

Министерство образования и науки РФ
ФГБПОУ ВПО Тульский государственный университет
КАФЕДРА АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Лабораторная работа № 1
по курсу «Вычислительный практикум»

Вариант № 4

Выполнил: студент группы 220601

_____ Белым А.А.
(подпись)

Проверил: к. ф.-м. н., доцент

_____ Карцева А.С.
(подпись)

Тула 2011

Цель работы

Цель работы заключается в том, чтобы изучить методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и написать программу, реализующий один из таких методов.

Задание на работу

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса-Зайделя.

Обеспечить ввод с клавиатуры и из файла (по выбору пользователя), а также сохранение системы вместе с результатом в файл.

Обеспечить подсчет количества операций (сложения, вычитания, умножения и деления по отдельности и в сумме), для итерационных методов – дополнительно – количество потребовавшихся итераций и вывод на экран соответствующей статистики.

Осуществлять контроль сходимости и выполнять проверку на существование и единственность решения.

This image shows a single page of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

[illegible]

Схема алгоритма

На рисунке 1 представлена схема обобщенного алгоритма решения системы линейных алгебраических уравнений.

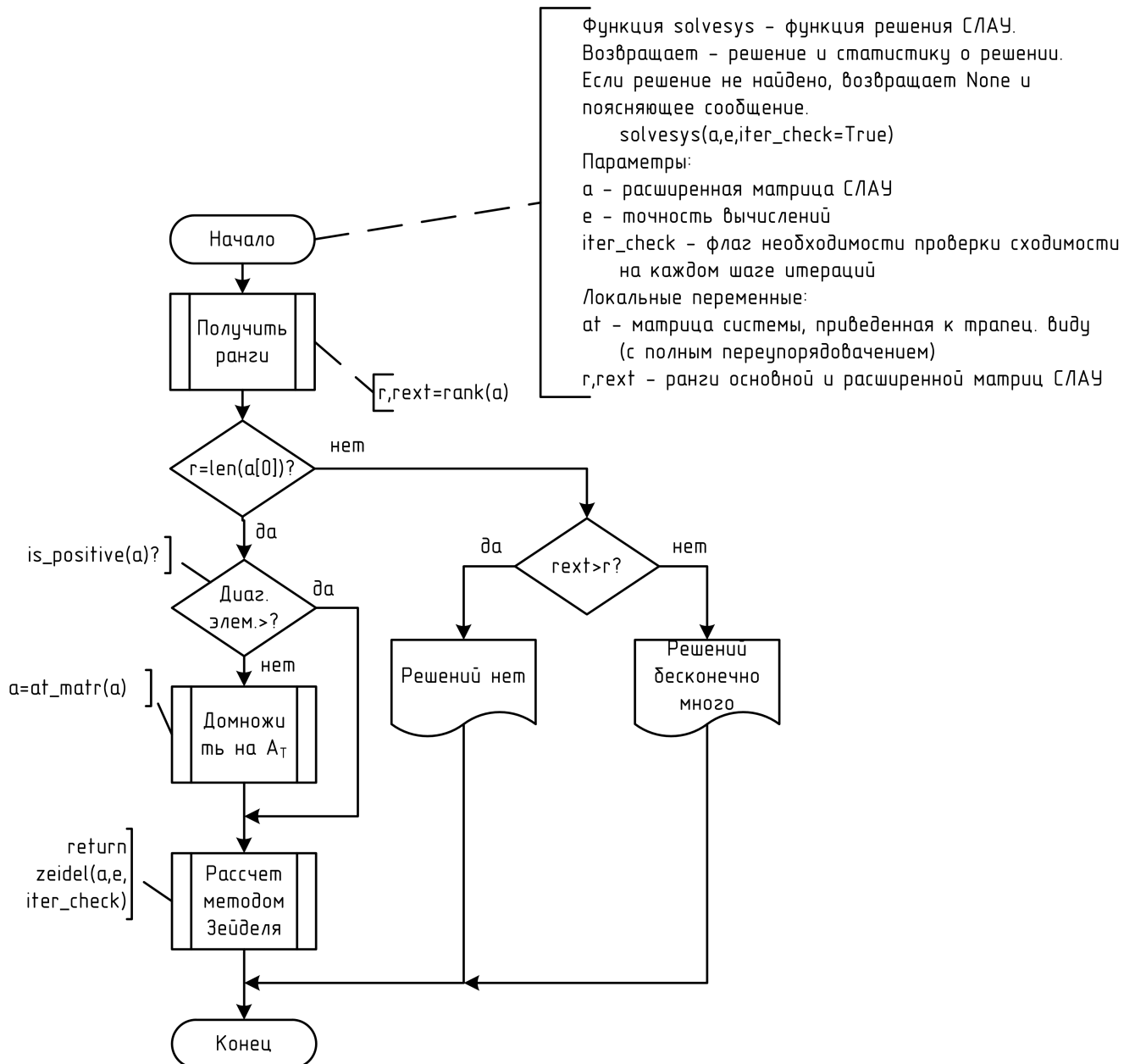


Рисунок 1 - Схема обобщенного алгоритма решения СЛАУ

На рисунке 2 представлена схема алгоритма расчета рангов основной и расширенной матрицы СЛАУ.

