftarrow$  все тройки переменных  $+ ax_1x_2x_3 \dots x_n$

**Определение.**  $\forall f(x_1 \dots x_n)$  - логическая функция  $\exists!$  многочлен Жегалкина  $g(x_1 \dots x_n) : f = g$

*Замечание.* Всего 4 функции от 1ой переменной

$$f(x) = 0 = \bar{x} = 0 + 0x$$

$$f(x) = 1 = 1 = 1 + 0x$$

$$f(x) = x = x = 0 + 1x$$

$$f(x) = \bar{x} = 1 + x = 1 + 1x$$

**Доказательство:**

**Определение.** Разные многочлены - это разные логические функции  
т.е.  $f(x_1 \dots x_n) = a_0 + \dots + a_1x_1 \dots x_n$

$$g(x_1 \dots x_n) = b_0 + \dots + bx_1 \dots x_n$$

$$\exists! : a_i \neq b_i \text{ различающийся}$$

**Доказательство:**

*Возьмем индекс с самым большим количеством переменных*

$$f(x, y, z) = 1 + x + xy + xyz = \dots + 1x + Dy + Dz + 1xy$$

$$g(x, y, z) = 1 + y + z + xyz \dots + Dx + 1y + 1z$$

*для переменных этого слагаемого подставим 1 0ху*

*для остальных переменных : 0*

$$[ \text{В примере } x = 1, y = 0, z = 0 : f(1, 0, 0) \text{ и } g(1, 0, 0) ]$$

*и в f и в g все другие слагаемые равны 0*

*Теперь f(...) и g(...)*

$$f(\dots) = a_ix_1x_2x_3 \neq b_ix_1x_2x_3 \Rightarrow f(x_1 \dots x_n) \neq g$$

**Доказательство:**

*Проверим, что многочленов Жегалкина столько, сколько функций:*

*Посчитаем*

$$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_1x_1x_2 \dots x_n$$

*Сколько слагаемых:*

1) 1 слагаемых без переменных

$n$  слагаемых с переменной

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

$C_n^2$  - слагаемых с 2 - мя переменными

$C_n^3$  - слагаемых с 3 - мя переменными

$C_n^n$  - слагаемых с  $n$  переменными

$$\text{Всего : } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n((1+1)^2)$$

**Пример.**  $a_0 + a_1x$  - 2 слагаемых

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy - 2^2 = 4 \text{ слагаемых}$$

2) Все слагаемых имею вид:  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$  (0 или 1) -  $2^n$  слагаемых

Итого: многочлен Жегалкина от  $n$  переменных

**Задача.** Сколько разных многочленов?

Это столько же, сколько логических функций

Итого:

**Следствие:** Любая логическая функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина

**Пример.**  $f(x, y) = x \vee y$

$f(x, y) = x * y$  - уже многочлен Жегалкина

**Метод неопределенных коэффициентов:**

Подберем  $x \vee y = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 0) = a_0 + a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3 \dots$$

$$f(1, 0) = 1 \vee 0 = 1$$

$$f(1, 0) = a_0 + a_1 = a_1 \quad (a_0 = 0, \Rightarrow a_1 = 1)$$

$$f(0, 1) = \text{аналогично} \Rightarrow a_2 = 1$$

$$f(x, y) = x + y + a_3xy$$

$$f(1, 1) = 1 \vee 1 = 1$$

$$f(1, 1) = 1 + 1 + a_3 = 0 + a_3 = a_3, \quad a_3 = 1$$

$$\text{Ответ: } x \vee y = x + y + xy$$

**Многочлены Жегалкина от 1 переменной:**

$f(x)$	Мн Ж
0	0
1	1
$x$	$x$
$\bar{x}$	$1 + x$

**Многочлены Жегалкина от 2 переменных:**

**Формулы:**

$f(x)$	Мн Ж
0	0
1	1
$xy$	$xy$
$x + y$	$x + y$
$x \vee y$	$x + y + xy$

$$1. \overline{xy} = \neg(xy) = \overline{x} \vee \overline{y}$$

$$2. \overline{x \vee y} = \neg(x \vee y) = \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x} \overline{y}$$

*Замечание.*  $\overline{xy} \neq \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x} \overline{y}$

**Доказательство формул через таблицу истинности:**

$x$	$y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

### 1.1.8 Получение многочлена Жегалкина через алгебраические упрощения

1. **Многочлен Жегалкина для  $\vee$**

$$x \vee y = (x = \overline{a}, y = \overline{b}) = \overline{ab} = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{(1+x)(1+y)} = 1 + (1+x)(1+y) = 1 + 1 + x + y + xy = \underline{x + y + xy}$$

2. **Многочлен Жегалкина для  $\Leftrightarrow$**

$$x \Leftrightarrow y = \overline{x + y} = \underline{1 + x + y}$$

3. **Многочлен Жегалкина для  $\Rightarrow$**

$$x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = (1+x) \vee y = (1+x) + y + (1+x)y = 1 + x + y + y + xy = \underline{1 + x + xy}$$

*Замечание.* Если есть логическая формула, то ее можно привести к форме многочлена Жегалкина двумя способами:

1. метод неопределенных коэффициентов:

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + \dots + axyz$$

## 2. метод алгебраических преобразований

Пример.  $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \dots = x + y + xy$

Пример.  $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = \dots = 1 + x + xy$

Пример.  $x \Rightarrow (y \vee \overline{z}) = x \Rightarrow (y + \overline{z} + y \cdot \overline{z}) = x \Rightarrow (y + (1 + z) + y \cdot (1 + z)) = x \Rightarrow (y + 1 + z + y + yz) = x \Rightarrow (1 + z + yz) = 1 + x + x(1 + z + yz) = 1 + x + x + xz + xyz = 1 + xz + xyz$

**Поймем, что:**  $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$

$x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z = (1 + x + y) \Leftrightarrow z = 1 + (1 + x + y) + z = 1 + 1 + x + y + z = x + y + z$

**Вывод:**

Заранее не ясно, сложно ли привести логическую формулу к многочлену Жегалкина

### 1.1.9 Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ)

**Определение.** Литерал — это переменная или отрицание переменной

Пример.  $x, \overline{x}, y, \overline{y}, z, \overline{z}$

**Определение.** Конъюнктор — конъюнкция литералов

Пример.  $x\overline{y}, xyz, \overline{x}\overline{y}\overline{z}, \overline{x}z$ , ноль (пустой конъюнкт).

**Определение.** Логическое выражение имеет ДНФ, если она является дизъюнкцией конъюнкторов

Пример.  $x\overline{y} \vee \overline{x}\overline{z} \vee z \vee \overline{x}\overline{y}$  — ДНФ

Пример.  $xy \vee \overline{x}\overline{y}$  — ДНФ

Пример.  $x \vee y$  — ДНФ

Пример.  $xy$  — ДНФ

Пример. не ДНФ —  $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$  — ДНФ

Пример. не ДНФ —  $x \Rightarrow yz = \overline{x} \vee yz$  — ДНФ

**Построение ДНФ по таблице истинности функции:**

алгоритм на примере трех переменных

Берем строки из столбца  $f(x, y, z)$ , где значения в столбце равны 1

Допустим есть строка:  $x = a_1, y = a_2, z = a_3$  ( $a$  могут быть как 0, так и 1)

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\bar{x} y \bar{z}$
0	1	1	1	$\bar{x} y z$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$xy \bar{z}$
1	1	1	0	

В ответ добавляется конъюнкт  $xyz$  ( $0 \Rightarrow$  отрицание,  $1 \Rightarrow$  не отрицание)

Ответ:  $f(x, y, z) = \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee xy \bar{z}$

**Доказательство корректности алгоритма:**

Когда полученный ДНФ = 1?

Когда есть конъюнкт равный 1

1. Если первый конъюнкт равняется 1 (в примере  $\bar{x} y \bar{z} = 1$ )

$\Rightarrow$  все литералы конъюнкта равняются 1

$\Rightarrow$  в примере  $\bar{x} = 1 \quad y = 1 \quad \bar{z} = 1$

$x = 0 \quad y = 1 \quad z = 0$

2. Если второй конъюнкт равняется 1

$\Rightarrow$  в примере  $x = 0 \quad y = 1 \quad z = 1$  — строка из таблицы истинности

3. То же самое с третьим конъюнктом

Посмотрим таблицу с этими конъюнктами:

$x$	$y$	$z$	$\bar{x} y \bar{z}$	$\bar{x} y z$	$xy \bar{z}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

*Замечание.* У одной функции могут быть разные ДНФ

**Пример.**  $\overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee xy\overline{z} = \overline{x}y(\overline{z} \vee z) \vee xy\overline{z} = \overline{x}y \vee xy\overline{z}$  — подчеркнутые выражения являются ДНФ

**Пример.**  $\overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee xy\overline{z} = \overline{z}y(\overline{x} \vee x) \vee zy\overline{x} = \overline{z}y \vee zy\overline{x} = \overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}x \vee z\overline{z}$  — подчеркнутые выражения являются ДНФ

Получить ДНФ для логической функции/формулы можно:

1. по таблице истинности
2. с помощью алгебраических преобразований

**Пример.** 1.  $\overline{x} = \overline{x}$

2.  $x \vee y = x \vee y$

3.  $x \cdot y = x \cdot y$

4.  $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$

5.  $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = (\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x) = \overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}x \vee y\overline{y} \vee yx = \overline{x}\overline{y} \vee xy$

$x$	$y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6.  $x + y = \overline{x \Leftrightarrow y} = \overline{\overline{x}\overline{y} \vee xy} \dots$

$= \overline{\overline{x}\overline{y}} \vee \overline{xy} = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y}} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} = x\overline{y} \vee \overline{x}y$

7.  $x \Rightarrow (y + z) = \overline{x} \vee (y + z) = \overline{x} \vee \overline{y}z \vee y\overline{z}$

### 1.1.10 Задача (не) выполнимости

Дана логическая формала в ДНФ

Проверить, бывает ли она равна 0?

$\overline{x}\overline{y} \vee x \vee y? = 0$

$x = 0, y = 0 \Rightarrow \overline{x}\overline{y} = 1$

$\Rightarrow$  данный ДНФ не может быть равным 0

Эта задача обладает особенностью:

1. если знать значения переменных (ответ), то их легко можно быстро проверить
2. подобрать значения переменных для 0 — нет

Нет известного алгоритма, который "принципиально" быстрее полного перебора

У этой задачи класс NP выполнимости (ответ легко проверить, а найти его простым способом невозможно)

**Следствие.** *То к чему сводится задача (не) выполнимости тоже сложно*

1. упростить логическое выражение
2. поиск минимального ДНФ

#### 1.1.11 Запись таблиц истинности в виде графика

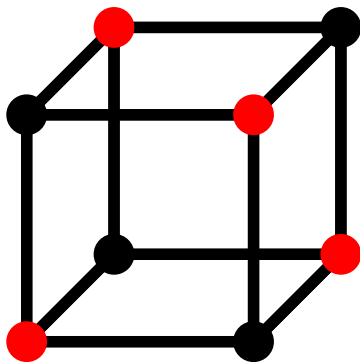
Формула =  $f(x, y, z) = x + y$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 1) = 1$$

$$f(1, 0) = 1$$

$$f(1, 1) = 0$$



### 1.1.12 Задача минимизации ДНФ

Данная задача тоже является сложной, также как и задача (не) выполнимости

Дана логическая функция (в виде ДНФ). Необходимо найти самую короткую ДНФ эквивалентную данной.

