Теория к РК1. ТВиМС 2025

2 октября 2025 г.

1 Сформулируйте определение двойного интеграла и его основные свойства.

Пусть D - квадрируемая замкнутая область на Oxy и в D определена ограниченная функция f(x, y). Разобьём D на 'D'$_{k=1}^{n}$ не имеющих общих внутренних точек. Тогда сумму вида

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} f(\xi, \eta_k) \Delta S \tag{1}$$

называют интегральной суммой. Если существует конечный предел интегральной суммы не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точки.

$$\max_{1 \leq k \leq n} \lim_{dG_k \to o} \sum_{k=1}^{n} f(\xi, \eta_k) \Delta S \tag{2}$$

называют двойным интегралом

$$\iint_D f(x, y) dxdy \tag{3}$$

Свойства двойного интеграла:

1. Линейность Если f(x,y) и g(x,y) интегрируемы в D, то их линейная комбинация также интегрируема

$$\alpha \iint_D f(x, y) dxdy + \beta \iint_D g(x, y) dxdy = \iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) dxdy \tag{4}$$

2. Аддитивность Если область D разбита на две подобласти D_1 и D_2 без общих внутренних точек ($D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$), то:

$$\iint_D f(x, y)\, dS = \iint_{D_1} f(x, y)\, dS + \iint_{D_2} f(x, y)\, dS \tag{5}$$

3. Неотрицательность Если f(x, y) интегрируема в D и $f(x, y) \geq 0$ в G, то

$$\iint_D f(x, y) dxdy \geq 0 \tag{6}$$

4. Монотонность Если $f(x, y) \leq g(x, y)$ для всех $(x, y) \in D$, то:

$$\iint_D f(x, y) dxdy \leq \iint_D g(x, y) dxdy \tag{7}$$

   В частности, если $f(x, y) \geq 0$ на D, то:

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy \geq 0 \tag{8}$$

5. Оценка интеграла по модулю Если f(x, y) интегрируема в D, то |f(x,y)| интегрируема в D

$$|\iint\limits_D f(x,y)dxdy| = \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy \tag{9}$$

6. Теорема об оценке Если (x,y) и g(x, y) интегрируемы в D $m \le f(x,y) \le M$ и $g(x,y) \ge 0$ в D, то

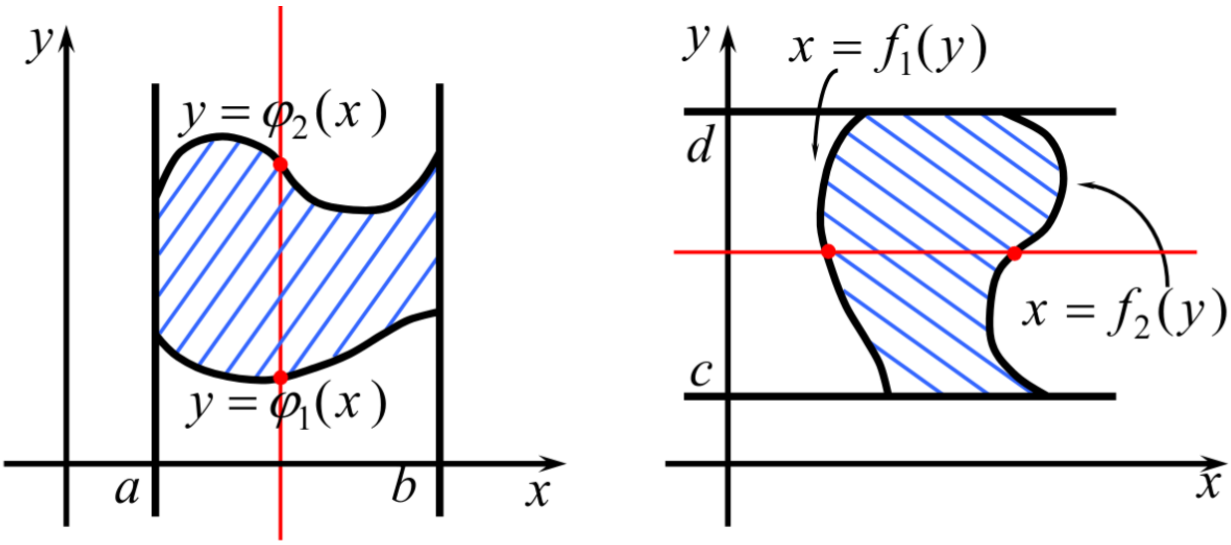
$$m \iint\limits_D g(x,y)dxdy \le \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy \le M \iint\limits_D g(x,y)dxdy \tag{10}$$

7. Теорема о среднемзначении Если $f(x,y)$ непрерывна в D, то $\exists(x_0, y_0) \in D$ такая точка,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le f(x_0,y_0)S \tag{11}$$

2 Вычисление двойного интеграла: сведение к повторному интегралу.