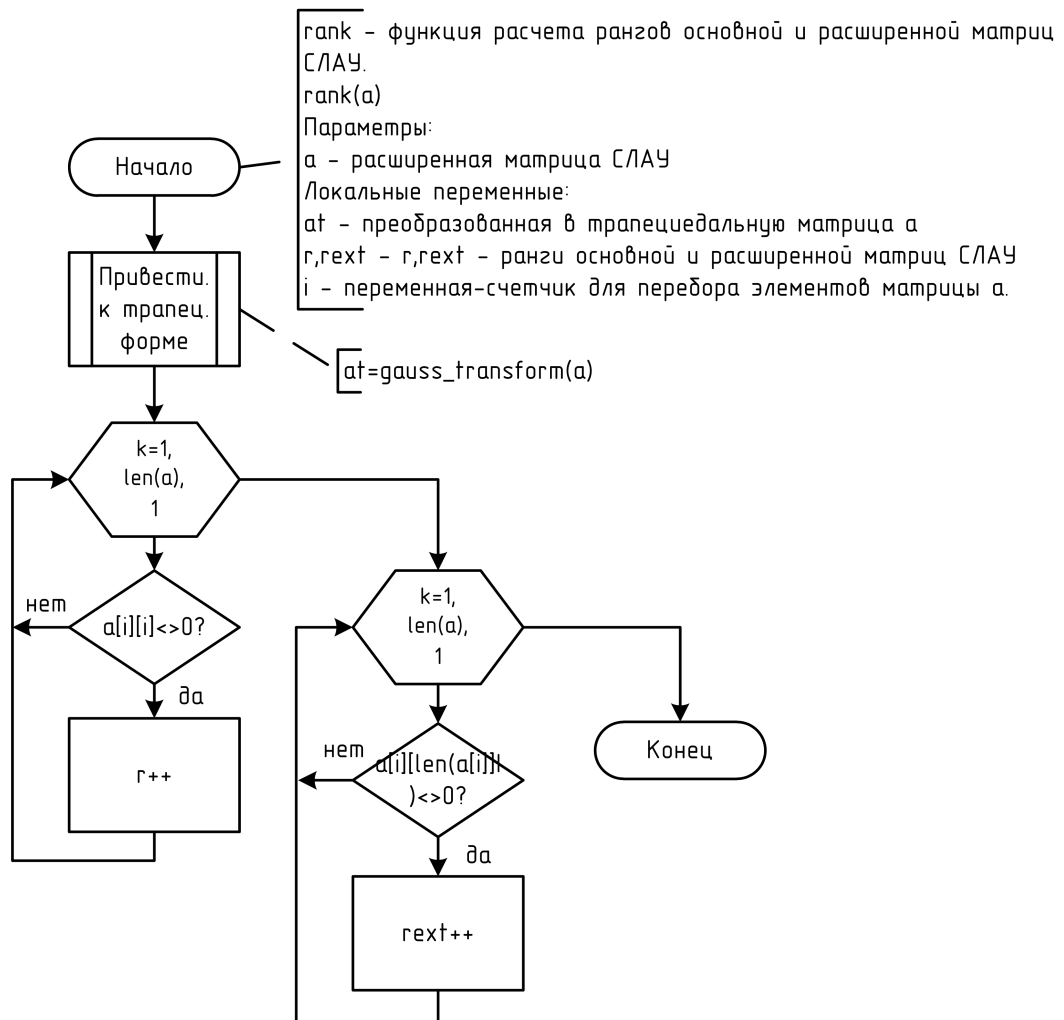


Рисунок 2 - Схема алгоритма расчета рангов

На рисунке 3 представлена схема алгоритма преобразования матрицы СЛАУ к верхнетрапециевидальному виду с полным переупорядочиванием.

