

# Математическая логика и теория алгоритмов

Посов Илья Александрович

запись конспекта: Блюдин Андрей и Хаматов Вадим

## Содержание

<b>1</b>	<b>Математическая логика</b>	<b>2</b>
1.1	Исчисление высказываний . . . . .	2
1.1.1	Основные понятия . . . . .	2
1.1.2	Функции от 1 переменной (их определения) . . . . .	3
1.1.3	Функции от 2 переменных (их определения) . . . . .	3
1.1.4	Приоритеты операций . . . . .	5
1.1.5	Алгебраические преобразования логических выражений . . . . .	5
1.1.6	Таблица эквивалентных логических выражений . . . . .	6
1.1.7	Многочлены Жегалкина . . . . .	8
1.1.8	Получение многочлена Жегалкина через алгебраические упрощения . . . . .	11
1.1.9	Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ) . . . . .	12
1.1.10	Задача (не) выполнимости . . . . .	14
1.1.11	Запись таблиц истинности в виде графика . . . . .	15
1.1.12	Задача минимизации ДНФ . . . . .	15
1.1.13	Двойственная функция . . . . .	19
1.1.14	Конъюнктивно-нормальная форма КНФ . . . . .	20
1.1.15	Класс замкнутости . . . . .	24
1.1.16	Примеры замкнутых классов . . . . .	26
1.1.17	Теорема Поста . . . . .	31
1.1.18	Автоматическое доказательство теорем . . . . .	36
1.1.19	Логическое следствие . . . . .	36
1.1.20	Метод резолюций . . . . .	39
1.2	Исчисление предикатов . . . . .	43
1.2.1	Операции преобразования . . . . .	44
1.2.2	Нормальные формы . . . . .	46

# 1 Математическая логика

## 1.1 Исчисление высказываний

### 1.1.1 Основные понятия

**Определение.** Логическая функция — это множество из 2 элементов. Также, логической функцией называют множество логических значений  $B = \{0, 1\}$ , где 0 — это ложь (false), а 1 — это истина (true)

**Определение.** Логическая функция от  $n$  переменных

$$f : B^n \rightarrow B$$

*Замечание.* Часто логические функции вводят как перечисление возможных аргументов и значений функции при этих аргументах

**Пример.** Введем функцию  $f(x, y)$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 1: Таблица истинности для  $f(x, y)$

Эту же функцию можно задать функцией  $f(x, y) = \max(x, y)$

**Утверждение.** Функция от  $n$  переменных может быть  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0 или 1
...	...	...	...	0 или 1
1	1	...	1	0 или 1

Таблица 2: Таблица истинности для  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

При этом количество всех возможных наборов аргументов равняется  $2^n$ , а количество всех возможных функций при всех возможных наборах аргументов равняется  $2^{2^n}$

**Следствие.** Посчитаем количество таких функций для разных  $n$

$$n = 1 \quad 2^2 = 4 \text{ функций } f(x)$$

$$n = 2 \quad 2^{2^2} = 16 \text{ функций } f(x, y)$$

$$n = 3 \quad 2^{2^3} = 2^8 = 256 \text{ функций } f(x, y, z)$$

### 1.1.2 Функции от 1 переменной (их определения)

**Пример.** Перечислим все возможные функции от 1 переменной

$x$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Данные функции имеют значение:

$f_1(x) = 0$  — функция 0

$f_2(x) = x$  — функция  $x$

$f_3(x) = \neg x, \bar{x}, \neg x, \text{not } x$  — функция отрицания (не  $x$ )

$f_4(x) = 1$  — функция 1

### 1.1.3 Функции от 2 переменных (их определения)

**Пример.** Перечислим все возможные функции от 2 переменных

$x$	$y$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 3: Таблица истинности для  $f(x, y)$

Продолжение:

$x$	$y$	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$	$f_{11}(x)$	$f_{12}(x)$	$f_{13}(x)$	$f_{14}(x)$	$f_{15}(x)$	$f_{16}(x)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 4: Таблица истинности для  $f(x, y)$

**Перечислим основные значения функций:**

$f_2(x, y)$  — это конъюнкция или "логическое и" или логическое умножение ( $xy, x \& y, x \wedge y$ )

$f_7(x, y)$  — это исключающее или ( $x + y, x \text{ XOR } y, x \oplus y$ ), также данную функцию можно ассоциировать как  $(x + y) \bmod 2$

$f_8(x, y)$  — это логическое или, но ее можно также записать как  $max(x, y)$  ( $x|y, x \vee y$ )

$f_{10}(x, y)$  — это эквивалентность ( $x \Leftrightarrow y, x \equiv y, x == y$ )

$f_{14}(x, y)$  — это импликация ( $x \Rightarrow y, x \rightarrow y$ )

Импликация работает так, что истина следует из чего угодно:

лешия не существует  $\Rightarrow$  русалок не существует = 1 ( $1 \Rightarrow 1 = 1$ )

допса скучная  $\Rightarrow$  русалок не существует = 1 ( $0 \Rightarrow 1 = 1$ )

русалки существуют  $\Rightarrow$  драконы существуют = 1 ( $0 \Rightarrow 0 = 1$ )

$x \Rightarrow y = 0$  только если  $x = 1$ , а  $y = 0$

$f_{12}(x, y)$  — это обратная импликация ( $x \Leftarrow y = y \Rightarrow x$ )

$f_9(x, y)$  — стрелка Пирса ( $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$ )

$f_{15}(x, y)$  — штрих Шеффера ( $x|y = \overline{xy}$ )

$f_3(x, y)$  — запрет по  $y$  ( $x > y = \overline{x \Rightarrow y}$ )

$f_1(x, y) = 0$

$f_4(x, y) = x$

$f_5(x, y)$  — запрет по  $x$  ( $x < y = \overline{x \Leftarrow y}$ )

$f_6(x, y) = y$

$f_{11}(x, y)$  — не  $y$  ( $\neg y$ )

$f_{13}(x, y)$  — не  $x$  ( $\neg x$ )

$f_{16}(x, y) = 1$

**Определение.** Логические выражения — способ задания логических функций с помощью переменных, цифр 0 или 1 и операций:

$\cdot \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad + \quad \equiv \quad | \quad \downarrow \quad < \quad >$

**Пример.** Примеры логических выражений:

$(x \vee y) =$

$(x \Rightarrow yz) \vee (y \equiv z)$

$(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y)$

**Определение.** Значения логического выражения можно записать **Таблицей истинности**

**Пример.**  $f(x, y, z) = (x \vee y)z$

*Замечание.* Порядок строчек в таблице истинности может быть любым, но лучше использовать как у двоичных чисел

**Утверждение.** Таблицы истинности часто считают постепенно

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y)z$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

#### 1.1.4 Приоритеты операций

$\neg$

$\cdot$

$\vee$

$+$   $\equiv$

$\Rightarrow$   $\Leftarrow$

$|$   $\downarrow$   $<$   $>$

**Пример.** Примеры приоритетов операций:

$$\neg x \vee y = (\neg x) \vee y$$

$$x \vee yz = x \vee (yz)$$

$$x \Rightarrow y \vee z = x \Rightarrow (y \vee z)$$

#### 1.1.5 Алгебраические преобразования логических выражений

**Определение.** Алгебраические преобразования логических выражений — изменяем выражения по правилам, обычно в сторону упрощения

**Пример.**  $(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y) = 1 \vee (1 \Rightarrow y) = 1$

**Утверждение 1.**

$$\overline{\overline{x}} = x$$

*Доказательство:*

$x$	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

**Утверждение 2.** При  $\vee$ :

$$1 \vee x = 1$$

$$0 \vee x = x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

### 1.1.6 Таблица эквивалентных логических выражений

**Утверждение.**  $x \vee y = y \vee x$  - симметричность

$$x \vee 0 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \vee x = x$$

$$x \vee \overline{x} = 1$$

*Доказательство:*

$x$	$\overline{x}$	$x \vee \overline{x}$
0	1	$0 \vee 1 = 1$
1	0	$1 \vee 0 = 1$

$$xy = yx$$

$$x * 0 = 0$$

$$x * 1 = x$$

$$x * x = x$$

$$x * \overline{x} = 0$$

$$x + y = y + x$$

$$x + 0 = x$$

$$x + 1 = \overline{x}$$

$$x + x = 0$$

$$x + \overline{x} = 1$$

**Утверждение.**  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  - ассоциативность  
 Ассоциативность означает, что порядок скобок не важен

**Пример.**  $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$  - не симметричная функция

**Доказательство:**

x y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	1
1 1	1	1

*Замечание.*  $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$

$$x \Rightarrow 0 = \bar{x}$$

$$0 \Rightarrow x = 1$$

**Доказательство:**

x	$x \Rightarrow 0$
0	$0 \Rightarrow 0 = 1$
1	$1 \Rightarrow 0 = 0$

$$x \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 \Rightarrow x = x$$

$$x \Rightarrow x = 1$$

$$x \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}$$

$$\bar{x} \Rightarrow x = x$$

$$\bar{x} \Rightarrow y \Rightarrow z \text{ договоримся, что это } x \Rightarrow y(y \Rightarrow z) \neq (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$$

$$x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$$

$$x \Leftrightarrow 0 = \bar{x}$$

$$x \Leftrightarrow 1 = x$$

$$x \Leftrightarrow x = 1$$

$$x \Leftrightarrow \bar{x} = 0$$

$$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z \text{ - ассоциативно}$$

**Утверждение.** Дистрибутивность

$$(x \vee y)z = xz \vee yz$$

$$(x + y)z = xz + yz \text{ по таблице истинности}$$

x y z	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

$$(x \& y) \vee z \quad (xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z))$$

$$(x \vee y) \& z = (x \& z) \vee (y \& z)$$

$$(x \& y) \vee z = (x \vee z) \& (y \vee z)$$

*Замечание.*  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(y_1 \vee y_2) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_2 =$   
 $x_1y_1 \vee x_2y_1 \vee x_3y_1 \vee x_1y_2 \vee x_2y_2 \vee x_3y_2$

$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = xy \vee xz \vee zy \vee zz = xy \vee xz \vee zy \vee z =$   
 $xy \vee xz \vee zy \vee z * 1 = xy \vee z(x \vee y \vee 1) = xy \vee z$  сошлось

$x + y = \overline{x} \Rightarrow y$  - смотри Таблицу истинности

$$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = x \Rightarrow y$$

### 1.1.7 Многочлены Жегалкина

*Замечание.* Одну и ту же функцию можно записать по разному.

