Математическая логика и теория алгоритмов

Посов Илья Александрович

запись конспекта: Блюдин Андрей и Хаматов Вадим

Содержание

1 Математическая логика

1.1 Исчисление высказываний

1.1.1 Основные понятия

Определение. Логическая функция — это множество из 2 элементов. Также, логической функцией называют множество логических значений
$B = \{0, 1\}$, где 0 — это ложь (false), а 1 — это истина (true)

Определение. Логическая функция от n переменных

$$f : B^n \to B$$

Замечание. Часто логические функции вводят как перечисление возможных аргументов и значений функции при этих аргументах

Пример. Введем функцию $f(x, y)$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 1: Таблица истинности для $f(x, y)$

Эту же функцию можно задать функцией $f(x, y) = max(x, y)$

Утверждение. *Функция от n переменных может быть* $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

x_1	x_2	...	x_n	f($x_1, x_2, \ldots, x_n$)
0	0	...	0	0 или 1
...	...	...	...	0 или 1
1	1	...	1	0 или 1

Таблица 2: Таблица истинности для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

При этом количество всех возможных наборов аргументов равняется 2^n, а количество всех возможных функций при всех возможных наборах аргументов равняется 2^{2^n}

Следствие. *Посчитаем количество таких функий для разных n*
$n = 1$ $2^2 = 4$ *функций* $f(x)$
$n = 2$ $2^{2^2} = 16$ *функций* $f(x, y)$
$n = 3$ $2^{2^3} = 2^8 = 256$ *функций* $f(x, y, z)$

1.1.2 Функции от 1 переменной (их определения)

Пример. Перечислим все возможные функции от 1 переменной

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Данные функции имеют значение:
$f_1(x) = 0$ — функция 0
$f_2(x) = x$ — функция x
$f_3(x) = !x, \bar{x}, \neg x$, not x — функция отрицания (не x)
$f_4(x) = 1$ — функция 1

1.1.3 Функции от 2 переменных (их определения)

Пример. Перечислим все возможные функции от 2 переменных

x	y	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 3: Таблица истинности для $f(x, y)$

Продолжение:

x	y	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$	$f_{11}(x)$	$f_{12}(x)$	$f_{13}(x)$	$f_{14}(x)$	$f_{15}(x)$	$f_{16}(x)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 4: Таблица истинности для $f(x, y)$

Перечислим основные значения функций:
$f_2(x, y)$ — это конъюнкция или "лочическое и"или логическое умножение $(xy, x\&y, x \wedge y)$
$f_7(x, y)$ — это исключающее или $(x+y, xXORy, x \oplus y)$, также данную функцию можно ассоциировать как $(x + y)mod2$

$f_8(x,y)$ — это логическое или, но ее можно также записать как $max(x,y)$ $(x|y, x \vee y)$

$f_{10}(x,y)$ — это эквивалентность $(x \Leftrightarrow y, x \equiv y, x == y)$

$f_{14}(x,y)$ — это импликация $(x \Rightarrow y, x \rightarrow y)$

Импликация работает так, что истина следует из чего угодно:

лешия не существует $\Rightarrow$ русалок не существует $= 1$ $(1 \Rightarrow 1 = 1)$

допса скучная $\Rightarrow$ русалок не существует $= 1$ $(0 \Rightarrow 1 = 1)$

русалки существуют $\Rightarrow$ драконы существуют $= 1$ $(0 \Rightarrow 0 = 1)$

x $\Rightarrow$ y $= 0$ только если x $= 1$, а y $= 0$

$f_{12}(x,y)$ — это обратная импликация $(x \Leftarrow y = y \Rightarrow x)$

$f_9(x,y)$ — стрелка Пирса $(x \downarrow y = \overline{x \vee y})$

$f_{15}(x,y)$ — штрих Шеффера $(x|y = \overline{xy})$

$f_3(x,y)$ — запрет по y $(x > y = \overline{x \Rightarrow y})$

$f_1(x,y)$ — 0

$f_4(x,y)$ — x

$f_5(x,y)$ — запрет по x $(x < y = \overline{x \Leftarrow y})$

$f_6(x,y)$ — y

$f_{11}(x,y)$ — не y $(\neg y)$

$f_{13}(x,y)$ — не x $(\neg x)$

$f_{16}(x,y)$ — 1

Определение. Логические выражения — способ задания логических функций с помощью переменных, цифр 0 или 1 и операций:

$\cdot \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad + \quad \equiv \quad | \quad \downarrow \quad < \quad >$

Пример. Примеры логических выражений:

$(x \vee y) =$

$(x \Rightarrow yz) \vee (y \equiv z)$

$(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y)$

Определение. Значения логического выражения можно записать **Таблицей истинности**

Пример. $f(x,y,z) = (x \vee y)z$

Замечание. Порядок строчек в таблеце истинности может быть любым, но лучше использовать как у двоичных чисел

Утверждение. *Таблицы истинности часто считают постепенно*

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y)z$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

1.1.4 Приоритеты операций

$$\neg$$

$$\cdot$$

$$\vee$$

$$+ \quad \equiv$$

$$\Rightarrow \quad \Leftarrow$$

$$| \quad \downarrow \quad < \quad >$$

Пример. Примеры приоритетов операций:
$\neg x \vee y = (\neg x) \vee y$
$x \vee yz = x \vee (yz)$
$x \Rightarrow y \vee z = x \Rightarrow (y \vee z)$

1.1.5 Алгебраические преобразования логических выражений

Определение. Алгебраические преобразования логических выражений — изменяем выражения по правилам, обычно в сторону упрощения

Пример. $(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y) = 1 \vee (1 \Rightarrow y) = 1$

Утверждение 1.

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Доказательство:

x	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

Утверждение 2. *При* $\vee$*:*

$$1 \vee x = 1$$

$$0 \vee x = x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

1.1.6 Таблица эквивалентных логических выражений

Утверждение. $x \vee y = y \vee x$ *- симметричность*

$x \vee 0 = x$
$x \vee 1 = 1$
$x \vee x = x$
$x \vee \overline{x} = 1$

Доказательство:

x	$\overline{x}$	$x \vee \overline{x}$
0	1	$0 \vee 1 = 1$
1	0	$1 \vee 0 = 1$

$xy = yx$
$x * 0 = 0$
$x * 1 = x$
$x * x = x$
$x * \overline{x} = 0$
$x + y = y + x$
$x + 0 = x$
$x + 1 = \overline{x}$
$x + x = 0$
$x + \overline{x} = 1$

Утверждение. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *- ассоциативность*

Ассоциативность означает,что порядок скобок не важен

Пример. $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$ - не симметричная функция

Доказательство:

x y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	1
1 1	1	1

Замечание. $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$

$x \Rightarrow 0 = \overline{x}$
$0 \Rightarrow x = 1$

Доказательство:

x	$x \Rightarrow 0$
0	$0 \Rightarrow 0 = 1$
1	$1 \Rightarrow 0 = 0$

$x \Rightarrow 1 = 1$
$1 \Rightarrow x = x$
$x \Rightarrow x = 1$
$x \Rightarrow \overline{x} = \overline{x}$
$\overline{x} \Rightarrow x = x$
$\overline{x} \Rightarrow y \Rightarrow z$ *договоримся, что это* $x \Rightarrow y(y \Rightarrow z) \neq (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
$x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$
$x \Leftrightarrow 0 = \overline{x}$
$x \Leftrightarrow 1 = x$
$x \Leftrightarrow x = 1$
$x \Leftrightarrow \overline{x} = 0$
$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z$ *- ассоциативно*

Утверждение. *Дистрибутивность*
$(x \vee y)z = xz \vee yz$
$(x + y)z = xz + yz$ *по таблице истинности*

x y z	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

$(x\&y) \vee z$ $(xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$
$(x \vee y)\&z = (x\&z) \vee (y\&z)$
$(x\&y) \vee z = (x \vee z)\&(y \vee z)$

Замечание. $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(y_1 \vee y_2) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_2 = x_1y_1 \vee x_2y_1 \vee x_3y_1 \vee x_1y_2 \vee x_2y_2 \vee x_3y_2$

$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = xy \vee xz \vee zy \vee zz = xy \vee xz \vee zy \vee z = xy \vee xz \vee zy \vee z * 1 = xy \vee z(x \vee y \vee 1) = xy \vee z$ сошлось

$x + y = \overline{x \Rightarrow} y$ - *смотри Таблицу истинности*
$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = x \Rightarrow y$

1.1.7 Многочлены Жегалкина

Замечание. Одну и ту же функцию можно записать по разному.

В алгебре: $f(x) = 1 + x = x + 1 = x + 5 - 4 = sin(x - x) + x = ...$
В логике: $f(x, y) = x \vee y = x \vee y \vee 0 = (x \vee y)(\overline{y} \vee y = x\overline{y} \vee y$ *(= - дистрибутивность)*

Многочлены Жегалкина для логической формулы

Определение. $f(x_1......x_n)$ - это многочлен с переменными xi, конспектами 0,1 и со степенями переменных $\leqslant 1$. Это многочлены от xi $\mathbf{Z_2}$

Пример. $f(x, y, z) = 1 + x + yz + xyz$
$1 + x$ $\qquad$ $xy + xyz$
$1 + xy$

Не многочлены
$1 + x + (y \vee z)$
$1 + x + z^2$ *нельзя степень 2*

Замечание. В общем случае многочлен от 1 переменной ($a_i = 0$ или 1)
$a_0 + a_1x$

от 2ух: $a_0 + a_1x + a2y + a3xy$

от 3ех: $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$

В общем случае $f(x1....x_n)$ $a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n + ax_1x_2 + ax_1x_3$ + ... (все пары переменных) + $ax_1x_2x_3 + ax_1x_3x_2$ $\leftarrow$все тройки перменных+$ax_1x_2x_3...x_n$

Определение. $\forall f(x_1...x_n)$ - логические функция $\exists!$ многочлен Жегалкина $g(x_1...x_n) : f = g$

Замечание. Всего 4 функции от 1ой переменной

$f(x) = 0 = \overline{x} = 0 + 0x$

$f(x) = 1 = 1 = 1 + 0x$

$f(x) = x = x = 0 + 1x$

$f(x) = \overline{x} = 1 + x = 1 + 1x$

Докозательство:

Определение. Разные многочлены - это разные логические функции т.е. $f(x_1...x_n = a_0 + ... + a_1x_1...x_n$

$g(x_1...x_n) = b_0 + ... + bx_1...x_n$

$\exists! : a_i \neq b_i$ различающийся

Доказательство:

Возьмем индекс с самым большик количеством переменных

$f(x, y, z) = 1 + x + xy + xyz = ... + 1x + Dy + Dz + 1xy$

$g(x, y, z) = 1 + y + z + xyz... + Dx + 1y + 1z$

для переменных этого слагаемого подставим 1 0xy

для остальных переменных : 0

[В примере $x = 1, y = 0, z = 0 : f(1, 0, 0)$ и $g(1, 0, 0)$]

и в f и в g все другие слагаемые равны 0

Теперь f(...) и g(...)

$f(...) = a_ix1x_2x_3 \neq b_ix_1x_2x_3 \Rightarrow f(x_1...x_n) \neq y$

Доказательство:

Проверим, что многочленов Жегалкина столько, сколько функций:

Посчитаем

$a_0 + a_1x_1 + ... + a_1x_1x_2...x_n$

Сколько слагаемых:

1) 1 слагаемых без переменных

n слагаемых с переменной

$a_1x_1 + ... + a_nx_n$

C_n^2 *- слагаемых с 2 - мя переменными*

C_n^3 *- слагаемых с 3 - мя переменными*

C_n^n *- слагаемых с n переменными*

Всего : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ...C_n^n = 2^n((1 + 1)^2)$

Пример. $a_0 + a_1x$ - 2 слагаемых

$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy - 2^2 = 4$ слагаемых

2) Все слагаемых имею вид: $x_1, x_2, x_3...x_n$ (0 или 1) - 2^n слагаемых

Итого: многочлен Жегалкина от n переменных

Задача. Сколько разных многочленов?

Это столько же, сколько логический функций

Итог:

Следствие: Любая логическая функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина

Пример. $f(x, y) = x \vee y$

$f(x, y) = x * y$ - уже многочлен Жегалкина

Метод неопределенных коэффициентов:

Подберем $x \vee y = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$

$f(0, 0) = 0$

$f(0, 0) = a_0 + a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3...$

$f(1, 0) = 1 \vee 0 = 1$

$f(1, 0) = a_0 + a_1 = a_1$ ($a_0 = 0, \Rightarrow a_1 = 1$

$f(0, 1) =$ аналогично $\Rightarrow a_1 = 1$

$f(x, y) = x + y + a_3xy$

$f(1, 1) = 1 \vee 1 = 1$

$f(1, 1) = 1 + 1 + a_3 = 0 + a_3 = a_3$, $a_3 = 1$

Ответ: $x \vee y = x + y + xy$

Многочлены Жегалкина от 1 переменной:

$f(x)$	Мн Ж
0	0
1	1
x	x
$\bar{x}$	$1 + x$

Многочлены Жегалкина от 2 переменных:

$f(x)$	Мн Ж
0	0
1	1
xy	xy
$x + y$	$x + y$
$x \vee y$	$x + y + xy$

Формулы:

1. $\overline{xy} = \neg(xy) = \overline{x} \vee \overline{y}$
2. $\overline{x \vee y} = \neg(x \vee y) = \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x}\,\overline{y}$

Замечание. $\overline{xy} \neq \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x}\,\overline{y}$

Докозательство формул через таблицу истинности:

x	y	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

1.1.8 Получение многочлена Жегалкина через алгебраические упрощения

1. **Многочлен Жегалкина для** $\vee$

   $x \vee y = (x = \overline{a}, y = \overline{y}) = \overline{ab} = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{(1+x)(1+y)} = 1 + (1+x)(1+y) = 1 + 1 + x + y + xy = \underline{x + y + xy}$

2. **Многочлен Жегалкина для** $\Leftrightarrow$

   $x \Leftrightarrow y = \overline{x + y} = \underline{1 + x + y}$

3. **Многочлен Жегалкина для** $\Rightarrow$

   $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = (1+x) \vee y = (1+x) + y + (1+x)y = 1 + x + y + y + xy = \underline{1 + x + xy}$

