

# Математическая логика и теория алгоритмов

Посов Илья Александрович

запись конспекта: Блюдин Андрей и Хаматов Вадим

## Содержание

<b>1</b>	<b>Математическая логика</b>	<b>1</b>
1.1	Исчисление высказываний . . . . .	1
1.1.1	Основные понятия . . . . .	1
1.1.2	Функции от 1 переменной (их определения) . . . . .	2
1.1.3	Функции от 2 переменных (их определения) . . . . .	3
1.1.4	Приоритеты операций . . . . .	5
1.1.5	Алгебраические преобразования логических выражений . . . . .	5
1.1.6	Таблица эквивалентных логических выражений . . . . .	6
1.1.7	Многочлены Жегалкина . . . . .	8
1.1.8	Получение многочлена Жегалкина через алгебраические упрощения . . . . .	11
1.1.9	Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ) . . . . .	12
1.1.10	Задача (не) выполнимости . . . . .	14
1.1.11	Запись таблиц истинности в виде графика . . . . .	15
1.2	КНФ - Конъюнктивная нормальная форма . . . . .	15

## 1 Математическая логика

### 1.1 Исчисление высказываний

#### 1.1.1 Основные понятия

**Определение.** Логическая функция — это множество из 2 элементов. Также, логической функцией называют множество логических значений  $B = \{0, 1\}$ , где 0 — это ложь (false), а 1 — это истина (true)

**Определение.** Логическая функция от  $n$  переменных

$$f : B^n \rightarrow B$$

*Замечание.* Часто логические функции вводят как перечисление возможных аргументов и значений функции при этих аргументах

**Пример.** Введем функцию  $f(x, y)$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 1: Таблица истинности для  $f(x, y)$

Эту же функцию можно задать функцией  $f(x, y) = \max(x, y)$

**Утверждение.** Функция от  $n$  переменных может быть  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0 или 1
...	...	...	...	0 или 1
1	1	...	1	0 или 1

Таблица 2: Таблица истинности для  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

При этом количество всех возможных наборов аргументов равняется  $2^n$ , а количество всех возможных функций при всех возможных наборах аргументов равняется  $2^{2^n}$

**Следствие.** Посчитаем количество таких функций для разных  $n$

$$n = 1 \quad 2^2 = 4 \text{ функций } f(x)$$

$$n = 2 \quad 2^{2^2} = 16 \text{ функций } f(x, y)$$

$$n = 3 \quad 2^{2^3} = 2^8 = 256 \text{ функций } f(x, y, z)$$

### 1.1.2 Функции от 1 переменной (их определения)

**Пример.** Перечислим все возможные функции от 1 переменной

Данные функции имеют значение:

$$f_1(x) = 0 \quad \text{— функция } 0$$

$$f_2(x) = x \quad \text{— функция } x$$

$$f_3(x) = \neg x, \bar{x}, \neg x, \text{ not } x \quad \text{— функция отрицания (не } x)$$

$$f_4(x) = 1 \quad \text{— функция } 1$$

$x$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

### 1.1.3 Функции от 2 переменных (их определения)

**Пример.** Перечислим все возможные функции от 2 переменных

$x$	$y$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 3: Таблица истинности для  $f(x, y)$

Продолжение:

$x$	$y$	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$	$f_{11}(x)$	$f_{12}(x)$	$f_{13}(x)$	$f_{14}(x)$	$f_{15}(x)$	$f_{16}(x)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 4: Таблица истинности для  $f(x, y)$

**Перечислим основные значения функций:**

$f_2(x, y)$  — это конъюнкция или "логическое и" или логическое умножение ( $xy, x \& y, x \wedge y$ )

$f_7(x, y)$  — это исключающее или ( $x + y, x \text{ XOR } y, x \oplus y$ ), также данную функцию можно ассоциировать как  $(x + y) \bmod 2$

$f_8(x, y)$  — это логическое или, но ее можно также записать как  $\max(x, y)$  ( $x|y, x \vee y$ )

$f_{10}(x, y)$  — это эквивалентность ( $x \Leftrightarrow y, x \equiv y, x == y$ )

$f_{14}(x, y)$  — это импликация ( $x \Rightarrow y, x \rightarrow y$ )

Импликация работает так, что истина следует из чего угодно:

лешия не существует  $\Rightarrow$  русалок не существует = 1 ( $1 \Rightarrow 1 = 1$ )

допса скучная  $\Rightarrow$  русалок не существует = 1 ( $0 \Rightarrow 1 = 1$ )

русалки существуют  $\Rightarrow$  драконы существуют = 1 ( $0 \Rightarrow 0 = 1$ )

$x \Rightarrow y = 0$  только если  $x = 1$ , а  $y = 0$

$f_{12}(x, y)$  — это обратная импликация ( $x \Leftarrow y = y \Rightarrow x$ )

$f_9(x, y)$  — стрелка Пирса ( $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$ )  
 $f_{15}(x, y)$  — штрих Шеффера ( $x|y = \overline{xy}$ )  
 $f_3(x, y)$  — запрет по  $y$  ( $x > y = \overline{x \Rightarrow y}$ )  
 $f_1(x, y) = 0$   
 $f_4(x, y) = x$   
 $f_5(x, y)$  — запрет по  $x$  ( $x < y = \overline{x \Leftarrow y}$ )  
 $f_6(x, y) = y$   
 $f_{11}(x, y)$  — не  $y$  ( $\neg y$ )  
 $f_{13}(x, y)$  — не  $x$  ( $\neg x$ )  
 $f_{16}(x, y) = 1$

**Определение.** Логические выражения — способ задания логических функций с помощью переменных, цифр 0 или 1 и операций:

·    $\vee$     $\Rightarrow$     $\Leftrightarrow$     $+$     $\equiv$     $|$     $\downarrow$     $<$     $>$

**Пример.** Примеры логических выражений:

$(x \vee y) =$   
 $(x \Rightarrow yz) \vee (y \equiv z)$   
 $(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y)$

**Определение.** Значения логического выражения можно записать **Таблицей истинности**

**Пример.**  $f(x, y, z) = (x \vee y)z$

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

*Замечание.* Порядок строчек в таблице истинности может быть любым, но лучше использовать как у двоичных чисел

**Утверждение.** *Таблицы истинности часто считают постепенно*

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y)z$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

#### 1.1.4 Приоритеты операций

$\neg$

$\cdot$

$\vee$

$+$   $\equiv$

$\Rightarrow$   $\Leftarrow$

$|$   $\downarrow$   $<$   $>$

**Пример.** Примеры приоритетов операций:

$$\neg x \vee y = (\neg x) \vee y$$

$$x \vee yz = x \vee (yz)$$

$$x \Rightarrow y \vee z = x \Rightarrow (y \vee z)$$

#### 1.1.5 Алгебраические преобразования логических выражений

**Определение.** Алгебраические преобразования логических выражений — изменяем выражения по правилам, обычно в сторону упрощения

**Пример.**  $(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y) = 1 \vee (1 \Rightarrow y) = 1$

**Утверждение 1.**

$$\overline{\overline{x}} = x$$

*Доказательство:*

$x$	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

**Утверждение 2.** При  $\vee$ :

$$1 \vee x = 1$$

$$0 \vee x = x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

### 1.1.6 Таблица эквивалентных логических выражений

**Утверждение.**  $x \vee y = y \vee x$  - симметричность

$$x \vee 0 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \vee x = x$$

$$x \vee \bar{x} = 1$$

*Доказательство:*

$x$	$\bar{x}$	$x \vee \bar{x}$
0	1	$0 \vee 1 = 1$
1	0	$1 \vee 0 = 1$

$$xy = yx$$

$$x * 0 = 0$$

$$x * 1 = x$$

$$x * x = x$$

$$x * \bar{x} = 0$$

$$x + y = y + x$$

$$x + 0 = x$$

$$x + 1 = \bar{x}$$

$$x + x = 0$$

$$x + \bar{x} = 1$$

**Утверждение.**  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  - ассоциативность

*Ассоциативность означает, что порядок скобок не важен*

**Пример.**  $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$  - не симметричная функция

**Доказательство:**

*Замечание.*  $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$

x y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	1
1 1	1	1

$$x \Rightarrow 0 = \bar{x}$$

$$0 \Rightarrow x = 1$$

*Доказательство:*

x	$x \Rightarrow 0$
0	$0 \Rightarrow 0 = 1$
1	$1 \Rightarrow 0 = 0$

$$x \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 \Rightarrow x = x$$

$$x \Rightarrow x = 1$$

$$x \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}$$

$$\bar{x} \Rightarrow x = x$$

$$\bar{x} \Rightarrow y \Rightarrow z \text{ договоримся, что это } x \Rightarrow y(y \Rightarrow z) \neq (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$$