*В алгебре:*  $f(x) = 1 + x = x + 1 = x + 5 - 4 = \sin(x - x) + x = \dots$

*В логике:*  $f(x, y) = x \vee y = x \vee y \vee 0 = (x \vee y)(\overline{y} \vee y) = x\overline{y} \vee y$  (= - дистрибутивность)

**Многочлены Жегалкина для логической формулы**

**Определение.**  $f(x_1, \dots, x_n)$  - это многочлен с переменными  $x_i$ , конспектами 0,1 и со степенями переменных  $\leq 1$ . Это многочлены от  $x_i$   **$\mathbf{Z}_2$**

**Пример.**  $f(x, y, z) = 1 + x + yz + xyz$

$$1 + x \quad xy + xyz$$

$$1 + xy$$

*Не многочлены*

$$1 + x + (y \vee z)$$

$$1 + x + z^2 \text{ нельзя степень } 2$$

*Замечание.* В общем случае многочлен от 1 переменной ( $a_i = 0$  или 1)

$$a_0 + a_1x$$



от 2ух:  $a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$

от 3ех:  $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$

В общем случае  $f(x_1...x_n)$   $a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n + ax_1x_2 + ax_1x_3 + ...$  (все пары переменных)  $+ ax_1x_2x_3 + ax_1x_3x_2 \leftarrow$  все тройки переменных  $+ ax_1x_2x_3...x_n$

**Определение.**  $\forall f(x_1...x_n)$  - логические функция  $\exists!$  многочлен Жегалкина  $g(x_1...x_n) : f = g$

*Замечание.* Всего 4 функции от 1ой переменной

$$f(x) = 0 = \bar{x} = 0 + 0x$$

$$f(x) = 1 = 1 = 1 + 0x$$

$$f(x) = x = x = 0 + 1x$$

$$f(x) = \bar{x} = 1 + x = 1 + 1x$$

**Доказательство:**

**Определение.** Разные многочлены - это разные логические функции

т.е.  $f(x_1...x_n) = a_0 + ... + a_1x_1...x_n$

$$g(x_1...x_n) = b_0 + ... + bx_1...x_n$$

$\exists! : a_i \neq b_i$  различающийся

**Доказательство:**

Возьмем индекс с самым большим количеством переменных

$$f(x, y, z) = 1 + x + xy + xyz = ... + 1x + Dy + Dz + 1xy$$

$$g(x, y, z) = 1 + y + z + xyz... + Dx + 1y + 1z$$

для переменных этого слагаемого подставим 1 0ху

для остальных переменных : 0

$$[ \text{В примере } x = 1, y = 0, z = 0 : f(1, 0, 0) \text{ и } g(1, 0, 0) ]$$

и в f и в g все другие слагаемые равны 0

Теперь  $f(...)$  и  $g(...)$

$$f(...) = a_ix_1x_2x_3 \neq b_ix_1x_2x_3 \Rightarrow f(x_1...x_n) \neq g$$

**Доказательство:**

Проверим, что многочленов Жегалкина столько, сколько функций:

Посчитаем

$$a_0 + a_1x_1 + ... + a_1x_1x_2...x_n$$

Сколько слагаемых:

1) 1 слагаемых без переменных

n слагаемых с переменной

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

$C_n^2$  - слагаемых с 2 - мя переменными

$C_n^3$  - слагаемых с 3 - мя переменными

$C_n^n$  - слагаемых с n переменными

$$\text{Всего : } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... C_n^n = 2^n((1 + 1)^2)$$

**Пример.**  $a_0 + a_1x$  - 2 слагаемых

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy - 2^2 = 4 \text{ слагаемых}$$

2) Все слагаемых имеют вид:  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$  (0 или 1) -  $2^n$  слагаемых

Итого: многочлен Жегалкина от  $n$  переменных

**Задача.** Сколько разных многочленов?

Это столько же, сколько логических функций

Итого:

**Следствие:** Любая логическая функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина

**Пример.**  $f(x, y) = x \vee y$

$f(x, y) = x * y$  - уже многочлен Жегалкина

**Метод неопределенных коэффициентов:**

Подберем  $x \vee y = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 0) = a_0 + a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3 \dots$$

$$f(1, 0) = 1 \vee 0 = 1$$

$$f(1, 0) = a_0 + a_1 = a_1 \quad (a_0 = 0, \Rightarrow a_1 = 1)$$

$$f(0, 1) = \text{аналогично} \Rightarrow a_2 = 1$$

$$f(x, y) = x + y + a_3xy$$

$$f(1, 1) = 1 \vee 1 = 1$$

$$f(1, 1) = 1 + 1 + a_3 = 0 + a_3 = a_3, \quad a_3 = 1$$

Ответ:  $x \vee y = x + y + xy$

**Многочлены Жегалкина от 1 переменной:**

$f(x)$	Мн Ж
0	0
1	1
$x$	$x$
$\bar{x}$	$1 + x$

**Многочлены Жегалкина от 2 переменных:**

$f(x, y)$	Мн Ж
0	0
1	1
$xy$	$xy$
$x + y$	$x + y$
$x \vee y$	$x + y + xy$

**Формулы:**

1.  $\overline{xy} = \neg(xy) = \bar{x} \vee \bar{y}$
2.  $\overline{x \vee y} = \neg(x \vee y) = \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \bar{y}$

Замечание.  $\overline{xy} \neq \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \bar{y}$

**Доказательство формул через таблицу истинности:**

$x$	$y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \cdot \bar{y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

### 1.1.8 Получение многочлена Жегалкина через алгебраические упрощения

1. Многочлен Жегалкина для  $\vee$

$$x \vee y = (x = \bar{a}, y = \bar{y}) = \overline{ab} = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \overline{(1+x)(1+y)} = 1 + (1+x)(1+y) = 1 + 1 + x + y + xy = \underline{x + y + xy}$$

2. Многочлен Жегалкина для  $\Leftrightarrow$

$$x \Leftrightarrow y = \overline{x + y} = \underline{1 + x + y}$$

3. Многочлен Жегалкина для  $\Rightarrow$

$$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = (1+x) \vee y = (1+x) + y + (1+x)y = 1 + x + y + y + xy = \underline{1 + x + xy}$$

Замечание. Если есть логическая формула, то ее можно привести к форме многочлена Жегалкина двумя способами:

1. метод неопределенных коэффициентов:

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + \dots + axyz$$

2. метод алгебраических преобразований

Пример.  $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \dots = x + y + xy$

Пример.  $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = \dots = 1 + x + xy$

Пример.  $x \Rightarrow (y \vee \bar{z}) = x \Rightarrow (y + \bar{z} + y \cdot \bar{z}) = x \Rightarrow (y + (1+z) + y \cdot (1+z)) = x \Rightarrow (y + 1 + z + y + yz) = x \Rightarrow (1 + z + yz) = 1 + x + x(1 + z + yz) = 1 + x + x + xz + xyz = 1 + xz + xyz$

**Поймем, что:**  $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$

$$x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z = (1+x+y) \Leftrightarrow z = 1+(1+x+y)+z = 1+1+x+y+z = x+y+z$$

**Вывод:**

Заранее не ясно, сложно ли привести логическую формулу к многочлену Жегалкина

### 1.1.9 Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ)

**Определение.** Литерал — это переменная или отрицание переменной

**Пример.**  $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$

**Определение.** Конъюнктор — конъюнкция литералов

**Пример.**  $x\bar{y}, xyz, \bar{x}\bar{y}\bar{z}, \bar{x}z$ , ноль (пустой конъюнкт).

**Определение.** Логическое выражение имеет ДНФ, если она является дизъюнкцией конъюнкторов

**Пример.**  $x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee z \vee \bar{x}\bar{y}$  — ДНФ

**Пример.**  $xy \vee \bar{x}\bar{y}$  — ДНФ

**Пример.**  $x \vee y$  — ДНФ

**Пример.**  $xy$  — ДНФ

**Пример.** не ДНФ —  $\bar{x}\bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y}$  — ДНФ

**Пример.** не ДНФ —  $x \Rightarrow yz = \bar{x} \vee yz$  — ДНФ

**Построение ДНФ по таблице истинности функции:**  
алгоритм на примере трех переменных

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\bar{x} y \bar{z}$
0	1	1	1	$\bar{x} y z$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$xy \bar{z}$
1	1	1	0	

Берем строки из столбца  $f(x, y, z)$ , где значения в столбце равны 1

Допустим есть строка:  $x = a_1, y = a_2, z = a_3$  ( $a$  могут быть как 0, так и 1)

В ответ добавляется конъюнкт  $xyz$  ( $0 \Rightarrow$  отрицание,  $1 \Rightarrow$  не отрицание)

Ответ:  $f(x, y, z) = \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z}$

**Доказательство корректности алгоритма:**

Когда полученный ДНФ = 1?

Когда есть конъюнкт равный 1

1. Если первый конъюнкт равняется 1 (в примере  $\bar{x} y \bar{z} = 1$ )

$\Rightarrow$  все литералы конъюнкта равняются 1

$\Rightarrow$  в примере  $\bar{x} = 1 \quad y = 1 \quad \bar{z} = 1$

$$x = 0 \quad y = 1 \quad z = 0$$

2. Если второй конъюнкт равняется 1

$\Rightarrow$  в примере  $x = 0 \quad y = 1 \quad z = 1$  — строка из таблицы истинности

3. То же самое с третьим конъюнктом

Посмотрим таблицу с этими конъюнктами:

$x$	$y$	$z$	$\bar{x} y \bar{z}$	$\bar{x} y z$	$x y \bar{z}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

*Замечание.* У одной функции могут быть разные ДНФ

**Пример.**  $\bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} = \bar{x} y (\bar{z} \vee z) \vee x y \bar{z} = \bar{x} y \vee x y \bar{z}$  — подчеркнутые выражения являются ДНФ

**Пример.**  $\bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} = \bar{z} y (\bar{x} \vee x) \vee z y \bar{x} = \bar{z} y \vee z y \bar{x} = y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} x \vee z \bar{z}$  — подчеркнутые выражения являются ДНФ

Получить ДНФ для логической функции/формулы можно:

1. по таблице истинности

2. с помощью алгебраических преобразований

**Пример.** 1.  $\bar{x} = \bar{x}$

2.  $x \vee y = x \vee y$

3.  $x \cdot y = x \cdot y$

4.  $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$

5.  $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}x \vee y\bar{y} \vee yx = \bar{x}\bar{y} \vee xy$

$x$	$y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6.  $x + y = \overline{\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}} = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee xy} \dots$

$= \overline{\bar{x}\bar{y}} \vee \overline{xy} = \overline{\bar{x}} \cdot \overline{\bar{y}} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} = x\bar{y} \vee \bar{x}y$

7.  $x \Rightarrow (y + z) = \bar{x} \vee (y + z) = \bar{x} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z}$

### 1.1.10 Задача (не) выполнимости

Дана логическая формала в ДНФ

Проверить, бывает ли она равна 0?

