

Математическая логика и теория алгоритмов

Посов Илья Александрович

запись конспекта: Блюдин Андрей и Хаматов Вадим

Содержание

1	Математическая логика	1
1.1	Исчисление высказываний	1
1.1.1	Основные понятия	1
1.1.2	Функции от 1 переменной (их определения)	2
1.1.3	Функции от 2 переменных (их определения)	3
1.1.4	Приоритеты операций	5
1.1.5	Алгебраические преобразования логических выражений	5
1.1.6	Таблица эквивалентных логических выражений	6
1.1.7	Многочлены Жегалкина	8
1.1.8	Получение многочлена Жегалкина через алгебраические упрощения	11
1.1.9	Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ)	12
1.1.10	Задача (не) выполнимости	14
1.1.11	Запись таблиц истинности в виде графика	15
1.2	КНФ - Конъюнктивная нормальная форма	15

1 Математическая логика

1.1 Исчисление высказываний

1.1.1 Основные понятия

Определение. Логическая функция — это множество из 2 элементов. Также, логической функцией называют множество логических значений $B = \{0, 1\}$, где 0 — это ложь (false), а 1 — это истина (true)

Определение. Логическая функция от n переменных

$$f : B^n \rightarrow B$$

Замечание. Часто логические функции вводят как перечисление возможных аргументов и значений функции при этих аргументах

Пример. Введем функцию $f(x, y)$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 1: Таблица истинности для $f(x, y)$

Эту же функцию можно задать функцией $f(x, y) = \max(x, y)$

Утверждение. Функция от n переменных может быть $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0 или 1
...	0 или 1
1	1	...	1	0 или 1

Таблица 2: Таблица истинности для $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

При этом количество всех возможных наборов аргументов равняется 2^n , а количество всех возможных функций при всех возможных наборах аргументов равняется 2^{2^n}

Следствие. Посчитаем количество таких функций для разных n

$$n = 1 \quad 2^2 = 4 \text{ функций } f(x)$$

$$n = 2 \quad 2^{2^2} = 16 \text{ функций } f(x, y)$$

$$n = 3 \quad 2^{2^3} = 2^8 = 256 \text{ функций } f(x, y, z)$$

1.1.2 Функции от 1 переменной (их определения)

Пример. Перечислим все возможные функции от 1 переменной

Данные функции имеют значение:

$$f_1(x) = 0 \quad \text{— функция } 0$$

$$f_2(x) = x \quad \text{— функция } x$$

$$f_3(x) = \neg x, \bar{x}, \neg x, \text{ not } x \quad \text{— функция отрицания (не } x)$$

$$f_4(x) = 1 \quad \text{— функция } 1$$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

1.1.3 Функции от 2 переменных (их определения)

Пример. Перечислим все возможные функции от 2 переменных

x	y	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 3: Таблица истинности для $f(x, y)$

Продолжение:

x	y	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$	$f_{11}(x)$	$f_{12}(x)$	$f_{13}(x)$	$f_{14}(x)$	$f_{15}(x)$	$f_{16}(x)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 4: Таблица истинности для $f(x, y)$

Перечислим основные значения функций:

$f_2(x, y)$ — это конъюнкция или "логическое и" или логическое умножение ($xy, x \& y, x \wedge y$)

$f_7(x, y)$ — это исключающее или ($x + y, x \text{ XOR } y, x \oplus y$), также данную функцию можно ассоциировать как $(x + y) \bmod 2$

$f_8(x, y)$ — это логическое или, но ее можно также записать как $\max(x, y)$ ($x|y, x \vee y$)

$f_{10}(x, y)$ — это эквивалентность ($x \Leftrightarrow y, x \equiv y, x == y$)

$f_{14}(x, y)$ — это импликация ($x \Rightarrow y, x \rightarrow y$)

Импликация работает так, что истина следует из чего угодно:

лешия не существует \Rightarrow русалок не существует = 1 ($1 \Rightarrow 1 = 1$)

допса скучная \Rightarrow русалок не существует = 1 ($0 \Rightarrow 1 = 1$)

русалки существуют \Rightarrow драконы существуют = 1 ($0 \Rightarrow 0 = 1$)

$x \Rightarrow y = 0$ только если $x = 1$, а $y = 0$

$f_{12}(x, y)$ — это обратная импликация ($x \Leftarrow y = y \Rightarrow x$)

$f_9(x, y)$ — стрелка Пирса ($x \downarrow y = \overline{x \vee y}$)
 $f_{15}(x, y)$ — штрих Шеффера ($x|y = \overline{xy}$)
 $f_3(x, y)$ — запрет по y ($x > y = \overline{x \Rightarrow y}$)
 $f_1(x, y) = 0$
 $f_4(x, y) = x$
 $f_5(x, y)$ — запрет по x ($x < y = \overline{x \Leftarrow y}$)
 $f_6(x, y) = y$
 $f_{11}(x, y)$ — не y ($\neg y$)
 $f_{13}(x, y)$ — не x ($\neg x$)
 $f_{16}(x, y) = 1$