Замечание. Если есть логическая формула, то ее можно приветси к форме многочлена Жегалкина двумя способами:

1. метод неопределенных коэффициентов:

   $a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + \cdots + axyz$

2. метод алгебраических преобразований

Пример. $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \cdots = x + y + xy$

Пример. $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = \cdots = 1 + x + xy$

Пример. $x \Rightarrow (y \vee \overline{z}) = x \Rightarrow (y + \overline{z} + y \cdot \overline{z}) = x \Rightarrow (y + (1+z) + y \cdot (1+z)) = x \Rightarrow (y + 1 + z + y + yz) = x \Rightarrow (1 + z + yz) = 1 + x + x(1 + z + yz) = 1 + x + x + xz + xyz = 1 + xz + xyz$

Поймем, что: $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$
$x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z = (1+x+y) \Leftrightarrow z = 1+(1+x+y)+z = 1+1+x+y+z = x+y+z$
Вывод:
Заранее не ясно, сложно ли привести логическую формулу к многочлену Жегалкина

1.1.9 Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ)

Определение. Литерал — это переменная или отрицание переменной

Пример. $x, \overline{x}, y, \overline{y}, z, \overline{z}$

Определение. Конъюнктор — конъюнкция литералов

Пример. $x\overline{y}, xyz, \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}, \overline{x}z$, ноль (пустой конъюнкт).

Определение. Логическое выражение имеет ДНФ, если она является дизъюнкцией конъюнкторов

Пример. $x\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee z \vee \overline{x}\,\overline{y}$ — ДНФ

Пример. $xy \vee \overline{x}\,\overline{y}$ — ДНФ

Пример. $x \vee y$ — ДНФ

Пример. xy — ДНФ

Пример. не ДНФ — $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$ — ДНФ

Пример. не ДНФ — $x \Rightarrow yz = \overline{x} \vee yz$ — ДНФ

Построение ДНФ по таблице истинности функции:
алгоритм на примере трех переменных

x	y	z	$f(x, y, z)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$
0	1	1	1	$\overline{x}\,yz$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$xy\,\overline{z}$
1	1	1	0	

Берем строки из столбца $f(x, y, z)$, где значения в столбце равны 1

Допустим есть строка: $x = a_1, y = a_2, z = a_3$ (a могут быть как 0, так и 1)

В ответ добавляется конъюнкт xyz ($0 \Rightarrow$ отрицание, $1 \Rightarrow$ не отрицание)

Ответ: $f(x, y, z) = \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee xy\,\overline{z}$

Доказательство корректности алгоритма:

Когда полученный ДНФ $= 1$?

Когда есть конъюнкт равный 1

1. Если первый конъюнкт равняется 1 (в примере $\overline{x}\,y\,\overline{z} = 1$)

   $\Rightarrow$ все литералы конъюнкта равняются 1

   $\Rightarrow$ в примере $\overline{x} = 1 \quad y = 1 \quad \overline{z} = 1$

   $x = 0 \quad y = 1 \quad z = 0$

2. Если второй конъюнкт равняется 1

   $\Rightarrow$ в примере $x = 0 \quad y = 1 \quad z = 1$ — строка из таблицы истинности

3. То же самое с третьим конъюнктом

Посмотрим таблицу с этими конъюнктами:

x	y	z	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$	$\overline{x}\,yz$	$xy\,\overline{z}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Замечание. У одной функции могут быть разные ДНФ

Пример. $\underline{\overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee xy\,\overline{z}} = \overline{x}\,y(\overline{z} \vee z) \vee xy\,\overline{z} = \underline{\overline{x}\,y \vee xy\,\overline{z}}$ — подчеркнутые выражения являются ДНФ

Пример. $\underline{\overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee xy\,\overline{z}} = \overline{z}\;y(\overline{x} \vee x) \vee zy\;\overline{x} = \underline{\overline{z}\,y \vee zy\,\overline{x}} = \underline{y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee \overline{x}\,x \vee z\,\overline{z}}$ — подчеркнутые выражения являются ДНФ

Получить ДНФ для логической функции/формулы можно:

1. по таблице истинности

2. с помощью алгебраических преобразований

Пример. 1. $\overline{x} = \overline{x}$

2. $x \vee y = x \vee y$

3. $x \cdot y = x \cdot y$

4. $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$

5. $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = (\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x) = \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x} x \vee y \overline{y} \vee yx = \overline{x}\,\overline{y} \vee xy$

x	y	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6. $x + y = \overline{x \Leftrightarrow y} = \overline{\overline{x}\,\overline{y} \vee xy} \ldots$
   $= \overline{\overline{x}\,y} \vee \overline{x \vee y} = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot \overline{\overline{y}} = x\,\overline{y} \vee \overline{x}\,y$

7. $x \Rightarrow (y + z) = \overline{x} \vee (y + z) = \overline{x} \vee \overline{y}\,z \vee y\,\overline{z}$

1.1.10 Задача (не) выполнимости

Дана логическая формала в ДНФ

Проверить, бывает ли она равна 0?

$\overline{x}\,\overline{y} \vee x \vee y ? = 0$

$x = 0, y = 0 \Rightarrow \overline{x}\,\overline{y} = 1$

$\Rightarrow$ данный ДНФ не может быть равным 0

Эта задача обладает особенностью:

1. если знать значения переменных (ответ), то их легко можно быстро проверить

2. подобрать значения переменных для 0 — нет

Нет известного алгоритма, который "принципиально"быстрее полного перебора

У этой задачи класс NP выполнимости (ответ легко проверить, а найти его простым способом невозможно)

Следствие. *То к чему сводится задача (не) выполнимости тоже сложна*

1. *упростить логическое выражение*
2. *поиск минимального ДНФ*

1.1.11 Запись таблиц истинности в виде графика

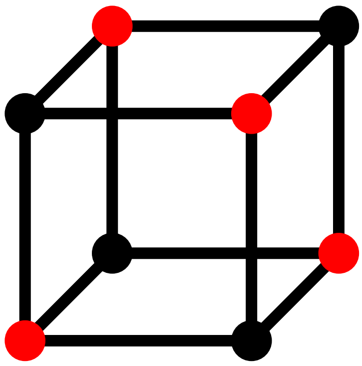
Формула $= f(x, y, z) = x + y$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(0,1) = 1$$

$$f(1,0) = 1$$

$$f(1,1) = 0$$



1.1.12 Задача минимизации ДНФ

Данная задача тоже является сложной, также как и задача (не) выполнимости

Дана логическая функция (в виде ДНФ). Необходимо найти самую короткую ДНФ эквивалентную данной.