$\bar{x}\bar{y} \vee x \vee y? = 0$

$x = 0, y = 0 \Rightarrow \bar{x}\bar{y} = 1$

$\Rightarrow$  данный ДНФ не может быть равным 0

Эта задача обладает особенностью:

1. если знать значения переменных (ответ), то их легко можно быстро проверить
2. подобрать значения переменных для 0 — нет

Нет известного алгоритма, который "принципиально" быстрее полного перебора

У этой задачи класс NP выполнимости (ответ легко проверить, а найти его простым способом невозможно)

**Следствие.** То к чему сводится задача (не) выполнимости тоже сложна

1. упростить логическое выражение

2. поиск минимального ДНФ

### 1.1.11 Запись таблиц истинности в виде графика

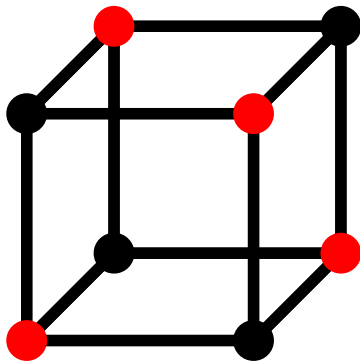
Формула =  $f(x, y, z) = x + y$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 1) = 1$$

$$f(1, 0) = 1$$

$$f(1, 1) = 0$$



### 1.1.12 Задача минимизации ДНФ

Данная задача тоже является сложной, также как и задача (не) выполнимости

Дана логическая функция (в виде ДНФ). Необходимо найти самую короткую ДНФ эквивалентную данной.

Минимальной ДНФ считается та, где меньше количество литералов и дизъюнкций

**Пример.**  $\bar{x}\bar{y} \vee z$  короче, чем  $xy \vee yz$

*Замечание.* Далее рассматриваться все будет для функции от 3 переменных  $f(x, y, z)$

*Замечание.* Какова таблица истинности  $xyz = abc$ , где  $a = 0$  или  $1$ ,  $b = 0$  или  $1$ ,  $c = 0$  или  $1$

$0 \Rightarrow$  надо поставить отрицание

$1 \Rightarrow$  нет отрицания

**Пример.**  $f(x, y, z) = \bar{x} y \bar{z}$

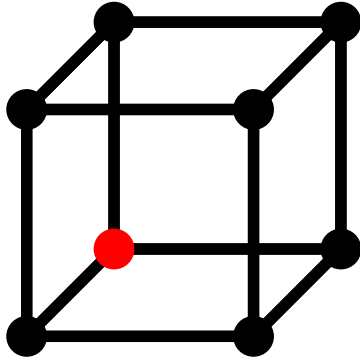
Если  $\bar{x} y \bar{z} = 1$

$\Rightarrow \bar{x} = 1, y = 1, \bar{z} = 1$

$\Rightarrow x = 0, y = 1, z = 0$

$\Rightarrow x = a, y = b, z = c$

$\Rightarrow a = 0, b = 1, c = 0$



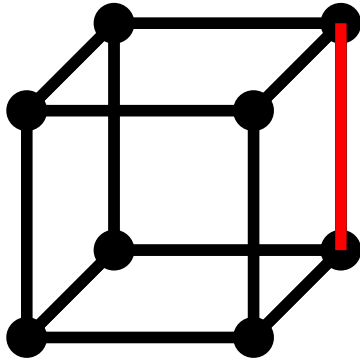
**Пример.**  $f(x, y, z) = xy$

Если  $xy = 1$

$\Rightarrow x = 1, y = 1$

$\Rightarrow x = a, y = b$

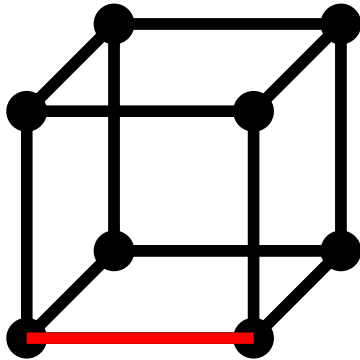
$\Rightarrow a = 1, b = 1$



Аналогично,  $f(x, y, z) = \bar{y} \bar{z}$

ребро:  $y = 0, z = 0, x = ?$  — не важно



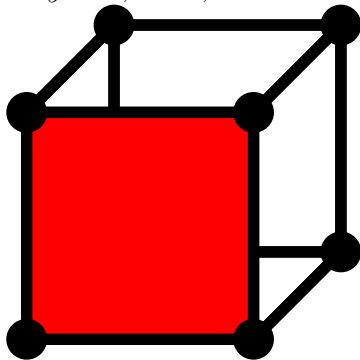


Последнее — конъюнкт из 1 литерала:  
 $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$

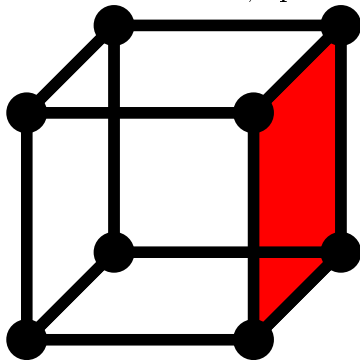
**Пример.**  $f(x, y, z) = \bar{y}$

Если  $\bar{y} = 1$

$\Rightarrow y = 0, x = ?, z = ?$



Или конъюнкт  $x$ , грань  $x = 1$



**Итого:**

$xyz$  — это вершина  $x = a, y = b, z = c$

$xy$  — это ребро  $x = a, y = b$

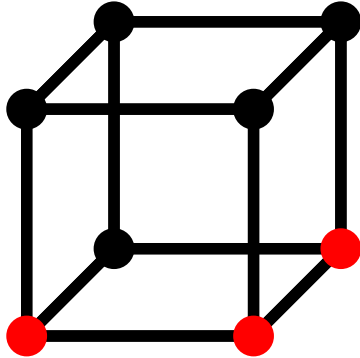
$x$  — это грань  $x = a$

Попробуем минимизировать ДНФ

**Пример.**  $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$

Найти самый короткий ДНФ для данного выражения

**Шаг 1: строим ТИ**



$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} = (0, 0, 0)$$

$$x\bar{y}\bar{z} = (1, 0, 0)$$

$$xy\bar{z} = (1, 1, 0)$$

**Шаг 2: упрощаем**

Чтобы упростить имеет смысл рассмотреть 2 ребра:

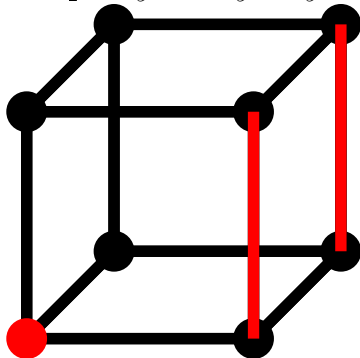
$$(0, 0, 0) - -(1, 0, 0) = \bar{y}\bar{z}$$

$$(1, 0, 0) - -(1, 1, 0) = x\bar{z}$$

$$\Rightarrow \text{ДНФ} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = xy\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$$

$$\Rightarrow \text{самое короткое ДНФ} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$$

**Пример.**  $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xy$



$$\Rightarrow \text{ДНФ} = x \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = x \vee \bar{y}\bar{z}$$

*Замечание.* Данный метод позволяет наглядно перебрать все ДНФ и найти минимальный

С помощью алгебраических преобразований мы не сможем понять, что ответ самый оптимальный

**Пример.** Алгебраические преобразования

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$$

Но тут непонятно, а вдруг можно сделать еще короче

### 1.1.13 Двойственная функция

Пусть есть логическая функция:  $f = B^n \rightarrow B = \{0, 1\}$

Двойственная функция:  $f^* = B^n \rightarrow B = \{0, 1\}$

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$$

*Замечание.* Мир замены лжи на истину

$$0 \leftrightarrow 1$$

**Пример.**  $f(x, y) = x \vee y$

$x$	$y$	$f$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Новый мир:  $1 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1$

$x$	$y$	$f^*$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Получилось, что  $(x \vee y)^* = xy$

**Пример.**  $(x \vee y)^* = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} = xy$

**Пример.**  $(x + y)^* = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{1 + x + 1 + y} = 1 + x + 1 + y + 1 = 1 + x + y = x \Leftrightarrow y$

*Замечание.*  $f^{**}(x_1, x_2 \dots x_n) = \overline{f^*(\overline{x_1}, \overline{x_2} \dots \overline{x_n})} = \overline{\overline{f(x_1, x_2 \dots x_n)}} = f(x_1, x_2 \dots x_n)$

**Следствие.**

$$(xy)^* = x \vee y$$

$$(x \Leftrightarrow y)^* = x + y$$

**Теорема о композиции:**

$$f = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

$f_i$  — это функции от  $n$  переменных  $(B^n \rightarrow B)(i = 1 \dots n)$

$$f_0 = B^m \rightarrow B$$

$$\text{Тогда } f^*(x_1, \dots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), f_2^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^*(x_1, \dots, x_n))$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} f^* &= \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})} = \overline{f_0(f_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), f_2(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, f_m(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}))} = \\ &= f_0^*(f_1^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), f_2^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, f_m^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})) \end{aligned}$$

**Следствие.** Если есть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — записано, как логическое выражение с  $\cdot, \vee, \neg, +, \Leftrightarrow$ , то  $f^*$  — также выражение, но связки заменяются на двойственные узлы

$$\vee \leftrightarrow *$$

$$+ \leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\neg \leftrightarrow \neg$$

$$\text{так как } (\overline{\overline{x}})^* = \overline{x}$$

**Пример.**

$$f(x, y, z) = \overline{x \vee \overline{y} z} \Leftrightarrow (x + y + z)$$

$$f^*(x, y, z) = \overline{(x \cdot (\overline{y} z))} + (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z)$$

**Пример.**

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1$$

$$\Rightarrow f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{1} = 0$$

$$1^* = 0; 0^* = 1$$

#### 1.1.14 Конъюнктивно-нормальная форма КНФ

**Определение.** Конъюнктивно-нормальная форма — еще одна нормальная форма, похожая на ДНФ

**Определение.** Литерал — это как и раньше, переменные или отрицательные переменные

$$x, y, \overline{x}, \overline{y}$$

**Определение.** Дизъюнкт — дизъюнкция литералов

$$x \vee y; x \vee y \vee \bar{z}; x \vee \bar{z}; \bar{x}$$

$$\cancel{xy}, \cancel{x \vee yz}$$

**Определение.** КНФ — это конъюнкция нескольких дизъюнктов

$$(x \vee y)(y \vee \bar{z});$$

$$(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x})$$

$$\cancel{xy \vee z}$$

$$x \vee y \vee z$$

— 1 дизъюнкт

$$xyz$$

— 3 дизъюнкта

**Определение.** У любой логической функции есть КНФ, её можно построить по таблице истинности

#### Доказательство

Заметим, что если вычислить  $(\text{КНФ})^*$  (двойственную к КНФ), то получим ДНФ

**Пример.**  $[(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})]^* = (xyz) \vee (x\bar{y}) \vee (\bar{y}\bar{z})$

И наоборот  $(\text{ДНФ})^* = \text{КНФ}$

Итого, чтобы получить КНФ для функции  $f$ , надо построить двойственную функцию к ДНФ этой функции. Отсюда следует, что КНФ всегда существует

**Пример.**  $f(x,y,z) = xy \Leftrightarrow z$

Выпишем значения  $xyz$  из строчек, где  $f^* = 1$

$$\bar{x}\bar{y}z \quad x\bar{y}\bar{z} \quad \bar{x}y\bar{z} \quad xyz$$

$x$	$y$	$z$	$xy$	$f$	$f^*$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Вспомним определение  $f^*(x, y, z) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

$$f^*(0, 0, 0) = \overline{f(1, 1, 1)}$$

$$\text{Итого: } f^* = \overline{\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz}$$

$$f^*(0, 0, 1) = \overline{f(1, 1, 0)}$$

$$f^*(0, 1, 0) = \overline{f(1, 0, 1)}$$

По теореме о композиции

$$f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})$$

Получение КНФ по таблице истинности без двойственной функции

$$f(x, y, z) = xy \Leftrightarrow z$$

$x$	$y$	$z$	$f = xy \Leftrightarrow z$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\text{При } x \ y \ z = 1 \ 1 \ 0, f = xy \Leftrightarrow z \leftarrow \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$$

для 1 - отрицание, для 0 - нет отрицания

Итого: Чтобы построить ДНФ:

$$\text{- строки с 1, } 0 \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

$$1 \leftrightarrow xyz$$

Чтобы получить КНФ:

$$\text{- строки с 0, } 0 \leftrightarrow xyz$$

$$1 \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

**Пример.**  $f = x + y$

$x$	$y$	$x + y$
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0

Нули в:  $x \vee y \quad \bar{x} \vee \bar{y}$   
 $f = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$

*Замечание.* Для функции записанной в форме КНФ, можно поставить задачу "выполнимости".