Определение. Логические выражения — способ задания логических функций с помощью переменных, цифр 0 или 1 и операций:

· \vee \Rightarrow \Leftrightarrow $+$ \equiv $|$ \downarrow $<$ $>$

Пример. Примеры логических выражений:

$(x \vee y) =$
 $(x \Rightarrow yz) \vee (y \equiv z)$
 $(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y)$

Определение. Значения логического выражения можно записать **Таблицей истинности**

Пример. $f(x, y, z) = (x \vee y)z$

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Замечание. Порядок строчек в таблице истинности может быть любым, но лучше использовать как у двоичных чисел

Утверждение. *Таблицы истинности часто считают постепенно*

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y)z$
...
...

1.1.4 Приоритеты операций

\neg

\cdot

\vee

$+$ \equiv

\Rightarrow \Leftarrow

$|$ \downarrow $<$ $>$

Пример. Примеры приоритетов операций:

$$\neg x \vee y = (\neg x) \vee y$$

$$x \vee yz = x \vee (yz)$$

$$x \Rightarrow y \vee z = x \Rightarrow (y \vee z)$$

1.1.5 Алгебраические преобразования логических выражений

Определение. Алгебраические преобразования логических выражений — изменяем выражения по правилам, обычно в сторону упрощения

Пример. $(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y) = 1 \vee (1 \Rightarrow y) = 1$

Утверждение 1.

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Доказательство:

x	\overline{x}	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

Утверждение 2. При \vee :

$$1 \vee x = 1$$

$$0 \vee x = x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

1.1.6 Таблица эквивалентных логических выражений

Утверждение. $x \vee y = y \vee x$ - симметричность

$$x \vee 0 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \vee x = x$$

$$x \vee \bar{x} = 1$$

Доказательство:

x	\bar{x}	$x \vee \bar{x}$
0	1	$0 \vee 1 = 1$
1	0	$1 \vee 0 = 1$

$$xy = yx$$

$$x * 0 = 0$$

$$x * 1 = x$$

$$x * x = x$$

$$x * \bar{x} = 0$$

$$x + y = y + x$$

$$x + 0 = x$$

$$x + 1 = \bar{x}$$

$$x + x = 0$$

$$x + \bar{x} = 1$$

Утверждение. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ - ассоциативность

Ассоциативность означает, что порядок скобок не важен

Пример. $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$ - не симметричная функция

Доказательство:

Замечание. $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$

x y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	1
1 1	1	1

$$x \Rightarrow 0 = \bar{x}$$

$$0 \Rightarrow x = 1$$

Доказательство:

x	$x \Rightarrow 0$
0	$0 \Rightarrow 0 = 1$
1	$1 \Rightarrow 0 = 0$

$$x \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 \Rightarrow x = x$$

$$x \Rightarrow x = 1$$

$$x \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}$$

$$\bar{x} \Rightarrow x = x$$

$$\bar{x} \Rightarrow y \Rightarrow z \text{ договоримся, что это } x \Rightarrow y(y \Rightarrow z) \neq (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$$

x y z	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

$$x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$$

$$x \Leftrightarrow 0 = \bar{x}$$

$$x \Leftrightarrow 1 = x$$

$$x \Leftrightarrow x = 1$$

$$x \Leftrightarrow \bar{x} = 0$$

$$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z \text{ - ассоциативно}$$

Утверждение. Дистрибутивность

$$(x \vee y)z = xz \vee yz$$

$$(x + y)z = xz + yz \text{ по таблице истинности}$$

$$(x \& y) \vee z = (xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$$

$$(x \vee y) \& z = (x \& z) \vee (y \& z)$$

$$(x \& y) \vee z = (x \vee z) \& (y \vee z)$$

Замечание. $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(y_1 \vee y_2) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_2 =$
 $x_1y_1 \vee x_2y_1 \vee x_3y_1 \vee x_1y_2 \vee x_2y_2 \vee x_3y_2$

$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = xy \vee xz \vee zy \vee zz = xy \vee xz \vee zy \vee z =$$

$$xy \vee xz \vee zy \vee z * 1 = xy \vee z(x \vee y \vee 1) = xy \vee z \text{ сошлось}$$

$$x + y = \overline{x} \Rightarrow y \text{ - смотри Таблицу истинности}$$

$$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = x \Rightarrow y$$

1.1.7 Многочлены Жегалкина

Замечание. Одну и ту же функцию можно записать по разному.