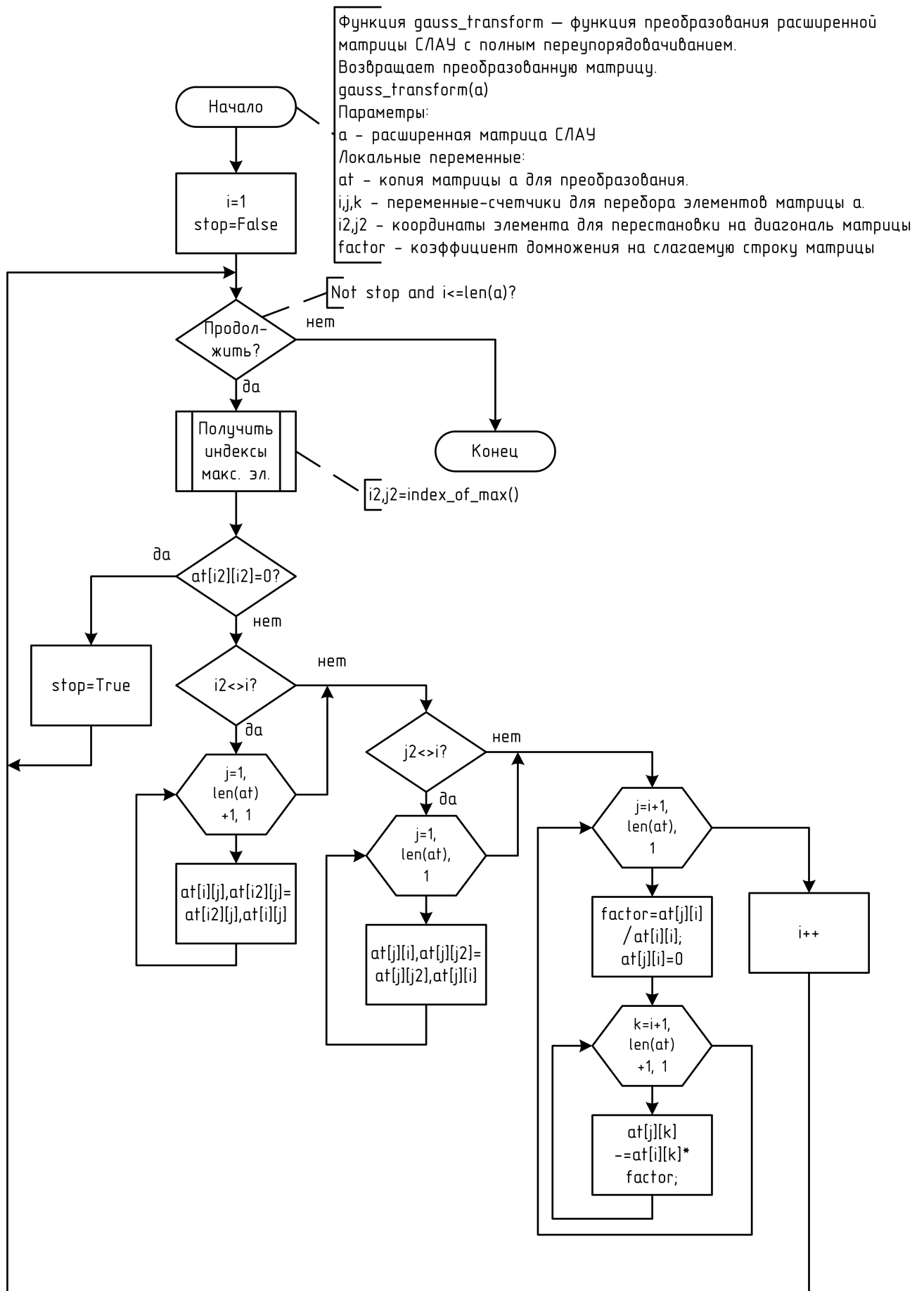


Рисунок 3 - Схема алгоритма преобразования матрицы СЛАУ

На рисунке 4 представлена схема алгоритма нахождения индексов максимального элемента в подматрице (i, i, n, n) основной матрицы СЛАУ $A_{N \times N}$.