Минимальной ДНФ считается та, где меньше количество литералов и дизъюнкций

**Пример.**  $\bar{x}\bar{y} \vee z$  короче, чем  $xy \vee yz$

*Замечание.* Далее рассматриваться все будет для функции от 3 переменных  $f(x, y, z)$

*Замечание.* Какова таблица истинности  $xyz = abc$ , где  $a = 0$  или  $1$ ,  $b = 0$  или  $1$ ,  $c = 0$  или  $1$

0  $\Rightarrow$  надо поставить отрицание

1  $\Rightarrow$  нет отрицания

**Пример.**  $f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z}$

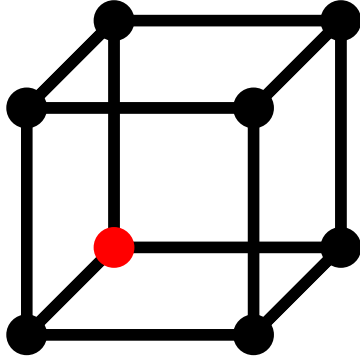
Если  $\bar{x}y\bar{z} = 1$

$\Rightarrow \bar{x} = 1, y = 1, \bar{z} = 1$

$\Rightarrow x = 0, y = 1, z = 0$

$\Rightarrow x = a, y = b, z = c$

$\Rightarrow a = 0, b = 1, c = 0$



**Пример.**  $f(x, y, z) = xy$

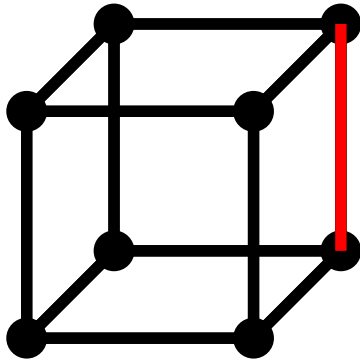
Если  $xy = 1$

$\Rightarrow x = 1, y = 1$

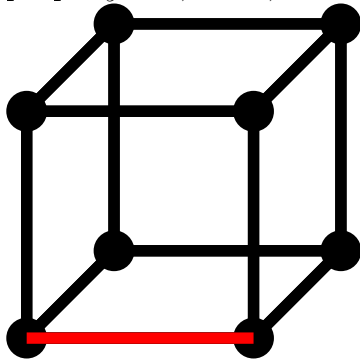
$\Rightarrow x = a, y = b$

$\Rightarrow a = 1, b = 1$





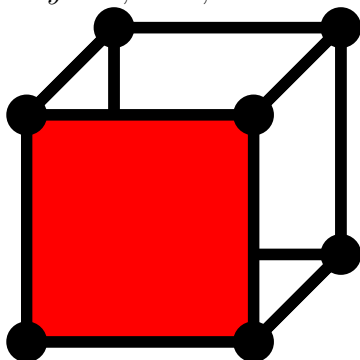
Аналогично,  $f(x, y, z) = \bar{y} \bar{z}$   
 ребро:  $y = 0, z = 0, x = ?$  — не важно



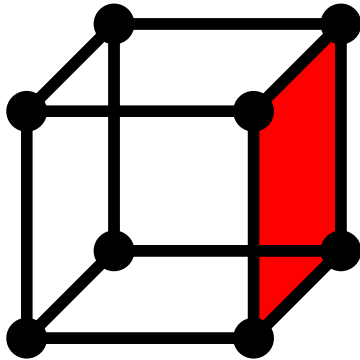
Последнее — конъюнкт из 1 литерала:  
 $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$

**Пример.**  $f(x, y, z) = \bar{y}$

Если  $\bar{y} = 1$   
 $\Rightarrow y = 0, x = ?, z = ?$



Или конъюнкт  $x$ , грань  $x = 1$



**Итого:**

$xyz$  — это вершина  $x = a, y = b, z = c$

$xy$  — это ребро  $x = a, y = b$

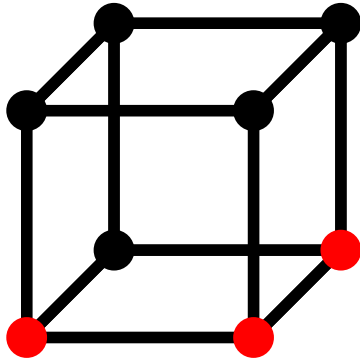
$x$  — это грань  $x = a$

**Попробуем минимизировать ДНФ**

**Пример.**  $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$

Найти самый короткий ДНФ для данного выражения

**Шаг 1: строим ТИ**



$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} = (0, 0, 0)$$

$$x\bar{y}\bar{z} = (1, 0, 0)$$

$$xy\bar{z} = (1, 1, 0)$$

**Шаг 2: упрощаем**

Чтобы упростить имеет смысл рассмотреть 2 ребра:

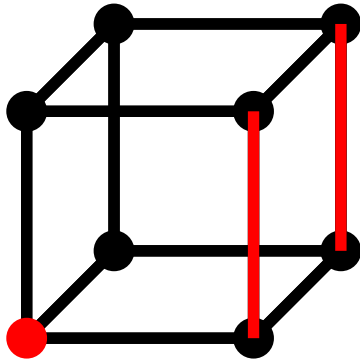
$$(0, 0, 0) - (1, 0, 0) = \bar{y}\bar{z}$$

$$(1, 0, 0) - (1, 1, 0) = x\bar{z}$$

$$\Rightarrow \text{ДНФ} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} = xy\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$$

$$\Rightarrow \text{самое короткое ДНФ} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$$

**Пример.**  $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xy$



$$\Rightarrow \text{ДНФ} = x \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} = x \vee \bar{y} \bar{z}$$

*Замечание.* Данный метод позволяет наглядно перебрать все ДНФ и найти минимальный

С помощью алгебраических преобразований мы не сможем понять, что ответ самый оптимальный

**Пример.** Алгебраические преобразования

$$\bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z} \vee xy \bar{z} = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z} \vee xy \bar{z} = \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{z}$$

Но тут непонятно, а вдруг можно сделать еще короче

### 1.1.13 Двойственная функция

Пусть есть логическая функция:  $f = B^n \rightarrow B = \{0, 1\}$

Двойственная функция:  $f^* = B^n \rightarrow B = \{0, 1\}$

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$$

*Замечание.* Мир замены лжи на истину

$$0 \leftrightarrow 1$$

**Пример.**  $f(x, y) = x \vee y$

$x$	$y$	$f$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Новый мир:  $1 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1$

Получилось, что  $(x \vee y)^* = xy$

**Пример.**  $(x \vee y)^* = \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} = \bar{\bar{x}} \bar{\bar{y}} = xy$

$x$	$y$	$f^*$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

**Пример.**  $(x + y)^* = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{1 + x + 1 + y} = 1 + x + 1 + y + 1 = 1 + x + y = x \Leftrightarrow y$

*Замечание.*  $f^{**}(x_1, x_2 \dots x_n) = \overline{f^*(\overline{x_1}, \overline{x_2} \dots \overline{x_n})} = \overline{\overline{f(x_1, x_2 \dots x_n)}} = f(x_1, x_2 \dots x_n)$

**Следствие.**

$$(xy)^* = x \vee y$$

$$(x \Leftrightarrow y)^* = x + y$$

**Теорема о композиции:**

$$f = f_0(f_1(x_1, \dots x_n), f_2(x_1, \dots x_n), \dots f_m(x_1, \dots x_n))$$

$f_i$  — это функции от  $n$  переменных  $(B^n \rightarrow B)(i = 1 \dots n)$

$$f_0 = B^m \rightarrow B$$

Тогда  $f^*(x_1, \dots x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \dots x_n), f_2^*(x_1, \dots x_n), \dots f_m^*(x_1, \dots x_n))$

**Доказательство:**

$$f^* = \overline{f(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n})} = \overline{f_0(f_1(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}), f_2(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}) \dots f_m(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}))} = f_0^*(f_1^*(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}), f_2^*(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}), \dots f_m^*(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}))$$

**Следствие.** Если есть  $f(x_1, \dots x_n)$  — записано, как логическое выражение с  $\cdot, \vee, \neg, +, \Leftrightarrow$ , то  $f^*$  — также выражение, но связки заменяются на двойственные узлы

$$\vee \leftrightarrow *$$

$$+ \leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\neg \leftrightarrow \neg$$

$$\text{так как } (\overline{x})^* = \overline{x}$$

**Пример.**

$$f(x, y, z) = \overline{x \vee \overline{y} z} \Leftrightarrow (x + y + z)$$

$$f^*(x, y, z) = \overline{(x \cdot (\overline{y} z))} + (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z)$$

**Пример.**

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1$$

$$\Rightarrow f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{1} = 0$$

$$1^* = 0; 0^* = 1$$

#### 1.1.14 Конъюнктивно-нормальная форма КНФ

**Определение.** Конъюнктивно-нормальная форма — еще одна нормальная форма, похожая на ДНФ

**Определение.** Литерал — это как и раньше, переменные или отрицательные переменные

$$x, y, \bar{x}, \bar{y}$$

**Определение.** Дизъюнкт — дизъюнкция литералов

$$x \vee y; x \vee y \vee \bar{z}; x \vee \bar{z}; \bar{x}$$

$$\cancel{xy}, \cancel{x \vee yz}$$

**Определение.** КНФ — это конъюнкция нескольких дизъюнктов

$$(x \vee y)(y \vee \bar{z});$$

$$(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x})$$

$$\cancel{xy \vee z}$$

$$x \vee y \vee z$$

— 1 дизъюнкт

$$xyz$$

— 3 дизъюнкта

**Определение.** У любой логической функции есть КНФ, её можно построить по таблице истинности

### Доказательство

Заметим, что если вычислить  $(\text{КНФ})^*$  (двойственную к КНФ), то получим ДНФ

**Пример.**  $[(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})]^* = (xyz) \vee (x\bar{y}) \vee (\bar{y}\bar{z})$

И наоборот  $(\text{ДНФ})^* = \text{КНФ}$

Итого, чтобы получить КНФ для функции  $f$ , надо построить двойственную функцию к ДНФ этой функции. Отсюда следует, что КНФ всегда существует

**Пример.**  $f(x,y,z) = xy \Leftrightarrow z$

$x$	$y$	$z$	$xy$	$f$	$f^*$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Выпишем значения  $xyz$  из строчек, где  $f^* = 1$

$\bar{x}\bar{y}z \quad x\bar{y}\bar{z} \quad \bar{x}y\bar{z} \quad xy\bar{z}$

Вспомним определение  $f^*(x, y, z) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

$f^*(0, 0, 0) = \overline{f(1, 1, 1)}$

Итого:  $f^* = \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xy\bar{z}$

$f^*(0, 0, 1) = \overline{f(1, 1, 0)}$

$f^*(0, 1, 0) = \overline{f(1, 0, 1)}$

По теореме о композиции

$f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})$

Получение КНФ по таблице истинности без двойственной функции

$f(x,y,z) = xy \Leftrightarrow z$

При  $x \ y \ z = 1 \ 1 \ 0$ ,  $f = xy \Leftrightarrow z \leftarrow \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$

для 1 - отрицание, для 0 - нет отрицания

Итого: Чтобы построить ДНФ:

- строки с 1,  $0 \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$1 \leftrightarrow xyz$

Чтобы получить КНФ:

- строки с 0,  $0 \leftrightarrow xyz$

$1 \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$x$	$y$	$z$	$f = xy \Leftrightarrow z$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

**Пример.**  $f = x+y$

$x$	$y$	$x + y$
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0

$$\begin{aligned} \text{Нули в: } & x \vee y \quad \bar{x} \vee \bar{y} \\ f = & (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}) \end{aligned}$$

*Замечание.* Для функции записанной в форме КНФ, можно поставить задачу "выполнимости".

Вопрос: может ли значение быть = 1

- не известно решений, принципиально эффективней полного перебора значений

**Пример.**  $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{z}) = 1$

$$x = 1$$

$$y = 1 \quad \text{подходит}$$

$$z = 0$$

Следовательно эта формула выполнима при таком наборе

Многие задачи, головоломки сводятся к задаче выполнимости

**Пример.** Принцип Дирихле

Если есть  $n$  клеток и в них  $n+1$  заяц, то  $\exists$  клетка, где зайцев  $\geq 2$ .

при  $n = 2$ :  $i = 1$  или  $2$  (клетка)  $x_{ij}$  - в клетке  $i$  сидит заяц  $j$

$j = 1$  или  $2$  или  $3$  заяц

Попробуем записать, что в каждой клетке  $\leq 1$  зайца

а) каждый заяц ровно в одной клетке

$$x_{11} \oplus x_{21} - \text{заяц } 1$$

$x_{12} \oplus x_{22}$  - заяц 2

$x_{13} \oplus x_{23}$  - заяц 3

б) в каждой клетке не больше 1 зайца

кл/з	1	2	3
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$

если есть 2 зайца, то один из конъюнктов: = 1

$\overline{x_{11}x_{12} \vee x_{11}x_{13} \vee x_{12}x_{13}} \longleftarrow$  в кл 1  $\leq 1$  зайца

$\overline{x_{21}x_{22} \vee x_{21}x_{23} \vee x_{22}x_{23}} \longleftarrow$  в кл 2  $\leq 1$  зайца

Соединяем все утверждения:

$$(x_{11}+x_{21})(x_{12}+x_{22})(x_{13}+x_{23})(\overline{x_{11}x_{12} \vee x_{11}x_{13} \vee x_{12}x_{13}})(\overline{x_{21}x_{22} \vee x_{21}x_{23} \vee x_{22}x_{23}}) =$$

0 всегда из принципа Дерихле

$$(x_{11} \vee x_{21})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{21}})(x_{12} \vee x_{22})(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{22}})(x_{13} \vee x_{23})(\overline{x_{13}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{12}})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{13}})(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{13}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{22}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{22}} \vee \overline{x_{23}})$$

$\longleftarrow$  Берем программу, которая решает КНФ задачу выполнимости.

Она скажет - невозможно.

### 1.1.15 Класс замкнутости

Повторим: Логическая функция:  $f: \beta^n \rightarrow \beta$

$$\beta = \{0, 1\}$$

**Определение.** Класс — это множество логических функций.

**Пример.**  $K_1$  = класс функций: от двух переменных  $K_2$  = класс функций такой, что  $f(x, y) = f(y, x)$

$$f(x, y) = x \vee y \in K_1, \in K_2$$

$$g(x, y) = x \Rightarrow y \in K_1 \notin K_2$$

$K_3$  : класс функций  $f(x, \dots) = f(\bar{x}, \dots)$  функции, которые не зависят от первой переменной

$$f(x, y, z) = y \Rightarrow z \in K_3$$

$$f(x, y, z) = (x \Rightarrow y) \vee z \notin K_3$$

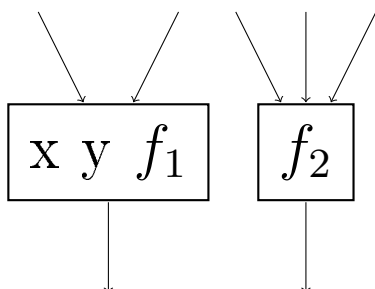
$$f(x, y, z) = x\bar{x} \vee y \vee z \in K_3 \quad (x\bar{x})$$

$$K_4 : \{f(x, y) = x \vee y; g(x, y) = x \Rightarrow y\}$$

**Определение.** Замыкание класса

$$K = \{f_1, f_2, \dots\} \text{ — класс функции}$$





$K^*$  — замыкание класса - это класс состоящий из всех композиций функций из  $K$

$\overline{f_1(f_2)(f_1(x, y), y, z), z}$  — композиция

если есть функции, подставляем друг в друга, получаем композицию

**Пример.** : 1)  $K = \{0, \bar{x}\}$  ( $0 - f()$   $\bar{x} - g(x)$ )  
 $K^* = \{f(), g(f()), g(g(f())), g(g(g(f())))\}$

**Пример.**  $K = \{\bar{x}\}$  возьмем класс только из отрицательных  
 $K^* = \{\bar{x}, x\}$   
 $K = \{g(x), g(g(x)), g(g(g(x \dots 1, \dots)))\}$

**Пример.**  $K^* = \{\bar{x}, x \vee y, xy\}$   $K^* = \{\dots, \forall, \text{функция}\}$

**Определение.** Если  $K$  - класс:

$K^* = \alpha$ , то  $\overline{K - \text{полный}}$ , где  $\alpha$  — все логические функции

Вывод:  $K = \{\bar{x}, x \vee y, xy\}$  — полный

**Пример.**  $K = \{\bar{x}, x \vee y\}$ , где  $f(x) = \bar{x}$ ,  $g(x, y) = x \vee y$

$$xy = \overline{\bar{x}\bar{y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = f(g(f(x), f(y)))$$

Значит  $K^*$  — тоже полный

**Определение.** Замкнутый класс -  $K$  замкнут, если  $K^* = K$

Свойства замыкания:

1.  $K_1 \subset K_2$ , тогда  $K_1^* \subset K_2^*$

**Доказательство:**

Если есть  $f \in K_1^* \Rightarrow f$  - композиция  $f_1 \in K_1 \Rightarrow f$  - композиция  
 $(f_i \in K_2) \Rightarrow f \in K_2^*$  чтд.

2. Если  $K_1 \subset K_2$  и  $K_1$  - полный, то  $K_2$  - полный

**Доказательство:**

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow K_1^* \subset K_2^* \Rightarrow \alpha \subset K_2^* \Rightarrow K_2^* = \alpha$$

3. Пусть  $K_1, K_2$  - замкнутое, тогда  $K_1 \cap K_2$  - тоже замкнутое

**Доказательство:**

Пусть есть  $f = (K_1 \cap K_2)^*$  - композиция

$f_i \in (K_1 \cap K_2)$

а)  $\Rightarrow f_i$  - композиция  $f_i = K_1 \Rightarrow f \in K_1^*$

б)  $\Rightarrow f_i$  - композиция  $f_i = K_2 \Rightarrow f \in K_2^*$

Из а и б следует, что  $f \in K_1^* \cap K_2^* = K_1 \cap K_2$

Итого:  $f \in (K_1 \cap K_2)^* \Rightarrow f \in K_1 \cap K_2$

$\Rightarrow (K_1 \cap K_2)^* \subset K_1 \cap K_2$ , по  $K_1 \cap K_2 \subset (K_1 \cap K_2)^*$

$\Rightarrow K_1 \cap K_2 = (K_1 \cap K_2)^*$

$\Rightarrow K_1 \cap K_2$  - замкнут

*Замечание.*  $K_1$  и  $K_2$  - замкнутые  $\Rightarrow K_1 \cup K_2$  - замкнутый

4.  $K^* = K^{**}$  для любого класса функций

### 1.1.16 Примеры замкнутых классов

1.  $T_0$  - класс функций, "сохраняющих ноль"  $f \in T_0 \Leftrightarrow$  если  $f(0, \dots, 0) = 0$

$x * y \in T_0$

$x + y \in T_0$

$\bar{x} \notin T_0$

$x \Rightarrow y \notin T_0$

$xy + xz + yz \in T_0$

**Утверждение:**  $T_0$  - замкнут

**Доказательство:**

$\square f \in T_0^*$ , проверим, что  $f \in T_0$

$\Rightarrow T_0^* \subset T_0$

$\Rightarrow T_0^* = T$

$f$  - комп  $f_i, f_i \in T_0$

$f_1(f_2(\dots)f_3(f_4(\dots)), \dots)$  - композиция

подставим все 0

$\Rightarrow f(0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow f \in T_0$  чтд

**Пример.**  $f_1(x, y) = x * y$   $f_1 \in T_0, f_2 \in T_0$

$f_2(x, y) = x + y$   $f_1(f_2(f_1(x, f_2(y, y)), y)f_1(z, z))$

$x(y + y)$

$f(x, y, z) = (x(y + y) + y) * z * z$

$f(0, 0, 0) = 0$

2. Класс  $T_1$  - сохраняющие 1

$f \in T_1$ , если  $f(1, \dots, 1) = 1$

$x * y \in T_1$

$x + y \notin T_1$

$x + y + z \in T_1$

$\bar{x} \notin T_1$

$$x \Rightarrow y \in T_1$$

$$xy + xz + yz \in T_1$$

**Утверждение.**  $T_1$  - замкнут

**Доказательство:** смотри  $T_0$

3. Класс  $\mathbb{K}$

$f \in \mathbb{K}$ , если  $f$  можно записать как конъюнкцию нескольких переменных

$$f(x, y, z) = yz$$

$$g(x, y, z) = xyz$$

$$h(x, y, z) = xz$$

$$i(x, y, z) = z$$

$$0$$

$$1$$

Все это  $\in \mathbb{K}$

**Утверждение.** Класс  $\mathbb{K}$  замкнут

Композиция  $f_i \in \mathbb{K}$

$f_1(\dots, \text{арг2}, \dots, \text{арг4}) = \text{арг2} * \text{арг4} = \text{подаргумент1} * \text{подаргумент2} * \dots *$   
 подаргумент = пер \* пер \* пер \* пер... (произвольная переменная)  
 пер может быть 0 или 1

**Утверждение.**  $\mathbb{K} = \{\&, 0, 1\}^*$

по определению замыкания

$$\{f_1(x, y) = x * y$$

$$f_2() = 0$$

$$f_3() = 1\}$$

4.  $\mathbb{V}$  - дизъюнкция переменных и 0, 1

$$\mathbb{V} = \{V, 0, 1\}^*$$

**Утверждение.**  $\mathbb{V}$  - замкнут

**Доказательство 1:**

смотри доказательство  $\mathbb{K}$

**Доказательство 2:**

$$\mathbb{V} = \{V, 0, 1\}^* \Rightarrow \mathbb{V}^* = \{V, 0, 1\}^{**} = \{V, 0, 1\}^* = \mathbb{V} \text{ свойства замыкания}$$

**Доказательство:**  $\square f \in K^* \Rightarrow f - \text{комп} f_i \Rightarrow f_i \in K^*$

$$f = f_1(f_2(\dots)) = g_1(g_2(h_1\dots)) \in K^*$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \text{комп } g_1 \in K^*$$

$$g_i \in K \quad h_i \in K$$

$$\Rightarrow f \in K^* \Rightarrow K^* = K^{**}$$

Следствие:  $\forall K$  - класс  $K^*$  - замкнут

если класс замкнут он станет замкнутым

5. Класс  $u$  (unit) :  $0, 1, f(x, \dots x_n) = x_i$  или  $\bar{x}_i$

$$f(x, y, z) = \bar{z}$$

$$f(x, y, z, t) = x$$

$$f(x) = xf(x) = \bar{x}$$

Все это  $\in u$

6. Класс  $1^\infty$   $f(x_1 \dots x_n) \leq x_i$

$$0^\infty f(x \dots x_n) \geq x_i$$

$$x * y \leq x \quad xy \in 1^\infty$$

$$\leq y$$

$$x \vee y \geq x \quad x \vee y \in 0^\infty$$

$$\geq y$$

$$x \Rightarrow y \geq y \quad x \Rightarrow y \in 0^\infty$$

$$x \Rightarrow y \leq y$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$x \Rightarrow y \notin 1^\infty$$

7.  $L$  - линейная функция  $L = \{0, 1, +\}^*$

Все функции из констант и сложения

$$x + y \in L$$

$$x + y + z \in L$$

$$1 + x \in L$$

$$\bar{x} \in$$

$$x * y \in L$$

( $L$  - линейные многочлены Жегалкина, степени  $\leq 1$ )

**Доказательство:**  $x * y$  имеет многочлены Жегалкина  $x * y$

он единственный  $\Rightarrow$  не существует линейного многочлена Жегалкина

8.  $S$  - самодвойственные функции

$$f \in S, \text{ если } f = f^* \quad (f^* - \text{двойственные})$$

Если функция равна своей двойственной, то она самодвойственная

**Пример.**  $x * y \notin S$

$$x \vee y \notin S$$

$$x \in S$$

$$\bar{x} \in S$$

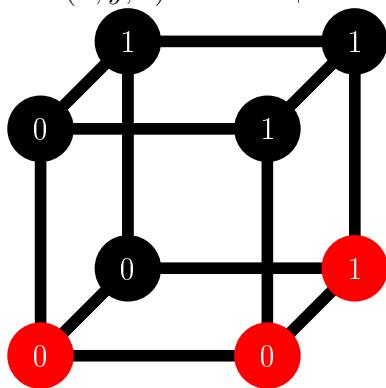
$$x \Rightarrow y \notin S \text{ т.к. } (x \Rightarrow y)^* = (\bar{x} \vee y)^* = \bar{x} * y \neq \bar{x} \vee y$$

$$x = 1$$

Функция честного голосования  $y = 1$  от 3 её переменных.  $0 \neq 1$

$vote(x, y, z) = 1$ , если 1 - иц больше  $x + y + z \geq z$   
 0, если 0 - ей больше  $x + y + z \leq 1$

$vote(x, y, z)$  : Таблица истинности



$vote(x, y, z) \in S?$

$$(xy \vee xz \vee yz)^* = (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z) = ? xy \vee xz \vee yz$$

Раскроем скобки:

$$xxy \vee xxz \vee xzy \vee xzz \vee yxy \vee yxz \vee yzy \vee yzz = xy \vee xz \vee xyz \vee xz \vee xy \vee xyz \vee yz \vee yz = xy \vee xz \vee yz \vee xyz = xy \vee xz \vee yz(1 \vee x) = xy \vee xz \vee yz$$

t.e.  $vote = vote^*$

или проверим таблицей истинности:

читаем снизу вверх, заменяя 0 на 1

$xyz$	$vote$	$vote^*$
000	0	0
001	0	0
010	0	0
011	1	1
100	0	0
101	1	1
110	1	1
111	1	1

**Утверждение.**  $S$  - замкнут

$$\sqsupset f \in S^* f = \text{композиция } f_i \in S$$

$$f = f_i(f_2(\dots), f_3(\dots), f_4(\dots))$$

**Определение.** Высота композиции

$f(x, y, z)$  - высота 1 (1 ф-ия)

$f(g(x, y), y, z)$  - высота 2

$g(x, y) - 1$

$f(g(x, y), y, z) - 2$

**Пример.**  $f(g(h(x), y), h(h(x), y))$

$g(h(x), y)$  - 2

$h(h(x))$  - 2

$f(g(h(x), y), h(h(x), y))$  - 3

$f^* = f_1^*(f_2^*(\dots), \dots, f_n^*(\dots))$  - теория о композиции

но  $f_i \in S \Rightarrow f_i^* = f_i$

$= f_i(f_2(\dots), \dots, f_n(\dots)) = f$

т.е.  $f^* = f \Rightarrow f \in S$

9. Монотонные функции

$f(x_1, \dots, x_n) \in M$ , если  $\forall i \quad x_i \geq y_i$

$\Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \geq f(y_1, \dots, y_n)$

**Примеры:**

1.  $f_1(x) = \bar{x} \quad f_1 \notin M$ , так как  $f_1(1) = 0, f(0) = 1$ . 1 в аргументе функции  $\geq 0$ , но  $0 < 1$  в значение функции

2.  $f_2(x, y) = x \Rightarrow y \quad f_2 \notin M$ , так как  $f_2(1, 0) = 0, f(0, 0) = 1$ . 1, 0 в аргументе функции  $\geq 0, 0$ , но  $0 < 1$  в значение функции

3.  $f_3(x, y) = x + y \quad f_3 \notin M$ , так как  $f_3(1, 1) = 0, f(1, 0) = 1$ . 1, 1 в аргументе функции  $\geq 1, 0$ , но  $0 < 1$  в значение функции

4.  $f_4(x, y) \in M$

5.  $f_5(x, y) \in M$

6.  $f_6(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz \in M$  — функция голосования