$$\text{В алгебре: } f(x) = 1 + x = x + 1 = x + 5 - 4 = \sin(x - x) + x = \dots$$

В логике: $f(x, y) = x \vee y = x \vee y \vee 0 = (x \vee y)(\overline{y} \vee y = x\overline{y} \vee y (=$ -
дистрибутивность)

Многочлены Жегалкина для логической формулы

Определение. $f(x_1, \dots, x_n)$ - это многочлен с переменными x_i , конспектами 0,1 и со степенями переменных ≤ 1 . Это многочлены от $x_i \in \mathbb{Z}_2$

Пример. $f(x, y, z) = 1 + x + yz + xyz$

$$1 + x \quad xy + xyz$$

$$1 + xy$$

Не многочлены

$$1 + x + (y \vee z)$$

$$1 + x + z^2 \text{ нельзя степень } 2$$

Замечание. В общем случае многочлен от 1 переменной ($a_i = 0$ или 1)

$$a_0 + a_1x$$

$$\text{от } 2 \text{ух: } a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

$$\text{от } 3 \text{ех: } a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$$

В общем случае $f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + ax_1x_2 + ax_1x_3 +$
 $+ \dots$ (все пары переменных) $+ ax_1x_2x_3 + ax_1x_3x_2 \leftarrow$ все тройки
переменных $+ ax_1x_2x_3 \dots x_n$

Определение. $\forall f(x_1, \dots, x_n)$ - логическая функция $\exists!$ многочлен Жегалкина $g(x_1, \dots, x_n) : f = g$

Замечание. Всего 4 функции от 1ой переменной

$$f(x) = 0 = \bar{x} = 0 + 0x$$

$$f(x) = 1 = 1 = 1 + 0x$$

$$f(x) = x = x = 0 + 1x$$

$$f(x) = \bar{x} = 1 + x = 1 + 1x$$

Доказательство:

Определение. Разные многочлены - это разные логические функции

т.е. $f(x_1...x_n) = a_0 + ... + a_1x_1...x_n$

$$g(x_1...x_n) = b_0 + ... + bx_1...x_n$$

$\exists!$: $a_i \neq b_i$ различающийся

Доказательство:

Возьмем индекс с самым большим количеством переменных

$$f(x, y, z) = 1 + x + xy + xyz = ... + 1x + Dy + Dz + 1xy$$

$$g(x, y, z) = 1 + y + z + xyz... + Dx + 1y + 1z$$

для переменных этого слагаемого подставим 1 0ху

для остальных переменных : 0

$$[\text{В примере } x = 1, y = 0, z = 0 : f(1, 0, 0) \text{ и } g(1, 0, 0)]$$

и в f и в g все другие слагаемые равны 0

Теперь $f(...)$ и $g(...)$

$$f(...) = a_ix_1x_2x_3 \neq b_ix_1x_2x_3 \Rightarrow f(x_1...x_n) \neq g$$

Доказательство:

Проверим, что многочленов Жегалкина столько, сколько функций:

Посчитаем

$$a_0 + a_1x_1 + ... + a_1x_1x_2...x_n$$

Сколько слагаемых:

1) 1 слагаемых без переменных

n слагаемых с переменной

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

C_n^2 - слагаемых с 2 - мя переменными

C_n^3 - слагаемых с 3 - мя переменными

C_n^n - слагаемых с n переменными

$$\text{Всего : } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... C_n^n = 2^n((1 + 1)^2)$$

Пример. $a_0 + a_1x$ - 2 слагаемых

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy - 2^2 = 4 \text{ слагаемых}$$

2) Все слагаемых имеют вид: $x_1, x_2, x_3...x_n$ (0 или 1) - 2^n слагаемых

Итого: многочлен Жегалкина от n переменных

Задача. Сколько разных многочленов?

Это столько же, сколько логических функций

Итог:

Следствие: Любая логическая функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина

Пример. $f(x, y) = x \vee y$

$f(x, y) = x * y$ - уже многочлен Жегалкина

Метод неопределенных коэффициентов:

Подберем $x \vee y = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 0) = a_0 + a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3 \dots$$

$$f(1, 0) = 1 \vee 0 = 1$$

$$f(1, 0) = a_0 + a_1 = a_1 \quad (a_0 = 0, \Rightarrow a_1 = 1)$$

$$f(0, 1) = \text{аналогично} \Rightarrow a_2 = 1$$

$$f(x, y) = x + y + a_3xy$$

$$f(1, 1) = 1 \vee 1 = 1$$

$$f(1, 1) = 1 + 1 + a_3 = 0 + a_3 = a_3, \quad a_3 = 1$$

$$\text{Ответ: } x \vee y = x + y + xy$$

Многочлены Жегалкина от 1 переменной:

$f(x)$	Мн Ж
0	0
1	1
x	x
\bar{x}	$1 + x$

Многочлены Жегалкина от 2 переменных:

$f(x, y)$	Мн Ж
0	0
1	1
xy	xy
$x + y$	$x + y$
$x \vee y$	$x + y + xy$

Формулы:

$$1. \quad \overline{xy} = \neg(xy) = \bar{x} \vee \bar{y}$$

$$2. \quad \overline{x \vee y} = \neg(x \vee y) = \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \bar{y}$$

Замечание. $\overline{xy} \neq \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x} \overline{y}$

Доказательство формул через таблицу истинности:

x	y	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

1.1.8 Получение многочлена Жегалкина через алгебраические упрощения

1. Многочлен Жегалкина для \vee

$$x \vee y = (x = \overline{a}, y = \overline{b}) = \overline{ab} = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{(1+x)(1+y)} = 1 + (1+x)(1+y) = 1 + 1 + x + y + xy = \underline{x + y + xy}$$

2. Многочлен Жегалкина для \Leftrightarrow

$$x \Leftrightarrow y = \overline{x + y} = \underline{1 + x + y}$$

3. Многочлен Жегалкина для \Rightarrow

$$x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = (1+x) \vee y = (1+x) + y + (1+x)y = 1 + x + y + y + xy = \underline{1 + x + xy}$$

Замечание. Если есть логическая формула, то ее можно привести к форме многочлена Жегалкина двумя способами:

1. метод неопределенных коэффициентов:

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + \dots + axyz$$

2. метод алгебраических преобразований

Пример. $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \dots = x + y + xy$

Пример. $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = \dots = 1 + x + xy$

Пример. $x \Rightarrow (y \vee \overline{z}) = x \Rightarrow (y + \overline{z} + y \cdot \overline{z}) = x \Rightarrow (y + (1+z) + y \cdot (1+z)) = x \Rightarrow (y + 1 + z + y + yz) = x \Rightarrow (1 + z + yz) = 1 + x + x(1 + z + yz) = 1 + x + x + xz + xyz = 1 + xz + xyz$

Поймем, что: $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$

$$x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z = (1+x+y) \Leftrightarrow z = 1 + (1+x+y) + z = 1 + 1 + x + y + z = x + y + z$$

Вывод:

Заранее не ясно, сложно ли привести логическую формулу к многочлену Жегалкина

1.1.9 Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ)

Определение. Литерал — это переменная или отрицание переменной

Пример. $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$

Определение. Конъюнктор — конъюнкция литералов

Пример. $x\bar{y}, xyz, \bar{x}\bar{y}\bar{z}, \bar{x}z$, ноль (пустой конъюнкт).

Определение. Логическое выражение имеет ДНФ, если она является дизъюнкцией конъюнкторов

Пример. $x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee z \vee \bar{x}\bar{y}$ — ДНФ

Пример. $xy \vee \bar{x}\bar{y}$ — ДНФ

Пример. $x \vee y$ — ДНФ

Пример. xy — ДНФ

Пример. не ДНФ — $\bar{x}\bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ — ДНФ

Пример. не ДНФ — $x \Rightarrow yz = \bar{x} \vee yz$ — ДНФ

Построение ДНФ по таблице истинности функции:
алгоритм на примере трех переменных

x	y	z	$f(x, y, z)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	1	1	1	$\bar{x}yz$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$xy\bar{z}$
1	1	1	0	

Берем строки из столбца $f(x, y, z)$, где значения в столбце равны 1
Допустим есть строка: $x = a_1, y = a_2, z = a_3$ (a могут быть как 0, так и 1)

В ответ добавляется конъюнкт xyz ($0 \Rightarrow$ отрицание, $1 \Rightarrow$ не отрицание)

Ответ: $f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$

Доказательство корректности алгоритма:

Когда полученный ДНФ = 1?

Когда есть конъюнкт равный 1

1. Если первый конъюнкт равняется 1 (в примере $\bar{x} y \bar{z} = 1$)
 \Rightarrow все литералы конъюнкта равняются 1
 \Rightarrow в примере $\bar{x} = 1 \quad y = 1 \quad \bar{z} = 1$
 $x = 0 \quad y = 1 \quad z = 0$
2. Если второй конъюнкт равняется 1
 \Rightarrow в примере $x = 0 \quad y = 1 \quad z = 1$ — строка из таблицы истинности
3. То же самое с третьим конъюнктом

Посмотрим таблицу с этими конъюнктами:

x	y	z	$\bar{x} y \bar{z}$	$\bar{x} y z$	$x y \bar{z}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Замечание. У одной функции могут быть разные ДНФ

Пример. $\bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} = \bar{x} y (\bar{z} \vee z) \vee x y \bar{z} = \bar{x} y \vee x y \bar{z}$ — подчеркнутые выражения являются ДНФ

