



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана национальный исследовательский  
университет» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

**Модульное домашнее задание**  
**ПО ДИСЦИПЛИНЕ "Модели динамических объектов"**  
**Вариант 15.**

**Студент группы ИУ1-31Б**

Соин А. Д.  
«24» ноября 2025 г.

**Преподаватель**

Лобачев И. В.  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2025 г.

Москва, 2025

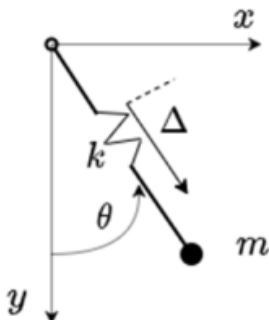
# Оглавление

<b>1</b>	<b>Часть 1.</b>	<b>2</b>
1.1	Решение . . . . .	2
1.2	Кинетическая энергия системы . . . . .	2
1.3	Потенциальная энергия системы . . . . .	3
1.4	Лагранжиан системы . . . . .	3
1.5	Вывод . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Часть 2.</b>	<b>4</b>
2.1	Решение . . . . .	4
2.2	Результаты моделирования . . . . .	6
2.3	Вывод . . . . .	6

# Часть 1.

Варианты 5, 10, 15, 20, 25, 30

Получить математическую модель математического пружинного маятника, используя формализм механики Лагранжа.



## 1.1 Решение

Запишем общий вид уравнения Лагранжа второго рода для динамики произвольного тела:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n \quad (1.1)$$

где:

- $L = T - P$  - Лагранжиан;
- $T$  - Кинетическая энергия системы;
- $P$  - Потенциальная энергия системы;
- $q_i$  - Обобщенные координаты;
- $Q_i^n$  - Обобщенные силы.

Координаты :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \\ y = -r \cos \theta \end{cases} \quad (1.2)$$

## 1.2 Кинетическая энергия системы

Проекция скорости на оси :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} = -\dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (1.3)$$

тогда полная скорость

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-\dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta)^2 = \quad (1.4)$$

$$= \dot{r}^2 \sin^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{r}^2 \cos^2 \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = \quad (1.5)$$

$$= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (1.6)$$

Отсюда кинетическая энергия

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} \quad (1.7)$$

### 1.3 Потенциальная энергия системы

Потенциальная энергия системы будет складываться из потенциальной энергии пружины и потенциальной энергии груза. Потенциальная энергия пружины:

$$P_1 = \frac{k(r - r_0)^2}{2} \quad (1.8)$$

Потенциальная энергия груза:

$$P_2 = mgy = -mgr \cos \theta \quad (1.9)$$

Потенциальная энергия системы:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{k(r - r_0)^2}{2} - mgr \cos \theta \quad (1.10)$$

### 1.4 Лагранжиан системы

Из (1.6) и (1.10) найдем Лагранжиан системы:

$$L = T - P = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} - \left( \frac{k(r - r_0)^2}{2} - mgr \cos \theta \right) = \dot{r}^2 \frac{m}{2} + r^2 \dot{\theta}^2 \frac{m}{2} - \frac{k(r - r_0)^2}{2} + mgr \cos \theta \quad (1.11)$$

Найдем первые производные по  $r$  и  $\theta$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 - k(r - r_0) + mg \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta \end{cases} \quad (1.12)$$

Найдем производные по  $\dot{r}$  и  $\dot{\theta}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \end{cases} \quad (1.13)$$

Продифференцируем полученные производные по  $t$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 2\ddot{r} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \end{cases} \quad (1.14)$$

Тогда уравнение Лагранжа имеет следующий вид:

$$\begin{cases} m\ddot{r} - (m\dot{\theta}^2 - k(r - r_0) + mg \cos \theta) = 0 \\ 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - (-mgr \sin \theta) = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

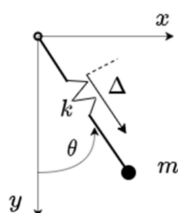
$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \theta = 0 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

### 1.5 Вывод

Получена математическая модель пружинного маятника с использованием формализма механики Лагранжа. Модель является нелинейной и явной.

## Часть 2.

Выполнить численное моделирование системы из ДЗ №1 с произвольными начальными условиями для каждой из обобщенных координат. Исследовать влияние изменения указанного параметра на 20% в обе стороны от указанного значения на динамику системы. По результатам моделирования построить графики изменения обобщенных координат во времени, а также фазовый портрет системы. Вектор времени принять от 0 с шагом 0.01 секунды до того времени, когда система установится в колебаниях (2-3 периода).



