По коаксиальному кабелю, радиусы внешнего и внутреннего проводника которого равны R_0 и R соответственно, протекает ток I. Пространство между проводниками заполнено магнетиком, магнитная проницаемость которого меняется по закону $\mu = f(r)$

Построить графики распределения модулей векторов индукции B и напряженности H магнитного поля, а также вектора намагниченности в зависимости от r в интервале от R до R_0. Определить поверхностную плотность токов намагничивания i'_n на внутренней и внешней поверхностях магнетика и распределение объемной плотности токов намагничивания $i'_{об}(r)$. Определить индуктивность единицы длины кабеля.

$$\mu = \frac{R^n + r^n}{2R^n}; \quad \frac{R_0}{R} = \frac{3}{1}; \quad n = 3$$

Дано:

$\mu = \frac{R^n + r^n}{2R^n}$

$\frac{R_0}{R} = \frac{3}{1}$

$n = 3$

Найти:

$H(r)$ - ?

$B(r)$ - ?

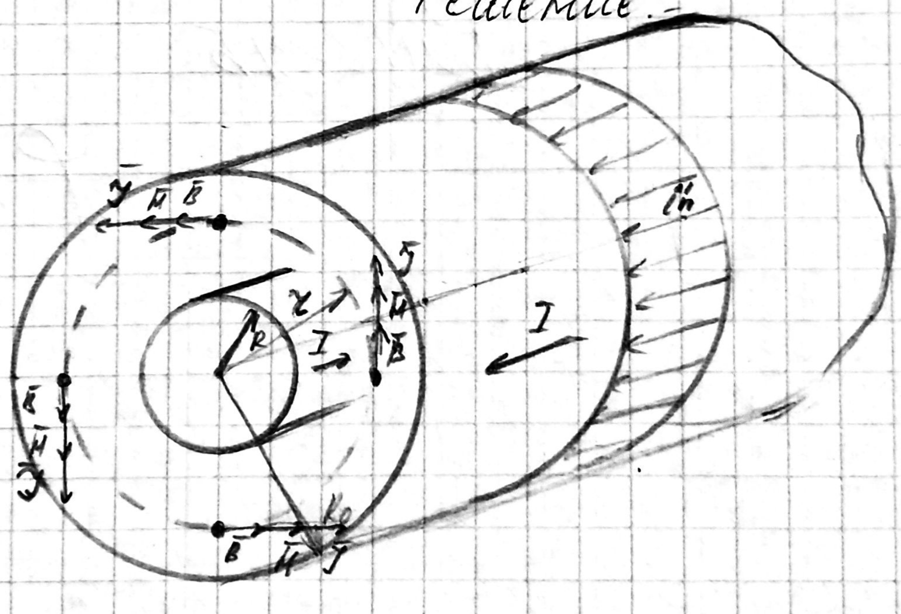
$J(r)$ - ?

i'_n - ?

$i'_{об}(r)$ - ?

L - ?

Решение:



1) Найдем $H(r)$ из т. о циркуляции вектора $\bar{H}$.

$$\oint(\bar{H}, d\bar{l}) = I; \quad H\oint dl = I \Rightarrow Hl = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \qquad R \le r \le R_0$$

2) $$B = \mu\mu_0 H = \frac{R^3 + r^3}{2R^3}\mu_0 \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I (R^3 + r^3)}{4\pi R^3 r}$$

3) $$\bar{J} = \varkappa \bar{H} = (\mu - 1)\bar{H} = \left(\frac{R^3 + r^3}{2R^3} - 1\right)\frac{I}{2\pi r} = \frac{R^3 + r^3 - 2R^3}{2R^3}\frac{I}{2\pi r} = \frac{r^3 - R^3}{2R^3}\frac{I}{2\pi r}$$