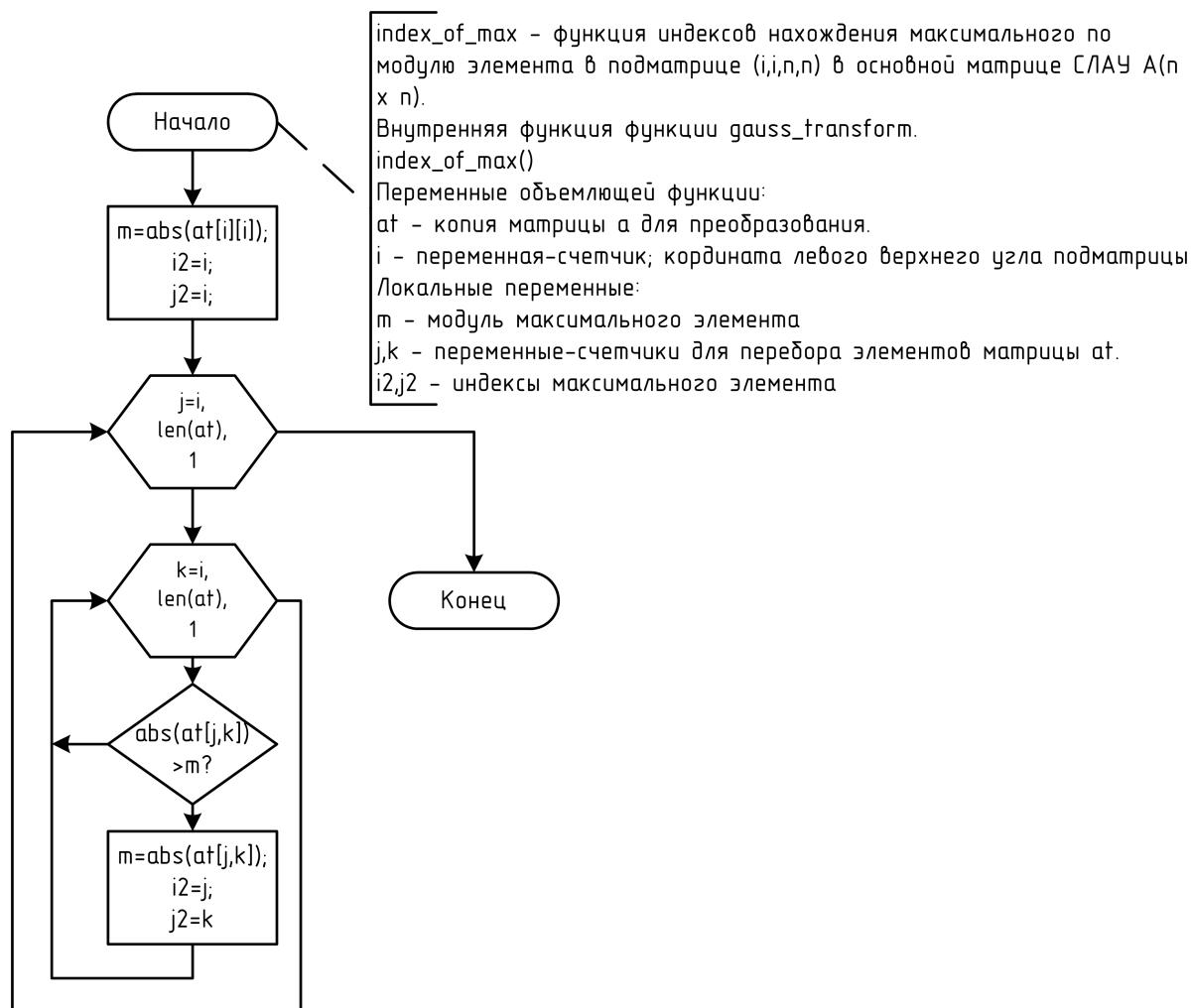


Рисунок 4 - Схема алгоритма нахождения индексов максимального элемента

На рисунке 5 представлена схема алгоритма проверки матрицы на диагональное преобладание.

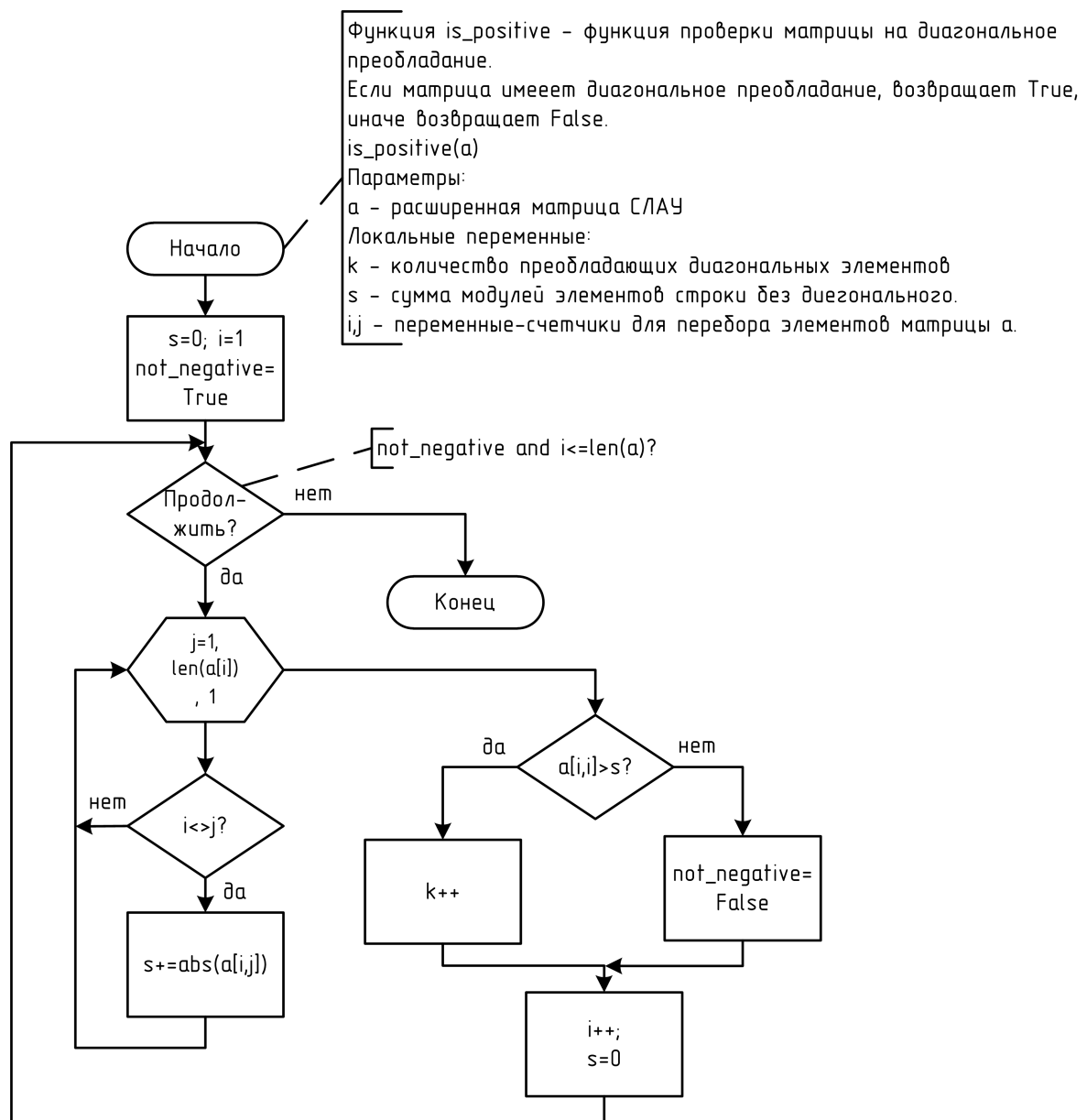


Рисунок 5 - Схема алгоритма проверки матрицы на диагональное преобладание

На рисунке 6 представлена схема алгоритма домножения расширенной матрицы СЛАУ на транспонированную основную.

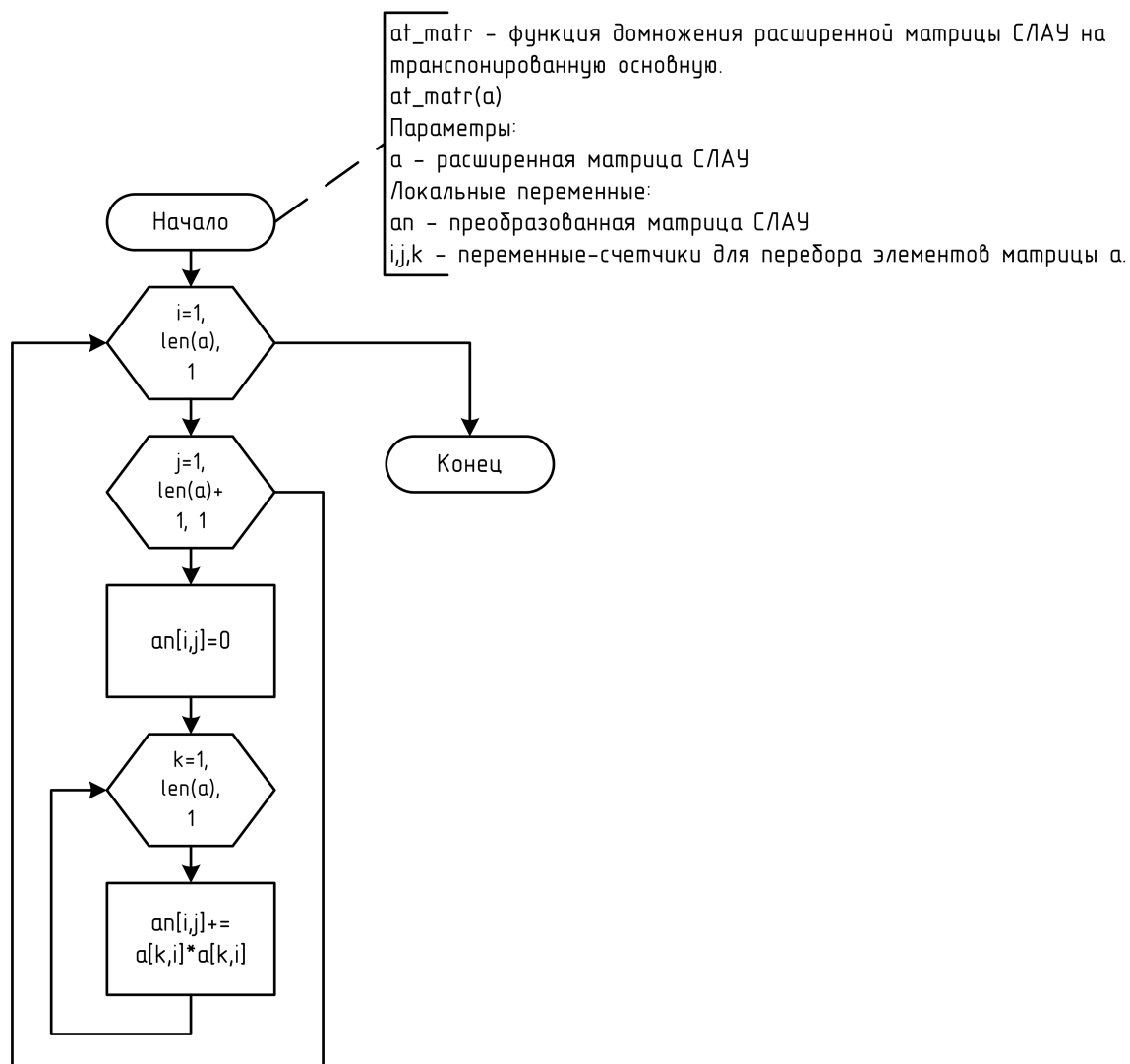


Рисунок 6 - Схема алгоритма домножения расширенной матрицы СЛАУ

На рисунке 7 представлена схема алгоритма решения СЛАУ по методу Гаусса-Зейделя.

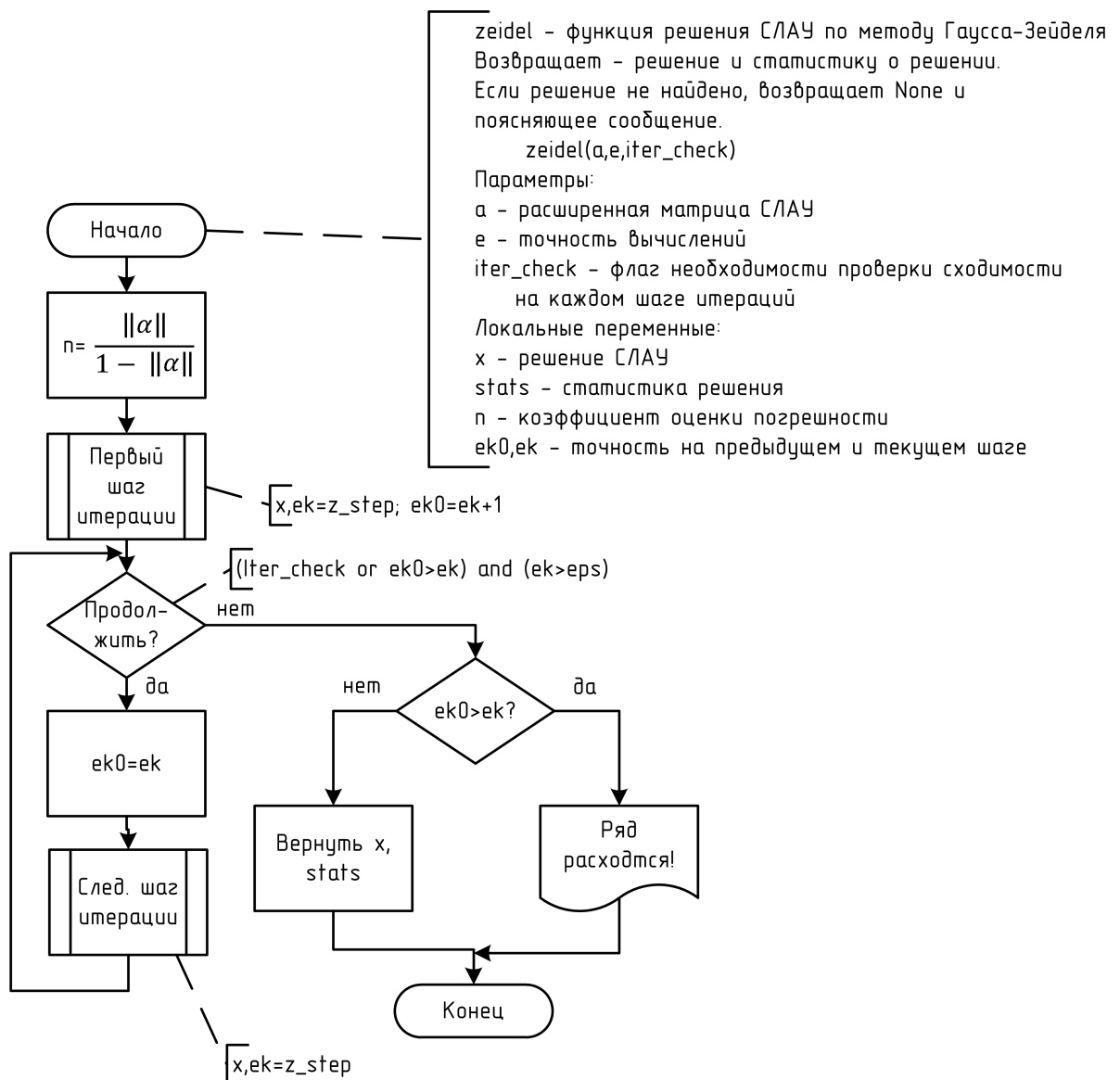


Рисунок 7 - Схема алгоритма решения СЛАУ по методу Гаусса-Зейделя

На рисунке 8 представлена схема алгоритма шага итерации по методу Гаусса-Зейделя.

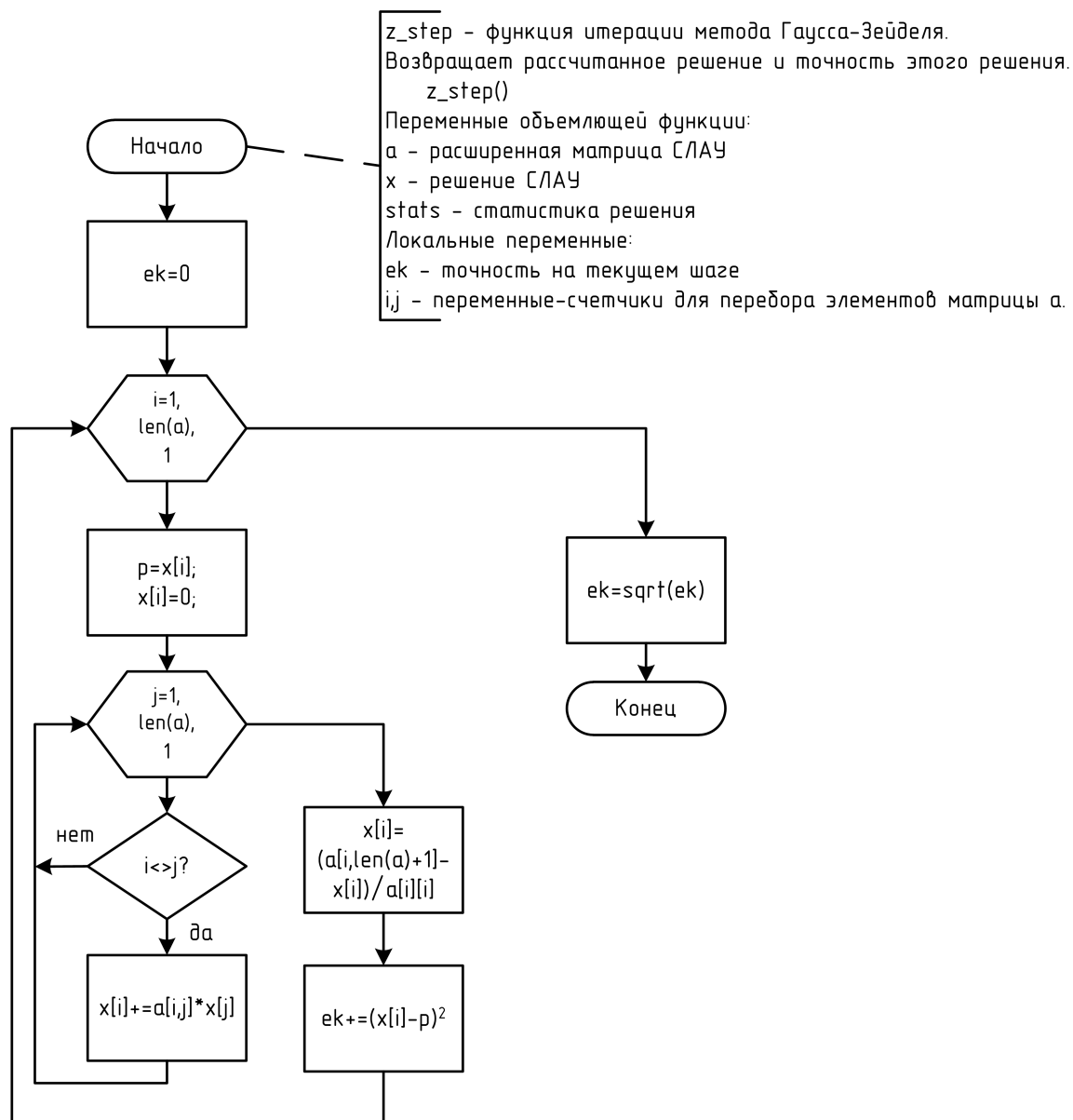


Рисунок 8 - Схема алгоритма шага итерации по методу Гаусса-Зейделя

Инструкция пользователя

Программа позволяет решить систему линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами.

Приступая к работе, передайте программе расширенную матрицу системы, элементы которой разделяются пробелами. Ввод новой строки начинается с нажатия кнопки <Enter>. Матрица может быть не квадратной, но все строки должны быть одинаковой длины. Вместо отсутствующих членов уравнения пишется 0. После ввода матрицы передайте программе необходимую точность вычислений. Далее программа спросит о необходимости контроля сходимости метода на каждом шаге вычислений. Проверка сходимости позволяет предотвратить зависание программы, но в некоторых случаях является слишком строгим. Рекомендуется в первый раз запускать программу с включенным контролем сходимости, в случае отказа попробовать его отключить.

После ввода данных программа приступит к вычислениям. Программа определяет, если система не имеет решений или имеет их бесконечное множество, и выводит соответствующее сообщение на экран. Если система имеет единственное решение, программа выведет его в виде столбца $x_1, x_2 \dots x_n$. Также программа выведет информацию о количестве итераций и числе использованных арифметических операций. По желанию, всю вышеперечисленную информацию программа может записать в файл.

Инструкция программиста

При разработке программы вычисления значения функции были написаны следующие процедуры и функции:

1. Функция `solvesys` - функция решения СЛАУ. Возвращает - решение и статистику о решении. Если решение не найдено, возвращает `None` и поясняющее сообщение.

```
solvesys(a,e,iter_check=True)
```

Параметры функции представлены в таблице 1 :

Таблица 1 - Параметры функции решения СЛАУ

имя	тип	предназначение
a	список	расширенная матрица СЛАУ
e	веществ.	точность вычислений
iter_check	булев.	флаг необходимости проверки сходимости на каждом шаге итераций

Локальные переменные функции представлены в таблице 2 :

Таблица 2 - Локальные переменные функции решения СЛАУ

имя	тип	предназначение
at	список	матрица системы, приведенная к трапец. виду (с полным переупорядочиванием)
r, rext	целое	ранги основной и расширенной матриц СЛАУ

2. Функция `gauss_transform` - функция преобразования расширенной матрицы СЛАУ с полным переупорядочиванием. Возвращает преобразованную матрицу.

`gauss_transform(a)`

Параметры функции представлены в таблице 3 :

Таблица 3 - Параметры функции преобразования расширенной матрицы СЛАУ

имя	тип	предназначение
a	список	расширенная матрица СЛАУ

Локальные переменные функции представлены в таблице 4 :

Таблица 4 - Локальные переменные функции преобразования расширенной матрицы СЛАУ

имя	тип	предназначение
at	список	копия матрицы a для преобразования.
i,j,k	целое	переменные-счетчики для перебора элементов матрицы a.
i2,j2	целое	координаты элемента для перестановки на диагональ матрицы
factor	веществ.	коэффициент домножения на слагаемую строку матрицы

3. index_of_max - функция нахождения индексов максимального по модулю элемента в подматрице (i,i,n,n) в основной матрице СЛАУ A(n x n).

Внутренняя функция функции gauss_transform.

index_of_max()

Переменные объемлющей функции функции представлены в таблице 5 :

Таблица 5 - Переменные объемлющей функции функции нахождения индексов максимального по модулю элемента

имя	тип	предназначение
at	список	копия матрицы a для преобразования.
i	целое	переменная-счетчик; координата левого верхнего угла подматрицы

Локальные переменные функции представлены в таблице 6 :

Таблица 6 - Локальные переменные функции нахождения индексов максимального по модулю элемента

имя	тип	предназначение
m	веществ.	модуль максимального элемента
j,k	целое	переменные-счетчики для перебора элементов матрицы at.
i2,j2	целое	индексы максимального элемента

4. Функция is_positive - функции проверки матрицы на диагональное преобладание. Если матрица имеет диагональное преобладание, возвращает True, иначе возвращает False.

is_positive(a)

Параметры функции представлены в таблице 7 :

Таблица 7 - Параметры функции проверки матрицы на диагональное преобладание

имя	тип	предназначение
a	список	расширенная матрица СЛАУ

Локальные переменные функции представлены в таблице 8 :

Таблица 8 - Локальные переменные функции проверки матрицы на диагональное преобладание

имя	тип	предназначение
k	целое	количество преобладающих диагональных элементов
s	веществ.	сумма модулей элементов строки без диагонального.
i,j	целое	переменные-счетчики для перебора элементов матрицы a.

5. rank - функция расчета рангов основной и расширенной матриц СЛАУ.

rank(a)

Параметры функции представлены в таблице 9 :

Таблица 9 - Параметры функции расчета рангов основной и расширенной матриц

имя	тип	предназначение
a	список	расширенная матрица СЛАУ

Локальные переменные функции представлены в таблице 10 :

Таблица 10 - Локальные переменные функции расчета рангов основной и расширенной матриц

имя	тип	предназначение
at	список	преобразованная в трапециевидальную матрица a
r, rext	целое	ранги основной и расширенной матриц СЛАУ
i	целое	переменная-счетчик для перебора элементов матрицы a.

6. `at_matr` - функция домножения расширенной матрицы СЛАУ на транспонированную основную.

`at_matr(a)`

Параметры функции представлены в таблице 11 :

Таблица 11 - Параметры функции домножения расширенной матрицы на транспонированную

имя	тип	предназначение
a	список	расширенная матрица СЛАУ

Локальные переменные функции представлены в таблице 12 :

Таблица 12 - Локальные переменные функции домножения расширенной матрицы на транспонированную

имя	тип	предназначение
an	список	преобразованная матрица СЛАУ
i,j,k	целое	переменные-счетчики.

7. `norm` - функция расчета нормы матрицы α для методов простых итераций и Гаусса-Зейделя.

`norm(a)`

Параметры функции представлены в таблице 13 :

Таблица 13 - Параметры функции расчета нормы матрицы

имя	тип	предназначение
a	список	расширенная матрица СЛАУ

Локальные переменные функции представлены в таблице 14 :

Таблица 14 - Локальные переменные функции расчета нормы матрицы

имя	тип	предназначение
s	веществ.	сумма квадратов строки матрицы α
line	список	строка матрицы alpha
a_ij	веществ.	текущий элемент alpha
i,j	целое	переменные-счетчики.

8. zeidel - функция решения СЛАУ по методу Гаусса-Зейделя Возвращает - решение и статистику о решении. Если решение не найдено, возвращает None и поясняющее сообщение.

zeidel(a,e,iter_check)

Параметры функции представлены в таблице 15 :

Таблица 15 - Параметры функции решения СЛАУ по методу Гаусса-Зейделя

имя	тип	предназначение
a	список	расширенная матрица СЛАУ
e	веществ.	точность вычислений
iter_check	булев.	флаг необходимости проверки сходимости на каждом шаге итераций

Локальные переменные функции представлены в таблице 16 :

Таблица 16 - Локальные переменные функции решения СЛАУ по методу Гаусса-Зейделя

имя	тип	предназначение
x	список	решение СЛАУ
stats	словарь	статистика решения
n	веществ.	коэффициент оценки погрешности
ek0,ek	веществ.	точность на предыдущем и текущем шаге

9. z_step - функция итерации метода Гаусса-Зейделя. Внутренняя функция функции zeidel. Возвращает рассчитанное решение и точность этого решения.

z_step()

Переменные объемлющей функции(zeidel) функции представлены в таблице 17 :

Таблица 17 - Переменные объемлющей функции функции итерации метода Гаусса-Зейделя

имя	тип	предназначение
a	список	расширенная матрица СЛАУ
x	список	решение СЛАУ
stats	словарь	статистика решения

Локальные переменные функции представлены в таблице 18 :

Таблица 18 - Локальные переменные функции итерации метода Гаусса-Зейделя

имя	тип	предназначение
ek	веществ.	точность на текущем шаге
i,j	целое	переменные-счетчики для перебора элементов матрицы a.

Текст программы

Ниже представлен текст программы на языке Python 3.2, реализующей метод решения СЛАУ Гаусс-Зейделя.

Тестовый пример

Ниже на рисунке представлен пример работы программы для системы, имеющей бесконечно много решений.

```
[wolf2105@archlinux Mat1]$ ./mat.py
Заполните матрицу системы.
1 - ввести из файла,
2 - ввести с клавиатуры,
иначе - выход.
ответ: 2
Введите расширенную матрицу системы:
(окончание ввода - CTRL+D)
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
Введите точность вычислений: 0.0001
Проверять сходимость на каждом шаге?([yes]/no): no
У системы бесконечно много решений!
```

Рисунок 9 - Пример работы программы для несовместной системы

На рисунке представлен пример работы программы для системы, имеющей единственное решение.

```
Заполните матрицу системы.
1 - Ввести из файла,
2 - Ввести с клавиатуры,
иначе - Выход.
ответ: 1
Введите имя файла: matrix.txt
Введите точность вычислений: 0.0001
Проверять сходимость на каждом шаге?([yes]/no): no
Выведите результаты работы.
1 - Вывести в файл.
2 - Вывести на экран.
иначе - Выход.
ответ: 2
Расширенная матрица системы:
1.0 -1.0 1.0 2.0
0.0 1.0 -1.0 -1.0
0.0 1.0 -3.0 -5.0
Точность решения: 0.0001
Решение:
x[1]=0.9999195966152277
x[2]=0.9998877232451354
x[3]=1.9999562745100408
Статистика:
Число умножений: 396
Число вычитаний: 198
Число делений: 198
Число итераций: 198
Число сложений: 396
```

Рисунок 10 - Пример работы программы для совместной системы

Вывод

В этой лабораторной работе я изучил различные методы решения СЛАУ. Такие системы часто встречаются в различных областях науки и хозяйства - математике, физике, химии, экономике, однако решение систем вручную достаточно сложная и утомительная операция. Поэтому необходимо знать численные методы решения СЛАУ, и уметь реализовать их на практике.