**Наглядный способ проверки монотонности**

Функция монотонна, когда все стрелки:

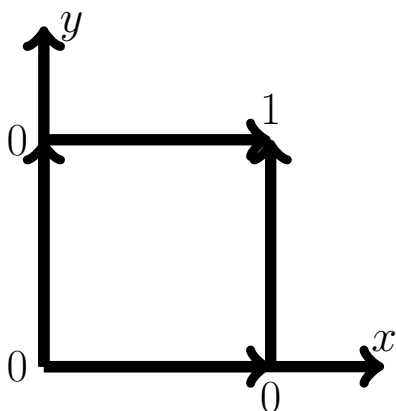
1. из 0 в 0

2. из 0 в 1

3. из 1 в 1

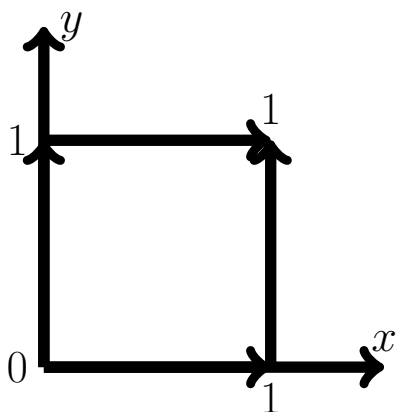
**Пример.**  $x * y$

Данная функция монотонна



**Пример.**  $x \vee y$

Данная функция тоже монотонна



**Утверждение.**  $M$  – замкнут

То есть если  $f_i$  – монотонна, то  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(f_2(\dots) \dots f_m(\dots))$

$f(y_1, \dots, y_n) = f_1(f_2(\dots) \dots f_m(\dots))$

$x_1 \dots x_n \geq y_1 \dots y_n$

То где-то в глубине  $x_i$  будут  $\geq y_i \Rightarrow$  внутри будут получаться значения функции  $f_i(x \dots) \geq f_i(y \dots)$

*Замечание.* Классы из примеров выше все неполные

**Пример.**  $L = L^* \quad x \cdot y$

Всегда были примеры функций не из классов

$xy \notin L$

$xy \notin S$

$\bar{x} \notin T_0$

$\bar{x} \notin T_1$

$\bar{x} \notin M$

### 1.1.17 Теорема Поста

#### Теорема. Поста

(Позволяет понять, полный класс или нет)

$K$  – полный тогда и только тогда, когда

$$\exists f_1 \in K : f_1 \notin T_0$$

$$\exists f_2 \in K : f_2 \notin T_1$$

$$\exists f_3 \in K : f_3 \notin L$$

$$\exists f_4 \in K : f_4 \notin M$$

$$\exists f_5 \in K : f_5 \notin S$$

**Пример.**  $K = \{\bar{x}; x + y\}$

$$\bar{x} \notin T_0, T_1$$

$$\text{но } \bar{x} \in L \text{ и } x + y \in L \Rightarrow$$

$K$  – не полный

**Пример.**  $K = \{\bar{x}; x \vee y\}$

$$\bar{x} \notin T_0, T_1, M$$

$$\bar{x} \in S, L \text{ но } x \vee y \notin L, S \Rightarrow$$

$K$  – полный по теореме Поста

**Доказательство в одну сторону:**

$\Rightarrow$  если  $K$  полный, от противного

Пусть все  $f \in K$  отличие, что  $f \in T_0$

$$\Rightarrow K \subset T_0$$

$$\Rightarrow K^* \subset T_0^*$$

$$\Rightarrow K^* \subset T_0 \not\subseteq \alpha, \text{ где } \alpha - \text{ все функции}$$

$$\Rightarrow \leq \alpha$$

**Доказательство в другую сторону:**

Будем выражать через  $f_1; f_2; f_3; f_4; f_5$  все другие возможные

Достаточно будет выразить только  $\{\bar{x}, x \cdot y\}$  (тогда есть  $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$ )

$\Rightarrow$  есть все ДНФ.

**Шаг 1:** Давайте выразим 0, 1,  $\bar{x}$

$$\text{Берем } f_1(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1, x = 0 (f_1 \notin T_0) \\ 0 \text{ or } 1; x = 1 \end{cases} = 0 \text{ или } \bar{x}$$

$$f_2(x_1, x_2 \dots x_n) \notin T_1 = \begin{cases} 0 \text{ or } 1, x = 0 \\ 0; x = 1 \end{cases} = \bar{x} \text{ или } 0$$

**Пояснение:**

$$f(x, y, z) = x \Rightarrow yz \quad f(x, x, x) = 1$$

$$f(0, 0, 0) = 1, f \notin T_0$$

$$f(x, x, x) = 1$$



$$\begin{aligned}
0 &= f_2(x_1 \dots x_n), 1 = f_1(x_1, \dots x_n) \\
0 &= f_2(x_1, \dots x_n), \bar{x} = f_1(x_1, \dots x_n), 1 = \bar{0} = f_1(f_2(x_1, \dots x_n), f_2(x_1, \dots x_n), \dots) \\
1 &= f_2(x_1, \dots x_n), \bar{x} = f_1(x_1, \dots x_n), f_2(f_1(x_1, \dots x_n), f_1(x_1, \dots x_n), \dots) \\
\bar{x} &= f_2(x_1, \dots x_n), \bar{x} = f_1(x_1, \dots x_n)
\end{aligned}$$

Берем  $f_4 \notin M$ , где нарушена монотонность, для примера:

$$f_4(x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n > y_n) = 0_x \neq 1_y$$

$f_4(x_1, x_2, \dots x_n)$  переменная  $X$ , где  $>$

$$f_4(x, y, z, t) = xy + zt \notin M$$

$$f_4(1, 1, 1, 1) = 0 \quad f_4(1, 0, 1, 1) = 1$$

$$1, 1, 1, 1 \geq 1, 0, 1, 1$$

$$\Rightarrow f_4(1, x, 1, 1) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0; & x = 1 \end{cases} = \bar{x}$$

$$\text{выражены } f_1(x_1, x_2 \dots x_n) = \bar{x} \quad f_2(x_1, x_2, \dots x_n) = \bar{x}$$

$$f_5 \notin S$$

получим с ней 1 и 0

Найдем нарушение  $S$

$$f^*(x_1 \dots x_n) \neq f(x_1 \dots x_n)$$

$$f(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) \neq f(x_1, \dots x_n)$$

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n) = f(x_1, \dots x_n)$$

$$\text{Рассмотрим } f_5(x; \bar{x}; x; \dots \bar{x}) =$$

$$(\text{если } x_i = 0 \Rightarrow x \quad x_i = 1 \Rightarrow \bar{x})$$

$$= \begin{cases} f(x_1, x_2 \dots x_n) & \text{when } x = 0 \\ f(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) & \text{when } x = 1 \end{cases} = 0 \text{ или } 1$$

**Пример.**  $f(x, y, z) = x \vee yz \notin S$

$$\text{нужно найти } f(1, 0, 0) = f(0, 1, 1) \text{ (нарушение } S)$$

$$\text{Рассмотрим } f(\bar{x}, x, x) = \begin{cases} f(1, 0, 0) = 1 & x = 0 \\ f(0, 1, 1) = 1 & x = 1 \end{cases} = 1$$

$$f(\bar{x}, x, x) = \bar{x} \vee xx = \bar{x} \vee x = 1$$

если получили 0, то  $\bar{0} = 1$  и наоборот

## Шаг 2:

Имеем 0, 1,  $\bar{x}$

Надо  $x \cdot y$  выразить

Берем  $f_3 \in L$

$$f_3(x_1, \dots x_n) = \dots + \dots + \dots + x_i y_j + \dots$$

Подставим 0; 1;  $x_i$ ;  $x_j$

Возьмем самое короткое слагаемое с  $x_i \quad x_j$

Для определенности  $\exists$  это  $x_1 \cdot x_2$

$$f_3(x_1 \dots x_n) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 x_3 \dots x_k + \dots$$

подставим  $x_3 \dots x_k = 1$

остальные  $x_{k+1} \dots = 0$

$$f(x_1, x_2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots 0) = C_1 + x_1x_2 + C_2x_1 + C_3x_2 + 0 \cdot x_1x_2 =$$

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1x_2 \\ 1 + x_1x_2 \\ 1 + x_1 + x_1x_2 \\ 1 + x_2 + x_1x_2 \\ x_1 + x_1x_2 \\ x_2 + x_1x_2 \\ x_1 + x_2 + x_1x_2 \end{cases}$$

если  $g(x_1, x_2) = 1 + x_1x_2$

$g(x_1, x_2) = x_1x_2$  – отрицание уже есть

если  $g(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_1x_2 = 1 + x_2(1 + x_2)$

тогда  $g(x_1, \overline{x_2}) = 1 + (1 + x_1(1 + 1 + x_2)) = x_1x_2$

все случаи:  $g(x_1, x_2) = C_1 + (x_1 + C_2) \cdot (x_2 + C_3)$

**Пример.**  $f_3(x, y, z) = x + yz$

$$f_3(0, x, y) = 0 + xy = xy$$

**Пример.**  $f_3(x, y, z) = x \Rightarrow yz = 1 + x + xyz$

$$\underline{f_3(x, y, 1)} = 1 + x + xy = 1 + x(1 + y)$$

$$f_3(x, \overline{y}, 1) = xy$$

можно было

$$f_3(1, x, y) = 1 + 1 + xy = xy$$

**Пример.**  $f(x, y, z) = x \Rightarrow yz$

$$g(x, y) = x + y$$

$$\notin T_0, T_1, L, M, S$$

Выражаем

$$f(x, x, x) = x \Rightarrow xx = 1$$

$$g(x, x) = x + x = 0$$

Случай 0, 1, надо  $\overline{x}$

Выражаем  $\overline{x}$

$$g(x, y) \notin M$$

$$g(1, 0) = 1$$

$$g(1, 1) = 0$$

$$\Rightarrow g(1, x) = \overline{x}$$

$$\Rightarrow \overline{x} = g(f(x, x, x), x)$$

Выражаем  $x \cdot y$

$$f(x, y, z) = xx \Rightarrow yz = 1 + x + xyz$$

Догадаемся, что  $f(1, x, y) = x \cdot y$

Ответы:  $\bar{x} = g(f(x, x, x), x)$   $x \cdot y = f(1, x, y)$

Полные наборы из одной функции (от двух переменных)

$\{f(x, y)\}$  - полный

По теореме Поста:  $f(x, y) \notin L, M, S, T_0, T_1$

Таблица истинности для f:

$xy$	$f1$	$f2$	$f3$	$f4$
00	1	1	1	1
01	0	0	1	1
10	0	1	0	1
11	0	0	0	0

1 строчка :

ху  $f_1 f_2 f_3 f_4$

00 1 1 1 1  $\notin T_0$

4 строчка :

ху  $f_1 f_2 f_3 f_4$

11 0 0 0 0  $\notin T_1$

$f_2(x, y) = \bar{y} \in L$

$f_3(x, y) = \bar{x} \in L$

$\Rightarrow f_2, f_3$  не подходят

$f_1 = \overline{x \vee y}$   $f_4 = \overline{x * y}$

$f_1^* = f_4$   $f_1, f_4 \notin S$

$f_1 = \overline{x + y + xy} = 1 + x + y + xy \notin L$

$f_4 = 1 + xy \notin L$

$f_{1,4}(0, 0) = 1 \notin M$

$f_{1,4}(1, 1) = 0 \notin M$

Ответ:  $\{\overline{x \vee y}\}$  - полный набор

$\{x \downarrow y\}$  - стрелка пирса

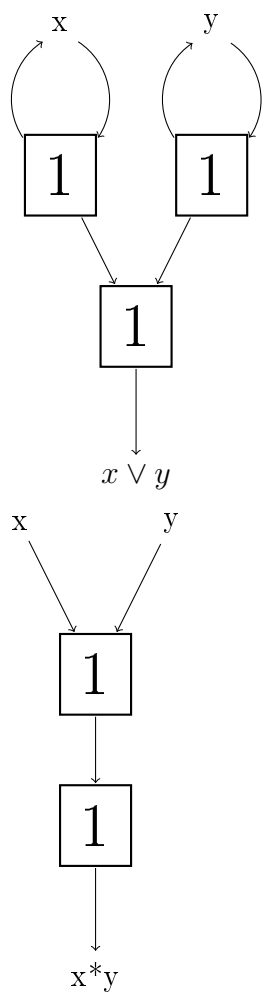
$\{x|y\}$  штриф шеффера

$x|x = \bar{x}$

$x|y = \overline{x * y} \Rightarrow \overline{x|y} = x * y \Rightarrow (x|y)|(x|y) = x * y$

$x/y = \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y} \Rightarrow \bar{x}/\bar{y} = x \vee y$

$\Rightarrow (x/x)/(y/y) = x \vee y$



### 1.1.18 Автоматическое доказательство теорем

Задача выполнимости: дана функция в КНФ

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)$$

Эффективных алгоритмов для этой задачи нет

...

-всегда 0

-бывает 1

### 1.1.19 Логическое следствие

**Определение.**  $P_1(x_1 \dots x_k) \dots P_n(x_1 \dots x_k)$

$n + 1$  лог. функций (утверждений)

$Q(x_1 \dots x_k)$

$Q$  - логическое следствие  $P_1...P_n$ , если для всех наборов значений  $x_i$ , когда все  $P_j(x_i...x_k) = 1$   
 $Q(x_1...x_k)$  тоже 1

**Пример.**  $P_1(x, y, z)^{k=3}(x + y) \Leftrightarrow 0$   
 $P_2(x, y, z) = (y + z) \Leftrightarrow 1$   
 $Q(x, y, z) = (x + z) \Leftrightarrow 1$   
 $0 + 1 = x + y + y + z = x + zy + z = 1$

$xyz$	$P_1$	$P_2$	$Q$
000	1	0	0
001	1	1	1
010	0	1	0
011	0	0	1
100	0	0	1
101	0	1	0
110	1	1	1
111	1	0	0

Есть 2 набор (001) и (110), где  $P_2$  - истина  
 $Q$  должно быть тоже истина.

*Замечание.*  $Q$  - логическое сложение  $P_1, P_2...P_n$ , по смыслу это теорем

**Теорема.** Известно  $P_1, P_2...P_n$ , тогда  $Q$

**Определение.**  $Q$  - логическое следствие  $P_1..P_n$  тогда и только тогда, когда  $P_1 \& P_2 \& ... \& P_n \Rightarrow Q$  - тождественно 1 эквивалентно  $(P_1, P_2...P_n \Rightarrow Q = 1)$

Проверим:  $((x+y) \Leftrightarrow 0)((y+z) \Leftrightarrow 1) \Rightarrow ((x+z) \Leftrightarrow 1) = \overline{x+y} * (y+z) \Rightarrow (x+z) = (1+x+y)(y+z) \Rightarrow (x+z) = 1 + (1+x+y)(y+z) + (1+x+y)(y+z)(x+z) = 1 + y + z + xy + xz + yu + yz + yx + yz + zx + zz + xux + xuz + xzx + xzz + yux + yuz + yzx + yzz = 1$

**Доказательство:** по ТИ

$\Rightarrow$  аналогично, по ТИ

**Следствие:**  $Q$  - логическое следствие  $P_1..P_n$ , тогда и только тогда, когда  $P_1 P_2 .. P_n \bar{Q}$  тождественно ложь

*Замечание.* по сути - это доказательство от противного

$P_1 P_2 .. P_n \Rightarrow = 1$   
 $P_1 P_2 .. P_n \Rightarrow Q = 0$

$x..x_k$	$P_1$	$P_2$	$..$	$P_n$	$Q$	$P_1P_2..P_n \Rightarrow Q$
00..0						
.	1	1	1	1	1	$1 \Rightarrow 1 = 1$
.						
.						
.	0	1	1	0	?	$0 \Rightarrow ? = 1$
11..1						$\nearrow$ все 1

$x_1..x_k$	$P_1P_2..P_n \Rightarrow Q$	
1	$1, 0 \Rightarrow 1$	$\leftarrow P_i$ есть 0
1	$1, 1 \Rightarrow 1$	$\leftarrow$ все $P_i, Q = 1$
1	$1, 0 \Rightarrow 0$	
1	.	
1	$1, 0 \Rightarrow 0$	

$$P_1...P_n \vee Q = 0 \quad \bar{a} \vee b = \bar{a} * \bar{b}$$

$$P_1...P_n * \bar{Q} = 0$$

$$P_1...P_n \bar{Q} = 0 \text{ чтд}$$

Свойства логического следствия:

1.  $Q = 1$  логическое следствие  $P_1..P_n$

$$\text{Доказательство: } P_1..P_n \bar{Q} = P_1P_2..P_n \bar{1} = P_1P_2..P_n * 0 = 0$$

2.  $Q = 0$  логическое следствие  $P_1..P_n$  Тогда  $P_1 * P_2..P_n = 0$

$$\text{Доказательство: } 0 = P_1..P_n \bar{Q} = P_1..P_n \bar{0} = P_1..P_n * 1 = P_1..P_n \text{ чтд}$$

2'.  $Q = 0$  логическое следствие  $P_1..P_n$  тогда  $\forall$  набора значений  $x_1, x_2..x_n$

можно найти  $P_i = 0$

$$\text{Доказательство: } P_1, P_2..P_n = 0 \Rightarrow \text{один из } P_i = 0 \text{ чтд}$$

3.  $Q_1$  - логическое следствие  $P_1..P_2$

$Q_2$  - логическое следствие  $P_1..P_n Q_1$

$Q_i$  - логическое следствие  $P_1..P_n Q_1..Q_{i-1}$  тогда  $Q_i$  - логическое следствие  $P_1..P_n$

$$\text{Доказательство: } P_1..P_n \bar{Q}_1 = 0 \text{ (следует из } Q_1(1))$$

$$P_1..P_n Q_1 \bar{Q}_2 = 0 \text{ (следует из } Q_2) \Rightarrow$$

$$P_1..P_n \bar{Q}_2 = 0$$

$$(1) \Rightarrow P_1P_2..P_n = 0$$

или

$$\bar{Q}_1 = 0 \Leftrightarrow Q = 1$$

$$P_1..P_n \bar{Q}_2 = 0$$

$$P_1..P_n Q_1 \bar{Q}_2 = 0 \Rightarrow P_1..P_n Q_2 = 0 \text{ чтд}$$

**Определение.**  $D_1$  - дизъюнкты  $D_1 = \mathbf{V} \vee D'_1$

$D_2$ , где  $D_2 = \mathbf{V} \vee D_2'$   
 (дизъюнкты с одним литералом, отличающимся отрицанием)  
 Тогда,  $\text{Res}(D_1, D_2) = D_1' \vee D_2'$  резольвенте

**Пример.**  $\frac{x \vee y \vee z}{\bar{x} \vee z} \left| Y \vee Z \vee Z = Y \vee Z \right.$

$\frac{x \vee \bar{y} \vee z}{x \vee y \vee T} \left| X \vee Z \vee X \vee T = x \vee Z \vee T \right.$

$\frac{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}}{X \vee Y \vee T} \left| \bar{Y} \vee \bar{Z} \vee \bar{Y} \vee \bar{T} = 1 \right.$

$\frac{\bar{x} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}}{X \vee Y \vee T} \left| \bar{X} \vee \bar{Z} \vee X \vee T = 1 \right.$

$\frac{X \vee Y}{\bar{Y}} \left| X \right.$

(особый случай)(часть определения)

$\frac{Y}{\bar{Y}} \left| \square = 0 \right.$

$\frac{X \vee Y \vee Z}{Y \vee T \vee \bar{U}} \left| \right.$

**Определение.**  $\text{Res}(D_1, D_2)$  - это логическое следствие  $D_1$  и  $D_2$

**Доказательство :**

$D_1 = \mathbf{V} \vee D_1'$	$D_2 = \mathbf{V} \vee D_2'$	$D_1' \vee D_2'$
1	1	

если  $D_1 = 1, D_2 = 1$ , то  $D_1' \vee D_2'$

тоже должно быть 1

если  $\mathbf{V} = 0$

$1 = D_1 = 0 \vee D_1' = D_1' = 1 \Rightarrow D_1' \vee D_2' = 1$

если  $\mathbf{V} = 1$

$1 = D_2 = \bar{1} \vee D_1' = D_2' \Rightarrow D_1' \vee D_2' = 1$

### 1.1.20 Метод резолюций

Дано:  $P_1 P_2 \dots P_n, Q$ , доказать, что  $Q$  -

Р:

Шаг 0. запишем  $P_i \bar{Q}$  в КНФ

тогда  $P_1, P_2 \dots P_n, \bar{Q}$  тоже будет иметь КНФ

**Пример.**  $P_1 = x + y \Leftrightarrow 0$

$$P_2 = y + z \Leftrightarrow 1 \quad \bar{Q} = \overline{x + z \Leftrightarrow 1} = (x \vee z)(x \vee \bar{z})$$

т.е.  $P_1 P_2 \bar{Q} =$

$$(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})(y \vee z)(\bar{x} \vee z)(x \vee \bar{z})$$

$$D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5 \quad D_6$$

считаем, что у нас дизъюнктов:

$$\bar{x} \vee y \quad \bar{x} \vee \bar{y} \quad \bar{y} \vee \bar{z} \quad y \vee z \quad \bar{x} \vee z \quad x \vee \bar{z}$$

$$D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5 \quad D_6$$

Шаг 1,2,3...

Считаем резольвенты, пока не получим  $\square$

$$\text{Пример.} \quad \begin{array}{l} D_1 = \bar{x} \vee y \\ D_2 = \bar{y} \vee \bar{z} \end{array} \left| \bar{x} \vee \bar{z} = D_7 \right.$$

$$\begin{array}{l} D_2 = x \vee \bar{y} \\ D_4 = y \vee z \end{array} \left| x \vee z = D_8 \right.$$

$$\begin{array}{l} D_7 = \bar{x} \vee \bar{z} \\ D_5 = \bar{x} \vee z \end{array} \left| x = D_9 \right.$$

$$\begin{array}{l} D_8 = x \vee z \\ D_6 = y \vee \bar{z} \end{array} \left| \bar{x} = D_9 \right.$$

$$\begin{array}{l} D_8 = x \vee z \\ D_6 = x \vee \bar{z} \end{array} \left| x = D_{10} \right.$$

$$\begin{array}{l} D_9 = \bar{x} \\ D_{10} = x \end{array} \left| \square \right.$$

$\square$  (пустой дизъюнкт получен)

**Утверждение.** Метод резолюций корректен ( $Q$  – логическое следствие  $P_1, P_2, \dots, P_n$ )

Если вывести  $0 \Rightarrow Q$  – действительно логическое следствие  $P_1, P_2, \dots, P_n$

**Доказательство:**

$P_1, P_2, \dots, P_n$  – исходные дизъюнкты  $P_1, P_2, \dots, P_n$   $\bar{Q} = D_1 \dots D_N$  каждый следующий  $D_i (i > N)$  – логическое следствие двух прошлых дизъюнктов

Пусть  $x_1, \dots, x_m$  – значения переменных, на которых  $P_1, P_2, \dots, P_n$   $\bar{Q} = 1 \Rightarrow D_1 \dots D_N = 1$

$$\Rightarrow D_1 = 1, D_2 = 1 \dots D_N = 1, i > N = 1$$

$$\Rightarrow 0 = 1 \text{ – невозможно, так как } 0 = 0$$

**Утверждение.** Полнота метода резолюций. Если  $D_1, D_2 \dots D_N = 0$ , где  $D_i$  – дизъюнкт, то между резолюций может вывести 0



*Замечание.* Метод резолюций не всегда позволяет получить 0 быстро, бывает неудачные  $D_i$  шагов примерно  $2^N$

**Доказательство:**

Индивидуально по количеству переменных  $x_1 \dots x_m, 0 \dots m = 1$

Какие дизъюнкты из первой переменной  $x, \bar{x}, x \vee \bar{x} = 1$  среди  $D_1, D_2 \dots D_N$  есть дизъюнкты  $x$  и  $\bar{x} \Rightarrow [x, \bar{x}] = 0$

Переход  $m - 1 \rightarrow m$ . То есть для  $m - 1$  переход можно всегда вывести 0

$D_+$  – то есть дизъюнкты, в которых нет  $\bar{x}_m$

$D_-$  – то есть дизъюнкты, в которых нет  $x_m$

**Пример.**  $(x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

$D_+ = [(x_1 \vee \bar{x}_2), (x_2 \vee x_3)]$

$D_- = [(x_1 \vee \bar{x}_2), (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3), (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)]$

Теперь пусть  $x_m = 0$  рассмотрим  $D_+ \dots \vee x_m = 0$

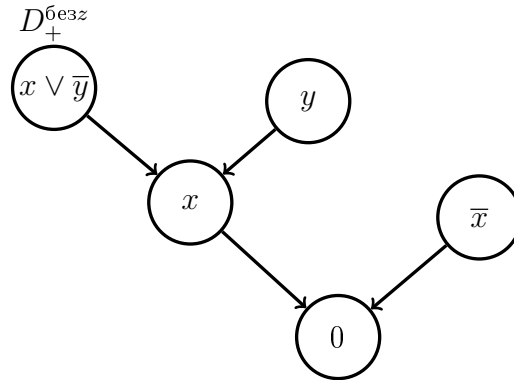
$D_- \dots \vee \bar{x}_m = 1$

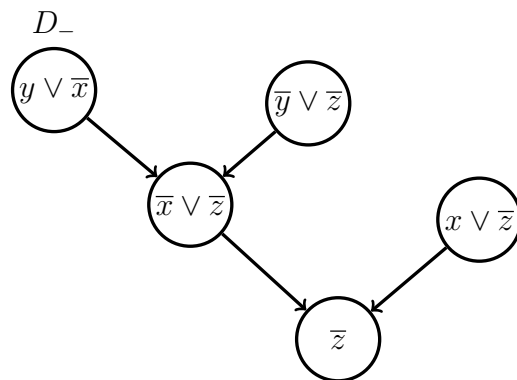
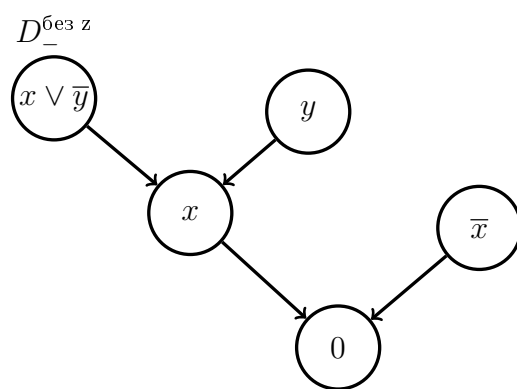
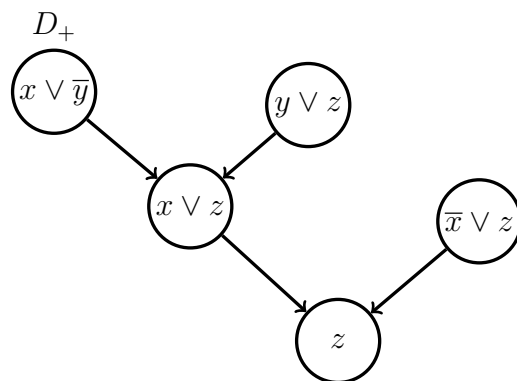
То есть все  $D_+ \in 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow D_1$  несовместимы, то есть  $D = 0, D \in D_+$