Вариант	k	m	g	Параметр
15	10	15	9.815	k

### 2.1 Решение

Выполним численное моделирование системы, для этого приведем уравнение к форме Коши, представленной в функции **difur**. Для решения системы используем функцию **ode45** реализующую метод Рунге-Кутты 4-5 порядка. Ниже приведен код в MATLAB, реализующий задачу:

```
function dX = difur(t, X)
    global inputStruct;
    k = inputStruct.k;
    m = inputStruct.m;
    g = inputStruct.g;
    r0 = inputStruct.r0;

    dX = zeros(4,1);

    dX(1) = X(3);
    dX(2) = X(4);
    dX(3) = X(1) * X(4)^2 - k / m * (X(1) - r0) + g*cos(X(2));
    dX(4) = -2 * X(3) * X(4) / (X(1)) - g*sin(X(2))/X(1);
end

global inputStruct;
inputStruct.k = 10;
inputStruct.m = 15;
inputStruct.g = 9.815;
inputStruct.r0 = 3;

func = @difur;
X0 = [5;pi/6;0;0];
t = 0:0.1:20;
```

```

[~,X1] = ode45(func,t,X0);
inputStruct.m = 12;
[~,X2] = ode45(func,t,X0);
inputStruct.m = 18;
[~,X3] = ode45(func,t,X0);

figure
subplot(2,1,1);
plot(t, X1(:, 1));
hold on;
plot(t, X2(:, 1));
hold on;
plot(t, X3(:, 1));
xlabel("Время, с");
ylabel("Радиус, м");
legend("m = 15", "m = 12", "m = 18");
grid("minor");

subplot(2,1,2);
plot(t, X1(:, 2));
hold on;
plot(t, X2(:, 2));
hold on;
plot(t, X3(:, 2));
xlabel("Время, с");
ylabel("Угол, радиан");
legend("m = 15", "m = 12", "m = 18");
grid("minor");

figure
subplot(2, 1, 1)
plot(X1(:, 1), X1(:, 3));
hold on;
plot(X2(:, 1), X2(:, 3));
hold on;
plot(X3(:, 1), X3(:, 3));
xlabel("Радиус, м");
ylabel("Радиальная скорость, м/с");
legend("m = 15","m = 12", "m = 18");

subplot(2, 1, 2)
plot(X1(:, 2), X1(:, 4));
hold on;
plot(X2(:, 2), X2(:, 4));
hold on;
plot(X3(:, 2), X3(:, 4));
xlabel("Угол, радиан");
ylabel("Угловая скорость, радиан/с");
legend("m = 15","m = 12", "m = 18");

```

## 2.2 Результаты моделирования

В результате получаем следующие графики зависимости

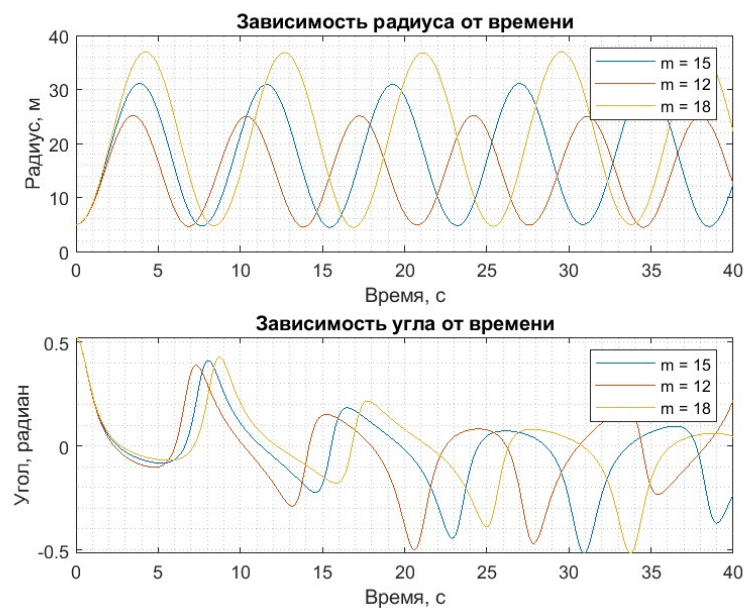


Рис. 2.1. Зависимость координат от времени

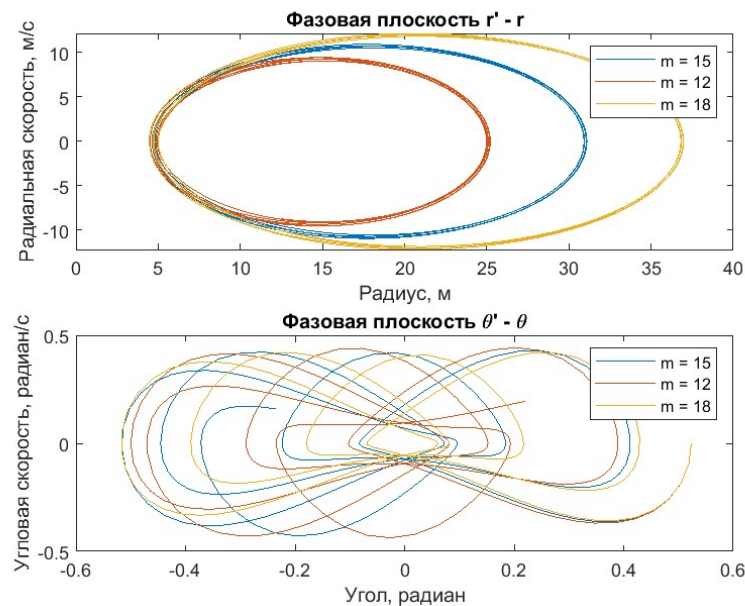


Рис. 2.2. Зависимость скоростей от координат

## 2.3 Вывод

Выполнено численное моделирование динамики маятника в среде MATLAB. Получены зависимости обобщенной координаты  $\theta(t)$ , её производной  $\dot{\theta}(t)$ , длина нити маятника  $r(t)$  и радиальной скорости груза  $\dot{r}(t)$  от времени. Построены фазовые портреты в плоскостях  $(\theta, \dot{\theta})$  и  $(r, \dot{r})$ , позволяющие визуально оценить характер установившихся колебаний системы.

Исследовано влияние изменения массы груза на 20 % на колебания. При таком изменении

форма графиков остается прежней, система демонстрирует устойчивые колебания, а траектории в фазовых плоскостях сохраняют аналогичный характер. Отличия проявляются лишь в величине амплитуды и частоте колебаний, но качественная динамика остаётся прежней. Таким образом, изменение параметра  $m$  в диапазоне  $\pm 20\%$  не приводит к существенному изменению поведения системы и не нарушает её устойчивости.