Минимальной ДНФ считается та, где меньше количество литералов и дизъюнкций

Пример. $\overline{x}\,\overline{y} \vee z$ короче, чем $xy \vee yz$

Замечание. Далее рассматриваться все будет для функции от 3 переменных $f(x, y, z)$

Замечание. Какова таблица истинности $xyz = abc$, где $a = 0$ или $1, b = 0$ и $1, c = 0$ или 1

$0 \Rightarrow$ надо поставить отрицание

$1 \Rightarrow$ нет отрицания

Пример. $f(x, y, z) = \overline{x}\, y\, \overline{z}$

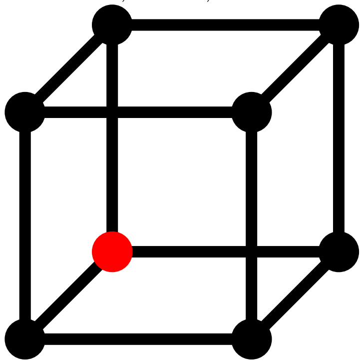
Если $\overline{x}\, y\, \overline{z} = 1$

$\Rightarrow \overline{x} = 1, y = 1, \overline{z} = 1$

$\Rightarrow x = 0, y = 1, z = 0$

$\Rightarrow x = a, y = b, z = c$

$\Rightarrow a = 0, b = 1, c = 0$



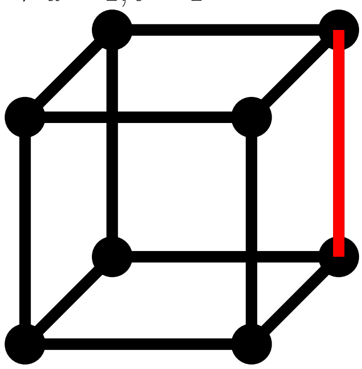
Пример. $f(x, y, z) = xy$

Если $xy = 1$

$\Rightarrow x = 1, y = 1$

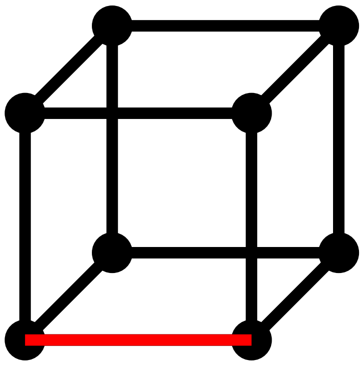
$\Rightarrow x = a, y = b$

$\Rightarrow a = 1, b = 1$



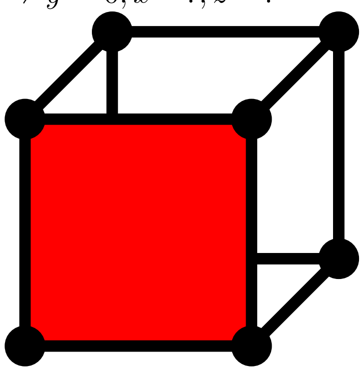
Аналогично, $f(x, y, z) = \overline{y}\, \overline{z}$

ребро: $y = 0, z = 0, x = ?$ — не важно

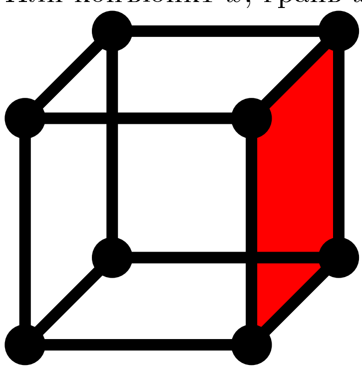


Последнее — конъюнкт из 1 литерала:
$x, \overline{x}, y, \overline{y}, z, \overline{z}$

Пример. $f(x,y,z) = \overline{y}$
Если $\overline{y} = 1$
$\Rightarrow y = 0, x = ?, z = ?$



Или конъюнкт x, грань $x = 1$

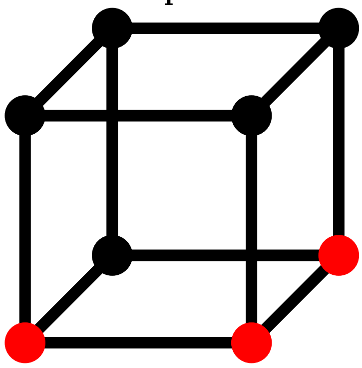


Итого:
xyz — это вершина $x = a, y = b, z = c$
xy — это ребро $x = a, y = b$
x — это грань $x = a$
Попробуем минимизировать ДНФ

Пример. $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\,\overline{z}$

Найти самый короткий ДНФ для данного выражения

Шаг 1: строим ТИ

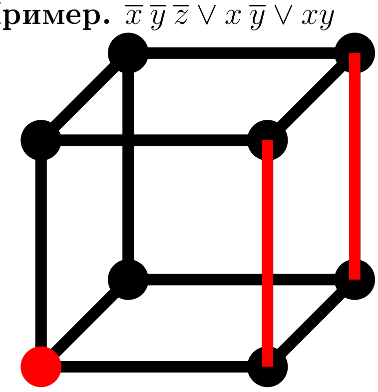


$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = (0,0,0)$
$x\,\overline{y}\,\overline{z} = (1,0,0)$
$xy\,\overline{z} = (1,1,0)$

Шаг 2: упрощаем

Чтобы упростить имеет смысл рассмотреть 2 ребра:
$(0,0,0) - -(1,0,0) = \overline{y}\,\overline{z}$
$(1,0,0) - -(1,1,0) = x\,\overline{z}$
$\Rightarrow$ ДНФ $= \overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{z} = xy\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z}$
$\Rightarrow$ самое короткое ДНФ $= \overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{z}$

Пример. $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y} \vee xy$



$\Rightarrow$ ДНФ $= x \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = x \vee \overline{y}\,\overline{z}$

Замечание. Данный метод позволяет наглядно перебрать все ДНФ и найти минимальный

С помощью алгебраических преобразований мы не сможем понять, что ответ самый оптимальный

Пример. Алгебраические преобразования

$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\,\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\,\overline{z} = \overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{z}$

Но тут непонятно, а вдруг можно сделать еще короче

1.1.13 Двойственная функция

Пусть есть логическая функция: $f = B^n \to B = \{0, 1\}$

Двойственная функция: $f^* = B^n \to B = \{0, 1\}$

$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$

Замечание. Мир замены лжи на истину

$$0 \leftrightarrow 1$$

Пример. $f(x, y) = x \vee y$

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Новый мир: $1 \to 0, 0 \to 1$

x	y	f^*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Получилось, что $(x \vee y)^* = xy$

Пример. $(x \vee y)^* = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}}\,\overline{\overline{y}} = xy$

Пример. $(x + y)^* = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{1 + x + 1 + y} = 1 + x + 1 + y + 1 = 1 + x + y = x \Leftrightarrow y$

Замечание. $f^{**}(x_1, x_2 \ldots x_n) = \overline{f^*(\overline{x_1}, \overline{x_2} \ldots \overline{x_n})} = \overline{\overline{f(x_1, x_2 \ldots x_n)}} = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$

Следствие.

$$(xy)^* = x \vee y$$

$$(x \Leftrightarrow y)^* = x + y$$

Теорема о композиции:
$f = f_0(f_1(x_1, \dots x_n), f_2(x_1, \dots x_n), \dots f_m(x_1, \dots x_n))$
f_i — это функции от n переменных $(B^n \to B)(i = 1 \dots n)$
$f_0 = B^m \to B$
Тогда $f^*(x_1, \dots x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \dots x_n), f_2^*(x_1, \dots x_n), \dots f_m^*(x_1, \dots x_n))$
Доказательство:
$\underline{f^* = \overline{f(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n})} = \overline{f_0(f_1(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}), f_2(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}) \dots f_m(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}))}} =$
$f_0^*(\overline{f_1(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n})}, \overline{f_2(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n})}, \dots \overline{f_m(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n})})$