Вопрос: может ли значение быть = 1

- не известно решений, принципиально эффективней полного перебора значений

**Пример.**  $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{z}) = 1$

$x = 1$

$y = 1$  подходит

$z = 0$

Следовательно эта формула выполнима при таком наборе

Многие задачи, головоломки сводятся к задаче выполнимости

**Пример.** Принцип Дирихле

Если есть  $n$  клеток и в них  $n+1$  заяц, то  $\exists$  клетка, где зайцев  $\geq 2$ .

при  $n = 2$ :  $i = 1$  или  $2$  (клетка)  $x_{ij}$  - в клетке  $i$  сидит заяц  $j$

$j = 1$  или  $2$  или  $3$  заяц

Попробуем записать, что в каждой клетке  $\leq 1$  зайца

а) каждый заяц ровно в одной клетке

$x_{11} \oplus x_{21}$  - заяц 1

$x_{12} \oplus x_{22}$  - заяц 2

$x_{13} \oplus x_{23}$  - заяц 3

б) в каждой клетке не больше 1 зайца

кл/з	1	2	3
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$

если есть 2 зайца, то один из конъюнктов: = 1

$\overline{x_{11}x_{12} \vee x_{11}x_{13} \vee x_{12}x_{13}} \leftarrow$  в кл 1  $\leq 1$  зайца

$\overline{x_{21}x_{22} \vee x_{21}x_{23} \vee x_{22}x_{23}} \leftarrow$  в кл 2  $\leq 1$  зайца

Соединяем все утверждения:

$(x_{11}+x_{21})(x_{12}+x_{22})(x_{13}+x_{23})(\overline{x_{11}x_{12}} \vee \overline{x_{11}x_{13}} \vee \overline{x_{12}x_{13}})(\overline{x_{21}x_{22}} \vee \overline{x_{21}x_{23}} \vee \overline{x_{22}x_{23}}) =$   
 0 всегда из принципа Дерихла

$(x_{11} \vee x_{21})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{21}})(x_{12} \vee x_{22})(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{22}})(x_{13} \vee x_{23})(\overline{x_{13}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{12}})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{13}})(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{13}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{22}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{22}} \vee \overline{x_{23}})$

← Берем программу, которая решает КНФ задачу выполнимости.  
 Она скажет - невозможно.

### 1.1.15 Класс замкнутости

Повторим: Логическая функция:  $f: \beta^n \rightarrow \beta$   
 $\beta = \{0, 1\}$

**Определение.** Класс — это множество логических функций.

**Пример.**  $K_1$  = класс функций: от двух переменных  $K_2$  = класс функций такой, что  $f(x, y) = f(y, x)$

$f(x, y) = x \vee y \in K_1, \in K_2$

$g(x, y) = x \Rightarrow y \in K_1 \notin K_2$

$K_3$  : класс функций  $f(x, \dots) = f(\bar{x}, \dots)$  функции, которые не зависят от первой переменной

$f(x, y, z) = y \Rightarrow z \in K_3$

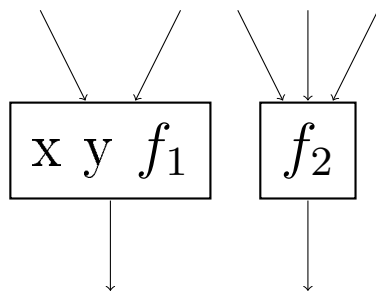
$f(x, y, z) = (x \Rightarrow y) \vee z \notin K_3$

$f(x, y, z) = x\bar{x} \vee y \vee z \in K_3 \quad (x\bar{x})$

$K_4 : \{f(x, y) = x \vee y; g(x, y) = x \Rightarrow y\}$

**Определение.** Замыкание класса

$K = \{f_1, f_2, \dots\}$  — класс функции



$K^*$  — замыкание класса - это класс состоящий из всех композиций функций из  $K$

$\overline{f_1(f_2)(f_1(x, y), y, z), z}]$  — композиция

если есть функции, подставляем друг в друга, получаем композицию

**Пример.** :  $1) K = \{0, \bar{x}\} \quad (0 - f() \quad \bar{x} - g(x))$

$K^* = \{f(), g(f()), g(g(f())), g(g(g(f())))\}$



**Пример.**  $K = \{\bar{x}\}$  возьмем класс только из отрицательных

$$K^* = \{\bar{x}, x\}$$

$$K = \{g(x), g(g(x)), g(g(g(x \dots 1, \dots)))\}$$

**Пример.**  $K^* = \{\bar{x}, x \vee y, xy\}$   $K^* = \{\dots, \forall, \text{функция}\}$

**Определение.** Если  $K$  - класс:

$K^* = \alpha$ , то  $\overline{[K - \text{полный}]}$ , где  $\alpha$  — все логические функции

Вывод:  $K = \{\bar{x}, x \vee y, xy\}$  — полный

**Пример.**  $K = \{\bar{x}, x \vee y\}$ , где  $f(x) = \bar{x}$ ,  $g(x, y) = x \vee y$

$$xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = f(g(f(x), f(y)))$$

Значит  $K^*$  — тоже полный

**Определение.** Замкнутый класс —  $K$  замкнут, если  $K^* = K$

Свойства замыкания:

1.  $K_1 \subset K_2$ , тогда  $K_1^* \subset K_2^*$

**Доказательство:**

Если есть  $f \in K_1^* \Rightarrow f$  — композиция  $f_1 \in K_1 \Rightarrow f$  — композиция  
 $(f_i \in K_2) \Rightarrow f \in K_2^*$  чтд.

2. Если  $K_1 \subset K_2$  и  $K_1$  — полный, то  $K_2$  — полный

**Доказательство:**

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow K_1^* \subset K_2^* \Rightarrow \alpha \subset K_2^* \Rightarrow K_2^* = \alpha$$

3. Пусть  $K_1, K_2$  — замкнутое, тогда  $K_1 \cap K_2$  — тоже замкнутое

**Доказательство:**

Пусть есть  $f = (K_1 \cap K_2)^*$  — композиция

$$f_i \in (K_1 \cap K_2)$$

$$a) \Rightarrow f_i - \text{композиция } f_i \in K_1 \Rightarrow f \in K_1^*$$

$$b) \Rightarrow f_i - \text{композиция } f_i \in K_2 \Rightarrow f \in K_2^*$$

Из а и б следует, что  $f \in K_1^* \cap K_2^* = K_1 \cap K_2$

Итог:  $f \in (K_1 \cap K_2)^* \Rightarrow f \in K_1 \cap K_2$

$$\Rightarrow (K_1 \cap K_2)^* \subset K_1 \cap K_2, \text{ по } K_1 \cap K_2 \subset (K_1 \cap K_2)^*$$

$$\Rightarrow K_1 \cap K_2 = (K_1 \cap K_2)^*$$

$$\Rightarrow K_1 \cap K_2 - \text{замкнут}$$

**Замечание.**  $K_1$  и  $K_2$  — замкнутые  $\Rightarrow K_1 \cup K_2$  — замкнутый

4.  $K^* = K^{**}$  для любого класса функций

### 1.1.16 Примеры замкнутых классов

1.  $T_0$  - класс функций, "сохраняющих ноль"  $f \in T_0 \Leftrightarrow$  если  $f(0, \dots, 0) = 0$

$$x * y \in T_0$$

$$x + y \in T_0$$

$$\bar{x} \notin T_0$$

$$x \Rightarrow y \notin T_0$$

$$xy + xz + yz \in T_0$$

**Утверждение:**  $T_0$  - замкнут

**Доказательство:**

$\square f \in T_0^*$ , проверим, что  $f \in T_0$

$$\Rightarrow T_0^* \subset T_0$$

$$\Rightarrow T_0^* = T$$

$f$  - комп  $f_i, f_i \in T_0$

$f_1(f_2(\dots)f_3(f_4(\dots)), \dots)$  - композиция

подставим все 0

$$\Rightarrow f(0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow f \in T_0 \text{ чтд}$$

**Пример.**  $f_1(x, y) = x * y \quad f_1 \in T_0, f_2 \in T_0$

$$f_2(x, y) = x + y \quad f_1(f_2(f_1(x, f_2(y, y)), y)f_1(z, z))$$

$$x(y + y)$$

$$f(x, y, z) = (x(y + y) + y) * z * z$$

$$f(0, 0, 0) = 0$$

2. Класс  $T_1$  - сохраняющие 1

$f \in T_1$ , если  $f(1, \dots, 1) = 1$

$$x * y \in T_1$$

$$x + y \notin T_1$$

$$x + y + z \in T_1$$

$$\bar{x} \notin T_1$$

$$x \Rightarrow y \in T_1$$

$$xy + xz + yz \in T_1$$

**Утверждение.**  $T_1$  - замкнут

**Доказательство:** смотри  $T_0$

3. Класс  $\mathbb{K}$

$f \in \mathbb{K}$ , если  $f$  можно записать как конъюнкцию нескольких перемен-

ных

$$f(x, y, z) = yz$$

$$g(x, y, z) = xyz$$

$$h(x, y, z) = xz$$

$$i(x, y, z) = z$$

0

1

Все это  $\in \mathbb{K}$

**Утверждение.** Класс  $\mathbb{K}$  замкнут

Композиция  $f_i \in \mathbb{K}$

$f_1(..., \text{арг2}, ..., \text{арг4}) = \text{арг2} * \text{арг4} = \text{подаргумент1} * \text{подаргумент2} * \dots *$   
подаргумент = пер \* пер \* пер \* пер... (произвольная переменная)  
пер может быть 0 или 1