$J = \frac{I(r^3 - R^3)}{4\pi R^3 r}$

4) $\bar{j}' = \text{rot}\,\bar{J}$

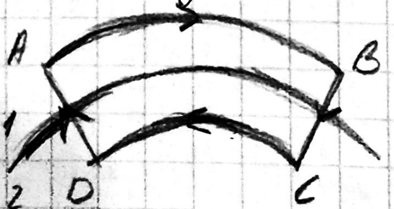
$\text{rot}\,\bar{J} = \left(\frac{\partial J_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r J_\varphi)}{\partial z}\right)\bar{e}_r + \left(\frac{\partial J_r}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial r}\right)e_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r J_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial J_r}{\partial \varphi}\right)\bar{e}_z$

В данной задаче $J_r = J_z = 0$, также $\frac{\partial J_\varphi}{\partial z} = 0$

Получаем: $(\text{rot}\,\bar{J})_z = (\bar{j}')_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(rJ_\varphi)}{\partial r}$

$\vec{i}'_{об}(r) = (\bar{j}')_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{I(r^3-R^3)}{4\pi R^3 r}\right)\right) = \frac{3rI}{4\pi R^3}$; $\bar{i}'_{об}(r) = \frac{3rI}{4\pi R^3 r}$

5) Для опр. линейной плотности поверхности токов намагничивания используем т. о циркуляции вектора намагничивания $\bar{J}$



1 - вакуум
2 - среда

$\oint(\bar{J}, d\bar{l}) = I'$ к бесконечно малому ABCD

I' - ток намагниченности

$(AD = BC) << (AB = CD)$

$\int_{BC}(\bar{J}, d\bar{l}) = \int_{DA}(\bar{J}, d\bar{l}) = 0$

В вакууме $J_1 = 0$, т.к. $\mu = 1 \Rightarrow \mu - 1 = 0$

В среде $J_2 = \frac{I(r^3-R^3)}{4\pi R^3 r}$

$\oint_{ABCD}(\bar{J}, d\bar{l}) = (J_2 - J_1)\, l$; $I'_{пов} = \int_0^l i'_n\, dl = i'_n\, l \Rightarrow i'_n = J_1 - J_2$

$(i'_n)_{внутр} = J_1 - J_2 = 0 - \frac{(R^3-R^3)I}{4\pi R^3 R} = 0$

$(i'_n)_{внеш} = J_1 - J_2 = 0 - \frac{I(3^3R^3 - R^3)}{12\pi R^4} = -\frac{26I}{12\pi R}$; $i'_n = -\frac{13I}{6\pi R}$

6) Индуктивность единицы длины кабеля: $L = \frac{\Phi}{I}$, $\Phi = \int_R^{R_0}(\bar{B}, d\bar{S})$

$\Phi = \int_R^{3R} B\,dr = \int_R^{3R} \frac{\mu_0 I(R^3+r^3)}{4\pi R^3 r}\, dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\int\frac{(R^3+r^3)}{r}\,dr =$

$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\left(R^3\ln|3R| + \frac{27R^3}{3} - R^3\ln|R| - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\left(\frac{26R^3}{3} - R^3\ln 3\right) =$

$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{26}{3} - \ln 3\right)$; Тогда $L = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{26}{3} - \ln 3\right)$

7) Проверка:

$I' = \int^{2\pi R_0} i'_n\,dl + \int_S i'_{об}(r)\,2\pi r\,dr = -\frac{13I\cdot 6\pi R}{6\pi R} + 13I = -13I + 13I = 0$

всё верно.

8) Построение графиков.

$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$ - гипербола $B(r) = \frac{\mu_0 I (R^3 + r^3)}{4\pi R^3 r}$ - парабола $J(r) = \frac{I(r^3 - R^3)}{4\pi R^3 r}$ - парабола

$H(R) = \frac{I}{2\pi R}$

$H(R_0) = \frac{I}{6\pi R}$

$H(\frac{3R}{2}) = \frac{I}{3\pi R}$

$B(R) = \frac{I \mu_0}{2\pi R}$

$B(R_0) = \frac{7 I \mu_0}{3\pi R}$

$B(\frac{3R}{2}) = \frac{35 \mu_0 I}{48\pi R}$

$J(R) = 0$

$J(R_0) = \frac{13 I}{6\pi R}$

$J(\frac{3R}{2}) = \frac{19 I}{48\pi R}$