Следствие. *Если есть $f(x_1, \dots x_n)$ — записано, как логическое выражение с $\cdot, \vee, \neg, +, \Leftrightarrow$, то f^* — также выражение, но связки заменяются на двойственные узлы*

$$\vee \leftrightarrow *$$

$$+ \leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\neg \leftrightarrow \neg$$

так как $(\overline{x})^* = \overline{x}$

Пример.

$$f(x, y, z) = \overline{x \vee \overline{y}\, z} \Leftrightarrow (x + y + z)$$

$$f^*(x, y, z) = (\overline{x \cdot (\overline{y}\, z)}) + (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z)$$

Пример.

$$f(x_1, \dots x_n) = 1$$

$$\Rightarrow f^*(x_1, \dots x_n) = \overline{1} = 0$$

$$1^* = 0; 0^* = 1$$

1.1.14 Конъюнктивно-нормальная форма КНФ

Определение. Конъюнктивно-нормальная форма — еще одна нормальная форма, похожая на ДНФ

Определение. Литерал — это как и раньше, переменные или отрицательные переменные

$$x, y, \overline{x},\ \overline{y}$$

Определение. Дизъюнкт — дизъюнкция литералов

$$x \vee y;\ x \vee y \vee \overline{z};\ x \vee \overline{z};\ \overline{x}$$

$$\cancel{xy}, \cancel{x \vee yz}$$

Определение. КНФ — это конъюнкция нескольких дизъюнктов

$$(x \vee y)(y \vee \overline{z});$$

$$(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x})$$

$$\cancel{xy \vee z}$$

$$x \vee y \vee z$$

— 1 дизъюнкт

$$xyz$$

— 3 дизъюнкта

Определение. У любой логической функции есть КНФ, её можно построить по таблице истинности

Доказательство

Заметим,что если вычислить (КНФ)* (двойственную к КНФ), то получим ДНФ

Пример. $[(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})]^* = (xyz) \vee (x\bar{y}) \vee (\bar{y}\bar{z})$

И наоборот (ДНФ)* = КНФ

Итого, чтобы получить КНФ для функции f, надо построить двойственную функцию к ДНФ это функции. Отсюда следует, что КНФ всегда существует

Пример. f(x,y,z) = xy $\Leftrightarrow$ z

Выпишем значения xyz из строчек, где $f^* = 1$

$\bar{x}\bar{y}z \quad x\bar{y}\bar{z} \quad \bar{x}y\bar{z} \quad xy\bar{z}$

x	y	z	xy	f	f^*
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Вспомним определение $f^*(x, y, z) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
$f^*(0, 0, 0) = \overline{f(1, 1, 1)}$
Итого: $f^* = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$
$f^*(0, 0, 1) = \overline{f(1, 1, 0)}$
$f^*(0, 1, 0) = \overline{f(1, 0, 1)}$
По теореме о композиции
$f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})$
Получение КНФ по таблице истинности без двойственной функции
f(x,y,z) = xy $\Leftrightarrow$ z

x	y	z	$f = xy \Leftrightarrow z$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

При x y z = 1 1 0, f= xy $\Leftrightarrow$ z $\leftarrow \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
для 1 - отрицание, для 0 - нет отрицания
Итого: Чтобы построить ДНФ:
- строки с 1, 0 $\leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
  1 $\leftrightarrow xyz$

Чтобы получить КНФ:
- строки с 0, 0 $\leftrightarrow xyz$
  1 $\leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Пример. f = x+y

x	y	$x+y$
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0

Нули в: $x \vee y \qquad \bar{x} \vee \bar{y}$

$f = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$

Замечание. Для функции записанной в форме КНФ, можно поставить задачу "выполнимости".

Вопрос: может ли значение быть = 1

- не известно решений, принципиально эффективней полного перебора значений

Пример. $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{z}) = 1$

x = 1

y = 1 подходит

z = 0

Следовательно эта формула выполнима при таком наборе

Многие задачи, головоломки сводятся к задаче выполнимости

Пример. Прицнцип Дирихле

Если есть n клеток и в них n+1 заяц, то $\exists$ клетка, где зайцев $\geqslant 2$.

при n = 2: i = 1 или 2 (клетка) $\qquad x_{ij}$ - в клетке i сидит заяц j

j = 1 или 2 или 3 заяц

Попробуем записать, что в каждой клетке $\leqslant 1$ зайца

а) каждый заяц ровно в одной клетке

$x_{11} \oplus x_{21}$ - заяц 1

$x_{12} \oplus x_{22}$ - заяц 2

$x_{13} \oplus x_{23}$ - заяц 3

б) в каждой клетке не больше 1 зайца

кл/з	1	2	3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}

если есть 2 зайца, то один из конъюнктов: = 1

$\overline{x_{11}x_{12} \vee x_{11}x_{13} \vee x_{12}x_{13}} \longleftarrow$ в кл $1 \leqslant 1$ зайца

$\overline{x_{21}x_{22} \vee x_{21}x_{23} \vee x_{22}x_{23}} \longleftarrow$ в кл $2 \leqslant 1$ зайца

Соединяем все утверждения:

$(x_{11}+x_{21})(x_{12}+x_{22})(x_{13}+x_{23})(\overline{x_{11}x_{12} \vee x_{11}x_{13} \vee x_{12}x_{13}})(\overline{x_{21}x_{22} \vee x_{21}x_{23} \vee x_{22}x_{23}}) =$ 0 всегда из принципа Дерихле

$(x_{11} \vee x_{21})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{21}})(x_{12} \vee x_{22})(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{22}})(x_{13} \vee x_{23})(\overline{x_{13}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{12}})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{13}})(x_{12} \vee x_{13})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{22}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{22}} \vee \overline{x_{23}})$

$\longleftarrow$ Берем программу, которая решает КНФ задачу выполнимости. Она скажет - невозможно.

1.1.15 Класс замкнутости

Повторим: Логическая функция: f: $\beta^n \to \beta$

$\beta = \{0, 1\}$

Определение. Класс – это множество логических функций.

Пример. K_1 = класс функций: от двух переменных K_2 = класс функций такой, что $f(x, y) = f(y, x)$

$f(x, y) = x \vee y \in K_1, \in K_2$

$g(x, y) = x \Rightarrow y \in K_1 \notin K_2$

K_3 : класс функций $f(x, ...) = f(\overline{x}, ...)$ функции, которые не зависят от первой переменной

$f(x, y, z) = y \Rightarrow z \in K_3$

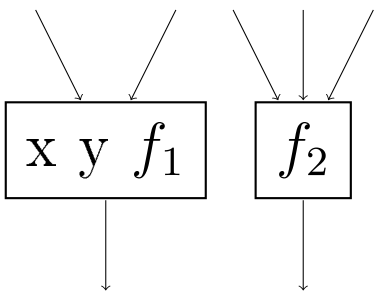
$f(x, y, z) = (x \Rightarrow y) \vee z \notin K_3$

$f(x, y, z) = x\bar{x} \vee y \vee z \in K_3 \quad (x\bar{x})$

$K_4 : \{f(x, y) = x \vee y;\ g(x, y) = x \Rightarrow y\}$

Определение. Замыкание класса

$K = \{f_1, f_2, \dots\}$ — класс функции



K^* — замыкание класса - это класс состоящий из всех композиций функций из К

$\boxed{f_1(f_2)(f_1(x, y), y, z), z)}$ — композиция

если есть функции, подставляем друг в друга, получаем композицию

Пример. : 1)$K = \{0, \bar{x}\}$ (0 - f() $\bar{x} - g(x)$)

$K^* = \{f(), g(f()), g(g(f())), g(g(g(f())))\}$

Пример. $K = \{\bar{x}\}$ возьмем класс только из отрицательных

$K^* = \{\bar{x}, x\}$

$K = \{g(x), g((g(x))), g(g(g(x \ldots 1, \ldots)))\}$

Пример. $K^* = \{\bar{x}, x \vee y, xy\}$ $K^* = \{, \ldots, \forall,$ функция $\}$

Определение. Если К - класс:

$K^* = \alpha$, то $\boxed{\text{K - полный}}$, где α — все логические функции

Вывод: $K = \{\bar{x}, x \vee y, xy\}$ — полный

Пример. $K = \{\bar{x}, x \vee y\}$, где $f(x) = \bar{x}$, $g(x, y) = x \vee y$

$xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = f(g(f(x), f(y)))$

Значит K^* — тоже полный

Определение. Замкнутый класс - К замкнут, если $K^* = K$

Свойства замыкания:

1. $K_1 \subset K_2$, тогда $K_1^* \subset K_2^*$

Докозательство:

Если есть f $\in K_1^* \Rightarrow f =$ композиция $f_1 \in K_1 \Rightarrow$ f - композиция $(f_i \in K_2) \Rightarrow f \in K_2^*$ чтд.

2.Если $K_1 \subset K_2$ и K_1 - полный, то K_2 - полный

Докозательство:

$K_1 \subset K_2 \Rightarrow K_1^* \subset K_2^* \Rightarrow \alpha \subset K_2^* \Rightarrow K_2^* = \alpha$

3. Пусть K_1, K_2 - замкнутое, тогда $K_1 \cap K_2$ - тоже замкнутые

Докозательство:

Пусть есть $f = (K_1 \cap K_2)^*$ - композиция

$f_i \in (K_1 \cap K_2)$

а) $\Rightarrow f_i$ - композиция $f_i = K_1 \Rightarrow f \in K_1^*$

б) $\Rightarrow f_i$ - композиция $f_i = K_2 \Rightarrow f \in K_2^*$

Из а и б следует, что $f \in K_1^* \cap K_2^* = K_1 \cap K_2$

Итог: $f \in (K_1 \cap K_2)^* \Rightarrow f \in K_1 \cap K_2$

$\Rightarrow (K_1 \cap K_2)^* \subset K_1 \cap K_2$, по $K_1 \cap K_2 \subset (K_1 \cap K_2)^*$

$\Rightarrow K_1 \cap K_2 = (K_1 \cap K_2)^*$

$\Rightarrow K_1 \cap K_2$ - замкнут

Замечание. K_1 и K_2 - замкнутые $\Rightarrow K_1 \cup K_2$ - замкнутый

4. $K^* = K^{**}$ для любого класса функций

1.1.16 Примеры замкнутых классов

1. T_0 - класс функций, "сохраняющих ноль" $f \in T_0 \Leftrightarrow$ если $f(0, ...0) = 0$

$x * y \in T_0$

$x + y \in T_0$

$\bar{x} \notin T_0$

$x \Rightarrow y \notin T_0$

$xy + xz + yz \in T_0$

Утверждение: T_0 - замкнут

Докозательство:

$\sqsupset f \in T_0^*$, проверим, что $f \in T_0$

$\Rightarrow T_0^* \subset T_0$

$\Rightarrow T_0^* = T$

f - комп f_i, $f_i \in T_0$

$f_1(f_2(...)f_3(f_4(...)), ...)$ - композиция

подставим все 0

$\Rightarrow f(0, ...0) = 0 \Rightarrow f \in T_0$ чтд

Пример. $f_1(x, y) = x * y \qquad f_1 \in T_0 f_2 \in T_0$

$f_2(x, y) = x + y \qquad f_1(f_2(f_1(x, f_2(y, y)), y) f_1(z, z))$

$x(y + y)$

$f(x, y, z) = (x(y + y) + y) * z * z$

$f(0, 0, 0) = 0$

2. Класс T_1 - сохраняющие 1

$f \in T_1$, если $f(1, ...1) = 1$

$x * y \in T_1$

$x + y \notin T_1$

$x + y + z \in T_1$

$\bar{x} \notin T_1$

$x \Rightarrow y \in T_1$

$xy + xz + yz \in T_1$

Утверждение. T_1 - *замкнут*

Докозательство: смотри T_0

3. Класс &

$f \in$ &, если f можно записать как конъюнкцию нескольких переменных

$f(x, y, z) = yz$

$g(x, y, z) = xyz$

$h(x, y, z) = xz$

$i(x, y, z) = z$

0
1
Все это $\in \boxed{\&}$

Утверждение. *Класс $\boxed{\&}$ замкнут*

Композиция $f_i \in \boxed{\&}$

$f_1(..., \underline{\quad}, ..., \underline{\quad})$ = арг2 * арг4 = подаргумент1* подаргумент2* ... * подаргумент = пер * пер * пер * пер... (произвольная перепеременная)

пер может быть 0 или 1

Утверждение. $\boxed{\&} = \{\&, 0, 1\}^*$
по определению замыкания
$\{f_1(x, y) = x * y$
$f_2() = 0$
$f_3() = 1\}$

4. $\boxed{V}$ - дизъюнкция переменных и 0, 1
$\boxed{V} = \{V, 0, 1\}^*$

Утверждение. $\boxed{V}$ - *замкнут*

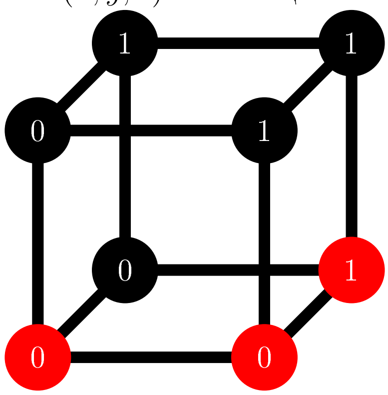
Доказательство 1:
смотри доказательство $\boxed{\&}$
Доказательство 2:
$\boxed{V} = \{V, 0, 1\}^* \Rightarrow \boxed{V}^* = \{V, 0, 1\}^{**} = \{V, 0, 1\}^* = \boxed{V}$ свойства замыкания

Доказательство: $\sqsupset f \in K^* \Rightarrow f-$ комп $f_i \Rightarrow f_i \in K^*$
$f = f_1(f_2(...)...) = g_1(g_2(h_1...)) \in k^*$
$\uparrow \quad \uparrow$ комп $g_1 \in K^*$
$g_i \in K \ h_i \in K$
$\Rightarrow f \in K^* \Rightarrow K^* = K^{**}$
Следствие: $\forall K$ - класс K^* - замкнут
если класс замкнут он станет замкнутым
5. Класс u (unit) : 0,1,$f(x, ...x_n) = x_i$ или $\overline{x_i}$
$f(x, y, z) = \bar{z}$
$f(x, y, z, t) = x$
$f(x) = xf(x) = \bar{x}$
Все это $\in u$
6. Класс 1^∞ $f(x_1...x_n) \leqslant x_i$
$0^\infty f(x...x_n) \geqslant x_i$
$x * y \leqslant x \qquad xy \in 1^\infty$
$\leqslant y$