Пример. $\bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} = \bar{z} y (\bar{x} \vee x) \vee z y \bar{x} = \bar{z} y \vee z y \bar{x} = y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} x \vee z \bar{z}$ — подчеркнутые выражения являются ДНФ

Получить ДНФ для логической функции/формулы можно:

1. по таблице истинности
2. с помощью алгебраических преобразований

Пример. 1. $\bar{x} = \bar{x}$

2. $x \vee y = x \vee y$

3. $x \cdot y = x \cdot y$

4. $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$

x	y	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$5. x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}x \vee y\bar{y} \vee yx = \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

$$6. x + y = \overline{x \Leftrightarrow \bar{y}} = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee xy} \dots$$

$$= \overline{\bar{x}\bar{y}} \vee \overline{xy} = \overline{\bar{x}} \cdot \overline{\bar{y}} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} = x\bar{y} \vee \bar{x}y$$

$$7. x \Rightarrow (y + z) = \bar{x} \vee (y + z) = \bar{x} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z}$$

1.1.10 Задача (не) выполнимости

Дана логическая формала в ДНФ

Проверить, бывает ли она равна 0?

$$\bar{x}\bar{y} \vee x \vee y? = 0$$

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow \bar{x}\bar{y} = 1$$

\Rightarrow данный ДНФ не может быть равным 0

Эта задача обладает особенностью:

1. если знать значения переменных (ответ), то их легко можно быстро проверить
2. подобрать значения переменных для 0 — нет

Нет известного алгоритма, который "принципиально" быстрее полного перебора

У этой задачи класс NP выполнимости (ответ легко проверить, а найти его простым способом невозможно)

Следствие. То к чему сводится задача (не) выполнимости тоже сложна

1. упростить логическое выражение
2. поиск минимального ДНФ

1.1.11 Запись таблиц истинности в виде графика

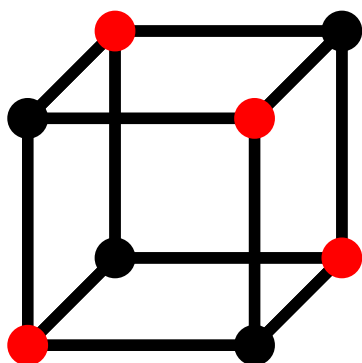
Формула = $f(x, y, z) = x + y$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 1) = 1$$

$$f(1, 0) = 1$$

$$f(1, 1) = 0$$



1.1.12 Задача минимизации ДНФ

Данная задача тоже является сложной, также как и задача (не) выполнимости

Дана логическая функция (в виде ДНФ). Необходимо найти самую короткую ДНФ эквивалентную данной.

Минимальной ДНФ считается та, где меньше количество литералов и дизъюнкций

Пример. $\bar{x}\bar{y} \vee z$ короче, чем $xy \vee yz$

Замечание. Далее рассматриваться все будет для функции от 3 переменных $f(x, y, z)$

Замечание. Какова таблица истинности $xyz = abc$, где $a = 0$ или 1 , $b = 0$ или 1 , $c = 0$ или 1