Назовем область D правильной в направлении Ox(Oy) если в если любая прямая проходящая через нее параллельно этой оси пересекает границу области только в двух точках, причем каждая из этих границ задется одним уравнением. Область правильную и в направлении оси Ox, и в направлении оси Oy будем называть просто правильной областью.



Двойной интеграл вычисляется сведением к повторному интегралу.

Сведение двойного интеграла к повторному рассмотрим на примере геометрической интерпретации двойного интеграла как объема цилиндрического бруса.

Предположим, что область интегрирования (S) — правильная в направлении оси Oy и ограничена линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$ и $x = b$.

Пусть площадь сечения тела плоскостью, отвечающей абсциссе x и перпендикулярной оси Ox, равна $\sigma(x)$.

Тогда объем тела, если он существует, равен

$$V = \int_a^b \sigma(x)dx, \quad \text{где} \quad \sigma(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

С другой стороны, объем тела равен

$$V = \iint_S f(x,y)dxdy.$$

Следовательно, вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Указанная формула справедлива, если $f(x,y)$ интегрируема на области (S), ограниченной линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$, и $\forall x \in [a,b]$ существует внутренний интеграл

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Аналогично, если $f(x,y)$ интегрируема на области (S), правильной в направлении оси Ox и ограниченной линиями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y = \alpha$, $y = \beta$, и $\forall y \in [\alpha,\beta]$ существует внутренний интеграл

$$\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx,$$

то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

Если область (S) правильная, то справедливы обе формулы и

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

3 Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть в двойном интеграле $\iint\limits_{D} f(x,y)ds$ требуется перейти к новым переменным u, v, по формулам $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $(u,v) \in D^*$. Функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ непрерывны в D^* вместе со своими частными производными и осуществляют взаимно-однозначное отображение D^* на D, т. е. существуют обратные функции $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $(x,y) \in D$.

Формула замены переменной в двойном интеграле имеет вид:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)ds = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))|J|ds^*, \quad \text{где } D^* -$$

образ D в системе Ouv. Определитель J называют якобианом преобразования координат. Если якобиан не равен нулю, то преобразование $D \leftrightarrow D^*$ имеет смысл (в таком случае говорят, что оно невырожденное).

4 Полярные координаты. Вычисление двойных интегралов в полярной системе координат.

Рассмотрим частный случай. Пусть нужно записать двойной интеграл

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

в полярной системе координат, если полярная ось l совмещена с осью OX, а полюс — с началом координат, т. е.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

В этом случае $u = r, v = \varphi$,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0$$

и $ds = drd\varphi$ — элемент площади в полярных координатах.

Тогда имеет место формула перехода к полярным координатам в двойном интеграле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

5 Сформулируйте определение тройного интеграла и его основные свойства.

Пусть в ограниченной замкнутой пространственной области T задана непрерывная функция $f(x,y,z)$. Разобьём эту область произвольным образом на n частичных пространственных ячеек с объёмами ΔV_k. В каждой ячейке выберем по одной произвольной точке $P_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим значение функции во взятых точках. Составим интегральную сумму вида:

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} f(P_n)\Delta V_n \tag{12}$$

Тройным интегралом от функции по области называется предел интегральных сумм при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех ячеек данного разбиения

$$\iiint\limits_T f(P)dV = \max_{1 \le k \le n} \lim_{\Delta V_k \to o} \sum_{k=1}^{n} f(P))\Delta V \tag{13}$$

Свойства тройного интеграла:

1. Линейность Если f(P) и g(P) интегрируемы в T, то их линейная комбинация также интегрируема

$$\alpha \iiint\limits_T f(P)dV + \beta \iiint\limits_T g(P)dV = \iiint\limits_T \alpha f(P) + \beta g(P)dV \tag{14}$$

2. Аддитивность Если область T разбита на две подобласти T_1 и T_2 без общих внутренних точек ($T = T_1 \cup T_2$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$), то:

$$\iiint\limits_T f(P)\,dV = \iiint\limits_{T_1} f(P)\,dV + \iiint\limits_{T_2} f(P)\,dV \tag{15}$$

