Условие:

Цилиндрический бесконечно длинный диэлектрический конденсатор заряжен до разности потенциалов U и имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Диэлектрическая проницаемость меняется между обкладками по закону $\varepsilon = f(r)$

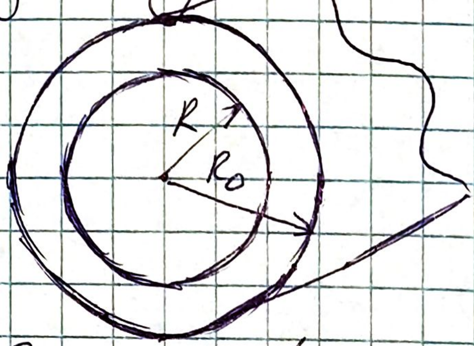

Рис. 1. условие задачи 1.2.

Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P, электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на внутренней σ_1' и внешней σ_2' поверхностях диэлектрика, распределение объемной плотности связанных зарядов $\rho(r)$, максимальную напряженность электрического поля E и ёмкость конденсатора на единицу длины.

$$\varepsilon = \frac{R_0^n}{R_0^n + R^n - r^n}$$

№ варианта	R_0/R	n
15	3/2	3

Дано:

$\frac{R_0}{R} = \frac{3}{2}$

$n = 3$

U

R_0

R_1

Найти

$E(r)$ - ?
$P(r)$ - ? графики
$D(r)$ - ?

σ_1' - ?
σ_2' - ?
$\rho'(r)$ - ?
E_{max} - ? максимальная напряженность электрического поля

Решение:

1). т.к. $\frac{R_0}{R} = \frac{3}{2} \Rightarrow R_0 = 1{,}5R$

Тогда:
$$\varepsilon = \frac{(1{,}5R)^3}{(1{,}5R)^3 + R^3 - r^3} = \frac{\frac{27}{8}R^3}{\frac{27}{8}R^3 + R^3 - r^3} =$$
$$= \frac{27R^3}{35R^3 - 8r^3}$$
$$\varepsilon(r) = \frac{27R^3}{35R^3 - 8r^3} \quad (1)$$

2). По т. Гаусса: $\oint_S \bar{D}d\bar{s} = q_{вн.}$

т.к. $\bar{D}$ сонаправлено с $\bar{S} \Rightarrow \oint_S \underset{const}{D}dS = q \Rightarrow$

$\Rightarrow D\oint_S dS = q \Rightarrow DS = q$

$S = L2\pi r \Rightarrow DL2\pi r = q \Rightarrow D(r) = \frac{q}{2\pi Lr} \quad (2)$

$D(R) = \frac{q}{2\pi LR} \qquad D(R_0) = \frac{q}{3\pi LR}$

3). $E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon(r)} = \frac{q(35R^3 - 8r^3)}{2\pi rL\varepsilon_0 \cdot 27R^3}$

$$E(r) = \frac{q(35R^3 - 8r^3)}{2\pi rL\varepsilon_0 \cdot 27R^3} \quad (3)$$

$E(R) = \frac{q(35R^3 - 8R^3)}{2\pi RL\varepsilon_0 \cdot 27R^3} = \frac{27q}{2\pi RL\varepsilon_0 \cdot 27} = \frac{q}{2\pi RL\varepsilon_0}$

E_{max} при $r = R$
$E_{max} = \frac{81U}{R(315\ln\frac{3}{2} - 19)}$

$E(R_0) = \frac{q(35R^3 - 8 \cdot \frac{27}{8}R^3)}{2\pi\frac{3}{2}RL\varepsilon_0 \cdot 27R^3} = \frac{8q}{2\pi\frac{3}{2}RL\varepsilon_0 \cdot 27} = \frac{8q}{81\pi RL\varepsilon_0}$

4) $U = \int_R^{R_0} E dr = \int_R^{R_0} \frac{q(35R^3 - 8r^3)}{2\pi rL\varepsilon_0 \cdot 27R^3} dr = \frac{q}{54\pi\varepsilon_0 LR^3} \int_R^{R_0} \frac{35R^3 - 8r^3}{r} dr =$