Выведем из  $D_+^{\text{без } x_m} = 0$

Тогда, если вернуть  $x_m, D_+$  выводит 0 или  $x_m$ . Аналогично, если  $x_m = 1, D_-$  выводит 0 или  $\bar{x}_m$ . Если уже получены 0, то все. Если получены  $x_m$  и  $\bar{x}_m \Rightarrow$

$[x_m, \bar{x}_m] = 0$



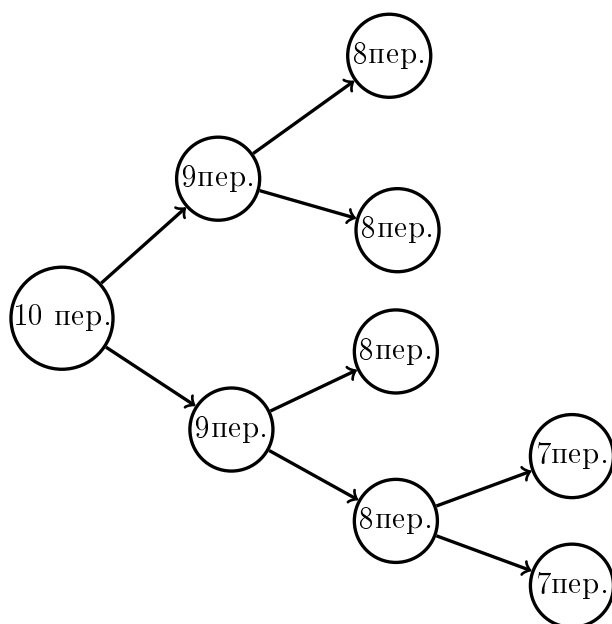


**Как доказывать?**

Способ 1:

Методом резолюций, как в теореме.

$D \ D_- \ D_+$  решаем 2 подзадачи – не эффективно



и так далее... Всего их будет 512 штук.

Способ 2: насыщение по уровням

Каждый с 0

1. с каждым слагаемым
2. каждый с исходным шагом

## 1.2 Исчисление предикатов

**Определение.** Формула исчисления предикатов

1. Вводим множество  $\sum_f$  – множество функций символов
2. Вводим множество  $\sum_c$  – множество констант (не обязательно функции от 0 переменных)
3. Вводим множество  $\sum_p$  – предикатные символы  $P(x)$
4. Вводим множество предикатных переменных  $\sum_x$

**Термины:**

1.  $x$  – переменная
2.  $f$  – символ  $(f(t_1, \dots, t_n))$  – где  $t_1, \dots, t_n$  – термины

**Определение.** Логическая формула – функция исчисления предикатов. Выраженые из логических связок, атомарных формул.

$$P(x) \vee Q(x, f(y)) \quad P(x) \Rightarrow (Q(x) \vee R(x))$$

Если  $P$  – формула, то  $\forall x P$  – тоже

$x$  – переменная  $\exists x P$  – тоже

Наличие переменной внутри  $P$  недопустимо.

*Замечание.* Приоритеты связок – смотрите раньше, кванторы имеют максимальный приоритет.

**Пример.**  $\forall P(x)$

$$\exists x Q(x, y)$$

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

$$\forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$$

$$\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y Q(y))$$

$$\forall x \exists y P(x)$$

$$\forall x (P(x)) \Rightarrow \exists x Q(x) \quad \text{– не подойдет так как } x \text{ встречается два раза}$$

**Определение.**  $\forall x P(x)$  – связанное вхождение  $x$  в формулу

Если квантора для переменной нет, то это не связанное вхождение

$\forall x P(x, y) \vee \exists y Q(x, y, z)$ , где  $\forall x P(x)$  – связанное,  $y$  – не связанное

$\exists y Q(y)$ , соответствующее связанное

$z$  – свободная переменная

(все вхождения не связаны)

**Напоминание**

Сигнатура – символы для предикатов, функций, константы

**Пример.**  $P(-, -)$   $f(-)$   $g(-, -)$   $c$

Определив сигнатуру, используют в формулах только эти символы

$\exists x \forall y P(x, y) \exists Q(x)$  – не из этой сигнатуры

**Определение.** Интерпретация

1)  $M$  – предикатное множество

2) Каждому функциональному символу становится функцией

$f : M^k \rightarrow M$ , где  $k$  – аргументы  $f$

3) Каждый предикатный символ становится функцией из  $M^k : \{0, 1\}$

**Пример.**  $\forall x P(x) = 0$  – ложь для  $Z$ ,  $P$  – четное

$$\forall x P(x) = 1 \text{ для } Z \quad P(x) : x^2 \neq 0$$

$$\forall x \exists y P(x, y) = 1 \quad ZP : x > y, \text{ если } = 0 \quad N$$

Для любого числа  $x$  найдется число  $y$ , такое что  $x > y$

Вычисление значения формулы в заданной итерации

1) нужно выбрать значение несвязных переменных

$$y = 10 = 1$$

$$\exists x P(x, y) =$$

$$y = 0 = 0$$

2)  $f$  - функциональный символ  $f(x_1 \dots x_n)$  - считаем как функцию  $\Rightarrow$  вычислим все термы

$P$  - предыдущий символ  $P(t_1 \dots t_k)$  - считаем сами функцию, получаем 0 или 1

Логические связки - нужно вычислить внутреннюю часть для всех  $x \in M$

$\forall x \dots$  Всегда 1, значит ответ 1, если хотя бы раз 0, то и общий ответ 0

$\exists x \dots$  Надо вычислить внутреннюю часть для всех  $x$

Если хотя бы 1 раз есть 1, то ответ 1

Если всегда 0, то ответ 0

$M = N$

$P(x) = 1$  или  $x$  четное

$P(x) = x$  - четное

$\forall x$	$P(x)$
1	1
2	0
3	1
.	.
.	.
.	.

$$\Rightarrow \forall x P(x) = 0$$

$\exists x P(x)$  в той же интерпретации

$\forall x$	$P(x)$
1	1
2	0
3	1
.	.
.	.
.	.

$$\exists x P(x) = 1$$

**Пример.**  $\forall x \exists y P(x, y)$        $M = N$        $P(x, y) : x > y$   
**x = 1**

$y$	$P(x, y)$
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
.	.
.	.

**x = 2**

$y$	$P(x, y)$
1	1
2	0
3	0
4	0
5	0
.	.
.	.

**x = 3**

$y$	$P(x, y)$
1	1
2	1
3	0
4	0
5	0
.	.
.	.

$\exists y P(x, y)$  Вычисляем для  $\forall y P(x, y)$   
 $\forall x \exists y P(x, y) = 0$  при  $x = 1$

**Пример.** В той же интерпретации  $\exists y \forall x P(x, y)$

*Замечание.* Часто функциональные символы, кванторы, пишут "привычно"

$\forall x$	$P(x)$
$y = 1$	0
$y = 2$	0
$y = 3$	0
.	.
.	.
.	.

$$\forall x P(f(x), x)$$

Если  $P(x, y) = x > y$ , то будет  $\forall x (x + 1 > x)$

$$f(x) = x + 1$$

Префиксная форма

инфиксная форма

**Пример.** Все люди смертны 1

сократ человек 2

сократ смертен 3

$M = \{ \text{Все живые существа} \}$

$H(x)$  –  $x$  – человек

$S$  – константы  $S \in M$ ,  $S$  – сократ

$P(x)$  – смертен

$$H(s)_2 * \forall x [h(x) \Rightarrow P(x)]_1 \Rightarrow D(s)_3$$

Эта формула истинна, но:

Возьмем интерпретацию и сигнатуру  $M = N$ , предикаты  $=, >$ .  $\Phi$  -

символ  $+$

$$\exists K(x + k) = y - x, y \text{ свободные}$$

$$x = 5 \quad y = 10 \quad 1$$

$$x = 10 \quad y = 5 \quad 0$$

$$\exists x (x + k = y) = x < y$$

$$\forall (x < k \vee x = k) = x = 1$$

$$\forall k (\exists t (x + t = k) \vee x = k) = x = 1$$

**Напоминание**

Что такое функция исчисления предикатов

$$\forall x (\exists y P(f(x), y) \vee Q(g(x, c)))$$

$f, g, c$  – функции

$(f(x), y), (g(x, c))$  – атамарные формы

$x, f(x), (f(x), y), x, c, g(x, c)$  – термы

$P, Q$  – предикаты

$\forall \exists$  – кванторы

**Определение.** Сигнатура – это множество функциональных символов и предикатов

$$f^1, g^2, e^0, P^2, Q^1$$

**Определение.** Интерпретация – множество + смысл предикатов и функций

В интерпретации функция – это предикат от несвязных переменных

$\forall x(x \geq x)$  – все переменные связаны = 1

$$\forall(x \geq y) \text{ – } y \text{ не связанная переменная} = \begin{cases} 1 & y = 1 \\ 0 & y \neq 1 \end{cases}$$

в  $M = \mathbb{N}$

**Пример.**  $M = \mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$  функции = +

$$x > y = \exists k(x = y + k)$$

$$x \geq y = x > y \vee x = y = \exists k(x = y + k) \vee x = y$$

$$x \text{ – четные} = \exists k(x = k + k)$$

$$x = 1 = \forall y(y \geq x) = \forall y(\exists k(y = x + k) \vee y = x)$$

Добавим в функции ·

$$x : y = \exists k(x = y \cdot k)$$

$$x \in \mathbb{P} \text{ – простое число} = \exists y[(x : y) \cdot (y > 1) \cdot (y < x)](x > 1) =$$

$$= \forall y(x : y \Rightarrow y = x \vee y = 1)(x > 1)$$

**Определение.** Пусть  $F, G$  – функции исчисления предикатов

$F$  – тождественно равно  $G$  ( $F = G$ ), если их значения совпадают в  $\forall$  интерпретации

**Пример.**  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) = \forall x(\overline{P(x)} \vee Q(x))$

$$F = G$$

$$\text{Данные функции тоже равны } a \Rightarrow b = \overline{a} \vee b$$

*Замечание.* Если функции отличаются заменой, верной в логике исчислений высказываний, то они равны

**Пример.**  $\overline{\exists x P(x)} \vee \exists x Q(x) = \overline{\exists x P(x)} \cdot \overline{\exists x Q(x)}$

### 1.2.1 Операции преобразования

1. Переименование переменной, если  $P$  не содержит  $y$

$$\forall x P(x) = \forall y P(y) \quad \exists x P(x) = \exists y P(y)$$

$$\exists k(x = y + k) = \exists l(x = y + l) \neq \exists x(x = y + x) \neq \exists y(x = y + y)$$

$$\exists x \forall y P(x, y) = \exists x \forall z P(x, z) \neq \exists x \forall x P(x, x) \text{ – некорректная функция}$$



$$2. \forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$$

**Доказательство для  $\forall$**

Рассмотрим интерпретацию  $I$

левая функция истинна  $\Leftrightarrow P(x, y) = 1 \quad \forall x, y \in M$

Правая функция истинна  $\Leftrightarrow P(x, y) = 1 \quad \forall x, y \in M$

*Замечание.*  $\exists x \forall y P(x, y) \neq \forall y \exists x P(x, y)$

$IM = \mathbb{R}, P(x, y) : x > y$

$$\forall y \exists x (x > y) = 1$$

$$\exists x \forall y (x > y) = 0$$

$$3. \overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$$

**Доказательство для  $\forall$**

$IM, PM \rightarrow \{0, 1\}$

Если слева 0

$$\overline{\forall x P(x)} = 0 \Leftrightarrow \forall x P(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(x) = 1, x \in M$$

$$\Leftrightarrow \overline{P(x)} = 0, x \in M$$

$$\Leftrightarrow \exists x \overline{P(x)} = 0$$

$$4. \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) = \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

$$\forall x P(x) \cdot \forall x Q(x) = \forall x (P(x) \cdot Q(x))$$

**Доказательство для  $\exists$**

Возьмем  $IM, P\mathbb{R}$

$$\text{слева} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x P(x) = 0 \\ \exists x Q(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, x \in M \\ Q(x) = 0, x \in M \end{cases} \Leftrightarrow P(x) \vee Q(x) = 0, x \in M \Leftrightarrow$$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) = 0$$

аналогично для  $\forall$

*Замечание.* Для другой связки

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \neq \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

Рассмотрим  $I : M = \mathbb{N}$

$P(x)$  – х четные

$Q(x)$  – х нечетные

$$\forall x P(x) = 0$$

$$\forall x Q(x) = 0$$

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) = 0 \vee 0 = 0$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) = 1$$

5. похожа на 4

$$\exists x P(x) \cdot Q = \exists x (P(x) \cdot Q)$$

$$\exists x P(x) \vee Q = \exists x (P(x) \vee Q)$$

$$\forall P(x) \cdot Q = \forall x (P(x) \cdot Q)$$

$$\forall x P(x) \vee Q = \forall x (P(x) \vee Q)$$

**Доказательство**

$I : M, P, Q$

$a \in M$

$$\text{слева } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x P(x) = 1 \\ Q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(a) = 1 \\ Q = 1 \end{cases} \Rightarrow P(a) \cdot Q = 1$$

$$\Rightarrow \exists x (P(x) \cdot Q) = 1$$

Если слева 0

$$\text{если } Q = 0 \Rightarrow P(x) \cdot Q = \exists x (P(x) \cdot Q) = 0$$

$$\text{если } Q = 1 \Rightarrow$$

$$\exists x P(x) = 0$$

$$\Rightarrow P(x) = 0, x \in M$$

$$\Rightarrow P(x) \cdot Q = Q, x \in M$$

$$\Rightarrow \exists x (P(x) \cdot Q) = 0$$

6.  $\exists x P = P$

$$\forall x P = P$$

**Пример.**  $\forall x P(x, f(x)) \Rightarrow Q$

$$\exists w (\forall x P(x, f(x)) \Rightarrow Q)$$

### 1.2.2 Нормальные формы

Мн Ж, КНФ, ДНФ

**Определение.** Предваренная нормальная форма  
Формула исчисления предикатов имеет ПНФ, если

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n(Matrix)$$

$$Q_i = \forall \text{ или } \exists$$

Простыми словами, ПНФ – это когда все кванторы стоят впереди

**Пример.**  $\forall x \exists y (P(x, y) \Rightarrow Q(y))$

**Пример.**  $\forall x (P(x, y, z) \vee Q(c))$

**Пример.**  $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

**Пример.**  $\forall x (\exists y P(y) \vee Q(x)) = \forall x \exists y (P(y) \vee Q(x))$

**Теорема.** Любая формула исчисления предикатов имеет ПНФ

#### Алгоритм приведения

1. Все связки кроме  $\&, \vee, \neg$  заменяются на  $\&, \vee, \neg$

$$a \Rightarrow b = \bar{a} \vee b$$

$$a \Leftrightarrow b = (a \vee \bar{b})(\bar{a} \vee b)$$

2. Все отрицания внутри кванторов

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$$

3. По свойству 6 вынести все кванторы в начало, возможно, заменой переменных

**Пример.**  $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$   
 $\neq \forall x (P(x) \vee Q(x))$   
 $= \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) =$   
 $= \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) =$   
 $= \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$  – ПНФ



Чего не хватает для метода резолюций в исчислении предикатов

Задача:

$P_1$  = все люди смертны

$P_2$  = сократ человек

$M$  - все предметы

$Q$  = сократ смертен

$P_1 = \forall x (H(x) \Rightarrow M(x))$

$H(x)$  - человек

$M(x)$  - смертен

$P_2 = H(\text{сократ})$       сократ - const  $\in M$

$P_1 * P_2 * \bar{Q}$

$P_i Q$  - в СНФ

$P_1 = \forall x (\overline{H(x)} \vee M(x))$

$P_2 = H(\text{сократ})$

$\bar{Q} = \overline{M(\text{сократ})}$

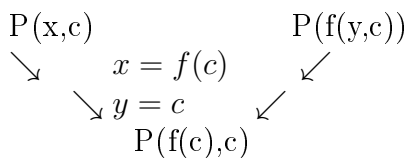
Дизъюнкты:  $\overline{H(x)} \vee M(x)$ ;  $H(\text{сократ})$ ;  $\overline{M(\text{сократ})}$   
 $\bar{A} \vee B$                        $C$                        $\bar{D}$

$\overline{H(x)} \vee M(x) | x = \text{сократ}$

В методе резолюций для исчисления предикатов необходимо делать подстановки в переменные.

Отступление про унификацию:

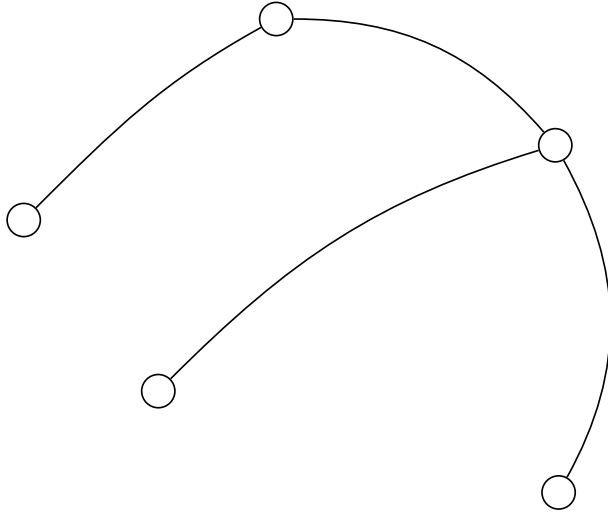
**Определение.** Сделать подстановку, чтобы формулы стали одинаковыми



**Пример. метода резолюций**

$M$  - люди из компании

$P(x,y)$  -  $x$  знаком с  $y$ .



- 1)  $\forall x P(x, x)$
- 2)  $\forall x \forall y (P(x, y) \Leftrightarrow P(y, x))$
- 3)  $\exists x \exists y P(x, y)$
- 4)  $\forall x \forall y \forall z [P(x, y) P(y, z) \Rightarrow P(x, z)]$
- 5)  $\forall x \forall y \forall z [P(x, y) * (P(y, z)) \Rightarrow P(x, z)]$
- 6)  $\exists x B(x)$  – существуют мальчики
- 7)  $\exists x G(x)$  – существуют девочки
- 8)  $\forall x (B(x) + G(x))$
- 9)  $\exists x \exists y (B(x) G(y) P(x, y))$
- 10) Q:  $\forall x \forall y P(x, y)$

**Пример.**  $W(x, y)$  –  $x$  может победить  $y$

- 1)  $\exists x O(x)$  – оборотни существуют
  - 2)  $\exists x G(x)$  – привидения существуют
  - 3)  $\exists x (G(x) \forall y (O(y) \Rightarrow W(x, y)))$  – есть приведение, которое сильнее всех оборотней
  - 4)  $\exists x V(x)$  – существует вампир
  - 5)  $\forall x \forall y (V(x) G(y) \Rightarrow W(x, y))$   $\forall$  вампир сильнее  $\forall$  приведения
  - 6)  $\exists x (V(x) O(x))$   $O$  не бывает оборотней - вампиров
  - 0')  $\forall x \forall y [w(x, y) \vee w(y, x)]$
  - 1')  $O(o)$
  - 2')  $G(g)$
  - 3')  $\exists x \forall y [G(x) (\overline{O(y)}) \vee W(x, y)] \rightarrow^{CK} \forall y [G(g^*) (\overline{O(y)}) \vee W(g^*, g)]$
  - 4')  $V(v)$
  - 5')  $\forall x \forall y (\overline{V(x)} \vee \overline{G(y)} \vee W(x, y))$
  - 6')  $\exists x [V(x) O(x)] \rightarrow V(a) o(a)$
- Дизъюнкты: (без  $\forall$ )

$$\begin{array}{l}
0) \overline{w(x, y)} \vee \overline{w(y, x)} \\
1) O(o) \quad 2) G(g) \quad 3) V(v) \\
4) \overline{G(g^*)} \quad 5) \overline{O(y)} \vee W(g^*, y) \\
6) \overline{V(x)} \vee \overline{G(y)} \vee W(x, y) \\
7) V(a) \\
8) O(a) \\
\begin{array}{c} \textcircled{4} y = g^* \\ \textcircled{6} \end{array} \left| \rightarrow \overline{V(x)} \vee W(x, g^*) \right. \\
9) \\
\begin{array}{c} \textcircled{9} x = a \\ \textcircled{7} \end{array} \left| \rightarrow w(a, g^*) \right. \\
10) \\
\begin{array}{c} \textcircled{5} y = a \\ \textcircled{8} \end{array} \left| \rightarrow w(g^*, a) \right. \\
11) \\
\begin{array}{c} \textcircled{0} x = g^* \\ \textcircled{10} y = a \end{array} \left| \rightarrow w(g^*, a) \right. \\
12) \\
\begin{array}{c} \textcircled{11} x = a \\ \textcircled{12} y = g^* \end{array} \left| \rightarrow \square \right.
\end{array}$$

### 1.2.5 Формальные языки

**Определение.**  $A$  – Алфавит, любое конечное, не пустое множество  
 Обычно, элементы множества обозначаются  $a, b, c$  и другими символами

**Пример.**  $A = \{a, b, c\}$

**Определение.** Слово (предложение) – конечная последовательность элементов алгоритма

**Пример.**  $aa$

$bcbfc$

$cb$

$abcd$

$cc$

$ассаааd$

$bab$

$c \rightarrow \text{длина } 1$

$\Lambda \rightarrow \text{длина } 0$

$\Lambda$  – пустое слово

$\Lambda \notin A$

**Определение.** Язык – это множество слов (предложений)

"Я сплю"  $\in$  Русский

"Я спит"  $\notin$  Русский

"Ябэъъ"  $\notin$  Русский

**Пример.**  $L_1 = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$  – язык слов из "а"

**Пример.**  $L_a = \{a, ab, aba, ba, bab, \dots\}$  – язык слов из "а и b"

**Пример.** Язык  $L_{a=b} = \{\text{слова, где а и b поровну}\}$

$abc \in L_{a=b}$

$abbbcccc \notin L_{a=b}$

$ababa \notin L_{a=b}$

$\Lambda \in L_{a=b}$

**Пример.**  $L_{a^n b^n} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \{\Lambda, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$

$x^n$  – повторение  $n$  раз

$L_{a^n b^n} \subset L_{a=b}$

**Пример.**  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, (, ), -\}$

$L_{tel} = \{\text{язык телефонных номеров}\}$

$+7(921)401 - 00 - 00 \in L_{tel}$

**Определение.** Грамматика (формальная грамматика) – это формальное описание языка

Если есть грамматика языка  $L$

$\forall$  слова  $w$  можно проверить  $w \in L$  ?

**Типы грамматик:**

0. Грамматику можно описать с помощью машины Тьюринга

Грамматика = программа проверяет  $w \in L$  ?

Если для языка создать программу проверки – это тип 0

1. Контекстно-зависимые грамматики

Контекстно-зависимые языки – описываются через конечно-зависимые грамматики

2. Контекстно-свободные грамматики

КС языки – те языки, которые можно описать с помощью КС грамматик



### 3. Регулярные выражения или конечные автоматы

Регулярные языки задаются регулярными выражениями или конечными автоматами

*Замечание.* Каждый следующий вид грамматики "проще предыдущего"

Но множества его языков сужаются

Языки типа  $\emptyset \supset \text{КЗ-языки} \supset \text{КС-языки} \supset \text{Регулярные языки}$

#### 1.2.6 Машина Тьюринга

**Определение.** Машина Тьюринга =  $(A; \square; Q; R; q_0; Q_F)$

$A$  – алфавит,  $\neq \emptyset$ , множество конечное

$\square \in A$  – специальный символ

$Q$  – состояние,  $\neq \emptyset$ , множество конечное

$R$  – правила перехода

$q_0 \in Q$  – начальное состояние

$Q_F \subset Q$  – подмножество конечных состояний

$R : A \times Q \rightarrow A \times Q \times \{L, R, E - \text{не двигаться}\}$

**Пример.**  $A = \{1, \square\}$

$Q = \{q_0, q_1\}$

$Q_F = \{q_1\}$

$R/A$	1	$\square$
$q_0$	$1, q_1, R$	$1, q_1, S$
$q_1$	не надо	не надо

Конечное количество символов ленты  $\neq \square$

0	1	2	3	...	...	...	...	...
1	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	...

↑

$q_0$

Сначала головка смотрит на клетку с индексом 0, состояние  $q_0$

Видим символ 1

$R(1, q_0) = 1, q_0, R$  – сдвинуть головку вправо

0	1	2	3	...	...	...	...	...
1	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	...

↑

$q_0$

Головка на клетке 1

Символ = 1

Состояние =  $q_0$

$R(1, q_0) = 1, q_0, R$

0	1	2	3	...	...	...	...	...
1	1	1	1	□	□	□	□	...

