



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана национальный исследовательский
университет» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Модульное домашнее задание
ПО ДИСЦИПЛИНЕ "Модели динамических объектов"
Вариант 15.

Студент группы ИУ1-31Б

Соин А. Д.
«24» ноября 2025 г.

Преподаватель

Лобачев И. В.
«_____» _____ 2025 г.

Москва, 2025

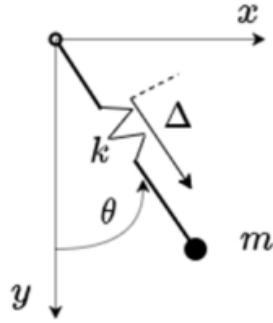
Оглавление

1	Часть 1.	2
1.1	Решение	2
1.2	Кинетическая энергия системы	2
1.3	Потенциальная энергия системы	3
1.4	Лагранжиан системы	3
1.5	Вывод	3
2	Часть 2.	4
2.1	Решение	4
2.2	Результаты моделирования	6
2.3	Вывод	6

Часть 1.

Варианты 5, 10, 15, 20, 25, 30

Получить математическую модель математического пружинного маятника, используя формализм механики Лагранжа.



1.1 Решение

Запишем общий вид уравнения Лагранжа второго рода для динамики произвольного тела:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n \quad (1.1)$$

где:

- $L = T - P$ - Лагранжиан;
- T - Кинетическая энергия системы;
- P - Потенциальная энергия системы;
- q_i - Обобщенные координаты;
- Q_i^n - Обобщенные силы.

Координаты :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \\ y = -r \cos \theta \end{cases} \quad (1.2)$$

1.2 Кинетическая энергия системы

Проекции скоростей на оси :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} = -\dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (1.3)$$

тогда полная скорость

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-\dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta)^2 = \quad (1.4)$$

$$= \dot{r}^2 \sin^2 \theta + 2r \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{r}^2 \cos^2 \theta - 2r \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = \quad (1.5)$$

$$= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (1.6)$$

Отсюда кинетическая энергия

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} \quad (1.7)$$

1.3 Потенциальная энергия системы

Потенциальная энергия системы будет складываться из потенциальной энергии пружины и потенциальной энергии груза. Потенциальная энергия пружины:

$$P_1 = \frac{k(r - r_0)^2}{2} \quad (1.8)$$

Потенциальная энергия груза:

$$P_2 = mgy = -mgr \cos \theta \quad (1.9)$$

Потенциальная энергия системы:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{k(r - r_0)^2}{2} - mgr \cos \theta \quad (1.10)$$

1.4 Лагранжиан системы

Из (1.6) и (1.10) найдем Лагранжиан системы:

$$L = T - P = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} - \left(\frac{k(r - r_0)^2}{2} - mgr \cos \theta \right) = \dot{r}^2 \frac{m}{2} + r^2\dot{\theta}^2 \frac{m}{2} - \frac{k(r - r_0)^2}{2} + mgr \cos \theta \quad (1.11)$$

Найдем первые производные по r и θ :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{r}^2 - k(r - r_0) + mg \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta \end{cases} \quad (1.12)$$

Найдем производные по \dot{r} и $\dot{\theta}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\ddot{\theta} \end{cases} \quad (1.13)$$

Продифференцируем полученные производные по t

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 2\ddot{r} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2mr\ddot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \end{cases} \quad (1.14)$$

Тогда уравнение Лагранжа имеет следующий вид:

$$\begin{cases} m\ddot{r} - (m\dot{r}^2 - k(r - r_0) + mg \cos \theta) = 0 \\ 2mr\ddot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - (-mgr \sin \theta) = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

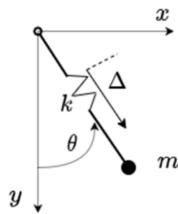
$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \theta = 0 \\ 2\dot{r}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

1.5 Вывод

Получена математическая модель пружинного маятника с использованием формализма механики Лагранжа. Модель является нелинейной и явной.

Часть 2.

Выполнить численное моделирование системы из ДЗ №1 с произвольными начальными условиями для каждой из обобщенных координат. Исследовать влияние изменения указанного параметра на 20% в обе стороны от указанного значения на динамику системы. По результатам моделирования построить графики изменения обобщенных координат во времени, а также фазовый портрет системы. Вектор времени принять от 0 с шагом 0.01 секунды до того времени, когда система установится в колебаниях (2-3 периода).



Вариант	k	m	g	Параметр
15	10	15	9.815	k

2.1 Решение

Выполним численное моделирование системы, для этого приведем уравнение к форме Коши, представленной в функции **difur**. Для решения системы используем функцию **ode45** реализующую метод Рунге-Кутты 4-5 порядка. Ниже приведен код в MATLAB, реализующий задачу:

```

function dX = difur(t, X)
    global inputStruct;
    k = inputStruct.k;
    m = inputStruct.m;
    g = inputStruct.g;
    r0 = inputStruct.r0;

    dX = zeros(4,1);

    dX(1) = X(3);
    dX(2) = X(4);
    dX(3) = X(1) * X(4)^2 - k / m * (X(1) - r0) + g*cos(X(2));
    dX(4) = -2 * X(3) * X(4) / (X(1)) - g*sin(X(2))/X(1);
end

global inputStruct;
inputStruct.k = 10;
inputStruct.m = 15;
inputStruct.g = 9.815;
inputStruct.r0 = 3;

func = @difur;
X0 = [5;pi/6;0;0];
t = 0:0.1:20;

```

```

[~,X1] = ode45(func,t,X0);
inputStruct.m = 12;
[~,X2] = ode45(func,t,X0);
inputStruct.m = 18;
[~,X3] = ode45(func,t,X0);

figure
subplot(2,1,1);
plot(t, X1(:, 1));
hold on;
plot(t, X2(:, 1));
hold on;
plot(t, X3(:, 1));
xlabel("Время, с");
ylabel("Радиус, м");
legend("m = 15", "m = 12", "m = 18");
grid("minor");

subplot(2,1,2);
plot(t, X1(:, 2));
hold on;
plot(t, X2(:, 2));
hold on;
plot(t, X3(:, 2));
xlabel("Время, с");
ylabel("Угол, радиан");
legend("m = 15", "m = 12", "m = 18");
grid("minor");

figure
subplot(2, 1, 1)
plot(X1(:, 1), X1(:, 3));
hold on;
plot(X2(:, 1), X2(:, 3));
hold on;
plot(X3(:, 1), X3(:, 3));
xlabel("Радиус, м");
ylabel("Радиальная скорость, м/с");
legend("m = 15", "m = 12", "m = 18");

subplot(2, 1, 2)
plot(X1(:, 2), X1(:, 4));
hold on;
plot(X2(:, 2), X2(:, 4));
hold on;
plot(X3(:, 2), X3(:, 4));
xlabel("Угол, радиан");
ylabel("Угловая скорость, радиан/с");
legend("m = 15", "m = 12", "m = 18");

```

2.2 Результаты моделирования

В результате получаем следующие графики зависимости

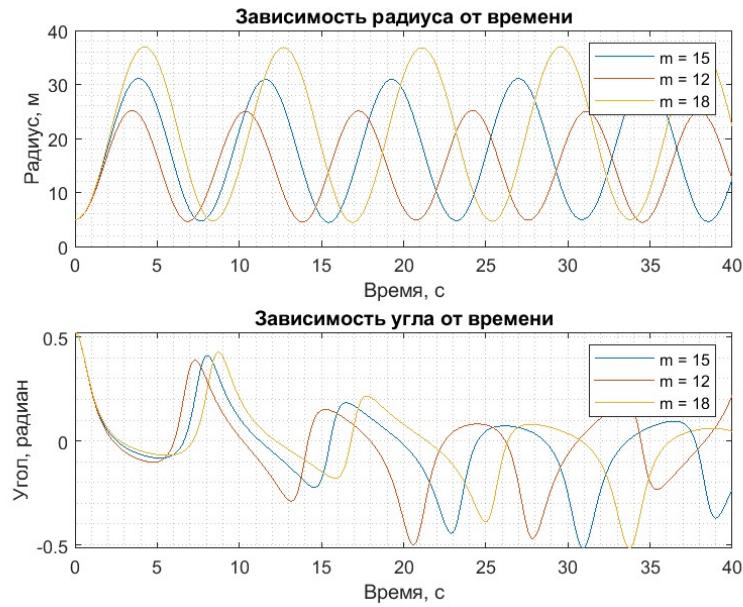


Рис. 2.1. Зависимость координат от времени

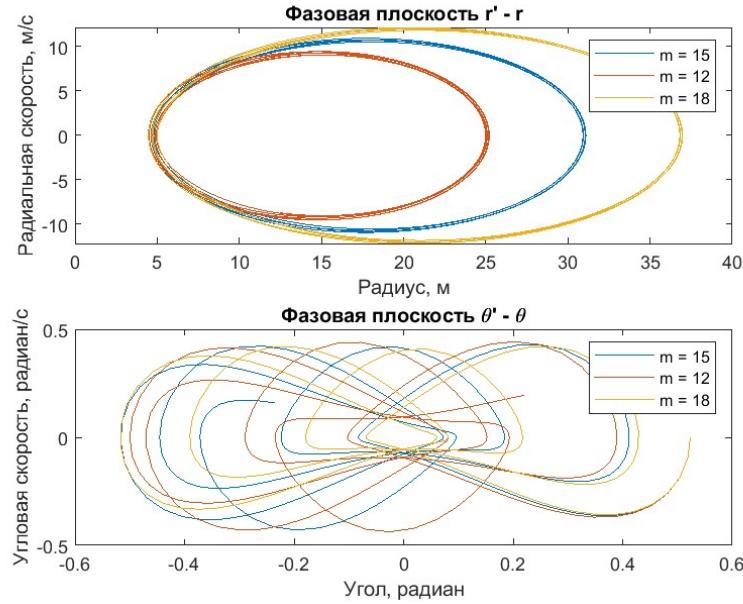


Рис. 2.2. Зависимость скоростей от координат

2.3 Вывод

Выполнено численное моделирование динамики маятника в среде MATLAB. Получены зависимости обобщенной координаты $\theta(t)$, её производной $\dot{\theta}(t)$, длины нити маятника $r(t)$ и радиальной скорости груза $\dot{r}(t)$ от времени. Построены фазовые портреты в плоскостях $(\theta, \dot{\theta})$ и (r, \dot{r}) , позволяющие визуально оценить характер установившихся колебаний системы.

Исследовано влияние изменения массы груза на 20 % на колебания. При таком изменении

форма графиков остается прежней, система демонстрирует устойчивые колебания, а траектории в фазовых плоскостях сохраняют аналогичный характер. Отличия проявляются лишь в величине амплитуды и частоте колебаний, но качественная динамика остаётся прежней. Таким образом, изменение параметра m в диапазоне $\pm 20\%$ не приводит к существенному изменению поведения системы и не нарушает её устойчивости.