x y z	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

$$x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$$

$$x \Leftrightarrow 0 = \bar{x}$$

$$x \Leftrightarrow 1 = x$$

$$x \Leftrightarrow x = 1$$

$$x \Leftrightarrow \bar{x} = 0$$

$$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z \text{ - ассоциативно}$$

**Утверждение.** *Дистрибутивность*

$$(x \vee y)z = xz \vee yz$$

$$(x + y)z = xz + yz \text{ по таблице истинности}$$

$$(x \& y) \vee z = (xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$$

$$(x \vee y) \& z = (x \& z) \vee (y \& z)$$

$$(x \& y) \vee z = (x \vee z) \& (y \vee z)$$

*Замечание.*  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(y_1 \vee y_2) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_2 =$   
 $x_1y_1 \vee x_2y_1 \vee x_3y_1 \vee x_1y_2 \vee x_2y_2 \vee x_3y_2$

$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = xy \vee xz \vee zy \vee zz = xy \vee xz \vee zy \vee z =$$

$$xy \vee xz \vee zy \vee z * 1 = xy \vee z(x \vee y \vee 1) = xy \vee z \text{ сошлось}$$

$$x + y = \overline{x} \Rightarrow y \text{ - смотри Таблицу истинности}$$

$$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = x \Rightarrow y$$

### 1.1.7 Многочлены Жегалкина

*Замечание.* Одну и ту же функцию можно записать по разному.

$$\text{В алгебре: } f(x) = 1 + x = x + 1 = x + 5 - 4 = \sin(x - x) + x = \dots$$

*В логике:*  $f(x, y) = x \vee y = x \vee y \vee 0 = (x \vee y)(\overline{y} \vee y = x\overline{y} \vee y (=$  -  
*дистрибутивность)*

**Многочлены Жегалкина для логической формулы**

**Определение.**  $f(x_1, \dots, x_n)$  - это многочлен с переменными  $x_i$ , конспектами 0,1 и со степенями переменных  $\leq 1$ . Это многочлены от  $x_i \in \mathbb{Z}_2$

**Пример.**  $f(x, y, z) = 1 + x + yz + xyz$

$$1 + x \quad xy + xyz$$

$$1 + xy$$

*Не многочлены*

$$1 + x + (y \vee z)$$

$$1 + x + z^2 \text{ нельзя степень } 2$$

*Замечание.* В общем случае многочлен от 1 переменной ( $i = 0$  или 1)

$$a_0 + a_1x$$

$$\text{от } 2 \text{ух: } a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

$$\text{от } 3 \text{ех: } a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$$

*В общем случае*  $f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + ax_1x_2 + ax_1x_3 +$   
 $+ \dots$  (все пары переменных)  $+ ax_1x_2x_3 + ax_1x_3x_2 \leftarrow$  все тройки  
*переменных*  $+ ax_1x_2x_3 \dots x_n$

**Определение.**  $\forall f(x_1, \dots, x_n)$  - логическая функция  $\exists!$  многочлен Жегалкина  $g(x_1, \dots, x_n) : f = g$



