Математическая логика и теория алгоритмов

Посов Илья Александрович

запись конспекта: Блюдин Андрей

Содержание

1 Математическая логика

1.1 Исчисление высказываний

1.1.1 Основные понятия

Определение. Логическая функция — это множество из 2 элементов. Также, логической функцией называют множество логических значений
$B = \{0, 1\}$, где 0 — это ложь (false), а 1 — это истина (true)

Определение. Логическая функция от n переменных

$$f : B^n \to B$$

Замечание. Часто логические функции вводят как перечисление возможных аргументов и значений функции при этих аргументах

Пример. Введем функцию $f(x, y)$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 1: Таблица истинности для $f(x, y)$

Эту же функцию можно задать функцией $f(x, y) = max(x, y)$

x_1	x_2	...	x_n	f$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	...	0	0 или 1
...	...	...	...	0 или 1
1	1	...	1	0 или 1

Таблица 2: Таблица истинности для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Утверждение. *Функция от n переменных может быть* $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

При этом количество всех возможных наборов аргументов равняется 2^n, а количество всех возможных функций при всех возможных наборах аргументов равняется 2^{2^n}

Следствие. *Посчитаем количество таких функкий для разных n*

$n = 1 \quad 2^2 = 4$ *функций* $f(x)$

$n = 2 \quad 2^{2^2} = 16$ *функций* $f(x, y)$

$n = 3 \quad 2^{2^3} = 2^8 = 256$ *функций* $f(x, y, z)$

1.1.2 Функции от 1 переменной (их определения)

Пример. Перечислим все возможные функции от 1 переменной

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Данные функции имеют значение:

$f_1(x) = 0$ — функция 0

$f_2(x) = x$ — функция x

$f_3(x) = !x, \bar{x}, \neg x$, not x — функция отрицания (не x)

$f_4(x) = 1$ — функция 1

1.1.3 Функции от 2 переменных (их определения)

Пример. Перечислим все возможные функции от 2 переменных

Продолжение:

Перечислим основные значения функций:

$f_2(x, y)$ — это конъюнкция или "лочическое и"или логическое умножение $(xy, x\&y, x \wedge y)$

$f_7(x, y)$ — это исключающее или $(x+y, xXORy, x \oplus y)$, также данную функцию можно ассоциировать как $(x + y)mod2$

x	y	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 3: Таблица истинности для $f(x, y)$

x	y	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$	$f_{11}(x)$	$f_{12}(x)$	$f_{13}(x)$	$f_{14}(x)$	$f_{15}(x)$	$f_{16}(x)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 4: Таблица истинности для $f(x, y)$

$f_8(x,y)$ — это логическое или, но ее можно также записать как $max(x,y)$ $(x|y, x \vee y)$

$f_{10}(x,y)$ — это эквивалентность $(x \Leftrightarrow y, x \equiv y, x == y)$

$f_{14}(x,y)$ — это импликация $(x \Rightarrow y, x \to y)$

Импликация работает так, что истина следует из чего угодно:

лешия не существует $\Rightarrow$ русалок не существует $= 1$ $(1 \Rightarrow 1 = 1)$

допса скучная $\Rightarrow$ русалок не существует $= 1$ $(0 \Rightarrow 1 = 1)$

русалки существуют $\Rightarrow$ драконы существуют $= 1$ $(0 \Rightarrow 0 = 1)$

x $\Rightarrow$ y $= 0$ только если x $= 1$, а y $= 0$

$f_{12}(x,y)$ — это обратная импликация $(x \Leftarrow y = y \Rightarrow x)$

$f_9(x,y)$ — стрелка Пирса $(x \downarrow y = \overline{x \vee y})$

$f_{15}(x,y)$ — штрих Шеффера $(x|y = \overline{xy})$

$f_3(x,y)$ — запрет по y $(x > y = \overline{x \Rightarrow y})$

$f_1(x,y)$ — 0

$f_4(x,y)$ — x

$f_5(x,y)$ — запрет по x $(x < y = \overline{x \Leftarrow y})$

$f_6(x,y)$ — y

$f_{11}(x,y)$ — не y $(\neg y)$

$f_{13}(x,y)$ — не x $(\neg x)$

$f_{16}(x,y)$ — 1

Определение. Логические выражения — способ задания логических функций с помощью переменных, цифр 0 или 1 и операций:

$\cdot \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad + \quad \equiv \quad | \quad \downarrow \quad < \quad >$

Пример. Примеры логических выражений:

$(x \vee y) =$
$(x \Rightarrow yz) \vee (y \equiv z)$
$(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y)$

Определение. Значения логического выражения можно записать **Таблицей истинности**

Пример. $f(x, y, z) = (x \vee y)z$

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Замечание. Порядок строчек в таблеце истинности может быть любым, но лучше использовать как у двоичных чисел

Утверждение. *Таблицы истинности часто считают постепенно*

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y)z$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

1.1.4 Приоритеты операций

$$\neg$$

$$\cdot$$

$$\vee$$

$$+ \quad \equiv$$

$$\Rightarrow \quad \Leftarrow$$

$$| \quad \downarrow \quad < \quad >$$

Пример. Примеры приоритетов операций:
$\neg x \vee y = (\neg x) \vee y$
$x \vee yz = x \vee (yz)$
$x \Rightarrow y \vee z = x \Rightarrow (y \vee z)$

1.1.5 Алгебраические преобразования логических выражений

Определение. Алгебраические преобразования логических выражений — изменяем выражения по правилам, обычно в сторону упрощения

Пример. $(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y) = 1 \vee (1 \Rightarrow y) = 1$

Утверждение 1.

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Доказательство:

x	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

Утверждение 2. *При* $\vee$*:*

$$1 \vee x = 1$$

$$0 \vee x = x$$

$$x \vee y = y \vee x$$