$0 \Rightarrow$ надо поставить отрицание

$1 \Rightarrow$ нет отрицания

Пример. $f(x, y, z) = \bar{x} y \bar{z}$

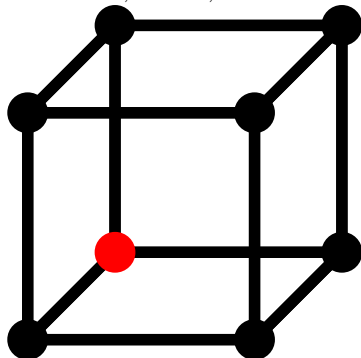
Если $\bar{x} y \bar{z} = 1$

$\Rightarrow \bar{x} = 1, y = 1, \bar{z} = 1$

$\Rightarrow x = 0, y = 1, z = 0$

$\Rightarrow x = a, y = b, z = c$

$\Rightarrow a = 0, b = 1, c = 0$



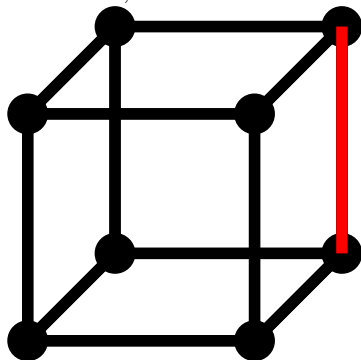
Пример. $f(x, y, z) = xy$

Если $xy = 1$

$\Rightarrow x = 1, y = 1$

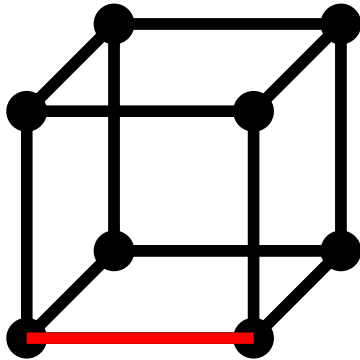
$\Rightarrow x = a, y = b$

$\Rightarrow a = 1, b = 1$



Аналогично, $f(x, y, z) = \bar{y} \bar{z}$

ребро: $y = 0, z = 0, x = ?$ — не важно

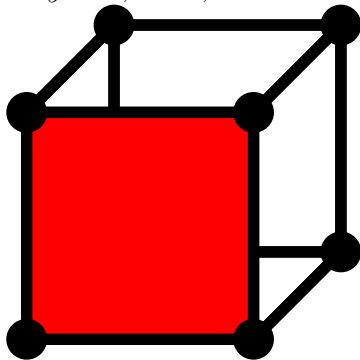


Последнее — конъюнкт из 1 литерала:
 $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$

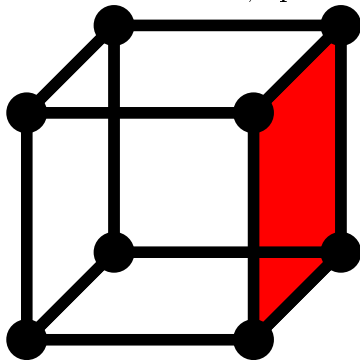
Пример. $f(x, y, z) = \bar{y}$

Если $\bar{y} = 1$

$\Rightarrow y = 0, x = ?, z = ?$



Или конъюнкт x , грань $x = 1$



Итого:

xyz — это вершина $x = a, y = b, z = c$

xy — это ребро $x = a, y = b$

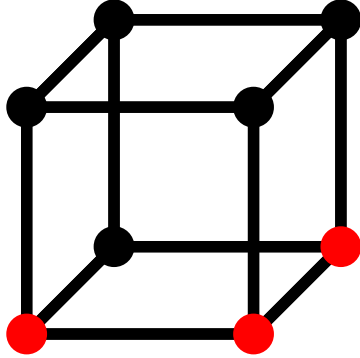
x — это грань $x = a$

Попробуем минимизировать ДНФ

Пример. $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$

Найти самый короткий ДНФ для данного выражения

Шаг 1: строим ТИ



$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} = (0, 0, 0)$$

$$x\bar{y}\bar{z} = (1, 0, 0)$$

$$xy\bar{z} = (1, 1, 0)$$

Шаг 2: упрощаем

Чтобы упростить имеет смысл рассмотреть 2 ребра:

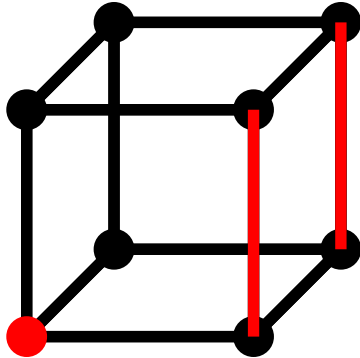
$$(0, 0, 0) - -(1, 0, 0) = \bar{y}\bar{z}$$

$$(1, 0, 0) - -(1, 1, 0) = x\bar{z}$$

$$\Rightarrow \text{ДНФ} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} = xy\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$$

$$\Rightarrow \text{самое короткое ДНФ} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$$

Пример. $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xy$



$$\Rightarrow \text{ДНФ} = x \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = x \vee \bar{y}\bar{z}$$

Замечание. Данный метод позволяет наглядно перебрать все ДНФ и найти минимальный

С помощью алгебраических преобразований мы не сможем понять, что ответ самый оптимальный

Пример. Алгебраические преобразования

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$$

Но тут непонятно, а вдруг можно сделать еще короче

1.1.13 Двойственная функция

Пусть есть логическая функция: $f = B^n \rightarrow B = \{0, 1\}$

Двойственная функция: $f^* = B^n \rightarrow B = \{0, 1\}$

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$$

Замечание. Мир замены лжи на истину

$$0 \leftrightarrow 1$$

Пример. $f(x, y) = x \vee y$

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Новый мир: $1 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1$

x	y	f^*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Получилось, что $(x \vee y)^* = xy$

Пример. $(x \vee y)^* = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} = xy$

Пример. $(x + y)^* = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{1 + x + 1 + y} = 1 + x + 1 + y + 1 = 1 + x + y = x \Leftrightarrow y$

Замечание. $f^{**}(x_1, x_2 \dots x_n) = \overline{f^*(\overline{x_1}, \overline{x_2} \dots \overline{x_n})} = \overline{\overline{f(x_1, x_2 \dots x_n)}} = f(x_1, x_2 \dots x_n)$