*Замечание.* Всего 4 функции от 1ой переменной

$$f(x) = 0 = \bar{x} = 0 + 0x$$

$$f(x) = 1 = 1 = 1 + 0x$$

$$f(x) = x = x = 0 + 1x$$

$$f(x) = \bar{x} = 1 + x = 1 + 1x$$

**Доказательство:**

**Определение.** Разные многочлены - это разные логические функции

т.е.  $f(x_1...x_n) = a_0 + ... + a_1x_1...x_n$

$$g(x_1...x_n) = b_0 + ... + bx_1...x_n$$

$\exists!$  :  $a_i \neq b_i$  различающийся

**Доказательство:**

Возьмем индекс с самым большим количеством переменных

$$f(x, y, z) = 1 + x + xy + xyz = ... + 1x + Dy + Dz + 1xy$$

$$g(x, y, z) = 1 + y + z + xyz... + Dx + 1y + 1z$$

для переменных этого слагаемого подставим 1 0ху

для остальных переменных : 0

$$[ \text{В примере } x = 1, y = 0, z = 0 : f(1, 0, 0)g(1, 0, 0) ]$$

и в f и в g все другие слагаемые равны 0

Теперь  $f(...)$  и  $g(...)$

$$f(...) = a_ix_1x_2x_3 \neq b_ix_1x_2x_3 \Rightarrow f(x_1...x_n) \neq g$$

**Доказательство:**

Проверим, что многочленов Жегалкина столько, сколько функций:

Посчитаем

$$a_0 + a_1x_1 + ... + a_1x_1x_2...x_n$$

Сколько слагаемых:

1) 1 слагаемых без переменных

n слагаемых с переменной

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

$C_n^2$  - слагаемых с 2 - мя переменными

$C_n^3$  - слагаемых с 3 - мя переменными

$C_n^n$  - слагаемых с n переменными

$$\text{Всего : } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... C_n^n = 2^n((1 + 1)^2)$$

**Пример.**  $a_0 + a_1x$  - 2 слагаемых

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy - 2^2 = 4 \text{ слагаемых}$$

2) Все слагаемых имеют вид:  $x_1, x_2, x_3...x_n$  (0 или 1) -  $2^n$  слагаемых

Итого: многочлен Жегалкина от n переменных

**Задача.** Сколько разных многочленов?

Это столько же, сколько логических функций

Итог:

**Следствие:** Любая логическая функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина

**Пример.**  $f(x, y) = x \vee y$

$f(x, y) = x * y$  - уже многочлен Жегалкина

**Метод неопределенных коэффициентов:**

Подберем  $x \vee y = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 0) = a_0 + a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3 \dots$$

$$f(1, 0) = 1 \vee 0 = 1$$

$$f(1, 0) = a_0 + a_1 = a_1 \quad (a_0 = 0, \Rightarrow a_1 = 1)$$

$$f(0, 1) = \text{аналогично} \Rightarrow a_2 = 1$$

$$f(x, y) = x + y + a_3xy$$

$$f(1, 1) = 1 \vee 1 = 1$$

$$f(1, 1) = 1 + 1 + a_3 = 0 + a_3 = a_3, \quad a_3 = 1$$

$$\text{Ответ: } x \vee y = x + y + xy$$

**Многочлены Жегалкина от 1 переменной:**

$f(x)$	Мн Ж
0	0
1	1
$x$	$x$
$\bar{x}$	$1 + x$

**Многочлены Жегалкина от 2 переменных:**

$f(x, y)$	Мн Ж
0	0
1	1
$xy$	$xy$
$x + y$	$x + y$
$x \vee y$	$x + y + xy$

**Формулы:**

$$1. \quad \overline{xy} = \neg(xy) = \bar{x} \vee \bar{y}$$

$$2. \quad \overline{x \vee y} = \neg(x \vee y) = \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \bar{y}$$

Замечание.  $\overline{xy} \neq \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x} \overline{y}$

Докзательство формул через таблицу истинности:

$x$	$y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

### 1.1.8 Получение многочлена Жегалкина через алгебраические упрощения

#### 1. Многочлен Жегалкина для $\vee$

$$x \vee y = (x = \overline{a}, y = \overline{b}) = \overline{ab} = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{(1+x)(1+y)} = 1 + (1+x)(1+y) = 1 + 1 + x + y + xy = \underline{x + y + xy}$$

#### 2. Многочлен Жегалкина для $\Leftrightarrow$

$$x \Leftrightarrow y = \overline{x + y} = \underline{1 + x + y}$$

#### 3. Многочлен Жегалкина для $\Rightarrow$

$$x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = (1+x) \vee y = (1+x) + y + (1+x)y = 1 + x + y + y + xy = \underline{1 + x + xy}$$

Замечание. Если есть логическая формула, то ее можно привести к формуле многочлена Жегалкина двумя способами:

#### 1. метод неопределенных коэффициентов:

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + \dots + axyz$$

#### 2. метод алгебраических преобразований

Пример.  $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \dots = x + y + xy$

Пример.  $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = \dots = 1 + x + xy$

Пример.  $x \Rightarrow (y \vee \overline{z}) = x \Rightarrow (y + \overline{z} + y \cdot \overline{z}) = x \Rightarrow (y + (1+z) + y \cdot (1+z)) = x \Rightarrow (y + 1 + z + y + yz) = x \Rightarrow (1 + z + yz) = 1 + x + x(1 + z + yz) = 1 + x + x + xz + xyz = 1 + xz + xyz$

**Поймем, что:**  $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$

$$x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z = (1+x+y) \Leftrightarrow z = 1 + (1+x+y) + z = 1 + 1 + x + y + z = x + y + z$$

**Вывод:**

Заранее не ясно, сложно ли привести логическую формулу к многочлену Жегалкина

### 1.1.9 Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ)

**Определение.** Литерал — это переменная или отрицание переменной

**Пример.**  $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$

**Определение.** Конъюнктор — конъюнкция литералов

**Пример.**  $x\bar{y}, xyz, \bar{x}\bar{y}\bar{z}, \bar{x}z$ , ноль (пустой конъюнкт).

**Определение.** Логическое выражение имеет ДНФ, если она является дизъюнкцией конъюнкторов

**Пример.**  $x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee z \vee \bar{x}\bar{y}$  — ДНФ

**Пример.**  $xy \vee \bar{x}\bar{y}$  — ДНФ

**Пример.**  $x \vee y$  — ДНФ

**Пример.**  $xy$  — ДНФ

**Пример.** не ДНФ —  $\bar{x}\bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y}$  — ДНФ

**Пример.** не ДНФ —  $x \Rightarrow yz = \bar{x} \vee yz$  — ДНФ

**Построение ДНФ по таблице истинности функции:**  
алгоритм на примере трех переменных

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\bar{x} y \bar{z}$
0	1	1	1	$\bar{x} y z$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$xy \bar{z}$
1	1	1	0	

Берем строки из столбца  $f(x, y, z)$ , где значения в столбце равны 1  
Допустим есть строка:  $x = a_1, y = a_2, z = a_3$  ( $a$  могут быть как 0, так и 1)

В ответ добавляется конъюнкт  $xyz$  ( $0 \Rightarrow$  отрицание,  $1 \Rightarrow$  не отрицание)

Ответ:  $f(x, y, z) = \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee xy \bar{z}$

**Доказательство корректности алгоритма:**

Когда полученный ДНФ = 1?

Когда есть конъюнкт равный 1

1. Если первый конъюнкт равняется 1 (в примере  $\bar{x} y \bar{z} = 1$ )  
 $\Rightarrow$  все литералы конъюнкта равняются 1  
 $\Rightarrow$  в примере  $\bar{x} = 1 \quad y = 1 \quad \bar{z} = 1$   
 $x = 0 \quad y = 1 \quad z = 0$
2. Если второй конъюнкт равняется 1  
 $\Rightarrow$  в примере  $x = 0 \quad y = 1 \quad z = 1$  — строка из таблицы истинности
3. То же самое с третьим конъюнктом

Посмотрим таблицу с этими конъюнктами:

$x$	$y$	$z$	$\bar{x} y \bar{z}$	$\bar{x} y z$	$x y \bar{z}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

*Замечание.* У одной функции могут быть разные ДНФ

**Пример.**  $\bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} = \bar{x} y (\bar{z} \vee z) \vee x y \bar{z} = \bar{x} y \vee x y \bar{z}$  — подчеркнутые выражения являются ДНФ

**Пример.**  $\bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} = \bar{z} y (\bar{x} \vee x) \vee z y \bar{x} = \bar{z} y \vee z y \bar{x} = y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} x \vee z \bar{z}$  — подчеркнутые выражения являются ДНФ

Получить ДНФ для логической функции/формулы можно:

1. по таблице истинности
2. с помощью алгебраических преобразований

**Пример.** 1.  $\bar{x} = \bar{x}$

2.  $x \vee y = x \vee y$

3.  $x \cdot y = x \cdot y$

4.  $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$

$x$	$y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$5. x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}x \vee y\bar{y} \vee yx = \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

$$6. x + y = \overline{\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}} = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee xy} \dots$$

$$= \overline{\bar{x}\bar{y}} \vee \overline{xy} = \overline{\bar{x}} \cdot \overline{\bar{y}} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} = x\bar{y} \vee \bar{x}y$$

$$7. x \Rightarrow (y + z) = \bar{x} \vee (y + z) = \bar{x} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z}$$

#### 1.1.10 Задача (не) выполнимости

Дана логическая формала в ДНФ

Проверить, бывает ли она равна 0?

$$\bar{x}\bar{y} \vee x \vee y? = 0$$

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow \bar{x}\bar{y} = 1$$

$\Rightarrow$  данный ДНФ не может быть равным 0

Эта задача обладает особенностью:

1. если знать значения переменных (ответ), то их легко можно быстро проверить
2. подобрать значения переменных для 0 — нет

Нет известного алгоритма, который "принципиально" быстрее полного перебора

У этой задачи класс NP выполнимости (ответ легко проверить, а найти его простым способом невозможно)

**Следствие.** То к чему сводится задача (не) выполнимости тоже сложна

1. упростить логическое выражение
2. поиск минимального ДНФ

### 1.1.11 Запись таблиц истинности в виде графика

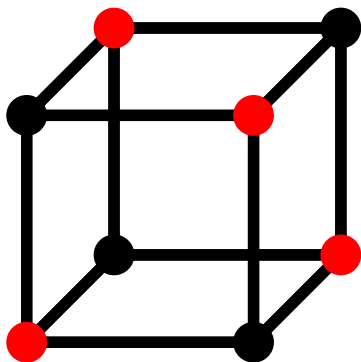
Формула =  $f(x, y, z) = x + y$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 1) = 1$$

$$f(1, 0) = 1$$

$$f(1, 1) = 0$$



### 1.1.12 Задача минимизации ДНФ

Данная задача тоже является сложной, также как и задача (не) выполнимости

Дана логическая функция (в виде ДНФ). Необходимо найти самую короткую ДНФ эквивалентную данной.

Минимальной ДНФ считается та, где меньше количество литералов и дизъюнкций

**Пример.**  $\bar{x}\bar{y} \vee z$  короче, чем  $xy \vee yz$

*Замечание.* Далее рассматриваться все будет для функции от 3 переменных  $f(x, y, z)$

*Замечание.* Какова таблица истинности  $xyz = abc$ , где  $a = 0$  или  $1$ ,  $b = 0$  или  $1$ ,  $c = 0$  или  $1$