**Утверждение.**  $\mathbb{K} = \{\&, 0, 1\}^*$

по определению замыкания

$\{f_1(x, y) = x * y$

$f_2() = 0$

$f_3() = 1\}$

4.  $\mathbb{K}$  - дизъюнкция переменных и 0, 1

$\mathbb{K} = \{V, 0, 1\}^*$

**Утверждение.**  $\mathbb{K}$  - замкнут

**Доказательство 1:**

смотри доказательство  $\mathbb{K}$

**Доказательство 2:**

$\mathbb{K} = \{V, 0, 1\}^* \Rightarrow \mathbb{K}^* = \{V, 0, 1\}^{**} = \{V, 0, 1\}^* = \mathbb{K}$  свойства замыкания

**Доказательство:**  $\square f \in K^* \Rightarrow f - \text{комп } f_i \Rightarrow f_i \in K^*$

$f = f_1(f_2(...)) = g_1(g_2(h_1...)) \in K^*$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \text{комп } g_1 \in K^*$

$g_i \in K \quad h_i \in K$

$\Rightarrow f \in K^* \Rightarrow K^* = K^{**}$

Следствие:  $\forall K$  - класс  $K^*$  - замкнут

если класс замкнут он станет замкнутым

5. Класс  $u$  (unit) :  $0, 1, f(x, ...x_n) = x_i$  или  $\bar{x}_i$

$f(x, y, z) = \bar{z}$

$f(x, y, z, t) = x$

$f(x) = xf(x) = \bar{x}$

Все это  $\in u$

6. Класс  $1^\infty$   $f(x_1...x_n) \leq x_i$

$0^\infty f(x...x_n) \geq x_i$

$x * y \leq x \quad xy \in 1^\infty$

$\leq y$

$$x \vee y \geq x \quad x \vee y \in 0^\infty$$

$$\geq y$$

$$x \Rightarrow y \geq y \quad x \Rightarrow y \in 0^\infty$$

$$x \Rightarrow y \leq y$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$x \Rightarrow y \notin 1^\infty$$

7.  $L$  - линейная функция  $L = \{0, 1, +\}^*$

Все функции из констант и сложения

$$x + y \in L$$

$$x + y + z \in L$$

$$1 + x \in L$$

$$\bar{x} \in$$

$$x * y \in L$$

( $L$  - линейные многочлены Жегалкина, степени  $\leq 1$ )

**Доказательство:**  $x * y$  имеет многочлены Жегалкина  $x * y$

он единственный  $\Rightarrow$  не существует линейного многочлена Жегалкина

8.  $S$  - самодвойственные функции

$$f \in S, \text{ если } f = f^* \quad (f^* - \text{двойственные})$$

Если функция равна своей двойственной, то она самодвойственная

**Пример.**  $x * y \notin S$

$$x \vee y \notin S$$

$$x \in S$$

$$\bar{x} \in S$$

$$x \Rightarrow y \notin S \text{ т.к. } (x \Rightarrow y)^* = (\bar{x} \vee y)^* = \bar{x} * y \neq \bar{x} \vee y$$

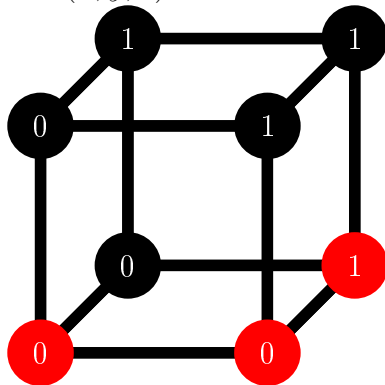
$$x = 1$$

Функция честного голосования  $y = 1$  от 3 её переменных.  $0 \neq 1$

$vote(x, y, z) = 1$ , если 1 - иц больше  $x + y + z \geq z$

0, если 0 - ей больше  $x + y + z \leq 1$

$vote(x, y, z)$  : Таблица истинности



$$vote(x, y, z) \in S?$$

$$(xy \vee xz \vee yz)^* = (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z) = ? xy \vee xz \vee yz$$

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned} & xxy \vee xxz \vee xzy \vee xzz \vee yxy \vee yxz \vee yzy \vee yzz = xy \vee xz \vee xyz \vee xz \vee \\ & xy \vee xyz \vee yz \vee yz = xy \vee xz \vee yz \vee xyz = xy \vee xz \vee yz(1 \vee x) = xy \vee xz \vee yz \\ & \text{т.е. } vote = vote^* \end{aligned}$$

или проверим таблицей истинности:

читаем снизу вверх, заменяя 0 на 1

$xyz$	$vote$	$vote^*$
000	0	0
001	0	0
010	0	0
011	1	1
100	0	0
101	1	1
110	1	1
111	1	1

**Утверждение.**  $S$  - замкнут

$$\sqsupset f \in S^* f = \text{композиция } f_i \in S$$

$$f = f_i(f_2(\dots), f_3(\dots), f_4(\dots))$$

**Определение.** Высота композиции

$$f(x, y, z) - \text{высота } 1 \text{ (1 ф-ия)}$$

$$f(g(x, y), y, z) - \text{высота } 2$$

$$g(x, y) - 1$$

$$f(g(x, y), y, z) - 2$$

**Пример.**  $f(g(h(x), y), h((h(x)), y))$

$$g(h(x), y) - 2$$

$$h(h(x)) - 2$$

$$f(g(h(x), y), h((h(x)), y)) - 3$$

$$f^* = f_1^*(f_2^*(\dots), \dots, f_n^*(\dots)) - \text{теория о композиции}$$

$$\text{но } f_i \in S \Rightarrow f_i^* = f_i$$

$$= f_i(f_2(\dots), \dots, f_n(\dots)) = f$$

$$\text{т.е. } f^* = f \Rightarrow f \in S$$

9. Монотонные функции

$$f(x_1, \dots, x_n) \in M, \text{ если } \forall i \quad x_i \geq y_i$$

$$\Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \geq f(y_1, \dots, y_n)$$

**Примеры:**

1.  $f_1(x) = \bar{x}$   $f_1 \notin M$ , так как  $f_1(1) = 0, f(0) = 1$ . 1 в аргументе функции  $\geq 0$ , но  $0 < 1$  в значение функции
2.  $f_2(x, y) = x \Rightarrow y$   $f_2 \notin M$ , так как  $f_2(1, 0) = 0, f(0, 0) = 1$ . 1, 0 в аргументе функции  $\geq 0, 0$ , но  $0 < 1$  в значение функции
3.  $f_3(x, y) = x + y$   $f_3 \notin M$ , так как  $f_3(1, 1) = 0, f(1, 0) = 1$ . 1, 1 в аргументе функции  $\geq 1, 0$ , но  $0 < 1$  в значение функции
4.  $f_4(x, y) \in M$
5.  $f_5(x, y) \in M$
6.  $f_6(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz \in M$  — функция голосования

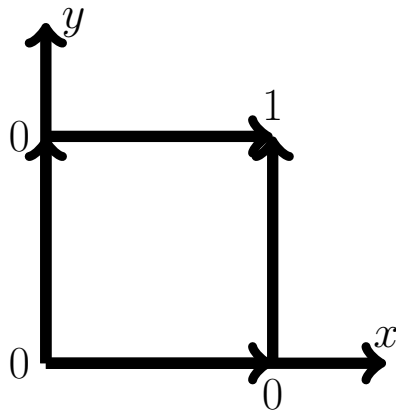
### Наглядный способ проверки монотонности

Функция монотонна, когда все стрелки:

1. из 0 в 0
2. из 0 в 1
3. из 1 в 1

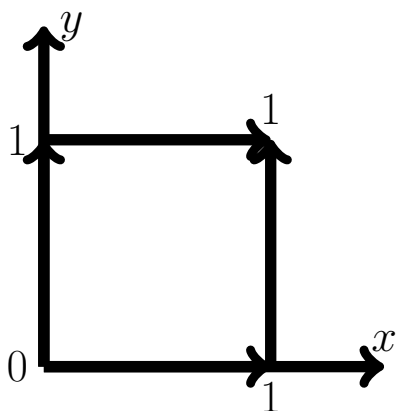
#### Пример. $x * y$

Данная функция монотонна



#### Пример. $x \vee y$

Данная функция тоже монотонна



**Утверждение.**  $M$  – замкнут

То есть если  $f_i$  – монотонна, то  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(f_2(\dots) \dots f_m(\dots))$

$f(y_1, \dots, y_n) = f_1(f_2(\dots) \dots f_m(\dots))$

$x_1 \dots x_n \geq y_1 \dots y_n$

То где-то в глубине  $x_i$  будут  $\geq y_i \Rightarrow$  внутри будут получаться значения функции  $f_i(x \dots) \geq f_i(y \dots)$

Замечание. Классы из примеров выше все неполные

**Пример.**  $L = L^* \quad x \cdot y$

Всегда были примеры функций не из классов

$xy \notin L$

$xy \notin S$

$\bar{x} \notin T_0$

$\bar{x} \notin T_1$

$\bar{x} \notin M$

### 1.1.17 Теорема Поста

**Теорема. Поста**

(Позволяет понять, полный класс или нет)

$K$  – полный тогда и только тогда, когда

$\exists f_1 \in K : f_1 \notin T_0$

$\exists f_2 \in K : f_2 \notin T_1$

$\exists f_3 \in K : f_3 \notin L$

$\exists f_4 \in K : f_4 \notin M$

$\exists f_5 \in K : f_5 \notin S$

**Пример.**  $K = \{\bar{x}; x + y\}$

$\bar{x} \notin T_0, T_1$

но  $\bar{x} \in L$  и  $x + y \in L \Rightarrow$

$K$  – не полный

**Пример.**  $K = \{\bar{x}; x \vee y\}$

$\bar{x} \notin T_0, T_1, M$

$\bar{x} \in S, L$  но  $x \vee y \notin L, S \Rightarrow$

$K$  – полный по теореме Поста

**Доказательство в одну сторону:**

$\Rightarrow$  если  $K$  полный, от противного

Пусть все  $f \in K$  отличие, что  $f \in T_0$

$\Rightarrow K \subset T_0$

$\Rightarrow K^* \subset T_0^*$

$\Rightarrow K^* \subset T_0 \not\subseteq \alpha$ , где  $\alpha$  – все функции

$\Rightarrow \leq \alpha$

**Доказательство в другую сторону:**

Будем выражать через  $f_1; f_2; f_3; f_4; f_5$  все другие возможные

Достаточно будет выразить только  $\{\bar{x}, x \cdot y\}$  (тогда есть  $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$ )

$\Rightarrow$  есть все ДНФ.

**Шаг 1:** Давайте выразим 0, 1,  $\bar{x}$

Берем  $f_1(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1, x = 0 (f_1 \notin T_0) \\ 0 \text{ or } 1; x = 1 \end{cases} = 0 \text{ или } \bar{x}$

$f_2(x_1, x_2 \dots x_n) \notin T_1 = \begin{cases} 0 \text{ or } 1, x = 0 \\ 0; x = 1 \end{cases} = \bar{x} \text{ или } 0$

**Пояснение:**

$f(x, y, z) = x \Rightarrow yz$   $f(x, x, x) = 1$

$f(0, 0, 0) = 1, f \notin T_0$

$f(x, x, x) = 1$

$0 = f_2(x_1 \dots x_n), 1 = f_1(x_1, \dots x_n)$

$0 = f_2(x_1, \dots x_n), \bar{x} = f_1(x_1, \dots x_n), 1 = \bar{0} = f_1(f_2(x_1, \dots x_n), f_2(x_1, \dots x_n), \dots)$

$1 = f_2(x_1, \dots x_n), \bar{x} = f_1(x_1, \dots x_n), f_2(f_1(x_1, \dots x_n), f_1(x_1, \dots x_n), \dots)$

$\bar{x} = f_2(x_1, \dots x_n), \bar{x} = f_1(x_1, \dots x_n)$

Берем  $f_4 \notin M$ , где нарушена монотонность, для примера:

$f_4(x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n > y_n) = 0_x \neq 1_y$

$f_4(x_1, x_2, \dots x_n)$  переменная  $X$ , где  $>$

$f_4(x, y, z, t) = xy + zt \notin M$

$f_4(1, 1, 1, 1) = 0$   $f_4(1, 0, 1, 1) = 1$

$1, 1, 1, 1 \geq 1, 0, 1, 1$

$\Rightarrow f_4(1, x, 1, 1) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0; x = 1 \end{cases} = \bar{x}$



выражены  $f_1(x_1, x_2 \dots x_n) = \bar{x}$   $f_2(x_1, x_2, \dots x_n) = \bar{x}$   
 $f_5 \notin S$

получим с ней 1 и 0

Найдем нарушение  $S$

$$\overline{f^*(x_1 \dots x_n)} \neq f(x_1 \dots x_n)$$

$$\overline{f(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n)} \neq f(x_1, \dots x_n)$$

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n) = f(x_1, \dots x_n)$$

Рассмотрим  $f_5(x; \bar{x}; x; \dots \bar{x}) =$

(если  $x_i = 0 \Rightarrow x$   $x_i = 1 \Rightarrow \bar{x}$ )

$$= \begin{cases} f(x_1, x_2 \dots x_n) \text{ when } x = 0 \\ f(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) \text{ when } x = 1 \end{cases} = 0 \text{ или } 1$$

**Пример.**  $f(x, y, z) = x \vee yz \notin S$

нужно найти  $f(1, 0, 0) = f(0, 1, 1)$  (нарушение  $S$ )

$$\text{Рассмотрим } f(\bar{x}, x, x) = \begin{cases} f(1, 0, 0) = 1 & x = 0 \\ f(0, 1, 1) = 1 & x = 1 \end{cases} = 1$$

$$f(\bar{x}, x, x) = \bar{x} \vee xx = \bar{x} \vee x = 1$$

если получили 0, то  $\bar{0} = 1$  и наоборот

## Шаг 2:

Имеем 0, 1,  $\bar{x}$

Надо  $x \cdot y$  выразить

Берем  $f_3 \in L$

$$f_3(x_1, \dots x_n) = \dots + \dots + \dots + x_i y_j + \dots$$

Подставим 0; 1;  $x_i$ ;  $x_j$

Возьмем самое короткое слагаемое с  $x_i \quad x_j$

Для определенности  $\exists$  это  $x_1 \cdot x_2$

$$f_3(x_1 \dots x_n) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 x_3 \dots x_k + \dots$$

подставим  $x_3 \dots x_k = 1$

остальные  $x_{k+1} \dots = 0$

$$f(x_1, x_2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots 0) = C_1 + x_1 x_2 + C_2 x_1 + C_3 x_2 + 0 \cdot x_1 x_2 =$$

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \\ 1 + x_1 x_2 \\ 1 + x_1 + x_1 x_2 \\ 1 + x_2 + x_1 x_2 \\ x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 + x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 + x_1 x_2 \end{cases}$$

если  $g(x_1, x_2) = 1 + x_1 x_2$

$\overline{g(x_1, x_2)} = x_1 x_2$  – отрицание уже есть  
 если  $g(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_1 x_2 = 1 + x_2(1 + x_2)$   
 тогда  $g(x_1, \overline{x_2}) = 1 + (1 + x_1(1 + 1 + x_2)) = x_1 x_2$   
 все случаи:  $g(x_1, x_2) = C_1 + (x_1 + C_2) \cdot (x_2 + C_3)$

**Пример.**  $f_3(x, y, z) = x + yz$   
 $f_3(0, x, y) = 0 + xy = xy$

**Пример.**  $f_3(x, y, z) = x \Rightarrow yz = 1 + x + xyz$   
 $f_3(x, y, 1) = 1 + x + xy = 1 + x(1 + y)$   
 $f_3(x, \overline{y}, 1) = xy$   
 можно было  
 $f_3(1, x, y) = 1 + 1 + xy = xy$

**Пример.**  $f(x, y, z) = x \Rightarrow yz$

$g(x, y) = x + y$   
 $\notin T_0, T_1, L, M, S$

Выражаем

$f(x, x, x) = x \Rightarrow xx = 1$

$g(x, x) = x + x = 0$

Случай 0, 1, надо  $\overline{x}$

Выражаем  $\overline{x}$

$g(x, y) \notin M$

$g(1, 0) = 1$

$g(1, 1) = 0$

$\Rightarrow g(1, x) = \overline{x}$

$\Rightarrow \overline{x} = g(f(x, x, x), x)$

Выражаем  $x \cdot y$

$f(x, y, z) = xx \Rightarrow yz = 1 + x + xyz$

Догадаемся, что  $f(1, x, y) = x \cdot y$

Ответы:  $\overline{x} = g(f(x, x, x), x)$   $x \cdot y = f(1, x, y)$

Полные наборы из одной функции (от двух переменных)

$\{f(x, y)\}$  – полный

По теореме Поста:  $f(x, y) \notin L, M, S, T_0, T_1$

Таблица истинности для f:

1 строчка :

ху  $f_1 f_2 f_3 f_4$

00 1 1 1 1  $\notin T_0$

4 строчка :

ху  $f_1 f_2 f_3 f_4$

11 0 0 0 0  $\notin T_1$

$xy$	$f1$	$f2$	$f3$	$f4$
00	1	1	1	1
01	0	0	1	1
10	0	1	0	1
11	0	0	0	0

$$f_2(x, y) = \bar{y} \in L$$

$$f_3(x, y) = \bar{x} \in L$$

$\Rightarrow f_2, f_3$  не подходят

$$f_1 = \overline{x \vee y} \quad f_4 = \overline{x * y}$$

$$f_1^* = f_4 \quad f_1, f_4 \notin S$$

$$f_1 = \overline{x + y + xy} = 1 + x + y + xy \notin L$$

$$f_4 = 1 + xy \notin L$$

$$f_{1,4}(0, 0) = 1 \notin M$$

$$f_{1,4}(1, 1) = 0 \notin M$$

Ответ:  $\{\overline{x \vee y}\}$  - полный набор

$\{x \downarrow y\}$  - стрелка пирса

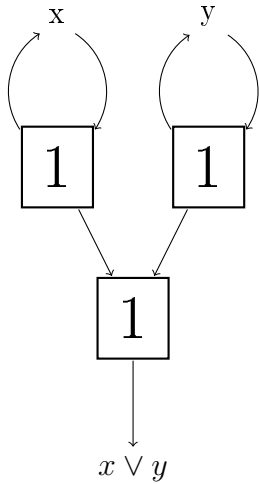
$\{x|y\}$  штриф шеффера

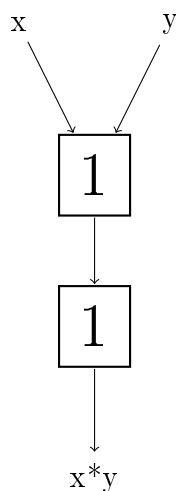
$$x|x = \bar{x}$$

$$x|y = \overline{x * y} \Rightarrow \overline{x|y} = x * y \Rightarrow (x|y)|(x|y) = x * y$$

$$x/y = \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y} \Rightarrow \bar{x}/\bar{y} = x \vee y$$

$$\Rightarrow (x/x)/(y/y) = x \vee y$$





### 1.1.18 Автоматическое доказательство теорем

Задача выполнимости: дана функция в КНФ

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)$$

Эффективных алгоритмов для этой задачи нет

...

-всегда 0

-бывает 1

### 1.1.19 Логическое следствие

**Определение.**  $P_1(x_1...x_k)...P_n(x_1...x_k)$

$n + 1$  лог. функций (утверждений)

$Q(x_1...x_k)$

$Q$  - логическое следствие  $P_1...P_n$ , если для всех наборов значений

$x_i$ , когда все  $P_j(x_i...x_k) = 1$

$Q(x_1...x_k)$  тоже 1

**Пример.**  $P_1(x, y, z)^{k=3}(x + y) \Leftrightarrow 0$

$$P_2(x, y, z) = (y + z) \Leftrightarrow 1$$

$$Q(x, y, z) = (x + z) \Leftrightarrow 1$$

$$0 + 1 = x + y + y + z = x + zy + z = 1$$

Есть 2 набор (001) и (110), где  $P_2$  - истина

$Q$  должно быть тоже истина.

*Замечание.*  $Q$  - логическое сложение  $P_1, P_2...P_n$ , по смыслу это теорем

**Теорема.** Известно  $P_1, P_2...P_n$ , тогда  $Q$

$xyz$	$P_1$	$P_2$	$Q$
000	1	0	0
001	1	1	1
010	0	1	0
011	0	0	1
100	0	0	1
101	0	1	0
110	1	1	1
111	1	0	0

**Определение.**  $Q$  – логическое следствие  $P_1..P_n$  тогда и только тогда, когда  $P_1 \& P_2 \& ... \& P_n \Rightarrow Q$  - тождественно 1 эквивалентно  $(P_1, P_2...P_n \Rightarrow Q = 1)$

Проверим:  $((x+y) \Leftrightarrow 0)((y+z) \Leftrightarrow 1) \Rightarrow ((x+z) \Leftrightarrow 1) = \overline{x+y} * (y+z) \Rightarrow (x+z) = (1+x+y)(y+z) \Rightarrow (x+z) = 1 + (1+x+y)(y+z) + (1+x+y)(y+z)(x+z) = 1 + y + z + xy + xz + yy + yz + yx + yz + zx + zz + xyx + xyz + xzx + xzz + yux + yuz + yzx + yzz = 1$

**Доказательство:** по ТИ

$x..x_k$	$P_1$	$P_2$	$..$	$P_n$	$Q$	$P_1P_2..P_n \Rightarrow Q$
00..0						
.	1	1	1	1	1	$1 \Rightarrow 1 = 1$
.						
.						
.	0	1	1	0	?	$0 \Rightarrow ? = 1$
11..1						$\nearrow$ все 1

$\Rightarrow$  аналогично, по ТИ

$x_1..x_k$	$P_1P_2..P_n \Rightarrow Q$	
1	$1, 0 \Rightarrow 1$	$\leftarrow P_i$ есть 0
1	$1, 1 \Rightarrow 1$	$\leftarrow$ все $P_i, Q = 1$
1	$1, 0 \Rightarrow 0$	
1	.	
1	$1, 0 \Rightarrow 0$	

**Следствие:**  $Q$  - логическое следствие  $P_1..P_n$ , тогда и только тогда, когда  $P_1P_2..P_n\bar{Q}$  тождественно ложь

*Замечание.* по сути - это доказательство от противного

$$P_1 P_2 \dots P_n \Rightarrow 1$$

$$P_1 P_2 \dots P_n \Rightarrow Q = 0$$

$$P_1 \dots P_n \vee Q = 0 \quad \bar{a} \vee b = \bar{a} * \bar{b}$$

$$P_1 \dots P_n * \bar{Q} = 0$$

$$P_1 \dots P_n \bar{Q} = 0 \text{ чтд}$$

Свойства логического следствия:

1.  $Q = 1$  логическое следствие  $P_1 \dots P_n$

$$\text{Доказательство: } P_1 \dots P_n \bar{Q} = P_1 P_2 \dots P_n \bar{1} = P_1 P_2 \dots P_n * 0 = 0$$

2.  $Q = 0$  логическое следствие  $P_1 \dots P_n$  Тогда  $P_1 * P_2 \dots P_n = 0$

$$\text{Доказательство: } 0 = P_1 \dots P_n \bar{Q} = P_1 \dots P_n \bar{0} = P_1 \dots P_n * 1 = P_1 \dots P_n \text{ чтд}$$

2'.  $Q = 0$  логическое следствие  $P_1 \dots P_n$  тогда  $\forall$  набора значений  $x_1, x_2 \dots x_n$

можно найти  $P_i = 0$

$$\text{Доказательство: } P_1, P_2 \dots P_n = 0 \Rightarrow \text{один из } P_i = 0 \text{ чтд}$$

3.  $Q_1$  - логическое следствие  $P_1 \dots P_2$

$Q_2$  - логическое следствие  $P_1 \dots P_n Q_1$

$Q_i$  - логическое следствие  $P_1 \dots P_n Q_1 \dots Q_{i-1}$  тогда  $Q_i$  - логическое след-

ствие  $P_1 \dots P_n$

$$\text{Доказательство: } P_1 \dots P_n \bar{Q}_1 = 0 \text{ (следует из } Q_1(1))$$

$$P_1 \dots P_n Q_1 \bar{Q}_2 = 0 \text{ (следует из } Q_2) \Rightarrow$$

$$P_1 \dots P_n \bar{Q}_2 = 0$$

$$(1) \Rightarrow P_1 P_2 \dots P_n = 0$$

или

$$\bar{Q}_1 = 0 \Leftrightarrow Q = 1$$

$$P_1 \dots P_n \bar{Q}_2 = 0$$

$$P_1 \dots P_n Q_1 \bar{Q}_2 = 0 \Rightarrow P_1 \dots P_n Q_2 = 0 \text{ чтд}$$

**Определение.**  $D_1$  - дизъюнкты  $D_1 = \mathbf{V} \vee D'_1$

$D_2$ , где  $D_2 = \mathbf{V} \vee D'_2$

(дизъюнкты с одним литералом, отличающимся отрицанием)

Тогда,  $\text{Res}(D_1, D_2) = D'_1 \vee D'_2$  резольвенте

$$\text{Пример. } \frac{x \vee y \vee z}{\bar{x} \vee z} \left| Y \vee Z \vee Z = Y \vee Z \right.$$

$$\frac{x \vee \bar{y} \vee z}{x \vee y \vee T} \left| X \vee Z \vee X \vee T = x \vee Z \vee T \right.$$

$$\frac{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}}{X \vee Y \vee T} \left| \bar{Y} \vee \bar{Z} \vee \bar{Y} \vee \bar{T} = 1 \right.$$

$$\frac{\bar{x} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}}{X \vee Y \vee T} \left| \bar{X} \vee \bar{Z} \vee X \vee T = 1 \right.$$

$$\frac{X \vee Y}{\bar{Y}} \Big| X$$

(особый случай)(часть определения)

$$\frac{Y}{\bar{Y}} \Big| \square = 0$$

$$\frac{X \vee Y \vee Z}{Y \vee T \vee \bar{U}} \Big|$$

**Определение.**  $\text{Res}(D_1, D_2)$  - это логическое следствие  $D_1$  и  $D_2$

**Доказательство :**

$D_1 = \mathbf{V} \vee D'_1$	$D'_2 = \mathbf{V} \vee D'_2$	$D'_1 \vee D'_2$
1	1	

если  $D_1 = 1, D_2 = 1$ , то  $D'_1 \vee D'_2$

тоже должно быть 1

если  $\mathbf{V} = 0$

$$1 = D_1 = 0 \vee D'_1 = D'_1 = 1 \Rightarrow D'_1 \vee D'_2 = 1$$

если  $\mathbf{V} = 1$

$$1 = D_2 = \bar{1} \vee D'_1 = D'_2 \Rightarrow D'_1 \vee D'_2 = 1$$

### 1.1.20 Метод резолюций

Дано:  $P_1 P_2 \dots P_n, Q$ , доказать, что  $Q$  -

Р:

Шаг 0. запишем  $P_i \bar{Q}$  в КНФ

тогда  $P_1, P_2 \dots P_n, \bar{Q}$  тоже будет иметь КНФ

**Пример.**  $P_1 = x + y \Leftrightarrow 0$

$$P_2 = y + z \Leftrightarrow 1 \bar{Q} = \overline{x + z} \Leftrightarrow \bar{1} = (x \vee z)(x \vee \bar{z})$$

т.е.  $P_1 P_2 \bar{Q} =$

$$(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})(y \vee z)(\bar{x} \vee z)(x \vee \bar{z})$$

$$D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5 \quad D_6$$

считаем, что у нас дизъюнктов:

$$\bar{x} \vee y \quad \bar{x} \vee \bar{y} \quad \bar{y} \vee \bar{z} \quad y \vee z \quad \bar{x} \vee z \quad x \vee \bar{z}$$

$$D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5 \quad D_6$$

Шаг 1,2,3...

Считаем резольвенты, пока не получим  $\square$

**Пример.** 
$$\begin{array}{l} D_1 = \bar{x} \vee y \\ D_2 = \bar{y} \vee \bar{z} \end{array} \left| \bar{x} \vee \bar{z} = D_7 \right.$$

$$\begin{array}{l} D_2 = x \vee \bar{y} \\ D_4 = y \vee z \end{array} \left| x \vee z = D_8 \right.$$

$$\begin{array}{l} D_7 = \bar{x} \vee \bar{z} \\ D_5 = \bar{x} \vee z \end{array} \left| x = D_9 \right.$$

$$\begin{array}{l} D_8 = x \vee z \\ D_6 = y \vee \bar{z} \end{array} \left| \bar{x} = D_9 \right.$$

$$\begin{array}{l} D_8 = x \vee z \\ D_6 = x \vee \bar{z} \end{array} \left| x = D_{10} \right.$$

$$\begin{array}{l} D_9 = \bar{x} \\ D_{10} = x \end{array} \left| \square \right.$$

$\square$  (пустой дизъюнкт получен)

### Лекция 9:

**Утверждение.** Метод резолюций корректен ( $Q$  – логическое следствие  $P_1, P_2, \dots, P_n$ )

Если вывести  $0 \Rightarrow Q$  – действительно логическое следствие  $P_1, P_2, \dots, P_n$

#### Доказательство:

$P_1, P_2, \dots, P_n$  – исходные дизъюнкты  $P_1, P_2, \dots, P_n$   $\bar{Q} = D_1 \dots D_N$  каждый следующий  $D_i (i > N)$  – логическое следствие двух прошлых дизъюнктов

Пусть  $x_1, \dots, x_m$  – значения переменных, на которых  $P_1, P_2, \dots, P_n$   $\bar{Q} = 1 \Rightarrow D_1 \dots D_N = 1$

$\Rightarrow D_1 = 1, D_2 = 1 \dots D_N = 1, i > N = 1$

$\Rightarrow 0 = 1$  – невозможно, так как  $0 = 0$

**Утверждение.** Полнота метода резолюций. Если  $D_1, D_2 \dots D_N = 0$ , где  $D_i$  – дизъюнкт, то между резолюций может вывести 0

*Замечание.* Метод резолюций не всегда позволяет получить 0 быстро, бывает неудачные  $D_i$  шагов примерно  $2^N$

#### Доказательство:

Индивидуально по количеству переменных  $x_1 \dots x_m, 0 \dots m = 1$

Какие дизъюнкты из первой переменной  $x, \bar{x}, x \vee \bar{x} = 1$  среди  $D_1, D_2 \dots D_N$  есть дизъюнкты  $x$  и  $\bar{x} \Rightarrow [x, \bar{x}] = 0$

Переход  $m - 1 \rightarrow m$ . То есть для  $m - 1$  переход можно всегда вывести 0

$D_+$  – то есть дизъюнкты, в которых нет  $\bar{x}_m$

$D_-$  – то есть дизъюнкты, в которых нет  $x_m$



**Пример.**  $(x_1 \vee \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_2} \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

$$D_+ = [(x_1 \vee \overline{x_2}), (x_2 \vee x_3)]$$

$$D_- = [(x_1 \vee \overline{x_2}), (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}), (\overline{x_2} \vee \overline{x_3})]$$

Теперь пусть  $x_m = 0$  рассмотрим  $D_+ \cdots \vee x_m = 0$

$$D_- \cdots \vee \overline{x_m} = 1$$

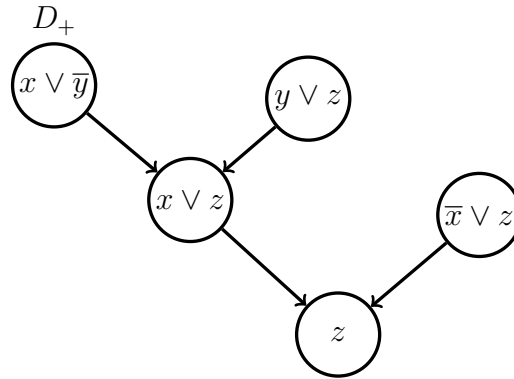
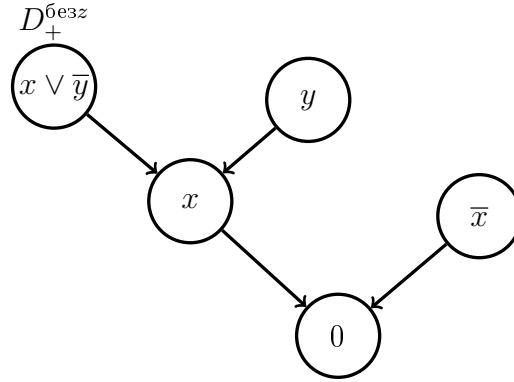
То есть все  $D_+ \in 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow D_1$  несовместимы, то есть  $D = 0, D \in$