$= \frac{q}{54\pi L\varepsilon_0 R^3} \left(\int_R^{R_0} \frac{35R^3}{r} dr - 8\int_R^{R_0} r^2 dr \right) = \frac{q}{54\pi L\varepsilon_0 R^3} \left(35R^3 \ln(r) \Big|_R^{1{,}5R} - 8\frac{r^3}{3}\Big|_R^{1{,}5R} \right.$

$= \frac{q}{54\pi L\varepsilon_0 R^3} \left(35R^3 \ln\left(\frac{27}{8}\right) - \frac{19}{3}R^3 \right) = \frac{q(315\ln(\frac{3}{2}) - 19)}{162\pi L\varepsilon_0}$

$U = \frac{q(315\ln(\frac{3}{2}) - 19)}{162\pi L\varepsilon_0}$; $q = \frac{162\pi L\varepsilon_0 U}{315\ln(\frac{3}{2}) - 19}$

5) $P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E(r)$

$$\varepsilon - 1 = \frac{27R^3 - 35R^3 + 8r^3}{35R^3 - 8r^3} = \frac{8r^3 - 8R^3}{35R^3 - 8r^3}$$

Следовательно:

$$P = \frac{8r^3 - 8R^3}{35R^3 - 8r^3}\,\varepsilon_0\,\frac{q(35R^3 - 8r^3)}{54\pi r L \varepsilon_0 R^3} = \frac{4q(r^3 - R^3)}{27\pi r L R^3}$$

$$P(r) = \frac{4q(r^3 - R^3)}{27\pi r L R^3}$$

$$P(R) = 0 \quad ; \quad P(R_0) = \frac{4q\left(\frac{27}{8}R^3 - R^3\right)}{27\pi \frac{3}{2}R\, L R^3} = \frac{19q}{81\pi R L}$$

6) $-\rho' = \operatorname{div} P \Rightarrow \rho' = -\operatorname{div} P$

$\operatorname{div} P = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r P(r)\right) = \frac{12 q r^2}{27\pi L R^3}$ $\Bigg\} \Rightarrow \rho' = -\frac{4qr^2}{9\pi L R^3}$

7) $$\frac{C}{L} = \frac{q}{UL} = \frac{q\,162\pi L\varepsilon_0}{L\left(315\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 19\right)} = \frac{162\pi\varepsilon_0}{315\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 19}$$

$$\frac{C}{L} = \frac{162\pi\varepsilon_0}{315\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 19}$$

8) $\sigma'(r) = P_n = P(r)\cos(\bar{P} \wedge \bar{n})$

Для внутренней поверхности: $r = R$; $\cos\varphi = -1$

Для внешней поверхности: $r = \frac{3}{2}R$; $\cos\varphi = 1$.

Тогда

Для внутренней поверх: $\sigma_1' = \frac{4q(R^3 - R^3)}{27\pi L R\cdot R^3}\cdot(-1) = 0$

Для внешней поверх: $\sigma_2' = \frac{4q\left(\frac{27}{8}R^3 - R^3\right)}{27\pi L \frac{3}{2}R\cdot R^3} = \frac{19q}{81\pi L R}$

$\sigma_1' = 0 \qquad \sigma_2' = \frac{19q}{81\pi L R}$

Ответ: 1) $E(r) = \frac{q(35R^3 - 8r^3)}{54\pi r L\varepsilon_0 R^3}$; $P(r) = \frac{4q(r^3 - R^3)}{27\pi r L R^3}$; $D(r) = \frac{q}{2\pi L r}$

2) $E_{max} = \frac{81U}{R\left(315\ln\frac{3}{2} - 19\right)} = \frac{q}{2\pi R L \varepsilon_0}$

3) $\rho'(r) = -\frac{4qr^2}{9\pi L R^3}$

4) $\frac{C}{L} = \frac{162\pi\varepsilon_0}{315\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 19}$

5) $\sigma'_1 = 0$

$\sigma'_2 = \frac{19q}{81\pi LR}$

Графики: