第一篇　极限论

第一部分　极限初论

第一章　变量与函数

§1.　函数的概念

1. 解下列不等式，并画出x的范围：

(1) $-2 < \dfrac{1}{x+2}$

(2) $(x-1)(x+2)(x-3) < 0$

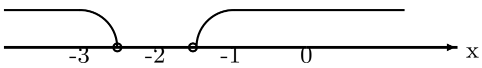
(3) $\dfrac{1}{x-1} < a$

(4) $0 \leqslant \cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$

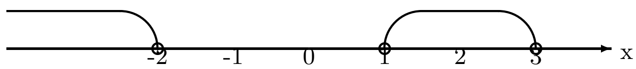
(5) $\begin{cases} x^2 - 16 < & 0 \\ x^2 - 2x \geqslant & 0 \end{cases}$

解:

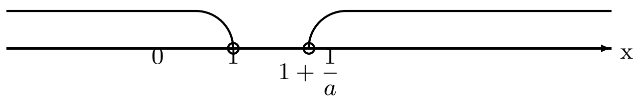
(1) $x < -\dfrac{5}{2}$或$x > -\dfrac{3}{2}$



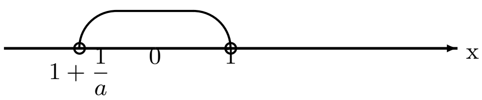
(2) $1 < x < 3$或$x < -2$



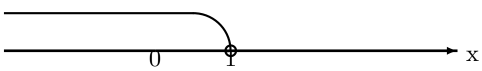
(3) 当$a > 0$时，$x < 1$或$x > 1 + \dfrac{1}{a}$；



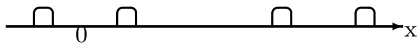
当$a < 0$时，$1 + \dfrac{1}{a} < x < 1$



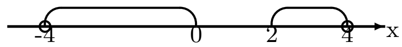
当$a = 0$时，$x < 1$



(4) $2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$或$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi-\dfrac{\pi}{3}(k\in Z)$



(5) $-4<x\leqslant 0$或$2\leqslant x<4$



2. 证明下列绝对值不等式：

(1) $|x-y|\geqslant||x|-|y||$

(2) $|x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

(3) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$

证明:

(1) 因$|x||y|\geqslant xy$，则$(x-y)^2\geqslant(|x|-|y|)^2$，于是$|x-y|\geqslant||x|-|y||$

(2) 用数学归纳法证明.

(i) 当$n=2$时，由$|x_1+x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|$，得结论成立.

(ii) 假设当$n=k$时结论成立，即有$|x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|$.
则当$n=k+1$时，$|x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}|\leqslant|x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k|+|x_{k+1}|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|$
综上可知，对一切自然数n，$|x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$均成立.

(3) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-|x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$

3. 解下列绝对值不等式，并画出x的范围：

(1) $|x|>|x+1|$

(2) $2<\dfrac{1}{|x|}<4$

(3) $|x|>A$

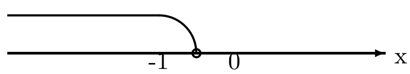
(4) $|x-a|<\eta,\eta$为常数，$\eta>0$

(5) $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|>\dfrac{x-2}{x+1}$

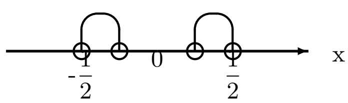
(6) $2<\dfrac{1}{|x+2|}<3$

解:

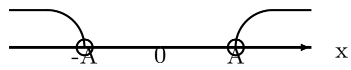
(1) $x<-\dfrac{1}{2}$



(2) $-\dfrac{1}{2}<x<-\dfrac{1}{4}$或$\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}$

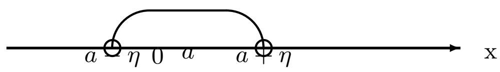


(3) 当$A \geqslant 0$时，$x < -A$或$x > A$

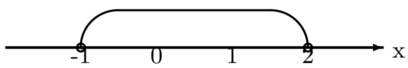


当$A < 0$时，$x \in R$

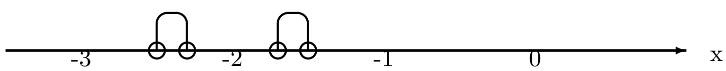
(4) $a - \eta < x < a + \eta$



(5) 原式等价于$\dfrac{x-2}{x+1} < 0$，则$-1 < x < 2$



(6) $-\dfrac{5}{3} < x < -\dfrac{3}{2}$或$-\dfrac{5}{2} < x < -\dfrac{7}{3}$



4. 求下列函数的定义域及它在给定点上的函数值：

(1) $y = f(x) = -x + \dfrac{1}{x}$的定义域及$f(-1), f(1)$和$f(2)$；

(2) $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$的定义域及$f(0), f(a)$和$f\left(-\dfrac{a}{2}\right)$；

(3) $s = s(t) = \dfrac{1}{t}e^{-t}$的定义域及$s(1), s(2)$；

(4) $y = g(\alpha) = \alpha^2 \tan\alpha$的定义域及$g(0), g\left(\dfrac{\pi}{4}\right), g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(5) $x = x(\theta) = \sin\theta + \cos\theta$的定义域及$x\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), x(-\pi)$

(6) $y = f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$的定义域及$f(0), f(-1)$

解:

(1) 函数的定义域为$X=(-\infty,0)\bigcup(0,\infty)$，$f(-1)=0,f(1)=0,f(2)=-\dfrac{3}{2}$

(2) 函数的定义域为$X=[-|a|,|a|]$，$f(0)=|a|,f(a)=0,f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|a|$

(3) 函数的定义域为$(-\infty,0)\bigcup(0,\infty)$，$s(1)=\dfrac{1}{e},s(2)=\dfrac{1}{2e^2}$

(4) 函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\in R,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$，$g(0)=0,g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2}{16},g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\pi^2}{16}$

(5) 函数的定义域为$X=(-\infty,\infty)$，$x\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1,x(-\pi)=-1$

(6) 函数的定义域为$X=(-\infty,-2)\bigcup(-2,1)\bigcup(1,+\infty)$，$f(0)=-\dfrac{1}{2},f(-1)=-\dfrac{1}{2}$

5. 求下列函数的定义域及值域：

(1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$

(2) $y=\sqrt{\cos x}$

(3) $y=\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$

(4) $y=\dfrac{1}{\sin\pi x}$

解:

(1) 函数的定义域为$X=[-1,2]$，值域为$\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$

(2) 函数的定义域为$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$ $(k\in Z)$，值域为$[0,1]$

(3) 函数的定义域为$\left(\dfrac{1}{2k+1},\dfrac{1}{2k}\right)$ $(k\in Z)$，值域为$(-\infty,0]$

(4) 函数的定义域为$(n-1,n)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为$(-\infty,-1]\bigcup[1,+\infty)$

6. 设$f(x)=x+1,\varphi(x)=x-2$，试解方程$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)+|\varphi(x)|$
解：由已知，得$f(x)\varphi(x)\geqslant 0$即$(x+1)(x-2)\geqslant 0$，则$x\geqslant 2$或$x\leqslant -1$.

7. 设$f(x)=(|x|+x)(1-x)$，求满足下列各式的x值：

(1) $f(0)=0$

(2) $f(x)<0$

解:

(1) 要$f(x)=0$，则$|x|+x=0$或$1-x=0$，即$x\leqslant 0$或$x=1$

(2) 因$|x|+x\geqslant 0$，则要$f(x)<0$，只要$1-x<0$即可，即$x>1$

8. 图1-5表示电池组V、固定电阻R_0和可变电阻R组成的电路.在一段不长的时间内，A,B两点间的电压V可以看成一个常量.求出电流I和可变电阻R的函数式.
解：由已知及物理学知识，得$V=I(R_0+R)$.

9. 在一个圆柱形容器内倒进某种溶液，该圆柱形容器的底半径是a，高为h，倒进溶液的高度是x（图1-6）. 该溶液的容积V和x之间的函数关系$V=V(x)$，并写出它的定义域和值域.
解：由已知，得$V=\pi a^2x$，它的定义域为$[0,h]$，值域为$[1,\pi a^2h]$

10. 某灌溉渠的截面积是一个梯形，如图1-7，底宽2米，斜边的倾角为45^o，CD表示水面，求截面$ABCD$的面积S与水深h的函数关系.
解：由已知及图，得$S=h(h+2)$.

11. 有一深为H的矿井，如用半径为R的卷扬机以每秒钟ω弧度的角速度从矿井内起吊重物，求重物底面与地面的距离s和时间t的函数关系（图1-8）.
解：由已知及图，得$s=H-\omega Rt\left(t\in\left[0,\dfrac{H}{\omega t}\right]\right)$

12. 设$y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求$f(-2),f(-1),f(0),f(1)$和$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
解：由已知，得$f(-2)=5,f(-1)=2,f(0)=-1,f(1)=0,f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

13. 设$x(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<10\\ 1+t^2, & 10\leqslant t\leqslant 20\\ t-10, & 20<t\leqslant 30\end{cases}$，求$x(0),x(5),x(10),x(15),x(20),x(25),x(30)$，并画出这个函数的图形.

解：由已知，得$x(0)=0,x(5)=0,x(10)=101,x(15)=226,x(20)=401,x(25)=15,x(30)=20$

14. 邮资y是信件重量x的函数.按照邮局的规定，对于国内的外埠平信，按信件重量，每重20克应付邮资8分，不足20克者以20克计算.当信件的重量在60克以内时，试写出这个函数的表达式，并画出它的图形.

解：由已知，得$y=f(x)=\begin{cases}8, & 0<x\leqslant 20\\ 16, & 20<x\leqslant 40\\ 24, & 40<x\leqslant 60\end{cases}$

15. 脉冲发生器产生一个三角波，其波形如图1-9，写出函数关系$u=u(t)(0\leqslant t\leqslant 20)$.

解：由已知及图，得$u=u(t)=\begin{cases}1.5t, & 0\leqslant t\leqslant 10\\ 30-1.5t, & 10<t\leqslant 20\end{cases}$

16. 下列函数f和φ是否相等，为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x},\varphi(x)=1$

(2) $f(x)=x,\varphi(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=1,\varphi(x)=\sin^2x+\cos^2x$

解：

(1) 因f的定义域为$(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$，$\varphi$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，故这两个函数不相等.

(2) 因$f(x)=x,\varphi(x)=|x|$，故这两个函数的函数表达式不一样，则这两个函数不相等.

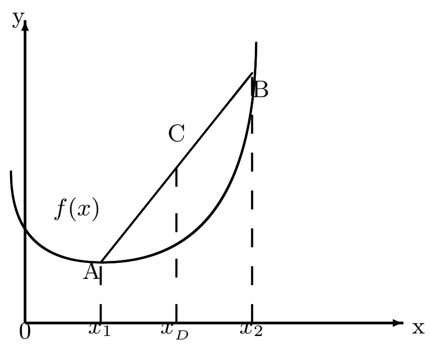
(3) 因$\varphi(x)=\sin^2x+\cos^2x=1$恒成立，故这两个函数相等.

17. 证明对于直线函数$f(x)=ax+b$，若自变数值$x=x_n(n=1,2,\cdots)$组成一等差数列，则对应的函数值$y_n=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$也组成一等差数列.

证明：设x_{m-1},x_m,x_{m+1}是x_n中任意3个相邻的数$(2\leqslant m\leqslant n)$
据题意，得$2x_m=x_{m-1}+x_{m+1}$
又$y_n=f(x_n)=ax_n+b$，则$y_{m-1}=ax_{m-1}+b,y_m=ax_m+b,y_{m+1}=ax_{m+1}+b$，于是$2y_m=2ax_m+2b,y_{m+1}+y_{m-1}=ax_{m+1}+b+ax_{m-1}+b=2ax_m+2b$，从而$2y_m=y_{m-1}+y_{m+1}$
又x_{m-1},x_m,x_{m+1}是x_n中任意3个相邻的数，则y_{m-1},y_m,y_{m+1}是y_n中任意3个相邻的数，于是$y_n=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$也组成一等差数列.

18. 如果曲线$y=f(x)$上的任一条弦都高于它所限的弧（图1-10），证明不等式$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$对于所有的$x_1,x_2(x_1\neq x_2)$成立（凡具有上述特性的函数叫做凸函数）.

证明：在曲线上任取两点$A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$，连接$AB$，取其中点$C(x_C,y_C)$，则$f(x_1)+f(x_2)=2y_C,x_1+x_2=2x_C$
又曲线上$x_D=\dfrac{x_1+x_2}{2}$所对点的纵坐标为$y_D=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，则$x_C=x_D$
又曲线$y=f(x)$上的任一条弦都高于它所限的弧且x_1,x_2为弦与弧的交点，则$y_C>y_D$即$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$对于所有的$x_1,x_2(x_1\neq x_2)$成立.



19. 证明下列各函数在所示区间内是单调增加的函数：

(1) $y=x^2(0\leqslant x<+\infty)$

(2) $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

证明：

(1) 设$0 \leqslant x_1 < x_2$
则$y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) > 0$，于是函数$y = x^2$当$0 \leqslant x$时严格单调增加.

(2) 设$-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$
则$y_2 - y_1 = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\dfrac{x_2 + x_1}{2}\sin\dfrac{x_2 - x_1}{2}$
又$-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，则$-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \dfrac{\pi}{2}, 0 < \dfrac{x_2}{x_1}2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，于是$\cos\dfrac{x_1 + x_2}{2} > 0, \sin\dfrac{x_2 - x_1}{2} > 0$，从而$y_2 - y_1 > 0$即函数$y = \sin x$当$-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$时严格单调增加.

20. 证明下列函数在所示区间内是单调减少的函数：

(1) $y = x^2(-\infty < x \leqslant 0)$

(2) $y = \cos x(0 \leqslant x \leqslant \pi)$

证明:

(1) 设$0 \leqslant x_1 < x_2$
则$y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) < 0$，于是函数$y = x^2$当$x \leqslant 0$时严格单调减少.

(2) 设$0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$
则$y_2 - y_1 = \cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\dfrac{x_2 + x_1}{2}\sin\dfrac{x_2 - x_1}{2}$
又$0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$，则$0 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \pi, 0 < \dfrac{x_2}{x_1}2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，于是$\sin\dfrac{x_1 + x_2}{2} > 0, \sin\dfrac{x_2 - x_1}{2} > 0$，从而$y_2 - y_1 < 0$即函数$y = \cos x$当$0 \leqslant x \leqslant \pi$时严格单调减少.

21. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $y = x + x^2 - x^5$

(2) $y = a + b\cos x$

(3) $y = x + \sin x + e^x$

(4) $y = x\sin\dfrac{1}{x}$

(5) $y = sgnx = \begin{cases} 1, & 当x > 0时 \\ 0, & 当x = 0时 \\ -1 & 当x < 0时 \end{cases}$

(6) $y = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}, & 当\dfrac{1}{2} < x < +\infty时 \\ \sin x^2, & 当-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}时 \\ \dfrac{1}{2}x^2, & 当-\infty < x < -\dfrac{1}{2}时 \end{cases}$

解:

(1) 因$y = f(x) = x + x^2 - x^5$，则$f(-x) = -x + x^2 + x^5$，故$f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$，于是此函数是非奇非偶函数.

(2) 因$y = f(x) = a + b\cos x$，则$f(-x) = a + b\cos(-x) = a + b\cos x = f(x)$，于是此函数是偶函数.

(3) 因$y = f(x) = x + \sin x + e^x$，则$f(-x) = -x - \sin x + e^{-x}$，故$f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$，于是此函数是非奇非偶函数.

(4) 因$y = f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$，则$f(-x) = -x\sin\dfrac{1}{-x} = x\sin\dfrac{1}{x} = f(x)$，于是此函数是偶函数.

(5) 因$y = f(x) = \begin{cases} 1, & 当x > 0时 \\ 0, & 当x = 0时 \\ -1 & 当x < 0时 \end{cases}$，
则$f(-x) = \begin{cases} 1, & 当-x > 0时 \\ 0, & 当-x = 0时 \\ -1 & 当-x < 0时 \end{cases} = \begin{cases} -1, & 当x > 0时 \\ 0, & 当x = 0时 \\ 1 & 当x < 0时 \end{cases} = -f(x)$，于是此函数是奇函数.

(6) 因$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}, & 当\dfrac{1}{2}<x<+\infty时\\ \sin x^2, & 当-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}时\\ \dfrac{1}{2}x^2, & 当-\infty<x<-\dfrac{1}{2}时\end{cases}$,

则$f(-x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(-x)^2}, & 当\dfrac{1}{2}<-x<+\infty时\\ \sin(-x)^2, & 当-\dfrac{1}{2}\leqslant -x\leqslant\dfrac{1}{2}时\\ \dfrac{1}{2}(-x)^2, & 当-\infty<-x<-\dfrac{1}{2}时\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & 当\dfrac{1}{2}<x<+\infty时\\ \sin x^2, & 当-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}时\\ \dfrac{2}{x^2}, & 当-\infty<x<-\dfrac{1}{2}时\end{cases}$,

故$f(-x)\neq f(x), f(-x)\neq -f(x)$，于是此函数是非奇非偶函数.

22. 试证两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是奇函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

证明: 设$f_1(x),f_2(x)$为定义在$(-a,a)(a>0)$内的偶函数，$g_1(x),g_2(x)$为定义在$(-a,a)(a>0)$内的奇函数，$F_1(x)=f_1(x)f_2(x), F_2(x)=g_1(x)g_2(x), F_3(x)=f_1(x)f_2(x)$

则$f_1(-x)=f_1(x), f_2(-x)=f_2(x), g_1(x)=-g_1(x), g_2(-x)=-g_2(x)$，于是

$$F_1(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F_1(x)$$
$$F_2(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=(-g_1(x))(-g_2(x))=g_1(x)g_2(x)=F_2(x)$$
$$F_3(-x)=f_1(-x)g_1(-x)=f_1(x)(-g_1(x))=-f_1(x)g_1(x)=-F_3(x)$$

从而$F_1(x)$是偶函数；$F_2(x)$是偶函数；$F_3(x)$是奇函数.

23. 设$f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$内的任何函数，证明$F_1(x)\equiv f(x)+f(-x)$是偶函数，$F_2(x)\equiv f(x)-f(-x)$是奇函数.写出对应于下列函数的$F_1(x),F_2(x)$：

(1) $y=a^x$

(2) $y=(1+x)^n$

证明: 因$F_1(-x)=f(-x)+f(x)=F_1(x)$，则$F_1(x)=f(x)+f(-x)$是偶函数

又$F_2(-x)=f(-x)-f(x)=-F_2(x)$，则$F_2(x)=f(x)-f(-x)$是奇函数.

(1) $F_1(x)=f(x)+f(-x)=a^x+a^{-x}, F_2(x)=f(x)-f(-x)=a^x-a^{-x}$

(2) $F_1(x)=f(x)+f(-x)=(1+x)^n+(1-x)^n, F_2(x)=f(x)-f(-x)=(1+x)^n-(1-x)^n$

24. 说明下列函数哪些是周期函数，并求最小周期：

(1) $y=\sin^2 x$

(2) $y=\sin x^2$

(3) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

(4) $y=\cos\dfrac{\pi}{4}x$

(5) $y=|\sin x|+|\cos x|$

(6) $y=\sqrt{\tan x}$

(7) $y=x-[x]$

(8) $y=\sin n\pi x$

解:

(1) 因$y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$，则$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(2) 假设$y=\sin x^2$为一周期函数且$T=\omega>0$

据周期函数的定义，对任何$x\in(-\infty,+\infty)$，有$\sin(x+\omega)^2=\sin x^2$，特别对$x=0$也应该成立，则$\sin\omega^2=0$，于是$\omega^2=k\pi, \omega=\sqrt{k\pi}(k\in Z^+)$

又对$x=\sqrt{2}\omega=\sqrt{2k\pi}$也成立，故$\sin(\sqrt{2}\omega+\omega)^2=\sin\omega^2=0$，则$(\sqrt{2}+1)^2k\pi=n\pi(n\in Z^+)$，于是$(\sqrt{2}+1)^2=\dfrac{k}{n}(k,n\in Z^+)$

又$(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}\in Q^-$，而$\dfrac{k}{n}\in Q^+$，则假设不成立，即函数$y=\sin x^2$不是周期函数.

(3) 因$y_1=\sin x$的$T=2\pi$；$y_2=\dfrac{1}{2}\sin 2x$的$T=\pi$，则$y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$的$T=2\pi$.

(4) $T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{4}}=8$

(5) 因$f(x)=|\sin x|+|\cos x|, f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$
据经验，知$y=|\sin x|+|\cos x|$的$T=\frac{\pi}{2}$.

(6) 因$f(x)=\tan x$的$T=\pi$，则$y=\sqrt{\tan x}$的$T=\pi$.

(7) 因$y=x-[x]=(x)$，则$y=x-[x]$的$T=1$.

(8) $T=\frac{2\pi}{n\pi}=\frac{2}{n}$

§2. 复合函数和反函数

1. 下列函数能否构成复合函数$y=f(\varphi(x))$，如果能够构成则指出此复合函数的定义域和值域：

(1) $y=f(u)=2^u, u=\varphi(x)=x^2$

(2) $y=f(u)=\ln u, u=\varphi(x)=1-x^2$

(3) $y=f(u)=u^2+u^3, u=\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数时}\\ -1, & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$

(4) $y=f(u)=2$，定义域为U_1，$u=\varphi(x)$，定义域为X，值域为U_2

(5) $y=f(u)=\sqrt{u}, u=\varphi(x)=\cos x$

解：

(1) 因$y=f(u)=2^u$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$u=\varphi(x)=x^2$的值域为$[0,+\infty)$
则此函数能构成复合函数$y=2^{x^2}$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[1,+\infty)$

(2) 因$y=f(u)=\ln u$的定义域为$(0,+\infty)$，$u=\varphi(x)=1-x^2$的值域为$(-\infty,1]$
则此函数能构成复合函数$y=\ln(1-x^2)$，它的定义域为$(-1,1)$，值域为$(-\infty,0]$

(3) 因$y=f(u)=u^2+u^3$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，
$u=\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数时}\\ -1, & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$ 的值域为$\{-1,1\}$
则此函数能构成复合函数$y=\begin{cases}2, & \text{当}x\text{为有理数时}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{0,2\}$

(4) 因$y=f(u)=2$的定义域为U_1，$u=\varphi(x)$的值域为U_2
当$U_1\bigcap U_2\neq\phi$时，此函数能构成复合函数$y=2$，它的定义域视具体函数而定，值域为$\{2\}$；
当$U_1\bigcap U_2=\phi$时，此函数不能构成复合函数

(5) 因$y=f(u)=\sqrt{u}$的定义域为$[0,+\infty)$，$u=\varphi(x)=\cos x$的值域为$[-1,1]$
则此函数能构成复合函数$y=\sqrt{\cos x}$，它的定义域为$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为$[0,1]$

2. 设$f(x)=ax^2+bx+c$，证明$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$

证明：由已知，得
$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=a(x+3)^2+b(x+3)+c-3[a(x+2)^2+b(x+2)+c]+3[a(x+1)^2+b(x+1)+c]-(ax^2+bx+c)=a[(x+3)^2-x^2]+b(x+3-x)-3a[(x+2)^2-(x+1)^2]-3b[x+2-(x+1)]=6ax+9a+3b-3a(2x+3)-3b\equiv 0$

3. (1) 设$y=f(x)=a+bx+\dfrac{c}{x}$，求$f\left(\dfrac{2}{x}\right)$

(2) 设$y=f(x)=x^2\ln(1+x)$，求$f(e^{-x})$

(3) 设$y=f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$，求$f(x^2)$及$f(-x^2)$

(4) 设$y=f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$，求$f(a\tan x)$

解：

(1) 因$y=f(x)=a+bx+\dfrac{c}{x}$，则$f\left(\dfrac{2}{x}\right)=a+\dfrac{2b}{x}+\dfrac{c}{\frac{2}{x}}=a+\dfrac{2b}{x}+\dfrac{cx}{2}=\dfrac{cx^2+2ax+4b}{2x}$

(2) 因$y=f(x)=x^2\ln(1+x)$，则$f(e^{-x})=(e^{-x})^2\ln(1+e^{-x})=\dfrac{\ln(e^x+1)-x}{e^{2x}}$

(3) 因$y=f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$，则$f(x^2)=\sqrt{1+x^2+x^4}, f(-x^2)=\sqrt{1-x^2+x^4}$

(4) 因$y=f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$，则$f(a\tan x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+(a\tan x)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2\sec^2 x}}=\dfrac{1}{|a\sec x|}$

4. 若$f(x)=x^2, \varphi(x)=2^x$，求$f(\varphi(x))$及$\varphi(f(x))$.

解：因$f(x)=x^2,\varphi(x)=2^x$，则$f(\varphi(x))=(2^x)^2=2^{2x}=4^x, \varphi(f(x))=2^{x^2}$

5. 若$\varphi(x)=x^3+1$，求$\varphi(x^2),(\varphi(x))^2$及$\varphi(\varphi(x))$.

解：因$\varphi(x)=x^3+1$，则
$\varphi(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1,(\varphi(x))^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1,\varphi(\varphi(x))=(x^3+1)^3+1=x^9+3x^6+3x^3+2$

6. 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求$f(f(x)), f(f(f(x))), f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

解：因$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，则

$$f(f(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}, f(f(f(x)))=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}}=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x, f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}$$

7. 求下列函数的反函数及反函数的定义域：

(1) $y=x^2(-\infty<x\leqslant 0)$

(2) $y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$

(3) $y=\sin x\left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi\right)$

(4) $y=\begin{cases} x, & 当-\infty<x<1时\\ x^2, & 当1\leqslant x\leqslant 4时\\ 2^x, & 当4<x<+\infty时\end{cases}$

解：

(1) 因$y=x^2(-\infty<x\leqslant 0)$，则$x=-\sqrt{y}(0\leqslant y<+\infty)$，从而此函数的反函数为$y=-\sqrt{x}(0\leqslant y<+\infty)$

(2) 因$y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$，则$x=-\sqrt{1-y^2}(0\leqslant y\leqslant 1)$，从而此函数的反函数为$y=-\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$

(3) 因$y=\sin x\left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi\right)$，则$x=\pi-\arcsin y(-1\leqslant y\leqslant 1)$，从而此函数的反函数为$y=\pi-\arcsin x(-1\leqslant x\leqslant 1)$

(4) 因$y=\begin{cases} x, & 当-\infty<x<1时\\ x^2, & 当1\leqslant x\leqslant 4时\\ 2^x, & 当4<x<+\infty时\end{cases}$，则$x=\begin{cases} y, & 当-\infty<y<1时\\ \sqrt{y}, & 当1\leqslant y\leqslant 16时\\ \log_2 y, & 当16<x<+\infty时\end{cases}$，从而此函数的反函数为$y=\begin{cases} x, & 当-\infty<x<1时\\ \sqrt{x}, & 当1\leqslant x\leqslant 16时\\ \log_2 x, & 当16<x<+\infty时\end{cases}$.

§3.　基本初等函数

1. 把下列在$[0,1)$上定义的函数延拓到整个实轴上去，使它成为以1为周期的函数：

   (1) $y = x^2$

   (2) $y = \sin x$

   (3) $y = e^x$

   解：

   (1) 延拓后的函数为$y = (x-n)^2 (n \leqslant x < n+1, n \in Z)$

   (2) 延拓后的函数为$y = \sin(x-n) (n \leqslant x < n+1, n \in Z)$

   (3) 延拓后的函数为$y = e^{x-n} (n \leqslant x < n+1, n \in Z)$

2. 把下列在$[0,+\infty)$上定义的函数延拓到整个实轴上去，(a)使它们成为奇函数；(b)使它们成为偶函数：

   (1) $y = x^2$

   (2) $y = \sin x$

   解：

   (1) 延拓后的函数为：

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = x^2$

   (2) 延拓后的函数为：

   (a) $f(x) = \sin x$

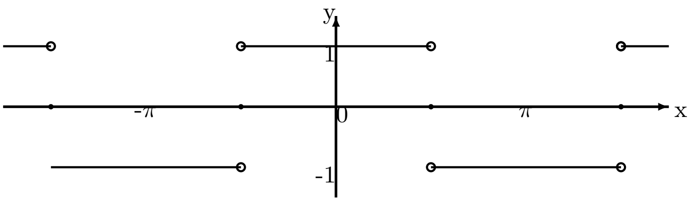
   (b) $f(x) = \sin |x|$

3. 做下列函数的图形：

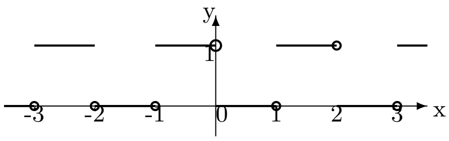
   (1) $y = sgn \cos x$

   (2) $y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$

   解：



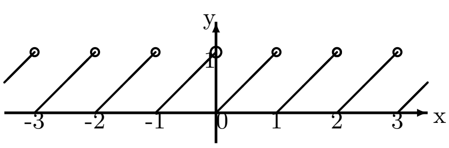
(1)



(2)

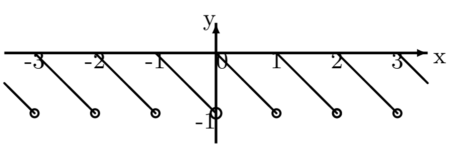
4. 作函数$y = (x)$的图形.

   解：



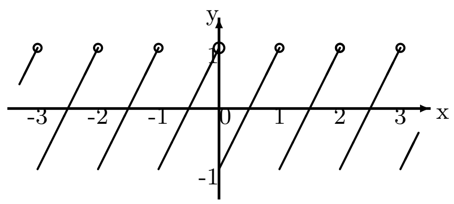
5. 作函数$y = [x] - x$的图形.

   解：



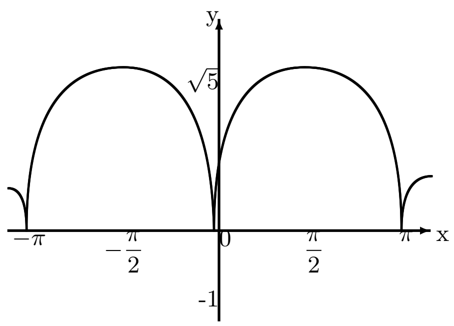
6. 一个函数是用下述方法决定的：在每一个小区间$n \leqslant x < n+1$(其中n为整数)内$f(x)$是线性的且$f(n) = -1, f\left(n+\frac{1}{2}\right) = 0$，试作此函数的图形.

解:



7. 作函数$y = |\sin x + 2\cos x|$的图形.

解:



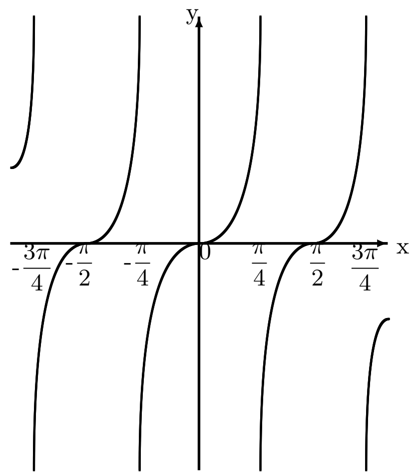
8. 若已知函数$f(x) = \tan x$，作下列函数的图形：

(1) $y = f(2x)$

(2) $y = f(kx+b)(k \neq 0)$

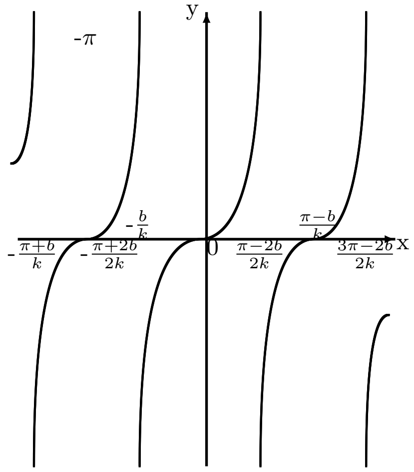
(3) $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

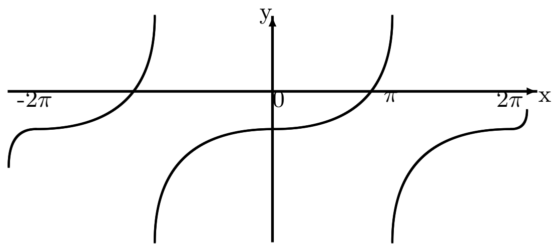
解:



(1)

(2) $(k, b > 0)$

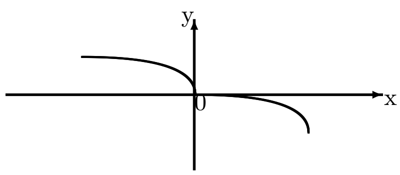




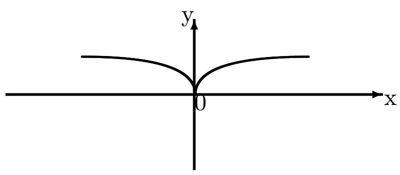
(3)

9. 若已知函数$y=f(x)$的图形，作函数$y_1=|f(x)|, y_2=f(-x), y_3=-f(-x)$的图形，并说明$y_1,y_2,y_3$的图形与$y$的图形的关系.

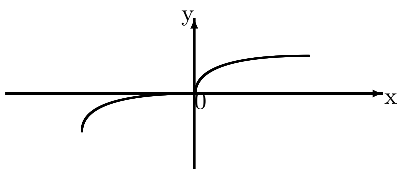
解：设$y=f(x)$的图形如下：



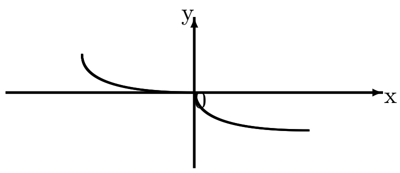
则y_1的图形为：



则y_2的图形为：



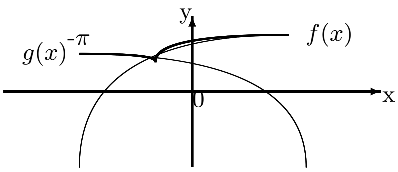
则y_3的图形为：



y_1的图形当$f(x)<0$时与y的图形关于x轴对称，当$f(x)>0$时与y的图形一样；
y_2的图形与y的图形关于y轴对称，
y_3的图形与y的图形关于原点对称，

10. 若已知$f(x),g(x)$的图形，试作函数$y=\dfrac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$的图形，并说明$y$的图形与$f(x),g(x)$图形的关系.

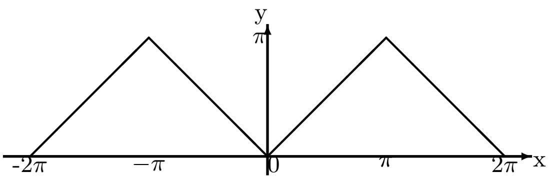
解： $y=\max\{f(x),g(x)\}$



11. 对于定义在$[0,\pi]$上的函数$y=x$，先把它延拓到$[0,2\pi]$使它关于$x=\pi$为对称，然后再把已延拓到$[0,2\pi]$上的函数延拓到整个实轴上使函数为以2π为周期的函数.

解：所求函数为:$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,\pi] \\ 2\pi-x, & x\in[\pi,2\pi] \\ x-2n\pi, & x\in[2n\pi,(2n+1)\pi](n=\pm1,\pm2,\cdots) \\ 2n\pi-x, & x\in[(2n-1)\pi,2n\pi](n=0,-1,\pm2,\cdots) \end{cases}$

$=\pi\left|\dfrac{x}{\pi}-2\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right]\right|$



第二章　极限与连续

§1.　数列的极限和无穷大量

1. 写出下列数列的前四项：

(1) $x_n = \dfrac{1}{3n}\sin n^3$

(2) $x_n = \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$

(3) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

(4) $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$

(5) $x_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$x_{2n+1} = \dfrac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

解:

(1) $x_1 = \dfrac{1}{3}\sin 1, \quad x_2 = \dfrac{1}{6}\sin 8, \quad x_3 = \dfrac{1}{9}\sin 27, \quad x_4 = \dfrac{1}{12}\sin 64$

(2) $x_1 = mx, \quad x_2 = \dfrac{m(m-1)}{2}x^2, \quad x_3 = \dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}x^3,$

$x_4 = \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}x^4$

(3) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \quad x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} + \dfrac{1}{\sqrt{11}} + \dfrac{1}{\sqrt{12}},$

$x_4 = \dfrac{1}{\sqrt{17}} + \dfrac{1}{\sqrt{18}} + \dfrac{1}{\sqrt{19}} + \dfrac{1}{\sqrt{20}}$

(4) $x_1 = a, \quad x_2 = \sqrt{ab}, \quad x_3 = \sqrt{\sqrt{ab}\dfrac{a+b}{2}},$

$x_4 = \sqrt[8]{ab} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{a+b}{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

$y_1 = b, \quad y_2 = \dfrac{a+b}{2}, \quad y_3 = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4},$

$y_4 = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4} + \dfrac{\sqrt[4]{ab}\sqrt{2(a+b)}}{16}$

(5) $x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \dfrac{3}{2}, \quad x_5 = \dfrac{1}{2}$

2. 按定义证明以下数列为无穷小量：

(1) $\dfrac{n+1}{n^2+1}$

(2) $\dfrac{\sin n}{n}$

(3) $\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}$

(4) $\dfrac{1}{n!}$

(5) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}$

(6) $(-1)^n(0.999)^n$

(7) $\dfrac{1}{n} + e^{-n}$

(8) $\dfrac{e^{-n}}{n}$

(9) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(10) $\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}$

证明:

(1) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{n+1}{n^2+1}-0\right|=\dfrac{n+1}{n^2+1}<\dfrac{2n}{n^2}=\dfrac{2}{n}$，要使$\left|\dfrac{n+1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{2}{n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$, 则当$n>N$时，$\left|\dfrac{n+1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$总成立，所以$\dfrac{n+1}{n^2+1}\to 0(n\to\infty)$

(2) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|=\left|\dfrac{\sin n}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$，要使$\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，$\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon$总成立，所以$\dfrac{\sin n}{n}\to 0(n\to\infty)$

(3) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}-0\right|=\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}<\dfrac{n+1}{n^2-1}=\dfrac{1}{n-1}$，要使$\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n-1}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，$\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}-0\right|<\varepsilon$总成立，所以$\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}\to 0(n\to\infty)$

(4) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{1}{n!}-0\right|=\dfrac{1}{n!}<\dfrac{1}{n}$，要使$\left|\dfrac{1}{n!}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，$\left|\dfrac{1}{n!}-0\right|<\varepsilon$总成立，所以$\dfrac{1}{n!}\to 0(n\to\infty)$

(5) 设$S_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n}-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}$

对$\forall\varepsilon>0$，由于$S_n=\dfrac{1}{n}(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n})$

设$\delta_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$，则$S_n=\dfrac{\delta_n}{n}$当$n=2k+1$时，有$0<\delta_n=1-(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})-(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5})-\cdots-(\dfrac{1}{2k}-\dfrac{1}{2k+1})<1$；当$n=2k$时，有$0<\delta_n=1-(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})-(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5})-\cdots-(\dfrac{1}{2k-2}-\dfrac{1}{2k-1})-\dfrac{1}{2k}<1$。总之，有$0<\delta_n<1$ 从而$|S_n-0|=S_n=\dfrac{\delta_n}{n}<\dfrac{1}{n}$ 要使$|S_n-0|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，$|S_n-0|<\varepsilon$总成立，所以$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n}-\cdots+(-1)6n+1\dfrac{1}{n^2}\to 0(n\to\infty)$

(6) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$n>\ln n$，则$e^n>n$，于是$e^{-n}<\dfrac{1}{n}$，从而$\left|\dfrac{1}{n}+e^{-n}-0\right|=\dfrac{1}{n}+e{-}n<\dfrac{2}{n}$，要使$|(-1)^n(0.999)^n-0|<\varepsilon$，只要$(0.999)^n<\varepsilon$即可。取$N=\left[2500\ln\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，$|(-1)^n(0.999)^n-0|<\varepsilon$总成立，所以$(-1)^n(0.999)^n\to 0(n\to\infty)$

(7) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{1}{n}+e^{-n}-0\right|=\dfrac{1}{n!}<\dfrac{1}{n}$，要使$\left|\dfrac{1}{n}+e^{-n}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{2}{n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，$\left|\dfrac{1}{n}+e^{-n}-0\right|<\varepsilon$总成立，所以$\dfrac{1}{n}+e^{-n}\to 0(n\to\infty)$

(8) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$e^{-n}<e^0=1$，则$\left|\dfrac{e^{-n}}{n}-0\right|=\dfrac{e^{-n}}{n}<\dfrac{1}{n}$，要使$\left|\dfrac{e^{-n}}{n}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，$\left|\dfrac{e^{-n}}{n}-0\right|<\varepsilon$总成立，所以$\dfrac{e^{-n}}{n}\to 0(n\to\infty)$

(9) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$，要使$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]+1$，则当$n>N$时，$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0|<\varepsilon$总成立，所以$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\to 0(n\to\infty)$

(10) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0\right|=\dfrac{n+1}{2n^2}<\dfrac{2n}{2n^2}=\dfrac{1}{n}$，要使$\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，$\left|\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0\right|<\varepsilon$总成立，所以$\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\to 0(n\to\infty)$

3. 举例说明下列关于无穷小量的定义是错误的：

(1) 对任意$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，成立$x_n<\varepsilon$；

(2) 对任意$\varepsilon>0$，存在无限多个x_n，使$|x_n|<\varepsilon$.

解:

(1) 例如：数列$\{-1+(-1)^{n+1}\}$(或$\{-n\}$)即$\{0,-2,0,-2,\cdots\}$ (或$\{-1,-2,-3,\cdots\}$)满足上述条件，但不是无穷小量；

(2) 例如：数列$\{1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},\cdots,1,\frac{1}{n},\cdots\}$满足上述条件，但不是无穷小量。

4. 按定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(0.\overbrace{99\cdots9}^{n})=1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$

(4) $x_n=\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\to1(n\to\infty)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=1$，此处 $r_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n} & \text{当}n\text{为偶数}\\ \dfrac{n+1}{n} & \text{当}n\text{为奇数}\end{cases}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=1$，此处 $r_n=\begin{cases}3 & \text{当}n=3k(k=1,2,3,\cdots)\\ \dfrac{3n+1}{n} & \text{当}n=3k+1\\ 2+\dfrac{1+n}{3-\sqrt{n}+n} & \text{当}n=3k+2\end{cases}$

证明:

(1) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{2n+3}{4n^2-2}<\dfrac{4(n+1)}{4(n+1)(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}(n\geqslant2)$，要使$\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n-1}<\varepsilon$即可。取$N=\max(\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1,2)$, 则当$n>N$时，$\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$总成立，所以$\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}\to\dfrac{3}{2}(n\to\infty)$

(2) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|0.\overbrace{99\cdots9}^{n}-1\right|=(0.1)^n=\dfrac{1}{10^n}$，要使$\left|0.\overbrace{99\cdots9}^{n}-1\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{10^n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当$n>N$时，$\left|0.\overbrace{99\cdots9}^{n}-1\right|<\varepsilon$总成立，所以$0.\overbrace{99\cdots9}^{n}\to1(n\to\infty)$

(3) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}=<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\dfrac{1}{2n}$，要使$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]+1$, 则当$n>N$时，$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|<\varepsilon$总成立，所以$\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}\to1(n\to\infty)$

(4) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$x_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{n}$，则$|x_n-1|=\dfrac{1}{n}$，要使$|x_n-1|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当$n>N$时，$|x_n-1|<\varepsilon$总成立，所以$x_n\to1(n\to\infty)$

(5) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$|r_n-1|=\left|\dfrac{n\pm1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$，要使$|r_n-1|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$即可。取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当$n>N$时，$|r_n-1|<\varepsilon$总成立，所以$r_n\to1(n\to\infty)$

(6) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$|r_{3k}-3|=0,|r_{3k+1}-3|=\dfrac{1}{n},|r_{3k+2}-3|=\dfrac{\sqrt{n}-2}{3-\sqrt{n}+n}=\dfrac{n-4}{n\sqrt{n}+n+\sqrt{n}+6}<\dfrac{n}{n\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，要使$|r_n-3|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$且$\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$即可。取$N=\max\left(\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1,\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]+1\right)$, 则当$n>N$时，$|r_n-3|<\varepsilon$总成立，所以$r_n\to3(n\to\infty)$

5. (1) 按定义证明，若$a_n \to a(n\to\infty)$，则对任意自然数k，$a_{n+k} \to a(n\to\infty)$

   (2) 按定义证明，若$a_n \to a(n\to\infty)$，则$|a_n| \to |a|$.又反之是否成立？

   (3) 若$|a_n| \to 0$，试问$a_n \to a$是否一定成立？为什么？

   证明：

   (1) 由于$a_n \to a(n\to\infty)$，故对$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$，当$n > N$时，$|a_n - a| < \varepsilon$，则对$\forall k \in Z^+, n+k > N$时，$|a_{n+k} - a| < \varepsilon$，于是对$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$，当$n+k > N$时，$|a_{n+k} - a| < \varepsilon$，从而$a_{n+k} \to a(n\to\infty)$

   △ 此结论说明：去掉数列的前面有限项，也不影响其收敛性。

   (2) (i) 由于$a_n \to a$，故对$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$，当$n > N$时，$|a_n - a| < \varepsilon$.又$\big||a_n| - |a|\big| < |a_n - a|$，于是对$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$，当$n > N$时，$\big||a_n| - |a|\big| < \varepsilon$成立，即$|a_n| \to |a|(n\to\infty$

   (ii) 反之不一定成立。

   例：

   (a) 不成立：$a_n = (-1)^n$，则$|a_n| \to 1$，而a_n无极限；

   (b) 成立：$a_n = \dfrac{1}{n}$，则$|a_n| \to 0, a_n \to 0$

   (3) 由于$|a_n| \to 0$，故对$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$，当$n > N$时，$\big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$，又$|a_n - 0| = \big||a_n| - 0\big|$，于是对$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$，当$n > N$时，$|a_n - 0| < \varepsilon$成立，即$a_n \to 0(n\to\infty)$。从而若$|a_n| \to 0$，则$a_n \to 0$一定成立。

6. 按定义证明，若$x_n \to a$，且$a > b$，则存在N，当$n > N$时，成立$x_n > b$.

   证明：由于$x_n \to a$，故对$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$，当$n > N$时，$|x_n - 0| < \varepsilon$，即$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.又$a > b$，故$a - b > 0$，则取$\varepsilon = a - b > 0$，从而$\exists N \in Z^+$，当$n > N$时，有$x_n > a - \varepsilon = a - (a-b) = b$.即存在$N$，当$n > N$时，成立$x_n > b$.

7. 若$\{x_ny_n\}$收敛，能否断定$\{x_n\},\{y_n\}$亦收敛.

   解：不能。

   例：$x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^n(n = 1, 2, \cdots), x_ny_n \equiv 1(n = 1, 2, \cdots)$，则$\{x_ny_n\}$收敛，但$\{x_n\},\{y_n\}$均不收敛。故若$\{x_ny_n\}$收敛，不能断定$\{x_n\},\{y_n\}$亦收敛.

8. 利用极限性质及计算证明：

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right) = 0$

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$

   (3) 利用$(1+h)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k h^k = 1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n$

   证明：

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n} = 0(a > 1)$

   (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{e^n} = 0(e \approx 2.7)$

   证明：

   (1) 对$\forall n \in Z^+$，有$0 \leqslant \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2} \leqslant \dfrac{n+1}{n^2}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2} = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right) = 0$

   (2) 对$\forall n \in Z^+$，有$\dfrac{n}{n+1} < \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \dfrac{n}{n} = 1$且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$

   (3) (i) 设$a = 1 + h(h > 0)$，由于$0 < \dfrac{n}{a^n} = \dfrac{n}{(1+h)^n} = \dfrac{n}{1 + nh + \dfrac{n(n_1)}{2}h^2 + \cdots + h^n} < \dfrac{n}{\dfrac{n(n-1)}{2}h^2} = \dfrac{2}{(n-1)h^2}$，又$\dfrac{2}{h^2}$为定值，$\dfrac{1}{n-1} \to 0(n\to\infty)$，则$\dfrac{2}{(n-1)h^2} \to 0$.从而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n} = 0$

(ii) 设$e = 1+h(h \approx 1.7)$，由于$0 < \dfrac{n^5}{e^n} = \dfrac{n^5}{(1+h)^n} = \dfrac{n^5}{1+nh+C_n^2h^2+\cdots+h^n} < \dfrac{n^5}{C_n^6h^6} < \dfrac{720n^5}{(n-5)^6h^6}$，又$\dfrac{720}{h^6}$为定值，$\dfrac{n^5}{(n-5)^6} \to 0(n\to\infty)$，则$\dfrac{720n^5}{(n-5)^6h^6} \to 0(n\to\infty)$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{e^n} = 0$

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2-n+1}{2n^3-3n^2+2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-n+1}{n^3+n^2+2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cos n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\sin n!)\left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)^{10}-\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)\dfrac{2n^2+1}{n^2-1}\right]$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

解：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2-n+1}{2n^3-3n^2+2} = \dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-n+1}{n^3+n^2+2} = 0$

(3) 由于$\sqrt[n]{2} \to 1(n\to\infty)$，故$1-\sqrt[n]{2} \to 0(n\to\infty)$，又$|\cos n| \leqslant 1$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cos n = 0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1-(\frac{1}{4})^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}} = \dfrac{2}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{2}$

(5) 由于$\{\sin n!\}$为有界数列，$\left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)^{10} \to 0, 1-\dfrac{1}{n} \to 1, \dfrac{2n^2+1}{n^2+1} \to 2(n\to\infty)$，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\sin n!)\left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)^{10}-\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)\dfrac{2n^2+1}{n^2-1}\right] = -2$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{-2}{3})^n+1}{(-2)(\frac{-2}{3})^n+3} = \dfrac{1}{3}$

10. 若$x_n \to a > 0$，试证：

(1) $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$

(2) $\sqrt{a_0x_n^m+a_1x_n^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x_n+a_m} \to \sqrt{a_0a^m+a_1a^{m-1}+\cdots+a_{m-1}a+a_m}$
(其中$a_0a^m+a_1a^{m-1}+\cdots+a_{m-1}a+a_m > 0$)

证明：

(1) 由于$x_n \to a > 0$，故对$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$，当$n > N$时，$|x_n-a| < \sqrt{a}\varepsilon$，且$|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}| = \left|\dfrac{x_n-a}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}\right| < \dfrac{|x_n-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$，即对上述$\varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$，当$n > N$时，$|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}| < \varepsilon$，从而$\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}(n\to\infty)$

(2) 由于$x_n\to a(n\to\infty)$，故$a_0x_n^m+a_1x_n^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x_n+a_m\to a_0a^m+a_1a^{m-1}+\cdots+a_{m-1}a+a_m>0$，则据(1)得
$\sqrt{a_0x_n^m+a_1x_n^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x_n+a_m}\to\sqrt{a_0a^m+a_1a^{m-1}+\cdots+a_{m-1}a+a_m}$

11. 对数列$\{x_n\}$，若$x_{2k}\to a(k\to\infty),x_{2k+1}\to a(k\to\infty)$，证明：$x_n\to a(n\to\infty)$

证明：$\forall\varepsilon>0$，因$x_{2k}\to a(n\to\infty)$，故$\exists K_1\in Z^+$，使当$k>K_1$时，$|x_{2k}-a|<\varepsilon$成立。
又因$x_{2k+1}\to a(n\to\infty)$，故$\exists K_2\in Z^+$，使当$k>K_2$时，$|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$成立。
取$N=\max\{2K_1,2K_2+1\}$，则当$n>N$时，若n为偶数，$n=2k>N\geqslant 2K_1,k>K_1,|x_n-a|=|x_{2k}-a|<\varepsilon$，
若n为奇数，$n=2k+1>N\geqslant 2K_2+1,k>K_2,|x_n-a|=|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$，
因此$x_n\to a(n\to\infty)$

12. 利用单调有界必有极限，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求出它：

(1) $x_1=\sqrt{2},\cdots,x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$

(2) $x_0=1,x_1=1+\dfrac{x_0}{1+x_0},\cdots,x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$

证明：

(1) 显然$x_1<x_2$，假设$x_{n-1}<x_n$，则$x_n=\sqrt{2x_{n-1}}<\sqrt{2x_n}$，由归纳法，知$\{x_n\}$是单调增加的，又$x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$，故得$x_n^2=2x_{n_1}\leqslant 2x_n$，于是$x_n\leqslant 2$，即$\{x_n\}$由上界。从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在$x_n^2=2x_{n-1}$两边令$n\to\infty$，得$l^2=2l$，解之得$l=2$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$。

(2) 显然$x_n\geqslant 1$，有条件知$x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=2-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}<2$，故$\{x_n\}$有界。又$x_1=1+\dfrac{x_0}{1+x_0}=1+\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{3}{2}>1=x_0$，假设$x_{n_1}<x_n$，则$x_n=2-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}<2-\dfrac{1}{1+x_n}=x_{n+1}$，由归纳法，知$\{x_n\}$是单调增加的。从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在$x_n=2-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}$两边令$n\to\infty$，得$l=2-\dfrac{1}{1+l}$，即$l^2=1+l$，解得$l_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},l_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（不合题意，舍去），即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

13. 若$x_1=a>0,y_1=b>0(a<b),x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证明：由于$\sqrt{x_ny_n}\leqslant\dfrac{x_n+y_n}{2}$且此式相等当且仅当$x_n=y_n$，故$x_{n+1}\leqslant y_{n+1}$等号成立当且仅当$x_n=y_n$.又$0<a<b$，故$x_1<y_1$，则由递推公式，得$x_{n+1}<y_{n+1}$且$x_n>0,y_n>0(n\in Z^+)$.而$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}>\sqrt{x_nx_n}=x_n,y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}<\dfrac{y_n+y_n}{2}=y_n$，则$x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<y_n$.又由$x_1=a>0,y_1=b>0$，得$a<x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<y_n<b$，说明$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都是单调有界数列，从而$\{x_n\},\{y_n\}$均有极限，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\beta$，又由$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，得$x_{n+1}^2=x_ny_n$，在等式两边令$n\to\infty$，得$\alpha^2=\alpha\beta$ 又由$0<a<x_n<x_{n+1}$，得定有$0<a\leqslant\alpha$，从而$\alpha=\beta$即有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

14. 利用单调有界必有极限证明以下数列必有极限：

(1) $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$

(2) $x_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$

(3) $x_n=\dfrac{n^k}{a^n}(a>1,k$为正整数$)$

(4) $x_n=\sqrt[n]{a}\ (0<a<1)$

证明：

(1) 由于$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}>0$，故$x_{n+1}>x_n$，则$\{x_n\}$为单调增加的. 又$1<x_n<1+\dfrac{1}{1\dot{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\dot{n}(n+1)}=1+\left(1-\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n_1}-\dfrac{1}{n}\right)=2-\dfrac{1}{n}<2$，故$\{x_n\}$有界，于是$\{x_n\}$存在极限。

(2) 由于$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{3^{n+1}+1}>0$，故$x_{n+1}>x_n$，则$\{x_n\}$为单调增加的. 又$\dfrac{1}{4}<x_n<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$，故$\{x_n\}$有界，于是$\{x_n\}$存在极限。

(3) 由于$a>1,k$为正整数，故$x_n=\dfrac{n^k}{a^n}>0$，则$\{x_n\}$有下界。又$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k}{a}=\dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k\to\dfrac{1}{a}(n\to\infty)<1$，故$\exists N\in Z^+$，当$n>N$时，有$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$，则从$N+1$项开始都有$x_{n+1}<x_n$，于是$\{x_n\}$为单调减少的$(n>N)$，从而$\{x_n\}$存在极限。

(4) 由于$\ln x_n=\dfrac{1}{n}\ln a=y_n,0<a<1$，故$\{y_n\}$是单调增加的，从而由$x_n=\sqrt[n]{a}=e^{y_n}$得$\{x_n\}$是单调增加的。又$0<x_n=\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{1}=1$，故$\{x_n\}$有界，于是$\{x_n\}$存在极限。

15. 证明：若x_n上升，y_n下降，而x_n-y_n为无穷小量，则x_n和y_n必有同一极限。

证明：由x_n上升，故$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots$，又$y_n$下降，故$y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n\geqslant\cdots$，又$x_n-y_n$为无穷小量，故$\{x_n-y_n\}$有界，设$|x_n-y_n|\leqslant C(n=1,2,\cdots)$（其中$C$为某常数），则$-C\leqslant x_n-y_n\leqslant C$即$x_n\leqslant y_n+C\leqslant y_1+C$，于是$\{x_n\}$有上界，从而$\{x_n\}$存在极限。又$y_n\geqslant x_n-C\geqslant x_1-C$，于是$\{y_n\}$有下界，从而$\{y_n\}$存在极限，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n-\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

16. 设x为任意给定的实数，又设$y_n(x)=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n}x$，证明$\{y_n(x)\}$的极限存在，并求此极限.

证明：先设$0\leqslant x\leqslant\pi$，则$0\leqslant\sin x\leqslant x$，从而有$y_{n+1}(x)=\sin y_n(x)\leqslant y_n(x)$，故$\{y_n(x)\}$是以0为下界的单调下降函数列，必有极限，则得对$\forall x_0\in[0,\pi]$，有$0\leqslant u_0=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x_0)=\sin\left(\lim\limits_{n\to\infty}f_{n-1}(x_0)\right)=\sin u_0$，则$u_0=0$，从而对$\forall x\in[0,\pi]$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)=0$.

同理可证当$x\in[-\pi,0]$时亦有$\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)=0$.

再由周期性可知$\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)=0$

17. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，试证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x+n}{n}=a$

证明：由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，得对$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in Z^+$，当$n>N_1$时，有$|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，则有$\left|\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|=\left|\dfrac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|\leqslant\dfrac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|+|x_{N_1+1}-a|+\cdots+|x_n-a|}{n}<$

$\dfrac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}+\dfrac{n-N_1}{n}\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}<$

$\dfrac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}+\dfrac{\varepsilon}{2}(\because\dfrac{n-N_1}{n}<1)$

取$M=\max(|x_1-a|,|x_2-a|,\cdots,|x_{n_1}-a|)$，则$\dfrac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}\leqslant\dfrac{N_1\cdot M}{n}$，又$N_1\cdot M$为定值，则$\dfrac{N_1\cdot M}{n}\to0(n\to\infty)$，

于是对上述$\varepsilon>0,\exists N_2=\left[\dfrac{2N_1\cdot M}{\varepsilon}\right]\in Z^+$，当$n>N_2$时，有

$\dfrac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$

取$N=\max(N_1,N_2)$，则当$n>N$时，有$\left|\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，

即有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x+n}{n}=a$

注：若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a\nRightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

例：$x_n=(-1)^{n-1}(n=1,2,\cdots)$，则显然$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在。

18. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$

证明：

(1) 设$a=0$，去证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=0$

由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则据定理$4(P_{38})$，得$\exists M>0$，使$|b_n|\leqslant M(n\in Z^+)$

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则对$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in Z^+$，当$n>N_1$时，有$|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$.取$N=\max\left\{\left[\dfrac{2(|a_1|+\cdots+|a_n|)M}{\varepsilon}\right]+1,N_1\right\}$，

于是当$n\geqslant N(\geqslant N_1)$时，有$\left|\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\right|=\left|\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{N_1}b_{n-N_1+1}+a_{N_1+1}b_{n-N_1}+\cdots+a_nb_1}{n}\right|$

$\leqslant\left|\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{N_1}b_{n-N_1+1}}{n}\right|+\left|\dfrac{a_{N_1+1}b_{n-N_1}+\cdots+a_nb_1}{n}\right|\leqslant\dfrac{(|a_1|+\cdots+|a_{N_1}|)M}{n}+\dfrac{(n-N_1)\cdot\dfrac{\varepsilon}{2M}\cdot M}{n}<$

$\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=0$

(2) 当$a\neq 0,b\neq 0$时，由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1}{n}=b\neq 0$，又$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$

由(1)知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a_1-a)b_n+\cdots+(a_n-a)b_1}{n}=0$，

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1\cdot\dfrac{b_n}{n}+\cdots+a_n\cdot\dfrac{b_1}{n}}{\dfrac{b_n+\cdots+b_1}{n}}-a\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a_1-a)\cdot\dfrac{b_n}{n}+\cdots+(a_n-a)\cdot\dfrac{b_n}{n}}{\dfrac{b_n+\cdots+b_1}{n}}=\dfrac{0}{b}=0$，

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1\cdot\dfrac{b_n}{n}+\cdots+a_n\cdot\dfrac{b_1}{n}}{\dfrac{b_n+\cdots+b_1}{n}}=a$，

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1\cdot\dfrac{b_n}{n}+\cdots+a_n\cdot\dfrac{b_1}{n}}{\dfrac{b_n+\cdots+b_1}{n}}\cdot\dfrac{b_n+\cdots+b_1}{n}\right)=ab$

19. 按定义证明下列数列为无穷大量：

(1) $\sqrt{n}$

(2) $n!$

(3) $\ln n$

(4) $\dfrac{n^2+1}{2n+1}$

(5) $\dfrac{n^2+1}{2n-1}$

(6) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

证明：

(1) 对$\forall G>0$，要使$|\sqrt{n}|>G$，只要$n>G^2$即可.取$N=[G^2]$，则当$n>N$时，$|\sqrt{n}|>G$总成立，故$\{\sqrt{n}\}$是无穷大量。

(2) 对$\forall G>0$，由于$|n!|>n$，要使$|n!|>G$，只要$n>G$即可.取$N=[G]$，则当$n>N$时，$|n!|>G$总成立，故$\{n!\}$是无穷大量。

(3) 对$\forall G>0$，要使$|\ln n|>G$，只要$n>e^G$即可.取$N=[e^G]$，则当$n>N$时，$|\ln n|>G$总成立，故$\{\ln n\}$是无穷大量。

(4) 对$\forall G>0$，由于$\left|\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right|>\dfrac{n^2}{3n}=\dfrac{n}{3}$，要使$\left|\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right|>G$，只要$\dfrac{n}{3}>G$即可.取$N=[3G]$，则当$n>N$时，$\left|\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right|>G$总成立，故$\{\dfrac{n^2+1}{2n+1}\}$是无穷大量。

(5) 对$\forall G>0$，由于$\left|\dfrac{n^2+1}{2n-1}\right|>\dfrac{n^2}{2n}=\dfrac{n}{2}$，要使$\left|\dfrac{n^2+1}{2n-1}\right|>G$，只要$\dfrac{n}{2}>G$即可.取$N=[2G]$，则当$n>N$时，$\left|\dfrac{n^2+1}{2n-1}\right|>G$总成立，故$\{\dfrac{n^2+1}{2n-1}\}$是无穷大量。

(6) 对$\forall G>0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$且$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$单调增加，则$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$，于是$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，从而$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\ln 2+\ln\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$，则要使$\left|1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right|>G$，只要$\ln n>G$即可.取$N=[e^G]$，则当$n>N$时，$\left|1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right|>G$总成立，故$\{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\}$是无穷大量。

20. 证明：若$\{x_n\}$是无穷小量，$x_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$，则$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷大量。

证明：由于$\{x_n\}$是无穷小量，故对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in Z^+$，当$n>N$时，有$|x_n|<\varepsilon$

又$x_n \neq 0(n=1,2,3,\cdots)$，故$\dfrac{1}{x_n}$存在且$\left|\dfrac{1}{x_n}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon}$

又ε是任意的，故$\dfrac{1}{\varepsilon}$也是任意的，从而$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷大量。

21. 证明：若$\{x_n\}$为无穷大量，$\{y_n\}$为有界变量，则$\{x_n \pm y_n\}$为无穷大量。
并由此计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n + \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n - \arctan n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n + (-1)^n\left(\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\right]$

又：两个无穷大量和的极限怎样？试讨论各种可能情形。

i)**证明**：由于$\{y_n\}$为有界变量，故必存在正数M，使$|y_n| \leqslant M$，又$\{x_n\}$为无穷大量，故对$\forall G > M > 0, \exists N \in Z^+$，当$n > N$时，有$|x_n| > G$，则当$n > N$时，有$|x_n \pm y_n| \geqslant |x_n| - |y_n| > G - M$.由$G$的任意性及$G > M > 0$，可知$G - M > 0$且$G - M$是任意的，从而$\{x_n \pm y_n\}$为无穷大量。

ii)**解**：

(1) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+1}} = \infty$且$|\sin n| \leqslant 1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n + \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+1}}\right) = \infty$

(2) 由于$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$且$|\arctan n| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(n - \arctan n) = \infty$

(3) 设$x_n = (-1)^n\left(\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$，则$x_n = \dfrac{(-1)^n}{2}\left[1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right] = \dfrac{(-1)^n}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{(-1)^n}{2}\cdot\dfrac{2n}{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{2+\dfrac{1}{n}}$，故有$\dfrac{1}{3} < |x_n| < \dfrac{1}{2}$.又由$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$，从而
$$\lim_{n\to\infty}\left[n + (-1)^n\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\right] = \infty$$

iii)**解**：

(1) $x_n = n \to +\infty, y_n = 2n \to +\infty; x_n + y_n = 3n \to +\infty$

(2) $x_n = -n \to -\infty, y_n = -2n \to -\infty; x_n + y_n = -3n \to -\infty$

(3) $x_n = -n \to -\infty, y_n = 2n \to +\infty; x_n + y_n = n \to +\infty$

(4) $x_n = n \to +\infty, y_n = -2n \to -\infty; x_n + y_n = -n \to -\infty$

(5) $x_n = n + a \to +\infty, y_n = -n \to -\infty; x_n + y_n = a$（常量）

(6) $x_n = n + (-1)^n \to +\infty, y_n = -n \to +\infty; x_n + y_n = (-1)^n$无极限

22. 讨论无穷大量和无穷小量的和、差、商的极限的情形。
解：

(1) 和、差：因$y_n \to 0(n\to\infty)$，故$\{y_n\}$有界。又$x_n \to \infty(n\to\infty)$，则由上题结论，有$\{x_n \pm y_n\}$为无穷大量。

(2) 商：当$x_n \neq 0, y_n \neq 0$时，由于$x_n \to \infty, y_n \to 0(n\to\infty)$，则有$y_n \cdot \dfrac{1}{x_n} \to 0$，即$\dfrac{y_n}{x_n} \to 0, \dfrac{x_n}{y_n} \to \infty$

23. 举例说明无穷大量和无穷小量的乘积可能发生的种种情形。
解：

(1) $x_n = n \to +\infty, y_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0(n\to\infty); x_n \cdot y_n = \dfrac{1}{n} \to 0(n\to\infty)$

(2) $x_n = n^2 \to +\infty, y_n = \dfrac{1}{n} \to 0(n\to\infty); x_n \cdot y_n = n \to +\infty(n\to\infty)$

(3) $x_n = n \to +\infty, y_n = \dfrac{a}{n} \to 0(n\to\infty); x_n \cdot y_n = a$（常量）

(4) $x_n = n(-1)^n \to \infty, y_n = \dfrac{1}{n} \to 0(n\to\infty); x_n \cdot y_n = (-1)^n$无极限但有界

(5) $x_n = n^2 n^{(-1)^n} \to \infty, y_n = \dfrac{1}{n} \to 0(n\to\infty); x_n \cdot y_n = n \cdot n(-1)^n = n^{1+(-1)^n}$无极限，无界（且不是无穷大量）

24. 若$x_n\to\infty, y_n\to a\neq 0$，证明$x_ny_n\to\infty$

证明：由于$x_n\to\infty(n\to\infty)$，故$\dfrac{1}{x_n}\to 0(n\to\infty)$；又$y_n\to a\neq 0(n\to\infty)$，故$\dfrac{1}{y_n}\to\dfrac{1}{a}(n\to\infty)$，于是$\dfrac{1}{x_n}\cdot\dfrac{1}{y_n}\to 0(n\to\infty)$，从而$x_ny_n\to\infty(n\to\infty)$

25. 若$x_n\to+\infty, y_n\to-\infty$，证明$x_ny_n\to-\infty$.

证明：因$x_n\to+\infty$，则对$\forall G_1>0,\exists N_1\in Z^+$，当$n>N_1$时，有$x_n>G_1$；又$y_n\to-\infty$，则对$\forall G_2>0,\exists N_2\in Z^+$，当$n>N_2$时，有$-y_n>G_2>0$. 取$N=\max(N_1,N_2)$，则当$n>N$时，有$-x_ny_n>G_1G_2$，即$x_ny_n<-G_1G_2$.由$G_1,G_2$的任意性，得$G_1G_2$是任意的且$G_1G_2>0$，则得$x_ny_n\to-\infty$.

26. 若$x_n\to+\infty$，证明$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\to+\infty$

证明：因$x_n\to+\infty$，则对$\forall G>0,\exists N_1\in Z^+$，当$n>N_1$时，有$x_n>3G$，于是$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\dfrac{x_1+\cdots+x_{N_1}}{n}+$
$\dfrac{x_{N_1+1}+\cdots+x_n}{n}>\dfrac{x_1+\cdots+x_{N_1}}{n}+\dfrac{n-N_1}{n}\cdot 3G$，
取$M=\max(|x_1|,\cdots,|x_{N_1}|)$，则$\left|\dfrac{x_1+\cdot+x_{N_1}}{n}\right|\leqslant\dfrac{|x_1|+\cdots+|x_{N_1}|}{n}\leqslant\dfrac{N_1\cdot M}{n}$，于是对上述$G>0$，取$N_2=\left[\dfrac{2N_1\cdot M}{G}\right]$，则当$n>N_2$时，有$\left|\dfrac{x_1+\cdots+x_{N_1}}{n}\right|<\dfrac{G}{2}$，从而$\dfrac{x_1+\cdots+x_{N_1}}{n}>-\dfrac{G}{2}$。又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-N_1}{n}=1$，故对于$\varepsilon=\dfrac{1}{2},\exists N_3\in Z^+$，当$n>N_3$时，有$\left|\dfrac{n-N_1}{n}-1\right|<\dfrac{1}{2}$，从而$\dfrac{n-N_1}{n}>\dfrac{1}{2}$，取$N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，则当$n>N$时，有$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}>-\dfrac{G}{2}+\dfrac{3G}{2}=G$，由此知$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\to+\infty(n\to\infty)$.

§2. 函数的极限

1. 用分析定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0$

(5) $\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t(t-1)}{t^2-1}=\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$

(7) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x}{x^2-9}=\infty$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x+1}=\infty$

证明：

(1) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{x+1}{2x+6}\right|$，因$x\to-1$，不妨设$|x+1|<1$，则$-2<x<0$，从而$2<|2x+6|<6$，于是$\left|\dfrac{x+1}{2x+6}\right|<\dfrac{|x+1|}{2}$，要使$\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{|x+1|}{2}<\varepsilon$即可。取$\delta=\min\{2\varepsilon,1\}>0$，则当$0<|x-(-1)|<\delta$时，就有$\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$总成立，故$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{2}$

(2) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|=\left|\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{6}\right|=\left|\dfrac{x-3}{6x+18}\right|$，因$x\to3$，不妨设$|x-3|<1$，则$2<x<4$，从而$30<|6x+18|<42$，于是$\left|\dfrac{x-3}{6x+18}\right|<\dfrac{|x-3|}{30}$，要使$\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{|x-3|}{30}<\varepsilon$即可。取$\delta=\min\{30\varepsilon,1\}>0$，则当$0<|x-3|<\delta$时，就有$\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|<\varepsilon$总成立，故$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$

(3) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|=|\sqrt{x}+1-2|=|\sqrt{x}-1|=\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}\right|$，因$x\to1$，不妨设$|x-1|<1$，则$0<x<2$，从而$1<|\sqrt{x}+1|<\sqrt{2}+1$，于是$\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}\right|<|x-1|$，要使$\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|<\varepsilon$，只要$|x-1|<\varepsilon$即可。取$\delta=\min\{\varepsilon,1\}>0$，则当$0<|x-1|<\delta$时，就有$\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|<\varepsilon$总成立，故$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$

(4) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}-0\right|=\left|\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)(x-1)\right|$，因$x\to1$，不妨设$|x-1|<1$，则$0<x<2$，从而$0<\left|1+\dfrac{1}{x-3}\right|<\dfrac{2}{3}$，于是$\left|1+\dfrac{1}{x-3}\right|<\dfrac{2}{3}|x-1|$，要使$\left|\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{2}{3}|x-1|<\varepsilon$即可。取$\delta=\min\left\{\dfrac{3}{2}\varepsilon,1\right\}>0$，则当$0<|x-1|<\delta$时，就有$\left|\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}-0\right|<\varepsilon$总成立，故$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0$

(5) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\dfrac{t(t-1)}{t^2-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{t}{t+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{t-1}{2t+2}\right|$，因$t\to1$，不妨设$|t-1|<1$，则$0<t<2$，从而$2<|2t+2|<6$，于是$\left|\dfrac{t-1}{2t+2}\right|<\dfrac{|t-1|}{2}$，要使$\left|\dfrac{t(t-1)}{t^2-1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{|t-1|}{2}<\varepsilon$即可。取$\delta=\min\{2\varepsilon,1\}>0$，则当$0<|x-(-1)|<\delta$时，就有$\left|\dfrac{t(t-1)}{t^2-1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$总成立，故$\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t(t-1)}{t^2-1}=\dfrac{1}{2}$

(6) 对$\forall\varepsilon>0$，由于$\left|\frac{x-1}{x+2}-1\right|=\left|\frac{3}{x+2}\right|$，因$x\to\infty$，不妨设$|x|>2$，则$|x+2|>|x|-2$，于是$\left|\frac{3}{x+2}\right|<\frac{3}{|x|-2}$，要使$\left|\frac{3}{x+2}\right|<\varepsilon$，只要$\frac{3}{|x|-2}<\varepsilon$即可，即$|x|>\frac{3}{\varepsilon}$。取$X=\frac{3}{\varepsilon}+2$，则当$|x|>X$时，就有$\left|\frac{x-1}{x+2}-1\right|<\varepsilon$总成立，故$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$

(7) 对$\forall G>0$，由于$\left|\frac{x}{x^2-9}\right|=\left|\frac{x}{x+3}\right|\left|\frac{1}{x-3}\right|$，因$x\to3$，不妨设$|x-3|<1$，则$2<x<4$，从而$\frac{2}{7}<\left|\frac{x}{x+3}\right|<\frac{4}{5}$，于是$\left|\frac{x}{x+3}\right|\left|\frac{1}{x-3}\right|>\frac{2}{7}\left|\frac{1}{x-3}\right|$，要使$\left|\frac{x}{x^2-9}\right|>G$，只要$\frac{2}{7}\left|\frac{1}{x-3}\right|>G$即可。取$\delta=\min\left\{\frac{2}{7G},1\right\}>0$，则当$0<|x-3|<\delta$时，就有$\left|\frac{x}{x^2-9}\right|>G$总成立，故$\lim\limits_{x\to3}\frac{x}{x^2-9}=\infty$

(8) 对$\forall G>0$，由于$\left|\frac{x^2+x}{x+1}\right|=|x|$，因$x\to\infty$，取$X=G>0$，则当$|x|>X$时，就有$\left|\frac{x^2+x}{x+1}\right|>G$总成立，故$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x+1}=\infty$

2. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

(5) $\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{t^2-1}$

(6) $\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}$

(7) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$（$m,n$为自然数）

(10) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5+6}{x^2-8x+15}$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{x^2}$

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-7}{2x+\sqrt{x}}$

解：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}(6+11x+6x^2)=6$

(5) $\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{t^2-1}=\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2}{t+1}=\frac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}=\lim\limits_{t\to1}\frac{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)(t+\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}=$
$\lim\limits_{t\to1}\sqrt{t}(t+\sqrt{t}+1)=3$

(7) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+2}=\dfrac{1}{4}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x^2+10x^3+5x^4+x^5}{x^2+x^5}=10$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(C_n^2m^2-C_m^2n^2)x^2+(C_n^3m^3-C_m^3n^3)x^3+\cdots+m^nx^n-n^mx^m}{x^2}=C_n^2m^2-C_m^2n^2=\dfrac{n^2m-m^2n}{2}$

(10) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5+6}{x^2-8x+15}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-5)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-2}{x-5}=-\dfrac{1}{2}$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x}{x^2}=1$

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-7}{2x+\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2}$

3. 设　$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$
式中$P(x)$和$Q(x)$为x的多项式，并且$P(a)=Q(a)=0$，问$\lim\limits_{x\to a}$有哪些可能的值？
解：由于$P(x)$和$Q(x)$为x的多项式且$P(a)=Q(a)=0$，
则$P(x)=(x-a)^mP_1(x),Q(x)=(x-a)^nQ_1(x)(P_1(a)\neq0,Q_1(x)\neq0)$，于是$\lim\limits_{x\to a}R(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)^mP_1(x)}{(x-a)^nQ_1(x)}$
讨论：

(1) 当$n=m$时，$\lim\limits_{x\to a}R(x)=\dfrac{P_1(a)}{Q_1(a)}$

(2) 当$n>m$时，$\lim\limits_{x\to a}(x-a)^{m-n}=\infty$且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\dfrac{P_1(a)}{Q_1(a)}\neq0$，故$\lim\limits_{x\to a}R(x)=\infty$

(3) 当$n<m$时，$\lim\limits_{x\to a}(x-a)^{m-n}=0$且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\dfrac{P_1(a)}{Q_1(a)}$，故$\lim\limits_{x\to a}R(x)=0$

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x-\sin3x}{x}$

(2) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x+1}$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos3x}{x^2}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x-\sin3x}{\sin2x}$

(9) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

(10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$

(12) $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

解：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x-\sin3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}=2-3=-1$

(2) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-2\sin\dfrac{2x+h}{2}\sin\dfrac{h}{2}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{h}\sin\dfrac{2x+h}{2}=-\sin x$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\dfrac{x^2}{2}}=2$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x+1}=0$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x\sin2x}{x^2}=4$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x-\sin3x}{\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x\cos4x}{2x}=1$

(9) 令$y=x-1$，则$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{y\to0}-y\tan\left(\dfrac{\pi}{2}(1+y)\right)=\lim\limits_{y\to0}-y\cot\dfrac{\pi}{2}y=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y\cos\dfrac{\pi}{2}y}{\sin\dfrac{\pi}{2}y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{\dfrac{\pi}{2}y}=\dfrac{2}{\pi}$

(10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\cos a$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}=$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2C_n^1(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}}x+2C_n^3(1+x^2)^{\frac{n-3}{2}}x^2+\cdots}{x}=$
$\lim\limits_{x\to0}\left[2n(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}}+2C_n^3(1+x^2)^{\frac{n-3}{2}}x+\cdots\right]=2n$

(12) 由于$\left[\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}\right)$且$0\leqslant\left(\dfrac{1}{x}\right)<1$，
则$\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left\{1-x\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}=1-\lim\limits_{x\to0}x\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$

5. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，并且存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时有$f(x)\geqslant g(x)$，证明$A\geqslant B$. 又若当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)>g(x)$，是否一定成立$A>B$

证明:

(1) 用反证法。假设$A<B$，则由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$及性质1，得$\exists\delta_0>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta_0$时，有$g(x)>f(x)$。这与已知：$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)\geqslant g(x)$矛盾，故假设不成立，即$A\geqslant B$成立。

(2) 不一定。例：

(i) 成立。$f(x)=\dfrac{2(x^2+3x^4)}{x^2},g(x)=x^2+3x^4x^2,\exists\delta>0$，当$0<|x|<\delta$时，有$f(x)>g(x)$。又$A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=2,B=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=1$，故$A>B$成立。

(ii) 不成立。$f(x)=\dfrac{x^2+3x^4}{x^2},g(x)=x^2+x^4x^2,\exists\delta>0$，当$0<|x|<\delta$时，有$f(x)>g(x)$。又$A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1,B=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=1$，故有$A=B$。

6. 若在点x_0的邻域内有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，并且$g(x)$和$h(x)$在$x_0$的极限存在并且都等于A，证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

证明: 如果对任何$x_n,x_n\to x_0,x_n\neq x_0$，并且可不妨假设$x_n\in O(x_0,\delta)-\{x_0\}$，有$g(x_n)\leqslant f(x_n)\leqslant h(x_n)$以及$g(x_n)\to A,h(x_n)\to A(n\to\infty)$，由数列极限的性质得：$f(x_n)\to A(n\to\infty)$，这就证明了$f(x)\to A(x\to x_0)$.

7. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\neq 0$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

证明：考察 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}\right|=\left|\dfrac{Bf(x)-Ag(x)}{Bg(x)}\right|=\left|\dfrac{Bf(x)-AB+AB-Ag(x)}{BG(x)}\right|\leqslant\dfrac{|B||f(x)-A|+|A||g(x)-B|}{|B||g(x)|}$,

由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，故对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$；对上述$\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_2$时，有$|g(x)-B|<\varepsilon$

又据乘法运算：$\lim\limits_{x\to x_0} Bg(x)=B^2>\dfrac{B^2}{2}$，则据性质3，得$\exists\delta_3>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_3$时，有$Bg(x)>\dfrac{B^2}{2}$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}\right|<\dfrac{(|A|+|B|)\varepsilon}{\frac{B^2}{2}}=\dfrac{2(|A|+|B|)}{B^2}\varepsilon$

于是，对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}\right|<\dfrac{2(|A|+|B|)}{B^2}\varepsilon$，从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

8. (1) $f(x)=\begin{cases}0 & x>1\\ 1 & x=1\\ x^2+2 & x<1\end{cases}$

求$f(x)$在$x=1$的左右极限。

(2) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ 1+x^2 & x<0\end{cases}$

求$f(x)$在$x=0$的左右极限。

解：

(1) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+2)=3, \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}(1+x^2)=1,$

$\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0}(x\sin\frac{1}{x})=0$

9. 说明下列函数在所示点的左右极限情形：

(1) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & 0<x\leqslant 1\\ x^2 & 1<x<2\\ 2x & 2<x<3\end{cases}$ (在$x=1.5,2,1$三点)

(2) $y=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$（在$x=0$点）

(3) $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$（在$x=0$点）

(4) $y=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$（在$x=\dfrac{1}{n}$点）

(5) $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$ (在任一点)

(6) $y=\dfrac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}$(在$x=-1$）

解：

(1) $\lim\limits_{x\to 1.5-0} y=\lim\limits_{x\to 1.5+0} y=2.25,$

$\lim\limits_{x\to 2-0} y=\lim\limits_{x\to 2-0} x^2=4, \lim\limits_{x\to 2+0} y=\lim\limits_{x\to 2+0}(2x)=4$

$\lim\limits_{x\to 1-0} y=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2}, \lim\limits_{x\to 1+0} y=\lim\limits_{x\to 1+0} x^2=1$

(2) $\lim\limits_{x\to +0} y=\lim\limits_{x\to +0} y=0$

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x}=+\infty, \lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{x}=-\infty$，

则 $\lim\limits_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}}=+\infty, \lim\limits_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}}=0$，

于是 $\lim\limits_{x\to +0} y=\lim\limits_{x\to =0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}=\lim\limits_{x\to +0}\left(1+\dfrac{2}{2^{\frac{1}{x}}-1}\right)=1, \lim\limits_{x\to +-0} y=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}=-1$

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+0} y=\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+0}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=n-(n-1)=1$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}-0} y=\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}-0}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=n-n=0$

(5) 此函数在任一点的左右极限不存在。

设x_0为R上任一点，由有理数和无理数在数轴上的稠密性，可知有理序列$\{x_n^{(1)}\}\to x_0+0$，无理序列$\{x_n^{(2)}\}\to x_0+0$，

故$\lim\limits_{x_n^{(1)}\to x_0+0} D\left(x^{(1)}\right)=1$, $\lim\limits_{x_n^{(2)}\to x_0+0} D\left(x^{(2)}\right)=0$，从而此函数在任一点的右极限不存在

同理，此函数在任一点的左极限也不存在

从而此函数在任一点的左右极限不存在。

(6) $y=\dfrac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}=\dfrac{(-1)^{[x]}}{x+1}$且$\lim\limits_{x\to-1+0}[x]=-1$, $\lim\limits_{x\to-1-0}[x]=-2$

则$\lim\limits_{x\to-1+0} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0} y=-\infty$

10. 讨论下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\sin x$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\arctan x$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan x(x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2})$

解：

(1) 由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$且$\sin x$是有界量，故$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

(2) 由于$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$，若取$x_n=2n\pi\to+\infty(n\to\infty)$，则$e^{x_n}\sin x_n=e^{2n\pi}\sin 2n\pi=0\to 0(n\to\infty)$；若取$x_n=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\to+\infty(n\to\infty)$，则$e^{x_n}\sin x_n=e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\to+\infty(n\to\infty)$，故$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\sin x$不存在，从而$\lim\limits_{x\to\infty} e^x\sin x$不存在.

(3) 由于$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,

则$\lim\limits_{x\to-\infty} x\arctan x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\arctan x=+\infty$，从而$\lim\limits_{x\to\infty} x\arctan x=+\infty$

(4) 取$x_n=n\pi\to\infty(n\to\infty)$，有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n\tan x_n=\lim\limits_{n\to\infty} n\pi\tan n\pi=0$；另取$x_n=\dfrac{\pi}{4}+n\pi\to\infty(n\to\infty)$，有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n\tan x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)=+\infty$，故$\lim\limits_{x\to\infty} x\tan x(x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2})$不存在.

11. 从条件$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数$a$和$b$.

解：由于$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)-ax(x+1)-b(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b+1}{x+1}=0$，则有$\begin{cases}1-a=0\\a+b=0\end{cases}$，从而$\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

12. 从条件$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0$，求常数$a_1,b_1,a_2,b_2$.

解：由于$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-a_1^2)x^2-(1+2a_1b_1)x+1-b_1^2}{\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1}=0$，则$\begin{cases}1-a_1^2=0\\1+2a_1b_1=0\end{cases}$，于是$\begin{cases}a_1=\pm 1\\b_1=\mp\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

又据条件可得：若$a_1=1$，则$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=+\infty$，从而$\begin{cases}a_1=-1\\b_1=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，同理$\begin{cases}a_2=1\\b_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

13. 若$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$，则称直线$y=kx+b$是曲线$y=f(x)$当$x\to+\infty$的渐近线.利用这一方程推出渐近线存在的必要且充分的条件.

证明：若曲线存在渐近线，则有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0. \tag{1}$$

因$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x}[f(x)-kx-b]+k+\dfrac{b}{x}$，令$x\to+\infty$两端取极限并注意到(1)式，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \tag{2}$$

.
既求出了k，再从(1)式求得

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] \tag{3}$$

.
反之，若(2)、(3)两式成立，立即可看出条件(1)成立.
故曲线$y=f(x)$当$x\to+\infty$时存在渐近线$y=kx+b$的充分必要条件是极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$、$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$均成立.

14. 若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A>0$，证明存在$X>0$，使得当$x<-X$成立：$\dfrac{A}{2}<f(x)<\dfrac{3}{2}A$.
证明：由于$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A>0$，故对给定的$\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0,\exists X>0$，当$x<-X$时，有$|f(x)-A|<\dfrac{A}{2}$，即$\dfrac{A}{2}<f(x)<\dfrac{3}{2}A$.

15. 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A,\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=B$，证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)g(x)=AB$.
证明：由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，故对$\forall\varepsilon>0,\exists X_1>0$，当$x>X_1$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$且$\exists X_2>0,M>0$，当$x>X_2$时，有$|f(x)|<A$.
又$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=B$，故对上述$\varepsilon>0,\exists X_3>0$，当$x>X_3$时，有$|g(x)-B|<\varepsilon$.
取$X=\max\{X_1,X_2,X_3\}$，对上述$\varepsilon>0$，当$x>X$时，
有$|f(x)g(x)-AB|=|f(x)g(x)-f(x)B+f(x)B-AB|\leqslant|f(x)||g(x)-B|+|B||f(x)-A|\leqslant M\varepsilon+|B|\varepsilon=(M+|B|)\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)g(x)=AB$.

16. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$的充要条件是：对任何数列$x_n\to+\infty,f(x_n)\to A$.
证明：
$\Rightarrow$ 由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，故对$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.
又$x_n\to+\infty(n\to\infty)$，故对上述$X>0,\exists N\in Z^+$，当$n>N$时，有$x_n>X$，从而$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.
$\Leftarrow$ 用反证法。假设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A$，则$\exists\varepsilon_0>0$，对$\forall X>0$，至少有一个$x'$，当$x'>X$时，有$|f(x')-A|\geqslant\varepsilon_0$.
特别地，取X为$1,2,3,\cdots$，可得$x_1',x_2',x_3',\cdots$，使得
$x_1'>1$时，有$|f(x_1')-A|\geqslant\varepsilon_0$；$x_2'>2$时，有$|f(x_2')-A|\geqslant\varepsilon_0$；$x_3'>3$时，有$|f(x_3')-A|\geqslant\varepsilon_0$；$\cdots$
从左边可以看出$x_n'\to+\infty(n\to\infty)$，而从右边看出$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')\neq A$，与已知矛盾，则假设不成立，故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

17. 证明$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=+\infty$的充要条件是：对任何数列$x_n:x_n>x_0,x_n\to x_0$，有$f(x_n)\to+\infty$.
证明：
$\Rightarrow$ 由于$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=+\infty$，故对$\forall G>0,\exists\delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$时，有$f(x)>G$.
又$x_n>x_0,x_n\to x_0(n\to\infty)$，故对上述$\delta>0,\exists N\in Z^+$，当$n>N$时，有$0<x_n-x_0<\delta$，从而$f(x_n)>G$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$.
$\Leftarrow$ 用反证法。假设$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\neq+\infty$，则$\exists G_0>0$，对$\forall\delta>0$，至少有一个$x'$，当$0<x'-x_0<\delta$时，有$f(x')\leqslant G_0$.
特别地，取δ为$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots$，可得$x_1',x_2',x_3',\cdots$，使得
$0<x_1'-x_0<1$时，有$f(x_1')\leqslant G_0$；$0<x_2'-x_0<\dfrac{1}{2}$时，有$f(x_2')\leqslant G_0$；$0<x_3'-x_0<\dfrac{1}{3}$时，有$f(x_3')\leqslant G_0$；$\cdots$
从左边可以看出$x_n'>x_0,x_n'\to x_0$，而从右边看出$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\neq+\infty$，与已知矛盾，则假设不成立，故$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=+\infty$

18. 举出符合下列要求的$f(x)$
   (1) $f(+0)=0,f(-0)=1$

(2) $f(+0)$不存在，也非$\infty, f(-0)=0$

(3) $f(+\infty)=0, f(-\infty)$不存在

(4) $f(+\infty)=f(-\infty)=A$（常数）

(5) $f(x_0+0)$和$f(x_0-0)$都不存在

(6) $f(x_0+0)=+\infty, f(x_0-0)=-\infty$

(7) $f(x_0+0)=1, f(x_0-0)=+\infty$

(8) $f(+\infty)$不存在，也非$\infty, f(-\infty)=-\infty$

解:

(1) $f(x)=\begin{cases} 0 & x>0 \\ 1 & x\leqslant 0 \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$

(3) $f(x)=e^{-x}$

(4) $f(x)=\dfrac{Ax+1}{x}$

(5) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-x_0}$

(6) $f(x)=\dfrac{1}{x-x_0}$

(7) $f(x)=1+e^{-\frac{1}{x-x_0}}$

(8) $f(x)=\begin{cases} \sin x & x\geqslant 0 \\ x & x<0 \end{cases}$

§3. 连续函数

1. 按定义证明下列函数在定义域内连续：

(1) $y=\sqrt{x}$

(2) $y=\dfrac{1}{x}$

(3) $y=|x|$

(4) $y=\sin\dfrac{1}{x}$

证明：

(1) 设x_0为$(0,+\infty)$内任一点，$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\leqslant\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$

对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\sqrt{x_0}\varepsilon$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon$，故$y=\sqrt{x}$在$x_0$点连续.

又由x_0在$(0,+\infty)$中的任意性，则$y=\sqrt{x}$在$(0,+\infty)$内连续.

当$x_0=0$时，对上述$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon^2$，当$0<x-x_0<\delta$时，有$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\sqrt{x}<\varepsilon$，故$f(+0)=0=f(0)$，

从而$y=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$内连续.

(2) 设x_0为$(0,+\infty)$内任一点，不妨设$|x-x_0|<\dfrac{x_0}{2}$，则$x>\dfrac{x_0}{2},xx_0>\dfrac{x_0^2}{2}$，于是$|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}|=\dfrac{|x-x_0|}{xx_0}<\dfrac{|x-x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}$

若x_0为$(-\infty,0)$内任一点，不妨设$|x-x_0|<-\dfrac{x_0}{2}$，则$x<\dfrac{x_0}{2},xx_0>\dfrac{x_0^2}{2}$，于是$|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}|=\dfrac{|x-x_0|}{xx_0}<\dfrac{|x-x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}$

设x_0为$(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$内任一点，

对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{\dfrac{|x_0|}{2},\dfrac{x_0^2}{2}\varepsilon\right\}>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right|=\dfrac{|x-x_0|}{xx_0}>\varepsilon$，故$y=\dfrac{1}{x}$在$x_0$点连续

又由x_0在$(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$内的任意性，得$y=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$内连续.

(3) 设x_0为$(-\infty,+\infty)$内任一点，$||x|-|x_0||\leqslant|x-x_0|$.
对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$||x|-|x_0||\leqslant|x-x_0|<\varepsilon$，故$y=|x|$在$x_0$点连续
又由x_0在$(-\infty,+\infty)$内的任意性，得$y=|x|$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

(4) 设x_0为$(0,+\infty)$内任一点，不妨设$|x-x_0|<\dfrac{x_0}{2}$，则$x>\dfrac{x_0}{2},xx_0>\dfrac{x_0^2}{2}$，于是$\left|\sin\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x_0}\right|=2\left|\sin\dfrac{x+x_0}{2xx_0}\right|\left|\cos\dfrac{x-x_0}{2xx_0}\right|\leqslant\dfrac{|x-x_0|}{xx_0}<\dfrac{|x-x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}$

若x_0为$(-\infty,0)$内任一点，不妨设$|x-x_0|<-\dfrac{x_0}{2}$，则$x<\dfrac{x_0}{2},xx_0>\dfrac{x_0^2}{2}$，于是$\left|\sin\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x_0}\right|\leqslant\dfrac{|x-x_0|}{xx_0}<\dfrac{|x-x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}$

设x_0为$(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$内任一点，

对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{\dfrac{|x_0|}{2},\dfrac{x_0^2}{2}\varepsilon\right\}>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$\left|\sin\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x_0}\right|\leqslant\dfrac{|x-x_0|}{xx_0}<\varepsilon$，故$y=\sin\dfrac{1}{x}$在$x_0$点连续

又由x_0在$(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$内的任意性，得$y=\sin\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$内连续.

2. 利用连续函数的运算，求下列函数的连续范围：

(1) $y=\tan x$

(2) $y=\dfrac{1}{x^n}$

(3) $y=\sec x+\csc x$

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$

(5) $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2-2x}$

(6) $y=\dfrac{[x]\tan x}{1+\sin x}$

解:

(1) 因$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，则当$\cos x\neq 0$时，$y=\tan x$连续，故$y=\tan x$的连续范围为$\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in Z)$.

(2) 若$n>0$，则$y=\dfrac{1}{x^n}$的连续范围为$(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$；若$n\leqslant 0$，则$y=\dfrac{1}{x^n}$连续，即它的连续范围为$(-\infty,+\infty)$.

(3) 因$\sec x$的连续范围为$\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\pi<x<\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，$\csc x$的连续范围为$k\pi<x<(k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，
故$y=\sec x+\csc x$的连续范围为$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\bigcup\left(k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)((k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(4) 当$\cos x>0$时，$y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$连续，故$y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$的连续范围为$\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$.

(5) 因$\ln(1+x)$当$x>-1$时连续，$\dfrac{1}{x^2-2x}$当$x\neq 0,x\neq 2$时连续，故$y=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2-2x}$的连续范围为$(-1,0)\bigcup(0,2)\bigcup(2,+\infty)$.

(6) 因$y=\dfrac{[x]\tan x}{1+\sin x}=\dfrac{[x]\sin x}{(1+\sin x)\cos x}$，则当$\sin x\neq 1,\cos x\neq 0,x\notin Z/\{0\}$时，$y=\dfrac{[x]\tan x}{1+\sin x}$连续，
故$y=\dfrac{[x]\tan x}{1+\sin x}$的连续范围为$x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$且$x\notin Z/\{0\}(k\in Z)$.

3. 研究下列函数的连续性，并画出其图形.

(1) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & 若x\neq 2\\ 4, & x=2\end{cases}$

(2) $y=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

(3) $y==\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

(4) y=[x]

解:

(1) 因$\lim\limits_{x\to2}y=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$，且当$x=2$时，$y=4$，故函数在$x=2$连续
当$x\neq 2$时，$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$显然连续，
故$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & 若x\neq 2\\ 4, & x=2\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续.

(2) 当$x\neq 0$时，$y=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=\dfrac{\sin x}{x}$或$y=-\dfrac{\sin x}{x}$显然连续。又$\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=1=f(0)$，故函数在$x=0$连续，
于是$y=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续.

(3) 因$\lim\limits_{x\to+0} y=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{|x|}=1, \lim\limits_{x\to-0} y=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{|x|}=-1$，故$\lim\limits_{x\to0} y$不存在。又当$x>0$时，$y=\dfrac{\sin x}{|x|}=\dfrac{\sin x}{x}$，当$x<0$时，$y=\dfrac{\sin x}{|x|}=-\dfrac{\sin x}{x}$，显然连续，故此函数在除0外连续，即在$(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$内连续.

(4) 因$\lim\limits_{x\to k+0} y=\lim\limits_{x\to k+0}[x]=k, \lim\limits_{x\to k-0} y=\lim\limits_{x\to k-0}[x]=k-1(k\in Z)$，则$\lim\limits_{x\to k} y$不存在，故$x=k(k\in Z)$为$y=[x]$的间断点，但在间断点处右连续
当$k<x<k+1(k\in Z)$时，$y=[x]$显然连续，故此函数在除$k(k\in Z)$外连续.

4. 若$f(x)$连续，$|f(x)|$和$f^2(x)$是否也连续？又若$|f(x)|$或$f^2(x)$连续，$f(x)$是否连续？

解:

(1) 设$f(x)$在其定义域I上连续，x_0为I上任一点
因$f(x)$在x_0点连续，故对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
而$||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，即对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，故$|f(x)|$在$x_0$点连续
又由x_0在I上的任意性，知$|f(x)|$在I上也连续
同样$|f^2(x)-f^2(x_0)|=|f(x)-f(x_0)||f(x)+f(x_0)|=|f(x)-f(x_0)||f(x)-f(x_0)+2f(x_0)|\leqslant|f(x)-f(x_0)|(|f(x)-f(x_0)|+2f(x_0))<\varepsilon(\varepsilon+2f(x_0))$，故$f^2(x)$在$x_0$点连续
又由x_0在I上的任意性，知$f^2(x)$在I上也连续

(2) 反过来，若$|f(x)|$或$f^2(x)$连续，$f(x)$不一定连续.

(i) 不连续。例：$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$|f(x)|=1$和$f^2(x)=1$均在$(-\infty,+\infty)$内连续，但$f(x)$在$x=0$点不连续；

(ii) 连续。例：$f(x)=x$,则$f(x)$、$|f(x)|$、$f^2(x)$在$(-\infty,+\infty)$内均连续。

5. (1) 函数$f(x)$当$x=x_0$时连续，而函数$g(x)$当$x=x_0$时不连续，问此二函数的和在x_0点是否连续？

(2) 当$x=x_0$时函数$f(x)$和$g(x)$二者都不连续，问此二函数的和$f(x)+g(x)$在已知点x_0是否必为不连续？

解:

(1) 用反证法。假设$f(x)+g(x)$在x_0点连续。
因$f(x)$当$x=x_0$时连续，则由连续函数性质，得$g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$当x_0时连续与已知矛盾。
故假设不成立，即$f(x)+g(x)$在x_0点连续.

(2) 不一定。

(i) 连续：例：$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0\\ -1, & x<0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}-1, & x\geqslant0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在$x=0$都不连续，但$f(x)+g(x)=0$在$x=0$连续.

(ii) 不连续：例：$f(x)=g(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=0$都不连续，$f(x)+g(x)=\dfrac{2}{x}$在$x=0$不连续.

6. (1) 函数$f(x)$在x_0连续，而函数$g(x)$在x_0不连续；

(2) 当$x=x_0$时函数$f(x)$和$g(x)$二者都不连续，问此二函数的乘积$f(x)g(x)$在已知点x_0是否必不连续？

解:

(1) 不一定。

(i) 连续：例：$f(x)=0$在$x=0$连续，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在$x=0$不连续，但$f(x)g(x)=0$在$x=0$连续.

(ii) 不连续：例：$f(x)=x$在$x=0$连续，$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$在$x=0$不连续，$f(x)g(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=0$不连续.

(2) 不一定。

(i) 连续：例：$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0\\ -1, & x<0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}-1, & x\geqslant0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在$x=0$都不连续，但$f(x)g(x)=-1$在$x=0$连续.

(ii) 不连续：例：$f(x)=g(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=0$都不连续，$f(x)g(x)=\dfrac{1}{x^2}$在$x=0$不连续.

7. 若$f(x)$在$[a,\infty)$连续，并且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，证明$f(x)$在$[a,\infty)$有界.

证明： 由于$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，不妨设$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$
则对$\varepsilon=1,\exists X>0$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon=1$成立，从而得$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+$

$|A| < 1 + |A|$
取$X_1 = \max\{X, a+1\}$，则$f(x)$在(X_1, ∞)内有界，且$|f(x)| < |A| + 1, x \in (X_1, \infty)$
又由于$f(x)$在$[a, X_1]$上连续，故$f(x)$在$[a, X_1]$上有界，设其界为$M > 0$，即$\forall x \in [a, X_1]$，有$|f(x)| \leqslant M$
取$G = \max\{|A| + 1, M\}$，则$\forall x \in [a, \infty), f(x) \leqslant G$，
即$f(x)$在$[a, \infty)$有界.

8. 若对任一$\varepsilon > 0$，$f(x)$在$[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$连续，问：
   (1) $f(x)$是否(a, b)在连续？
   (2) $f(x)$是否在$[a, b]$连续？

   解：
   (1) 任取$x_0 \in (a, b)$，取$\varepsilon = \min\left\{\dfrac{x_0 - a}{2}, \dfrac{b - x_0}{2}\right\}$，则$x_0 \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$
   因对任一$\varepsilon > 0$，$f(x)$在$[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$连续，故$f(x)$在$x_0$点连续
   由$x_0 \in (a, b)$的任意性，得$f(x)$在(a, b)内连续.
   (2) 不一定连续。
   (i) 不连续。例：$f(x)$在$[0+\varepsilon, 1-\varepsilon](\varepsilon > 0)$内连续，但$f(x)$在$[0, 1]$上不连续，在$x = 0$点断开.
   (ii) 连续。例：$f(x)$在$[1+\varepsilon, 2-\varepsilon](\varepsilon > 0)$内连续，且$f(x)$在$[1, 2]$上连续.

9. 若$f(x)$在x_0点连续，并且$f(x_0) > 0$，证明存在x_0的δ邻域$O(x_0, \delta)$，当$x \in O(x_0, \delta)$时，$f(x) \geqslant c > 0$，c为某个常数.
   证明：由于$f(x)$在x_0点连续，且$f(x_0) > 0$，则设$f(x_0) > c > 0$
   对给定的$\varepsilon = f(x_0) - c > 0, \exists \delta > 0$，当$|x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = f(x_0) - c$，则$f(x_0) - [f(x_0) - c] \leqslant f(x)$，即$f(x) \geqslant c > 0$.

10. 证明若连续函数在有理点的函数值为0，则此函数恒为0.
   证明：设$f(x)$为实轴上的连续函数，x_0 为任意一个无理点.
   由有理点在数轴上的稠密性，可以取无理数列$\{x_n\}$，使得$x_n \to x_0 (n \to \infty)$.
   因$f(x)$在x_0连续，则$f(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$，
   由x_0点的任意性，得$f(x)$在所有无理点的函数值都为0.
   又$f(x)$在有理点的函数值为0，则此函数恒为0.

11. 若$f(x)$在$[a, b]$连续，恒正，按定义证明$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a, b]$连续.
   证明：由于$f(x)$在$[a, b]$连续，恒正，则$f(x)$在(a, b)连续，$f(x) > 0$，$\dfrac{1}{f(x)}$存在，$x \in [a, b]$
   设x_0为(a, b)内任一点，则对$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$|x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
   又$f(x)$在$[a, b]$连续，则由闭区间连续函数性质2，可设$f(x)$在$[a, b]$上的最小值为$m > 0$，即$f(x) \geqslant m, x \in [a, b]$，于是$\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(x_0)}\right| = \dfrac{|f(x) - f(x_0)|}{f(x)f(x_0)} < \dfrac{\varepsilon}{m^2}$，故$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(x_0)}$，从而$\dfrac{1}{f(x)}$在$x_0$连续.
   由x_0在(a, b)内的任意性，得$f(x)$在(a, b)内连续.
   又$f(a+0) = f(a) > 0$，则$\dfrac{1}{f(a+0)} = \dfrac{1}{f(a)}$，故$f(x)$在$[a, b)$连续；
   又$f(b-0) = f(b) > 0$，则$\dfrac{1}{f(b-0)} = \dfrac{1}{f(b)}$，故$f(x)$在$[a, b]$连续.

12. 若$f(x)$和$g(x)$都在$[a, b]$连续，试证明$\max(f(x), g(x))$以及$\min(f(x), g(x))$都在$[a, b]$连续.
   证明：由于$f(x)$和$g(x)$都在$[a, b]$连续，故$f(x) - g(x)$和$f(x) + g(x)$都在$[a, b]$连续.
   由第4题结论，有$|f(x) - g(x)|$在$[a, b]$连续.
   令$\varphi(x) = \max(f(x), g(x)) = \dfrac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$，
   $\psi(x) = \min(f(x), g(x)) = \dfrac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$，
   故$\varphi(x), \psi(x)$都在$[a, b]$连续.

13. 若$f(x)$是连续的，证明对任何$c > 0$，函数$g(x) = \begin{cases} -c, & 若f(x) < -c \\ f(x), & 若|f(x)| \leqslant c \\ c, & 若f(x) > c \end{cases}$ 是连续的.
   证明：由于$g(x) = \max(-c, \min(f(x), c))$
   又由于$f(x)$连续，且对任何$c > 0$，$\varphi(x) = c$连续，$\psi(x) = -c$连续，
   则由上题结论，得$\min(f(x), c)$连续，从而再由上题结论，得$g(x)$连续.

14. 研究下列函数各个不连续点的性质（即为何种不连续点）：
   (1) $y = \dfrac{x}{(1+x)^2}$

(2) $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$

(3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$

(4) $y=\dfrac{x}{\sin x}$

(5) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$

(6) $y=[x]+[-x]$

(7) $y=\dfrac{1}{\ln x}$

(8) $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$

(9) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(q>0,q,p\text{为互质的整数})\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$

(10) $y=\begin{cases}x, & \text{当}|x|\leqslant 1\\ 1, & \text{当}|x|>1\end{cases}$

(11) $y=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & \text{当}|x|\leqslant 1\\ |x-1|, & \text{当}|x|>1\end{cases}$

(12) $y=\begin{cases}\sin\pi x, & \text{当}x\text{为有理数}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}\end{cases}$

解:

(1) 因$\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x}{(1+x)^2}=-\infty$，故$x=-1$为第二类不连续点（无穷间断点）.

(2) 因$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x}{1+x^3}=\dfrac{1}{3}$，但$y$在$x=-1$点没有定义，故$x=-1$为可移不连续点.

(3) 因$y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x-2)}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$,
又$\lim\limits_{x\to1-0}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-2-0}y=-\infty$，故$x=-2,x=1$为第二类不连续点.

(4) 因$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$但$y$在$x=0$无定义，故$x=0$为可移不连续点；
又$\lim\limits_{\substack{x\to k\pi\\ k\in Z,k\neq0}}\dfrac{x}{\sin x}=\infty$，故$x=k\pi(k\in Z,k\neq0)$为第二类不连续点.

(5) 因$\lim\limits_{x\to0}\cos^2\dfrac{1}{x}$在$[0,1]$间振荡，为振荡型极限，故此极限不存在，于是$x=0$为第二类不连续点.

(6) 因$x\to k+0$时，$-x\to-k-0$，故$\lim\limits_{x\to k+0}y=\lim\limits_{x\to k+0}([x]+[-x])=k+(-k-1)=-1$；
又因$x\to k-0$时，$-x\to-k+0$，故$\lim\limits_{x\to k-0}y=\lim\limits_{x\to k-0}([x]+[-x])=k-1+(-k)=-1(k\in Z)$
又当$x=k$时，$y=[x]+[-x]=[k]+[-k]=0(k\in Z)$，故整数点均为可移不连续点.

(7) 因$\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{1}{\ln x}=+\infty$，故$x=-1$为第二类不连续点；
因$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{\ln x}$不存在，故$x=0$为第二类不连续点.

(8) $y=\dfrac{x(x-1)}{|x|(x-1)(x+1)}$
因$\lim\limits_{x\to1}y=\dfrac{1}{2}$但$y$在$x=1$无定义，故$x=1$为可移不连续点；
因$\lim\limits_{x\to+0}y=1$, $\lim\limits_{x\to-0}y=-1$，故$x=0$为第一类不连续点（跳跃间断点）；
因$\lim\limits_{x\to-1+0}y=-\infty$，故$x=-1$为第二类间断点.

(9) 因此函数是以1为周期的函数，故可在区间$[0,1]$讨论，其它区间的情形与此类似.
在$[0,1]$上，分母为1的有理数有两个：$\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{1}$；分母为2的有理数有一个：$\dfrac{1}{2}$；
分母为3的有理数有两个：$\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}$；分母为4的有理数有两个：$\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}$；
分母为5的有理数有四个：$\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}$；分母为6的有理数有两个：$\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{6}$；$\cdots$

总之，分母不超过k的有理数个数$l \leqslant 2+1+2+3+\cdots+(k-1)=\dfrac{k(k-1)}{2}+2$，即分母不超过$k$的有理数只有有限个。
下面来证，在任一点$x_0 \in [0,1]$，当$x \to x_0$时，$y \to 0$.
对$\forall \varepsilon > 0$，取$k=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，设在$[0,1]$上，分母不超过$k$的有理数为$r_1, r_2, \cdots, r_l$.
取$\delta = \min$
$limits_{1 \leqslant i \leqslant l} |r_i - x_0|$，则当$0<|x-x_0|<\delta$，即$x \notin \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，也就是$x$或者为无理数，或者为有理数$\dfrac{p}{q}$，且$q \geqslant k+1 > k$时，就有$|y-0| = \begin{cases} \dfrac{1}{q} \leqslant \dfrac{1}{k+1}, & x\text{为有理数}x=\dfrac{p}{q}, q>k \\ 0<\varepsilon, & x\text{为无理数} \end{cases}$.
故$\lim\limits_{x \to x_0} y = 0$ ，于是得：任何无理点都是此函数的连续点，任何有理点都是此函数的可移不连续点.

(10) 因$\lim\limits_{x \to -1+0} y = -1$, $\lim\limits_{x \to -1-0} y = 1$，故$x=-1$为第一类不连续点.

(11) 因$\lim\limits_{x \to -1+0} y = 0$, $\lim\limits_{x \to -1-0} y = 2$，故$x=-1$为第一类不连续点.

(12) (i) $x_0 \neq n, n \in Z$，
取有理点列$r_n \to x_0$且$r_n > x_0$，则$\lim\limits_{r_n \to x_0+0} f(r_n) = \sin \pi x_0 \neq 0$；
取无理点列$x_n \to x_0$且$x_n > x_0$，则$\lim\limits_{x_n \to x_0+0} f(x_n) = 0$。
故$f(x_0+0)$不存在，从而$x \neq n (n \in Z)$为函数的第二类不连续点.
(ii) $x_0 = n, n \in Z$，
当x为无理数时，$|f(x)-f(n)| = 0$；
当x为有理数时，$|f(x)-f(n)| \leqslant \pi |x-n|$，对$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{\pi} > 0$，使$|x-n| < \delta$时，有$|f(x) - f(n)| < \varepsilon$，故$f(x)$在$x=n (n \in Z)$连续.

15. 当$x=0$时下列函数$f(x)$无定义，试定义$f(0)$的数值，使$f(x)$在$x=0$连续：

(1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

(2) $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{x}$

(3) $f(x) = \sin x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$

(4) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

解:

(1) 因$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \dfrac{3}{2}$,
故$f(0) = \dfrac{3}{2}$.

(2) 因$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{x} = 2$，
故$f(0) = 2$.

(3) 因$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sin x \cdot \sin \dfrac{1}{x} = 0$，
故$f(0) = 0$.

(4) 因$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$，
故$f(0) = e$.

16. 若$f(x)$在$[a,b]$连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$，则在$[x_1, x_n]$中必有$\xi$，使$f(\xi) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.
证明: 设$M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i), m = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i)$
则$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leqslant M$；
同理得$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geqslant m$.
由于$f(x)$在$[x_1, x_n] \subset [a,b]$上连续，故由介值定理知，必$\exists \xi \in [x_1, x_n] \subset [a,b]$，使$f(\xi) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

17. 用一致连续定义验证：

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$在$[0,1]$上是一致连续的；

(2) $f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上是一致连续的；

(3) $f(x)=\sin x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

证明：

(1) 对任何$x_1,x_2\in[0,1]$，$|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}|=\dfrac{|x_1-x_2|}{\sqrt[3]{x_1^2}+\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_2^2}}=\dfrac{|x_1-x_2|}{\frac{3}{4}(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})^2+\frac{1}{4}(\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2})^2}\leqslant\dfrac{|x_1-x_2|}{\frac{1}{4}(\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2})^2}$，

即$\dfrac{1}{4}|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}|^3\leqslant|x_1-x_2|$，亦即$|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}|\leqslant\sqrt[3]{4|x_1-x_2|}$

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{\varepsilon^3}{4}>0$，使得对$\forall x_1,x_2\in[0,1]$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，总有$|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}|\leqslant\sqrt[3]{4|x_1-x_2|}<\varepsilon$

从而$f(x)=\sqrt[3]{x}$在$[0,1]$上是一致连续的.

(2) 对任何$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}\right|\leqslant2\left|\dfrac{x_1-x_2}{2}\right|=|x_1-x_2|$，

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon>0$，使得对$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，总有$|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x_1-x_2|<\varepsilon$

从而$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上是一致连续的.

(3) 取$\varepsilon_0=1$，对任何$\delta>0$，取$x_n'=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}},x_n''=\sqrt{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$，$|x_n'-x_n''|=|\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2n\pi-\frac{\pi}{2}}|=\left|\dfrac{\pi}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2n\pi-\frac{\pi}{2}}}\right|\to0(n\to\infty)$

故当n充分大时，一定有$|x_n'-x_n''|<\delta$，

但$|\sin(x_n')^2-\sin^2(x_n'')^2|=|1-(-1)|=2>1=\varepsilon_0$

从而$f(x)=\sin x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

§4. 无穷小量和无穷大量的阶

1. 求下列无穷小量当$x \to 0$时的阶和主要部分：

(1) $x^3 + x^6$

(2) $4x^2 + 6x^3 - x^5$

(3) $\sqrt{x \cdot \sin x}$

(4) $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}$

(5) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

(6) $\tan x - \sin x$

(7) $\ln(1+x)$

解:

(1) 由于$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + x^6}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0}(1 + x^3) = 1$，故它是一个3阶无穷小量，它的主要部分为$x^3$.

(2) 由于$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^2 + 6x^3 - x^5}{4x^2} = \lim\limits_{x \to 0}(1 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{x^3}{4}) = 1$，故它是一个2阶无穷小量，它的主要部分为$4x^2$.

(3) 由于$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x \cdot \sin x}}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{\sin x}{x}} = 1$，故它是一个1阶无穷小量，它的主要部分为$|x|$.

(4) 由于$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[6]{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^{\frac{5}{3}} + 1} = 1$，故它是一个$\dfrac{1}{6}$阶无穷小量，它的主要部分为$\sqrt[6]{x}$.

(5) 由于$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1$，故它是一个1阶无穷小量，它的主要部分为$x$.

(6) 由于$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\dfrac{x^3}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} 2\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(1 - \cos x)}{\cos x \cdot x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$，故它是一个3阶无穷小量，它的主要部分为$\dfrac{x^3}{2}$.

(7) 由于$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$，故它是一个1阶无穷小量，它的主要部分为$x$.

2. 当$x \to \infty$时，求下列变量的阶和主要部分：

(1) $x^2 + x^6$

(2) $4x^2 + 6x^4 - x^5$

(3) $\sqrt[3]{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}$

(4) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

(5) $\dfrac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$

解:

(1) 由于$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x^6}{x^6} = 1$，故它是一个6阶无穷大量，它的主要部分为$x^6$.

(2) 由于$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + 6x^4 - x^5}{-x^5} = 1$，故它是一个5阶无穷大量，它的主要部分为$-x^5$.

(3) 由于$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 1$，故它是一个$\dfrac{1}{3}$阶无穷大量，它的主要部分为$\sqrt[3]{x}$.

(4) 由于$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}} = 1$，故它是一个$\dfrac{1}{8}$阶无穷大量，它的主要部分为$\sqrt[8]{x}$.

(5) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}}{2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^3-3x+1}=1$，故它是一个2阶无穷大量，它的主要部分为$2x^2$.

3. 试证：当$\Delta x\to 0$时

(1) $o(\Delta x^m)+o(\Delta x^n)=o(\Delta x^n)(m>n>0)$

(2) $o(\Delta x^m)o(\Delta x^n)=o(\Delta x^{m+n})(m,n>0)$

(3) $|f(x)|\leqslant M$，则$f(x)o(\Delta x)=o(\Delta x)$

(4) $\Delta x^m\cdot o(1)=o(\Delta x^m)$

证明：

(1) 由于$\Delta x\to 0$，故$\Delta x^m\to 0,\Delta x^n\to 0$，于是$\dfrac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m}\to 0,\dfrac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n}\to 0$

又$m>n>0$，故$\dfrac{\Delta x^m}{\Delta x^n}=\Delta x^{m-n}\to 0$，于是$\dfrac{o(\Delta x^m)+o(\Delta x^n)}{\Delta x^n}=\dfrac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m}\cdot\dfrac{\Delta x^m}{\Delta x^n}+\dfrac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n}\to 0$，

从而$o(\Delta x^m)+o(\Delta x^n)=o(\Delta x^n)$

(2) 由于$\Delta x\to 0$，故$\Delta x^m\to 0,\Delta x^n\to 0$，于是$\dfrac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m}\to 0,\dfrac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n}\to 0$

于是$\dfrac{o(\Delta x^m)o(\Delta x^n)}{\Delta x^{m+n}}=\dfrac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m}\cdot\dfrac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n}\to 0$，

从而$o(\Delta x^m)o(\Delta x^n)=o(\Delta x^{m+n})$

(3) $\Delta x\to 0$，故$\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\to 0$，又$|f(x)|\leqslant M$，故$f(x)$有界，于是$\dfrac{f(x)o(\Delta x)}{\Delta x}=f(x)\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\to 0$，从而$f(x)o(\Delta x)=o(\Delta x)$.

(4) 由$o(1)$于是无穷小量，则$o(1)\to 0$，于是$\dfrac{\Delta x^m\cdot o(1)}{\Delta x^m}=\dfrac{\Delta x^m}{\Delta x^m}o(1)=o(1)\to 0$，从而$\Delta x^m\cdot o(1)=o(\Delta x^m)$.

第二部分　极限续论

第三章　关于实数的基本定理及闭区间上连续函数性质的证明

§1.　关于实数的基本定理

1. 从定义出发证明下确界的唯一性.
证明: 设α,α'都是数集E的下确界，于是$\forall x\in E$，都有$x\geqslant\alpha$，即α是E的下界；$x\geqslant\alpha'$，即α'是E的下界.
由于α是E的下确界，故是下界中的最大者，从而有$\alpha\geqslant\alpha'$；同样由α'是E的下确界，有$\alpha'\geqslant\alpha$.由此知$\alpha=\alpha'$.

2. 设$\beta=\sup E,\beta\notin E$，试证自$E$中可选取数列$\{x_n\}$，其极限为$\beta$；又若$\beta\in E$，则情形如何？
证明:

   (1) 由于$\beta=\sup E,\beta\notin E$，则由上确界的定义，得
   (i) 对$\forall x\in E$，都有$x<\beta$；
   (ii) 对$\forall\varepsilon>0$，至少存在一个数$x_0\in E$，使得$x_0>\beta-\varepsilon$.
   取$\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$，对每个$\varepsilon_n$都有$x_n\in E$，使得$\beta>x_n>\beta-\varepsilon_n$，即$0<\beta-x_n<\varepsilon_n$，于是可选一个数列$\{x_n\}\subset E$.
   又$\lim\limits_{n\to\infty}(\beta-\varepsilon_n)=\beta-\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=\beta$且$\beta\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}(\beta-\varepsilon_n)=\beta$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$.

   (2) 当$\beta\in E$时，命题不一定成立。例：不成立。$E=(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots),\beta=\sup E=1,1\in E$.
   又$\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，则$E$中任一子列的极限均为0，故当$\beta\in E$时，命题不成立。
   成立。$E=\left\{\sin\dfrac{\pi}{8},\sin\dfrac{2\pi}{8},\cdots,\sin\dfrac{n\pi}{8},\cdots\right\},\beta=\sup E=1,1\in E$，取$x_n=\sin\dfrac{16n+4}{8}\pi$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，故当$\beta\in E$时，命题成立。

3. 举例：

   (1) 有上确界无下确界的数列；

   (2) 含有上确界但不含有下确界的数列；

   (3) 既含有上确界又含有下确界的数列；

   (4) 既不含有上确界，又不含有下确界的数列，其中上、下确界都有限.

   解:

   (1) $\{x_n\}=\{-n\},\sup\{x_n\}=-1$

   (2) $\{x_n\}=\{\dfrac{1}{n}\},\sup\{x_n\}=1\in\{x_n\},inf\{x_n\}=0\notin\{x_n\}$

   (3) $\{x_n\}=\{1+(-1)^n\},\sup\{x_n\}=2\in\{x_n\},inf\{x_n\}=0\in\{x_n\}$

   (4) $E=\left(1,\dfrac{1}{2},1+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},1+\dfrac{2}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},1+\dfrac{n-1}{n}\right),\sup E=2\notin E,\inf E=0\notin E$

4. 试证收敛数列必有上确界和下确界，趋于$+\infty$的数列必有下确界，趋于$-\infty$的数列必有上确界.
证明:

   (1) 对于各项恒为常数的数列，显然上、下确界均可达到.
   对于不恒为常数的数列，因$\{x_n\}$收敛，即$\{x_n\}$有极限，则由第二章§1定理4，得数列$\{x_n\}$是有界数列.
   从而由本章定理三，得数列$\{x_n\}$有上、下确界，即收敛数列必有上、下确界.
   注：还可证明：上、下确界β,α中至少有一个属于$\{x_n\}$.
   事实上，若$\alpha=\beta$，则$\alpha=\beta=x_n,n=1,2,\cdots$
   若$\alpha\neq\beta$，且$\alpha\notin\{x_n\}$，则由习题2知，存在子列$\left\{x_{n_k}^{(1)}\right\}$收敛于$\alpha$，也存在子列$\left\{x_{n_k}^{(2)}\right\}$收敛于$\beta$，
   故$\{x_n\}$不收敛，这与已知$\{x_n\}$收敛矛盾，故α,β中至少有一个属于$\{x_n\}$.

   (2) 因$\{x_n\}$是趋于$+\infty$的数列，则$\exists N\in Z^+$，当$n>N$时，恒有$x_n>x_1$，于是$x_1,x_2,\cdots,x_N$中最小者，即为$\{x_n\}$的下确界。

(3) 因$\{x_n\}$是趋于$-\infty$的数列，则$\exists N\in Z^+$，当$n>N$时，恒有$x_n<x_1$，于是$x_1,x_2,\cdots,x_N$中最大者，即为$\{x_n\}$的上确界。

5. 求数列$\{x_n\}$的上、下确界:

(1) $x_n=1-\dfrac{1}{n}$

(2) $x_n=-n[2+(-2)^n]$

(3) $x_{2k}=k,x_{2k+1}=1+\dfrac{1}{k}(k=1,2,3,\cdots)$

解:

(1) $\alpha=0$（可达），$\beta=1$（不可达）

(2) 因$\lim\limits_{k\to\infty}\left[-2k\left(2+(-2)^{2k}\right)\right]=-\infty,\lim\limits_{k\to\infty}\left[-(2k+1)\left(2+(-2)^{2k+1}\right)\right]=+\infty$，故$\{x_n\}$无上、下确界.

(3) 因$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{x\to\infty}k=+\infty$，故$\{x_n\}$无上确界；
又因$x_{2k}\geqslant 1,k=1,2,3,\cdots;x_{2k+1}>1$且$\min\{x_{2k}\}=1$，故$\inf\{x_n\}=1$（可达）.

6. 证明：单调减少有下界的数列必有极限.
证明：由于$\{y_n\}$有下界，故$\{y_n\}$必有下确界.
由下确界的定义有：(i)$y_n\geqslant\alpha(n=1,2,3,\cdots)$；(ii)对$\forall\varepsilon>0$，至少有一个$y_{_N}\in\{y_n\}$，使$y_{_N}<\alpha+\varepsilon$.
由于$\{y_n\}$是单调减少数列，故当$n>N$时，有$y_n<\alpha+\varepsilon$，即当$n>N$时，有$0\leqslant y_n-\alpha<\varepsilon$，于是$y_n\to\alpha(n\to\infty)$.
从而单调减少有下界的数列必有极限.

7. 试分析区间套定理的条件：若将闭区间改为开区间，结果如何？若将条件$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$去掉或将条件$b_n-a_n\to 0$去掉，结果怎样？试举例说明.
解:

(1) 在区间套定理中，若将闭区间列改为开区间列，即

(i) $(a_{n+1},b_{n+1})\subset(a_n,b_n)$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

则可以证明$\{a_n\},\{b_n\}$仍收敛于同一极限ξ，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，但此时$\xi$可能根本不属于这些开区间，即$\xi\notin(a_n,b_n)(n\in Z^+)$，亦即$\xi$可能不为$(a_n,b_n)$的公共点.

例：开区间列$\left\{(0,\dfrac{1}{n})\right\}$，

(i) $\left(0,\dfrac{1}{n+1}\right)\subset\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-0\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；

$a_n=0\to 0(n\to\infty);b_n=\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，则$\xi=0\notin\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，即结论不成立.

(2) 若将条件$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$去掉，即只有条件$b_n-a_n\to 0$成立，则不能保证$\{a_n\}$与$\{b_n\}$收敛.
例：闭区间列$\left[n-\dfrac{1}{n},n+\dfrac{1}{n}\right]$不是一个套一个.$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n+\dfrac{1}{n}-\left(n-\dfrac{1}{n}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)$与$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\dfrac{1}{n}\right)$皆不收敛.
故不存在ξ为$\{a_n\},\{b_n\}$的公共极限，即结论不成立.

(3) 若将条件$b_n-a_n\to 0$去掉，即只有条件$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$成立.则可以证明$\{a_n\},\{b_n\}$收敛（与区间套定理证明一样），但不能保证$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$成立，从而$[a_n,b_n]$的公共点不唯一，甚至出现一个公共区间.
例：闭区间列$\left[1-\dfrac{1}{n+1},2+\dfrac{1}{n+1}\right]\subset\left[1-\dfrac{1}{n},2+\dfrac{1}{n}\right],n\in Z^+$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\left[2+\dfrac{1}{n}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]=1$.
但由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$，得$[1,2]\subset\left[1-\dfrac{1}{n},2+\dfrac{1}{n}\right],n\in Z^+$，即结论不成立.

8. 若$\{x_n\}$无界，且非无穷大量，则必存在两个子列$x_{n_k}^{(1)}\to\infty,x_{n_k}^{(2)}\to a$($a$为某有限数).
证明：先证$\left\{x_{n_k}^{(1)}\right\}$是一个无穷大量.
由于$\{x_n\}$无界，故对任何实数$M>0$，至少有一个$n'\in Z^+$，使得$|x_{n'}|>M$.
取$M=1$，则必存在n_1，使得$\left|x_{n_1}^{(1)}\right|>1$；$M=2$，则必存在$n_2$，使得$\left|x_{n_2}^{(1)}\right|>2$；$\cdots$；$M=K$，则必存

在$n_K > n_{K-1}$，使得$\left|x_{n_K}^{(1)}\right| > K$，$\cdots$.
则可得一子列$\left\{x_{n_k}^{(1)}\right\}$，对$\forall M \in Z^+$，取$K = M$，则当$k > K$时，就有$\left|x_{n_k}^{(1)}\right| > M$，故有$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}^{(1)} = \infty$.
由已知$\{x_n\}$不是无穷大量，则由定义得，$\exists M_0 > 0$，对$\forall N \in Z^+$，至少有一个$m \in Z^+$，当$m > N$时，有$|x_m| < M_0$.
现取定一个$N = m_0\ (m_0 \in Z^+)$，则至少有一个$m_1 > m_0$，使得$|x_{m_1}| \leqslant M_0$
再取$N = m_1$，则至少有一个$m_2 > m_1$，使得$|x_{m_2}| \leqslant M_0$，$\cdots$
如此进行下去，则可得一列m_t：$m_1 < m_2 < \cdots < m_t < \cdots$，使得$|x_{m_t}| \leqslant M_0$，即得子列$\{x_{m_t}\}$且$|x_{m_t}| \leqslant M_0 (m_t \in Z^+)$，这说明子列$\{x_{m_t}\}$有界，由致密性定理，知有界子列$\{x_{m_t}\}$必有收敛的子列.
不妨记这个收敛子列为$\{x_{n_k}^{(2)}\}$，它也是$\{x_n\}$的子列且设它收敛于a.即$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}^{(2)} = a$（$a$为某有限数）.

9. 有界数列$\{x_n\}$若不收敛，则必存在两个子列$x_{n_k}^{(1)} \to a, x_{n_k}^{(2)} \to b (a \neq b)$.
证明：由于$\{x_n\}$有界，则由致密性定理知它必有收敛的子列$x_{n_k}^{(1)} \to a$.
由于$\{x_n\}$不收敛，故存在$\varepsilon_0 > 0$，在$(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$外有$\{x_n\}$无穷多项，构成$\{x_n\}$的子列，记为$\left\{x_n^{(2)}\right\}$.
由于$\left\{x_n^{(2)}\right\}$有界，故存在子列$x_{n_k}^{(2)} \to b$，显然$a \neq b$.

10. 若在区间$[a, b]$中的两个数列$\left\{x_n^{(1)}\right\}$及$\left\{x_n^{(2)}\right\}$满足$x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \to 0 (n \to \infty)$，则在此两数列中能找到具有相同足标$n_k$的子列，使$x_{n_k}^{(1)} \to x_0, x_{n_k}^{(1)} \to x_0 (k \to \infty)$.
证明：因$\left\{x_n^{(1)}\right\} \subset [a, b]$，则$\left\{x_n^{(1)}\right\}$为一有界数列，则由致密性定理，得$\left\{x_n^{(1)}\right\}$必有收敛子列，记为$\left\{x_{n_k}^{(1)}\right\}$，且设$\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(1)} = x_0$.
在$\left\{x_n^{(2)}\right\}$中取出与$\left\{x_{n_k}^{(1)}\right\}$有相同足标的子列$\left\{x_{n_k}^{(2)}\right\}$.
因$x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \to 0 (n \to \infty)$，则$\lim\limits_{k\to\infty}\left(x_{n_k}^{(1)} - x_{n_k}^{(2)}\right) = 0$，
于是$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}^{(2)} = \lim\limits_{k\to\infty}\left[x_{n_k}^{(1)} - \left(x_{n_k}^{(1)} - x_{n_k}^{(2)}\right)\right] = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}^{(1)} - \lim\limits_{k\to\infty}\left(x_{n_k}^{(1)} - x_{n_k}^{(2)}\right) = x_0 - 0 = x_0$.

11. 利用柯西收敛原理讨论下列数列的收敛性：
   (1) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n (|q| < 1, |a_k| \leqslant M)$
   (2) $x_n = 1 + \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n}$
   (3) $x_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$

证明：

(1) 设$n > m$，则$|x_n - x_m| = \left|a_{m+1}q^{m+1} + a_{m+1}q^{m+1} + \cdots + a_n q^n\right| \leqslant M\left(|q|^{m+1} + |q|^{m+2} + \cdots + |q|^n\right) = M|q|^{m+1}\dfrac{1 - |q|^{n-m}}{1 - |q|} < M|q|^{m+1}\dfrac{1}{1 - |q|} \to 0 (m \to \infty)$
故而对$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$，当$n > m > N$时，有$M|q|^{m+1}\dfrac{1}{1 - |q|} < \varepsilon$，从而有$|x_n - x_m| < \varepsilon$.
由柯西收敛原理，得$\{x_n\}$必收敛.

(2) 设$m > n$，对$\forall\varepsilon > 0$（不妨设$\varepsilon < \dfrac{1}{2}$），由于$|x_m - x_n| = \left|\dfrac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dfrac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \dfrac{\sin m}{2^m}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{2^m} = \dfrac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{m-n-1}}\right) = \dfrac{1}{2^{n+1}}\dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{m-n}}{1 - \dfrac{1}{2}} < \dfrac{1}{2^n}$，若要$|x_m - x_n| < \varepsilon$，只要$\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$即可.
取$N = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\dfrac{1}{2}}\right] \in Z^+$，当$m > n > N$时，有$|x_m - x_n| < \varepsilon$.
由柯西收敛原理，得$\{x_n\}$必收敛.
（或：在（1）中令$a_0 = 1, a_k = \sin k, q = \dfrac{1}{2}$，则由（1）即得（2））.

(3) 对$\forall\varepsilon > 0$，对$\forall k \in Z^+$，由于$|x_{n+k} - x_n| = \left|\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \dfrac{(-1)^{n+3}}{n+2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+k-1}}{n+k}\right| = \left|\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{k-1}}{n+k}\right| = \dfrac{1}{n+1} - \left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{(-1)^k}{n+k}\right) < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$，若要$|x_{n+k} - x_n| < \varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n} < \varepsilon$即可.

取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当$n+k>n>N$时，有$|x_{n+k}-x_n|<\varepsilon$.
由柯西收敛原理，得$\{x_n\}$必收敛.

12. 利用有限覆盖定理证明魏尔斯特拉斯定理.
证明：设$\{x_n\}$为有界数列，则必存在a,b，使得$a\leqslant x_n\leqslant b$.
用反证法。假设$\{x_n\}$的任一子列都不收敛，则对任何$x_0\in[a,b]$，都有$\varepsilon_0>0$，使得在$O(x_0,\varepsilon_0)$中只含有$\{x_n\}$的有限项.
否则对$\forall\varepsilon>0$，在$O(x_0,\varepsilon)$中含有$\{x_n\}$的无限项.
取$\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$，显然在$O(x_0,\varepsilon_n)$中都含有$\{x_n\}$的无限多项，则在$\{x_n\}$中可取出：$x_{n_1}\in O(x_0,1)$，又可取出$x_{n_2}\in O\left(x_0,\dfrac{1}{2}\right)(n_2>n_1)$，如此进行下去，可得$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\},|x_{n_k}-x_0|<\dfrac{1}{k}$，对$\forall M\in Z^+$，取$K=M$，则当$k>K$时，就有$|x_{n_k}-x_0|<\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{K}<\dfrac{1}{M}$，则$x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$这与假设矛盾.
由$x_0\in[a,b]$的任意性，得对$[a,b]$中的每个点都有这样一个邻域，使此邻域只含$\{x_n\}$的有限项，所有这些邻域构成$[a,b]$的一个开覆盖.
由有限覆盖定理，则得存在有限个邻域也覆盖$[a,b]$，因而$[a,b]$也只含有$\{x_n\}$的有限项，这与已知$x_n\in[a,b]$矛盾，故假设不成立，则$\{x_n\}$必有收敛子列.

13. 利用魏尔斯特拉斯定理证明单调有界数列必有极限.
证明：设$\{x_n\}$为单调增加有界数列，$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots\leqslant M$
据魏尔斯特拉斯定理，存在子列$\{x_{n_k}\},\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.
下证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
先证$x_n\leqslant a,n=1,2,\cdots$.若不然，$\exists N\in Z^+$，使得$x_N>a$.
由于$n_k\to\infty(k\to\infty)$，故k充分大时，必有$n_k>N$，从而$x_{n_k}\geqslant x_N>a$，于是$a=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant x_N>a$矛盾.
再证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
对$\forall\varepsilon>0,\exists k_0$，使$\left|x_{n_{k_0}}-a\right|=a-x_{n_{k_0}}<\varepsilon$.
取$N=n_{k_0}$，则当$n>N$时，有$x_n\geqslant x_{n_{k_0}}=x_N$，从而有$|a-x_n|=a-x_n\leqslant a-x_{n_{k_0}}<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
即单调增加有界数列必有极限.
同理可得，单调减少有界数列必有极限，从而单调有界数列必有极限.

14. (1) 证明单调有界函数存在左、右极限；
    (2) 证明单调有界函数的一切不连续点都为第一类不连续点.

证明：

(1) 由已知可设$f(x)$在(a,b)上单调增加有界，任取$x_0\in(a,b)$，设$\beta(x_0)=\sup\limits_{a<x<x_0}f(x)$，
由上确界定义，对$\forall\varepsilon>0$，至少有一个$x'\in(a,x_0)$，使得$f(x')>\beta(x_0)-\varepsilon$即$f(x')+\varepsilon>\beta(x_0)$
取$\delta=x_0-x'>0$，因$f(x)$在(a,b)上单调增加，故当$\delta>x_0-x>0$即$x'<x$时，有$f(x')<f(x)$，于是有$f(x)+\varepsilon>\beta(x_0)$即$0\leqslant\beta(x_0)-f(x)<\varepsilon$，从而$|\beta(x_0)-f(x)|<\varepsilon$
说明$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\beta(x_0)$.即$f(x)$在$x_0$存在左极限.
同理可得，当$f(x)$在(a,b)上单调减少有界时，$f(x)$在x_0存在左极限，从而单调有界函数存在左极限.
同理可得，单调有界函数存在右极限.

(2) 设x_0为$f(x)$的不连续点，则由（1）的结论知$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$存在，此时$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$。
否则，$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，由$f(x)$的单调性，必有$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$.
这说明x_0是连续点，与已知矛盾，故$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，从而x_0是$f(x)$的第一类不连续点.

15. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在的充分必要条件是：对任意给定$\varepsilon>0$，存在$X>0$，当$x',x''>X$时恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.
证明：$\Rightarrow$ 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，不妨设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.
对$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$
当$x',x''>X$时，有$|f(x')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2},|f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，则$|f(x')-f(x'')|=|f(x')-A-(f(x'')-A)|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon$，从而对任意给定$\varepsilon>0$，存在$X>0$，当$x',x''>X$时恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.
$\Leftarrow$ 在$f(x)$的定义域内，任意选取数列$\{x_n\}$，使得$x_n\to+\infty(n\to\infty)$
由已知，对$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$x',x''>X$时，恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.
又因$x_n\to+\infty$，于是对上述$X>0$，定$\exists N\in Z^+$，当$n>N$时，有$x_n>X$，从而当$n,m>N$时，就有$x_n>X,x_m>X$，进而有$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.

由柯西收敛原理，得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在，不妨设$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$
由x_n的任意性及函数极限与数列极限的关系知，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$即$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

16. 证明$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是：对任意给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x'-x_0|<\delta, 0<|x''-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.
证明：$\Rightarrow$ 已知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，不妨设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.
对$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$
当$0<|x'-x_0|<\delta, 0<|x''-x_0|<\delta$时，有$|f(x')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}, |f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，则$|f(x')-f(x'')|=|f(x')-A-(f(x'')-A)|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon$，从而对任意给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x'-x_0|<\delta, 0<|x''-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.
$\Leftarrow$ 在$f(x)$的定义域内，任意选取数列$\{x_n\}$，使得$x_n\to x_0$且$x_n\neq x_0(n\to\infty)$
由已知，对$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当$x', x''\in D(f)$，且当$0<|x'-x_0|<\delta, 0<|x''-x_0|<\delta$时，就有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.
又因$x_n\to x_0, x_n\neq x_0(n\to\infty)$，于是对上述$\delta>0$，定$\exists N\in Z^+$，当$n>N$时，有$0<|x_n-x_0|<\delta$，从而当$n, m>N$时，就有$0<|x_n-x_0|<\delta, 0<|x_m-x_0|<\delta$，进而有$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.
由数列的柯西收敛原理，得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在，不妨设$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$
由$\{x_n\}$是任意以x_0为极限的数列且$x_n\neq x_0$ 及函数极限与数列极限的关系知，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在.

17. 证明$f(x)$在x_0点连续的充分必要条件是：对任意给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x'-x_0|<\delta, |x''-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.
证明：$\Rightarrow$ 已知$f(x)$在x_0点连续，则对$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$
当$|x'-x_0|<\delta, |x''-x_0|<\delta$时，有$|f(x')-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}, |f(x'')-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，则$|f(x')-f(x'')|=|f(x')-f(x_0)-(f(x'')-f(x_0))|\leqslant|f(x')-f(x_0)|+|f(x'')-f(x_0)|<\varepsilon$，从而对任意给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x'-x_0|<\delta, |x''-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.
$\Leftarrow$ 取$x'=x_0, x''=x$，则由已知，得对$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.
从而$f(x)$在x_0点连续.

§2. 闭区间上连续函数性质的证明

1. 证明：若单调有界函数$f(x)$可取到$f(a),f(b)$之间的一切值，则$f(x)$在$[a,b]$连续.
证明： 不妨设$f(x)$为单调增加有界函数.
由本章§1, 14题（1）知，$f(x)$在$[a,b]$的端点$a(b)$处的右（左）极限存在，此时$f(a)=f(a+0)(f(b)=f(b-0))$，
若不然，必有$f(a)<f(a+0)=\inf\limits_{a<x<b}f(x)(f(b)>f(b-0)=\sup\limits_{a<x<b}f(x))$，于是由$f(x)$可取到$f(a)$与$f(b)$之间的一切值，得对任何$f(a)<y<f(a+0)(f(b-0)<y<f(b))$，必有$x\in(a,b)$，使得$f(x)=y$，此与$f(a+0)=\inf\limits_{a<x<b}f(x)(f(b-0)=\sup\limits_{a<x<b}f(x))$矛盾.
由此可知$f(x)$在$a(b)$右（左）连续.
若有$x_0\in(a,b)$，使$f(x)$在x_0点不连续。由§1, 14(2)的结论，知x_0必为第一类间断点，即$f(x_0+0)$和$f(x_0-0)$存在，但$f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$.
又因$f(x)$为单调增函数，故$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)<f(x_0+0)$或$f(x_0-0)<f(x_0)\leqslant f(x_0+0)$，这时$f(x)$取不到$(f(x_0-0),f(x_0+0))$之间异于$f(x_0)$的值，这与已知矛盾，故假设不成立.
于是$f(x)$在$[a,b]$连续.
同理，当$f(x)$为单调减少有界函数时，$f(x)$在$[a,b]$连续.
从而$f(x)$在$[a,b]$连续.

2. 证明：函数$f(x)$在(a,b)连续，并且$f(a+0),f(b-0)$存在，则$f(x)$可取到$f(a+0)$和$f(b-0)$之间的(但可能不等于$f(a+0),f(b-0)$)一切值.
证明：由于$f(a+0),f(b-0)$存在，则补充定义$f(a)=f(a+0),f(b)=f(b-0)$.
又$f(x)$在(a,b)连续，则$f(x)$在$[a,b]$连续，因而$f(x)$在$[a,b]$上必有最大值M和最小值m.
再由介值定理，知$f(x)$可以取到M和m间的一切值.
若$M=f(a+0)$(或$f(b-0)$)，$m=f(b-0)$(或$f(b-0)$)，这时$f(x)$可取到$(f(a+0),f(b-0))$中的一切值(但可能不等于$f(a+0),f(b-0)$).
若$M>f(a+0)$(或$f(b-0)$)，$m<f(b-0)$(或$f(b-0)$)，这时$f(x)$可取到$(f(a+0),f(b-0))$中的一切值(可能等于$f(a+0),f(b-0)$). 故$f(x)$可取到$f(a+0)$和$f(b-0)$之间的(但可能不等于$f(a+0),f(b-0)$)一切值.

3. 证明(a,b)上的连续函数为一致连续的充分必要条件是：$f(a+0),f(b-0)$存在.
证明：$\Leftarrow$设$f(x)$为(a,b)上的连续函数
因$f(a+0),f(b-0)$存在，则补充定义$f(a)=f(a+0),f(b)=f(b-0)$，于是$f(x)$在$[a,b]$连续，则由康托定理，得$f(x)$在$[a,b]$上一致连续，从而$f(x)$在(a,b)上一致连续.
$\Rightarrow$因$f(x)$在(a,b)上一致连续，则由定义，得对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$，当$x_1,x_2\in(a,b)$且$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.
对a，当$0<x_1-a<\dfrac{\delta(\varepsilon)}{2},0<x_2-a<\dfrac{\delta(\varepsilon)}{2}$时，$|x_1-x_2|=|(x_1-a)-(x_2-a)|\leqslant|x_1-a|+|x_2-a|<\delta(\varepsilon)$，则有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.
由柯西收敛原理，得$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$存在，即$f(a+0)$存在且有限.
同理，得$f(b-0)$存在且有限.

4. 若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的任一有限闭区间上连续，则它在$(-\infty,+\infty)$上的任一有限开区间上也一致连续.
证明：设(a,b)为$(-\infty,+\infty)$上的任一有限开区间，则$[a,b]$为$(-\infty,+\infty)$上的任一有限闭区间.
因$f(x)$在$[a,b]$上连续，则由康托定理，得$f(x)$在$[a,b]$上一致连续，因而$f(x)$在(a,b)上一致连续.
由(a,b)的任意性，得$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的任一有限开区间上也一致连续.

5. 函数$f(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$及$(-l,l)$上$(l>0)$是否一致连续？
解：

(1) $f(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.
设$x_1>x_2>0$，且$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty),|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2||x_1-x_2|=(x_1+x_2)(x_1-x_2)>2x_2(x_1-x_2)$，存在$\varepsilon_0>0$，对$\forall\eta>0$，取$x_2=\dfrac{2\varepsilon_0}{\eta},x_1=x_2+\dfrac{\eta}{2}$，
显然有$x_1>x_2>0$且$|x_1-x_2|=\dfrac{\eta}{2}<\eta$，但$|f(x_1)-f(x_2)|>2x_2(x_1-x_2)=2\cdot\dfrac{2\varepsilon_0}{\eta}\cdot\dfrac{\eta}{2}=2\varepsilon_0>\varepsilon_0$，从而$f(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

(2) $f(x)=x^2$在$(-l,l)(l>0)$上一致连续.
因$f(x)$在$[-l,l](l>0)$上是连续的，则由康托定理，得$f(x)$在$[-l,l]$上一致连续，从而$f(x)=x^2$在$(-l,l)$上一致连续.

6. 若$f(x)$在(a,b)内有定义，并且对(a,b)内任何x，存在x的某个邻域O_x，使得$f(x)$在O_x内有界.问：$f(x)$在(a,b)内是否有界？又若将(a,b)改为$[a,b]$，如何？
证明：

(1) $f(x)$在(a,b)不一定有界.
例：无界：$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内有定义，且对$\forall x\in(a,b)$连续，故必局部有界，即存在x的邻域$O_x(O(x,\delta_x))$，使得它在$O_x(O(x,\delta_x))$内有界，但它在$(0,1)$内无界.
有界：$f(x)=\sin x$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$有定义，对$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内的任何$x$，存在$x$的某个邻域$O_x$，使得$f(x)$在$O_x$内有界；$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上有界，且$0<f(x)<1$.

(2) $f(x)$在$[a,b]$一定有界.
因$f(x)$在$[a,b]$内有定义，则补充定义：$f(x)$在$(a-\delta,a)$的值为$f(a)$，$f(x)$在$(b,b+\delta)$的值为$f(b)$.
由已知对$[a,b]$内任何x，存在x的某个邻域O_x，使得$f(x)$在O_x内有界，即$\exists M>0$，使$|f(x)|\leqslant M$，因此在$[a,b]$上每一点都得到这样一个邻域（亦即开区间），这些开区间的全体构成一个开区间集，它覆盖了$[a,b]$.
由有限覆盖定理，得在这些开区间集中必有有限个开区间覆盖了$[a,b]$，记这有限个开区间为$(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1),(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2),\cdots,(x_k-\delta_k,x_k+\delta_k)$，相应的$M$分别记为$M_1,M_2,\cdots,M_k$，如今只要取$M^*=\max\{M_1,M-2,\cdots,M_k\}$.
对$[a,b]$上任意一点x，由区间覆盖概念，在这k个开区间$O(x_i,\delta_i)(i=1,2,\cdots,k)$中至少有一个包含$x$，记它为$O(x_i,\delta_i)$，且在这个开区间上，有$|f(x)|\leqslant M_i$，故$|f(x)|\leqslant M_i\leqslant M^*$.
由于x为$[a,b]$上的任意一点，则在$[a,b]$上总成立$|f(x)|\leqslant M^*$，从而证明了$f(x)$在$[a,b]$上有界.

7. 证明(a,b)上的一致连续函数必有界.
证明:因$f(x)$为(a,b)上的一致连续函数，则由习题3，得$f(x)$在(a,b)上连续且$f(a+0),f(b-0)$存在，于是补充定义：$f(a)=f(a+0),f(b)=f(b-0)$，则$f(x)$在$[a,b]$上连续，于是$f(x)$在$[a,b]$上有界，从而$f(x)$在(a,b)上有界.

8. 按定义证明，两个一致连续函数的和仍一致连续.有问：两个一致连续函数的积如何？
证明:

(1) 设$f(x)$与$g(x)$在任一区间X上一致连续.
因$f(x)$在区间X上一致连续，则由定义对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，对区间$X$内任何两点$x',x''$，只要$|x'-x''|<\delta_1$，就有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
又因$g(x)$在区间X上一致连续，则由定义对上述$\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$，对区间$X$内任何两点$x',x''$，只要$|x'-x''|<\delta_2$，就有$|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$|x'-x''|<\delta$时，有$|f(x')+g(x')-(f(x'')+g(x''))|=|f(x')-f(x'')+(g(x')-g(x''))|\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
从而$f(x)$在区间X上一致连续.

(2) (i) 若区间X为有限区间，则结论成立.
设$f(x),g(x)$在区间X上一致连续，则由上题结论，知存在常数$L>0,M>0$，使$|f(x)|<L,g(x)<M(x\in X)$.
又由一致收敛定义，得$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，对区间$X$内任何两点$x',x''$，只要$|x'-x''|<\delta_1$，就有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$.
同样，对上述$\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$，对区间$X$内任何两点$x',x''$，只要$|x'-x''|<\delta_2$，就有$|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2L}$.
取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$|x'-x''|<\delta$时，就有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2M},|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2L}$同时成立.
由此可知，$|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|=$
$|[f(x')-f(x'')]g(x')+f(x'')[g(x')-g(x'')]|\leqslant|f(x')-f(x'')||g(x')|+|f(x'')||g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2M}\cdot M+L\cdot\dfrac{\varepsilon}{2L}=\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
从而$f(x)g(x)$在区间X上一致连续.

(ii) 当$f(x),g(x)$在$(-\infty,+\infty)$都一致连续时，$f(x)g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不一定一致连续.
例：

(a) 不一致连续.
$f(x)=g(x)=x$，因对$\forall\varepsilon>0$，及$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，取$\delta=\varepsilon$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有$|x_1-x_2|<\varepsilon$，故$f(x)=g(x)=x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.
但$f(x)g(x)=x^2$，由第5题可知$f(x)g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

(b) 一致连续.
$f(x)=1$，因对$\forall\varepsilon>0$，对任何$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，取$\delta=\varepsilon$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，故$f(x)=1$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

$g(x)=x$，则由可知$g(x)=x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，且$f(x)g(x)=x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

第二篇　单变量微积分学

第一部分　单变量微分学

第四章　导数与微分

§1.　导数的引进与定义

1. 过曲线$y=x^2$上两点$A(2,4)$和$B(2+\Delta x,2+\Delta y)$作割线，分别求出当$\Delta x=1$及$\Delta x=0.1$时割线的斜率，并求出曲线在A点的切线斜率.
   解：$k_{AB}=\dfrac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=4+\Delta x$
   当$\Delta x=1$时，$k_{AB}=5$；当$\Delta x=0.1$时，$k_{AB}=4.1$
   曲线在A点的切线斜率为$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}k_{AB}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4.$
2. 求抛物线$y=x^2$在$A(1,1)$点和在$B(-2,4)$点的切线方程和法线方程.
   解：因$y'=2x$，故在点$A(1,1)$：$k_1=2$，切线方程为：$y-1=2(x-1)$即$2x-y-1=0$；法线方程为$y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$即$x+2y-3=0$
   在点$B(-2,4)$：$k_2=-4$，切线方程为：$y-4=-4(x+2)$即$4x+y+4=0$；法线方程为$y-4=\dfrac{1}{4}(x+2)$即$x-4y+18=0$
3. 若$y=f(x)=x^3$，求
   (1) 过曲线上二点$x_0,x_0+\Delta x$之割线的斜率（设$x_0=2,\Delta x$分别为0.1，0.01，0.001）；
   (2) 在$x=x_0$时曲线切线的斜率.

   解：

   (1) 因$k=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{(x_0+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2$，
   故：当$\Delta x=0.1$时，$k=12.61$；当$\Delta x=0.01$时，$k=12.0601$；当$\Delta x=0.001$时，$k=12.006001.$
   (2) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=3x^2$，
   于是$f'(x_0)=3x_0^2$
4. 若$s=vt-\dfrac{1}{2}gt^2$，求
   (1) 在$t=1,t=1+\Delta t$之间的平均速度（设$\Delta t=1,0.1,0.01$）；
   (2) 在$t=1$的瞬时速度.

   解：

   (1) 因$\bar v=\dfrac{v(1+\Delta t)-\frac{1}{2}g(1+\Delta t)^2-\left(vt-\frac{1}{2}gt^2\right)}{\Delta t}=v-g-\dfrac{1}{2}g\Delta t^2$，
   故：当$\Delta t=1$时，$\bar v=v-\dfrac{3}{2}g$；当$\Delta t=0.1$时，$\bar v=v-\dfrac{21}{20}g$；当$\Delta t=0.01$时，$\bar v=v-\dfrac{201}{200}g.$
   (2) 在$t=1$的瞬时速度$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar v=v-g.$
5. 抛物线$y=x^2$在哪一点的切线平行于直线$y=4x-5$？在哪一点的切线垂直于直线$2x-6y+5=0$？
   解：因直线$y=4x-5$的斜率为$k=4$，则由$f'(x)=2x=k$，得$x=2$，即$(2,4)$点的切线平行于直线$y=4x-5$；
   因直线$2x-6y+5=0$的斜率为$k=\dfrac{1}{3}$，则由$f'(x)=2x=-\dfrac{1}{k}=-3$，得$x=-\dfrac{3}{2}$，即$(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4})$点的切线垂直于直线$2x-6y+5=0.$
6. 求下列函数在所示点的$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$：
   (1) $y=\sqrt{x}$(设$x=2,\Delta x=0.01$)
   (2) $y=\dfrac{1}{x}$(设$x=4,\Delta x=0.04$)

解:

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{2.01}-\sqrt{2}}{0.01}=100\left(\sqrt{2.01}-\sqrt{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2.01}+\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=-\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}=-\dfrac{1}{4(4+0.04)}=-\dfrac{25}{404}$

7. 证明：

(1) $\Delta(f(x)\pm g(x))=\Delta f(x)\pm\Delta g(x)$

(2) $\Delta[f(x)\cdot g(x)]=g(x+\Delta x)\cdot\Delta f(x)+f(x)\cdot\Delta g(x)$

证明:

(1) $\Delta(f(x)\pm g(x))=[f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta)]-[f(x)\pm g(x)]=[f(x+\Delta x)-f(x)]\pm[g(x+\Delta x)-g(x)]=\Delta f(x)\pm\Delta g(x)$

(2) $\Delta[f(x)\cdot g(x)]=f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)=f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)=[f(x+\Delta x)-f(x)]\cdot g(x+\Delta x)+f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]=g(x+\Delta x)\cdot\Delta f(x)+f(x)\cdot\Delta g(x)$

§2. 简单函数的导数

1. 由导数定义求$y=\cos x$的导数.

解：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2\sin\dfrac{2x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=$ $-\sin x$，即$(\cos x)'=-\sin x$.

2. 由导数定义求$y=\sqrt[3]{x}$的导数.

解：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}=$ $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$，即$(\sqrt[3]{x})'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3. 按定义证明：可导的偶函数其导函数是奇函数，可导的奇函数其导函数是偶函数.

证明：设$f(x)$为可导的偶函数，则$f(-x)=f(x)$；$g(x)$为可导的奇函数，则$g(-x)=-g(x)$

于是$f'(-x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{-[f(x-\Delta x)-f(x)]}{-\Delta x}=$ $-f'(x)$即可导的偶函数其导函数是奇函数；

$g'(-x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(-x+\Delta x)-g(-x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-g(x-\Delta x)+g(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{g(x-\Delta x)-g(x)]}{-\Delta x}=g'(x)$即可导的奇函数其导函数是偶函数.

4. 按定义证明：可导的周期函数，其导函数仍为周其函数.

证明：设$f(x)$为可导的周期为T的函数，则$f(x+T)=f(x)$，

于是$f'(x+T)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$即可导的周期函数，其导函数仍为周其函数.

§3. 求导法则

1. 利用已经给出的导数公式，求下列函数的导数：

(1) $y = x^5$

(2) $y = x^{11}$

(3) $y = x^6$

(4) $y = 2^x$

(5) $y = \log_{10} x$

(6) $y = 10^x$

解：

(1) $y' = (x^5)' = 5x^4$

(2) $y' = (x^{11})' = 11x^{10}$

(3) $y' = (x^6)' = 6x^5$

(4) $y' = (2^x)' = 2^x \ln 2$

(5) $y' = (\log_{10} x)' = \dfrac{1}{x \ln 10}$

(6) $y' = (10^x)' = 10^x \ln 10$

2. 求下列函数的导数：

(1) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$，并求$f'(0), f'(1)$

(2) $f(x) = x^5 + 3\sin x$，并求$f'(0), f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

(3) $f(x) = e^x + 2\cos x - 7x$，并求$f'(0), f'(\pi)$

(4) $f(x) = 4\sin x - \ln x + x^2$

(5) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，并求$f'(0), f'(1)$

解：

(1) $f'(x) = 4x - 3$，$f'(0) = -3, f'(1) = 1$

(2) $f'(x) = 5x^4 + 3\cos x$，并求$f'(0) = 3, f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{5\pi^4}{16}$

(3) $f'(x) = e^x - 2\sin x - 7$，并求$f'(0) = -6, f'(\pi) = e^\pi - 7$

(4) $f'(x) = 4\cos x - \dfrac{1}{x} + 2x$

(5) $f(x) = na_n x^{n-1} + (n_1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$，并求$f'(0) = a_1, f'(1) = \sum\limits_{i=1}^{n} ia_i$

3. 求下列函数的导数：

(1) $y = x^2 \sin x$，并求$f'(0), f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $y = x\cos x + 3x^2$，并求$f'(-\pi)$和$f'(\pi)$

(3) $y = x\tan x + 7x - 6$

(4) $y = e^x \sin x - 7\cos x + 5x^2$

(5) $y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - 2x^3$

(6) $y = (3x^2 + 2x - 1)\sin x$

解：

(1) $y' = 2x\sin x + x^2\cos x$，$f'(0) = 0, f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$

(2) $y' = \cos x - x\sin x + 6x$，$f'(-\pi) = -1 - 6\pi, f'(\pi) = -1 + 6\pi$

(3) $y' = \tan x + x\sec^2 x + 7$

(4) $y' = e^x \sin x + e^x \cos x + 7\sin x + 10x = e^x(\sin x + \cos x) + 7\sin x + 10x$

(5) $y' = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} - 6x^2$

(6) $y' = (3x^2 + 2x - 1)\cos x + (6x + 2)\sin x$

4. 求下列函数的导数：

(1) $y = \frac{2 + \sin x}{x}$

(2) $y = \cot x$

(3) $y = \frac{3x^2 + 7x - 1}{\sqrt{x}}$

(4) $y = \frac{(1 + x^2)\sin x}{2x}$

(5) $y = \frac{x \ln x}{1 + x}$

(6) $y = \frac{xe^x - 1}{\sin x}$

解：

(1) $y' = \frac{x(2 + \sin x)' - (x + \sin x)}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x - 2}{x^2}$

(2) $y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x(\cos x)' - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(3) $y' = \frac{\sqrt{x}(3x^2 + 7x - 1)' - (\sqrt{x})'(3x^2 + 7x - 1)}{x} = \frac{\sqrt{x}(6x + 7) - \frac{3x^2 + 7x - 1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{9x^2 + 7x + 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

(4) $y' = \frac{2x[(1 + x^2)\sin x]' - 2(1 + x^2)\sin x}{4x^2} = \frac{2x[2x \sin x + (1 + x^2)\cos x] - 2(1 + x^2)\sin x}{4x^2} = \frac{(x^2 - 1)\sin x + x(1 + x^2)\cos x}{2x^2}$

(5) $y' = \frac{(1 + x)(x \ln x)' - x \ln x}{(1 + x)^2} = \frac{(1 + x)(\ln x + 1) - x \ln x}{(1 + x)^2} = \frac{x + \ln x + 1}{(1 + x)^2}$

(6) $y' = \frac{\sin x(xe^x - 1)' - (\sin x)'(xe^x - 1)}{\sin^2 x} = \frac{e^x \sin x(x + 1) - \cos x(xe^x - 1)}{\sin^2 x}$

5. 求下列函数的导数：

(1) $y = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x - 1} - 7x^2$

(2) $y = \frac{x \sin x + \cos x}{x \sin x - \cos x}$

(3) $y = x^2 e^x \sin x + \frac{3 + x^2}{\sqrt{x}} - x \ln x + 8x^2$

(4) $y = \frac{\sin x}{1 + \tan x}$

(5) $y = \frac{x \cos x - \ln x}{x + 1}$

(6) $y = \frac{1}{x + \cos x}$

解：

(1) $y' = \frac{(x - 1)(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x) - (\sqrt{x} + \cos x)}{(x - 1)^2} - 14x = \frac{(x - 1)(1 - 2\sqrt{x}\sin x) - (2x + 2\sqrt{x}\cos x)}{2\sqrt{x}(x - 1)^2} - 14x$

(2) $y' = \frac{(x \sin x - \cos x)(\sin x + x \cos x - \sin x) - (x \sin x + \cos x)(\sin x + x \cos x + \sin x)}{(x \sin x - \cos x)^2} = -\frac{2(\sin x \cos x + x)}{(x \sin x - \cos x)^2} = -\frac{2x + \sin 2x}{(x \sin x - \cos x)^2}$

(3) $y' = 2xe^x\sin x + x^2e^x\sin x + x^2e^x\cos x + \dfrac{2x\sqrt{x} - \dfrac{3+x^2}{2\sqrt{x}}}{x} - \ln x - 1 + 16x = xe^x(2\sin x + x\sin x + x\cos x) + \dfrac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}} - \ln x - 1 + 16x$

(4) $y' = \dfrac{\cos x(1+\tan x) - \sin x\cdot\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

(5) $y' = \dfrac{(x+1)(\cos x - x\sin x - \frac{1}{x}) - (x\cos x - \ln x)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\cos x - (x^2\sin x + 1)(x+1) + x\ln x}{x(x+1)^2}$

(6) $y' = -\dfrac{1-\sin x}{(x+\cos x)^2} = \dfrac{\sin x - 1}{(x+\cos x)^2}$

6. 求曲线$y+1=(x-2)^3$在点$A(3,0)$处的切线方程及法线方程.
解：因$y+1=(x-2)^3$，则$y=(x-2)^3-1$，于是$y'=3(x-2)^2$，则所求切线的斜率为$k=y'|_{x=3}=3$，从而所求切线方程为：$y=3(x-3)$即$3x-y-9=0$；所求法线方程为：$y=-\dfrac{1}{3}(x-3)$即$x+3y-3=0$.

7. 求曲线$y=\ln x$在点$(1,0)$处的切线方程和法线方程.
解：因$y=\ln x$，则$y'=\dfrac{1}{x}$，于是所求切线的斜率为$k=y'|_{x=1}=1$，
从而所求切线方程为：$y=x-1$即$x-y-1=0$；所求法线方程为：$y=-(x-1)$即$x+y-1=0$.

8. 抛物线$y=x^2-2x+4$在哪一点的切线平行于x轴？在哪一点的切线与x轴的交角为45^o？
解：因$y=x^2-2x+4$，故$y'=2x-2$.
又平行于x轴的切线斜率为$k=0$，则$2x-2=0$，于是$x=1$，即所求点为$(1,3)$；
又与x轴的交角为45^o的切线斜率为$k=1$，则$2x-2=1$，于是$x=\dfrac{3}{2}$，即所求点为$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{13}{4}\right)$.

9. 沿直线运动的物体，其运动方程为$s=3t^4-20t^3+36t^2$，求其速度，并问物体何时向前运动？何时向后运动？
解：因$s=3t^4-20t^3+36t^2$，故$v=s'=12t^3-60t^2+72t$.
当$v>0$即$0<t<2$或$t>3$时，物体向前运动；当$v<0$即$2<t<3$时，物体向后运动.

10. 由于外力作用，一球沿着斜面向上滚，初速度为5，运动方程为$s=5t-t^2$，试问此球何时开始向下滚？
解：因$s=5t-t^2$，故$v=s'=5-2t$，当$v=0$即$t=\dfrac{5}{2}$时，球开始向下滚.

11. 在$x=2$处，作曲线$y=0.1x^3$的切线，试问除切点外，此切线与曲线还在何处相交？
解：因$y=0.1x^3$，故$y'=0.3x^2$，于是在$x=2$处，切线的斜率为$k=y\ |x=2=1.2$，从而此曲线在切点$(2,0.8)$处的切线方程为$y-0.8=1.2(x-2)$，即$6x-5y-8=0$；由$\begin{cases} y=0.1x^3 \\ 6x-5y-8=0 \end{cases}$，得$x^3-12x+16=0$，则$(x-2)^2(x+4)=0$，解得$x_1=x_2=2, x_3=-4$，则此切线与曲线还在点$(-4,-6.4)$处相交.

12. 曲线$y=x^n$（n为正整数）上点$(1,1)$处的切线交x轴于点$(\xi_n,0)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}y(\xi_n)$.
解： 因$y=x^n$，则$y'=nx^{n-1}$，则此曲线在$x=1$处的切线斜率为$k=y'|_{x=1}=n$，于是此曲线在点$(1,1)$处的切线方程为$y-1=n(x-1)$即$y=nx-n+1$.
当$y=0$时，$x=\dfrac{n-1}{n}$即$\xi_n=\dfrac{n-1}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{e}$.

13. 设抛物线方程为$y=x^2+ax+b$，试问点(x_0,y_0)位于何处时，可以从点(x_0,y_0)对此抛物线作出两条切线或一条切线，或作不出切线？
解：设(x_0,y_0)为平面上任一点，(x,y)为过(x_0,y_0)的切线与抛物线的交点.
由已知，得与抛物线相交的切线的斜率为$k=y'=2x+a$，则所求切线为$y-y_0=(2x+a)(x-x_0)$即$y_0-y=(2x-a)(x_0-x)$，
又$y=x^2+ax+b$，则$y_0-(x^2+ax+b)=(2x+a)(x_0-x)$，故$x^2-2x_0x+y_0-ax_0$，则$\Delta=4x_0^2-4(y_0-b-ax_0)$
当$\Delta>0$即$y_0<x_0^2+ax_0+b$时，可作两条切线；当$\Delta=0$即$y_0=x_0^2+ax_0+b$时，可作一条切线；当$\Delta<0$即$y_0>x_0^2+ax_0+b$时，作不出切线.

14. 问底数a为什么值时，直线$y=x$才能与对数曲线$y=\log_a x$相切？在何处相切？
解：由题意，得$x'=(\log_a x)'$，即$1=\dfrac{1}{x\ln a}$，则$x=\dfrac{1}{\ln a}$，于是$y=\dfrac{1}{\ln a}$.
又由于在切点相切，其纵坐标必须相等，则 $\log_a x=\dfrac{1}{\ln a}$，于是$x=e$，则可得$\ln a=\dfrac{1}{e}$，即$a=e^{\frac{1}{e}}$即当底数$a=e^{\frac{1}{e}}$时，直线$y=x$才能与对数曲线$y=\log_a x$相切，在点$(e,e)$处相切.

§4. 复合函数求导法

1. 求下列函数的导数：

(1) $y = 2\sin 3x$

(2) $y = 4\cos(3t-1)$

(3) $y = 3e^{2x} + 5\cos 2x$

(4) $y = (x+1)^2$

(5) $y = (1-x+x^2)^3$

(6) $y = 3e^{-2t} + 1$

(7) $y = \ln(x+1)$

(8) $y = (3x+1)^4$

(9) $y = \sqrt{1+x^2}$

(10) $y = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2$

(11) $y = \tan\dfrac{x}{2} + \sin 3x$

(12) $y = \ln\sin x$

(13) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(14) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-3t^2}$

解：

(1) $y' = 6\cos 3x$

(2) $y' = -12\sin(3t-1)$

(3) $y' = 6e^{2x} - 10\sin 2x$

(4) $y' = 2(x+1)$

(5) $y' = 3(1-x+x^2)^2(2x-1)$

(6) $y' = -6e^{-2t}$

(7) $y' = \dfrac{1}{x+1}$

(8) $y' = 12(3x+1)^3$

(9) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(10) $y' = 2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2(x-1)}{x^3}$

(11) $y' = \dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2} + 3\cos 3x$

(12) $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = cotx$

(13) $y' = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(14) $y' = \dfrac{-3\sqrt{2}t}{\sqrt{\pi}}e^{-3t^2}$

2. 求下列函数的导数：

(1) $y = \sin^3 2x$

(2) $y = (at+b)e^{-2t}(a,b\text{为常数})$

(3) $y = e^{2t}\sin 3t + \dfrac{t^2}{2}$

(4) $y=\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

(5) $y=\dfrac{e^{-kt}\sin\omega t}{1+t}(k,\omega\text{为常数})$

(6) $y=\dfrac{4}{(x+\cos 2x)^2}$

(7) $y=e^{-t}(\cos t+\sin t)$

(8) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

(9) $y=(x-1)\sqrt{x^2+1}$

(10) $y=(2+3t)\sin 2t+7t^2-7$

解:

(1) $y'=6\sin^2 2x\cos x=3\sin 4x\sin 2x$

(2) $y'=ae^{-2t}-2(at+b)e^{-2t}=-(2at+2b-a)e^{-2t}$

(3) $y'=2e^{2t}\sin 3t+3e^{2t}\cos 3t+t=e^{2t}(2\sin 3t+3\cos 3t)+t$

(4) $y'=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{4x}{x^4-1}$

(5) $y'=\dfrac{(1+t)e^{-kt}(-k\sin\omega t+\omega\cos\omega t)-(e^{-kt}\sin\omega t}{(1+t)^2}=$
$\dfrac{-(kt+k+1)e^{-kt}\sin\omega t+\omega(1+t)e^{-kt}\cos\omega t}{(1+t)^2}$

(6) $y'=-\dfrac{4[(x+\cos 2x)^2]'}{(x+\cos 2x)^4}=-\dfrac{8(1-2\sin 2x)}{(x+\cos 2x)^2}$

(7) $y'=-e^{-t}(\cos t+\sin t)+e^{-t}(-\sin t+\cos t)=-2e^{-t}\sin t$

(8) $y'=\dfrac{\sqrt{1+\cos^2 x}-x\dfrac{-2\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}}{1+\cos^2 x}=\dfrac{1+\cos^2 x+x\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

(9) $y'=\sqrt{x^2+1}+(x-1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(10) $y'=3\sin 2t+2(2+3t)\cos 2t+14t$

3. 求下列函数的导数:

(1) $y=e^{-kt}(3\cos\omega t+4\sin\omega t)(k,\omega\text{为常数})$

(2) $y=x\arctan x$

(3) $y=(2x^2+1)^2e^{-x}\sin 3x$

(4) $y=\dfrac{e^{-t}\sin 3t}{\sqrt{1+t^2}}$

(5) $y=(3t+1)e^t(\cos 3t-7\sin 3t)$

(6) $y=t\arcsin 3t+7e^{-2t}\ln t+8t$

(7) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}(a\text{为常数})$

解:

(1) $y'=-ke^{-kt}(3\cos\omega t+4\sin\omega t)+e^{-kt}(-3\omega\sin\omega t+4\omega\cos\omega t)=e^{-kt}[(4\omega-3k)\cos\omega t-(3\omega+4k)\sin\omega t]$

(2) $y'=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}$

(3) $y'=4x(2x^2+1)e^{-x}\sin 3x-(2x^2+1)^2e{-}x\sin 3x+3(2x^2+1)^2e{-}x\cos 3x=e^{-x}(2x^2+1)[(-2x^2+8x-1)\sin 3x+3(2x^2+1)\cos 3x]$

(4) $y'=\dfrac{e^{-t}(-\sin 3t+3\cos 3t)\sqrt{1+t^2}-e^{-t}\sin 3t\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\dfrac{e^{-t}[3(1+t^2)\cos 3t-(t^2+t+1)\sin 3t]}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$

(5) $y' = 3e^t(\cos 3t - 7\sin 3t) + (3t+1)e^t(\cos 3t - 7\sin 3t) + (3t+1)e^t(-3\sin 3t - 21\cos 3t) = -e^t[(60t + 17)\cos 3t + (30t+31)\sin 3t]$

(6) $y' = \arcsin 3t + \dfrac{3t}{\sqrt{1-9t^2}} - 14e^{-2t}\ln t + \dfrac{7e^{-2t}}{t} + 8$

(7) $y' = \sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \dfrac{\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \dfrac{(a^2-2x^2)(a^2-x^2)+a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. 求下列函数的导数：

(1) $y = \sin^n x \cos nx$

(2) $y = \sinh^n x \cosh nx$

(3) $y = e^{-x^2+2x}$

(4) $y = (\sin x + \cos x)^n$

(5) $y = \arcsin(\sin x \cdot \cos x)$

(6) $y = \ln\sqrt{\dfrac{(x+2)(x+3)}{x+1}}$

(7) $y = \arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$

(8) $y = \dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$

解:

(1) $y' = n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx - n\sin^n x\sin nx =$
$n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$

(2) $y' = n\sinh^{n-1}x\cosh x\cosh nx + n\sinh^n x\sinh nx =$
$n\sinh^n x\cosh(n+1)x$

(3) $y' = -2(x-1)e^{-x^2+2x}$

(4) $y' = n(\sin x+\cos x)^{n-1}(\cos x - \sin x) = n(\sin x + \cos x)^{n-2}\cos 2x$

(5) $y' = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1-(\sin x\cdot\cos x)^2}} = \dfrac{2\cos 2x}{\sqrt{4-sin^2 2x}}$

(6) 因$y = \ln\sqrt{\dfrac{(x+2)(x+3)}{x+1}} = \dfrac{1}{2}[\ln(x+2)+\ln(x+3)-\ln(x+1)]$，故$y' = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+1}\right] =$
$\dfrac{x^2+2x-1}{2(x+1)(x+2)(x+3)}$.

(7) $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2}{1+x^2}$

(8) $y' = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2(a^2+x^2)} = \dfrac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

5. 利用取对数再求导的方法，求下列函数的导数：

(1) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(2) $y = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt{\dfrac{x+1}{1+x+x^2}}$

(3) $y = (x-\alpha_1)^{\alpha_1}(x-\alpha_2)^{\alpha_2}\cdots(x-\alpha_n)^{\alpha_n}$

(4) $y = (x+\sqrt{1+x^2})^n$

(5) $y = x^m m^x$

解:

(1) 因$y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，则 $\ln y=\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(1-x)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x)$，两边对$x$求导，得$\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-1}{2(1-x)}-\dfrac{1}{2(1+x)}$，

则$y'=\dfrac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}(0<|x|<1)$

(2) 因$y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt{\dfrac{x+1}{1+x+x^2}}$，则 $\ln y=2\ln x-\ln(1-x)+\dfrac{1}{2}\ln(x+1)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x+x^2)$，两边对$x$求导，得$\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{2}{x}++\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1+2x}{2(1+x+x^2)}$，

则$y'=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt{\dfrac{x+1}{1+x+x^2}}\left(\dfrac{2}{x}+11-x+12(x+1)-\dfrac{2x+1}{2(1+x+x^2)}\right)$

(3) 因$y=(x-\alpha_1)^{\alpha_1}(x-\alpha_2)^{\alpha_2}\cdots(x-\alpha_n)^{\alpha_n}=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{\alpha_i}$及$y$在对数符号内，故应设$\prod\lim\limits_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{\alpha_i}>0$，则 $\ln y=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\ln|x-\alpha_i|$，两边对$x$求导数，得$\dfrac{1}{y}y'=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{x-\alpha_i}$，

则$y'=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{x-\alpha_i}\prod\limits_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{\alpha_i}(x\in D)$其中$D=\left\{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{\alpha_i}>0\right\}$

(4) 因$y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$，则 $\ln y=n\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，两边对$x$求导，得$\dfrac{1}{y}y'=n\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{n}{\sqrt{1+x^2}}$，则$y'=\dfrac{n}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})^n$

(5) 因$y=x^m m^x$，则$\ln y=m\ln|x|+x\ln m$，两边对x求导，得$\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{m}{x}+\ln m$，则$y'=x^{m-1}m^{x+1}+x^m m^x\ln m$

6. 设$f(x)$是对x可求导的函数，求$\dfrac{dy}{dx}$.

(1) $y=f(x^2)$

(2) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$

(3) $y=f(f(f(x)))$

解:

(1) $\dfrac{dy}{dx}=2xf'(x^2)$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=e^xf'(e^x)\cdot e^{f(x)}+f'(x)f(e^x)e^{f(x)}=e^{f(x)}(e^xf'(e^x)+f(e^x)f'(x))$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$

7. 设$\varphi(x),\psi(x)$为对x可求导的函数，求$\dfrac{dy}{dx}$.

(1) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$

(2) $y=\arctan\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}(\psi(x)\neq 0)$

(3) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}(\varphi(x)\neq 0,\psi(x)>0)$

(4) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)(\varphi(x)>0,\psi(x)\neq 0)$

解:

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left(\dfrac{\psi'(x)}{\varphi(x)\psi(x)}-\dfrac{\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)}\right)$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x)-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{(\ln\varphi(x))^2}=\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)\ln\varphi(x)}-\dfrac{\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi(x)(\ln\varphi(x))^2}=$
$\log_{\varphi(x)}\psi(x)\left[\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)\ln\psi(x)}-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\ln\varphi(x)}\right]$

8. 求图4-7所示曲柄连杆机构滑块运动的速度.
解：因$s=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}-r\cos\omega t$，故$v=s'=r\omega\sin\omega t-\dfrac{r^2\omega\sin 2\omega t}{2\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}}$.

9. 求曲线$y=\sqrt{1-x^2}$在$x=\dfrac{1}{2}$处的切线方程和法线方程.
解：因$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，则在$x=\dfrac{1}{2}$处的切线斜率为$k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，
于是所求切线方程为：$y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$即$x+\sqrt{3}y-2=0$；
所求法线方程为：$y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$即$\sqrt{3}x-y=0$.

10. 求曲线$y=e^{-x}$上的一点，使过该点的切线与直线$y=-ex$平行，并写出该点的法线方程.
解：因$k=y'=-e^{-x}=-e$，则$x=-1$，则过$(-1,e)$点的切线与直线$y=-ex$平行，过该点的法线方程为$y-e=\dfrac{1}{e}(x+1)$即$x-ey+e^2+1=0$.

11. 求曲线$y=\sqrt{1-x^2}$上的水平切线.
解：因$k=y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0$，则$x=0$，于是此曲线在$(0,1)$处的切线为水平切线，切线方程为$y=1$.

12. 求曲线$y=\dfrac{1}{2}(1+2x^2\pm\sqrt{1+4x^2})$上横坐标$x=U$的点处的切线方程.这切线还与曲线交于何处？
解：因$y'=2x\pm\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$，则曲线在$x=U$处的切线斜率为$k=2U\pm\dfrac{2U}{\sqrt{1+4U^2}}$，于是此曲线在切点$(U,\dfrac{1}{2}(1+2U^2\pm\sqrt{1+4U^2}))$处的切线方程为$y-\dfrac{1}{2}(1+2U^2\pm\sqrt{1+4U^2})=(2U\pm\dfrac{2U}{\sqrt{1+4U^2}})(x-U)$，
即$2U(\sqrt{1+4U^2}\pm1)x-\sqrt{1+4U^2}y\pm\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(1-2U^2)\sqrt{1+4U^2}=0$，此切线还与曲线交于
$\left(\dfrac{U(\sqrt{1+4U^2}\pm1)}{\sqrt{1+4U^2}},\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{2U^2(\sqrt{1+4U^2}\pm1)^2}{1+4U^2}\pm\sqrt{1+\dfrac{4U^2(\sqrt{1+4U^2}\pm1)^2}{1+4U^2}}\right)\right)$.

13. 设$y=f(x)$在x_0可导，记$\varphi(t)=f(x_0+at)$，a为常数，求$\varphi'(0)$.
解：若$a=0$，则$\varphi(t)=f(x_0)$，则$\varphi'(0)=0$
若$a\neq0$，则$\varphi'(x)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+at)-f(x_0)}{t}=a\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+at)-f(x_0)}{at}=af'(x_0)$.

§5. 微分及其运算

1. 求下列函数在指定点的微分：

(1) $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$，求$dy(0), dy(1)$

(2) $y = \sec x + \tan x$，求$dy(0), dy\left(\frac{\pi}{4}\right), dy(\pi)$

(3) $y = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$，求$dy(0), dy(a)$

(4) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$，求$dy(0.1), dy(0.01)$

解：

(1) 因$dy = [na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1]dx$，则$dy(0) = a_1 dx, dy(1) = \sum_{i=1}^{n} i a_i dx$

(2) 因$dy = (\tan x\sec x + \sec^2 x)dx$，则$dy(0) = dx, dy\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}+2)dx, dy(\pi) = dx$

(3) 因$dy = \frac{dx}{a^2+x^2}dx$，则$dy(0) = \frac{dx}{a^2}dx, dy(a) = \frac{dx}{2a^2}dx$

(4) 因$y = -\frac{x+2}{x^3}dx$，则$dy(0.1) = -2100dx, dy(0.01) = -2010000dx$

2. 求下列函数$y = y(x)$的微分：

(1) $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

(2) $y = x^2\sin x$

(3) $y = \frac{x}{1-x^2}$

(4) $y = x\ln x - x$

(5) $y = (1-x^2)^n$

(6) $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

(7) $y = \ln\tan x$

(8) $y = \sin ax\cos bx$

(9) $y = e^{ax}\cos bx$

(10) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$

解：

(1) $dy = (1 - x + x^2 - x^3)dx$

(2) $dy = (2x\sin x + x^2\cos x)dx$

(3) $dy = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}dx$

(4) $dy = \ln x dx$

(5) $dy = -2nx(1-x^2)^{n-1}dx$

(6) $dy = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$

(7) $dy = \frac{2}{\sin 2x}dx$

(8) $dy = (a\cos ax\cos bx - b\sin ax\sin bx)dx$

(9) $dy = e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)dx$

(10) $dy = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx$

3. 求下列函数y的微分：

(1) $y = \sin^2 t, t = \ln(3x+1)$

(2) $y = \ln(3t+1), t = \sin^2 x$

(3) $y = e^{3u}, u = \dfrac{1}{2}\ln t, t = x^2 - 2x + 5$

(4) $y = \arctan u, u = (\ln t)^2, t = 1 + x^2 - \cot x$

解:

(1) $dy = \dfrac{3\sin(2\ln(3x+1))}{3x+1}dx$

(2) $y = \dfrac{3\sin 2x}{3\sin^2 x + 1}dx$

(3) $y = \dfrac{3(3x^2-2)}{2(x^3-2x+5)}e^{\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)}dx$

(4) $y = \dfrac{2\ln(1+x^2-\cot x)(2x+\csc^2 x)}{[1+(\ln(1+x^2-\cot x))^4](1+x^2-\cot x)}dx$

4. 若u, v, w为x的可微分函数，求函数y的微分dy：

(1) $y = u \cdot v \cdot w$

(2) $y = \dfrac{u \cdot w}{v^2}$

(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$

(4) $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$

(5) $y = \arctan\dfrac{u}{v}$

解:

(1) $dy = (u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w')dx$

(2) $dy = \dfrac{v^2(u'w + uw') - 2uvv'w}{v^4}dx$

(3) $dy = -\dfrac{uu' + vv'}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}dx(u^2+v^2>0)$

(4) $dy = \dfrac{uu' + vv'}{u^2+v^2}dx$

(5) $dy = \dfrac{u'v - uv'}{u^2+v^2}dx(v \neq 0)$

§6. 隐函数及参数方程所表示函数的求导法

1. 求下列隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中$a,b$为常数

(2) $y^2=2px$，其中p为常数

(3) $x^2+xy+y^2=a^2$，其中a为常数

(4) $x^3+y^3-xy=0$

(5) $y=x+\dfrac{1}{2}\sin y$

(6) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，其中$a$为常数

(7) $y-\cos(x+y)=0$

(8) $y=x+\arctan y$

(9) $y=1-\ln(x+y)+e^y$

(10) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

解:

(1) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2yy'}{b^2}=0$，则$y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}(y\neq 0)$.

(2) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$2yy'=2p$，则$y'=\dfrac{p}{y}(y\neq 0)$.

(3) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$2x+xy'+y+2yy'=0$，则$y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$.

(4) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$3x^2+3y^2y'-xy'-y=0$，则$y'=\dfrac{3x^2-y}{x-3y^2}$.

(5) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$y'=1+\dfrac{y'}{2}\cos y$，则$y'=\dfrac{2}{2-\cos y}$.

(6) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$，则$y'=-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$.

(7) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$y'+(1+y')\sin(x+y)=0$，则$y'=-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

(8) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$y'=1+\dfrac{y'}{1+y^2}$，则$y'=\dfrac{1+y^2}{y^2}$.

(9) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$y'=-\dfrac{1+y'}{x+y}+y'e^y$，则$y'=\dfrac{1}{(x+y)e^y-x-y-1}$.

(10) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$\dfrac{xy'-y}{x^2+y^2}=\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}$，则$y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

2. 求下列隐函数在指定点的导数$\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=\cos x+\dfrac{1}{2}\sin y$，点$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$

(2) $ye^x+\ln y=1$，点$(0,1)$

解:

(1) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$y'=-\sin x+\dfrac{y'}{2}\cos y$，则$y'=\dfrac{2\sin x}{\cos y-2}$，于是在点$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$处，$y'=-2$.

(2) 在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$e^x(y+y')+\dfrac{y'}{y}=0$，则$y'=-\dfrac{y^2e^x}{ye^x+1}$，于是在点$(0,1)$处，$y'=-\dfrac{1}{2}$.

3. 求曲线$x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=16$在点$(4,4)$的切线方程和法线方程.

解：在方程两端对x求导数，并注意到y是x的函数，就有$\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}y'=0$，则$y'=-\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，于是$y'|_{\substack{x=4\\y=4}}=-1$，从而切线方程为$y-4=-(x-4)$，即$x+y-8=0$
法线方程为$y-4=x-4$，即$x=y$.

4. 求下列参数方程在所示点的导数：

(1) $\begin{cases} x= & a\cos t \\ y= & b\sin t \end{cases}$ 在$t=\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{\pi}{4}$处

(2) $\begin{cases} x= & t-\sin t \\ y= & 1-\cos t \end{cases}$，在$t=\dfrac{\pi}{2},\pi$处

(3) $\begin{cases} x= & 1-t^2 \\ y= & t-t^3 \end{cases}$，在$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{3}$处

(4) $\begin{cases} x= & a(t-\sin t) \\ y= & a(1-\cos t) \end{cases}$ (a是常数)，在$t=0,\dfrac{\pi}{2}$处

解：

(1) 因$x'(t)=-a\sin t, y'(t)=b\cos t$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=-\dfrac{b}{a}\cot t$，于是，当$t=\dfrac{\pi}{3}$时，$y'=-\dfrac{\sqrt{3}b}{3a}$；当$t=\dfrac{\pi}{4}$时，$y'=-\dfrac{b}{a}$

(2) 因$x'(t)=1-\cos t, y'(t)=\sin t$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，于是，当$t=\dfrac{\pi}{2}$时，$y'=1$；当$t=\pi$时，$y'=0$

(3) 因$x'(t)=-2t, y'(t)=1-3t^2$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{3t^2-1}{2t}$，于是，当$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$y'=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；当$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，$y'=0$

(4) 因$x'(t)=a(1-\cos t), y'(t)=a\sin t$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\cot\dfrac{t}{2}$，于是，当$t=0$时，$y'$无意义；当$t=\dfrac{\pi}{2}$时，$y=1$

5. 求下列参数方程的导数：

(1) $\begin{cases} x= & a\cosh t \\ y= & b\sinh t \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x= & \sin^2 t \\ y= & \cos^2 t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x= & a\cos^3 t \\ y= & a\sin^3 t \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x= & e^{2t}\cos^2 t \\ y= & e^{2t}\sin^2 t \end{cases}$

解：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{a\sinh t}{b\cosh t}=\dfrac{a}{b}\coth t$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{-2\cos t\sin t}{2\sin t\cos t}=-1$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-!tant$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{e^{2t}(2\sin^2 t+2\sin t\cos t)}{e^{2t}(2\cos^2 t-2\cos t\sin t)}=\tan t\cdot\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$

6. 一圆锥形容器，深10尺，上顶圆半径为4尺（图4-11）：

(1) 灌入水时，求水的体积V对水面高度h的变化率；

(2) 求体积V对容器截面圆半径R的变化率.

解：因体积V与容器截面圆半径R，水面高度h的关系为$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$，且由已知，得$\frac{R}{4}=\frac{h}{10}$即$h=\frac{5}{2}R$，于是

(1) $V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}h\right)^2 h=\frac{4}{75}\pi h^3$，从而$\frac{dV}{dh}=\frac{4}{25}\pi h^2$；

(2) $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{5}{2}R=\frac{5}{6}\pi R^3$，从而$\frac{dV}{dR}=\frac{5}{2}\pi R^2$.

7. 一圆锥形容器底面朝上放着，它的顶角为$2\arctan\frac{3}{4}$，今向里面倒进某种液体，

   (1) 当液体半径r为3，半径增加的速度$\frac{dr}{dt}$为$\frac{1}{4}$时，体积增加的速度$\frac{dV}{dt}$是多少？

   (2) 当液体半径为6，体积增加的速度为24时，半径增加的速度是多少？

解：因体积V与液体半径r的关系为$V=\frac{4}{9}\pi r^3$，V,r都是时间t的函数，两边对t求导，得$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{9}\pi(3r^2)\frac{dr}{dt}$即$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi r^2\frac{dr}{dt}$，则

(1) 当$r=3,\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4}$时，$\frac{dV}{dt}=3\pi$；

(2) 由$\frac{dr}{dt}=\frac{3}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$，得当$r=6,\frac{dV}{dt}=24$时，$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{2\pi}$.

8. 水从高为18厘米、底半径为6厘米的圆锥形漏斗流入半径为5厘米的圆柱形筒内.已知漏斗中水深为12厘米时，漏斗中水面的下降速度为1厘米/分，求此时圆筒中水面的上升速度.

解：设从开始漏水起经t分钟后，圆锥形漏斗中溶液的深度为x厘米，圆柱形筒中的水面升高了y厘米。此时，漏斗中漏出的溶液的体积为$\frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 18-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{18}\cdot 6\right)^2\cdot x=216\pi-\frac{\pi}{27}x^3$（立方厘米），圆柱形筒中注入的溶液的体积为$\pi\cdot 5^2\cdot y=25\pi y$（立方厘米）。据题意知，$25\pi y=216\pi-\frac{\pi}{27}x^3$，故$y=\frac{1}{25}\left(216-\frac{x^3}{27}\right)$，于是$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{675}\cdot 3x^2\cdot\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{225}x^2\cdot\frac{dx}{dt}$。当$x=12$(厘米)时，$\frac{dx}{dt}=-1$(厘米/分)，于是此时圆筒中水面的上升速度为$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{225}\cdot 12^2(-1)=\frac{16}{25}=0.64$(厘米/分).

9. 图4-12所示电路中，输出功率$P=i^2R$，其中电流$i=\frac{U}{r+R}$.求当调整可变电阻R时，功率P的变化率$\frac{dP}{dR}$.

解：因$P=i^2R,i=\frac{U}{r+R}$，则$\frac{dP}{dR}=2iR\frac{di}{dR}+i^2=\frac{-2U^2R}{(r+R)^3}+\frac{U^2}{(r+R)^2}=\frac{U^2(r-R)}{(r+R)^3}$

§7. 不可导的函数举例

1. 求下列函数在所示点x_0的左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$：

(1) $y=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0,\\ xe^x, & x>0,\end{cases}\quad x_0=0$

(2) $y=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad x_0=0$

(3) $y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad x_0=0$

解：

(1) $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{xe^x-0}{x}=1$；$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x^2-0}{x}=0.$

(2) $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$；

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1.$

(3) $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0$；$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0.$

2. 求下列函数在导数不存在的点的左、右导数：

(1) $y=|\ln|x||$

(2) $y=|\tan x|$

(3) $y=\sqrt{1-\cos x}$

解：

(1) $y=|\ln|x||=\begin{cases} \ln(-x), & x\leqslant -1\\ -\ln(-x), & -1<x<0\\ -\ln x, & 0<x<1\\ \ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$

由此可知，函数在$x=0,x=\pm1$处导数不存在。

$f'_+(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{-\ln[-(-1+\Delta x)]-\ln(-(-1))}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\ln(1-\Delta x)^{-\frac{1}{\Delta x}}=1$；

$f'_-(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{-\ln[-(-1+\Delta x)]-\ln(-(-1))}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\ln(1-\Delta x)^{-\frac{1}{\Delta x}}=-1$；

因函数在$x=0$点无意义，故$f'_+(0)$和$f'_-(0)$无意义；

$f'_+(1)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\ln(1+\Delta x)-\ln 1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=1$；

$f'_-(1)=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{-\ln(1+\Delta x)-\ln(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to-0}-\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=-1.$

(2) $y=|\tan x|=\begin{cases} -\tan x, & x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi\right]\\ \tan x, & x\in\left(k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\quad k\in Z$

其中$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$时函数无定义，且为无穷间断点，故左、右导数无意义；

$x=k\pi(k\in Z)$为导数不存在的点.

$f'_+(k\pi)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\tan(k\pi+\Delta x)-(-\tan k\pi)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\tan\Delta x}{\Delta x}=1$；$f'_-(k\pi)=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{-\tan(k\pi+\Delta x)-(-\tan k\pi)}{\Delta x}=$ $\lim\limits_{\Delta x\to-0}-\dfrac{\tan\Delta x}{\Delta x}=-1.$

(3) 因$y'=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$当$x\neq 2k\pi(k\in Z)$时才有定义，故$x=2k\pi(k\in Z)$为$y=\sqrt{1-\cos x}$的不可导点.

$f'_+(2k\pi)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\sqrt{1+\cos(2k\pi+\Delta x)}-\sqrt{1+2k\pi}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\sqrt{1-\cos\Delta x}}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to+0}\sqrt{\dfrac{1-\cos\Delta x}{\Delta x^2}}=$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$f'_-(2k\pi) = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \dfrac{\sqrt{1+\cos(2k\pi+\Delta x)}-\sqrt{1+2k\pi}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \dfrac{\sqrt{1-\cos\Delta x}}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x\to -0} -\sqrt{\dfrac{1-\cos\Delta x}{\Delta x^2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 若

(1) $f(x)$在x_0点可导，$g(x)$在x_0点不可导，证明函数$F(x)=f(x)+g(x)$在x_0点不可导；

(2) $f(x)$和$g(x)$在x_0点都不可导，能否断定他们的和函数$F(x)=f(x)+g(x)$在x_0点不可导？

证明:

(1) 假设$F(x)=f(x)+g(x)$在x_0点可导，又$f(x)$在x_0点可导，则$g(x)=F(x)-f(x)$在x_0点可导，这与已知矛盾，故假设不成立。从而函数$F(x)=f(x)+g(x)$在x_0点不可导.

(2) 不能。例：

(i) 可导：$f(x)=\dfrac{|x|+x}{2}, g(x)=\dfrac{x-|x|}{2}$在$x=0$点都不可导，但它们的和函数$F(x)=f(x)+g(x)=x$在$x=0$点可导且$F'(0)=1$；

(ii) 不可导：$f(x)=\dfrac{|x|}{2}, g(x)=\dfrac{|x|}{2}$在$x=0$点都不可导，它们的和函数$F(x)=f(x)+g(x)=|x|$在$x=0$点也不可导.

4. 在上题条件下，它们的积$G(x)=f(x)\cdot g(x)$的可导情况怎样？

解:

(1) 它们的积$G(x)=f(x)\cdot g(x)$在x_0点可能可导。

例：

(i) 可导：$f(x)=x$在$x=0$点可导且$f'(0)=1$；$g(x)=|x|$在$x=0$点不可导，它们的积$G(x)=f(x)\cdot g(x)=x|x|$在$x=0$可导且$G'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta G(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0$

(ii) 不可导：$f(x)=1$在$x=0$点可导且$f'(0)=0$；$g(x)=|x|$在$x=0$点不可导，它们的积$G(x)=f(x)\cdot g(x)=|x|$在$x=0$点不可导.

(2) 它们的积$G(x)=f(x)\cdot g(x)$在x_0点可能可导。

例：

(i) 可导：$f(x)=|x|, g(x)=|x|$在$x=0$点都不可导，它们的积$G(x)=f(x)\cdot g(x)=x^2$在$x=0$可导且$G'(0)=0$

(ii) 不可导：$f(x)=x^{\frac{2}{3}}, g(x)=|x^{\frac{1}{3}}|$在$x=0$点都不可导，它们的积$G(x)=f(x)\cdot g(x)=|x|$在$x=0$点不可导.

5. 若函数$f(x)$在有限区间(a,b)中有导数，且$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，是否必有$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$？以例子$f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$说明之.

反之，若$f(x)$在有限区间(a,b)中有导数，且$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$，是否必有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$？以例子$f(x)=\sqrt[3]{x}$说明之.

解:

(1) 一般地说，不能保证有$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$.

例：对于$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内定义的函数$f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$，显然有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$.

又$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}\left(\sin\dfrac{1}{x}-1\right)$，

对于特殊的一串数$x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}(n=1,2,\cdots)$，有$f'(x_n)=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=0$；

对于$x'_n=\dfrac{1}{n\pi}(n=1,2,\cdots)$，有$f'(x'_n)=-n^2\pi^2$，故$\lim\limits_{n\to\infty}f'(x'_n)=-\infty$，故$f'(x)$在$x=0$点极限不存在，也非无穷，即$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\infty$不成立.

(2) 不能保证必有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

例：$f(x)=\sqrt[3]{x}$，它在$(0,b)(b>0)$上有导数，且$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\infty$，但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

6. 若

(1) $f(x)$在$x=g(x_0)$有导数，而$g(x)$在x_0点没有导数；

(2) $f(x)$在$x=g(x_0)$没有导数，而$g(x)$在x_0点有导数；

(3) $f(x)$在$x=g(x_0)$没有导数，而$g(x)$在x_0点也没有导数；

则复合函数$F(x)=f(g(x))$在x_0点是否可导？

解:

(1) 复合函数$F(x)=f(g(x))$在x_0点可能可导.
例：

(i) 可导：$f(u)=u^2, g(x)=|x|, x_0=0$，$f(u)=u^2$在$u_0=0=g(x_0)$可导且$f'(0)=0$，$g(x)=|x|$在$x_0=0$不可导；$F(x)=f(g(x))=|x|^2=x^2$在$x_0=0$可导且$F'(0)=0$；

(ii) 可导：$f(u)=u, g(x)=|x|, x_0=0$，$f(u)=u$在$u_0=0=g(x_0)$可导且$f'(0)=1$，$g(x)=|x|$在$x_0=0$不可导；$F(x)=f(g(x))=|x|$在$x_0=0$不可导.

(2) 复合函数$F(x)=f(g(x))$在x_0点可能可导.
例：

(i) 可导：$f(u)=|u|, g(x)=x^2, x_0=0$，$f(u)=|u|$在$u_0=0=g(x_0)$不可导，$g(x)=x^2$在$x_0=0$可导且$g'(0)=0$；$F(x)=f(g(x))=|x^2|=x^2$在$x_0=0$可导且$F'(0)=0$；

(ii) 可导：$f(u)=|u|, g(x)=x, x_0=0$，$f(u)=|u|$在$u_0=0=g(x_0)$不可导，$g(x)=x$在$x_0=0$可导且$g'(0)=1$；$F(x)=f(g(x))=|x|$在$x_0=0$不可导.

(3) 复合函数$F(x)=f(g(x))$在x_0点可能可导.
例：

(i) 可导：$f(u)=2u+|u|, g(x)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{|x|}{3}, x_0=0$，$f(u)=2u+|u|$在$u_0=0=g(x_0)$不可导，$g(x)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{|x|}{3}$在$x_0=0$不可导；$F(x)=f(g(x))=2\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{|x|}{3}\right)+\left|\dfrac{2}{3}x-\dfrac{|x|}{3}\right|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ x, & x<0 \end{cases}=x$即$F(x)=x(\forall x\in(-\infty,+\infty))$，故$F(x)$在$x_0=0$可导且$F'(0)=1$；

(ii) 可导：$f(u)=|u|, g(x)=|x|, x_0=0$，$f(u)=|u|$在$u_0=0=g(x_0)$不可导，$g(x)=|x|$在$x_0=0$不可导；$F(x)=f(g(x))=|x|$在$x_0=0$不可导.

§8. 高阶导数与高阶微分

1. $y=2x^3+x^2+x+1$，求$y',y'',y^{(3)}$和$y^{(4)}$.
   解: $y'=6x^2+2x+1,y''=12x+2,y^{(3)}=12,y^{(4)}=0$
2. $y=e^{\alpha t}$(α为常数)，求$y'',y^{(3)},y^{(n)}$.
   解: $y'=\alpha e^{\alpha t},y''=\alpha^2e^{\alpha t},y^{(3)}=\alpha^3e^{\alpha t},y^{(n)}=\alpha^ne^{\alpha t}$
3. 求下列函数的高阶导数：
   (1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，求$y''$
   (2) $y=x\ln x$，求y''
   (3) $y=e^{-x^2}$，求y''
   (4) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，求$y''$
   (5) $y=x^2\cdot e^{2x}$，求y'''
   (6) $y=a^{3x}$，求y'''
   (7) $y=x^3\sinh x$，求$y^{(30)}$
   (8) $y=x^3\cos x$，求$y^{(50)}$

   解:

   (1) $y'=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},y''=3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$

   (2) $y'=1+\ln x,y''=\dfrac{1}{x}$

   (3) $y'=-2xe^{-x^2},y''=-2e^{-x^2}(1-2x^2)=2e^{-x^2}(2x^2-1)$

   (4) $y'=\dfrac{1+\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

   $$y''=\frac{2x}{(1-x^2)^2}+\frac{\left(\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot x\arcsin x}{(1-x^2)^3}=\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(2x^2+1)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

   (5) $y'''=(x^2e^{2x})'''=x^2(e^{2x})'''+3(x^2)'(e^{2x})''+3(x^2)''(e^{2x})'+(x^2)'''e^{2x}=4e^{2x}(2x^2+6x+3)$

   (6) $y'=3a^{3x}\ln a,y''=9\ln^2a\cdot a^{3x},y'''=27\ln^3a\cdot a^{3x}$

   (7) 因$(x^3)'=3x^2,(x^3)''=6x,(x^3)'''=6,(x^3)^{(4)}=\cdots=(x^3)^{(30)}=0;(\sinh x)^{(30)}=\sinh x,(\sinh x)^{(29)}=\cosh x,(\sinh x)^{(28)}=\sinh x,(\sinh x)^{(27)}=\cosh x$，故$y^{(30)}=(x^3\sinh x)^{(30)}=x^3(\sinh x)^{(30)}+30(x^3)'(\sinh x)^{(29)}+435(x^3)''(\sinh x)^{(28)}+4060(x^3)'''(\sin h)^{(27)}=x\sinh x(x^2+2610)+30\cosh x(3x^2+812)$

   (8) 因$(x^3)'=3x^2,(x^3)''=6x,(x^3)'''=6,(x^3)^{(4)}=\cdots=(x^3)^{(50)}=0;(\cos x)^{(50)}=-\cos x,(\cos x)^{(49)}=-\sin x,(\cos x)^{(48)}=\cos x,(\cos x)^{(47)}=\sin x$，故$y^{(50)}=(x^3\cos x)^{(50)}=x^3(\cos x)^{(50)}+50(x^3)'(\cos x)^{(49)}+1225(x^3)''(\cos x)^{(48)}+19600(x^3)'''(\cos x)^{(47)}=x\cos x(7350-x^2)+150\sin x(784-x^2)$
4. 利用数学归纳法证明下面公式：
   (1) $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot(\ln a)^n(a>0)$
   (2) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$
   (3) $(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$

   证明:

   (1) (i) 当$n=1$时，$(a^x)'=a^x\ln a=a^x(\ln a)^1$，则$n=1$时公式成立.
   (ii) 假设当$n=k$时公式成立，即$(a^x)^{(k)}=a^x(\ln a)^k$成立，
   则当$n=k+1$时，$(a^x)^{(k+1)}=\left[(a^x)(\ln a)^{(k)}\right]'=(\ln a)^k(a^x)'=(\ln a)^k\cdot a^x\ln a=a^x(\ln a)^{k+1}$，于是当$n=k+1$时公式也成立.
   综合上述可知，当n为任意自然数时，公式$(a^x)^{(n)}=a^x\cdot(\ln a)^n(a>0)$都成立.

(2) (i) 当$n=1$时，$(\cos x)'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，则$n=1$时公式成立.

(ii) 假设当$n=k$时公式成立，即$(\cos x)^{(k)}=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$成立，

则当$n=k+1$时，$(\cos x)^{(k+1)}=\left[(\cos x)^{(k)}\right]'=\left[\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=-\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，于是当$n=k+1$时公式也成立.

综合上述可知，当n为任意自然数时，公式$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$都成立.

(3) (i) 当$n=1$时，$(\ln x)'=\frac{1}{x}=\frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1}$，则$n=1$时公式成立.

(ii) 假设当$n=k$时公式成立，即$(\ln x)^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{x^n}$成立，

则当$n=k+1$时，$(\ln x)^{(k+1)}=\left[(\ln x)^{(k)}\right]'=\left[\frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{x^k}\right]'=-k\cdot\frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{x^{k+1}}=\frac{(-1)^k\cdot k!}{x^{k+1}}=\frac{(-1)^{k+1-1}\cdot(k+1-1)!}{x^{k+1}}$，于是当$n=k+1$时公式也成立.

综合上述可知，当n为任意自然数时，公式$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$都成立.

5. 求n阶导数：

(1) $y=\frac{1}{x(1-x)}$

(2) $y=\frac{1}{x^2-2x-8}$

(3) $y=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$

(4) $y=\cos^2\omega x$

(5) $y=\frac{e^x}{x}$

(6) $y=2^x\cdot\ln x$

(7) $y=e^{ax}p_n(x)$，其中$p_n(x)$为n次多项式.

解:

(1) 因$y=\frac{1}{x(1-x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$，则$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=(x^{-1})^{(n)}+[(1-x)^{-1}]^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot x^{-n-1}+(-1)^{2n}\cdot n!\cdot(1-x)^{-n-1}=n![(-1)^nx^{-n-1}+(1-x)^{-n-1}]$

(2) 因$y=\frac{1}{x^2-2x-8}=\frac{1}{(x+2)(x-4)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+2}\right)$，则$y^{(n)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\frac{1}{6}[((x-4)^{-1})^{(n)}-((x+2)^{-1})^{(n)}]=\frac{1}{6}[(-1)^n\cdot n!(x-4)^{-n-1}-(-1)^n\cdot n!(n+2)^{-n-1}]=\frac{(-1)^n}{6}n!\left(\frac{1}{(x-4)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$

(3) 当$n>m$时，$x^{(n)}=(x^2)^{(n)}=\cdots=(x^m)^{(n)}=0$，则$y^{(n)}=0$；
当$n=m$时，$x^{(n)}=(x^2)^{(n)}=\cdots=(x^{m-1})^{(n)}=0,(x^m)^{(n)}=(x^m)^{(m)}=m!$，则$y^{(n)}=a_m\cdot m!$；
当$n<m$时，$x^{(n)}=(x^2)^{(n)}=\cdots=(x^{n-1})^{(n)}=0,(x^n)^{(n)}=n!,\cdots,(x^m)^{(n)}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$，

则$y^{(n)}=a_m\cdot\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}+a_{m-1}\cdot\frac{(m-1)!}{(m-n-1)!}x^{m-n-1}+\cdots+a_nn!=\sum\limits_{i=0}^{m-n}a_{m-i}\frac{(m-i)!}{(m-n-i)!}x^{m-n-i}$.

(4) 因$y'=-2\omega\cos\omega x\sin\omega x=-\omega\sin 2\omega x$，则$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=(-\omega\sin 2\omega x)^{(n-1)}=-\omega\sin\left(2\omega x+\frac{n-1}{2}\pi\right)\cdot(2\omega)^{n-1}=-2^{n-1}\omega^n\sin\left(2\omega x+\frac{n-1}{2}\pi\right)=2^{n-1}\omega^n\cos\left(2\omega x+\frac{n}{2}\pi\right)$

(5) $y^{(n)}=\left(\frac{e^x}{x}\right)^{(n)}=\left(e^x\cdot\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ke^x\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}=e^x\left[\frac{1}{x}+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right]$

(6) $y^{(n)}=(2^x\cdot\ln x)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(2^x)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)}=$
$\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k(\ln 2)^{n-k}\cdot 2^x\cdot\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}+2^x(\ln 2)^n\ln x=$
$2^x[(\ln 2)^n\ln x+n(\ln 2)^{n-1}x^{-1}+\cdots+(-1)^{n-2}(n-2)!\cdot n\ln 2\cdot x^{-(n-1)}+(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot x^{-n}]$

(7) $y^{(n)}=(e^{ax}p_n(x))^{(n)}=a^ne^{ax}p_n(x)+C_n^1a^{n-1}e^{ax}p_n'(x)+\cdots+e^{ax}p_n^{(n)}(x)=e^{ax}[a^np_n(x)+C_n^1a^{n-1}p_n'(x)+\cdots+p_n^{(n)}(x)]$

6. 若$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 证明$f^{(n)}(0)=0.$

证明: 当$x\neq 0$时，$f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, f''(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}\right)$，由此推断$f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)(x\neq 0)$，其中$P_n(t)$是关于$t$的多项式。

下面证明：对任意正整数n，均有命题$f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)(x\neq 0)$

当$n=1$时，命题显然成立.

假设当$n=k$时，命题成立，即有$f^{(k)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\dfrac{1}{x}\right)(x\neq 0), P_k(t)$是关于$t$的多项式，

则当$n=k+1$时，$f^{(k+1)}(x)=[f^{(k)}(x)]'=\left[e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]'=$

$e^{-\frac{1}{x^2}}\left[\dfrac{2}{x^3}P_k\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x^2}P_k'\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=e^{-\frac{1}{x^2}}\left[2\left(\dfrac{1}{x}\right)^3P_k\left(\dfrac{1}{x}\right)-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2P_k'\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{k+1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$，

其中$P_{k+1}(t)$是关于t的另一个多项式.

据数学归纳法可知，命题对一切自然数n均成立.

当$n=1$时，$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{-(\frac{1}{\Delta x})^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{(\frac{1}{\Delta x})^2}}=0$

假设当$n=k$时，$f^{(k)}(0)=0$，则$f^{(k+1)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^{(k)}(0+\Delta x)-f^{(k)}(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{-(\frac{1}{\Delta x})^2}P_k\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x}=$
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\Delta x}P_k\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{e^{(\frac{1}{\Delta x})^2}}=0$

据数学归纳法可知，$f^{(n)}(0)=0.$

7. 设$f(x)$的各阶导数存在，求y''及y'''：

(1) $y=f(x^2)$

(2) $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $y=f(e^{-x})$

(4) $y=f(\ln x)$

解:

(1) $y'=2xf'(x^2), y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2),$
$y'''=12xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2)$

(2) $y'=-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right), y''=\dfrac{2}{x^3}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x^4}f''\left(\dfrac{1}{x}\right),$
$y'''=-\dfrac{6}{x^4}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{6}{x^5}f''\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x^6}f'''\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $y'=-e^{-x}f'(e^{-x}), y''=e^{-x}f'(e^{-x})+e^{-2x}f''(e^{-x}), y'''=-e^{-x}f'(e^{-x})-3e^{-2x}f''(e^{-x})-e^{-3x}f'''(e^{-x})$

(4) $y'=\dfrac{1}{x}f'(\ln x), y''=\dfrac{1}{x^2}f''(\ln x)-\dfrac{1}{x^2}f'(\ln x)=\dfrac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)], y'''=\dfrac{1}{x^3}[2f'(\ln x)-3f''(\ln x)+f'''(\ln x)]$

8. 设$y=e^x\sin x, z=e^x\cos x$，证明它们满足方程$y''=2z, z''=-2y.$

证明: 因$y=e^x\sin x, z=e^x\cos x$，则$y'=e^x(\sin x+\cos x), y''=2e^x\cos x; z'=e^x(\cos x-\sin x), z''=-2e^x\sin x$，于是$y''=2z, z''=-2y.$

9. 设$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$，$C_1,C_2,\lambda_1,\lambda_2$是常数，证明它满足方程$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$.
证明：因$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$，$C_1,C_2,\lambda_1,\lambda_2$是常数，则$y'=C_1\lambda_1e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2x},y''=C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2x}$，
于是$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2x}-(\lambda_1+\lambda_2)(C_1\lambda_1e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2x})+\lambda_1\lambda_2(C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x})=0$即$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$.

10. 设$y=C_1\sin x+C_2\cos x$，证明y满足方程$y''+y=0$.
证明：因$y=C_1\sin x+C_2\cos x$，则$y'=C_1\cos x-C_2\sin x,y''=-C_1\sin x-C_2\cos x=-(C_1\sin x+C_2\cos x)=-y$即$y''+y=0$.

11. 若函数φ为$\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)}\left[1+\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)^2}\left(f'(a)-\dfrac{1}{2}f''(a)\right)\right]$，求$\varphi'(a)$及$\varphi''(a)$.
解：因$\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)}\left[1+\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)^2}\left(f'(a)-\dfrac{1}{2}f''(a)\right)\right]$，
则$\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)}{f'(a)}\left[1+\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)^2}\left(f'(a)-\dfrac{1}{2}f''(a)\right)\right]+\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)}\left[\dfrac{f'(x)}{f'(a)^2}\left(f'(a)-\dfrac{1}{2}f''(a)\right)\right]$，
$\varphi''(x)=\dfrac{f''(x)}{f'(a)}\left[1+\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)^2}\left(f'(a)-\dfrac{1}{2}f''(a)\right)\right]+2\dfrac{f'(x)}{f'(a)}\left[\dfrac{f'(x)}{f'(a)^2}\left(f'(a)-\dfrac{1}{2}f''(a)\right)\right]+\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)}\left[\dfrac{f''(x)}{f'(a)^2}\left(f'(a)-\dfrac{1}{2}f''(a)\right)\right]$，
则$\varphi'(a)=1,\varphi''(a)=2$

12. 设$x=\varphi(y)$是$y=f(x)$的反函数，试问如何由f',f'',f'''算出$\varphi'''(y)$？
解：因$\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$，则$\varphi''(y)f'(x)=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$，于是$\varphi''(y)=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$，
则$\varphi'''(y)f'(x)=-\dfrac{f'''(x)[f'(x)]^3-3[f'(x)]^2[f''(x)]^2}{[f'(x)]^6}$，从而$\varphi'''(y)=\dfrac{3[f''(x)]^2-f'''(x)f'(x)}{[f'(x)]^5}$.

13. 试求阻尼振动$s=ae^{-\lambda t}\sin\omega t$在时刻$t$的速度和加速度，并求出速度方向的反转点.
解：速度$v=s'=ae^{-\lambda t}(-\lambda\sin\omega t+\omega\cos\omega t)$，加速度$a=v'=s''=ae^{-\lambda t}[(\lambda^2-\omega^2)\sin\omega t-2\lambda\omega\cos\omega t]$；
速度的反转点即$v=0$，则$-\lambda\sin\omega t+\omega\cos\omega t=0$，于是$\tan\omega t=\dfrac{\omega}{\lambda}(\lambda\neq 0)$.

14. 求下列参数方程的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases} x= & 2t-t^2 \\ y= & 3t-t^3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x= & a\cos t \\ y= & a\sin t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x= & a(t-\sin t) \\ y= & a(1-\cos t) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x= & e^t\cos t \\ y= & e^t\sin t \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x= & a\cos^3 t \\ y= & a\sin^3 t \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x= & f'(t) \\ y= & tf'(t)-f(t) \end{cases}$

解：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3-3t^2}{2-2t}=\dfrac{3}{2}(1+t)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{3}{4(1-t)}$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\cos t}{-a\sin t}=-\cot t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=-\frac{1}{a\sin^3 t}$$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \cot\dfrac{t}{2}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = -\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)} = \dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$

(6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{tf''(t)}{f''(t)} = t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{1}{f''(t)}$

15. 求由隐函数所确定的二阶导数：

(1) $e^{x+y} - xy = 0$

(2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

(3) $y^2 + 2\ln y - x^4 = 0$

解:

(1) 对方程$e^{x+y} - xy = 0$两端关于x求导，得

$$(1+y')e^{x+y} - y - xy' = 0 \tag{4}$$

于是$y' = \dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$，

再对(4)两端关于x求导，得$y''e^{x+y} + (1+y')^2e^{x+y} - 2y' - xy'' = 0$，则$y'' = \dfrac{2y'-(1+y')^2e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$，

将$y' = \dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$代入上式，即得$y'' = \dfrac{2(y-e^{x+y})}{(e^{x+y}-x)^2} - \dfrac{(x-y)^2e^{x+y}}{(e^{x+y}-x)^3}$.

(2) 对方程$x^3 + y^3 - 3axy = 0$两端关于x求导，得

$$x^2 + y^2y' - axy' - ay = 0 \tag{1}$$

于是$y' = \dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$，

再对(1)两端关于x求导，得$2x + 2y(y')^2 + y^2y'' - 2ay' - axy'' = 0$，则$y'' = \dfrac{2ay'-2y(y')^2-2x}{y^2-ax}$，

将$y' = \dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$代入上式，即得$y'' = \dfrac{2a(ay-x^2)}{(y^2-ax)^2} - \dfrac{2y(ay-x^2)^2}{(y^2-ax)^3} - \dfrac{2x}{y^2-ax}$.

(3) 对方程$y^2 + 2\ln y - x^4 = 0$两端关于x求导，得

$$yy' + \frac{1}{y}y' - 2x^3 = 0 \tag{1}$$

于是$y' = \dfrac{2x^3y}{y^2+1}$，

再对(1)两端关于x求导，得$(y')^2 + yy'' + \dfrac{yy''-(y')^2}{y^2} - 6x^2 = 0$，则$y'' = \dfrac{6x^2y^2+(y')^2(1-y^2)}{y(y^2+1)}$，

将$y' = \dfrac{2x^3y}{y^2+1}$代入上式，即得$y'' = \dfrac{2x^2y}{(y^2+1)^3}[3(y^2+1)^2 + 2x^4(1-y^2)]$.

16. 求高阶微分(x是自变量)：

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$，求d^2y

(2) $y=x^x$，求d^2y

(3) $y=x\cos 2x$，求d^3y

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，求d^3y

(5) $y=x^n\cdot e^x$，求d^ny

(6) $y=\dfrac{\ln x}{x}$，求d^ny

解:

(1) $dy=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx, d^2y=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx^2$

(2) $dy=x^x(\ln x+1)dx, d^2y=x^x\left[(\ln x+1)^2+\dfrac{1}{x}\right]dx^2$

(3) $d^3y=(x\cos 2x)^{(3)}dx^3=(x(\cos 2x)^{(3)}+3(\cos 2x)^{(2)})dx^3=(8x\sin 2x-12\cos 2x)dx^3$

(4) $d^3y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(3)}dx^3=-\dfrac{15}{8}x^{-\frac{7}{2}}dx^3$

(5) $d^ny=(x^n\cdot e^x)^{(n)}dx^n=\left(e^x\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\right)dx^n$

(6) $d^ny=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{(n)}dx^n=\left(\dfrac{1}{x}\ln x\right)^{(n)}dx^n=$
$\left[(-1)^n\dfrac{n!\ln x}{x^{n+1}}+\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{n-1}\dfrac{(n-k)!(k-1)!}{x^{n+1}}\right]dx^n=$
$(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}\left[\ln x-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right]dx^n$

17. 对$y=e^x$求d^2y，考虑下面两种情形：

(1) 当x是自变量时；

(2) 当x是中间变量时.

解:

(1) $dy=e^xdx, d^2y=e^xdx^2$

(2) $dy=e^xdx, d^2y=e^x(dx^2+d^2x)$

18. 若u,v为x的函数，且可微分足够多次，求高阶微分：

(1) $y=u(x)\cdot v(x)$，求d^2y

(2) $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$，求d^2y

(3) $y=u^m(x)v^n(x)(m,n$为常数)，求d^2y

(4) $y=a^{u(x)}(a>0)$，求d^2y

(5) $y=\ln u(x)$，求d^3y

(6) $y=\sin(u(x))$，求d^3y

解:

(1) $dy=(u'(x)v(x)+u(x)v'(x))dx,$
$d^2y=[u''(x)v(x)+2u'(x)v'(x)+u(x)v''(x)]dx^2$

(2) $dy=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}dx,$
$d^2y=\left[\dfrac{u''(x)}{v(x)}-\dfrac{u(x)v''(x)+2u'(x)v'(x)}{v^2(x)}+\dfrac{2u(x)(v'(x))^2}{v^3(x)}\right]dx^2$

(3) $dy = [mu^{m-1}(x)v^n(x)u'(x) + nu^m(x)v^{n-1}(x)v'(x)]dx$,
$d^2y = [m(m-1)u^{m-2}(x)v^n(x)(u'(x))^2 + 2mnu^{m-1}(x)v^{n-1}(x)u'(x)v'(x) + mu^{m-1}(x)v^n(x)u''(x) + n(n-1)u^m(x)v^{n-2}(x)(v'(x))^2 + nu^m(x)v^{n-1}(x)v''(x)]dx^2$

(4) $dy = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x)dx$,
$d^2y = a^{u(x)} \ln a[\ln a(u'(x))^2 + u''(x)]dx^2$

(5) $dy = \dfrac{u'(x)}{u(x)}dx, d^2y = \left[\dfrac{u''(x)}{u(x)} - \dfrac{(u'(x))^2}{u^2(x)}\right] dx^2$,
$d^3y = \left[\dfrac{u'''(x)}{u(x)} - \dfrac{3u'(x)u''(x)}{u^2(x)} + \dfrac{2(u'(x))^3}{u^3(x)}\right] dx^3$

(6) $dy = \cos(u(x))u'(x)dx, d^2y = [\cos(u(x))u''(x) - \sin(u(x))(u'(x))^2]dx^2$,
$d^3y = [\cos(u(x))u'''(x) - 3\sin(u(x))u'(x)u''(x) - \cos(u(x))(u'(x))^3]dx^3$.

第五章　微分学的基本定理及其应用

§1.　中值定理

1. 在费尔马定理中，若x_0为区间的端点，试举例说明结论不成立.
解：例：函数$y=x$在区间$[-1,1]$上有定义，且可导，在端点$x_0=1$达到最大值，即$\forall x\in[-1,1]$，恒有$f(x)\leqslant f(x_0)=1$，然而$y'|_{x=1}=1\neq 0$.

2. 对于$x_0\in(a,b)$，若$f'(x_0)>0$，则存在它的左、右邻域$O_-(x_0,\delta),O_+(x_0,\delta)$使当$x\in O_-(x_0,\delta)$的时候$f(x_0)>f(x)$，当$x\in O_+(x_0,\delta)$的时候$f(x_0)<f(x)$.
证明：因$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，故据极限性质，得存在$x_0$的$\delta(\delta>0)$邻域$O(x_0,\delta)\subset(a,b)$，使当$x\in O(x_0,\delta)$时，有$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，从而当$x\in O_-(x_0,\delta)$即$x-x_0<0$时，有$f(x_0)>f(x)$，当$x\in O_+(x_0,\delta)$即$x-x_0>0$时，有$f(x_0)<f(x)$.

3. 证明：若$f'_+(x_0)>0,f'_-(x_0)<0$，则存在x_0的一个邻域，使得在此邻域内$f(x)\geqslant f(x_0)$.
证明：因$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，则由右极限性质，得必存在$x_0$的$\delta_1(\delta_1>0)$右邻域$O_+(x_0,\delta_1)$，使当$x\in O_+(x_0,\delta_1)$即$0<x-x_0<\delta_1$时，有$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，从而有$f(x_0)<f(x)$；
又$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，则由左极限性质，得必存在$x_0$的$\delta_2(\delta_2>0)$左邻域$O_-(x_0,\delta_2)$，使当$x\in O_-(x_0,\delta_2)$即$0<x_0-x<\delta_2$时，有$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，从而有$f(x_0)<f(x)$；
取$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，当$x\in O(x_0,\delta)$时，总有$f(x)\geqslant f(x_0)$.

4. 若$f(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)=f(b)=0,f'(a)\cdot f'(b)>0$，则$f(x)$在$(a,b)$内至少有一个零点.
证明：因$f'(a)\cdot f'(b)>0$，不妨设$f'(a)>0,f'(b)>0(f'(a)<0,f'(b)<0$情况同理可证)
又$f'(a)=f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，则由右极限性质，得必存在$a$的$\delta_1(\delta_1>0)$右邻域$O_+(a,\delta_1)$，使当$x\in O_+(a,\delta_1)$即$0<x-a<\delta_1$时，有$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，从而有$f(a)<f(x)$；
取定$x_1\in O_+(a,\delta_1)$，则有$f(x_1)>f(a)$
又$f(a)=0$，则$f(x_1)>0$
又$f'(b)=f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$，则由左极限性质，得必存在$b$的$\delta_2(\delta_2>0)$左邻域$O_-(b,\delta_2)$，使当$x\in O_-(b,\delta_2)$即$0<b-x<\delta_2$时，有$\dfrac{f(x)-f(b)}{x-x_0}>0$，从而有$f(b)>f(x)$；
取定$x_2\in O_-(b,\delta_1)$，则有$f(x_2)<f(b)$
又$f(b)=0$，则$f(x_2)<0$
因$f(x)$在$[a,b]$连续，故在$[x_1,x_2]$也连续，又$f(x_1)>0,f(x_2)<0$，则由零点存在定理可知，在$[x_1,x_2]$内至少有一个零点，
又$[x_1,x_2]\subset[a,b]$，从而$f(x)$在$[a,b]$内至少有一个零点.
同理，当$f'(a)<0,f'(b)<0$时，$f(x)$在$[a,b]$内至少有一个零点.

5. 由$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x(0<\theta<1)$，求函数$\theta=\theta(x,\Delta x)$，设

(1) $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(3) $f(x)=e^x$

解：

(1) $f'(x)=2ax+b,f'(x+\theta\Delta x)=2a(x+\theta\Delta x)+b$,
则$[2a(x+\theta\Delta x)+b]\Delta x=f(x+\Delta x)-f(x)=a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c)=2ax\cdot\Delta x+a(\Delta x)^2+b\Delta x=\left[2a\left(x+\dfrac{1}{2}\Delta x\right)+b\right]\Delta x$，于是$\theta=\dfrac{1}{2}$

(2) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2},f'(x+\theta\Delta x)=-\dfrac{1}{(x+\theta\Delta x)^2}$,
则$-\dfrac{\Delta x}{(x+\theta\Delta x)^2}=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$，从而$\Delta x^2\theta^2+2x\cdot\Delta x\theta=0$,

于是$\theta = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2 + x\Delta x}}{\Delta x}$，此处取正负号要视确保$\theta \in (0,1)$而定，且应有$\dfrac{\Delta x}{x} > -1 (x \neq 0)$(由$x^2 + x\Delta x > 0$，则$\dfrac{\Delta x}{x} > -1$)

(3) $f'(x) = e^x, f'(x+\theta\Delta x) = e^{x+\theta\Delta x}$，
则$e^{x+\theta\Delta x}\Delta x = f(x+\Delta x) - f(x) = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$，从而$e^{\theta\Delta x}\Delta x = e^{\Delta x} - 1$，于是$\theta = \dfrac{1}{\Delta x}\ln\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$，可以验证$\theta \in (0,1)$

6. 设$f(x)$在区间$[a,b]$内连续，在(a,b)可导，利用函数

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

证明拉格朗日公式，并叙述函数$\Phi(x)$的几何意义.

证明: 因$\Phi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = (a-b)f(x) + (f(b) - f(a))x + bf(a) - af(b)$，
又$f(x)$在区间$[a,b]$内连续，则由连续函数的四则运算法则，知$\Phi(x)$在$[a,b]$连续；
又$f(x)$在(a,b)可导，则由可导函数的四则运算法则，知$\Phi(x)$在(a,b)可导.
又$\Phi(a) = \begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0, \Phi(b) = \begin{vmatrix} b & f(b) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0$，则由洛尔定理，得在$(a,b)$内至少有一点$\xi$，使$\Phi'(\xi) = 0$.
而$\Phi'(x) = (a-b)f'(x) + f(b) - f(a)$，则$0 = \Phi'(\xi) = (a-b)f'(\xi) + f(b) - f(a)$即$f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.
$\Phi(x)$的几何意义：三角形面积公式$S_\Delta = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$，其中$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$表示顶点坐标，
则$\Phi(x)$表示以$A(x,f(x)), B(a,f(a)), C(b,f(b))$为顶点的三角形面积的两倍.

7. 试对下列函数写出拉格朗日公式$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$，并求c.

(1) $f(x) = x^3, x \in [0,1]$

(2) $f(x) = \arctan x, x \in [0,1]$

解:

(1) 因$f'(x) = 3x^2$，则$3c^2(1-0) = 1^3 - 0^3$即$3c^2 = 1$，又$c \in (0,1)$，故$c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 因$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$，则$\dfrac{1}{1+c^2}(1-0) = \arctan 1 - \arctan 0$即$\dfrac{1}{1+c^2} = \dfrac{\pi}{4}$，又$c \in (0,1)$，故$c = \sqrt{\dfrac{4}{\pi} - 1}$.

8. 试对下列函数写出柯西公式$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$，并求$c$.

(1) $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

(2) $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}, x \in [1,4]$

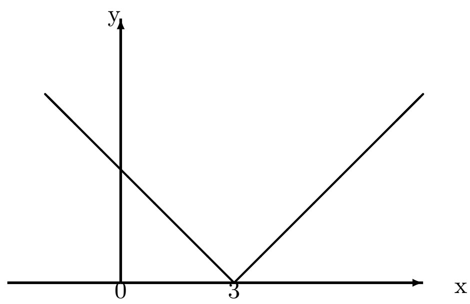
解:

(1) 因$f'(x) = \cos x, g'(x) = -\sin x$，则$\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$即$\dfrac{1-0}{0-1} = \dfrac{\cos c}{\sin c}$，亦即$\cot c = 1$，又$c \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，故$c = \dfrac{\pi}{4}$.

(2) 因$f'(x) = 2x, g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，则$\dfrac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$即$\dfrac{16-1}{2-1} = \dfrac{2c}{\dfrac{1}{2\sqrt{c}}}$，亦即$4c^{\frac{3}{2}} = 15$，又$c \in (1,4)$，

故$c = \left(\dfrac{15}{4}\right)^{\dfrac{2}{3}}$.

9. 试作函数$y=|x-1|$在区间$[0,3]$上的图形，这里为什么没有平行于弦的切线，拉格朗日定理中哪个条件不成立？
解：函数在点$x=1$处不可导，即其图形ACB为一折线，此折线在$C(0,1)$点的切线不存在，拉格朗日定理中的第二个条件即在$(0,3)$内可导这一条件不满足.



10. 利用拉格朗日公式证明不等式：

(1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$

(2) 当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$|x|\leqslant|\tan x|$(等号只有在$x=0$时成立)

(3) $n\cdot y^{n-1}(y-x)<x^n-y^n<n\cdot x^{n-1}(x-y)(n>1,x>y)$

(4) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>0)$

(5) 若$x\neq0,e^x>1+x$(分$x>0,x<0$两种情况证明)

证明：

(1) 不妨设$x>y,f(t)=\sin t$在$[y,x]$上连续，在(y,x)内可导，故拉格朗日定理成立，因而有$\sin x-\sin y=\cos\xi(x-y)(\xi\in(y,x))$，则$|\sin x-\sin y|=|\cos\xi(x-y)|=|\cos\xi||(x-y)|\leqslant|x-y|(\forall(x,y\in(-\infty,+\infty))$成立.

(2) 不妨设$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),f(t)=\tan t$在$[0,x]$上连续，在$(0,x)$内可导，故拉格朗日定理成立，因而有$\tan x-\tan 0=\sec^2\xi(x-0)\left(\xi\in(0,x),x\in\left(0,\dfrac{pi}{2}\right)\right)$，则$x=\cos^2\xi\cdot\tan x<\tan x$
同理可证，当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$时，$-x<-\tan x$.
当$x=0$时，$|\tan x|=|x|$.
总之，当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$|x|\leqslant|\tan x|$成立.
当$x=0$时，等号成立；当$0<|\xi|<|x|<\dfrac{\pi}{2}$时，$0<\cos^2\xi<1$，故只能成立$|x|<|\tan x|$.

(3) $f(t)=t^n$在$[y,x]$上连续，在(y,x)内可导，故拉格朗日定理成立，因而有$x^n-y^n=n\cdot\xi^{n-1}(x-y)(0<y<\xi<x)$，
又$n>1$，则$y^{n-1}<\xi^{n-1}<x^{n-1}$，故$n\cdot y^{n-1}(x-y)<n\cdot\xi^{n-1}(x-y)<n\cdot x^{n-1}(x-y)$即$n\cdot y^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<n\cdot x^{n-1}(x-y)$成立.

(4) $f(t)=\ln(1+t)$在$[0,x]$上连续，在$(0,x)$内可导，故拉格朗日定理成立，因而有$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln 1=\dfrac{1}{1+\xi}(1+x-1)=\dfrac{x}{1+\xi}(0<\xi<x)$，又$1<1+\xi<1+x$，则$\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$，从而有$\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x(x>0)$即$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>0)$成立.

(5) $f(t)=e^t$显然满足拉格朗日定理条件.
当$x>0$时，对$f(t)=e^t$在$[0,x]$应用拉格朗日公式，有$e^x-e^0=e^\xi(x-0)$即$e^x-1=xe^\xi(0<\xi<x)$，
因$0<\xi<x$，则$e^\xi>1$，从而$e^x-1=xe^\xi>x$即$e^x>1+x$；
当$x<0$时，对$f(t)=e^t$在$[x,0]$应用拉格朗日公式，有$e^0-e^x=e^\xi(0-x)$即$1-e^x=-xe^\xi(x<\xi<0)$，
因$x<\xi<0$，则$0<e^\xi<1$，从而$1-e^x=-xe^\xi<-x$即$e^x>1+x$.
总之，若$x\neq0$，总有$e^x>1+x$.

11. 若$f'(x)\equiv k$，试证$f(x)=kx+b$.
证明：考虑$F(x)=f(x)-kx$
由于$F'(x)=f'(x)-k\equiv0$，据拉格朗日定理的推论1知，$F(x)=f(x)-kx=b(\forall x\in(-\infty,+\infty)$，故$f(x)=kx+b$.

12. 证明方程$x^3-3x+c=0$在$[0,1]$内不含有两个不同的根.
证明：令$f(x)=x^3-3x+c$
用反证法.设$f(x)$在$[0,1]$内有两个不同根$0<x_1<x_2<1$.
此时$f(x_1)=f(x_2)=0$，据洛尔定理，必存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使$f'(\xi)=0$即$3\xi^2-3=0$，解得$\xi=\pm1$，这与$\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$矛盾.
故假设不成立.即方程$x^3-3x+c=0$在$[0,1]$内不含有两个不同的根.

13. 若在$[a,b]$上$|f'(x)|\geqslant|\varphi'(x)|,f'(x)\neq0$，则$|\Delta f(x)|\geqslant|\Delta\varphi(x)|$.并证在$\left[\frac{1}{2},x\right]$上$\Delta\arctan x\leqslant\Delta\ln(1+x^2)$，由此证明在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上以下的不等式成立：$\arctan x-\ln(1+x^2)\geqslant\frac{\pi}{4}-\ln2$.
证明：因在$[a,b]$上$|f'(x)|\geqslant|\varphi'(x)|,f'(x)\neq0$，故$f(x),\varphi(x)$在$[a,b]$上可导，从而在$[a,b]$上连续.
任取$x,x+\Delta x\in[a,b],\Delta x>0$，则$f(x),\varphi(x)$在$[x,x+\Delta x]$上连续可导且$f'(x)\neq0$.
由柯西定理，得必存在$\xi\in(x,x+\Delta x)$，使$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{f(x+\Delta x)-f(x)}=\frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)}$即$\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta f(x)}=\frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)}$，于是$\left|\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta f(x)}\right|=\left|\frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)}\right|\leqslant1$即$|\Delta f(x)|\geqslant|\Delta\varphi(x)|$.
因$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},(\ln(1+x^2))'=\frac{2x}{1+x^2}$，且在$\left[\frac{1}{2},x\right]$上，有$2x>1$，则$(\ln(1+x^2))'=\frac{2x}{1+x^2}>\frac{1}{1+x^2}=(\arctan x)'>0$，取$f(x)=\ln(1+x^2),\varphi(x)=\arctan x$，则由上面的结论知，在$\left[\frac{1}{2},x\right]$上，$\Delta\arctan x=|\Delta\arctan x|\leqslant|\Delta\ln(1+x^2)|=\Delta\ln(1+x^2)$.
在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上任取一个$x$，在$[x,1]$上有$\arctan1-\arctan x=\Delta\arctan x\leqslant\Delta\ln(1+x^2)=\ln(1+1^2)-\ln(1+x^2)$即$\frac{\pi}{4}-\arctan x\leqslant\ln2-\ln(1+x^2)$，从而$\arctan x-\ln(1+x^2)\geqslant\frac{\pi}{4}-\ln2$.

14. 若$f(x)$在区间X(由穷或无穷)中具有有界的导数，即$|f'(x)|\leqslant M$，则$f(x)$在X中一致连续.
证明：因若$f(x)$在区间X上可导，从而也在X上连续，且$|f'(x)|\leqslant M,M>0$
任取$x_1,x_2\in X$，不妨设$x_1<x_2$，则$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续可导.
由拉格朗日中值定理，得$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，则$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)|(x_2-x_1)\leqslant M(x_2-x_1)$，于是对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，则当$|x_2-x_1|<\delta=\frac{\varepsilon}{M}$时，$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M(x_2-x_1)<\varepsilon$成立，于是$f(x)$在$X$中一致连续.

§2. 泰勒公式

1. 当$|x|$充分小时，推导下列近似公式：
$\tan x \approx x; \cos x \cdot \sin x \approx x;\ \sqrt[n]{1 \pm x} \approx 1 \pm \dfrac{x}{n}; e^x \approx 1 + x.$
证明：
(1) 令$f(x) = \tan x$，因$|x|$充分小，用近似公式时可取$x_0 = 0$，于是$f(x_0) = 0, f'(0) = \sec^2 x\big|_{x=0} = 1$，从而$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$即为$\tan x \approx x$.
(2) 令$f(x) = \cos x \cdot \sin x$，因$|x|$充分小，用近似公式时可取$x_0 = 0$，于是$f(x_0) = 0, f'(0) = (-\sin^2 x + \cos^2 x)\big|_{x=0} = 1$，从而$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$即为$\cos x \cdot \sin x \approx x$.
(3) 令$f(x) = \sqrt[n]{1 \pm x}$，因$|x|$充分小，用近似公式时可取$x_0 = 0$，于是$f(x_0) = 1, f'(0) = \pm\dfrac{1}{n}(1 \pm x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0} = \pm\dfrac{1}{n}$，从而$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$即为$\sqrt[n]{1 \pm x} \approx 1 \pm \dfrac{x}{n}$.
(4) 令$f(x) = e^x$，因$|x|$充分小，用近似公式时可取$x_0 = 0$，于是$f(x_0) = 1, f'(0) = e^x\big|_{x=0} = 1$，从而$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$即为$e^x \approx 1 + x$.

2. 求$\tan 4^o$的近似值.
解：由上题知，$\tan x \approx x$，故$\tan 4^o = \tan\dfrac{\pi}{45} \approx \dfrac{\pi}{45} \approx 0.0698$.

3. 求$\sqrt{37}$的近似值.
解：因$\sqrt{37} = \sqrt{36+1} = 6\sqrt{1 + \dfrac{1}{36}}$，故据第1题，得$\sqrt{37} = 6\sqrt{1 + \dfrac{1}{36}} \approx 6\left(1 + \dfrac{1}{72}\right) \approx 6.083$.

4. 图5-5所示为一凸透镜，设透镜凸面半径为R，口径为$2H$，H远比R小.
(1) 证明：透镜厚度$D \approx \dfrac{H^2}{2R}$；
(2) 设$2H = 50$毫米，$R = 100$毫米，求D.

解：

(1) 因$D = R - \sqrt{R^2 - H^2}$，则$D = R\left[1 - \sqrt{1 - \left(\dfrac{H}{R}\right)^2}\right]$.
又H远比R小，故$\left|\left(\dfrac{H}{R}\right)^2\right|$充分小，则$\sqrt{1 - \left(\dfrac{H}{R}\right)^2} \approx 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{H}{R}\right)^2 = 1 - \dfrac{H^2}{2R^2}$，从而$D \approx R\left[1 - \left(1 - \dfrac{H^2}{2R^2}\right)\right] = \dfrac{H^2}{2R}$.
(2) $D = R - \sqrt{R^2 - H^2} = 100 - \sqrt{100^2 - 25^2} \approx 3.175; D \approx \dfrac{H^2}{2R} = \dfrac{25^2}{200} = 3.125$

5. 测得圆钢直径为30.12毫米，已知其误差为0.05毫米.求圆钢截面积的绝对误差和相对误差.
解：因圆面积$S = \dfrac{\pi}{4}D^2$，则利用导数估计误差，S有绝对误差$|\Delta S| \approx \left|\dfrac{\pi}{2}D\Delta D\right| = \dfrac{\pi}{2} \times 30.12 \times 0.05 \approx 2.3656$(毫米^2)；相对误差为$\left|\dfrac{\Delta S}{S}\right| \approx \left|\dfrac{\frac{\pi}{2}D\Delta D}{\frac{\pi}{4}D^2}\right| = \left|\dfrac{2\Delta D}{D}\right| \approx 0.33\%$.

6. 测得金属球体的直径$D = 10.12$毫米，误差$\Delta D = 0.05$毫米.计算球体的体积及其绝对误差，相对误差.
解：因球体积$V = \dfrac{\pi}{6}D^3$，故球体体积$V = \dfrac{\pi}{6}(10.12)^3 \approx 542.675$(毫米^3)；
利用导数误差估计，V有绝对误差$|\Delta V| \approx \left|\dfrac{\pi}{2}D^2\Delta D\right| = \dfrac{\pi}{2} \times 10.12^2 \times 0.05 \approx 8.044$(毫米^3)；
相对误差$\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right| \approx \left|\dfrac{\frac{\pi}{2}D^2\Delta D}{\frac{\pi}{6}D^3}\right| = \left|\dfrac{3\Delta D}{D}\right| \approx 1.48\%$.

7. 求下列函数在$x = 0$点的泰勒展开式：
(1) $f(x) = \sqrt{1+x}$
(2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
(3) $f(x) = e^{\sin x}$(展开直到含有x^3的项)

(4) $f(x)=\cos x$

(5) $f(x)=\ln\cos x$(展开直到含有x^6的项)

(6) $f(x)=\ln(1+x)$

解:

(1) $f(x)=\sqrt{1+x}, f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}},\cdots, f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$
把$x=0$依次代入上列各式，有$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}, f''(0)=-\frac{1}{4},\cdots, f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}$
于是得函数$f(x)=\sqrt{1+x}$在$x=0$的泰勒展开式：$f(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}}{n!}x^n+o(x^n)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{n!\cdot 2^n}+o(x^n)$

(2) $f(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}, f'(x)=-(1+x)^{-2}, f''(x)=2(1+x)^{-3},\cdots, f^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(1+x)^{-(n+1)}$
把$x=0$依次代入上列各式，有$f(0)=1, f'(0)=-1, f''(0)=2,\cdots, f^{(n)}(0)=(-1)^n\cdot n!$
于是得函数$f(x)=\frac{1}{1+x}$在$x=0$的泰勒展开式：$f(x)=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

(3) 注意$\sin x$为x的等价无穷小.
则$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2!}\sin^2 x+\frac{1}{3!}\sin^3 x+o_1(\sin^3 x)=1+(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))+\frac{1}{2}(x+o(x^2))^2+\frac{1}{6}(x+o(x^2))^3+o_1(\sin^3 x)=1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$.

(4) $f(x)=\cos x, f'(x)=-\sin x, f''(x)=-\cos x,\cdots, f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)$
把$x=0$依次代入上列各式，有$f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=-1,\cdots, f^{(2m)}(0)=(-1)^m, f^{(2m+1)}(0)=0,\cdots(m\in Z^+)$
于是得函数$f(x)=\cos x$在$x=0$的泰勒展开式：$f(x)=1-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

(5) $f(x)=\ln\cos x=\frac{1}{2}\ln(1-\sin^2 x)=-\frac{1}{2}\left(\sin^2 x+\frac{\sin^4 x}{2}+\frac{\sin^6 x}{3}+o(\sin^6 x)\right)=-\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o_1(x^5)\right)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o_2(x^3)\right)^4+\frac{1}{3}\left(x+o_3(x^2)\right)\right)^6+o(x^6)\right]=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6)$

(6) $f(x)=\ln(1+x), f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}, f''(x)=-(1+x)^{-2},\cdots, f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}!(1+x)^{-n}$
把$x=0$依次代入上列各式，有$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=-1,\cdots, f^{(n)}(0)=(-1)^(n-1)!$
于是得函数$f(x)=\ln(1+x)$在$x=0$的泰勒展开式：$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

8. 求函数$\ln x$在$x=1$的泰勒展开式.
解：由上题结论，得$\ln x=\ln(1+x-1)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+o((x-1)^n)$.

9. 求函数$\sqrt{x}$在$x=1$的泰勒展开式（展开到x^3项）.
解:$f(x)=\sqrt{x}, f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$
把$x=1$依次代入上列各式，有$f(1)=1, f'(1)=\frac{1}{2}, f''(1)=-\frac{1}{4}, f'''(1)=\frac{3}{8}$
于是得函数$f(x)=\sqrt{x}$在$x=1$的泰勒展开式：$f(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3+o((x-1)^3)$.

10. 将多项式$P_3(x)=1+3x+5x^2-2x^3$表成$x+1$的正整数幂的多项式.
解：因$P_3(x)=1+3x+5x^2-2x^3, P_3'(x)=3+10x-6x^2, P_3''(x)=10-12x, P_3'''(x)=-12, P_3^{(4)}=\cdots=P_3^{(n)}=0$
把$x=-1$依次代入上列各式，有$P_3(-1)=5, P_3'(-1)=-13, P_3''(-1)=22, P_3'''(-1)=-12, P_3^{(4)}=\cdots=P_3^{(n)}=0$
于是得$P_3(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$.

11. 利用泰勒公式计算$\sqrt[3]{7}$至四位小数.

解: $\sqrt[3]{7}=2\left(1-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 2\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^3\right]\approx$ 1.9130

$\Delta<2\cdot\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^4\approx 2.01\times 10^{-5}$.

12. 利用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{12}x^4}{x^6}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{2\ln(1+x^2)}$

解:

(1) 利用泰勒公式，有$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6), e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+ox^6$，

则$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{12}x^4=\frac{7}{360}x^6+o(x^6)$，于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{12}x^4}{x^6}=\frac{7}{360}$.

(2) 利用泰勒公式，有$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2), \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，则$e^x\sin x-x(1+x)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}$.

(3) 利用泰勒公式，有$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$则$x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$，于是$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}$.

(4) 利用泰勒公式，有$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，则$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\dfrac{-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}=\dfrac{-\frac{x}{6}+o(x)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$，于是$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=0$

(5) 因$\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}$

利用泰勒公式，有$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}=1+\frac{1}{6x}-\frac{5}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right), \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}=1-\frac{1}{6x}-\frac{5}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$，

则$\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right)$，于是$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})=\frac{1}{3}$.

(6) 利用泰勒公式，有$\cos(\sin x)=1-\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^4 x}{4!}+o(\sin^4 x), \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$，

则$\dfrac{1-\cos(\sin x)}{2\ln(1+x^2)}=\dfrac{\sin^2 x\left[1-\frac{1}{12}\sin^2 x+o(\sin^2 x)\right]}{4x^2\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}$，从而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{2\ln(1+x^2)}=\frac{1}{4}$

13. 决定α,β，使$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{16x^4-8x^3+10x-7}-\alpha x-\beta)=0$.

解：因$\sqrt[4]{16x^4-8x^3+10x-7}=2x\cdot\sqrt[4]{1+\left(-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{5}{8x^3}-\dfrac{7}{16x^4}\right)}=2x-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{16x^2}-\dfrac{7}{32x^3}+\varepsilon(\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon=0)$

故$\sqrt[4]{16x^4-8x^3+10x-7}-\alpha x-\beta=(2-\alpha)x-\left(\dfrac{1}{4}+\beta\right)+\dfrac{5}{16x^2}-\dfrac{7}{32x^3}+\varepsilon$

由此可知，欲使$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{16x^4-8x^3+10x-7}-\alpha x-\beta)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2-\alpha)x-\left(\dfrac{1}{4}+\beta\right)+\dfrac{5}{16x^2}-\dfrac{7}{32x^3}+\varepsilon\right]=0$，必须$\alpha=2,\beta=-\dfrac{1}{4}$.

14. 决定A，使极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{Q(x)}-A}{x}$存在，其中$Q(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m,a_0\neq0,m$为自然数.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{Q(x)}-A}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}-A}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{a_0}\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{a_1}{a_0}x+\cdots+\dfrac{a_m}{a_0}x^m}-A\right)}{x}=$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{a_0}\left(1+\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a_1}{a_0}x+\cdots+\dfrac{a_m}{a_0}x^m\right)+o(x)-A\right)}{x}$存在$\Longleftrightarrow\sqrt[n]{a_0}-A=0$即$A=\sqrt[n]{a_0}$，此时原式$=\dfrac{a_1\cdot\sqrt[n]{a_0}}{na_0}$.

§3. 函数的升降、凸性与极值

1. 证明下列函数的单调性：

(1) $y = x - \sin x$

(2) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x (x > 0)$

证明：

(1) 因$y = f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续可导，故$f'(x) = 1 - \cos x$；又$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$，故$f'(x) \geqslant 0$，于是$y = x - \sin x$在$(-\infty, +\infty)$单调上升.

(2) 因$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$，故$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x}\right]$

又$x > 0$，故$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$，则只需判断方括号中式子的符号.

令$f(x) = \ln x$在$[x, 1+x]$(对$\forall x > 0$)上应用拉格朗日定理，有$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}(1+x-x) = \frac{1}{\xi}(x < \xi < 1+x)$，于是$\frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+x}$，故$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+x}$即$\ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x} > 0(\forall x > 0)$，由此可知$y' > 0$，从而$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$在$(0, +\infty)$上单调增加.

2. 单调函数的导数是否必为单调？

解：不一定.

例：$y = x^3$在$(-\infty, +\infty)$上单调上升，但$y' = 3x^2$却不单调.

3. 证明下列不等式：

(1) $x > \sin x > \frac{2}{\pi}x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(2) $x - \frac{x^3}{6} > \sin x > x(x < 0)$

(3) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x(x > 0)$

(4) $\tan x > x + \frac{x^3}{3} \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(5) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}(x > 1)$

(6) $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1(0 \leqslant x \leqslant 1, p > 1)$

证明：

(1) 设$f(x) = x - \sin x$，由第1题，知$f(x)$在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$内单调上升，又$f(0) = 0$，故对$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，有$f(x) > f(0) = 0$即$x - \sin x > 0$，从而$x > \sin x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$；

设$g(x) = \frac{\sin x}{x}, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}, g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

注意到$u(x) = x\cos x - \sin x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$且$u(0) = 0$，由于$u'(x) = -x\sin x < 0 \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$，故当$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$时，$u(x)$单调下降即$u(x) < u(0) = 0 \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$，由此得，$g'(x) < 0 \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$，故$g(x)$在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$上单调下降，于是$g(x) > g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$即$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}, x \in \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$，则$\sin x > \frac{2}{\pi}x$，从而$x > \sin x > \frac{2}{\pi}x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(2) 设$f(x) = x - \sin x$，由第1题，知$f(x)$在$(-\infty, 0)$内单调上升，又$f(0) = 0$，故对$\forall x \in (-\infty, 0)$，有$f(x) < f(0) = 0$即$x - \sin x > 0$，从而$x < \sin x(x < 0)$；

设$g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x, g(0) = 0, g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$

再设$h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x(x < 0)$且$h(0) = 0$，由于$h'(x) = -x + \sin x > 0$，故当$x \in (-\infty, 0)$时，$h(x)$单调上升即$h(x) < h(0) = 0(x < 0)$，由此得，$g'(x) < 0(x < 0)$，故$g(x)$在$(-\infty, 0)$上单调下降，于是$g(x) > g(0) = 0$即$x - \frac{x^3}{6} - \sin x > 0(x < 0)$，则$x - \frac{x^3}{6} > \sin x$，从而$x - \frac{x^3}{6} > \sin x > x(x < 0)$

(3) 设$f(x)=\ln(1+x)-x,g(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}(x>0)$，故$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{1+x}<0(x>0)$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调下降，又$f(0)=0$，故对$\forall x>0$，有$f(x)<f(0)=0$即$\ln(1+x)<x(x>0)$；
$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0(x>0)$
故$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调上升，又$g(0)=0$，于是$g(x)>g(0)=0$即$\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}(x>0)$，从而$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x(x>0)$

(4) 设$f(x)=\tan x-x-\dfrac{x^3}{3}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，故$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x+x)(\tan x-x)$，又因$(\tan x-x)'=\sec^2 x-1=\tan^2 x\leqslant 0\left(\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，则$\tan x-x$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调上升，故对$\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，有$\tan x-x>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$；
于是$f'(x)=(\tan x+x)(\tan x-x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，由此可知，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调上升，又$f(0)=0$，于是$f(x)>f(0)=0$即$\tan x-x-\dfrac{x^3}{3}>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，从而$\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(5) 设$f(x)=2\sqrt{x}-3+\dfrac{1}{x}(x>1)$，故$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-1}{x^2}>0(x>1)$，于是$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调上升，又$f(1)=0$，于是$f(x)>f(1)=0$即$2\sqrt{x}-3+\dfrac{1}{x}>0(x>1)$，从而$\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1(0\leqslant x\leqslant 1,p>1)$

(6) 设$f(x)=x^p+(1-x)^p(0\leqslant x\leqslant 1,p>1)$，故$f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$，
令$f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}=0$，解得$x=\dfrac{1}{2}$，比较$f(0)=1,f(1)=1,f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{p-1}}$，由此得$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=\dfrac{1}{2^{p-1}},\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=1$，从而$\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1(0\leqslant x\leqslant 1,p>1)$

4. 确定下列函数的上升、下降区间：

(1) $y=x^3-6x$
(2) $y=2x^3-3x^2-12x+1$
(3) $y=x^4-2x^3$
(4) $y=x+\sin x$
(5) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$
(6) $y=2x^2-\sin x$
(7) $y=x^ne^{-x}(n>0,x\leqslant 0)$

解:

(1) 因$y'=3x^2-6=3(x^2-2)$，得驻点$x=\pm\sqrt{2}$
当$x<-\sqrt{2}$或$x>\sqrt{2}$时，$y'>0$，函数严格上升；当$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时，$y'<0$，函数严格下降.
从而在区间$(-\infty,-\sqrt{2})\bigcup(\sqrt{2},+\infty)$上函数严格上升；在区间$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$上函数严格下降.

(2) 因$y'=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x-2)(x+1)$，得驻点$x=-1,x=2$
当$x<-1$或$x>2$时，$y'>0$，函数严格上升；当$-1<x<2$时，$y'<0$，函数严格下降.
从而在区间$(-\infty,-1)\bigcup(2,+\infty)$上函数严格上升；在区间$(-1,2)$上函数严格下降.

(3) 因$y'=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$，得驻点$x=0,x=\dfrac{3}{2}$
当$x>\dfrac{3}{2}$时，$y'>0$，函数严格上升；当$x<\dfrac{3}{2}$时，$y'\leqslant 0$且仅在$x=0$处$y'=0$，函数严格下降.
从而在区间$\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$上函数严格上升；在区间$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$上函数严格下降.

(4) 因$y'=1+\cos x\leqslant 0$，故函数在$(-\infty,+\infty)$上函数上升.

(5) 因$y'=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$，得驻点$x=\pm 1$
当$x<-1$或$x>1$时，$y'<0$，函数严格下降；当$-1<x<1$时，$y'>0$，函数严格上升.
从而在区间$(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$上函数严格下降；在区间$(-1,1)$上函数严格上升.

(6) 因$y' = 4x - \cos x, y'' = 4 + \sin x > 0$，则$y'$在$(-\infty, +\infty)$上单调上升.
又$y'(0) = -1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$，则在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$内有一个点$x_0$满足$y'(x_0) = 0$即$4x_0 = \cos x_0$
当$x > x_0$时，$y' > 0$，函数严格上升；当$x < x_0$时，$y' < 0$，函数严格下降.
从而在区间$(x_0, +\infty)$上函数严格上升；在区间$(-\infty, x_0)$上函数严格下降.

(7) 因$y' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n - x)$
因$n > 0, x > 0$，故$x^{n-1} > 0, e^{-x} > 0$，则$x^{n-1}e^{-x} > 0$
当$0 < x < n$时，$y' > 0$，函数严格上升；当$x > n$时，$y' < 0$，函数严格下降.
从而在区间$(0, n)$上函数严格上升；在区间$(n, +\infty)$上函数严格下降.

5. 求下列函数的极值：

(1) $y = x - \ln(1 + x)$

(2) $y = \sqrt{x} \ln x$

(3) $y = x + \frac{1}{x}$

(4) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

(5) $y = \cos x + \cosh x$

解：

(1) 因$y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}, y'' = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$
此函数的定义域为$(-1, +\infty)$，则驻点为$x = 0$，函数只能在这点有极值，于是$x = 0$是函数的极小点，极小值为$y = 0$.

(2) 因$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2), y'' = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \ln x = -\frac{\ln x}{2^{\frac{3}{2}}}$
驻点为$x = e^{-2}$，函数只能在这点有极值，又$y''|_{x=e^{-2}} > 0$，于是$x = e^{-2}$是函数的极小点，极小值为$y = -\frac{2}{e}$.

(3) 因$y' = 1 - \frac{1}{x^2}, y'' = -\frac{1}{x^3} > 0$
此函数的定义域为$(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$，则驻点为$x = \pm 1$，函数只能在这两点有极值，又$y''|_{x=1} = 1 > 0, y''|_{x=-1} = -1 < 0$，于是$x = 1$是函数的极小点，极小值为$y = 2$；$x = -1$是函数的极大点，极大值为$y = 2$.

(4) 因$y' = 3\sin x \cos x(\sin x - \cos x) = \frac{3}{2}\sin 2x(\sin x - \cos x), y'' = 3\cos 2x(\sin x - \cos x) + \frac{3}{2}\sin 2x(\cos x + \sin x)$
驻点为$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, x = \frac{k\pi}{2}(k \in Z)$，又$y''|_{x=2k\pi} = -3 < 0, y''|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} > 0, y''|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}} = -3 < 0, y''|_{2k\pi+\pi} = 3 > 0, y''|_{x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}} = -\frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, y''|_{x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}} = 3 > 0$,
于是$x = 2k\pi$时，有极大值$y = 1$；$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$时，有极大值$y = 1$；$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$时，有极大值$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$；
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$时，有极小值$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$；$x = 2k\pi + \pi$时，有极小值$y = -1$；$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$时，有极小值$y = -1$.

(5) 因$y' = 1 - \sin x + \sinh x$，不易求驻点，但由$-\sin x + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$易见$x = 0$是一个驻点
由$-\sin x, \sinh x$在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$的严格单调性，知这驻点是唯一的.
$y'' = -\cos x + \cosh x, y''(0) = 0; y''' = \sin x + \sinh x, y'''(0) = 0; y^{(4)} = \cos x + \cosh x, y^{(4)}(0) = 2 > 0$,
于是$x = 0$是函数的极小点，极小值为$y = 2$.

6. 若$f(x)$在点x_0具有直到n阶连续导数，并且$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$，那么当$n$为奇数时，$f(x_0)$非极值；当$n$为偶数而$f^{(n)}(x_0) > 0$时，$f(x_0)$为极小值；当$n$为偶数而$f^{(n)}(x_0) < 0$时，$f(x_0)$为极小大值.

证明：将$f(x)$在$x = x_0$点用泰勒公式展开：$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$

因$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$，故$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$

当$x \to x_0$时，$o((x-x_0)^n) \to 0$，故当x充分靠近x_0时，即当$|x-x_0|$充分小时，$f(x)-f(x_0)$与$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$有相同的符号

若$f^{(n)}(x_0) > 0$，

(1) n为奇数时，若$x > x_0$，则$(x-x_0)^n > 0$，于是$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n > 0$，从而$f(x)-f(x_0) > 0$即$f(x) > f(x_0)$；

若$x < x_0$，则$(x-x_0)^n < 0$，于是$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n < 0$，从而$f(x)-f(x_0) < 0$即$f(x) < f(x_0)$

因此$f(x_0)$不是极值.

(2) n为偶数时，只要x充分接近x_0，不论$x > x_0$，还是$x < x_0$，都有$(x-x_0)^n > 0$，此时$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n > 0(x \neq x_0)$，从而$f(x)-f(x_0) > 0$，即在$x_0$充分小某邻域内，恒有$f(x) > f(x_0)$，这表明$f(x_0)$是极小值.

若$f^{(n)}(x_0) < 0$，

(1) n为奇数时，若$x > x_0$，则$(x-x_0)^n > 0$，于是$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n < 0$，从而$f(x)-f(x_0) < 0$即$f(x) < f(x_0)$；

若$x < x_0$，则$(x-x_0)^n < 0$，于是$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n > 0$，从而$f(x)-f(x_0) > 0$即$f(x) > f(x_0)$

因此$f(x_0)$不是极值.

(2) n为偶数时，只要x充分接近x_0，不论$x > x_0$，还是$x < x_0$，都有$(x-x_0)^n > 0$，此时$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n < 0(x \neq x_0)$，从而$f(x)-f(x_0) < 0$，即在$x_0$充分小某邻域内，恒有$f(x) < f(x_0)$，这表明$f(x_0)$是极大值.

7. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值：

(1) $y = |x^2-3x+2|, [-10, 10]$

(2) $y = e^{|x-3|}, [-5, 5]$

解：

(1) $y = \begin{cases} (x-2)(x-1), & x \leqslant 1 \\ -(x-2)(x-2), & 1 < x \leqslant 2 \\ (x-2)(x-1) & x > 2 \end{cases}$，

求导，得$y' = \begin{cases} 2x-3, & x < 1 \\ \text{不存在}, & x = 1 \\ -2x+3, & -1 < x < 2 \\ \text{不存在}, & x = 2 \\ 2x-3, & x > 2 \end{cases}$，则驻点$x = \dfrac{3}{2}$，导数不存在的点$x = 1, x = 2$

又$y(-10) = 132, y(1) = 0, y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{4}, y(2) = 0, y(10) = 72$，故函数的最大值是132，最小值是0.

(2) $y = \begin{cases} e^{x-3}, & x \geqslant 3 \\ e^{3-x}, & x < 3 \end{cases}$，求导，得$y' = \begin{cases} e^{x-3}, & x > 3 \\ \text{不存在}, & x = 3 \\ -e^{3-x}, & x < 3 \end{cases}$，显然无驻点

又$y(-5) = e^8, y(3) = 1, y(5) = e^2$，故函数的最大值为$e^8$，最小值为1.

8. 铁路上AB段的距离为100公里，工厂C与A相距40公里，AC垂直于AB.今要在AB中间一点D向工厂C修一条公路（图5-21），使从原料供应站B运货到工厂C所用运费最省.问D点应该设在何处？已知每一公里的铁路运费与公路运费之比是3:5.

解：设$|AD| = x$公里，则$|DB| = 100-x$公里；每公里铁路运费为$3t$元，则每公里公路运费为$5t$元，总运费为yt元

则$yt = \sqrt{x^2+1600}(5t) + (100-x)(3t)$即$y = 5\sqrt{x^2+1600} + 3(100-x)$，于是$y' = \dfrac{5x-3\sqrt{x^2+1600}}{\sqrt{x^2+1600}}, y'' = \dfrac{8000}{(x^2+1600)^{\frac{3}{2}}} > 0$，驻点为$x = 30$，且$x = 30$为极小点，故$D$点应设在距$A$30公里处.

9. 把一根圆木锯成矩形木条.问矩形的长和宽取多大时，截面积最大？

解：设圆木截面半径为R，矩形的长、宽分别为x, y，则$\sqrt{x^2+y^2} = 2R$，于是$y = \sqrt{4R^2-x^2}$，从而$S =$

$xy = x\sqrt{4R^2-x^2}$

则$S' = \dfrac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}, S'' = \dfrac{2x^3-12R^2x}{(4R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$，驻点为$x=\sqrt{2}R$，此时$S''<0$，则$x=\sqrt{2}R$为极大点，此时$x=y=\sqrt{2}R$，故矩形的长、宽均取$\sqrt{2}R$时，截面积最大.

10. 设$S=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$.问$x$多大时，$S$最小？

解：$S'=2[nx-(a_1+a_2+\cdots+a_n)], S''=2n>0$，驻点为$x=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，且$x$为极小点，即当$x=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$时，$S$最小.

11. 做一个圆柱形锅炉，已知其容积为V，两端面材料的每单位面积价格为a元，侧面材料的每单位价格为b元，问锅炉的直径和高的比等于多少时，造价最省？

解：设此圆柱形锅炉的直径为D，高为H，则$V=\dfrac{1}{4}\pi D^2H$，于是$H=\dfrac{4V}{\pi D^2}$

造价$G=2a\left(\dfrac{\pi}{4}D^2\right)+b\pi DH=\dfrac{\pi}{2}aD^2+b\dfrac{4V}{D}$，则$G'=\pi aD-\dfrac{4bV}{D^2}$，驻点为$D=\sqrt[3]{\dfrac{4bV}{a\pi}}$.当$D<\sqrt[3]{\dfrac{4bV}{a\pi}}$时，$G'<0$；当$D>\sqrt[3]{\dfrac{4bV}{a\pi}}$时，$G'>0$，则$D=\sqrt[3]{\dfrac{4bV}{a\pi}}$是唯一极小点，从而是最小点.

于是$\dfrac{D}{H}=\dfrac{D}{\dfrac{4V}{\pi D^2}}=\dfrac{\pi D^3}{4V}=\dfrac{b}{a}$即当锅炉的直径与高的比为$\dfrac{b}{a}$时，造价最省.

12. 用一块半径为R的圆形铁皮，剪去一块圆心角为α的圆扇形做成一个漏斗.问α为多大时，漏斗的容积最大？

解：由题设知，余下部分的圆心角为$x=2\pi-\alpha$，漏斗底周长为$Rx=R(2\pi-\alpha)$，底半径为$\dfrac{Rx}{2\pi}$，其高为$h=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{Rx}{2\pi}\right)^2}=\dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}(x>0)$，于是漏斗的容积为$V=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{Rx}{2\pi}\right)^2\cdot\dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\dfrac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}(x>0)$

按题设，只需考虑当x为何值时，函数$f(x)=x^4(4\pi^2-x^2)$的值最大.

$f'(x)=16\pi^2x^3-6x^5, f''(x)=48\pi^2x^2-30x^4$，驻点为$x=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，且$f''\left(2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)<0$，故$x=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$为极大点，因而剪去的圆心角应为$\alpha=2\pi\left(1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$，所做漏斗的容积最大.

13. 底为a，高为h的三角形，试求其内接最大矩形的面积.

解：设其内接矩形的长、宽分别为b,c

则由已知，得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{h-c}{h}$即$b=\dfrac{h-c}{h}a$，于是$S=bc=ac\dfrac{h-c}{h}=\dfrac{ahc-ac^2}{h}$，则$S'=\dfrac{ah-2ac}{h}, S''=-\dfrac{2a}{h}<0$，驻点为$c=\dfrac{h}{2}$，于是$c=\dfrac{h}{2}$为极大点，此时$b=\dfrac{a}{2}$，从而最大面积为$S=bc=\dfrac{ah}{4}$.

14. 给定长为l的线段，试把它分为两段，使以这两段为边所围成的矩形的面积最大.

解：设此矩形的长为x，则宽为$l-x$

$S=x(l-x)=lx-x^2$，则$S'=l-2x, S''=-2<0$，驻点为$x=\dfrac{l}{2}$，且$x=\dfrac{l}{2}$为极大点，因此当$x=\dfrac{l}{2}$时，矩形面积最大，且$S=\dfrac{l^2}{4}$。

15. 设内接于椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，而边平行于轴的最大矩形.

解：由已知设所求矩形与x正半轴交于$(x,0)$，则其与y正半轴交于$\left(0,\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$

此矩形的面积为S，则$\dfrac{1}{4}S=x\cdot\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，从而$S=\dfrac{4b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，

则$s'=\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}, S''=\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{2x^3-3a^2x}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$，驻点为$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，此时$S''<0$，则$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$为$S$的极大值点，于是$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$时矩形面积最大，最大面积为$S=2ab$.

16. 求点$M(p,p)$到抛物线$y^2=2px$的最短距离.

解：点$M(p,p)$到抛物线$y^2=2px$上任意点(x,y)的距离为$d=\sqrt{(x-p)^2+(y-p)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{y^2}{2p}-p\right)^2+(y-p)^2}=\sqrt{\dfrac{y^4}{4p^2}+2p^2-2py}$

设$f(y)=\frac{y^4}{4p^2}+2p^2-2py$，则$f'(y)=\frac{1}{p^2}(y^3-2p^3), f''(y)=\frac{3y^2}{p^2}>0$，驻点为$y=\sqrt[3]{2}p$，且它就是$f(y)$的极小值点，因此所求最短距离为$d=\sqrt{f(\sqrt[3]{2}p)}=|p|\sqrt{2+2^{-\frac{2}{3}}-2^{\frac{3}{4}}}$.

17. 甲船以$u=20$浬/小时的速度向东航行，正午时在其正北面$h=82$浬处有乙船以$v=16$浬/小时的速度向正南航行，问何时两船距离最近？
解:设x小时后两船距离最近，两船相距S浬，则$S=\sqrt{(82-16x)^2+(20x)^2}=\sqrt{656x^2-2624x+6724}$
令$f(x)=656x^2-2624x+6724$，求其最小值。则$f'(x)=1312x-2624, f''(x)=1312>0$，驻点为$x=2$且它为$f(x)$的极小值点，则2小时后两船距离最近，此时$S=10\sqrt{41}$.

18. 平地上放一重物，重量为P公斤.已知物体与地面的摩擦系数为μ。现加一力F，使物体开始移动.问此力与水平方向的夹角φ为多大时，用力最省？（图5-22）？
解：据题设，有$F\cos\varphi=\mu(PG-F\sin\varphi)$即$F=\frac{\mu PG}{\cos\varphi+\mu\sin\varphi}$
令$y=\cos\varphi+\mu\sin\varphi$，为使$F$最小，只要使$y$最大
由$y'=-\sin\varphi+\mu\cos\varphi, y''=-\cos\varphi-\mu\sin\varphi$，驻点为$\varphi=\arctan\mu$，此时$y''<0$，表明当$\varphi=\arctan\mu$时，$y$取最大值，从而$F$取最小值，即用力最省.

19. 如图5-23所示，有甲、乙两生产队合用一变压器，问变压器M应设在何处，所用输电线最省？
解：设M应设在与甲的垂直位置距离为x公里处，所用输电线l最省
由已知，得$l=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2.25^2+(3-x)^2}$，则$l'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x-3}{\sqrt{2.25^2+(3-x)^2}}, l''=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2.25}{(2.25^2+(3-x)^2)^{\frac{3}{2}}}>0$，驻点为$x=1.2$，且为最小值点，即当$x=1.2$公里时，所用输电线最省.

20. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的切线与两坐标轴分别交于$A,B$两点，
    (1) 求AB两点间的距离的最小值；
    (2) 求ΔOAB的最小面积.

解：设切点为(x,y)，则切线斜率为$k=-\frac{b^2x}{a^2y}$，于是切线方程为$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x)$，
不失一般性，可设点$M(x.y)$在第一象限，切线在两坐标轴上的截距分别为$\frac{a^2}{x},\frac{b^2}{y}$，则

(1) 所求AB两点间的距离为$d=\sqrt{\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}}=a\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{a^2-x^2}}$
令$f(x)=\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{a^2-x^2}$，要求$d$的最小值，只需求$f(x)$的最小值.
由$f'(x)=-\frac{2a^2}{x^3}+\frac{2b^2x}{(a^2-x^2)^2}, f''(x)=\frac{6a^2}{x^4}+\frac{2a^2b^2+6b^2x^2}{(a^2-x^2)^3}>0$，且由于$x\in[0,a], x^2\leqslant a^2$，则驻点满足$x^2=\frac{a^3}{a+b}$且此时$f(x)$取最小值，即$d$取最小值，最短距离为$d=a\sqrt{f(x)}=a+b$.

(2) 按题设，有$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{x}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2-x^2}}$，考虑函数$g(x)=x^2(a^2-x^2)$
要求S的最小值，只要求$g(x)$的最大值
由$g'(x)=2a^2x-4x^3, g''(x)=2a^2-12x^2$，驻点为$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$且此时$g''(x)<0$，即当$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$时$g(x)$取最大值，从而$S$取最小值，最小面积为$S=ab$.

21. 讨论函数$x^\alpha(\alpha>1$及$0<\alpha<1), e^x, \ln x, x\ln x$在$(0,+\infty)$内的凸性.
解：$f(x)=x^\alpha, f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}, f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$
当$\alpha>1$时，$f''(x)>0$，则x^α在$(0,+\infty)$内下凸；当$0<\alpha<1$时，$f''(x)<0$，则x^α在$(0,+\infty)$内上凸.
$f(x)=e^x, f'(x)=e^x, f''(x)=e^x>0(x>0)$，则$e^x$在$(0,+\infty)$内下凸
$f(x)=\ln x, f'(x)=\frac{1}{x}, f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0(x>0)$，则$\ln x$在$(0,+\infty)$内上凸
$f(x)=x\ln x, f'(x)=1+\ln x, f''(x)=\frac{1}{x}>0(x>0)$，则$x\ln x$在$(0,+\infty)$内下凸

22. 讨论下列函数的凸性和拐点：
    (1) $y=3x^2-x^3$
    (2) $y=\frac{a^2}{a^2+x^2}(a>0)$

(3) $y = x + \sin x$

(4) $y = \sqrt{1+x^2}$

解:

(1) $y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x$，$y'' = 0$的根为$x = 1$，列表如下：

x	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
y''符号	+	-
y	下凸	上凸

，拐点坐标为$(1, 2)$

(2) $y' = -\dfrac{2ax}{(a^2+x^2)^2}, y'' = \dfrac{2a^2(3x^2-a^2)}{(a^2+x^2)^3}$，$y'' = 0$的根为$x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，列表如下：

x	$\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a, \dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a, +\infty\right)$
y''符号	+	-	+
y	下凸	上凸	下凸

，拐点坐标为$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a, \dfrac{3}{4}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a, \dfrac{3}{4}\right)$

(3) $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$，$y'' = 0$的根为$x = k\pi (k \in Z)$，列表如下：

x	$((2k-1)\pi, 2k\pi)$	$(2k\pi, (2k+1)\pi)$	$((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$
y''符号	+	-	+
y	下凸	上凸	下凸

，拐点坐标为$(k\pi, k\pi)$

(4) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, y'' = \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$，则$y'' > 0$，故函数是下凸的，从而无拐点.

23. 证明曲线$y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$有位于同一直线上的三个拐点.

证明: $y' = \dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}, y'' = \dfrac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

令$y'' = 0$，得$x_1 = 1, x_2 = -2+\sqrt{3}, x_3 = -2-\sqrt{3}$

当$x < -2-\sqrt{3}$时，$y'' < 0$；当$-2-\sqrt{3} < x < -2+\sqrt{3}$时，$y'' > 0$；当$-2+\sqrt{3} < x < -1$时，$y'' < 0$；当$x > -1$时，$y'' > 0$

于是曲线在x_1, x_2, x_3处有三个拐点$A(1,1), B\left(-2+\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}\right), C\left(-(2+\sqrt{3}), \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$

过A, B的直线方成为$y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$，将$C$点坐标代入上述方程，得$\dfrac{1-\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-2-\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$即$C$满足此方程，则曲线$y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$有位于同一直线上的三个拐点.

24. 若$f(x)$是下凸函数（或严格下凸函数），$f'(x_0)$存在，则

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \end{array}\right\} (x \neq x_0).$$

证明: 设x为$f(x)$定义域内任一点，$x \neq x_0$（不妨设$x > x_0$）

令$x_1 = \dfrac{x+x_0}{2}$，由$f(x)$为下凸函数，则$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$；$x_2 = \dfrac{x_1+x_0}{2}$，由$f(x)$为下凸函数，则$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$；$x_3 = \dfrac{x_2+x_0}{2}$，由$f(x)$为下凸函数，则$\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \dfrac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0}$

如此进行下去，可得数列$\{x_n\}$，$|x_n - x_0| = \dfrac{|x-x_0|}{2^n} \to 0 (n \to \infty)$，则$x_n \to x_0 (n \to \infty)$，且$\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \geqslant \dfrac{f(x_{n+1})-f(x_0)}{x_{n+1}-x_0}$

又$f'(x_0)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \lim\limits_{x_n\to x_0} \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$

又$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$，则由极限性质，得$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant f'(x_0)$，从而$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

同理可证，若$f(x)$是严格下凸函数，则$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

25. 若$f(x)$是下凸函数，则$-f(x)$是上凸函数.

证明: 因$f(x)$是下凸函数，则$f(x)$在$[a,b]$上连续，对$[a,b]$中任意两点x_1, x_2，恒有$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，于是$-f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant -\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \dfrac{(-f(x_1))+(-f(x_2))}{2}$，从而$-f(x)$是上凸函数.

26. (1) 若$f_n(x)$是下凸函数，问$F(x) = \min\limits_n\{f_n(x)\}$是不是下凸函数？

(2) 若$f(x),g(x)$是下凸函数，问$f(x)+g(x)$是不是下凸函数？

(3) 说明三次函数不是下凸函数.

解：

(1) 不一定.
例：

当$f_1(x)=\dfrac{1}{x},f_2(x)=x^2(x>0)$时，$f_1(x),f_2(x)$都是下凸函数，但$F(x)=\min\left\{\dfrac{1}{x},x^2\right\}$在$(1,1)$点不满足下凸函数定义，即$F(x)$不是下凸函数.
当$f_1(x)=x^2,f_2(x)=\dfrac{x^2}{2}$时，$f_1(x),f_2(x)$都是下凸函数，且$F(x)=\min\left\{x^2,\dfrac{x^2}{2}\right\}=\dfrac{x^2}{2}$是下凸函数.

(2) $f(x)+g(x)$是下凸函数.
因$f(x),g(x)$是下凸函数，则$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,
$g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$，于是$(f+g)\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)+g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}=\dfrac{1}{2}[(f+g)(x_1)+(f+g)(x_2)]$即$f(x)+g(x)$是下凸函数.

(3) 设$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，则$f'(x)=3ax^2+2bx+c,f''(x)=6ax+2b$
于是，

$a>0$时，当$x>-\dfrac{b}{3a}$时，$f''(x)>0$，$f(x)$是下凸函数；当$x<-\dfrac{b}{3a}$时，$f''(x)<0$，$f(x)$是上凸函数
$a<0$时，当$x>-\dfrac{b}{3a}$时，$f''(x)<0$，$f(x)$是上凸函数；当$x<-\dfrac{b}{3a}$时，$f''(x)>0$，$f(x)$是下凸函数

则$f(x)$不是下凸函数，在$x=-\dfrac{b}{3a}$处有拐点.

27. 如何选择参数$h>0$，方能使曲线$y=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$在$x=\pm\sigma(\sigma>0,\sigma$为已给定的常数)处有拐点.

解：$y'=-\dfrac{2h^3}{\sqrt{\pi}}xe^{-h^2x^2},y''=\dfrac{2h^3}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(2h^2x^2-1)$
令$y''=0$，则$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}h}$
当$x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}h}$时，$y''>0$，曲线下凸；当$-\dfrac{1}{\sqrt{2}h}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}h}$时，$y''<0$，曲线上凸；当$x>\dfrac{1}{\sqrt{2}h}$时，$y''>0$，曲线下凸
则在$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}h}$处有两个拐点，于是$\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}h}=\pm\sigma$，又$h,\sigma>0$，则$h=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}$.

28. 求$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$的极值及拐点，并求拐点处的切线方程.

解：$y'=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2},y''=\dfrac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}$

驻点为$x=0$，列出下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'符号	-	0	+
y	$\searrow$	极小值0	$\nearrow$

则当$x=0$，y有极小值$y=0$.
令$y''=0$，则$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，列出下表：

x	$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
y''符号	-	+	-
y	上凸	下凸	上凸

故拐点为$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right),\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$.

在拐点$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$处的切线方程为$y-\dfrac{1}{4}=\dfrac{-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{\left(\dfrac{1}{3}+1\right)^2}\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

即$3\sqrt{3}x+8y+1=0$；

在拐点$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$处的切线方程为$y-\frac{1}{4}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

即$3\sqrt{3}x-8y-1=0$.

29. 作出下列函数的图形：

(1) $y=x^3-6x$

(2) $y=\frac{3x}{1+x^2}$

(3) $y=5e^{-x^2}$

(4) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

(5) $y=\frac{1}{x^2-1}$

(6) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$

(7) $y=(x-1)^2(x+2)^3$

(8) $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$

(9) $y=\frac{x^2-2x-3}{x^2+1}$

(10) $y=x+\arctan x$

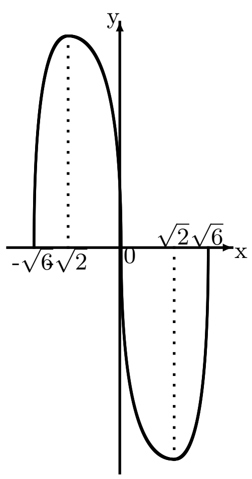
解:

(1) (i) 定义域$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，曲线关于原点对称.

(ii) $y'=3x^2-6,y''=6x$，当$x=\pm\sqrt{2}$时，$y'=0$；当$x=0$时，$y''=0$.

(iii) 列表讨论如下：

x	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},0)$	0	$(0,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},+\infty)$
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	上凸↗	极大值$4\sqrt{2}$	上凸↘	0	下凸↘	极小值$-4\sqrt{2}$	下凸↗



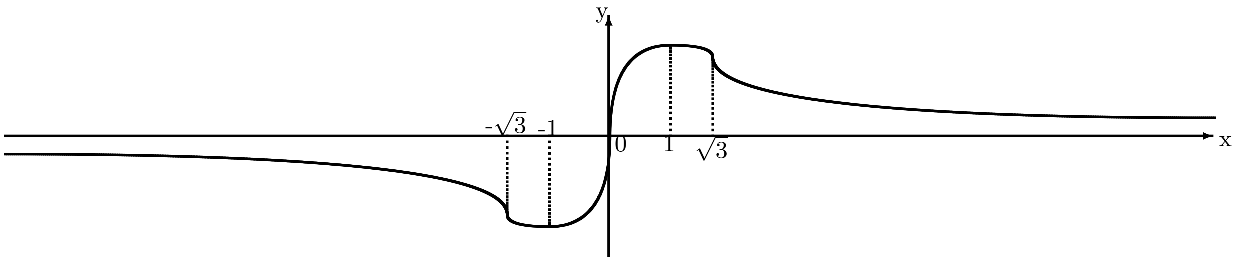
(2) (i) 定义域$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，曲线关于原点对称.

(ii) $y'=\frac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2},y''=\frac{6x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$，当$x=\pm1$时，$y'=0$；当$x=0,x=\pm\sqrt{3}$时，$y''=0$.

(iii) 列表讨论如下：

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y	上凸↘	$-\frac{3}{4}\sqrt{3}$	下凸↘	极小值 $-\frac{3}{2}$	下凸↗	0	上凸↗	极大值 $\frac{3}{2}$	上凸↘	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	下凸↘

(iv) 当$x \to \infty$时，$y \to 0$，故$y = 0$是曲线的一条水平渐近线.



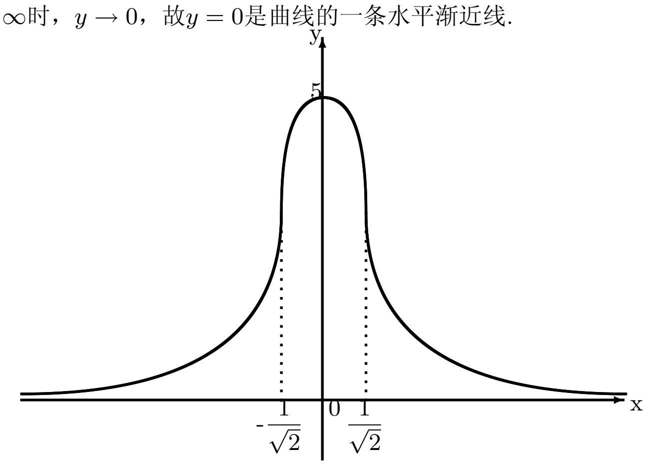
(3) (i) 定义域$(-\infty, +\infty)$，是偶函数，曲线关于y轴对称.

(ii) $y' = -10xe^{-x^2}, y'' = 10e^{-x^2}(2x^2 - 1)$，当$x = 0$时，$y' = 0$；当$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，$y'' = 0$.

(iii) 列表讨论如下：

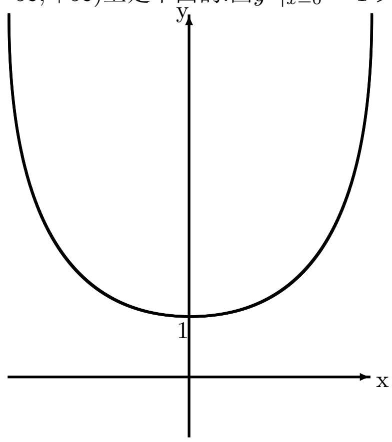
x	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-DF1\sqrt{2}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	0	$(0, \frac{1}{sqrt2})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	下凸↗	$\frac{5}{\sqrt{e}}$	上凸↗	极大值 5	上凸↘	$\frac{5}{\sqrt{e}}$	下凸↘

(iv) 当$x \to \infty$时，$y \to 0$，故$y = 0$是曲线的一条水平渐近线.



(4) (i) 定义域$(-\infty, +\infty)$，是偶函数，曲线关于y轴对称（这是双曲余弦函数$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$）.

(ii) $y' = \sinh x, y'' = \cosh x$，当$x = 0$时，$y' = 0$；
由于$y'' > 0(x \in (-\infty, +\infty)$，故$y$在$(-\infty, +\infty)$上是下凸的.因$y''|_{x=0} = 1 > 0$，故$y_{\min} = 1$.



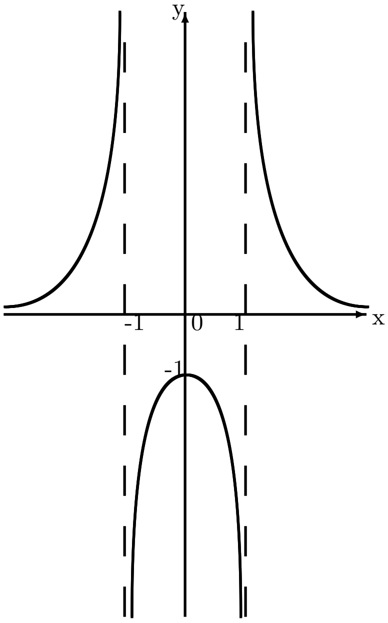
(5) (i) 定义域$(-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, +\infty)$，是偶函数，曲线关于$y$轴对称.

(ii) $y' = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}, y'' = \dfrac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$，当$x = 0$时，$y' = 0$；当$x = \pm 1$时，$y'$不存在；当$x = \pm 1$时，$y''$不存在.

(iii) 列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	不存在	$+$	0	-	不存在	-
y''	$+$	不存在	-	-	-	不存在	$+$
y	下凸↗	无定义	上凸↗	极大值 -1	上凸↘	无定义	下凸↘

(iv) 当$x\to\infty$时，$y\to 0$，故$y=0$是曲线的一条水平渐近线；当$x\to\pm 1$时，$y\to\infty$，故$x=\pm 1$是曲线的一条垂直渐近线.



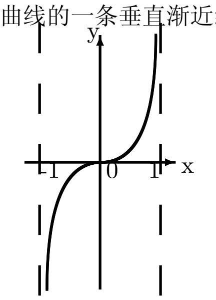
(6) (i) 定义域$(-1,1)$，是奇函数，曲线关于原点对称.

(ii) $y'=\dfrac{2}{1-x^2},y''=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$，$y'=0$无解；当$x=0$时，$y''=0$.

(iii) 列表讨论如下：

x	$(-1,0)$	0	$(0,1)$
y'	$+$	$+$	$+$
y''	-	0	$+$
y	上凸↗	0	下凸↗

(iv) 当$x\to 1^-$时，$y\to+\infty$，故$x=1$是曲线的一条垂直渐近线；
当$x\to -1^+$时，$y\to-\infty$，故$x=-1$是曲线的一条垂直渐近线.



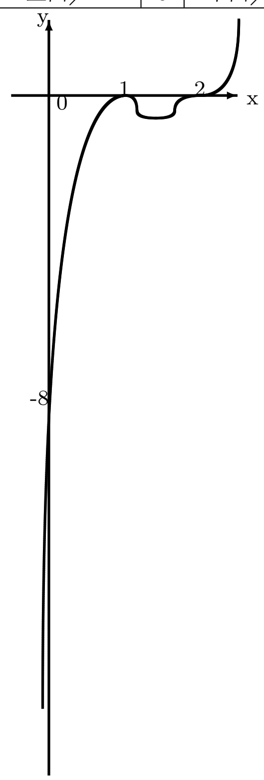
(7) (i) 定义域$(-\infty,+\infty)$.

(ii) $y'=(x-1)(x-2)^2(5x-7),y''=2(x-2)(10x^2-28x+19)$，当$x=1,x=2,x=\dfrac{7}{5}=1.4$时，$y'=0$；当$x=2,x=\dfrac{14\pm\sqrt{6}}{10}$时，$y''=0$.

(iii) 列表讨论如下：

x	$(-\infty,1)$	1	$\left(1,-\dfrac{14-\sqrt{6}}{10}\right)$	$\dfrac{14-\sqrt{6}}{10}$	$\left(-\dfrac{14-\sqrt{6}}{,}1.4\right)$	1.4
y'	$+$	0	-	-	-	0
y''	-	-	-	0	$+$	$+$
y	上凸↗	极大值 0	上凸↘	-0.0154	下凸↘	极小值 -0.0346

x	$\left(1.4,\dfrac{14+\sqrt{6}}{10}\right)$	$\dfrac{14+\sqrt{6}}{10}$	$\left(\dfrac{14+\sqrt{6}}{,}2\right)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$+$
y''	$+$	0	-	0	$+$
y	下凸↗	-0.0186	上凸↗	0	下凸↗



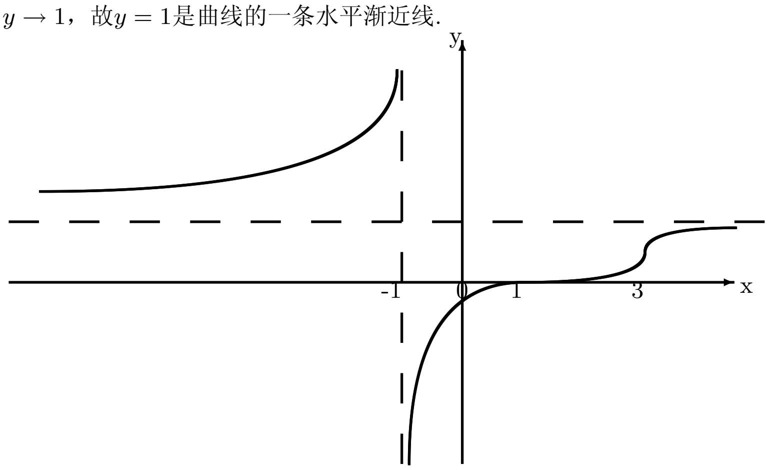
(8) (i) 定义域$(-\infty,-1)\bigcup(-1,+\infty)$.

(ii) $y'=\dfrac{6(x-1)^2}{(x+1)^4}, y''=-\dfrac{12(x-1)(x-3)}{(x+1)^5}$，当$x=1$时，$y'=0$；当$x=1,x=3$时，$y''=0$；当$x=-1$时，$y',y''$均不存在.

(iii) 列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	不存在	$+$	0	$+$	$+$	$+$
y''	-	不存在	-	0	$+$	0	-
y	上凸↗	无定义	上凸↗	0	下凸↗	$\frac{1}{8}$	上凸↗

(iv) 当$x\to-1^-$时，$y\to+\infty$，故$x=-1$是曲线的一条垂直渐近线；
当$x\to\infty$时，$y\to1$，故$y=1$是曲线的一条水平渐近线.



(9) (i) 定义域$(-\infty,+\infty)$.

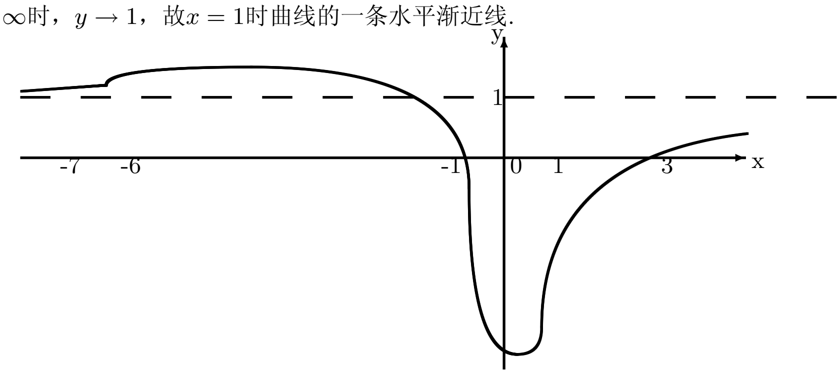
(ii) $y' = \dfrac{2(x^2+4x-1)}{(x^2+1)^2}, y'' = -\dfrac{4(x^3+6x^2-3x-2)}{(x^2+1)^3}$，当$x=-2\pm\sqrt{5}$时，$y'=0$；$y''=0$的根为$x_1,x_2,x_3$，其中$x_1\in(-7,-6), x_2\in(-1,0), x_3\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

(iii) 列表讨论如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,-2-\sqrt{5})$	$-2-\sqrt{5}$	$(-2-\sqrt{5},x_2)$	x_2
y'	+	+	+	0	-	-
y''	+	0	-	-	-	0
y	下凸↗	拐点	上凸↗	极大值 $\sqrt{5}-1$	上凸↘	拐点

x	$(x_2,-2+\sqrt{5})$	$-2+\sqrt{5}$	$(-2+\sqrt{5},x_3)$	x_3	$(x_3,+\infty)$
y'	-	0	+	+	+
y''	+	+	+	0	-
y	下凸↘	极小值 $-\sqrt{5}-1$	下凸↗	拐点	上凸↗

(iv) 当$x\to\infty$时，$y\to1$，故$x=1$时曲线的一条水平渐近线.

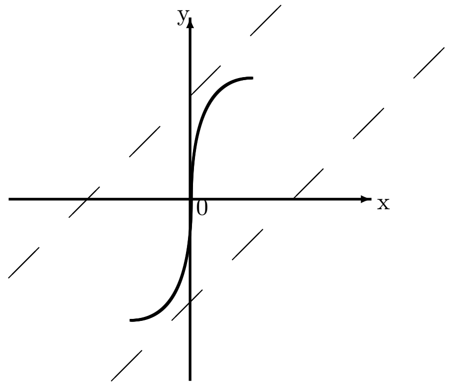


(10) (i) 定义域$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，曲线关于原点对称且当$x=0$时，$y=0$.

(ii) $y'=1+\dfrac{1}{1+x^2}>0$，故曲线单调上升，无极值点.

$y''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，当$x=0$时，$y''=0$且当$x>0$时，$y''<0$；当$x<0$时，$y''>0$，则$(0,0)$为拐点.

(iii) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1, b_1=\lim\limits_{x\to-\infty}(y-kx)=-\dfrac{\pi}{2}, b_2=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-kx)=\dfrac{\pi}{2}$，故曲线有两条斜渐近线：$y=x+\dfrac{\pi}{2}, y=x-\dfrac{\pi}{2}$.



30. 试作下列函数的图形：$y=\begin{cases}\dfrac{9x+x^4}{x-x^3}, & x\neq0\\ 9, & x=0\end{cases}$

解:

(1) 定义域$(-\infty,-1)\bigcup(-1,1)\bigcup(1,+\infty)$.

(2) $y'=\begin{cases}\dfrac{-x^4+3x^2+18x}{(1-x^2)^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $,y''=\begin{cases}-\dfrac{2(x^3+27x^2+3x+9}{(x^2-1)^2}, & x\neq0\\ 18, & x=0\end{cases}$

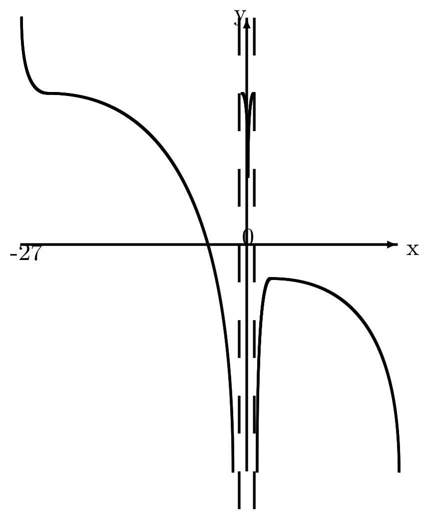
，当$x=0,x=3$时，$y'=0$；$y''=0$的根为x_1，其中$x_1\in(-27,-26)$；当$x=\pm1$时，y',y''均不存在.

(3) 列表讨论如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,-1)$	-1	$(-1,0)$	0
y'	-	-	-	不存在	-	0
y''	+	0	-	无定义	-	-
y	下凸↘	拐点	上凸↘	无定义	上凸↘	极小值 9

x	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	不存在	+	0	-
y''	-	不存在	-	-	-
y	上凸↗	无定义	上凸↗	极大值 $-\frac{9}{2}$	上凸↘

(4) 当$x\to\pm1$时，$y\to\infty$，故$x=\pm1$是曲线的垂直渐近线.



§4. 平面曲线的曲率

1. 求曲线$y=4x-x^2$的曲率以及在点$(2,4)$的曲率半径.

解：因$y=4x-x^2$，故$y'=4-2x, y''=-2$，则曲率$K=\left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\dfrac{2}{[1+4(2-x)^2]^{\frac{3}{2}}}$，于是曲率半径$\rho=\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{2}[1+4(x-2)^2]^{\frac{3}{2}}$，从而在点$(2,4)$的曲率半径$\rho=\dfrac{1}{2}$.

2. 求下列曲线的曲率与曲率半径：

(1) 悬链线$y=a\cosh\dfrac{x}{a}(a>0)$

(2) 抛物线$y^2=2px(p>0)$

(3) 旋轮线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0)$

(4) 心脏线$\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$

(5) 双纽线$\rho^2=2a^2\cos 2\theta(a>0)$

(6) 对数螺线$\rho=ae^{\lambda\theta}(\lambda>0)$

解：

(1) 因$y=a\cosh\dfrac{x}{a}$，故$y'=\sinh\dfrac{x}{a}, y''=\dfrac{1}{a}\cosh\dfrac{x}{a}$，则曲率$K=\left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\dfrac{1}{a\cosh^2\dfrac{x}{a}}$，于是曲率半径$\rho=\dfrac{1}{K}a\cosh^2\dfrac{x}{a}$.

(2) 因$y^2=2px$，则$2yy'=2p$即$y'=\dfrac{p}{y}$，故$y''=-\dfrac{p}{y^2}y'=-\dfrac{p^2}{y^3}$，则曲率$K=\left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\dfrac{p^2}{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{p^2}{(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{p\left(1+\dfrac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}}$，于是曲率半径$\rho=\dfrac{1}{K}=p\left(1+\dfrac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\text{或}\dfrac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}\right)$.

(3) 因$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$，故$x'=a(1-\cos t), x''=a\sin t; y'=a\sin t y''=a\cos t$，则曲率$K=\left|\dfrac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\dfrac{1}{4a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|}$，于是曲率半径$\rho=\dfrac{1}{K}=4a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|(=2\sqrt{2ay})$.

(4) 因$\rho=a(1+\cos\theta)$，故$\rho'=-a\sin\theta, \rho''=-a\cos\theta$，则曲率$K=\left|\dfrac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\dfrac{3}{2\sqrt{2a\rho}}$，于是曲率半径$R=\dfrac{2\sqrt{2a\rho}}{3}$.

(5) 因$\rho^2=2a^2\cos 2\theta$，则$2\rho\rho'=-4a^2\sin 2\theta$，故$\rho'=\dfrac{-2a^2\sin 2\theta}{\rho}, \rho''=-\dfrac{4a^4+\rho^4}{\rho^3}$，则曲率$K=\left|\dfrac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\dfrac{3\rho}{2a^2}$，于是曲率半径$R=\dfrac{2a^2}{3\rho}$.

(6) 因$\rho=ae^{\lambda\theta}$，故$\rho'=\lambda ae^{\lambda\theta}=\lambda\rho, \rho''=a\lambda^2e^{\lambda\theta}=\lambda^2\rho$，则曲率$K=\left|\dfrac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\dfrac{1}{|\rho|(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}$，于是曲率半径$R=|\rho|\sqrt{1+\lambda^2}$.

3. 求曲线$y=2(x-1)^2$的最小曲率半径.

解：因$y=2(x-1)^2$，故$y'=4(x-1), y''=4$，则曲率半径$R=\dfrac{1}{K}=\left|\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|=\dfrac{[1+16(x-1)^2]^{\frac{3}{2}}}{4}$
要使R最小，则必有$[1+16(x-1)^2]^{\frac{3}{2}}$最小，即当$x=1$时，$R_{\min}=\dfrac{1}{4}$.

4. 一飞机沿抛物线路径$y=\dfrac{x^2}{4000}$（单位为米）作俯冲飞行，在坐标原点O的速度$v=140$米/秒，飞行员体重$G=70$公斤.求此时座椅对飞行员的反力.

解：由物理学知识知，作匀速圆周运动的物体所受的向心力为$F=\dfrac{mv^2}{R}$，其中m为物体的质量，v为它的速

度，R为圆的半径.

所求座椅对飞行员的反力大小应为$F = Gg + \frac{mv^2}{R}$，其方向应指向圆心.

据题意，先求曲率半径，$y' = \frac{x}{2000}, y'' = \frac{1}{2000}$，则曲率半径$R = \frac{1}{K} = \left|\frac{(2000^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{2000^2}\right|$，于是在坐标原点$O$的$R = 2000$（米），又在坐标原点$O$的速度$v = 140$米/秒，从而$F = 1372(N)$.

5. 一起车重量是P，以等速v驶过拱桥（图5-32），桥面ACB是一抛物线，其尺寸如图示.求汽车过C点时对桥面的压力.

解: 以O为原点，AB为x轴，CO为y轴建立坐标系，则抛物线方程$y = -\frac{4\delta}{l^2}x^2 + \delta$

由物理学知道，汽车过C点时对桥面的压力为$F = \frac{mv^2}{R}\cos\theta + mg$

据题意，先求曲率半径，$y' = -\frac{8\delta}{l^2}x, y'' = -\frac{8\delta}{l^2}$，则曲率半径$R = \frac{1}{K} = \left|\frac{(l^2 + 8\delta x)^{\frac{3}{2}}}{8l\delta}\right|$，于是在点$C$的$R = \frac{l^2}{8\delta}$，又在点$C$的$\theta = \pi$，从而$F = Pg + \frac{Pv^2}{R}\cos\theta = \frac{gl^2 - 8\delta v^2}{l^2}P$.

§5. 待定型

1. 利用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{\sin bx}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\dfrac{1}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^b}{e^{ax}}$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

(6) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$

(10) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\ln x}$

(11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}(a>0)$

(12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

(13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\cot x}$

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^c x}{x^b}(b,c>0)$

(15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(16) $\lim\limits_{x\to0}x^b\ln^c x(b,c>0)$

(17) $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$

(18) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$

(19) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

(20) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$

解：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\sec^2 ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin x^2}{4x^3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)\cos\dfrac{1}{x}}=1$

(4) 当b为正整数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^b}{e^{ax}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx^{b-1}}{ae^{ax}}=\cdots=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b!}{a^b e^{ax}}=0$

当b不为正整数，则$[b]\leqslant b<[b]+1$，于是$\dfrac{|x|^{[b]}}{e^{ax}}\leqslant\dfrac{|x|^b}{e^{ax}}<\dfrac{|x|^{[b]+1}}{e^{ax}}(|x|>1)$，而左、右两端当$x\to\infty$时，上面已证明它们的极限为0，因此，中间的极限也为0.

从而，对任意a,b，均有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^b}{e^{ax}}=0$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x+1+1}=\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi-x}{\cot\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-1}{-\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{x}{2}}=2$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-a\tan ax}{-b\tan bx}=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\tan bx}=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sec^2 ax}{b\sec^2 bx}=\dfrac{a^2}{b^2}(b\neq 0)$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin(\sin x)\cos x+\sin x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos(\sin x)\cos^2 x+\sin(\sin x)\sin x+\cos x}{12x^2}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)\cos^3 x+\dfrac{3}{2}\cos(\sin x)\sin 2x+\sin(\sin x)\cos x-\sin x}{24x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\cos(\sin x)\cos^4 x-3\sin(\sin x)\sin 2x\cos x+3\cos(\sin x)\cos 2x}{24}+\dfrac{\cos(\sin x)\cos^2 x-\sin(\sin x)\sin x-\cos x}{24}\right]=\dfrac{1}{6}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}(a\neq 0,b\neq 0)$

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}=1$

(11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x\ln a-ax^{a-1}}{1}=a^a(\ln a-1)$

(12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{-2\cos x}{-3\sin 3x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\csc^2 x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=0$

(14) 令$y=\ln x$,则$x=e^y$，于是$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^c x}{x^b}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^c}{e^{by}}=0$(由(4)得)

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-1-\ln(1+x)}{2x}=-\dfrac{e}{2}$

(16) 令$y=\ln x$,则$x=e^y$，于是$\lim\limits_{x\to 0}x^b\ln^c x=\lim\limits_{y\to-\infty}e^{by}y^c=\lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{y^c}{e^{-by}}=0$(由(4)得)

(17) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln x}$，而$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0$，于是$\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=1$

(18) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}}$，而$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=-1$，于是$\lim\limits_{x\to 1}x^{\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{1}{e}$

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2e^x+xe^x}=\dfrac{1}{2}$

(20) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)}$

令$y=\dfrac{1}{x}$，则$\lim\limits_{x\to+0}x\ln(\ln\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln y)}{y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y\ln y}=0$，从而$\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x=1$

2. 试说明下列函数不能用洛必达法则求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin 2x}{(2x+\sin x)e^{\sin x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)\sin x}{\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)}$

解：

(1) 因$\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$的分子、分母同时对$x$求导数，得$\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$，而$\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$当$x\to0$时极限不存在，因此洛必达法则不能适用，但是原极限是存在的。事实上，有$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\sin\dfrac{1}{x}=0$

(2) 因$\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$的分子、分母同时对$x$求导数，得$\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$，当$x\to\infty$时此函数极限不存在，因此洛必达法则不能适用，但是原极限是存在的。事实上，有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}=1$

(3) 对于不同的序列：$x_n'=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$及$x_n''=2n\pi(n=1,2,\cdots)$，当$n\to\infty$时，则取不同的极限$\dfrac{1}{e}$及1，从而原极限不存在.

用洛必达法则求解，有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin 2x}{(2x+\sin x)e^{\sin x}}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+2\cos 2x}{(2+\cos x+2x\cos x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\cos^2 x}{[2+\cos x(1+2x+\sin x)]e^{\sin x}}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\left[\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos x}(1+2x+\sin x)\right]e^{\sin x}}$，因$e^{\sin x}\geqslant e^{-1},1+2x+\sin x\geqslant 2x$，则$\left|[\dfrac{2}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos x}(1+2x+\sin x)]e^{\sin x}\right|\geqslant$

$e^{-1}(-2+2|x|)\to+\infty(x\to\infty)$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin 2x}{(2x+\sin x)e^{\sin x}}=0.$

(4) 直接求极限可得$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)\sin x}{\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)}=0$，但此极限不符合用洛必达法则求极限的条件.

§6. 方程的近似解

1. 求方程$x^3-x-4=0$的正根，使误差不超过0.0001.
解：设$f(x)=x^3-x-4$，在$[1,2]$间，$f(1)=-4<0,f(2)=2>0$即$f(1)f(2)<0$且$f'(x)=3x^2-1>0,f''(x)=6x>0$
因$f(2)f''(2)=24>0$，则从点$(2,f(2))$即点$(2,2)$开始作切线，取$x_0=2$作初值.
于是$x_1=2-\dfrac{f(2)}{f'(2)}\approx 1.81818, x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}\approx 1.79663, x_3=x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}\approx 1.79632, x_4=x_3-\dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}\approx 1.79632$
x_3与x_4的前5位数相同，这表示已接近于根的精确值。为了说明精确度，用1.7963试一下，有$f(1.7963)\approx -0.00019<0$，而$f(1.79632)\approx 0.00002>0$，故若取1.7963作为根的近似值，则误差不超过0.0001.

2. 求方程$x^3-x-4=0$的正根，使误差不超过0.0001.
解：设$f(x)=x^3-5x^2+6x-1$，$f(0)=-1<0,f(1)=1>0,f'(x)=3x^2-10x+6$，此时$f'(0)=6>0,f'(1)=-1<0$，故在$(0,1)$内$f'(x)$有零点$\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$，此时$f'(x)$在$\left(0,\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}\right)$内为正；$f'(x)$在$\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{3},1\right)$内为负.
现分别考虑$f(x)$在$(0,0.7)$与$(0.7,1)$中的根
因$f(0.7)=1.093>0$，故在$(0,0.7)$中必有实根ξ，但在$(0.7,1)$中无根.
现求$\xi,f''(x)=6x-10<0(\forall x\in(0,0.7))$，因$f(0)=-1,f''(0)=-10$，故取$x_0=0$作初值.
于是$x_1=0-\dfrac{f(0)}{f'(0)}\approx 0.16667, x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}\approx 0.19706, x_3=x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}\approx 0.19806, x_4=x_3-\dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}\approx 0.19806$
x_3与x_4的前5位数相同，这表示已接近于根ξ的精确值。为了说明精确度，用0.1980试一下，有$f(0.1980)\approx -0.00026<0$，而$f(0.1981)\approx 0.01397>0$，故若取0.1980作为根的近似值，则误差不超过0.0001.