↑

$q_0$

ПОТОМ

0	1	2	3	...	...	...	...	...
1	1	1	1	□	□	□	□	...

↑

ПОТОМ

0	1	2	3	...	...	...	...	...
1	1	1	1	□	□	□	□	...

↑

Теперь:

Головка: клетка 4

Символ: □

Состояние:  $q_0$

$R(0, q_0) = 1, q_1, E$  – стоим на месте

0	1	2	3	4	...	...	...	...
1	1	1	1	1	□	□	□	...

↑

Дано было 1111, результат 11111

Вывод: программа дописывает 1

Работа Машины Тьюринга формально

**Определение.** Конфигурация:  $(w, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, q)$

$n$  – положение головки

$q \in Q$

$w$  – слово на ленте (без хвоста □)

Один шаг исполнения программы:

$(w_1, n_1, q_1) \rightarrow (w_2, n_2, q_2)$   
 $w_1[n_1]$  – символ над головкой  
 $R(w_1[n_1], q_1) = (a, q_2, L/R/E)$   
 $w_2 = w_1$  где  $w_1[n] = a$   
 если  $L \rightarrow n_2 = n_1 - 1$   
 $R \rightarrow n_2 = n_1 + 1$   
 $E \rightarrow n_2 = n_1$   
 Начало работы:  $(w, O, q_0)$   
 $w$  – дана  
 $O$  – головка слова  
 $q_0$  – начальное слово  
 $\rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow (\bar{w}, \bar{q} \in Q_F)$  – конечное состояние  
 Ответ:  $\bar{w}$ , то есть из слова  $w$  получили  $\bar{w}$

*Замечание.* (Тезис Чёрча)

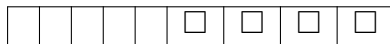
Все, что мы интуитивно понимаем как алгоритм, может быть реализовано с помощью машины Тьюринга

*Замечание.* Модификации машины Тьюринга:

1.  $\infty$  в обе стороны лента
2. несколько лент
3. недетерминированная машина Тьюринга

1, 2, 3 – это все эквивалент обычной машины Тьюринга

*Замечание.* Про проверку, слово в языке?  $w \in ?L$



Если результат  $1 \Rightarrow w \in L$

Если результат  $0 \Rightarrow w \notin L$

или

$\{q_1, q_2\} = Q_F$

$q_1 : w \in L$

$q_2 : w \notin L$

Все зависит от конечного состояния

### 1.2.7 Контекстно-свободные языки

**Пример.** Email @ server

username  $\rightarrow$  word

server  $\rightarrow$  word.word

word  $\rightarrow$   $\mathbb{A}$

word  $\rightarrow$   $\mathbb{B}$

word  $\rightarrow$   $\mathbb{C}$

$E \rightarrow u@S \rightarrow w@S \rightarrow$  (используя правило  $s \rightarrow w.w$ )  $w@w.w \rightarrow$  (используя правило  $w \rightarrow ww$ )  $ww@w.w$

$\rightarrow xw@w.w \rightarrow xy@w.w$

$\rightarrow xy@ww.w \rightarrow xy@www.w$

$\rightarrow xy@www.ww$

Можно ли получить  $xy@@ru$ ?

нет  $\notin L$

то есть слова, которые можно получить, они  $\in L$

**Пример.** Еще

1.  $S \rightarrow$

2.  $S \rightarrow aSb$

– это грамматика

$S \rightarrow aSb \rightarrow aaSbb \rightarrow aaaSbbb \rightarrow aaabbb$

Какие слова можно вывести?

$\{a^n b^n | n \geq 0\} = \{\Lambda, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$

**Определение.** КС-грамматика –  $(A, N, S \in N, R)$

$A$  – алфавит терминальных символов конечен,  $\neq \emptyset$

$N$  – алфавит нетерминальных символов, конечен,  $\neq \emptyset$

$S$  – начальный нетерминальный

$R$  – множество правил

КС – грамматика

$A$  – Алфавит

$N$  – нетерминальные символы (алф.)

$S \in N$  – начальное

$R$  – правило вида  $N \rightarrow (A \vee N)^*$

**Определение.** Из слова  $w \in (A \in N)^*$  выводится  $u \in (A \vee N)^*$  если  $w = \dots x \cdots \rightarrow u = \dots Y \dots$

где  $X \rightarrow Y \in R$

**Определение.** Вывод – это последовательность  $w_i : w_{i-1} \rightarrow w_i$

$$w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3 \cdots \rightarrow w_n = w_1 \rightarrow^* w_n$$

вывод  $w_n$  из  $w_1$

**Определение.** Язык, который задает КС - грамматика

$$L = \{w/\exists \text{ вывод } S^* \rightarrow w\}$$

**Пример.** 1) HTML      Н – начальный нетерминал

$H \rightarrow EH$       Т – тэг, L – символы

$H \rightarrow$

$H \rightarrow$

$H \rightarrow EH$

$H \rightarrow EH \rightarrow EEH \rightarrow EE$

$H \rightarrow EE \dots E$

$E \rightarrow T$

$E \rightarrow L$

$L \rightarrow a$

$L \rightarrow b$

$L \rightarrow c$

.

.

$L \rightarrow A$

Устройство тэгов:

$T \rightarrow O$

Т – тэг

L – символы

O – открывание тэга

C – закрывание тэга

Т – ОНС

$T \rightarrow \langle \dots \rangle \dots \langle \dots \rangle$

$T \rightarrow \langle \dots \rangle_{img}$

$O \rightarrow \langle N \rangle$

$C \rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle$

$N \rightarrow$

$N \rightarrow LN$

$N \rightarrow LLLL$

Выведем hello, <b>World<h>!

$H \rightarrow EH \rightarrow EEG \rightarrow^* EEEEEEEEEEH \rightarrow EEEEEEEEE \rightarrow^*$   
 $LLLLLLTL \rightarrow^* h, T!$   
 $\rightarrow hello, \langle N \rangle world \langle \mathbf{N} \rangle!$

$\rightarrow^* \text{hello}, \langle b \rangle \text{world} \langle /b \rangle !$

Итого,  $\text{hello}, \langle b \rangle \text{world} \langle /t \rangle ! \in \alpha$

Что есть в теме?

– алгоритм разбора

Дана грамматика, слово, получить вывод слова или понять, что оно не выводится – специальные виды грамматик с эффектом алг. разбора

$*LL(1)LR(1)LALR(1) \dots$

### 1.2.8 Регулярные языки

Задаются регулярными выражениями и конечными автоматами

Регулярные языки и выражения

**Определение.** Регулярные языки

1)  $\{a\}$ , где  $a \in A$  регулярный

2) если  $L_1$  и  $L_2$  – регулярные, то  $L_1L_2 = \{w_1w_2\}, w_1 \in L_1, w_2 \in L_2$  – регулярный

$L_1L_2$  – регулярные

$L_1|L_2 = L_1 \vee L_2$  – регулярный

**Пример.**  $A = \{a, b, c\}$

$\{a\} \quad \{b\} = \{ad\}$

$\{ab\}|\{b\} = \{abc\}$

$\{a\}|\{b\} = \{a, b\}$

$\{a, b\}|\{b\}|\{c\} = \{ab, bc\}$

$\{ab, b, c\}|\{b, bc\} = \{abb, abbc, bb, bbc, cb, cbc\}$

$\{a\}^* = \{\Lambda, a, aa, aaa, \dots\}$

$\{a, b\}^* = \{\Lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aab, abb, \dots\}$  – слова из а и b

$\{a, bc\}^* = \{\Lambda, a, bc, abc, bca, aa, bcbc, \dots, aabc, abcbcaa\}$

**Определение.** Регулярные выражения – это выражение над языками.

1) Определим – конк, 1, итерация

2)  $\{a\}$  – записываются как  $*$

**Пример.**  $abc^* = \{ab, abc, abcc, abccc, \dots\} \uparrow \text{конк} \downarrow a(bc)^* = \{a, abc, abcbcb, abcbcbcb, \dots\}$

$(0|1|2)(0|1|2|3| \dots |9) : (0|1|2|3|4|5)$

$(0|1|2| \dots |9)$  – время

$A = \{0, 1, 2, \dots, 9, :\}$

23:56      29:40??

Нормальное время

[0123456789]

$((0|1)(0|1 \dots |9)(20|21|22|23) : (0| \dots |5)(0) \dots (9))$

**Пример.**  $(a|b)^* = \{\Lambda, b, ab, aa, bb, ba, \dots, abbaab \dots\}$

$(ab)^* = \{\Lambda, ab, abab, ababab, \dots\}$

$a^*|b^* = \{\Lambda, a, aa, aaa, aaaa, \dots, b, bb, bbb, bbbb, \dots\}$

$\{a^4b^4/n \in \mathbf{N} - \text{не регулярный язык}$

**Определение.** Конечные автоматы это  $\{Q, S \subset Q, F \subset Q, E \subset Q \times Q \times A \cup \{\epsilon\}\}$

$Q$  – конечное не пустое множество состояний.

$S$  – начальное состояние

$F$  – конечные состояние

$A$  – алфавит

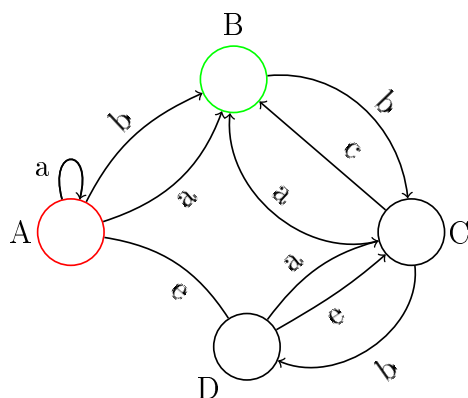
$E$  – переходы между состояниями

$q_1 \xrightarrow{A, \epsilon} q_2$

Это состояние: 

Начальное состояние: 

Конечное состояние: 



$\epsilon$  – пустой переход

$Q = \{A, B, C, D\}$

**Определение.** Конфигурация  $\in A^*xQ$  – слово и состояние

**Пример.**  $(abc, A) (bb, B) (\Lambda, A)$

**Определение.** Из конфигурации 1 выводится конфигурация 2

$$(w_1, q_1) \rightarrow (w_2, q_2) \\ \text{если } \exists e \in E : q_1 \xrightarrow{a} q_2 \text{ и } W_2 = w_1 a$$

**Пример.**  $(\Lambda, A) \rightarrow (a, A) \xrightarrow{A \rightarrow^a A} (aa, A) \xrightarrow{A \rightarrow^b B}$

$$\vdots \\ \rightarrow^{B \rightarrow^b c} (aabb, c) \rightarrow^{c \rightarrow^b D} (aabbb, D) \rightarrow^{D \rightarrow^e C} (aabbb, c)$$

**Определение.** Какой язык задает конечный автомат?

слово  $w \in L$ , если  $\exists$  вывод  $(\Lambda, s) \rightarrow \dots \rightarrow (w, f)$ , где  $s \in S, f \in F$

$S$  — начальное

$f$  — конечное

если могу прочитать слово  $w$ , начав в начальном состоянии, закончив в конечном.

**Определение.** в прошлом примере

$$aabbb \in L$$

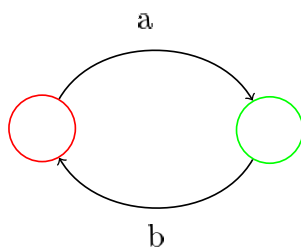
$$aabb \in L$$

$$aab \in L$$

$$a \in L$$

$$a \xrightarrow{\epsilon} D \xrightarrow{a} C$$

**Пример.**



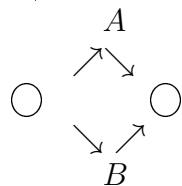
$$L = \{a, aba, ababa, \dots\} = a(ba)^*$$

**Утверждение**

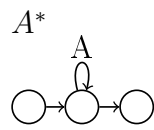
Язык регулярный  $\Leftrightarrow \exists$  конечный автомат, который его принимает

$$AB: \bigcirc \xrightarrow{A} \bigcirc \xrightarrow{B} \bigcirc$$

A/B:



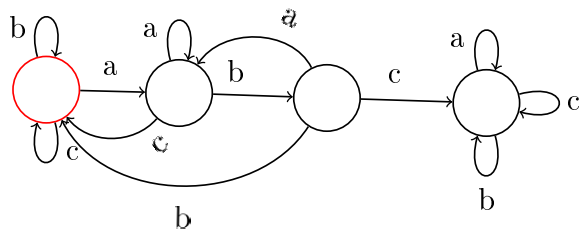




Авт  $\rightarrow$  Регулярное выражение - убиение вершин

**Определение.** Детерминированный КА – это КА, у которого

- 1)  $|S| = 1$  ровно 1 нач вершина
- 2) нет  $\epsilon$  – переходов
- 3)  $\bigcirc \nearrow \searrow$  нет двух переходов с одинаковыми символами и началом



Дет, язык слов, содержащих  $abc$ .

Аналогичный подтерм  $(a|b|c)^*abc(a|b|c)^*$