$0 \Rightarrow$  надо поставить отрицание

$1 \Rightarrow$  нет отрицания

**Пример.**  $f(x, y, z) = \bar{x} y \bar{z}$

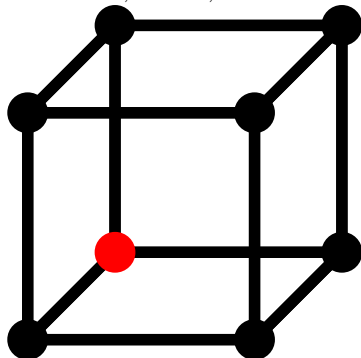
Если  $\bar{x} y \bar{z} = 1$

$\Rightarrow \bar{x} = 1, y = 1, \bar{z} = 1$

$\Rightarrow x = 0, y = 1, z = 0$

$\Rightarrow x = a, y = b, z = c$

$\Rightarrow a = 0, b = 1, c = 0$



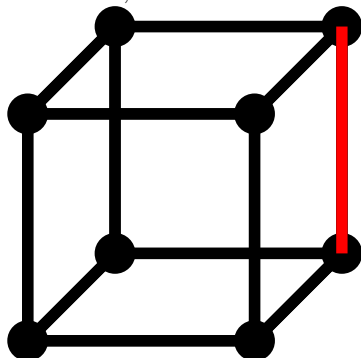
**Пример.**  $f(x, y, z) = xy$

Если  $xy = 1$

$\Rightarrow x = 1, y = 1$

$\Rightarrow x = a, y = b$

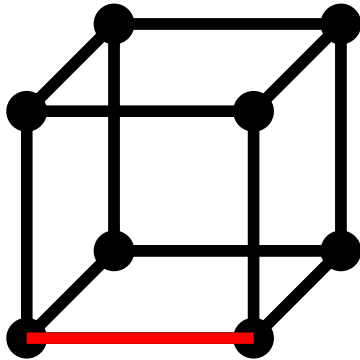
$\Rightarrow a = 1, b = 1$



Аналогично,  $f(x, y, z) = \bar{y} \bar{z}$

ребро:  $y = 0, z = 0, x = ?$  — не важно



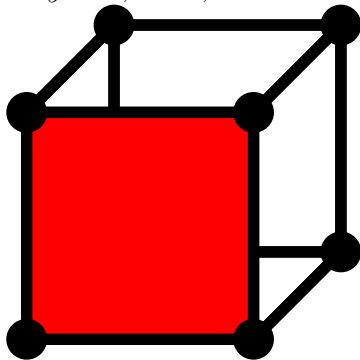


Последнее — конъюнкт из 1 литерала:  
 $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$

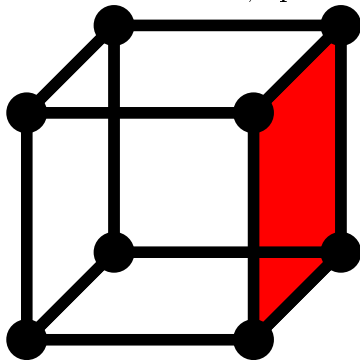
**Пример.**  $f(x, y, z) = \bar{y}$

Если  $\bar{y} = 1$

$\Rightarrow y = 0, x = ?, z = ?$



Или конъюнкт  $x$ , грань  $x = 1$



**Итого:**

$xyz$  — это вершина  $x = a, y = b, z = c$

$xy$  — это ребро  $x = a, y = b$

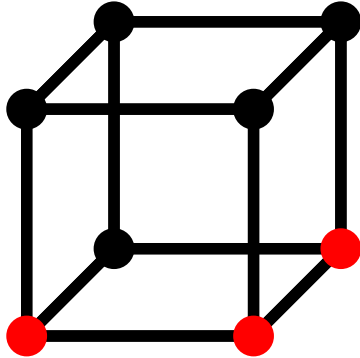
$x$  — это грань  $x = a$

Попробуем минимизировать ДНФ

**Пример.**  $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$

Найти самый короткий ДНФ для данного выражения

**Шаг 1: строим ТИ**



$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} = (0, 0, 0)$$

$$x\bar{y}\bar{z} = (1, 0, 0)$$

$$xy\bar{z} = (1, 1, 0)$$

**Шаг 2: упрощаем**

Чтобы упростить имеет смысл рассмотреть 2 ребра:

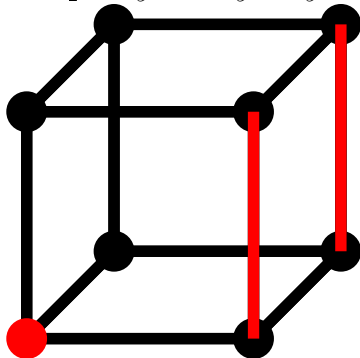
$$(0, 0, 0) - -(1, 0, 0) = \bar{y}\bar{z}$$

$$(1, 0, 0) - -(1, 1, 0) = x\bar{z}$$

$$\Rightarrow \text{ДНФ} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = xy\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$$

$$\Rightarrow \text{самое короткое ДНФ} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$$

**Пример.**  $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xy$



$$\Rightarrow \text{ДНФ} = x \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = x \vee \bar{y}\bar{z}$$

*Замечание.* Данный метод позволяет наглядно перебрать все ДНФ и найти минимальный

С помощью алгебраических преобразований мы не сможем понять, что ответ самый оптимальный

**Пример.** Алгебраические преобразования

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$$

Но тут непонятно, а вдруг можно сделать еще короче

### 1.1.13 Двойственная функция

Пусть есть логическая функция:  $f = B^n \rightarrow B = \{0, 1\}$

Двойственная функция:  $f^* = B^n \rightarrow B = \{0, 1\}$

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$$

*Замечание.* Мир замены лжи на истину

$$0 \leftrightarrow 1$$

**Пример.**  $f(x, y) = x \vee y$

$x$	$y$	$f$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Новый мир:  $1 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1$

$x$	$y$	$f^*$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Получилось, что  $(x \vee y)^* = xy$