3. Неотрицательность Если f(x, y) интегрируема в T и $f(P) \ge 0$ в T, то

$$\iiint\limits_T f(P)dV \ge 0 \tag{16}$$

4. Монотонность Если $f(P) \le g(P)$ для всех $(P) \in T$, то:

$$\iiint\limits_T f(P)dV \le \iiint\limits_T g(P)dV \tag{17}$$

   В частности, если $f(P) \ge 0$ на T, то:

$$\iiint\limits_T f(P)\,dV \ge 0 \tag{18}$$

5. Оценка интеграла по модулю Если f(x, y) интегрируема в T, то |f(P)| интегрируема в T

$$|\iiint\limits_T f(P)dV| = \iiint\limits_T |f(P)|dV \tag{19}$$

6 Вычисление тройного интеграла в прямоугольной декартовой системе координат.

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению определенного и двойного интегралов. Будем рассматривать область (V), правильную в направлении оси O_z, т. е. такую, что любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области параллельно оси O_z, пересекает границу области в двух точках. Пусть область (V) ограничена сверху и снизу поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ соответственно, а также цилиндрической поверхностью $F(x, y) = 0$ с образующими, параллельными оси O_z.

(D_{xy}) — проекция (V) на плоскость Oxy. Функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области (V). Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(D_{xy})} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Если при этом область (D_{xy}) — правильная в направлении оси Oy и определяется следующими неравенствами: $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, то тройной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

7 Цилиндрические координаты. Вычисление тройных интегралов в цилиндрической системе координат.

Gереход к цилиндрическим координатам φ, ρ и z по формулам $x = \rho \cdot \cos\varphi$, $y = \rho \cdot \sin\varphi$, $z = z$, где $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Якобиан замены

$$J(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Таким образом, при переходе к цилиндрическим координатам получаем

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V')} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

8 Сформулировать необходимый признак сходимости числового ряда.

Елси числовой ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится, то $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

9 Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: сформулировать признак сравнения.

Числовой ряд с положительными членами сходится, если его члены заведомо не превосходят членов другого зоведомо сходящегося ряда. Ряд расходится если его члены превосходят члены другого заведомо сходящегося ряда.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad a_k = 0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad b_k = 0 \\
&\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n \quad a_k \leq b_k \\
&\text{Тогда:} \\
&\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{сходится} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{сходится} \\
&\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{расходится} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{расходится}
\end{aligned} \tag{20}$$

10 Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов:сформулировать предельный признак сравнения и следствие из него.

Если два числовых ряда с положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad a_k \geq 0 \quad \forall k \in N$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad b_k > 0$ справедливо соотношение $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = c \quad 0 < c < \infty$, то эти ряды сходятся и расходятся одновременно.

11 Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов:сформулировать предельный признак Даламбера.

Пусть для ряда с положительным членами $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad a_k > 0 \quad \forall k \in N \quad \exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \quad q \geq 0$, тогда:

1. Если q $<$ 1, то ряд сходится;
2. Если q $>$ 1, то ряд расходится;
3. Если q = 1, поведение ряда нельзя определить этим признаком

12 Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов:сформулировать предельный радикальный признак Коши.

Пусть для ряда с положительным членами $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad a_k \geq 0 \quad \forall k \in N \quad \exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$, тогда:

1. Если q $<$ 1, то ряд сходится;
2. Если q $>$ 1, то ряд расходится;
3. Если q = 1, оведение ряда нельзя определить этим признаком

13 Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов:сформулировать интегральный признак Коши.

Пусть функция f(x) действительна, неотрицательна и непрерывна в некотором промежутке $[m; +\infty)$ не возрастает в этом промежутке. Тогда для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_m^{\infty} f(x)dx$.

14 Дать определение условно сходящегося числового ряда. Сформулировать признак Лейбница.

Знакочередующийся ряд - действительный ряд у которого соседние члены имеют разные знаки

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \quad a_k > 0 \tag{21}$$

Пусть Знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad a_k > 0 \quad \forall k \in N \tag{22}$$

удовлетворяет условиям

1. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq ... \geq a_k \geq ...$
2. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Тогда ряд сходится.

Если ряд удовлетворяет условия признака Лейбница

1. $0 < S < a_1$
2. модуль суммы всякого его остатка останется R_n оценивается сверху числом a_{n+1}

$$|R_n| = |\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k| < |a_{n+1}| \quad \forall n \in N \tag{23}$$