$x \vee y \geqslant x \qquad x \vee y \in 0^\infty$
$\geqslant y$
$x \Rightarrow y \geqslant y \quad x \Rightarrow y \in 0^\infty$
$x \Rightarrow y \leqslant y$
$x = 0$
$y = 0$
$x \Rightarrow y \notin 1^\infty$
7. L - линейная функция L $= \{0, 1, +\}^*$
Все функции из констант и сложения
$x + y \in L$
$x + y + z \in L$
$1 + x \in L$
$\bar{x} \in$
$x * y \in L$
(L - линейные многочлены Жегалкина, степени $\leqslant 1$)
Докозательство: $x * y$ имеет многочлены Жегалкина $x * y$
он единственный $\Rightarrow$ не существует линейного многочлена Жегалкина
8. S - самодвойствейнные функции
$f \in S$, если f $= f^*$ $\quad$ (f^* - двойственные)
Если функция равна своей двойственной, то она самодвойтсвенная

Пример. $x * y \notin S$
$x \vee y \notin S$
$x \in S$
$\bar{x} \in S$
$x \Rightarrow y \notin S$ т.к. $(x \Rightarrow y)^* = (\bar{x} \vee y)^* = \bar{x} * y \neq \bar{x} \vee y$
$x = 1$

Функция честного голосования $y = 1$ от 3 ёх переменных. $0 \neq 1$
$vote(x, y, z) = 1$, если 1 - иц больше $x + y + z \geq z$
0, если 0 - ей больше $x + y + z \leq 1$
$vote(x, y, z)$: Таблица истинности



$vote(x, y, z) \in S?$

$(xy \vee xz \vee yz)^* = (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z) =?xy \vee xz \vee yz$

Раскроем скобки:

$xxy \vee xxz \vee xzy \vee xzz \vee yxy \vee yxz \vee yzy \vee yzz = xy \vee xz \vee xyz \vee xz \vee xy \vee xyz \vee yz \vee yz = xy \vee xz \vee yz \vee xyz = xy \vee xz \vee yz(1 \vee x) = xy \vee xz \vee yz$

т.е. vote $= vote^*$

или проверим таблицой истинности:

читаем снизу вверх, заменяя 0 на 1

xyz	$vote$	$vote^*$
000	0	0
001	0	0
010	0	0
011	1	1
100	0	0
101	1	1
110	1	1
111	1	1

Утверждение. *S - замкнут*

$\sqsupset f \in S^* f =$*композиция* $f_i \in S$

$f = f_i(f_2(...), f_3(...), f_4(...))$

Определение. Высота композиции

$f(x, y, z)$ - высота 1 (1 ф-ия)

$f(g(x, y), y, z)$ - высота 2

$g(x, y) - 1$

$f(g(x, y), y, z) - 2$

Пример. $f(g(h(x), y), h((h(x)), y))$

$g(h(x), y)$ - 2

$h(h(x))$ - 2

$f(g(h(x), y), h((h(x)), y))$ - 3

$f^* = f_1^*(f_2^*(...), , f_n^*(...))$ - теория о композиции

но $f_i \in S \Rightarrow f_i^* = f_i$

$= f_i(f_2(...), ...f_n(...)) = f$

т.е $f^* = f \Rightarrow f \in S$

9. Монотонные функции

$f(x_1, \ldots, x_n) \in M$, если $\forall i \quad x_i \geq y_i$

$\Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(y_1, \ldots, y_n)$

Примеры:

1. $f_1(x) = \overline{x} \qquad f_1 \notin M$, так как $f_1(1) = 0, f(0) = 1$. 1 в аргументе функции ≥ 0, но $0 < 1$ в значение функции

2. $f_2(x, y) = x \Rightarrow y \qquad f_2 \notin M$, так как $f_2(1, 0) = 0, f(0, 0) = 1$. $1, 0$ в аргументе функции $\geq 0, 0$, но $0 < 1$ в значение функции

3. $f_3(x, y) = x + y \qquad f_3 \notin M$, так как $f_3(1, 1) = 0, f(1, 0) = 1$. $1, 1$ в аргументе функции $\geq 1, 0$, но $0 < 1$ в значение функции

4. $f_4(x, y) \in M$

5. $f_5(x, y) \in M$

6. $f_6(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz \quad \in M$ — функция голосования

Наглядный способ проверки монотонности

Функция монотонна, когда все стрелки:

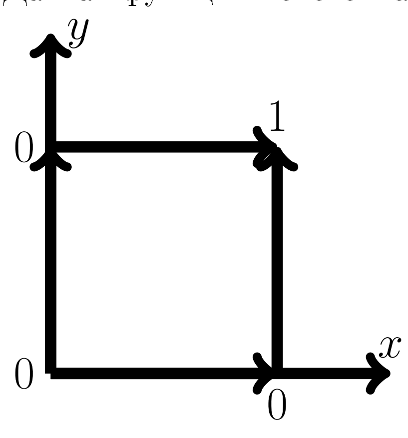
1. из 0 в 0

2. из 0 в 1

3. из 1 в 1

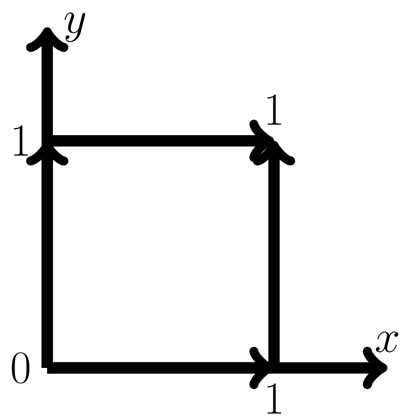
Пример. $x * y$

Данная функция монотонна



Пример. $x \vee y$

Данная функция тоже монотонна



Утверждение. *M – замкнут*

То есть если f_i – мотонна, то $f(x_1, \dots x_n) = f_1(f_2(\dots) \dots f_m(\dots))$

$f(y_1, \dots y_n) = f_1(f_2(\dots) \dots f_m(\dots))$

$x_1 \dots x_n \geq y_1 \dots y_n$

То где-то в глубине x_i будут $\geq$ y_i $\Rightarrow$ внутри будут получаться значения функции $f_i(x \dots) \geq f_i(y \dots)$

Замечание. Классы из примеров выше все неполные

Пример. $L = L^* \quad x \cdot y$

Всегда были примеры функций не из классов

$xy \notin L$

$xy \notin S$

$\overline{x} \notin T_0$

$\overline{x} \notin T_1$

$\overline{x} \notin M$

1.1.17 Теорема Поста

Теорема. ***Поста***

(Позволяет понять, полный класс или нет)

K – полный тогда и только тогда, когда

$\exists f_1 \in K : \quad f_1 \notin T_0$

$\exists f_2 \in K : \quad f_2 \notin T_1$

$\exists f_3 \in K : \quad f_3 \notin L$

$\exists f_4 \in K : \quad f_4 \notin M$

$\exists f_5 \in K : \quad f_5 \notin S$

Пример. $K = \{\overline{x}; x + y\}$

$\overline{x} \notin T_0, T_1$

но $\overline{x} \in L$ и $x + y \in L \Rightarrow$
K – не полный

Пример. $K = \{\overline{x}; x \vee y\}$
$\overline{x} \notin T_0, T_1, M$
$\overline{x} \in S, L$ но $x \vee y \notin L, S \Rightarrow$
K – полный по теореме Поста

Доказательство в одну сторону:
$\Rightarrow$ если K полный, от противного
Пусть все $f \in K$ отличие, что $f \in T_0$
$\Rightarrow K \subset T_0$
$\Rightarrow K^* \subset T_0^*$
$\Rightarrow K^* \subset T_0 \nleq \alpha$, где α – все функции
$\Rightarrow \leq \alpha$
Доказательство в другую сторону:
Будем выражать через $f_1; f_2; f_3; f_4; f_5$ все другие возможные
Достаточно будет выразить только $\{\overline{x}, x \cdot y\}$ (тогда есть $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$)
$\Rightarrow$ есть все ДНФ.
Шаг 1: Давайте выразим 0, 1, $\overline{x}$
Берем $f_1(x_1 \dots x_n) = \begin{bmatrix} 1, x = 0 (f_1 \notin T_0) \\ 0 \; or \; 1; x = 1 \end{matrix} = 0$ или $\overline{x}$
$f_2(x_1, x_2 \dots x_n) \notin T_1 = \begin{bmatrix} 0 \; or \; 1, x = 0 \\ 0; x = 1 \end{matrix} = \overline{x}$ или 0
Пояснение:
$f(x, y, z) = x \Rightarrow yz \quad f(x, x, x) = 1$
$f(0, 0, 0) = 1, f \notin T_0$
$f(x, x, x) = 1$
$0 = f_2(x_1 \dots x_n),\ 1 = f_1(x_1, \dots x_n)$
$0 = f_2(x_1, \dots x_n), \overline{x} = f_1(x_1, \dots x_n), 1 = \overline{0} = f_1(f_2(x_1, \dots x_n), f_2(x_1, \dots x_n), \dots)$
$1 = f_2(x_1, \dots x_n),\ \overline{x} = f_1(x_1, \dots x_n),\ f_2(f_1(x_1, \dots x_n), f_1(x_1, \dots x_n), \dots)$
$\overline{x} = f_2(x_1, \dots x_n),\ \overline{x} = f_1(x_1, \dots x_n)$
Берем $f_4 \notin M$, где нарушена монотонность, для примера:
$f_4(x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n > y_n) = 0_x \neq 1_y$
$f_4(x_1, x_2, \dots x_n)$ переменная X, где $>$
$f_4(x, y, z, t) = xy + zt \notin M$
$f_4(1, 1, 1, 1) = 0 \quad f_4(1, 0, 1, 1) = 1$
$1, 1, 1, 1 \geq 1, 0, 1, 1$
$\Rightarrow f_4(1, x, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1, x = 0 \\ 0; x = 1 \end{matrix} = \overline{x}$

выражены $f_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = \overline{x} \quad f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = \overline{x}$
$f_5 \notin S$
получим с ней 1 и 0
Найдем нарушение S
$\underline{f^*(x_1 \ldots x_n)} \neq f(x_1 \ldots x_n)$
$f(\overline{x_1}, \ldots \overline{x_n}) \neq f(x_1, \ldots x_n)$
$f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_n}) = f(x_1, \ldots x_n)$
Рассмотрим $f_5(x; \overline{x}; x; \ldots \overline{x}) =$
(если $x_i = 0 \Rightarrow x \quad x_i = 1 \Rightarrow \overline{x}$)
$= \left[\begin{array}{l} f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, when\, x = 0 \\ f(\overline{x_1}, \ldots \overline{x_n})\, when\, x = 1 \end{array}\right. = 0$ или 1

Пример. $f(x, y, z) = x \vee yz \notin S$
нужно найти $f(1, 0, 0) = f(0, 1, 1)$ (нарушение S)
Рассмотрим $f(\overline{x}, x, x) = \left[\begin{array}{ll} f(1, 0, 0) = 1 & x = 0 \\ f(0, 1, 1) = 1 & x = 1 \end{array}\right. = 1$
$f(\overline{x}, x, x) = \overline{x} \vee xx = \overline{x} \vee x = 1$
если получили 0, то $\overline{0} = 1$ и наоборот

Шаг 2:
Имеем $0, 1, \overline{x}$
Надо $x \cdot y$ выразить
Берем $f_3 \in L$
$f_3(x_1, \ldots x_n) = \cdots + \cdots + \cdots + x_i y_j + \ldots$
Подставим $0; 1; x_i; x_j$
Возьмем самое короткое слагаемое с $x_i \quad x_j$
Для определенности $\exists$ это $x_1 \cdot x_2$
$f_3(x_1 \ldots x_n) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 x_3 \ldots x_k + \ldots$
подставим $x_3 \ldots x_k = 1$
остальные $x_{k+1 \ldots} = 0$
$f(x_1, x_2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots 0) = C_1 + x_1 x_2 + C_2 x_1 + C_3 x_2 + 0 \cdot x_1 x_2 =$

$$g(x_1, x_2) = \left[\begin{array}{l} x_1 x_2 \\ 1 + x_1 x_2 \\ 1 + x_1 + x_1 x_2 \\ 1 + x_2 + x_1 x_2 \\ x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 + x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 + x_1 x_2 \end{array}\right.$$

если $g(x_1, x_2) = 1 + x_1 x_2$

$\overline{g(x_1, x_2)} = x_1x_2$ – отрицание уже есть
если $g(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_1x_2 = 1 + x_2(1 + x_2)$
тогда $\overline{g(x_1, \overline{x_2})} = 1 + (1 + x_1(1 + 1 + x_2)) = x_1x_2$
все случаи: $g(x_1, x_2) = C_1 + (x_1 + C_2) \cdot (x_2 + C_3)$

Пример. $f_3(x, y, z) = x + yz$
$f_3(0, x, y) = 0 + xy = xy$

Пример. $f_3(x, y, z) = x \Rightarrow yz = 1 + x + xyz$
$f_3(x, y, 1) = 1 + x + xy = 1 + x(1 + y)$
$\overline{f_3(x, \overline{y}, 1)} = xy$
можно было
$f_3(1, x, y) = 1 + 1 + xy = xy$

Пример. $f(x, y, z) = x \Rightarrow yz$
$g(x, y) = x + y$
$\notin T_0, T_1, L, M, S$
Выражаем
$f(x, x, x) = x \Rightarrow xx = 1$
$g(x, x) = x + x = 0$
Случай 0, 1, надо $\overline{x}$
Выражаем $\overline{x}$
$g(x, y) \notin M$
$g(1, 0) = 1$
$g(1, 1) = 0$
$\Rightarrow g(1, x) = \overline{x}$
$\Rightarrow \overline{x} = g(f(x, x, x), x)$
Выражаем $x \cdot y$
$f(x, y, z) = xx \Rightarrow yz = 1 + x + xyz$
Догадаемся, что $f(1, x, y) = x \cdot y$
Ответы: $\overline{x} = g(f(x, x, x), x) \quad x \cdot y = f(1, x, y)$