**Пример.**  $(x \vee y)^* = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} = xy$

**Пример.**  $(x + y)^* = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{1 + x + 1 + y} = 1 + x + 1 + y + 1 = 1 + x + y = x \Leftrightarrow y$

*Замечание.*  $f^{**}(x_1, x_2 \dots x_n) = \overline{f^*(\overline{x_1}, \overline{x_2} \dots \overline{x_n})} = \overline{\overline{f(x_1, x_2 \dots x_n)}} = f(x_1, x_2 \dots x_n)$

**Следствие.**

$$(xy)^* = x \vee y$$

$$(x \Leftrightarrow y)^* = x + y$$

**Теорема о композиции:**

$$f = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

$f_i$  — это функции от  $n$  переменных  $(B^n \rightarrow B)(i = 1 \dots n)$

$$f_0 = B^m \rightarrow B$$

$$\text{Тогда } f^*(x_1, \dots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), f_2^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^*(x_1, \dots, x_n))$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} f^* &= \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})} = \overline{f_0(f_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), f_2(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, f_m(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}))} = \\ &= f_0^*(f_1^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), f_2^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, f_m^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})) \end{aligned}$$

**Следствие.** Если есть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — записано, как логическое выражение с  $\cdot, \vee, \neg, +, \Leftrightarrow$ , то  $f^*$  — также выражение, но связки заменяются на двойственные узлы

$$\vee \leftrightarrow *$$

$$+ \leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\neg \leftrightarrow \neg$$

$$\text{так как } (\overline{\overline{x}})^* = \overline{x}$$

**Пример.**

$$f(x, y, z) = \overline{x \vee \overline{y} z} \Leftrightarrow (x + y + z)$$

$$f^*(x, y, z) = \overline{(x \cdot (\overline{y} z))} + (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z)$$

**Пример.**

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1$$

$$\Rightarrow f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{1} = 0$$

$$1^* = 0; 0^* = 1$$

#### 1.1.14 Конъюнктивно-нормальная форма (КНФ)

**Определение.** Конъюнктивно-нормальная форма — еще одна нормальная форма, похожая на ДНФ

**Определение.** Литерал — это как и раньше, переменные или отрицательные переменные

$$x, y, \overline{x}, \overline{y}$$

**Определение.** Дизъюнкт — дизъюнкция литералов

$$x \vee y; x \vee y \vee \bar{z}; x \vee \bar{z}; \bar{x}$$

$$\cancel{xy}, \cancel{x \vee yz}$$

**Определение.** КНФ — это конъюнкция нескольких дизъюнктов

$$(x \vee y)(y \vee \bar{z});$$

$$(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x})$$

$$\cancel{xy \vee z}$$

$$x \vee y \vee z$$

— 1 дизъюнкт

$$xyz$$

— 3 дизъюнкта

**Определение.** У любой логической функции есть КНФ, её можно построить по таблице истинности

#### Доказательство

Заметим, что если вычислить  $(\text{КНФ})^*$  (двойственную к КНФ), то получим ДНФ

**Пример.**  $[(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})]^* = (xyz) \vee (x\bar{y}) \vee (y\bar{z})$  И наоборот  $(\text{ДНФ})^* = \text{КНФ}$

Итого, чтобы получить КНФ для функции  $f$ , надо построить ДНФ для  $f^*$ . ДНФ для  $f^*$  - существует.

**Пример.**  $f(x,y,z) = xy \Leftrightarrow z$

Выпишем значения  $xyz$  из строчек, где  $f^* = 1$

$$\bar{x}\bar{y}z \quad x\bar{y}\bar{z} \quad \bar{x}y\bar{z} \quad xy\bar{z}$$

$x$	$y$	$z$	$xy$	$f$	$f^*$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Вспомним определение  $f^*(x, y, z) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

$$f^*(0, 0, 0) = \overline{f(1, 1, 1)}$$

$$\text{Итого: } f^* = \overline{\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}}$$

$$f^*(0, 0, 1) = \overline{f(1, 1, 0)}$$

$$f^*(0, 1, 0) = \overline{f(1, 0, 1)}$$

По теореме о композиции

$$f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})$$

Получение КНФ по таблице истинности без двойственной функции