Следствие.

$$(xy)^* = x \vee y$$

$$(x \Leftrightarrow y)^* = x + y$$

Теорема о композиции:

$$f = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

f_i — это функции от n переменных $(B^n \rightarrow B)(i = 1 \dots n)$

$$f_0 = B^m \rightarrow B$$

$$\text{Тогда } f^*(x_1, \dots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), f_2^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^*(x_1, \dots, x_n))$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} f^* &= \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})} = \overline{f_0(f_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), f_2(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, f_m(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}))} = \\ &= f_0^*(f_1^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), f_2^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, f_m^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})) \end{aligned}$$

Следствие. Если есть $f(x_1, \dots, x_n)$ — записано, как логическое выражение с $\cdot, \vee, \neg, +, \Leftrightarrow$, то f^* — также выражение, но связки заменяются на двойственные узлы

$$\vee \leftrightarrow *$$

$$+ \leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\neg \leftrightarrow \neg$$

$$\text{так как } (\overline{\overline{x}})^* = \overline{x}$$

Пример.

$$f(x, y, z) = \overline{x \vee \overline{y} z} \Leftrightarrow (x + y + z)$$

$$f^*(x, y, z) = \overline{(x \cdot (\overline{y} z))} + (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z)$$

Пример.

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1$$

$$\Rightarrow f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{1} = 0$$

$$1^* = 0; 0^* = 1$$

1.1.14 Конъюнктивно-нормальная форма КНФ

Определение. Конъюнктивно-нормальная форма — еще одна нормальная форма, похожая на ДНФ

Определение. Литерал — это как и раньше, переменные или отрицательные переменные

$$x, y, \overline{x}, \overline{y}$$

Определение. Дизъюнкт — дизъюнкция литералов

$$x \vee y; x \vee y \vee \bar{z}; x \vee \bar{z}; \bar{x}$$

$$\cancel{xy}, \cancel{x \vee yz}$$

Определение. КНФ — это конъюнкция нескольких дизъюнктов

$$(x \vee y)(y \vee \bar{z});$$

$$(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x})$$

$$\cancel{xy \vee z}$$

$$x \vee y \vee z$$

— 1 дизъюнкт

$$xyz$$

— 3 дизъюнкта

Определение. У любой логической функции есть КНФ, её можно построить по таблице истинности

Доказательство

Заметим, что если вычислить $(\text{КНФ})^*$ (двойственную к КНФ), то получим ДНФ

Пример. $[(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})]^* = (xyz) \vee (x\bar{y}) \vee (y\bar{z})$

И наоборот $(\text{ДНФ})^* = \text{КНФ}$

Итого, чтобы получить КНФ для функции f , надо построить двойственную функцию к ДНФ этой функции. Отсюда следует, что КНФ всегда существует

Пример. $f(x,y,z) = xy \Leftrightarrow z$

Выпишем значения xyz из строчек, где $f^* = 1$

$$\bar{x}\bar{y}z \quad x\bar{y}\bar{z} \quad \bar{x}y\bar{z} \quad xyz$$

x	y	z	xy	f	f^*
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Вспомним определение $f^*(x, y, z) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

$$f^*(0, 0, 0) = \overline{f(1, 1, 1)}$$

$$\text{Итого: } f^* = \overline{\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz}$$

$$f^*(0, 0, 1) = \overline{f(1, 1, 0)}$$

$$f^*(0, 1, 0) = \overline{f(1, 0, 1)}$$

По теореме о композиции

$$f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})$$

Получение КНФ по таблице истинности без двойственной функции

$$f(x, y, z) = xy \Leftrightarrow z$$

x	y	z	$f = xy \Leftrightarrow z$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

При $x \ y \ z = 1 \ 1 \ 0$, $f = xy \Leftrightarrow z \leftarrow \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$

для 1 - отрицание, для 0 - нет отрицания

Итого: Чтобы построить ДНФ:

- строки с 1, $0 \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$$1 \leftrightarrow xyz$$

Чтобы получить КНФ:

- строки с 0, $0 \leftrightarrow xyz$

$$1 \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Пример. $f = x+y$

x	y	$x + y$
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0

Нули в: $x \vee y \quad \bar{x} \vee \bar{y}$
 $f = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$

Замечание. Для функции записанной в форме КНФ, можно поставить задачу "выполнимости".

Вопрос: может ли значение быть = 1

- не известно решений, принципиально эффективней полного перебора значений

Пример. $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{z}) = 1$

$x = 1$

$y = 1$ подходит

$z = 0$

Следовательно эта формула выполнима при таком наборе

Многие задачи, головоломки сводятся к задаче выполнимости

Пример. Принцип Дирихле

Если есть n клеток и в них $n+1$ заяц, то \exists клетка, где зайцев ≥ 2 .