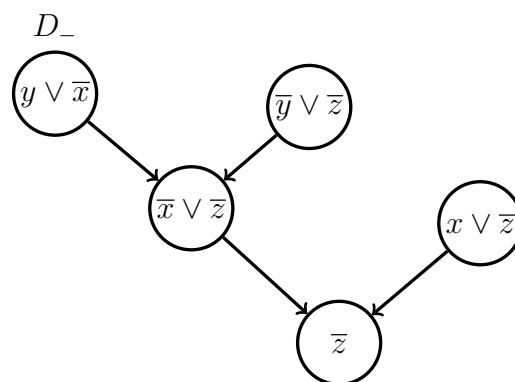
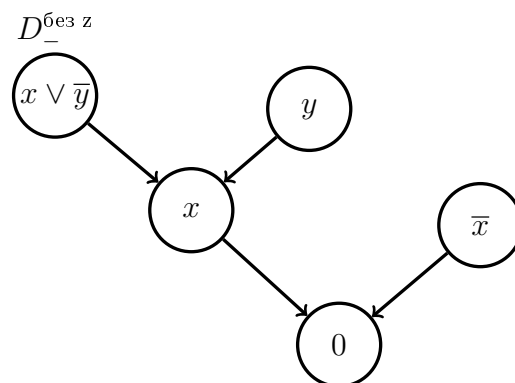
$D_+$

Выведем из  $D_+^{\text{без}x_m} = 0$

Тогда, если вернуть  $x_m$ ,  $D_+$  выводит 0 или  $x_m$ . Аналогично, если  $x_m = 1$ ,  $D_-$  выводит 0 или  $\overline{x_m}$ . Если уже получены 0, то все. Если получены  $x_m$  и  $\overline{x_m} \Rightarrow$

$$[x_m, \overline{x_m}] = 0$$



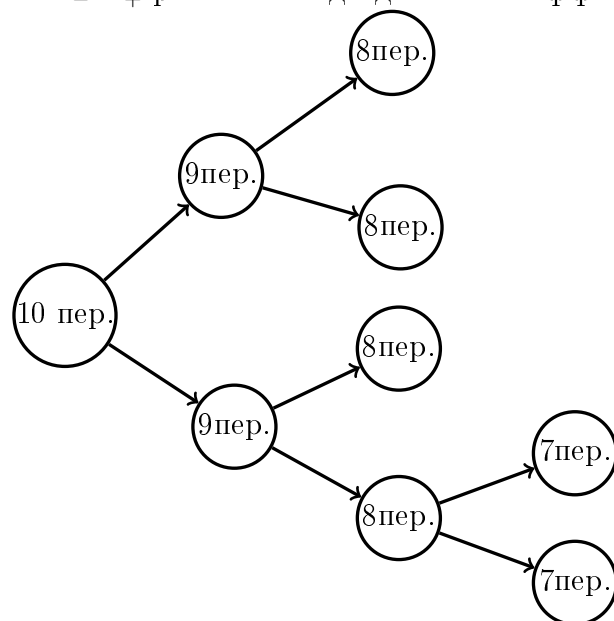


### Как доказывать?

Способ 1:

Методом резолюций, как в теореме.

$D$   $D_{-}$   $D_{+}$  решаем 2 подзадачи – не эффективно



и так далее... Всего их будет 512 штук.

Способ 2: насыщение по уровням

Каждый с 0

1. с каждым слагаемым
2. каждый с исходным шагом

## 1.2 Исчисление предикатов

**Определение.** Формула исчисления предикатов

1. Вводим множество  $\sum_f$  – множество функций символов
2. Вводим множество  $\sum_c$  – множество констант (не обязательно функции от 0 переменных)
3. Вводим множество  $\sum_p$  – предикатные символы  $P(x)$
4. Вводим множество предикатных переменных  $\sum_x$

**Термины:**

1.  $x$  – переменная
2.  $f$  – символ  $(f(t_1, \dots, t_n))$  – где  $t_1, \dots, t_n$  – термины

### 11 Лекция

#### Напоминание

Что такое функция исчисления предикатов

$\forall x(\exists y P(f(x), y) \vee Q(g(x, c)))$

$f, g, c$  – функции

$(f(x), y), (g(x, c))$  – атомарные формы

$x, f(x), (f(x), y), x, c, g(x, c)$  – термы

$P, Q$  – предикаты

$\forall \quad \exists$  – кванторы

**Определение.** Сигнатура – это множество функциональных символов и предикатов

$$f^1, g^2, e^0, P^2, Q^1$$

**Определение.** Интерпретация – множество + смысл предикатов и функций

В интерпретации функция – это предикат от несвязанных переменных

$\forall x(x \geq x)$  – все переменные связаны = 1

$\forall(x \geq y)$  –  $y$  не связанная переменная =  $\begin{cases} 1 & y = 1 \\ 0 & y \neq 1 \end{cases}$

в  $M = \mathbb{N}$

**Пример.**  $M = \mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$  функции = +

$x > y = \exists k(x = y + k)$

$x \geq y = x > y \vee x = y = \exists k(x = y + k) \vee x = y$

$x$  – четные =  $\exists k(x = k + k)$

$x = 1 = \forall y(y \geq x) = \forall y(\exists k(y = x + k) \vee y = x)$

Добавим в функции  $\cdot$

$x:y = \exists k(x = y \cdot k)$

---

$x \in \mathbb{P}$  – простое число =  $\exists y[(x:y) \cdot (y > 1) \cdot (y < x)](x > 1) =$   
 $= \forall y(x:y \Rightarrow y = x \vee y = 1)(x > 1)$

**Определение.** Пусть  $F, G$  – функции исчисления предикатов

$F$  – тождественно равно  $G$  ( $F = G$ ), если их значения совпадают в  $\forall$  интерпретации

**Пример.**  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) = \forall x(\overline{P(x)} \vee Q(x))$

$F = G$

Данные функции тоже равны  $a \Rightarrow b = \overline{a} \vee b$

*Замечание.* Если функции отличаются заменой, верной в логике исчислений высказываний, то они равны

**Пример.**  $\overline{\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)} = \overline{\exists x P(x)} \cdot \overline{\exists x Q(x)}$

### 1.2.1 Операции преобразования

1. Переименование переменной, если  $P$  не содержит  $y$

$$\forall x P(x) = \forall y P(y) \quad \exists x P(x) = \exists y P(y)$$

$$\exists k(x = y + k) = \exists l(x = y + l) \neq \exists x(x = y + x) \neq \exists y(x = y + y)$$

$$\exists x \forall y P(x, y) = \exists x \forall z P(x, z) \neq \exists x \forall x P(x, x) \text{ – некорректная функция}$$

2.  $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$

$$\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$$

**Доказательство для  $\forall$**

Рассмотрим интерпретацию  $I$

левая функция истинна  $\Leftrightarrow P(x, y) = 1 \quad \forall x, y \in M$

Правая функция истинна  $\Leftrightarrow P(x, y) = 1 \quad \forall x, y \in M$

*Замечание.*  $\exists x \forall y P(x, y) \neq \forall y \exists x P(x, y)$

$IM = \mathbb{R}, P(x, y) : x > y$

$\forall y \exists x (x > y) = 1$

$\exists x \forall y (x > y) = 0$

3.  $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$$

**Доказательство для  $\forall$**

$IM, PM \rightarrow \{0, 1\}$

Если слева 0

$$\overline{\forall x P(x)} = 0 \Leftrightarrow \forall x P(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(x) = 1, x \in M$$

$$\Leftrightarrow \overline{P(x)} = 0, x \in M$$

$$\Leftrightarrow \exists x \overline{P(x)} = 0$$

4.  $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) = \exists x (P(x) \vee Q(x))$

$$\forall x P(x) \cdot \forall x Q(x) = \forall x (P(x) \cdot Q(x))$$

**Доказательство для  $\exists$**

Возьмем  $IM, P\mathbb{R}$

$$\text{слева} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x P(x) = 0 \\ \exists x Q(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, x \in M \\ Q(x) = 0, x \in M \end{cases} \Leftrightarrow P(x) \vee Q(x) = 0, x \in M \Leftrightarrow$$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) = 0$$

аналогично для  $\forall$

*Замечание.* Для другой связки

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \neq \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

Рассмотрим  $I : M = \mathbb{N}$

$P(x)$  – х четные

$Q(x)$  – х нечетные

$$\forall x P(x) = 0$$

$$\forall x Q(x) = 0$$

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) = 0 \vee 0 = 0$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) = 1$$

5. похожа на 4

$$\exists x P(x) \cdot Q = \exists x (P(x) \cdot Q)$$

$$\exists x P(x) \vee Q = \exists x (P(x) \vee Q)$$

$$\forall P(x) \cdot Q = \forall x (P(x) \cdot Q)$$

$$\forall x P(x) \vee Q = \forall x (P(x) \vee Q)$$

**Доказательство**

$$I : M, P, Q$$

$$a \in M$$

$$\text{слева } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x P(x) = 1 \\ Q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(a) = 1 \\ Q = 1 \end{cases} \Rightarrow P(a) \cdot Q = 1$$

$$\Rightarrow \exists x (P(x) \cdot Q) = 1$$

Если слева 0

$$\text{если } Q = 0 \Rightarrow P(x) \cdot Q = \exists x (P(x) \cdot Q) = 0$$

$$\text{если } Q = 1 \Rightarrow$$

$$\exists x P(x) = 0$$

$$\Rightarrow P(x) = 0, x \in M$$

$$\Rightarrow P(x) \cdot Q = Q, x \in M$$

$$\Rightarrow \exists x (P(x) \cdot Q) = 0$$

6.  $\exists x P = P$

$$\forall x P = P$$

**Пример.**  $\forall x P(x, f(x)) \Rightarrow Q$

$$\exists w (\forall x P(x, f(x)) \Rightarrow Q)$$

### 1.2.2 Нормальные формы

**Мн Ж, КНФ, ДНФ**

**Определение.** Предваренная нормальная форма  
 Формула исчисления предикатов имеет ПНФ, если

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n(Matrix)$$

$$Q_i = \forall \text{ или } \exists$$

Простыми словами, ПНФ – это когда все кванторы стоят впереди

**Пример.**  $\forall x \exists y (P(x, y) \Rightarrow Q(y))$

**Пример.**  $\forall x (P(x, y, z) \vee Q(c))$

**Пример.**  $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

**Пример.**  $\forall x (\exists y P(y) \vee Q(x)) = \forall x \exists y (P(y) \vee Q(x))$

**Теорема.** Любая формула исчисления предикатов имеет ПНФ

#### Алгоритм приведения

1. Все связки кроме  $\&, \vee, \neg$  заменяются на  $\&, \vee, \neg$

$$a \Rightarrow b = \bar{a} \vee b$$

$$a \Leftrightarrow b = (a \vee \bar{b})(\bar{a} \vee b)$$

2. Все отрицания внутри кванторов

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$$

3. По свойству 6 вынести все кванторы в начало, возможно, заменой переменных

**Пример.**  $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$   
 $\neq \forall x (P(x) \vee Q(x))$   
 $= \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) =$   
 $= \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) =$   
 $= \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$  – ПНФ