при $n = 2$: $i = 1$ или 2 (клетка) x_{ij} - в клетке i сидит заяц j

$j = 1$ или 2 или 3 заяц

Попробуем записать, что в каждой клетке ≤ 1 зайца

а) каждый заяц ровно в одной клетке

$x_{11} \oplus x_{21}$ - заяц 1

$x_{12} \oplus x_{22}$ - заяц 2

$x_{13} \oplus x_{23}$ - заяц 3

б) в каждой клетке не больше 1 зайца

кл/з	1	2	3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}

если есть 2 зайца, то один из конъюнктов: = 1

$x_{11}x_{12} \vee x_{11}x_{13} \vee x_{12}x_{13} \longleftarrow$ в кл 1 ≤ 1 зайца

$x_{21}x_{22} \vee x_{21}x_{23} \vee x_{22}x_{23} \longleftarrow$ в кл 2 ≤ 1 зайца

Соединяем все утверждения:

$(x_{11} + x_{21})(x_{12} + x_{22})(x_{13} + x_{23})(x_{11}x_{12} \vee x_{11}x_{13} \vee x_{12}x_{13})$
 Первые 3 слогаемых $(x_{11} \vee x_{21})(\bar{x}_{11} \vee \bar{x}_{21})(x_{12} \vee x_{22})(\bar{x}_{12} \vee \bar{x}_{22})(x_{13} \vee x_{23})(\bar{x}_{13} \vee \bar{x}_{23})$
 $(x_{21}x_{22} \vee x_{21}x_{23} \vee x_{22}x_{23}) = 0$
 $(\bar{x}_{11} \vee \bar{x}_{13})(\bar{x}_{12} \vee \bar{x}_{13})(\bar{x}_{21} \vee \bar{x}_{22})(\bar{x}_{21} \vee \bar{x}_{23})(\bar{x}_{22} \vee \bar{x}_{23}) \leftarrow$ Берем программу,
 которая решает КНФ задачу выполнимости. Она скажет - невозможно.

1.1.15 Класс замкнутости

Повторим: Логическая функция: $f: \beta^n \rightarrow \beta$
 $\beta = \{0, 1\}$

Определение. Класс — это множество логических функций.

Пример. Класс функций от двух переменных

K_1 = класс функций: $f(x, y) = f(y, x)$

$f(x, y) = x \vee y \in K_1, \in K_2$

$g(x, y) = x \Rightarrow y \in K_1 \notin K_2$

K_3 : класс функций $f(x_1 \dots) = f(0, \dots)$ функции, которые не зависят от первой переменной

$f(x, y, z) = y \Rightarrow z \in K_3$

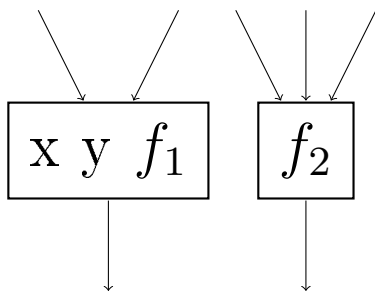
$f(x, y, z) = (x \Rightarrow y) \vee z \notin K_3$

$f(x, y, z) = x\bar{x} \vee y \vee z \in K_3 \quad (x\bar{x})$

$K_4 : \{f(x, y) = x \vee y, g(x, y) = x \Rightarrow y\}$

Определение. Замыкание класса

$K = \{f_1, f_2, \dots\}$ — класс функции



K^* — замыкание класса - это класс состоящий из всех композиций ф.к

$[f_1(f_2)(f_1(x, y), y, z), z)]$ — композиция

если есть функции, подставляем друг в друга, получаем композицию

Пример. : 1) $K = \{0, \bar{x}\}$ (0 - f() $\bar{x} - g(x)$)

$K^* = \{f(), g(f()), g(g(f())), g(g(g(f())))\}$

Пример. $K^* = \{\bar{x}, 0, 1, x\}$ возьмем класс только из отрицательных

$$K^* = \{\bar{x}, x\}$$

$$K^* = \{g(x), g(g(x)), g(g(g(x \dots 1, \dots)))\}$$

Пример. $K^* = \{\bar{x}, x \vee y, xy\}$ $K^* = \{\dots, \forall, \text{функция}\}$

Определение. Если K - класс:

$K^* = \alpha$, то $\overline{[K - \text{полный}]}$, где α — все логические функции

Вывод: $K = \{\bar{x}, x \vee y, xy\}$ — полный

Пример. $K = \{\bar{x}, x \vee y\}$, где $f(x) = \bar{x}$, $x \vee y = y(x \vee y)$

$$xy = \overline{\bar{x}\bar{y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = f(g(f(x), f(y)))$$

Значит K^* — тоже полный